

**Propuesta didáctica para la enseñanza de la geometría proyectiva en educación
media: un enfoque basado en las fases del modelo de Van Hiele**

Blanca Cecilia Aldana Montenegro

Jhosset Dammar Gheovany Forero Olmos

Universidad Pedagógica Nacional de Colombia

Facultad de Ciencia y Tecnología

Licenciatura en matemáticas

Bogotá D.C.

2026

**Propuesta didáctica para la enseñanza de la geometría proyectiva en educación
media: un enfoque basado en las fases del modelo de van Hiele**

Blanca Cecilia Aldana Montenegro

Cod: 2020240003

Jhosset Dammar Gheovany Forero Olmos

Cod: 2022240017

Trabajo de grado Monografía para optar al título de:

Licenciado en matemáticas

Director:

Orlando Aya Corredor

Universidad Pedagógica Nacional de Colombia

Facultad de Ciencia y Tecnología

Licenciatura en matemáticas

Bogotá D.C.

2026

Dedicatoria

Inicialmente a mi madre Clara, quien ha sido fuente de inspiración, por su amor incondicional, su valentía al sacarnos adelante y su esfuerzo constante dando lo mejor de ella cada día. A mí misma, por no rendirme y tener la determinación de alcanzar este sueño que hoy se hace realidad. A mi hermana Paola, por enseñarme a levantarme en situaciones difíciles. A mis sobrinas Madeline y Evangeline, que son mi mayor tesoro y quienes me inspiran a ser mejor día a día. A mi abuelo Luis, por ser el pilar de nuestras vidas quien guía nuestros pasos con su sabiduría. Este logro es para ustedes y por ustedes, es el resultado de su apoyo constante todo esto fue posible.

Cecilia Aldana.

"Este proyecto se dedica a mi madre Yeny, pilar fundamental en todos los procesos de vida; su apoyo incondicional permitió superar cada una de las adversidades surgidas durante el periodo de formación. Reconozco en ella un modelo a seguir en los ámbitos ético, personal y profesional. Asimismo, se dedica a mi hija Eva, cuya sonrisa constituye la inspiración constante para asumir nuevos retos y procurar, en todo momento, el crecimiento personal y profesional."

Que estas líneas sean el reflejo de un camino construido con amor, como la luz que guía la razón hacia los horizontes que aún restan por explorar.

Jhosset Forero.

Agradecimientos

La culminación de este trabajo de grado representa la finalización de nuestro proceso formativo, que no se habría sido posible sin la intervención y el acompañamiento de diversas personas e instituciones.

En primer lugar, agradecemos a nuestro asesor, Orlando Aya Corredor, por su compromiso y dedicación a lo largo de la consolidación de este proyecto y el voto de confianza que otorgó durante este proceso.

De manera especial, extendemos nuestros agradecimientos al Colegio CEDID Guillermo Cano Isaza, por habernos dado la oportunidad de realizar la implementación de nuestra propuesta de trabajo de grado. Al profesor Alberto Suarez Olarte quien fue intermediario y a la profesora Mónica Díaz quien estuvo en acompañamiento de manera directa en nuestro proceso de implementación.

Finalmente, expresamos nuestro reconocimiento a nuestros compañeros, docentes y amigos, Nubia Soler, Oscar Molina, Alejandro Mendoza y Camilo Cuartas. Su aporte reflexivo, disposición para el diálogo y constante acompañamiento fueron el motor que nos permitió mantener el rigor y la motivación necesarios para superar cada etapa de este camino académico. A todos ellos, gracias por ser parte esencial de este logro.

Resumen

El presente trabajo de grado presenta una propuesta didáctica para la enseñanza de elementos básicos de la geometría proyectiva dirigida a estudiantes de grado once de educación media, fundamentada en las fases de aprendizaje del modelo de van Hiele. La investigación parte del reconocimiento según el cual la geometría, y en particular las geometrías no euclidianas, tiene una presencia limitada en los currículos de educación básica y media en Colombia. La revisión realizada sugiere que estos enfoques no se encuentran incorporados de manera suficiente, predominando en la mayoría de los casos la enseñanza centrada en el cálculo de perímetros, áreas y volúmenes dentro del paradigma euclidiano métrico.

La investigación adopta un enfoque cualitativo bajo la metodología del experimento de enseñanza, con una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) como instrumento central de planificación. Se diseñaron e implementaron cuatro sesiones didácticas -El problema del artista, Proyecciones, El plano de Fano y El teorema de Desargues- con estudiantes del Colegio Técnico CEDID Guillermo Cano Isaza. El análisis retrospectivo de las producciones estudiantiles evidenció un tránsito desde el nivel de visualización hacia niveles superiores de razonamiento geométrico, incluyendo la identificación de propiedades invariantes como la colinealidad y la concurrencia. Los resultados sugieren que la geometría proyectiva constituye un escenario pedagógico viable y pertinente para fortalecer y favorecer, en mayor medida, el desarrollo del razonamiento geométrico avanzado en la educación media colombiana. y que el uso de entornos de geometría dinámica como GeoGebra actúa como mediador cognitivo para facilitar y orientar procesos de aprendizaje.

Palabras clave: geometría proyectiva, modelo van Hiele, educación media, experimento de enseñanza, geometría dinámica, razonamiento geométrico, secuencia didáctica. [OBJ]

Abstract

This undergraduate thesis presents a didactic proposal for teaching fundamental concepts of projective geometry to eleventh-grade high school students, grounded in the learning phases of the van Hiele model. The study is based on the recognition that geometry, particularly non-Euclidean geometries, has a limited presence in the basic and secondary education curricula in Colombia. The literature review suggests that these approaches are not sufficiently incorporated into school mathematics, where instruction remains predominantly focused on the calculation of perimeters, areas, and volumes within the Euclidean metric paradigm.

The research adopts a qualitative approach based on the teaching experiment methodology, using a Hypothetical Learning Trajectory (HLT) as the main planning instrument. Four instructional sessions—The Artist's Problem, Projections, The Fano Plane, and Desargues' Theorem—were designed and implemented with eleventh-grade students at Guillermo Cano Isaza Technical School (CEDID). A retrospective analysis of students' work revealed a progression from the visualization level toward more advanced levels of geometric reasoning, including the identification of invariant properties such as collinearity and concurrency.

The findings suggest that projective geometry provides a viable and meaningful pedagogical context for strengthening and promoting the development of advanced geometric reasoning in Colombian secondary education. Furthermore, the use of dynamic geometry environments such as GeoGebra serves as a cognitive mediator that facilitates and supports students' learning processes.

Keywords: projective geometry; van Hiele model; secondary education; teaching experiment; dynamic geometry; geometric reasoning; instructional sequence.

Tabla de contenido

Introducción	1
1. Capítulo 1	3
1.1. Justificación y planteamiento del problema.....	3
1.2. Antecedentes	5
1.3. Objetivos	7
Objetivo general.....	7
Objetivos específicos	7
2. Capítulo 2 Marco conceptual y teórico	9
2.1. Marco conceptual.....	9
2.1.1. La geometría proyectiva: definición y objeto de estudio.....	9
2.1.2. Las cónicas desde una perspectiva proyectiva.....	10
2.1.3. Aproximación histórica de la Geometría Proyectiva	11
2.1.4. Formalización matemática: Desargues, Pascal y plano de Fano	19
2.1.5. Fundamentación teórica del uso de modelos no euclidianos en la transición proyectiva	26
2.2. Marco teórico	29
2.2.1. Marco didáctico: El modelo de van Hiele.....	29
2.2.2. Marco tecnológico	35

2.2.3.	Enfoque curricular de la Geometría Proyectiva en la educación media	38
3.	Capítulo 3 Marco metodológico	41
3.1.	Enfoque de investigación.....	41
3.2.	Tipo de investigación.....	42
3.3.	Fases del experimento de enseñanza.....	44
3.3.1.	Fase 1: Preparación (Trayectoria Hipotética de Aprendizaje - THA)	46
3.3.2.	Fase 2: experimentación	47
3.3.3.	Fase 3: Análisis retrospectivo:	49
3.4.	Análisis prospectivo de las tareas	50
3.4.1.	Sesión 1: El problema del artista	51
3.4.2.	Sesión 2: Proyecciones	53
3.4.3.	Sesión 3 El plano de Fano.....	55
3.4.4.	Sesión 4: Teorema de Desargues	56
3.5.	Participantes.....	58
3.6.	Instrumentos de recolección de la información	58
4.	Capítulo 4: Diseño de la propuesta	60
4.1.	Sesión 1: El Problema del Artista	61
4.1.1.	Tarea 1: La Ventana de Durero.....	61
4.1.2.	Tarea 2: Introducción al punto de fuga.....	65
4.1.3.	Tarea 3: Piso de baldosas.....	66

4.2.	Sesión 2: Proyecciones	67
4.2.1.	Tarea 1: La Esfera y el Plano Proyectivo.....	68
4.2.2.	Tarea 2: El disco de Poincaré.....	70
4.3.	Sesión 3: El Plano de Fano	71
4.4.	Sesión 4: Teorema de Desargues	74
4.4.1.	Tarea 1: Verificación de propiedades	74
4.4.2.	Tarea 2: Determinar Rectas	76
4.4.3.	Tarea 3: Planteamiento de la conjetura.....	77
5.	Capítulo 5: Análisis retrospectivo.....	80
5.1.	Sesión 1. El problema del Artista	80
5.1.1.	Tarea 1: La ventana de Durero.....	80
5.1.2.	Tarea 2: Puntos de fuga.....	84
5.1.3.	Tarea 3 El piso de Baldosas	87
5.2.	Sesión 2. Proyecciones.....	91
5.2.1.	Tarea 1: La esfera y el plano euclidiano	91
5.2.2.	Tarea 2: El disco de Poincaré.....	97
5.3.	Sesión 3: El plano de Fano.....	102
5.3.1.	Tarea 1: Construcción y verificación del plano de Fano	102
5.3.2.	Tarea 2: Paralelismo en el plano de Fano	105
5.4.	Sesión 4: Teorema de Desargues	107

5.4.1.	Tarea 1: Verificación de propiedades	107
5.4.2.	Tarea 1: Determinar Rectas	109
5.4.3.	Tarea 3: Planteamiento de la conjetura.....	111
5.5.	Síntesis del general de la implementación.....	112
6.	Conclusiones.....	115
6.1.	Respecto al primer objetivo específico: Diseñar una secuencia de tareas estructurada en fases de aprendizaje, de acuerdo con el modelo de van Hiele.....	115
6.2.	Respecto al segundo objetivo específico: Implementar la secuencia de tareas con estudiantes de grado once del Colegio Técnico CEDID Guillermo Cano Isaza.....	116
6.3.	Respecto al tercer objetivo específico: Integrar el uso de entornos de geometría dinámica como recurso para la exploración y comprensión de conceptos proyectivos.	117
6.4.	Con respecto al objetivo general.....	120
6.5.	Aportes en el desarrollo profesional y alcances de los futuros educadores matemáticos	122
	Bibliografía	123
	ANEXOS	128

Lista de figuras

Figura 1 Miniatura de “las Cantigas de Santa María” que muestra a Alfonso X el Sabio dictando.....	12
Figura 2 Uso de la perspectiva. Obra: “Los desposorios de la Virgen” de Rafael Sanzio, cerca de 1504.....	13
Figura 3 Uso de la perspectiva de Brunelleschi y descripción gráfica de su experimento.....	14
Figura 4 Representación renacentista del uso de la cámara oscura para el estudio de la perspectiva.	16
Figura 5 Principio de proyección de Desargues	16
Figura 6 Principio de sección de Desargues	17
Figura 7 Teorema de Desargues	21
Figura 8 Teorema de Pascal.....	23
Figura 9 Plano de Fano	25
Figura 10 Plan de ejecución del experimento de enseñanza aplicado a la enseñanza de la geometría proyectiva.....	44
Figura 11 Fragmento del enunciado propuesto a los estudiantes la Ventana de Alberto Durero	62
Figura 12 Aula de clase en perspectiva	63
Figura 13 Preguntas orientadoras sobre convergencias obtenidas.....	64
Figura 14 Fotografía para identificación de punto de fuga.....	66
Figura 15 Representación gráfica del aplicativo "Piso de baldosas"	67
Figura 16 Instrucciones y preguntas orientadoras de la "Tarea 1"	69
Figura 17 Disco de Poincaré.....	70
Figura 18 Tablero de representación para la construcción del "Plano de Fano"	72

Figura 19	Definiciones propuestas de "Triángulos en Perspectiva"	75
Figura 20	Representación aplicativo en Geogebra“ Teorema de Desargues”	76
Figura 21	Fragmento del enunciado de la tarea 2 “Determinar Rectas”	77
Figura 22	Enunciado que describe cómo plantear conjeturas.....	78
Figura 23	Respuesta de los estudiantes en la que se evidencia la prolongación de las rectas y la identificación de un punto común.....	81
Figura 24	Respuesta del estudiante donde se contrasta la representación gráfica con la propiedad euclidiana de paralelismo.....	82
Figura 25	Registro escrito en el que el estudiante explica la convergencia a partir de la perspectiva.	83
Figura 26	Producción de los estudiantes en la que se relaciona el tamaño de los objetos con la distancia en la representación.	85
Figura 27	Identificación del punto de fuga en las producciones de los estudiantes.	86
Figura 28	Evidencia de interpretación parcial del punto de fuga.	87
Figura 29	Evidencias sobre la relación entre la posición del punto de fuga y la percepción de profundidad.	88
Figura 30	Evidencias del cambio en la perspectiva según la posición del punto de fuga.	89
Figura 31	Descripción de las líneas de la esfera. Fuente: Producción de los estudiantes	92
Figura 32	Ubicación de las líneas de la esfera. Fuente: producción de los estudiantes.....	93
Figura 33	Respuestas de los estudiantes sobre su percepción de las rectas. Fuente: producción de los estudiantes.	94
Figura 34	Registro de la variación de la proyección al modificar la fuente de luz (captura de video). Fuente: Registro de clase.	95

Figura 35	Transformaciones de las proyecciones. Fuente: Registro de clase	96
Figura 36	Líneas y puntos de fuga. Fuente: Registro de clase	97
Figura 37	Rectas en el "Plano de Poincaré" Fuente: Registro de clase.	98
Figura 38	Paralelas en el Plano de Poincaré. Fuente: Registro de clase.....	100
Figura 39	Construcción del plano de Fano. Fuente: Registro de clase.....	103
Figura 40	La concurrencia de las rectas como una propiedad invariante de la figura.....	108
Figura 41	Uso del término concurrentes para describir una propiedad	108
Figura 42	Identificación de las propiedades invariantes.....	110

Lista de tablas

Tabla 1 Resumen sintético del desarrollo de la Geometría Proyectiva..... 18

Tabla 2 Matriz de Diseño de la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA)..... 51

Lista de anexos

Anexo 1. Encuesta aplicada para determinar el tratamiento de otras geometrías en Básica

Secundaria..... 128

Anexo 2 Sesión 1: El Problema del Artista 133

Anexo 3 Sesión 2: Proyecciones..... 142

Anexo 4 Sesión 3 El plano de Fano..... 146

Anexo 5 Sesión 4: El teorema de Desargues 148

Introducción

Para profundizar en la problemática curricular anteriormente mencionada, se diseñó y aplicó una encuesta a un grupo de 28 estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia, evidenciando cómo la Geometría Analítica no es abordada como campo de estudio en la educación Básica Secundaria y Media, tanto desde lo conceptual como desde lo procedimental (Anexo 1), situación que explica también la ausencia de conocimientos en otras áreas de estudio de la geometría.

Ante este panorama, la propuesta aquí desarrollada busca servir de acicate para motivar el estudio de otros tipos de geometrías y avanzar hacia la conceptualización de algunos conceptos como incidencia y concurrencia, los cuales fundamentan sus estructuras, en este caso sus invariantes. Este trabajo se sustenta en una revisión conceptual detallada sobre el surgimiento de dichas geometrías y principios esenciales como los puntos al infinito y la concurrencia. Esta fundamentación teórica se complementa con una reflexión didáctica orientada a comprender cómo estos conceptos pueden ser abordados en el aula a través de tareas accesibles, contextualizadas y cognitivamente desafiantes, favoreciendo la construcción de significados por parte de los estudiantes y el establecimiento de conexiones con sus experiencias geométricas previas.

Para dar cuenta de este proceso, el documento se encuentra estructurado en seis capítulos articulados entre sí:

En el primer capítulo se presenta el planteamiento del problema, los antecedentes base de la propuesta y se formulan los objetivos generales y específicos que la guían.

En el segundo capítulo se desarrollan los fundamentos teóricos necesarios para sustentar la investigación, abarcando los aspectos centrales de la Geometría Proyectiva y un análisis de

referentes investigativos y didácticos que han explorado su enseñanza desde perspectivas alternativas.

El tercer capítulo amplía el marco metodológico, describiendo en detalle las fases de preparación y experimentación, así como los instrumentos de recolección de información empleados para consolidar la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA).

El cuarto capítulo detalla los propósitos formativos de la secuencia didáctica, los materiales y recursos empleados, además de las consideraciones pedagógicas subyacentes a las situaciones planteadas a través de contextos reflexivos y modelos geométricos alternativos.

El quinto capítulo presenta la discusión del análisis retrospectivo. En este apartado se exponen las dificultades, los aprendizajes identificados y las implicaciones prácticas de haber llevado esta implementación al aula.

Finalmente, el sexto capítulo articula las conclusiones del trabajo. En él se valoran los alcances de la propuesta, se identifican las limitaciones encontradas durante su ejecución y se plantean reflexiones sobre los aportes de esta experiencia a la formación profesional de los autores.

1. Capítulo 1

1.1. Justificación y planteamiento del problema

En el contexto colombiano, según Aray et al. (2019) la formación en los niveles de escolaridad básica y media particularmente frente al conocimiento matemático que circula en la escuela ha sido históricamente relacionado a ramas como la aritmética, el álgebra, la trigonometría, el cálculo y la geometría. Con frecuencia, los estudiantes de los últimos grados de educación media presentan vacíos en sus conocimientos de geometría debido a múltiples factores.

A partir de la experiencia adquirida durante la formación inicial de la Licenciatura en Matemáticas, resulta evidente cómo los estudiantes inscritos a cursos dedicados al estudio de la geometría euclidiana manifiesten dificultades sobre conceptos geométricos básicos. A su vez, se evidencia limitaciones en procesos de razonamiento geométrico, dado el vínculo de su formación escolar previa con enfocadas en el reconocimiento visual y el cálculo de perímetros, además de las áreas de algunas figuras geométricas básicas.

Históricamente, diversas investigaciones han procurado comprender y superar las dificultades asociadas al pensamiento geométrico. Una de las propuestas más reconocidas por la comunidad académica es la de Pierre y Dina van Hiele. Meléndez-Reyes et al. (2024) identificaron que estudiantes de educación media pueden permanecer en niveles iniciales de razonamiento geométrico cuando las experiencias escolares se han centrado principalmente en la identificación visual y procedimientos métricos.

Una de las causas de esta situación radica en las prácticas de enseñanza como recientemente lo han reportado Mulbasari et al. (2025). Por un lado, la enseñanza de la geometría se aborda de manera fragmentada en donde el enfoque principal es la memorización y la

ejercitación de procedimientos orientados al cálculo de áreas, volúmenes y perímetros. Por otro lado, resulta habitual en distintos contextos escolares encontrar programaciones curriculares donde esta rama se relega al final de cada periodo académico. Esta dinámica provoca un abordaje superficial de los objetos geométricos o, en el peor de los casos, la eliminación completa de su enseñanza debido a limitaciones de tiempo.

En coherencia con lo anterior, es posible identificar el papel fundamental del docente de matemáticas en el desarrollo del pensamiento geométrico en sus estudiantes, tal y como lo reportan Gamboa-Araya y Ballesterio-Alfaro (2021) y Carrillo-Yañez, et al. (2022). Con el propósito de aportar a la resolución de esta problemática, resulta pertinente diseñar y gestionar escenarios de aprendizaje enfocados en involucrar tanto a estudiantes como a docentes en experiencias orientadas a promover el tránsito por los distintos niveles de razonamiento geométrico de manera progresiva y sistemática.

Por esta razón surge la necesidad de diseñar e implementar una propuesta de enseñanza facilitadora del tránsito desde el nivel de reconocimiento, hacia niveles superiores de razonamiento según el modelo van Hiele. La presente propuesta se fundamenta a partir del estudio de algunos conceptos de la geometría proyectiva, buscando involucrar a los estudiantes en contextos geométricos distintos a los usualmente abordados en el aula de matemáticas tal y como se describirá en los antecedentes.

En coherencia con lo que se expondrá posteriormente, esta propuesta pretende realizar un aporte innovador a la experiencia en el aprendizaje de la geometría escolar, favoreciendo el razonamiento geométrico. En este sentido, la investigación se centra en responder al siguiente planteamiento central:

¿Cómo contribuye el diseño y la implementación de una secuencia de tareas en geometría proyectiva al tránsito del nivel cero a niveles superiores de razonamiento, según la propuesta de van Hiele en estudiantes de grado 11 del Colegio Técnico CEDID Guillermo Cano Isaza I.E.D.?

1.2. Antecedentes

La enseñanza de la geometría escolar ha sido tema de investigación de la comunidad académica, diversificándose en amplios aspectos, entre ellos, aquellos orientados a profundizar en el análisis de los procesos de aprendizaje estudiantil. Particularmente, se han elaborado estudios enfocados en la didáctica de la geometría, abarcando elementos vinculados (directa o indirectamente) con la geometría proyectiva, así como con modelos de interpretación de las comprensiones, como el modelo van Hiele, que a su vez contribuye al desarrollo del razonamiento geométrico. En este sentido, el análisis de estudios previos permite detectar los hallazgos destacados para el diseño de propuestas enfocadas en el uso de materiales, herramientas digitales y la exploración guiada, propiciando la construcción del concepto matemático más allá de enfoques tradicionales.

Diversos autores han aportado al fortalecimiento del pensamiento geométrico mediante indagaciones orientadas hacia perspectivas didácticas, donde se propicia la transición del reconocimiento a el análisis y posterior justificación. Al respecto, Gysin y Fernandez (2012) resaltan la necesidad de estructurar propuestas enfocadas en promover avances sobre la identificación de características en objetos geométricos abstractos. En esa misma línea, de Souza Melo y Andrada (2013) adecuan recursos didácticos a distintos estilos de aprendizaje, brindado a los estudiantes diversas vías de comprensión.

La visualización y el uso de recursos no convencionales también juegan un papel importante. Por un lado, Almaida y Gallego (2019) recurren al uso de las sombras como un

medio facilitador destinado a fortalecer la comprensión visual de configuraciones geométricas.

Por otro lado, Tonhato et al. (2021) acuden a la historia de las matemáticas y la lectura de imágenes para comprender relaciones geométricas.

Bajo una perspectiva contemporánea, el uso de la tecnología y el desarrollo de habilidades cognitivas dirigidas han cobrado gran relevancia en el diseño de secuencias didácticas. Como señala Sánchez (2023) la incorporación de la geometría dinámica, en articulación con la teoría de razonamiento de van Hiele, promueve el desarrollo de competencias cognitivas en el estudio de esta disciplina. Es importante aclarar que, si bien este estudio no profundiza en aspectos proyectivos ni en la educación secundaria, sí confirma cómo la enseñanza de la geometría se potencializa a partir del uso de herramientas tecnológicas, tareas de exploración y procesos de formación gradual, propiciando un ambiente idóneo para aplicar el modelo de van Hiele.

Asimismo, Moreno Triana y Mojica Gómez (2024) presentan una secuencia didáctica destinada a mejorar los conocimientos geométricos en estudiantes de educación básica, enfocándose en la visualización, orientación espacial, relaciones y lenguaje geométrico. Aunque está diseñada para tercer grado y prescinde de la geometría proyectiva, destaca la importancia de desarrollar estas habilidades para un mejor entendimiento futuro. Por su parte, Zhunussova et al. (2025) centran su investigación en la conceptualización de lugares geométricos analíticos y proyectivos, respaldando cómo el avance en conceptos geométricos está estrechamente relacionado al desarrollo paulatino de capacidades cognitivas, acorde los propuestos en la teoría de los niveles de van Hiele.

Lo anterior evidencia la relevancia de diseñar propuestas didácticas donde se articulen la exploración visual, la tecnología, el razonamiento geométrico y los modelos de aprendizaje

progresivo. En este contexto, la geometría proyectiva se presenta como un escenario pertinente para ampliar las experiencias geométricas de los estudiantes, al centrar su estudio en conceptos fundamentales como la incidencia y la concurrencia elementos que promuevan formas de razonamiento más estructuradas. Además, su articulación con el modelo de van Hiele permite diseñar propuestas progresivas que acompañen a los estudiantes desde niveles iniciales de reconocimiento hacia procesos de análisis y argumentación geométrica. De esta manera, la incorporación de la geometría proyectiva en la educación media constituye una oportunidad para enriquecer la formación geométrica escolar, apoyándose en recursos didácticos, herramientas digitales y ambientes de exploración que favorezcan la construcción significativa de conceptos matemáticos y el desarrollo del pensamiento geométrico avanzado.

1.3. Objetivos

Objetivo general

Diseñar e implementar una secuencia de tareas para la enseñanza de elementos básicos de la geometría proyectiva en estudiantes de grado once del Colegio Técnico CEDID Guillermo Cano Isaza, con el fin de promover el tránsito a niveles superiores de razonamiento según la propuesta de van Hiele.

Objetivos específicos

- Diseñar una secuencia de tareas estructurada en fases de aprendizaje, de acuerdo con el modelo de van Hiele.
- Implementar la secuencia de tareas con estudiantes de grado once del Colegio Técnico CEDID Guillermo Cano Isaza.

- Integrar el uso de entornos de geometría dinámica como recurso para la exploración y comprensión de conceptos proyectivos.
- Analizar las producciones de los estudiantes para establecer si la secuencia de tareas favorece el tránsito entre los niveles de razonamiento de van Hiele.

2. Capítulo 2 Marco conceptual y teórico

El presente capítulo fundamenta teórica, conceptual, didáctica y curricularmente la propuesta diseñada, orientada a la enseñanza de elementos básicos sobre geometría proyectiva en la educación media. Se abordan, inicialmente, los conceptos matemáticos fundamentales de esta disciplina y su desarrollo histórico. Posteriormente, se presentan los referentes didácticos orientan el diseño, particularmente el modelo de van Hiele. Finalmente, se analizan los fundamentos curriculares y los antecedentes investigativos validadores de la pertinencia de esta investigación en el contexto educativo colombiano.

2.1. Marco conceptual

2.1.1. La geometría proyectiva: definición y objeto de estudio

La geometría proyectiva carece de una definición formal única; sin embargo, se entiende como el campo enfocado en estudiar propiedades invariantes ante una proyección. Es decir, aquellas independientes de la distancia o la medida, ocupándose de la relación entre elementos geométricos (Coxeter, 2007). En otros contextos, esta disciplina se define por sus diferencias frente a otras ramas al no priorizar las magnitudes y paralelismos. Aborda correspondencias entre puntos, rectas y planos conservadas mediante transformaciones proyectivas.

En el contexto escolar, ciertas alternativas de aproximación se llevan a cabo desde asignaturas distintas a las matemáticas. En colegios técnicos o con énfasis específicos en su Proyecto Educativo Institucional (PEI), estos conceptos se abordan desde áreas como el dibujo técnico. Al respecto, Yurksas (2003) propuso una aproximación desde el dibujo proyectivo, entendiéndolo como un lenguaje geométrico: el “lenguaje de la visión racionalizada”, un puente entre la intuición visual y la formalización matemática.

La propuesta de Yurksas (2003) incluye el trabajo con la denominada perspectiva cónica, considerándola fundamental al visualizar el aspecto o deformaciones inherentes a las imágenes de los cuerpos. El autor identifica cómo, a nivel escolar, esta geometría se introduce mediante líneas de horizonte y puntos de foco; no obstante, advierte una falta de profundidad en dicho aspecto, el cual debería constituir un eje central. Bajo estos principios, señala:

“la geometría proyectiva es la base de todo sistema de representación gráfica porque permite comprender la forma y posición de los cuerpos en el espacio, más allá de la medida” (p. 214).

Asimismo, apunta a la necesidad de comprender cómo la operatividad de la proyección constituye el fundamento, no solo visual, sino cognitivo de esta disciplina. Por consiguiente, las acciones no deben limitarse a la técnica del trazo, sino orientarse a entender dicha práctica como una forma de pensamiento geométrico basada en la proyección.

Por su parte, Almada y Gallego (2019) exploran el papel desempeñado por el trabajo con sombras como acercamiento didáctico a la conceptualización proyectiva en los primeros niveles de escolaridad. Su propuesta se fundamenta en estudios de Piaget, reportados por Holloway (1982, citado por Almada y Gallego, 2019), centrados en un abordaje manipulativo y experimental. Este enfoque utiliza sombras proyectadas por objetos ubicados frente a un foco de luz puntual, buscando explorar e identificar propiedades invariantes ante proyecciones. En dicho estudio, los autores abordaron características geométricas denominadas forma, tamaño, rectitud y concavidad o convexidad, trabajando únicamente con figuras bidimensionales.

2.1.2. Las cónicas desde una perspectiva proyectiva

Las cónicas han constituido un elemento esencial en el desarrollo histórico de la geometría proyectiva, al ser unos de los primeros objetos donde se estudiaron propiedades

invariantes bajo proyección. Desde la obra de Apolonio hasta las contribuciones de Pascal y Descargues, estas curvas han representado un contexto único destinado a examinar relaciones de alineación e incidencia, trascendiendo elementos métricos específicos de la geometría euclidiana.

El Teorema de Pascal, en particular, plantea una relación de alineación vinculada con un hexágono inscrito en una cónica, revelando el estrecho vínculo entre configuraciones proyectivas y estas figuras. Este tipo de resultados demuestra la relevancia conceptual de las cónicas en dicho ámbito y su utilidad al comprender principios fundamentales.

Sin embargo, cabe resaltar que las cónicas no son un objeto de estudio en sí mismas en este trabajo. Se menciona sólo con fines históricos y contextuales, para ubicar algunos resultados tradicionales de la geometría proyectiva y aclarar su origen. Por lo tanto, el análisis minucioso de sus definiciones, clasificaciones o propiedades específicas no se tratará, porque el estudio tiene como foco principal la presentación de conceptos proyectivos fundamentales y la creación de una secuencia didáctica dirigida a estudiantes de educación media.

2.1.3. Aproximación histórica de la Geometría Proyectiva

Sin pretender agotar el campo de análisis, y centrados en aspectos muy generales, a continuación, se presenta una aproximación histórica del surgimiento de la geometría proyectiva desde el enfoque occidental y en particular con el advenimiento de la perspectiva (representación de objetos tridimensionales sobre un plano). Luego se abordarán algunos episodios hacia la formalización de los primeros y principales teoremas de esta área disciplinaria.

2.1.3.1. Orígenes artísticos y técnicos: la perspectiva renacentista

Los orígenes de la geometría proyectiva, desde el enfoque occidental, se encuentra históricamente ligada con la historia del arte, y en particular durante el desarrollo de la técnica de

la perspectiva en la época del Renacimiento. Las obras de arte antes del Renacimiento, la mayoría de corte religioso, representaban la “realidad” en dos dimensiones como se aprecia en un ejemplo de las obras presentadas para ilustrar “*las Cantigas de Santa María*” para promocionar el pensamiento y los intereses de Alfonso X, “El Sabio” (ver **Figura 1**). Ya en el renacimiento se buscan unas técnicas más depuradas para representar eso que se denomina “realidad” y una de ellas es la perspectiva (ver **Figura 2**). Según Panofsky (1973), la perspectiva como tal no debe considerarse sólo como una técnica que surgió para representar el espacio, sino como una modalidad simbólica que cambió la forma de entender y crear la realidad en el plano pictórico y por lo tanto de concebirla.

Figura 1

Miniatura de “*las Cantigas de Santa María*” que muestra a Alfonso X el Sabio dictando



Nota. Dominio público. Obra que muestra a la “Escuela de traductores de Sevilla”

Figura 2

Uso de la perspectiva. Obra: “Los desposorios de la Virgen” de Rafael Sanzio, cerca de 1504

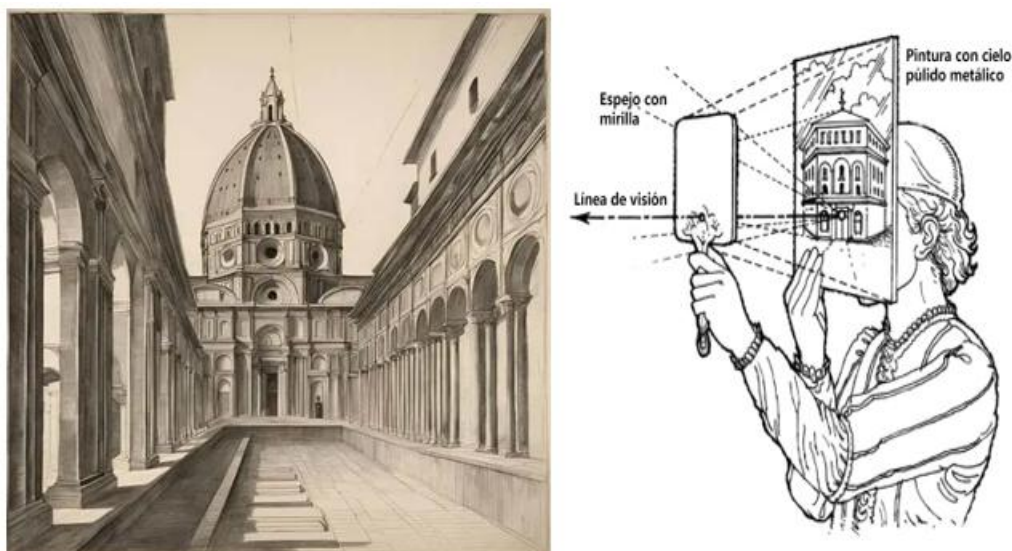


Nota. Dominio público. Pinacoteca di Brera, Milán.

Corredor y Londoño (2019) plantean que la historia de la geometría proyectiva puede dividirse en cuatro etapas principales. La primera inicia con los trabajos en los campos de la arquitectura y la pintura de Filippo Brunelleschi (1377-1446), León Battista Alberti (1404 - 1472), Piero della Francesca (1415 - 1492) y Leonardo da Vinci (1452 - 1519), donde ellos establecieron los fundamentos de la perspectiva geométrica. El experimento de Brunelleschi abrió la puerta a dos técnicas relacionadas, el uso de perspectiva con un punto de fuga y la proyección cónica. (ver **Figura 3**)

Figura 3

Uso de la perspectiva de Brunelleschi y descripción gráfica de su experimento



Nota. Dominio público. Claustro de los Canónigos. Método de empleo de la tabla del Baptisterio.

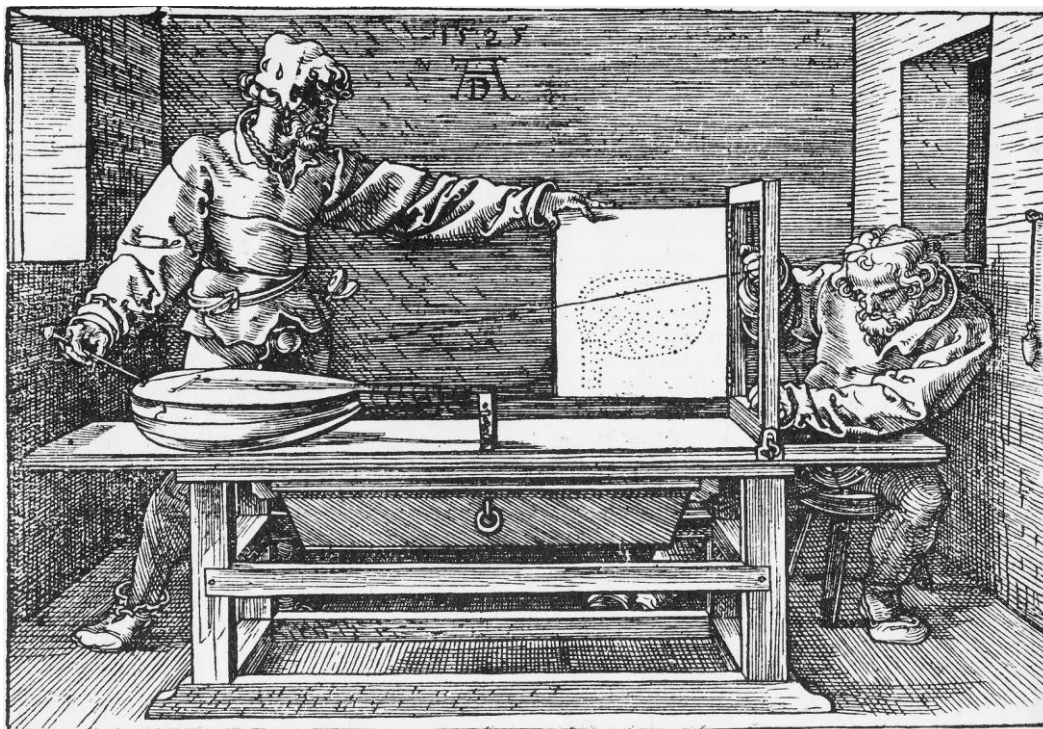
La segunda etapa corresponde a su transmisión por Europa del norte. Allí destacan autores como Alberto Durero (1471-1528), responsable de integrar arte y matemáticas en sus tratados, vinculando así los conocimientos empíricos del arte con los constructos teóricos de los pintores italianos, trascendiendo la pintura hasta abarcar el grabado en relieve. Durero fungió como puente entre el empirismo técnico de los grupos de artesanos y la formulación matemática de la perspectiva empleada en Italia; de algún modo, matematizó el arte y sus técnicas. En su obra *Instrucción sobre la medida con compás y regla* (1525), explicó el método de representación de objetos tridimensionales en un plano mediante líneas de proyección, estableciendo la base de la geometría proyectiva. Adicionalmente, diseñó dispositivos dirigidos a facilitar el trazado correcto de perspectivas, destacando el famoso marco con hilos (ver **Figura 4**). Su trabajo acercó las matemáticas al arte, demostrando cómo la representación visual podía entenderse como un problema formalmente geométrico.

La obra de la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, que no tiene un nombre específico, pero suele conocerse como “*Máquina de perspectiva con cuerda para dibujar un laúd*” busca explicar de manera didáctica la necesidad de ubicar el ojo en un punto fijo representativo del punto de vista; en consecuencia, si el observador se mueve, la perspectiva cambia. Las líneas visuales conectan el ojo con los puntos del objeto, ilustrándose en la imagen mediante una cuerda equivalente al rayo visual. Se introduce una “ventana pictórica” o plano de proyección, donde dicho marco vertical opera a modo de “pantalla transparente” sobre la cual se dibuja. Finalmente, el autor advierte cómo la forma trazada no es una copia del objeto en sí, sino de su proyección; es decir, no se dibuja el laúd conforme a su naturaleza física, sino acorde a su apariencia desde dicho punto de vista. Esta mirada influyó en arquitectos y artistas posteriores, sentando las bases del desarrollo abordado en la tercera etapa.

Durante esta tercera etapa, en el siglo XVII, Girard Desargues (1591-1661) llevó a cabo la formalización de los principios de proyección y sección, dando origen a la actual geometría proyectiva. El primero de estos principios establece cómo, al observar un objeto desde un punto de vista fijo, cada punto de este genera un rayo visual proyectado sobre un plano. Esta correspondencia entre el espacio y el plano preserva las relaciones proyectivas, mas no necesariamente las distancias o los ángulos. En un lenguaje simple, esto se puede traducir de la siguiente manera: “Lo que se ve depende del punto de vista y hay leyes geométricas determinantes de esa imagen” (ver **Figura 5**). El segundo principio, el de sección, implica la colinealidad; es decir, cuando dos figuras (por ejemplo, dos triángulos) se encuentran relacionadas mediante una proyección, sus intersecciones correspondientes producen puntos alineados sobre un eje común.

Figura 4

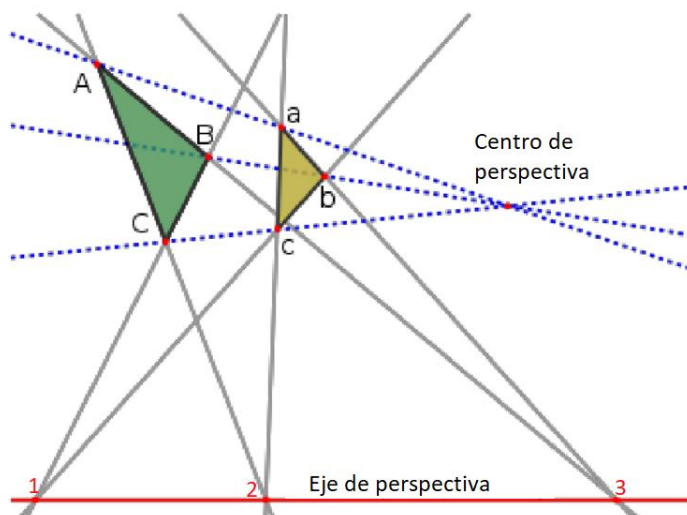
Representación renacentista del uso de la cámara oscura para el estudio de la perspectiva.



Nota. Adaptado de *Underweysung der Messung*, por A. Dürer, 1525.

Figura 5

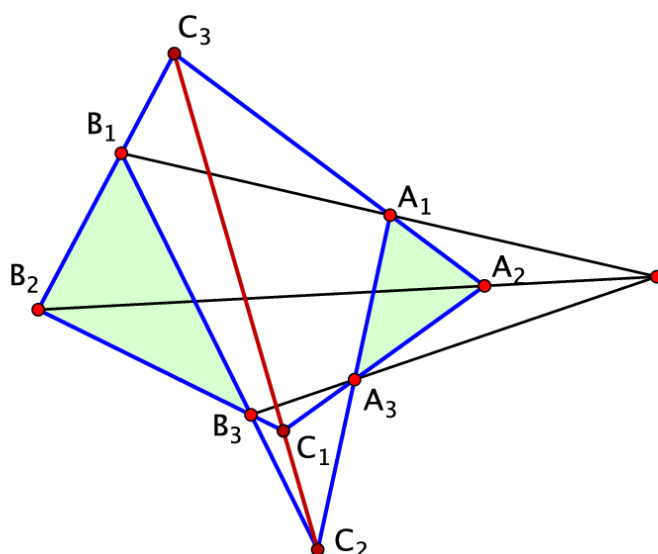
Principio de proyección de Desargues



Nota. Elaboración propia en GeoGebra.

Este resultado afirma que dos triángulos están en perspectiva desde un punto cuando las rectas que unen sus vértices correspondientes concurren en un mismo punto; de manera equivalente, los puntos de intersección de sus lados correspondientes se alinean sobre una misma recta. (ver **Figura 6**):

Figura 6
Principio de sección de Desargues



Nota. Elaboración propia en GeoGebra.

Posteriormente, matemáticos como Blaise Pascal (1623-1662), Philippe de La Hire (1640-1719) y Jean-Victor Poncelet (1788-1867) desempeñaron un papel fundamental en la consolidación de la geometría proyectiva como una rama autónoma de las matemáticas. Pascal contribuyó al desarrollo de esta disciplina mediante el estudio de las propiedades proyectivas de las secciones cónicas, particularmente a través del teorema que lleva su nombre, considerado uno de los resultados fundamentales en la construcción temprana de la teoría proyectiva (Boyer & Merzbach, 2011).

A lo largo de estas cuatro etapas se evidencia la evolución de la perspectiva desde su concepción inicial en el arte hasta alcanzar un nivel de rigor matemático, sentando así un

proceder metodológico enfocado en el estudio de esta disciplina. A continuación, se presenta un cuadro síntesis de los aportes principales realizados por cada autor, ilustrando el desarrollo de la geometría proyectiva desde su aparición como técnica pictórica hasta su consolidación disciplinar.

Tabla 1

Resumen sintético del desarrollo de la Geometría Proyectiva.

Fuente: Adaptado de Corredor y Londoño (2019), Panofsky (1973) y otras referencias históricas.

Autor	Época	Aportes
Filipo Brunelleschi (1377-1446)	Renacimiento italiano	Introduce los primeros aportes de la perspectiva, mediante los siguientes métodos (en arquitectura): Planimétricas, usando triangulaciones. Proyecciones a escalas. Uso de artefactos de mediciones. Fórmulas geométricas de óptica. Puntos de fuga.
León Battista Alberti (1404-1472)	Renacimiento Italiano	En su obra De pintura (1435) genera una sistematización de la perspectiva. Formaliza el plano de proyección y la noción de horizonte (línea de horizonte).
Piero della Francesca (1415-1492)	Pintor y matemático del Renacimiento	En sus obras artísticas aplica la perspectiva y a su vez redacta tratados sobre proporciones y geometría, entre sus aportes relevantes se encuentra: Desarrollo de la perspectiva lineal. Tratado De Prospectiva Pingendi, (cerca de 1474), en el que se establece un método que permite realizar el cálculo geométrico y la aplicación de la perspectiva. Precisión geométrica en sus pinturas: como La Flagelación de Cristo y Los frescos de Arezzo.
Leonardo Da Vinci (1452-1519)	Renacimiento	Perfecciona las leyes de la perspectiva y estudia la luz, sombra y proyección, sus principales aportes fueron:

Alberto Durero (1471-1528)	Renacimiento alemán	Perspectiva lineal: donde las líneas paralelas se encuentran en un punto de fuga. Proporción y divina proporción: en sus obras <i>El hombre de Vitruvio</i> y la <i>Mona Lisa</i>. Representación de volúmenes. En Europa del Norte difunde la perspectiva con sus tratados <i>Instrucciones sobre la medida</i> (1525) y <i>De Symmetria</i> (1532), logra realizar proyecciones de objetos tridimensionales a partir de la perspectiva lineal en superficies planas, además de realizar análisis de cónicas (elipses) y espirales.
Girard Desargues (1591-1661)	Siglo XVII	Considerado como el padre de la Geometría Proyectiva, entre los aportes se encuentran: Formalización de los principios de proyección y estudio de las cónicas (elipse, parábola, hipérbola), vistas desde una única curva. También establece lo que luego se llamaría Teorema de Desargues.
Blaise Pascal (1623-1662)	Siglo XVII	Desarrolla lo que se conocerá como “Teorema de Pascal” sobre las cónicas proyectivas.
Philippe de La Hire (1640–1718)	Siglo XVII	Sistematiza los conceptos de Desargues y Pascal en tratados formales.
Jean-Víctor Poncelet (1788–1867)	Siglo XIX	Reestructura la geometría proyectiva moderna; introduce el principio de continuidad y las figuras imaginarias.

2.1.4. Formalización matemática: Desargues, Pascal y plano de Fano

La geometría proyectiva se desarrolla, más allá de los intereses visuales o históricos ligados a la perspectiva, ante la necesidad de crear un marco matemático sólido orientado al análisis y la descripción de sus conceptos esenciales. En esta línea, la formalización matemática se erige como un procedimiento fundamentado en establecer definiciones, relaciones y estructuras garantes de la coherencia lógica del sistema geométrico.

Este apartado expone, de manera general, los componentes fundamentales subyacentes a la formalización de la geometría proyectiva, tales como las relaciones de incidencia entre líneas y puntos, el concepto de dualidad y la introducción de estructuras axiomáticas. El objetivo prescinde de elaborar demostraciones formales exhaustivas; en su lugar, busca proporcionar un marco conceptual facilitador de la comprensión organizativa interna de esta disciplina, respaldando así la propuesta didáctica presentada en este trabajo.

2.1.4.1. Teorema de Desargues

El Teorema de Desargues constituye uno de los pilares de la geometría proyectiva moderna debido a su capacidad de vincular dos tipos de perspectivas: desde un punto y desde una recta, garantizando con ello la coherencia interna del plano proyectivo. Al respecto, Coxeter (2007) presenta el enunciado formal:

Si dos triángulos están en perspectiva desde un punto, entonces los pares de lados correspondientes se intersecan en tres puntos colineales; y recíprocamente, si los pares de lados correspondientes se cortan en tres puntos colineales, entonces los triángulos están en perspectiva desde un punto.

Este resultado no solo describe una propiedad geométrica visible, sino además revela la estructura profunda del plano proyectivo: las configuraciones determinadas por la perspectividad central y la perspectividad axial no son independientes, sino manifestaciones de un mismo principio global de incidencia.

En la **Figura 7** se representa de manera esquemática el Teorema de Desargues. Sea

$\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ dos triángulos, estos son perspectivos desde un punto si las rectas que unen los vértices correspondientes

$$AA', BB', CC'$$

son concurrentes en un punto O , denominado centro de perspectividad.

Asimismo, se afirma su perspectividad desde una recta si los pares de los lados correspondientes se intersecan en los puntos:

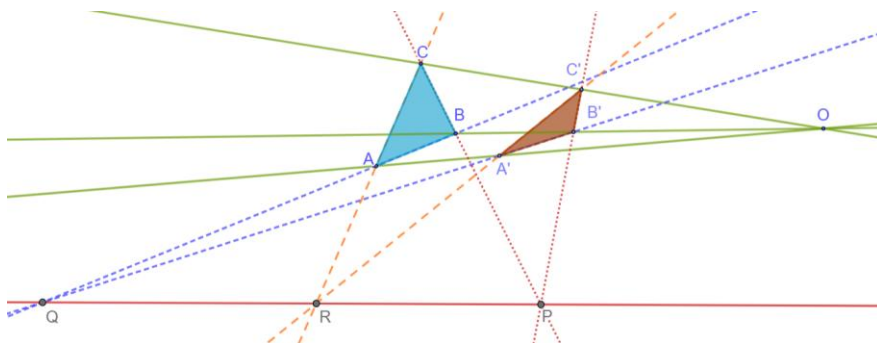
$$P = AB \cap A'B', Q = BC \cap B'C', R = CA \cap C'A'$$

y dichos puntos son colineales en una recta l , llamada eje de Desargues. El teorema de Desargues garantiza:

$$AA', BB', CC' \text{ concurrentes} \rightarrow P, Q, R \text{ colineales},$$

y su recíproco.

Figura 7
Teorema de Desargues



Nota. Elaboración propia en GeoGebra.

El Teorema de Desargues no solo describe una configuración geométrica particular, sino constituye un axioma fundamental en varios sistemas de Geometría Proyectiva.

Según Coxeter (2007) y Viro (2020), este teorema permite:

1. Establecer la existencia de rastras y puntos en posiciones proyectivas equivalentes.
2. Justificar construcciones proyectivas sin recurrir a medidas euclidianas.
3. Fundamentar la teoría de coordenadas proyectivas.
4. Diferenciar entre planos proyectivos derivados de espacios tridimensionales.

2.1.4.2. Pascal y las cónicas.

El Teorema de Pascal, formulado por Blaise Pascal en 1640, es uno de los resultados fundamentales de la geometría proyectiva y extiende las propiedades de incidencia a las figuras inscritas en cónicas. Este teorema muestra cómo ciertas colinealidades se mantienen invariantes bajo transformaciones proyectivas, destacando la naturaleza no métrica de estas relaciones (Gutiérrez, 2012).

Enunciado del Teorema

Blaise Pascal es una figura clave en el desarrollo histórico de la geometría proyectiva por sus aportes al estudio de las cónicas. Según Gutiérrez (2012), en su *Ensayo sobre las cónicas*, Pascal formuló el teorema conocido como el hexágono místico, el cual establece:

la línea quebrada hexagonal cerrada $AB'CA'BC'A$ cuyos vértices alternados están respectivamente sobre r y r' es tal que los pares de lados opuestos AB' y $A'B$, $B'C$ y BC' , CA' y $C'A$, se cortan en tres puntos alineados.

Este resultado constituye uno de los antecedentes fundamentales de la geometría proyectiva y evidencia el carácter no métrico de las relaciones geométricas que la definen, al basarse exclusivamente en propiedades de alineación e incidencia, independientemente de medidas o ángulos.

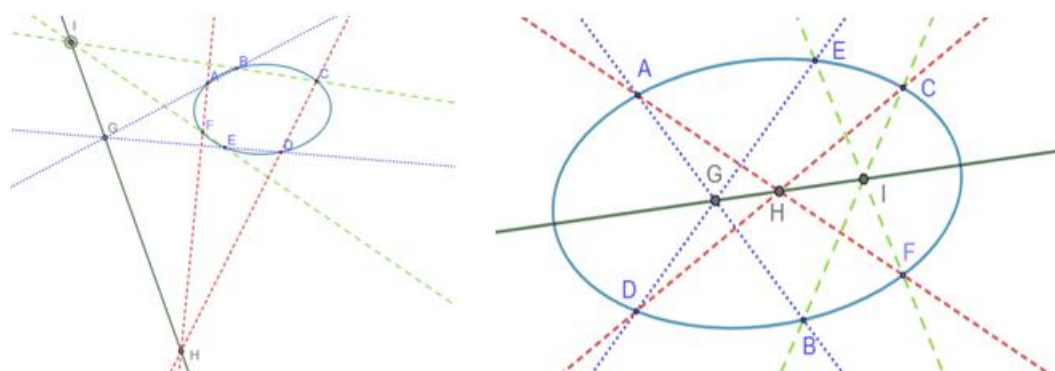
Dado un hexágono $ABCDEF$ cuyos vértices se encuentran sobre la misma cónica, entonces los puntos determinados por:

- $AB \cap DE$
- $BC \cap EF$
- $CD \cap FA$

son colineales.

Como lo muestra la **Figura 8**, el teorema demuestra, sin importar la forma del hexágono convexo, cóncavo o auto - intersecante, mientras sus vértices permanezcan sobre una misma cónica, las intersecciones de los lados opuestos siempre estarán alineadas. Esta propiedad es invariante por proyección, consolidando el valor del resultado dentro de la estructura axiomática de la geometría proyectiva (Coxeter, 2007).

Figura 8
Teorema de Pascal



Nota. Elaboración propia en GeoGebra.

2.1.4.3. Plano de Fano.

El plano de Fano es el plano proyectivo finito más simple y se denota como $PG(2,2)$, correspondiente al plano proyectivo de dimensión dos sobre el cuerpo finito F_2 . Esta estructura está compuesta por exactamente siete puntos y siete rectas, cumpliendo los axiomas fundamentales de incidencia: por cualesquiera dos puntos distintos pasa una única recta y dos rectas distintas se intersecan en un único punto. Cada recta contiene exactamente tres puntos, confiriendo al plano una simetría estructural característica de los planos proyectivos finitos (Coxeter, 2007).

Desde el punto de vista algebraico, el plano de Fano puede construirse a partir del espacio vectorial F_2^3 , considerando como puntos las clases de equivalencia de los vectores no nulos bajo la relación de proporcionalidad

$$(x, y, z) \sim (\lambda x, \lambda y, \lambda z), \lambda \in F_2^*,$$

donde λ representa un escalar nulo del cuerpo finito F_2 y $F_2^* = \{1\}$ es el conjunto de sus elementos invertibles. Esta relación establece que dos vectores representan el mismo punto si uno se obtiene del otro multiplicando todas sus coordenadas por un mismo escalar no nulo. Sin embargo, como en F_2 el único escalar nulo es 1, cada clase de equivalencia está formada por un único vector no nulo. En consecuencia, los siete puntos del plano pueden representarse mediante las coordenadas homogéneas

$$(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1), (1,1,1).$$

Las rectas del plano de Fano corresponden a los subconjuntos de puntos que satisfacen ecuaciones lineales homogéneas de la forma

$$ax + by + cz = 0, a, b, c \in F_2,$$

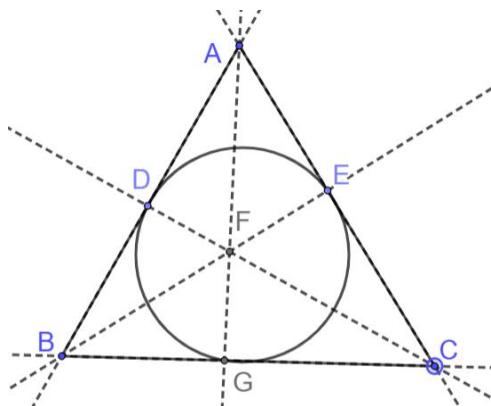
no todos nulos, garantizando así la contenencia de tres puntos en cada recta (Coxeter, 2007).

Estas propiedades permiten establecer resultados fundamentales del plano. En primer lugar, el número de puntos y rectas coinciden y es igual a $q^2 + q + 1$ con $q = 2$, confirmando la cardinalidad mínima no trivial de esta geometría proyectiva finita. Además, la unicidad de las rectas determinada por dos puntos puede verificarse algebraicamente: dados dos puntos distintos representados por vectores no nulos de F_2^3 , el subespacio generado define una única ecuación lineal homogénea y, por lo tanto, la contenencia en una recta.

Como ejemplo explícito, los puntos $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(1,1,0)$ satisfacen la ecuación $z = 0$, por lo que son colineales y determinan una recta del plano de Fano. Tal caso evidencia cómo la colinealidad puede caracterizarse de manera puramente algebraica, reforzando el carácter no métrico de esta geometría.

Desde una perspectiva geométrica, el plano de Fano suele representarse mediante un diagrama triangular que incluye puntos en los vértices, en los lados y un punto central, acompañado de una circunferencia que simboliza una de las rectas. No obstante, esta construcción es únicamente ilustrativa, ya que las rectas del plano no deben interpretarse como rectas euclidianas, sino como conjuntos abstractos de puntos definidos exclusivamente por relaciones de incidencia. En la **Figura 9** muestra un esquema del plano de Fano, que permite visualizar claramente que cada recta contiene tres puntos y que cada punto pertenece a tres rectas distintas.

Figura 9
Plano de Fano



Nota. Elaboración propia en GeoGebra.

Finalmente, el plano de Fano constituye un ejemplo esencial para el estudio axiomático de la geometría proyectiva, pues permite analizar con rigor conceptos como colinealidad, concurrencia y dualidad punto–recta en un contexto finito. Su estructura algebraica y su

simplicidad combinatoria lo convierten en una herramienta conceptual y didáctica de gran valor para introducir razonamientos formales en niveles avanzados del pensamiento geométrico.

En este trabajo no se incluyen las demostraciones formales de los teoremas de Desargues y Pascal, ni de las propiedades estructurales del plano de Fano, dado que existen múltiples demostraciones para cada uno de estos resultados, tanto desde enfoques geométricos como algebraicos y axiomáticos. En lugar de ello, se privilegia la comprensión conceptual y el uso didáctico de estas ideas en el diseño de la secuencia de tareas. No obstante, se proporcionan las referencias bibliográficas correspondientes para que el lector interesado pueda consultar dichos desarrollos y profundizar en los fundamentos teóricos de la geometría proyectiva.

2.1.5. Fundamentación teórica del uso de modelos no euclidianos en la transición proyectiva

El tránsito de la geometría euclidiana a la proyectiva no es un proceso automático ni lineal. De acuerdo con la Teoría de las situaciones didácticas de Brousseau (2007), ciertos conceptos previos, pese a ser beneficiosos en el sistema en el que se desarrollaron, pueden convertirse en obstáculos epistemológicos si el estudiante se enfrenta a un nuevo sistema conceptual. En geometría, la noción de “*recta*”, u otros que parecen muy elementales e intuitivos y que ha sido desarrollados bajo el paradigma euclidiano – vinculada con la “*rectitud*” o la “*linealidad*”, para el caso de la recta, el paralelismo absoluto y la distancia – actúan como un obstáculo de este tipo al momento que el estudiante tiene que entender un espacio en el que las relaciones esenciales son la proyección y la incidencia, y en el que dos rectas cualesquiera siempre se cruzan en algún punto.

Para contribuir a superar este obstáculo, la presente propuesta incorpora el modelo del *disco de Poincaré* como un recurso de transición. Desde el punto de vista matemático, el *disco*

de Poincaré es un modelo de la geometría hiperbólica en el que los puntos corresponden al interior de un disco abierto, mientras que las rectas hiperbólicas, denominadas geodésicas, se representan mediante arcos de circunferencia ortogonales a la circunferencia que delimita el disco. Los diámetros constituyen un caso particular de estas geodésicas, pues también son ortogonales a la frontera del disco (Anderson, 2005).

Además, Anderson (2005) señala que el modelo del *disco de Poincaré* es conforme, es decir, preserva la medida de los ángulos entre las geodésicas, aunque no conserva las distancias euclidianas. Esta característica permite representar las propiedades de la geometría hiperbólica mediante figuras que pueden visualizarse en el plano euclidiano sin alterar las relaciones angulares fundamentales del sistema.

Con base en este fundamento matemático, el disco de Poincaré se emplea en la presente propuesta como un recurso didáctico y no como un contenido destinado a la enseñanza formal de la geometría hiperbólica. Su finalidad es generar una ruptura con la representación exclusivamente euclidiana de la recta. Al enfrentarse a un sistema donde las "rectas" se representan mediante curvas, el estudiante se ve obligado a cuestionar la idea de que la rectitud constituye una característica universal de todos los espacios geométricos y comienza a reconocer que dicha representación depende del sistema geométrico considerado. En este sentido, Camargo y Acosta (2012) sostienen que el aprendizaje de la geometría se fortalece cuando los estudiantes exploran modelos alternativos que les permiten diferenciar las propiedades estructurales de aquellas que son específicas de un determinado sistema geométrico.

Esta disonancia cognitiva ayuda al estudiante a captar una de las características fundamentales del espacio proyectivo real RP^2 : la falta de paralelismo absoluto. En esta estructura, cualquier par de rectas se intersecan en un único punto, incluso aquellas que en la

geometría euclidiana son vistas como paralelas, ya que se encuentran en un punto impropio o en el infinito. Darse cuenta de que el paralelismo no es una propiedad visual que se aplique de manera universal, sino que es una cualidad específica del sistema euclidiano, representa un paso importante hacia el razonamiento proyectivo.

Desde la perspectiva del enfoque que ofrece los niveles de razonamiento de van Hiele, la utilización de modelos no euclidianos como el disco de Poincaré surge por la necesidad de ofrecer al estudiante oportunidades para la exploración visual que preceden a la formalización del conocimiento. Los niveles iniciales del modelo -reconocimiento y análisis- exigen que el estudiante se involucre con diversas representaciones concretas sobre figuras geométricas antes de poder entender sus características relacionales y estructurales. En este contexto, el disco de Poincaré constituye una situación didáctica que, en términos de Brousseau (2007), propicia que el estudiante interactúe con el medio, confronte sus ideas previas y construya nuevas explicaciones sin que el profesor proporcione de manera inmediata las definiciones, las interpretaciones o las conclusiones que se espera que los estudiantes elaboren por sí mismos. El papel del docente consiste en diseñar y gestionar la situación didáctica, orientando el proceso cuando sea necesario, pero permitiendo que la validación de las ideas emerja principalmente de la interacción del estudiante con el medio y con las tareas propuestas. Es precisamente en esa discrepancia donde puede producirse un aprendizaje significativo.

Finalmente, el uso intencionado de modelos que no son euclidianos permite que el razonamiento del estudiante progrese hacia grados más altos de abstracción, donde las figuras geométricas ya no se describen a partir de sus características métricas perceptibles, sino que se definen únicamente a través de sus vínculos, como la incidencia. Este cambio es un requisito fundamental para entender la infraestructura del plano proyectivo y para asimilar los conceptos

clave que articula esta propuesta: la colinealidad, la concurrencia, el punto de fuga y los invariantes proyectivos.

2.2. Marco teórico

2.2.1. Marco didáctico: *El modelo de van Hiele*

El modelo de van Hiele, como explica Fernández (2024), constituye un aporte clave para la didáctica de la geometría, al proponer que el aprendizaje geométrico se desarrolla mediante niveles de razonamiento secuenciales y jerarquizados. Estos niveles permiten clasificar el pensamiento geométrico del estudiante y diseñar tareas didácticas acordes con el desarrollo cognitivo de estos.

2.2.1.1. Fases de aprendizaje según van Hiele

La propuesta se centra en tres aspectos gravitantes alrededor del modelo presentado en los mediados del siglo XX por los esposos van Hiele y en particular desde el contexto didáctico a saber:

1. El modelo de van Hiele para la enseñanza de la geometría.
2. El cómo incluir conceptos nuevos en geometría mediante fases de aprendizaje propuestas.
3. El cómo se debe introducir la geometría proyectiva en el aula para la educación media.

Como parte del proceso investigativo, se buscó involucrar la propuesta de van Hiele para el diseño de las tareas propuestas y el desarrollo de su implementación. Inicialmente se debe comprender detalladamente en qué consiste el modelo de van Hiele y cómo interviene en el aprendizaje de la geometría. Fernández (2024), indica que la propuesta de van Hiele se puede considerar como uno de los mejores aportes a la educación en geometría del siglo XX ya que en él se establece cómo el aprendizaje de la geometría se logra mediante el progreso en distintos

niveles de razonamiento. Estos niveles están ordenados y secuenciados, es por esto por lo que los estudiantes no podrán avanzar a niveles superiores si no han logrado superar los anteriores.

Según Fernández (2024), sostiene que los niveles se describen de la siguiente manera:

Nivel 1 (Reconocimiento)

En este nivel los estudiantes razonan únicamente mediante las representaciones visuales de los objetos geométricos. Además de lograr una clasificación por apariencia, suelen fijarse en las propiedades irrelevantes o no significativas del objeto tales como tamaños o colores sin realizar generalizaciones. Por ejemplo: “El cuerpo tiene una forma como bola o pelota.”

Nivel 2 (Análisis)

Los estudiantes en este nivel logran analizar los objetos geométricos según sus componentes desde un punto de vista observacional. Aún no se logra identificar las propiedades necesarias y suficientes para definir la naturaleza de un objeto geométrico, esto es sus invariantes. Por ejemplo: “una esfera tiene un radio y un diámetro”

Nivel 3 (Clasificación)

Los estudiantes logran construir razonamientos informales basadas en las propiedades de los objetos para deducir nuevas. No obstante, no se logra comprender la necesidad de usar justificaciones o demostraciones formales ni de crearlas. Ejemplo: “En una esfera todos los puntos están a una misma distancia de un centro”.

Nivel 4 (Deducción formal)

En este nivel, los estudiantes logran realizar razonamientos lógicos formales. Son capaces de construir demostraciones que garantizan la formalidad de una afirmación en geometría. Ejemplo: “En una esfera, el radio trazado al punto de tangencia es perpendicular al plano tangente”

Nivel 5 (Rigor)

Se considera el nivel máximo al que puede llegar un estudiante en razonamiento geométrico. En este nivel, no se manejan demostraciones en un solo sistema axiomático, sino que el estudiante es capaz de analizar el mismo objeto en distintos sistemas, reconociendo así, como un mismo concepto puede variar dependiendo del sistema acordado. Ejemplo: n -bola es el conjunto de puntos en R^n tal que la distancia desde un punto fijo llamado centro una distancia fija llamada radio”

Esta descripción por cada uno de los niveles de razonamiento de van Hiele permite, en el desarrollo de la propuesta, ubicar la planificación y gestión de tareas educativas en el o los niveles pertinentes.

2.2.1.2. Incluir conceptos nuevos en geometría mediante fases de aprendizaje

A medida que los estudiantes, y en general las personas, logran adquirir destrezas y experiencia con el trabajo de algunos objetos geométricos, se hace posible su avance hacia un nivel superior. Para lograr una correcta transición en distintos niveles, los van Hiele, también propusieron un desarrollo didáctico organizado. La propuesta implica la introducción de nuevos conceptos en geometría a través de fases de aprendizaje (Corberan Salvador et al., 1994 citado por Fernández Castro. 2024). A continuación, se realiza una breve descripción de ello; el lector interesado puede ampliar los conceptos teóricos en las referencias de base.

Fase 1 (Información)

Como primera interacción, el docente deberá informar a sus estudiantes sobre cuáles serán los nuevos objetos de estudio a tratar. Este primer momento, permitirá a los estudiantes saber en qué se van a enfocar sus nuevos conocimientos. A su vez, permite al docente conocer sobre los saberes previos con los que cuentan sus estudiantes.

Fase 2 (Orientación Dirigida)

Se espera que, en esta fase los estudiantes puedan resolver algunos problemas básicos relacionados con el nuevo objeto de estudio. Estos problemas han debido ser cuidadosamente seleccionados con el propósito de dirigir al estudiante a los conceptos de interés, así mismo, el diseño debe prever situaciones que impliquen la identificación de dificultades con el fin de superarse con el acompañamiento docente.

Fase 3 (Explicitación)

En esta fase, se pretende que los estudiantes logren compartir su experiencia sobre las tareas propuestas. El objetivo es analizar detalladamente el progreso propio y de los compañeros en la resolución de las tareas, además, mediante el proceso de comunicación, los estudiantes logran adquirir nuevo vocabulario asociado al objeto de estudio. Esta fase se contempla como una socialización y una aproximación, desde una puesta en común al conocimiento institucionalizado.

Fase 4 (Orientación Libre)

A partir de este momento, se presentan a los estudiantes tareas más abiertas, que potencialicen procesos de resolución de problemas y les permitan formular estrategias orientadas al uso de los conceptos aprendidos, elaborar conjeturas y aproximarse a su validación. Se pretende dejar de lado la *orientación dirigida*, e involucrar problemas donde sea necesario combinar conceptos recientemente interiorizados. Sin embargo, la práctica ha mostrado que esta fase tampoco puede ser tan libre como se desee y para ello el docente puede, y muy seguramente debe dar, pequeños indicios sobre cómo abordar los problemas para su posterior solución. la orientación libre no equivale a libre de orientación.

Fase 5 (Integración)

En esta última fase, el objetivo no es interiorizar conceptos nuevos, más bien, se trata de relacionar los conceptos aprendidos con campos abordados en situaciones anteriores. El docente debe proponer tareas que promuevan la clasificación, comparación y combinación de los conocimientos obtenidos en las fases, con el fin de garantizar una perspectiva más global de su aprendizaje en geometría.

2.2.1.3. La secuencia de tareas como estrategia didáctica

Con las orientaciones generales del modelo van Hiele y sus fases, se propone en el presente trabajo de grado, desarrollar una propuesta de tareas innovadoras, con el fin de promover el aprendizaje significativo en cuanto a procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría proyectiva fundamental, en educación media. Por esta razón que se tiene en cuenta lo propuesto por Bernal y Rojas Velázquez (2022) sobre cómo introducir asertivamente la geometría proyectiva en el aula. Dentro de su esquema proponen 5 agentes a considerar.

1. Usar problemas retadores: Este agente apunta a seleccionar cuidadosamente cada situación que pretende involucrar al estudiante, a fin de incentivar su visualización y exploración necesarias para identificar y expresar características propias de los objetos geométricos involucrados.
2. Integración de geometría dinámica: La exploración mediada por la “manipulación” en un entorno de geometría dinámica permite al estudiante visualizar, construir e identificar entidades proyectivas de manera dinámica e interactiva con multiplicidad de casos que pueden ser rápidamente explorados y analizados sin los inconvenientes propios de las construcciones en papel y lápiz. Se considera necesario articular los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría proyectiva con entornos de geometría dinámica. Lo anterior no significa que se dejen de lado de manera absoluta las construcciones a

papel y lápiz, pues estas aportan otros elementos que posiblemente la geometría dinámica oculta (v.g. la imprecisión de las construcciones, de las cuales también se puede aprender).

3. Fases de Aprendizaje progresivos: Bernal y Rojas Velázquez (2022) concuerdan con Corberan Salvador et al., (1994) (citado por Fernández, 2024) en estructurar las tareas propuestas según las cinco fases de aprendizaje progresivo mencionadas en el esquema van Hiele. Consideran de vital importancia el propender por facilitar en el estudiante un progreso gradual desde lo concreto hasta lo abstracto, proceso fundamental hacia el desarrollo del pensamiento matemático avanzado.
4. Clasificar el desarrollo del pensamiento geométrico: Usar el modelo van Hiele garantiza la clasificación en niveles del razonamiento geométrico de los estudiantes a partir de sus producciones escritas o verbales. Se debe considerar que este enfoque está centrado en el aprendizaje y no en la enseñanza, por ende, si bien se proponen unas tareas a desarrollar, su implementación no garantiza avances en el aprendizaje o mejoras en los niveles de comprensión de los objetos o los procesos relacionados.
5. Evaluación permanente: Evaluar de manera adecuada a los estudiantes durante todo el proceso, permite al docente, además de clasificar el nivel de razonamiento geométrico, incluir tareas de reflexión, adaptar las tareas a necesidades específicas y comparar las distintas estrategias que se presentaron durante el desarrollo de las tareas. Esto apunta a cambiar el rol del docente de instructor a guía y retroalimentador del proceso, situando al estudiante como el centro de la acción educativa.

Lo anterior nos lleva a afirmar que el modelo de van Hiele proporciona una estructura teórica robusta y consistente con el propósito de la propuesta, orientada a clasificar el

razonamiento geométrico en distintos niveles, en particular sobre la conceptualización de los elementos básicos de la geometría proyectiva. Así, la transición de un nivel a otro se orientará a través de tareas diseñadas en distintas fases de aprendizaje, facilitando la interiorización gradual de nuevos conceptos geométricos los cuales, en conjunto con los entornos de geometría dinámica, promoverán la integración de las proyecciones para potenciar el reconocimiento, análisis y clasificación de sus componentes en estudiantes de educación media.

2.2.2. Marco tecnológico

En este trabajo de grado, el uso de materiales tangibles como digitales son un conjunto de instrumentos mediadores entre los estudiantes y el objeto geométrico. Esta mediación promueve una transición desde la percepción sensorial directa a la deducción formal propia de la geometría proyectiva.

Los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) indican que la enseñanza de la geometría debe apoyarse en recursos orientados a la indagación, visualización y la manipulación de elementos geométricos, permitiendo así al estudiante desarrollar significados a través de la experiencia directa con figuras y sus características. De manera similar, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) destacan la necesidad de cultivar habilidades de representación en diferentes sistemas, incluyendo herramientas tecnológicas como facilitadoras del aprendizaje. Esto evidencia que la limitación señalada en el planteamiento del problema no proviene de una ausencia normativa, sino de la distancia entre estas orientaciones curriculares y su implementación efectiva en las aulas colombianas, donde la enseñanza de la geometría tiende a reducirse al cálculo de áreas y perímetros. En alineación con alineación con la intención formativa de estos lineamientos, más que como respuesta a un vacío

curricular, la propuesta actual combina el uso de GeoGebra como entorno principal de exploración con el trabajo con recursos tangibles, poniendo en juego diferentes estructuras cognitivas.

Desde un marco teórico, la integración de la tecnología en el aula se fundamenta en los planteamientos de Sandoval Cáceres y Moreno Armella (2012), quienes sostienen que las tecnologías digitales, en particular los entornos de geometría dinámica, actúan como herramienta mediadora entre la percepción y el aprendizaje del conocimiento matemático, bajo dos principios: uno cognitivo, según el cual todo conocimiento está mediado por la acción de una herramienta material o simbólica, y otro epistemológico, según el cual dicha mediación nunca es neutra. Bajo esta luz, el proceso de aprendizaje no sucede de forma aislada e interna; por el contrario, se lleva a cabo a través de la interacción del estudiante con los artefactos, los signos y otros individuos en el ámbito educativo.

Esta mediación resulta particularmente relevante en la geometría proyectiva, cuyas propiedades son relacionales y no métricas: al depender de relaciones de incidencia, colinealidad y concurrencia; y no de medidas exactas, el entorno dinámico de GeoGebra permite al estudiante explorar estas relaciones sin que la precisión de la representación dependa de sus habilidades manuales con instrumentos como la regla o el compás. Investigaciones recientes sobre el uso de sistemas de geometría dinámica confirman esta misma idea: Camacho-Machín et al. (2025) señalan que la precisión de estos entornos "no depende de las habilidades del estudiante en el uso de un instrumento como el compás, regla u otro artefacto" (p. 154), lo que permite centrar la atención del estudiante en las relaciones matemáticas mismas antes que en la exactitud del trazo. Esto vuelve a GeoGebra un recurso especialmente apto para el contenido relacional propio de la geometría proyectiva.

El componente tecnológico principal de esta propuesta es GeoGebra, software de geometría dinámica capaz de combinar representaciones geométricas, algebraicas y numéricas en un entorno interactivo único. En este software, como indican Camargo, et al., (2010), la función de manipulación se transforma en un recurso epistémico fundamental: al mover un punto o figura, el aprendiz puede diferenciar entre propiedades dependientes de una configuración específica y aquellas constantes a pesar de las transformaciones sobre el objeto. Esta diferenciación es crucial en la geometría proyectiva, donde el foco de estudio son las características conservadas independientemente de medidas o ángulos.

Esta mediación instrumental se articula, en el plano concreto de las representaciones que el estudiante produce, con la teoría de los registros de representación semiótica propuesta por Duval (2017): mientras las ideas anteriores explican por qué y cómo la tecnología media el aprendizaje, Duval permite analizar específicamente qué representaciones produce el estudiante al usar GeoGebra. Según este enfoque, GeoGebra permite conectar diversos tipos de representación: el figural, donde el estudiante observa las configuraciones proyectivas; el verbal, orientado a la explicación y argumentación; y el simbólico, donde puede codificar sus representaciones usando coordenadas homogéneas o relaciones algebraicas. Duval sostiene que la capacidad de relacionar al menos dos registros distintos es esencial para una comprensión matemática auténtica, y representa uno de los objetivos principales de la serie de tareas elaboradas en este estudio.

La conexión entre GeoGebra y las etapas del aprendizaje según van Hiele es igualmente evidente. Durante la fase informativa, la herramienta posibilita mostrar configuraciones proyectivas visualmente y de forma comprensible, activando los conocimientos previos del estudiante. En la orientación guiada, facilita realizar construcciones dirigidas donde se reconocen

las relaciones tanto incidentes como concurrentes. Durante la explicitación, ayuda a comunicar los descubrimientos y a crear conjuntamente un vocabulario geométrico. Por último, en las etapas finales (orientación libre e integración), promueve explorar nuevas configuraciones independientemente y sintetizar las ideas desarrolladas durante la secuencia.

Es importante aclarar que el uso de GeoGebra no sustituye el trabajo con materiales físicos, sino que actúa como un complemento en una interacción de tipo híbrido. Las construcciones realizadas con regla y compás, junto con el uso de figuras tangibles, proporcionan una experiencia práctica y manual que revela las limitaciones de la representación hecha a mano. Según lo mencionan Bernal y Rojas Velázquez (2022), la falta de precisión en el trazo puede servir como un motivo de reflexión sobre la distinción entre la figura empírica y el objeto geométrico ideal, lo cual también tiene un valor educativo. La fusión de ambos tipos de mediación enriquece la generación de significados y promueve una comprensión más profunda de los conceptos proyectivos que fundamentan esta propuesta.

2.2.3. Enfoque curricular de la Geometría Proyectiva en la educación media

La fundamentación curricular de esta propuesta se sustenta en los Lineamientos Curriculares del Ministerio de Educación Nacional (1998) y en los aportes teóricos de la didáctica de la matemática.

En términos generales, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) establecen que la enseñanza de la geometría debe contribuir al desarrollo de tres competencias: conceptuales, procedimentales y comunicativas, orientadas a comprender las formas, el espacio y las relaciones de ubicación y transformación. En particular, para la educación media, los estándares destacan la necesidad de promover la representación gráfica, la

abstracción y la modelación geométrica. Se enfatiza la importancia de capacitar a los estudiantes para interpretar y representar objetos tridimensionales mediante proyecciones, familiarizándose con la noción de transformación geométrica, entendida como una relación entre figuras donde se preservan ciertas propiedades (MEN, 2006).

La geometría proyectiva, en este sentido, ofrece un marco ideal para materializar estos objetivos curriculares, articulando las nociones de transformación, invariancia y representación espacial. A través del estudio de las cónicas y las proyecciones, el estudiante no sólo consolida su comprensión de las relaciones espaciales, además, desarrolla una visión integrada del conocimiento matemático.

Asimismo, la presente propuesta entra en sintonía con los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998), planteando la necesidad de promover un aprendizaje activo, basado en la resolución de problemas y en la exploración con recursos tecnológicos. El uso de herramientas como GeoGebra, junto con la organización de las tareas según los niveles de van Hiele, favorece la articulación entre los saberes geométricos y las competencias generales del currículo, tales como el pensamiento crítico, la argumentación y la creatividad.

Ahora bien, aunque la geometría proyectiva no aparece explícitamente en los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA), su incorporación en la educación media es coherente con las competencias de pensamiento espacial que el currículo colombiano promueve. Los DBA trabajan ideas como semejanza, proporcionalidad, transformaciones geométricas y coordenadas, las cuales funcionan como bases conceptuales para introducir nociones proyectivas tales como el punto de fuga, la proyección central y la concurrencia en el infinito.

Por otra parte, el análisis de la perspectiva en contextos específicos como el arte, la arquitectura o el diseño fortalece la conexión entre la matemática escolar, la realidad cultural y

visual del estudiante, además, permite explorar aspectos históricos y socioculturales, en consonancia con los lineamientos de la NCTM (2000) sobre promover conexiones y fortalecer la comunicación matemática. A su vez, la geometría proyectiva favorece procesos de modelación, entendida como el vínculo entre fenómenos del mundo real y estructuras matemáticas (Blum y Leiß, 2007), pues la perspectiva constituye un modelo formal de representación tridimensional. Por consiguiente, como un elemento central, la propuesta inicia con una aproximación histórica, desde la narrativa occidental, hacia la geometría proyectiva destacando los orígenes artísticos y técnicos (creación de la perspectiva) y las primeras formalizaciones teóricas que luego darían origen a un nuevo campo de estudio de la geometría: la geometría proyectiva.

3. Capítulo 3 Marco metodológico

En este capítulo se describe el diseño de la propuesta de intervención pedagógica. El propósito central de la misma es analizar la comprensión de nociones básicas de la Geometría Proyectiva mediante una secuencia de cuatro tareas articuladas, a saber: 1) *El Problema del Artista*, 2) *Proyecciones*, 3) *El plano de Fano* y 4) *El Teorema de Desargues* y fundamentadas en los niveles de razonamiento de van Hiele (1986) (ver *Anexo 2*, *Anexo 3*, *Anexo 4* y *Anexo 5*). De igual manera, se presenta el tipo de investigación desarrollado, así como las estrategias e instrumentos empleados para la recolección y el análisis de la información.

3.1. Enfoque de investigación

El trabajo de grado se sitúa en un enfoque cualitativo de investigación, el cual se define como una forma de comprender los fenómenos educativos por medio de la interpretación de significados, las acciones y los procesos llevados a cabo por los individuos en su entorno natural. Según Hernández (2014), el enfoque cualitativo se centra en interpretar la realidad desde el punto de vista de los involucrados, dando prioridad al análisis exhaustivo de sus experiencias, interacciones y significados, en lugar de la cuantificación de variables.

Por la misma línea, Flick (2007) menciona que la investigación cualitativa favorece el análisis de la complejidad de los entornos sociales y educativos, haciendo énfasis en la naturaleza cambiante, interpretativa y contextual de los procesos de aprendizaje. A diferencia de métodos cuantitativos, que se enfocan en la generalización de hallazgos, el método cualitativo persigue una comprensión profunda de procesos dentro de su contexto particular.

En el área de la enseñanza de las matemáticas, este método es particularmente relevante, ya que facilita el estudio de cómo los estudiantes crean significados, hacen suposiciones y

establecen conexiones a partir de su interacción con tareas, herramientas y otros individuos. De esta manera, como sugiere Camargo (2021), la investigación cualitativa permite examinar los fenómenos educativos desde un enfoque interpretativo, enfocándose en las producciones, conversaciones y comportamientos de los estudiantes durante el aprendizaje.

En este sentido, el interés de la propuesta no se centra en la medición estadística de resultados ni en la cuantificación del desempeño de los estudiantes, sino en el análisis y la interpretación de sus producciones para determinar si existen evidencias de tránsito entre niveles de razonamiento geométrico durante el estudio de geometría proyectiva. Para ello, se analiza cómo los estudiantes interactúan con una secuencia de tareas diseñada para favorecer procesos de exploración, visualización, descripción y formulación de conjeturas.

Particularmente, la propuesta se sustenta en los niveles de razonamiento geométrico de van Hiele, orientando el trabajo hacia un tránsito progresivo desde el nivel de visualización hasta formas iniciales de conjeturación, entendidas como la capacidad de identificar regularidades, establecer relaciones y proponer explicaciones a partir de la exploración geométrica. En este proceso, GeoGebra se constituye como herramienta mediadora fundamental, posibilitando la manipulación dinámica de representaciones, la observación de invariantes y la experimentación con configuraciones geométricas; favoreciendo la construcción de significados en torno a algunas nociones básicas de la geometría proyectiva.

3.2. Tipo de investigación

En coherencia con lo expuesto, la investigación se desarrolla bajo la metodología del experimento de enseñanza. De acuerdo con Camargo (2021) esta estrategia consiste “en el diseño, implementación y evaluación de una secuencia de enseñanza organizada con la meta de poner en funcionamiento una conjetura sobre un aprendizaje específico.” (p. 86). En este trabajo,

la conjetura de investigación establece que una secuencia de tareas mediada por materiales tangibles y por GeoGebra, fundamentada en las fases de aprendizaje de van Hiele, favorece el tránsito de los estudiantes de grado once desde el nivel de reconocimiento hacia niveles iniciales de análisis y deducción informal en el estudio de la geometría proyectiva. Dicha metodología resulta idónea para este trabajo, pues permite a los estudiantes interactuar socialmente mediante las tareas planteadas y, de esta manera construir conocimientos en un contexto educativo.

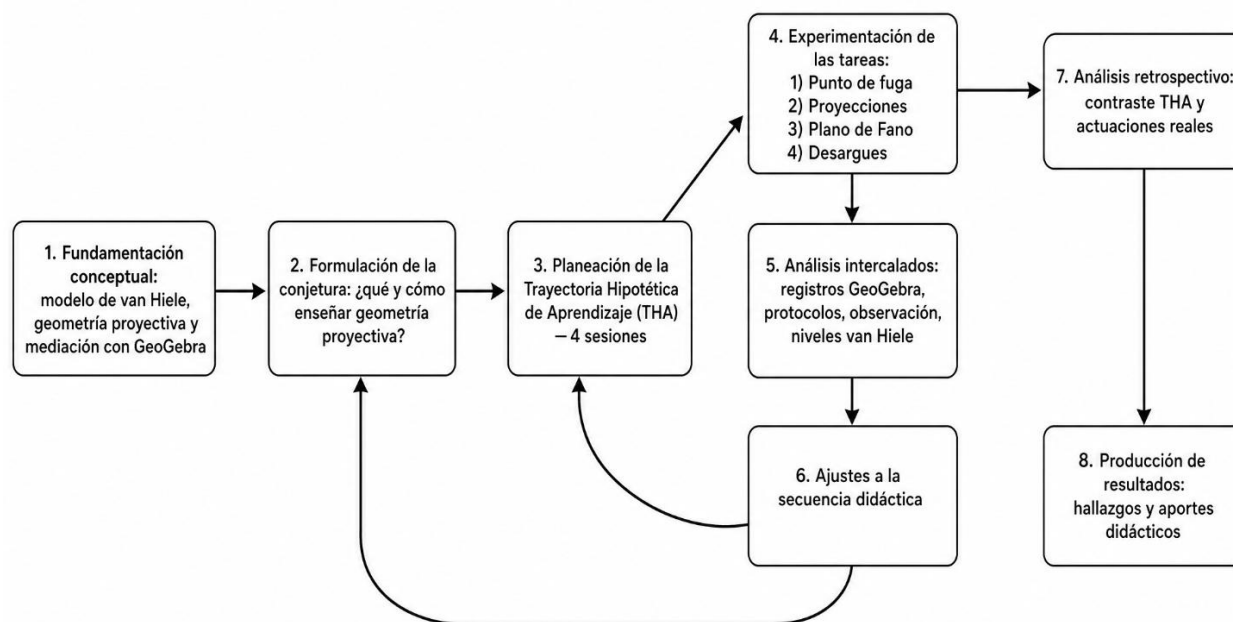
En esta propuesta, el experimento de enseñanza se llevará a cabo a través de una secuencia de tareas fundamentada en una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA). Esta trayectoria pretende promover el avance por los niveles de razonamiento de van Hiele, empleando como técnica la observación sistemática y el análisis de producciones de los estudiantes a lo largo de las intervenciones, se analizará el manejo de materiales tangibles y el uso de entornos virtuales interactivos (como GeoGebra).

Este carácter cíclico de las intervenciones permitirá validar las tareas diseñadas y realizar un análisis retrospectivo orientado a la formalización del conocimiento. Con ello, se busca formalizar la comprensión sobre el punto de fuga, la colinealidad y la arquitectura del plano proyectivo real, integrándose como un cuerpo teórico articulado conceptualmente.

Con el propósito de representar de manera integral la lógica operativa del experimento de enseñanza aplicado al presente estudio, se adapta el plan de ejecución propuesto por Camargo (2021), incorporando los componentes específicos de la investigación: el modelo de van Hiele como marco analítico, la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) estructurada en cuatro sesiones -Punto de Fuga, Proyecciones, Plano de Fano y Teorema de Desargues-, y GeoGebra como mediador cognitivo. La **Figura 10** sintetiza este plan de ejecución y evidencia los dos ciclos de retroalimentación que dotan al proceso de su carácter iterativo y reflexivo.

Figura 10

Plan de ejecución del experimento de enseñanza aplicado a la enseñanza de la geometría proyectiva



Nota. Adaptación del plan de ejecución para la estrategia de experimento de enseñanza propuesto por Camargo (2021, p. 89). Elaboración propia.

Como se observa en la **Figura 10**, el proceso parte de la fundamentación conceptual y la formulación de la conjetura, avanza hacia la planeación de la THA y se materializa en la experimentación de las cuatro tareas. Durante la implementación se efectúan análisis intercalados que conducen a ajustes en la secuencia didáctica; estos ajustes generan dos bucles de retroalimentación: uno hacia la planeación y otro hacia la formulación de la conjetura. Finalmente, el análisis retrospectivo permite contrastar la trayectoria hipotética con las actuaciones reales de los estudiantes y derivar la producción de resultados.

3.3. Fases del experimento de enseñanza

El experimento de enseñanza, propuesto por Camargo (2021), constituye una estrategia metodológica específica en la investigación de la educación matemática centrado en el diseño,

implementación y análisis de secuencias didácticas con el objetivo de entender los procesos de aprendizaje de los estudiantes. A diferencia de otros métodos, esta visión no solo se dedica a examinar eventos educativos, sino que implica la acción directa del investigador dentro del aula a través de la elaboración de secuencias de tareas basadas en fundamentos teóricos.

Esta metodología se reconoce por su carácter cíclico e interactivo, dado que el investigador no sólo elabora las tareas basadas en teorías, sino que también examina de forma constante las respuestas, interacciones y producciones de los estudiantes, modificando la intervención cuando resulta necesario. En este sentido, el experimento de enseñanza vincula estrechamente la teoría y la práctica, pues las hipótesis sobre el aprendizaje se someten a pruebas en situaciones reales y luego se contrastan con las evidencias generadas por los estudiantes.

Asimismo, este método se basa en una estrategia interpretativa que coincide con el enfoque cualitativo. Este aspecto resulta debido a que se considera como principal fuente de entendimiento de cómo se construye el conocimiento a partir de las producciones, interacciones y discursos de los estudiantes. A partir de esta perspectiva, el interés más importante es entender en profundidad los procesos de aprendizaje en contextos concretos, no hacer generalizaciones de los resultados.

Desde ese punto de vista, el experimento de enseñanza está compuesto por tres fases claves: la preparación, la experimentación y el análisis retrospectivo. Dichas fases permiten la planificación sistemática del proceso de investigación, desde la formulación de las hipótesis sobre el aprendizaje hasta la interpretación de los resultados logrados. En coherencia con lo anterior, las fases que orientarán el desarrollo de la metodología de este trabajo de grado se describen a continuación.

3.3.1. Fase 1: Preparación (*Trayectoria Hipotética de Aprendizaje - THA*)

En esta fase comprende el diseño de los objetivos y la selección intencionada de tareas. El eje central de esta fase es la construcción de la THA, la cual articula las metas de aprendizaje, las tareas instruccionales y las hipótesis sobre el proceso de aprendizaje de los estudiantes (Camargo, 2021).

Los propósitos para esta intervención pretenden lograr:

1. Reconocer que las líneas paralelas se pueden representar como líneas convergentes en una perspectiva.
2. Interpretar la noción de punto de fuga como la representación del infinito en una dirección dada.
3. Comprender el plano proyectivo real (RP^2) como una extensión del plano euclidiano para explicar la intersección de todas las rectas.
4. Explorar modelos no-euclidianos y asimilar la representación del espacio en el disco de Poincaré, donde la naturaleza visual de la "recta" se transforma en curvas, manteniendo las relaciones de incidencia.
5. Construir y verificar las propiedades del plano de Fano, comprendiendo la geometría como un sistema consistente de reglas (7 puntos, 7 rectas) independiente de la representación euclidiana tradicional.
6. Formular el Teorema de Desargues mediante la exploración en geometría dinámica, estableciendo la conexión lógica entre la perspectiva desde un punto (conurrencia de vértices) y la perspectiva desde una recta (colinealidad de intersecciones).

Las tareas diseñadas se estructuraron para promover el tránsito por los niveles de razonamiento de van Hiele iniciando por el reconocimiento, análisis, deducción informal, etc. Estos elementos preparan la siguiente fase.

3.3.2. Fase 2: experimentación

Esta fase constituye el núcleo de la intervención en el aula, donde se ejecutan las sesiones de trabajo diseñadas en la THA. Siguiendo a Camargo (2021), la experimentación es un proceso dinámico donde el docente-investigador actúa como mediador de la interacción social y recolector de evidencias.

Durante la implementación, el proceso se desarrolla bajo las siguientes premisas:

a. Momento de exploración visual:

En este primer momento se centra en las tareas “*El problema del Artista*” y “*Proyecciones*”. El propósito es reconocer fenómenos geométricos, asociados a la proyección, desde la percepción intuitiva. Para ello se parte de experiencias concretas que permitan la aproximación intuitiva a lo que posteriormente será abordado desde la teoría. En particular, la tarea denominada “*El Problema del Artista*” busca la identificación de algunas rectas que, desde su percepción inicial, se consideran paralelas, al ser observadas bajo una determinada perspectiva dejan de verse como tales y, en cambio, parecen intersectarse en un punto.

Este tipo de experiencia resulta significativa, posibilitando una primera confrontación entre la intuición visual y la representación geométrica, favoreciendo procesos iniciales de reconocimiento y análisis y rompiendo con la preconcepción intuitiva e institucionalizada desde la educación primaria de “dos rectas son paralelas si no se cortan” lo cual usualmente va ligado a la representación visual y no conceptual.

En cuanto a la tarea de “*Proyecciones*” actúa como el puente conceptual hacia la formalización del infinito. Su propósito es la interpretación del punto de fuga; no solo como un recurso visual, sino como un elemento geométrico real en una dirección dada. Mediante la manipulación de haces de rectas concurrentes en GeoGebra, se fundamenta la comprensión de: en el plano proyectivo la intersección es una propiedad invariante.

b. *Momento de abstracción*

En este momento con las tareas “*Disco de Poincaré*” y “*El plano de Fano*” se busca introducir modelos donde las rectas son curvas o finitas, y es allí donde la fase de experimentación alcanza su punto crítico.

La tarea “*Disco de Poincaré*” se integra como un dispositivo de ruptura de la intuición. Al explorar un modelo donde las "rectas" se representan como arcos de circunferencia ortogonales a un borde, el estudiante se ve obligado a flexibilizar su definición previa de “línea”. El propósito es identificar las propiedades de incidencia, estas pueden mantenerse incluso cuando la representación visual cambia drásticamente. Esta tarea es el paso previo necesario para aceptar la geometría como una construcción basada en reglas y no solo en la percepción visual.

Una vez cuestionada la rigidez euclidiana, se introduce el *Plano de Fano* para desafiar la hegemonía de la geometría euclídea tradicional. Al explorar este sistema finito de siete puntos y siete rectas, los estudiantes deben comprender que una "recta" es una relación de pertenencia (incidencia) y no una entidad física. Esta tarea es crucial para consolidar el Nivel de Análisis, separando definitivamente el objeto geométrico de su representación física inmediata, fomentando la comprensión de reglas independientes de la métrica.

c. *Momento de validación y deducción*

El cierre del experimento se fundamenta en la búsqueda de invariantes y la formulación de conjeturas, consolidando los conceptos trabajados en una estructura lógica. Con la tarea “*El Teorema de Desargues*” finaliza el experimento de enseñanza realizando una comprobación de hipótesis. La intencionalidad es establecer una conexión lógica entre la perspectiva desde un punto (conurrencia de vértices) y la perspectiva desde una recta (colinealidad de intersecciones).

La mediación de GeoGebra permite realizar una comprobación de hipótesis haciendo uso del arrastre dinámico, y el objetivo es determinar una evidencia de que la propiedad de colinealidad se mantiene invariante ante cualquier transformación de los triángulos. De este modo, el estudiante formaliza su comprensión sobre la arquitectura del plano proyectivo real, integrando los conceptos de dualidad y colinealidad como un cuerpo teórico articulado.

3.3.3. Fase 3: *Análisis retrospectivo:*

En esta fase final, se realiza una revisión de las evidencias recolectadas (registros en GeoGebra, producciones escritas y observaciones de campo) con el propósito dar respuesta al objetivo central de la propuesta, el cual consiste en analizar la comprensión de nociones básicas de la geometría proyectiva a través de una secuencia de tareas fundamentada en los niveles de razonamiento de van Hiele.

En ese sentido, el análisis retrospectivo no se limita a detallar los resultados alcanzados, sino que desea interpretar los procesos de aprendizaje desarrollados durante la implementación, estableciendo un vínculo entre las hipótesis formuladas en la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje y las acciones reales vistas en el aula.

Para ello el análisis se fundamenta en los siguientes ejes:

- **Contraste de hipótesis:** Se confrontan los comportamientos previstos en el diseño instruccional con las rutas de solución y obstáculos manifestados por los estudiantes durante las sesiones. Esto permite validar la efectividad de las tareas o identificar la necesidad de ajustes en la secuencia didáctica.
- **Evaluación del tránsito de niveles:** Se realiza un análisis comparativo de las actuaciones iniciales (diagnóstico) y finales (validación) de los estudiantes. El foco está en determinar si hubo un avance efectivo en los niveles de razonamiento de van Hiele, identificando descriptores específicos como el paso del reconocimiento visual a la identificación de propiedades de incidencia y la formulación de conjeturas.
- **Institucionalización y síntesis:** Finalmente, el análisis retrospectivo permite sintetizar los hallazgos obtenidos para determinar en qué medida la secuencia de tareas y el uso de entornos de geometría dinámica contribuyeron a la comprensión conceptos tales como invariancia en el plano proyectivo, colinealidad y punto de fuga.

Así, el análisis retrospectivo posibilita evaluar la relevancia de la propuesta pedagógica y entender cómo los estudiantes desarrollan significados acerca de la geometría proyectiva, garantizando la coherencia entre el diseño, la ejecución y las metas del estudio.

De este modo, los hallazgos del análisis retrospectivo no solo permiten valorar el alcance de la propuesta implementada, sino que también sientan las bases para proyectar, con mayor precisión y fundamentación, el diseño de las tareas que se describen a continuación.

3.4. Análisis prospectivo de las tareas

El diseño de la instrucción se articula a través de cuatro sesiones, cada una concebida como un ciclo del experimento de enseñanza. Como se resume en la Tabla 2, la secuencia busca un tránsito progresivo por los niveles de razonamiento de van Hiele, partiendo de la ruptura

conceptual con la intuición euclidiana hasta la consolidación de la base conceptual presente en las estructuras proyectivas para lo cual se emplearán las herramientas de la geometría dinámica.

Tabla 2

Matriz de Diseño de la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA).

Fuente: Elaboración propia, basada en la propuesta de Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje de Camargo (2021) y los niveles de van Hiele (1986).

Sesión	Tarea principal	Mediador/ Recurso	Conflicto cognitivo/ Hipótesis	Nivel de razonamiento
El problema del artista	Calcar y prolongación de haces	Acetatos, imágenes y geometría dinámica GeoGebra	Proyección de líneas concurrentes hacia el punto de fuga	Nivel 1 - 2
Proyecciones	Proyección de esfera y disco de Poincaré	Fuente de luz, esfera y geometría dinámica GeoGebra	La rectitud como trayectoria geodésica	Nivel 2
Plano de Fano	Construcción de incidencias con 7 puntos y 7 rectas	Lana, puntos físicos y axiomas	La inexistencia del paralelismo: incidencia total en el infinito proyectivo	Nivel 2 - 3
Teorema de Desargues	Triángulos en perspectiva y arrastre	Geometría dinámica GeoGebra	Punto de concurrencia absoluta en el infinito	Nivel 3

3.4.1. Sesión 1: El problema del artista

En esta sesión tiene como objetivo la transición de la geometría métrica euclidiana a la geometría proyectiva mediante el estudio de la perspectiva renacentista. Se estructura tres tareas:

- 1) “*La ventana de Durero*” (calcar y analizar una imagen), 2) “*Puntos de fuga*” (análisis de imagen proyectiva) y 3) “*El piso de Baldosas*” (exploración mediante geometría dinámica GeoGebra)

- **Fase 1: Preparación**

En esta fase se diseña la contextualización histórica sobre el Renacimiento el cual sitúa al estudiante en la problemática presentada en esa época y los problemas que tenían los artistas y artesanos para representar la profundidad en un plano de trabajo. La tarea utiliza mediadores físicos (acetato) teniendo como instrucción de prolongar las rectas observadas en una imagen real en el acetato para descubrir algún patrón. Esto permite que el estudiante logre transitar desde una concepción de líneas paralelas; entendiendo que son líneas que nunca se cortan al visualizarlas convergiendo en un punto ideal. En la segunda tarea se quiere, a partir de una imagen, encontrar el lugar geométrico donde se cruzan las líneas, adicionalmente, de comprender la relación entre distancia y representación y diferencien el objeto de la representación.

Lo anterior permite a los estudiantes transitar por los siguientes niveles: Nivel 1 (reconocimiento), identifican los pasillos o los marcos de la ventana por apariencia general y Nivel 2 (análisis) al prolongar las líneas y observar su concurrencia, descubriendo de forma tangible que las reglas de la representación pueden contradecir su propia intuición euclidiana

- **Fase 2: Experimentación**

Durante esta fase, al propiciar la exploración e identificar líneas convergentes en un punto, surge la necesidad del concepto de “punto de fuga”. Asimismo, se realizan intervenciones con preguntas como: *¿Qué afirmación matemática, con respecto a rectas, consideran que no se cumple?* y *¿Qué parece suceder con las rectas paralelas en la perspectiva?*

- **Fase 3: Análisis retrospectivo**

Después de realizar la exploración, los estudiantes comienzan a redefinir el concepto de paralelas en entornos a partir de una perspectiva. Donde las líneas rectas intuitivamente paralelas, parecen encontrarse o converger en un determinado punto, esto favorece la inclusión de la noción de punto de fuga.

Este procedimiento ofrece un paso en la interpretación fundamentada sobre la percepción visual en dirección a una representación estructurada de la geometría, donde se concluye que el punto de fuga representa una dirección en el infinito, dando un acercamiento a la primera noción de geometría proyectiva.

3.4.2. Sesión 2: Proyecciones

Para esta sesión se plantearon dos tareas: 1) “*La esfera y el Plano Euclidiano*” (plano proyectivo) y 2) “*El disco de Poincaré*” (Geometría dinámica). El propósito de esta sesión es desvincular la noción de "recta" de su representación física rectilínea y plana.

- **Fase 1: Preparación**

Para la primera tarea los estudiantes realizan una proyección estereográfica es un método de mapeo que se realiza una esfera con un polo perforado, transformando puntos de una esfera a un plano. En este proceso, cada punto de la esfera se proyecta como un punto en el plano, conservando ciertas relaciones geométricas. Esta proyección estereográfica se realiza usando una fuente de luz en el polo de la esfera, preservando ciertas propiedades geométricas.

En la segunda tarea se usa software de geometría dinámica GeoGebra con el fin de realizar una construcción a partir del disco de Poincaré, el cual representa un espacio geométrico dentro de un círculo, permitiendo a los estudiantes cuestionar la definición de

recta o al menos la representación mental sobre la misma; apunta a evidenciar que su apariencia se asemeja más a la representación mental de una curva.

Por consiguiente, se espera transitar desde el Nivel 2 (análisis) identificando el comportamiento de las líneas de la esfera en su proyección en el plano, hasta Nivel 3 (deducción informal) generando dos situaciones: los estudiantes establecen relaciones entre el modelo esférico y el plano euclidiano y el estudiante comprende las propiedades (relaciones entre puntos y rectas) como más importantes que la apariencia visual.

- **Fase 2: Experimentación**

Los estudiantes al proyectar la luz a través de la esfera hacia el plano pueden visualizar cómo los puntos de la esfera se transforman en puntos del plano. Asimismo, en el disco de Poincaré, analizan la estructura de las "rectas", representadas visualmente como curvas, pero cumplen la propiedad de unir dos puntos de forma única.

- **Fase 3: Análisis retrospectivo**

Posterior a la implementación se analiza los procedimientos elaborados por los estudiantes en cuanto a la idea de proyección de la esfera, y el cambio de las representaciones geométricas desde el desarrollo de las tareas propuestas. En la proyección de la esfera, se observa cómo los estudiantes empiezan a entender la transformación de un plano euclidiano en un Plano Proyectivo, añadiendo una "recta al infinito". lo cual demuestra un cambio en las interpretaciones visuales.

Por otro lado, en el disco de Poincaré, se identifica que el avance en la relación entre puntos y rectas, dejando de relacionarlas solamente con una forma lineal y comienzan a comprenderla a partir de sus propiedades de incidencia, incluso si su representación es curvilínea. En general, estos hallazgos indican que emplear modelos no euclidianos y

herramientas dinámicas contribuye a crear significados más adaptables, fomentando el progreso en los niveles de razonamiento geométrico.

3.4.3. *Sesión 3 El plano de Fano*

En esta sesión se plantea la tarea denominada “*El plano de Fano*”, abordando la geometría como un sistema formal de reglas independientes de la métrica tradicional o usual y sus representaciones.

- **Fase 1: Preparación**

En esta tarea se quiere que los estudiantes realicen un análisis detallado sobre el *plano de Fano*, una estructura que propone una forma alternativa de concebir y representar la geometría. Llevando a cabo una construcción con lana y representaciones de puntos; posibilitando el cuestionamiento de la naturaleza física de los puntos y rectas, entendiendo que la geometría es un sistema de reglas (axiomas) y no propiamente de los objetos o de sus representaciones.

A partir de lo expuesto, se busca alcanzar el Nivel 3 (deducción informal) al verificar el cumplimiento de las condiciones; así se pretende fortalecer el razonamiento sobre la estructura en este modelo. Los puntos y las rectas se organizan bajo una lógica singular: todas las rectas se intersecan sin excepción.

- **Fase 2: Experimentación**

Al entregar el material los grupos deben construir un modelo atendiendo a tres condiciones: 7 puntos, 7 rectas y que cada recta tenga exactamente 3 puntos. El problema surge al representar una de las rectas, esta debe tener la forma de la representación asociada intuitivamente a “circunferencia”. En este punto los investigadores deben llevar

a la discusión trascendiendo de lo visual al reconociendo del modelo como una estructura lógica válida, independientemente de cómo se proyecte gráficamente.

- **Fase 3: Análisis retrospectivo**

A partir de la construcción realizada los estudiantes logran confirmar en el plano de Fano; primero, todas las rectas se intersecan y, segundo, estas no son paralelas. Se observa que los estudiantes comienzan a comprender como las rectas no se determinan por su forma, teniendo en cuenta que el sistema geométrico es consistente y cumple todas las condiciones por el sistema axiomático de base.

Este proceso no solo permite entender los objetos geométricos de una manera abstracta, también genera un progreso hacia niveles de razonamiento donde las propiedades y estructuras cobran más relevancia sobre la percepción.

3.4.4. Sesión 4: Teorema de Desargues

La última sesión actúa como síntesis de los conceptos de concurrencia, colinealidad e invarianza, esta tarea llamada *Teorema de Desargues* y su implementación se diseña para hacer uso de GeoGebra.

- **Fase 1: Preparación**

Durante esta fase, se desarrolla una tarea apoyada con GeoGebra. Se proporciona el aplicativo “*Desargues*”, donde los estudiantes interactúan con triángulos configurados en perspectiva. La secuencia didáctica se articula en tres fases: validación conceptual, identificación de colinealidad en las intersecciones y formulación teórica. Se asume al realizar manipulación dinámica, abstraer las propiedades métricas y reconocer las invariantes de las relaciones de incidencia en el plano proyectivo.

El éxito de la sesión se evidencia cuando el estudiante es capaz de enunciar el teorema evitando información irrelevante y garantizando su cumplimiento en todos los casos dinámicos, consolidando así el Nivel 3 (Deducción Informal).

- **Fase 2: Experimentación**

Durante la implementación, se les hará un acompañamiento a los estudiantes realizando preguntas para validar los conceptos de perspectiva central. El procedimiento requiere prolongar los pares de lados correspondientes asignando colores diferenciados, optimizando así la identificación de sus intersecciones. El eje central de la secuencia es el arrastre y la construcción autónoma de una nueva configuración triangular. En este proceso, la mediación del investigador se centra en cuestionar la invariancia de la alineación frente al dinamismo de la figura: *¿Se preserva la colinealidad de las intersecciones al desplazar los vértices?* El objetivo es, conducir al estudiante a través de la exploración a descubrir la propiedad fundamental: la concurrencia de las rectas de los vértices es condición necesaria y suficiente para la colinealidad de los puntos de intersección de los lados correspondientes.

- **Fase 3: Análisis retrospectivo**

La sesión concluye con la exploración del Teorema de Desargues en entornos de geometría dinámica, se analiza los procesos donde el estudiante formaliza la relación entre la concurrencia de los vértices y la colinealidad. Al emplear el arrastre, los estudiantes reconocen esas propiedades invariantes, permitiendo formular conjeturas sobre la relación entre la perspectiva desde un punto y desde una recta.

En este sentido, se observa un progreso hacia métodos de deducción informal, donde se establecen relaciones geométricas de forma más estructurada, reforzando la comprensión de las propiedades esenciales del plano proyectivo.

3.5. Participantes

La investigación se desarrolla con un grupo de 36 estudiantes pertenecientes al curso 1103 de la jornada mañana del Colegio Guillermo Cano Isaza CEDID. La población se encuentra en un rango de edad entre los 16 y 18 años, cursando el último año de educación media.

La muestra se ha seleccionado bajo un criterio no probabilístico de carácter intencional y por conveniencia. El docente a cargo del curso matemáticas estuvo dispuesto a ceder tiempo de su programación curricular para implementar la propuesta. Adicionalmente, la decisión se sustenta en que el grupo posee el bagaje necesario en geometría métrica euclidiana (paralelismo, perpendicularidad y proporcionalidad) para propiciar la transición conceptual hacia la geometría proyectiva. Asimismo, su dominio funcional de herramientas digitales garantiza la viabilidad de la intervención mediante GeoGebra.

3.6. Instrumentos de recolección de la información

Para garantizar la captura de la complejidad del fenómeno educativo y asegurar la triangulación de la información, se emplearán los instrumentos sugeridos por Camargo (2021) para los experimentos de enseñanza. Estos permiten recolectar evidencias tanto de los procesos individuales como de la interacción social en el aula:

1. Grabaciones de audio y video: Se realizarán grabaciones de audio y video de las interacciones grupales y debates plenarios. Estos instrumentos resultan indispensables

para capturar el discurso matemático, los episodios de ruptura cognitiva y los procesos de negociación de significados que no son perceptibles en los productos escritos.

2. Protocolos de los estudiantes (Secuencia de Tareas): Consisten en las guías y hojas de proceso donde los estudiantes formalizan sus conjeturas, representaciones gráficas y la estructura lógica de los teoremas. Estos registros constituyen la evidencia empírica fundamental para evaluar el progreso a través de los niveles de razonamiento.

4. Capítulo 4: Diseño de la propuesta

Diseño de la propuesta de tareas en geometría proyectiva para promover el tránsito por los distintos niveles de razonamiento geométrico según van Hiele

En el presente capítulo se centra en la presentación de cada una de las tareas diseñadas e implementadas con el propósito de promover el tránsito entre los niveles de razonamiento geométrico propuestos por el modelo de van Hiele, mediante el abordaje de elementos básicos de la geometría proyectiva abordados por los estudiantes.

La secuencia estuvo conformada por cuatro sesiones de clase, concebidas como un proceso gradual y articulado, orientado a favorecer el desarrollo del razonamiento geométrico desde niveles iniciales, caracterizados por el reconocimiento visual, hacia niveles superiores, en los que se privilegia la identificación de propiedades y relaciones geométricas. El diseño de las tareas pretende responder a la necesidad de proponer situaciones de aprendizaje que trascienden desde los enfoques tradicionales de la geometría escolar, integrando situaciones propias de la geometría proyectiva que posibilitan nuevas formas de exploración e interpretación de algunos objetos geométricos.

Cada una de las tareas se estructuró teniendo en cuenta las fases de aprendizaje del modelo de van Hiele, así como la incorporación de entornos de geometría dinámica. De este modo, las tareas se diseñaron como componentes de una secuencia didáctica coherente, en la que cada tarea pretende cumplir una función específica dentro del proceso de progresión del desarrollo de razonamiento geométrico.

En el diseño de cada sesión se presenta bajo una estructura que incluye la descripción general de las tareas, los aprendizajes esperados, las relaciones y propiedades geométricas involucradas, la fase de aprendizaje correspondiente dentro del modelo de van Hiele y el nivel de razonamiento geométrico que se esperaba favorecer. Los enunciados de las propuestas aquí mencionadas se encuentran en los *Anexo 2*, *Anexo 3*, *Anexo 4* y *Anexo 5* con los materiales asociados al desarrollo de cada tarea, sin embargo, este apartado tiene como objetivo ofrecer una descripción general de cada una de las tareas presentadas a los estudiantes.

4.1. Sesión 1: El Problema del Artista

La primera sesión, titulada “*El Problema del Artista*”, se estructura en tres momentos clave que guían al estudiante en la transición del nivel de Visualización al de Análisis mediante el estudio de la perspectiva. El primer momento, de carácter concreto y exploratorio, consiste en la tarea de “*La Ventana de Durero*”, donde los estudiantes interactúan con fotografías de su entorno y láminas de acetato para calcar líneas y descubrir relaciones geométricas. El segundo momento se centra en la interacción con imágenes arquitectónicas para identificar estos puntos en diversas estructuras de este tipo. Por último, el tercer momento emplea la exploración dinámica en GeoGebra para manipular un plano de baldosas y comprender la relación entre objetos geométricos y la percepción de profundidad.

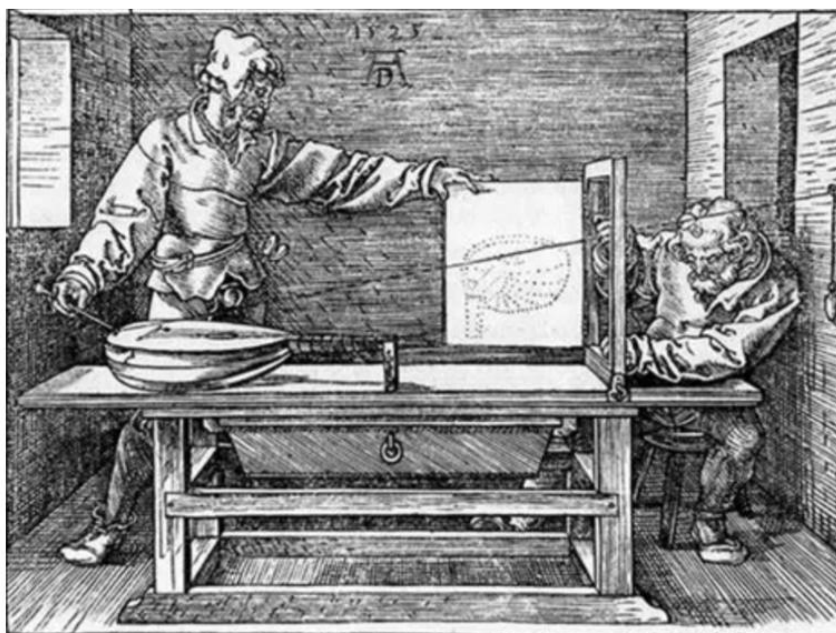
4.1.1. Tarea 1: La Ventana de Durero

En esta primera tarea se propone a los estudiantes una contextualización histórica que resalta el desafío principal enfrentado por los artistas del Renacimiento: la búsqueda de una técnica que permitiera representar con fidelidad la tridimensionalidad del mundo real sobre la bidimensionalidad del lienzo (ver **Figura 11**). Este problema del artista se presenta como el

factor histórico principal que impulsó la creación de la perspectiva como un sistema de organización del espacio para capturar la profundidad y la mirada humana, sentando las bases conceptuales de la geometría proyectiva.

Figura 11

Fragmento del enunciado propuesto a los estudiantes la Ventana de Alberto Durero



Alberto Durero, uno de los grandes artistas del Renacimiento, comprendió que para representar la realidad con mayor fidelidad, era necesario experimentar con nuevas formas de observación. En su famosa práctica conocida hoy como “La Ventana de Durero”, el artista colocaba un marco transparente entre él y la escena que deseaba pintar. Luego, fijaba su mirada desde un único punto y trazaba sobre el vidrio exactamente lo que veía tal y como lo muestra la imagen.

Nota. Adaptado de *Underweysung der Messung*, por A. Dürer, 1525.

Los estudiantes interactúan inicialmente con una imagen propuesta relacionada con un contexto próximo a su perspectiva cotidiana (Ver **Figura 12**). Como acto a seguir, mediante el uso de láminas de acetato transparente y marcadores, los estudiantes realizan un calco de dichas estructuras, prolongando intencionalmente las rectas observadas hasta descubrir empíricamente

propiedades de convergencia. Para ello se proponen las siguientes preguntas intencionadas (ver **Figura 13**).

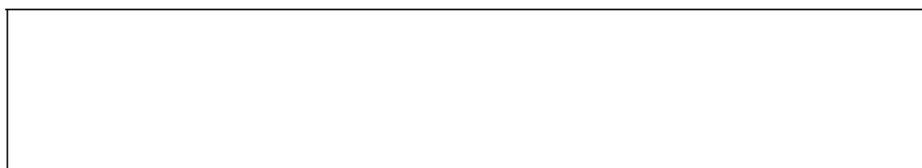
Figura 12
Aula de clase en perspectiva



Nota. Recuperado de 123RF, fotografía de austler,
https://es.123rf.com/photo_215115410_aula-en-una-vieja-escuela-en-los-estados-unidos-de-am%C3%A9rica.htm

Figura 13*Preguntas orientadoras sobre convergencias obtenidas*

- ¿Qué afirmación matemática, con respecto a rectas, consideran que no se cumple?



- ¿Están de acuerdo con el siguiente enunciado? Justifiquen su respuesta.

*La geometría euclidiana **no puede representar fielmente la visión humana**, pues las paralelas “se encuentran” en la perspectiva.*



Nota. Elaboración propia.

Seguido a la identificación de estas propiedades, se presentan una serie de preguntas orientadoras con el fin de comunicar los hallazgos de esta exploración. A través de esta mediación docente, enmarcada en las fases de información y orientación dirigida del modelo de van Hiele, se pretende pasar de una simple visualización superficial (Nivel 1) a un análisis técnico de las propiedades de la proyección (Nivel 2). Durante la exploración, se espera que los estudiantes logren identificar en la representación proyectiva, cómo las rectas paralelas no necesariamente cumplen la condición de intersección vacía como ocurre en la geometría euclidiana. De este modo, la tarea permite comprender la necesidad de introducir nuevos conceptos como una extensión necesaria para representar precisamente la visión humana y las leyes de la perspectiva.

4.1.2. Tarea 2: Introducción al punto de fuga

En este segundo momento se propone una tarea centrada en la introducción formal del punto de fuga, a su vez, se desarrolla como una transición hacia la abstracción mediante la exploración de material visual. Inicialmente, los estudiantes van a interactuar con una imagen (ver **Figura 14**) fotografía seleccionada previamente, donde deben identificar y marcar con precisión los puntos de concurrencia de diversas familias de rectas paralelas; para esto se recomienda a los estudiantes prolongar las rectas que consideren paralelas en la imagen reconociendo la concurrencia de la misma en un punto, identificando cómo este punto no es una propiedad física de los objetos fotografiados, sino una construcción geométrica necesaria para su representación bidimensional.

Figura 14

Fotografía para identificación de punto de fuga



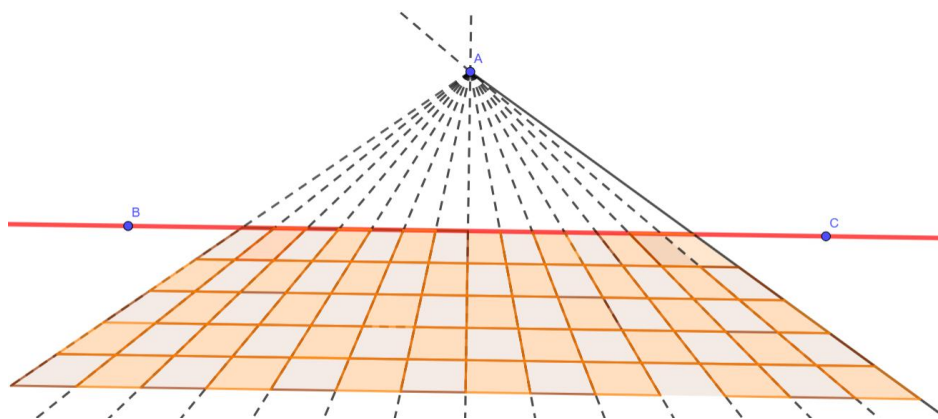
Nota. Adaptado de Street Moments [Fotografía], por R. Palha, s.f., Rui Palha Photography (<https://www.ruipalha.com/>).

4.1.3. Tarea 3: Piso de baldosas

Posteriormente, la interacción se traslada al software GeoGebra, donde los estudiantes manipulan un modelo dinámico de un plano de baldosas previamente diseñado (ver **Figura 15**). Ellos identifican objetos geométricos asociados a conceptos construidos en las tareas anteriores. La instrucción principal de la tarea es desplazar el punto de fuga y observar de manera sistemática cómo se transforma la inclinación de las rectas y la sensación de profundidad,

vinculando directamente la posición del punto con la estructura visual de la escena. A través de este proceso, se pretende comprender que el punto de fuga representa la dirección de un haz de rectas paralelas en el espacio tridimensional proyectado, introduciendo así la noción de punto en el infinito. Se debe intervenir como facilitador durante esta fase de orientación dirigida, planteando interrogantes, lo cuales invitan el paso de la descripción visual a la identificación de propiedades. Esta tarea pretende potenciar el nivel 1 de reconocimiento en el modelo de van Hiele, exigiendo al estudiante el reconocimiento de los componentes y algunas reglas geométricas que rigen la perspectiva, consolidando la idea: en el plano proyectivo la intersección de rectas paralelas es un evento definido y modelable.

Figura 15
Representación gráfica del aplicativo "Piso de baldosas"



Nota. El gráfico ilustra la convergencia de líneas hacia un punto de fuga para modelar la proyección de un plano cuadrículado. Elaboración propia mediante el software GeoGebra

4.2. Sesión 2: Proyecciones

Esta sesión se propone como una articulación del tránsito desde la experimentación con material concreto hacia la abstracción en entornos virtuales, permitiendo la consolidación de conceptos fundamentales de la geometría no euclidiana. La descripción detallada de las dos tareas de la segunda sesión se articula como un tránsito desde la experimentación táctil hacia la

abstracción en entornos de geometría dinámica, permitiendo la consolidación de conceptos fundamentales de la geometría no euclidiana. La primera tarea, denominada “*La Esfera y el Plano Proyectivo*” se fundamenta en el uso de un modelo físico compuesto por una esfera, una fuente de luz puntual y una superficie plana. La segunda tarea propone una interacción con un entorno de geometría dinámica no euclidiano, en el cual los estudiantes interactúan con construcciones donde los objetos geométricos tienen una apariencia distinta a la de los modelos tradicionales.

4.2.1. Tarea 1: La Esfera y el Plano Proyectivo

La primera tarea se fundamenta en el uso de material concreto, compuesto por una esfera cuya superficie representa la proyección de una cuadrícula desde un plano euclidiano, la linterna de los dispositivos móviles de los estudiantes y una superficie plana que buscaba representar el plano euclidiano. Durante este momento, los estudiantes van a interactuar con el material al proyectar sombras de puntos y figuras situadas en la superficie esférica sobre el plano, descubriendo de manera empírica la correspondencia entre los objetos de ambos espacios.

Inicialmente se propone a los estudiantes identificar qué sucede con las líneas ubicadas en la superficie de la esfera mediante una visualización previa antes de la interacción con el plano euclidiano; los estudiantes deben reconocer propiedades de convergencia de algunas líneas sobre la esfera, a su vez, la representación de estas líneas tiene una apariencia “curva” si se observan bajo la perspectiva euclidiana.

Posteriormente, se propone una instrucción adicional tal y como se plantea en la **Figura 16** involucrando una interacción conjunta entre todos los materiales asignados para esta tarea.

Figura 16*Instrucciones y preguntas orientadoras de la "Tarea 1"*

3. Ubicar la linterna lo más cerca posible al punto central del polo norte. La linterna debe hacer contacto con la superficie de la esfera.

Responder las siguientes preguntas:

- ¿Qué sucede con la proyección de la esfera en el plano euclidiano?
- ¿Logra identificar algunas características de las líneas en el plano euclidiano?
- ¿Qué se podría afirmar de estas líneas? ¿Qué apariencia tienen ahora las líneas sobre el plano euclidiano?
- ¿Considera que las líneas en el plano proyectivo son rectas? ¿Logra identificar algunas propiedades?

Nota. Elaboración propia.

La proyección de las sombras en el plano euclidiano configura una cuadrícula, la cual permite identificar rectas paralelas bajo la perspectiva euclidiana. Se espera que el estudiante logra interpretar la representación sobre la esfera como una familia de rectas paralelas entre sí, que, desde la visualización superficial, estas rectas en la esfera no configuran la representación tradicional, sino una apariencia aproximada al de un arco de circunferencia.

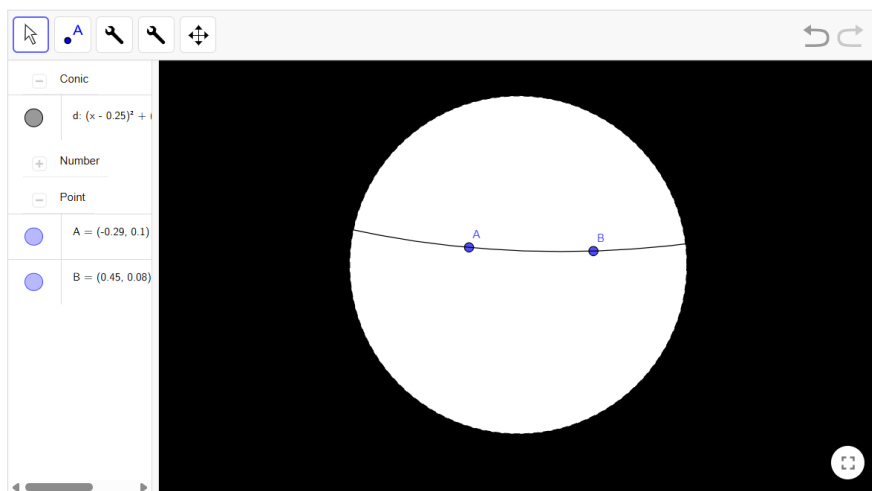
Esta tarea se desarrolla inicialmente en la fase de Información, involucrando al estudiante en el estudio de las correspondencias entre diferentes superficies, un concepto nuevo en su formación. Al avanzar hacia la manipulación del material concreto (la esfera y la linterna), la tarea se desplaza hacia la Orientación Dirigida. En este punto, se guía al estudiante mediante una serie de exploraciones estructuradas para descubrir, por cuenta propia, cómo se comportan los puntos y las figuras al ser proyectados, permitiéndole identificar relaciones de incidencia y transformación de manera controlada. En cuanto a los niveles de razonamiento, la tarea potencia el tránsito hacia el Nivel 2 (Análisis). En lugar de percibir la esfera y el plano como entidades

visuales independientes, el estudiante comienza a identificar y describir las relaciones presentes en la proyección.

4.2.2. Tarea 2: El disco de Poincaré

Esta tarea consiste en una exploración asistida mediante el software de geometría dinámica GeoGebra, centrada en el modelo del disco de Poincaré. El propósito es construir objetos geométricos (rectas) en un sistema geométrico donde las reglas de representación de la geometría euclidiana no predominan, específicamente en lo que respecta a la representación visual de las rectas y la noción de paralelismo; cuando el estudiante logra desplazar los puntos que conforman las rectas, la representación del mismo objeto varía. (ver **Figura 17**)

Figura 17
Disco de Poincaré



Nota. Captura de pantalla que muestra la disposición de puntos y rectas hiperbólicas. Adaptado de Disco de Poincaré [Applet de GeoGebra], por M. Tejera, s.f. (<https://www.geogebra.org/m/CJ5S7agW>).

Al trabajar en este entorno, el estudiante debe trascender la percepción visual inmediata para comprender que los objetos geométricos en general se deben definir por sus características propias o relaciones, y no únicamente por su apreciación visual. La intervención debe facilitar lo

explícitamente observado, orientando a los estudiantes a describir las propiedades conservadas (como la unicidad de la recta por dos puntos) y cuáles cambian (el concepto visual de dirección y paralelismo), introduciendo gradualmente el vocabulario técnico de las geometrías no euclidianas. En ese orden de ideas se espera interiorizar cómo las representaciones de los objetos pueden variar según el modelo o el espacio en que se está estudiando.

La tarea se ubica en la fase de Explicitación, pues propone al estudiante identificar y compartir las propiedades observadas bajo la guía del docente. A su vez, evoluciona hacia la fase de Orientación Libre cuando se plantea la construcción dentro del disco, donde se debe aplicar las nuevas reglas descubiertas para describir situaciones de en las que repercuten este tipo de representaciones. Esta tarea está diseñada para potenciar el Nivel 2 de razonamiento geométrico. El estudiante ya no se limita a ver formas o describir partes, sino a establecer relaciones entre propiedades o características de los objetos. Al comparar el modelo de Poincaré con el euclidiano, el estudiante realiza una clasificación de sistemas geométricos basada en sus axiomas, logrando argumentar la validez de una propiedad según el contexto.

4.3. Sesión 3: El Plano de Fano

La sesión se centra en el estudio y la construcción del plano más pequeño de la geometría proyectiva, definido como un modelo geométrico finito que rompe con la intuición visual habitual al organizar puntos y rectas bajo una estructura axiomática estricta. Esta sesión consta de una sola tarea colaborativa de construcción con material concreto, dónde los estudiantes deben representar un sistema que cumpla con el rigor de su definición, cumpliendo con leyes de incidencia específicas que no permiten la existencia de rectas paralelas.

Los estudiantes se organizan en grupos de 3 e interactúan con el material concreto entregado: un tablero de representación (ver **Figura 18**), siete puntos con soporte e hilos de colores.

Figura 18

Tablero de representación para la construcción del "Plano de Fano"



Nota. Elaboración propia.

El desafío de esta tarea radica en interpretar y aplicar las “**condiciones de construcción**” dictadas por el enunciado correspondientes a los axiomas de incidencia que constituyen el mismo:

- *El plano debe contener exactamente 7 rectas y 7 puntos.*
- *Cada recta debe contener exactamente 3 puntos.*
- *Cada punto debe pertenecer a exactamente 3 rectas.*

Los estudiantes deben manipular el material para representar rectas en este modelo, teniendo en cuenta que estas pueden adoptar formas de representación diferentes a la tradicional (curvas suaves), incentivando a la interpretación de objetos geométricos en un distinto sistema de representación. Con lo anterior, se espera que cada estudiante logre comprender la construcción de la geometría a partir de distintos conjuntos de reglas y modelos.

En esta propuesta, el rol docente se define como orientador, supervisando el cumplimiento de los axiomas durante la construcción. Su intervención se vuelve crítica al finalizar la tarea, donde lidera una socialización centrada en preguntas orientadoras sobre la unicidad de las rectas y la ausencia de paralelismo. El profesor guía al estudiante con el fin de verbalizar el porqué de la configuración lograda y cómo esta difiere de las figuras geométricas habituales en su plan de estudio.

Por consiguiente, esta tarea se sitúa en dos fases de aprendizaje: Orientación Libre e Integración. En primer lugar, para la Orientación Libre el estudiante debe interactuar con siete puntos en el plano, estos puntos deben ser estratégicamente ubicados en él para cumplir con las condiciones dadas. Esta exploración continua con el material le permite encontrar relaciones a partir de su interacción con el mismo. En segundo lugar, se espera que el estudiante haya ido añadiendo elementos a su red conceptual con respecto a las sesiones previas, especialmente en la sesión anterior con la representación de rectas en otros sistemas geométricos. Si existe una correcta integración de conocimientos se logra identificar y aceptar que una de estas rectas descritas debe tener una apariencia distinta a la euclidiana, unificando el paradigma proyectivo en donde las paralelas se intersecan y la visualización euclidiana se cuestiona para dar sentido a una estructura geométrica finita y completa.

Con respecto al nivel de razonamiento, se espera potencializar el nivel 2 (análisis), el diseño de la tarea se fundamenta en la exigencia cognitiva de interrelacionar propiedades y redefinir conceptos geométricos básicos. En este nivel, el razonamiento ya no se limita a la identificación de componentes aislados, sino que se centra en la estructura lógica que conecta dichas propiedades, por tanto, esta tarea se propone como un acelerador para impulsar al estudiante a dejar considerar la geometría como un conjunto de representaciones predefinidas y

comenzar a entenderla como un sistema de relaciones lógicas (axiomas), el cual puede variar según el sistema geométrico definido.

4.4. Sesión 4: Teorema de Desargues

Esta sesión representa la culminación de la secuencia de tareas, en donde se integran conceptos de incidencia y concurrencia abordados previamente para analizar uno de los resultados fundamentales de la geometría proyectiva. Esta sesión se ha organizado en 3 momentos vinculando la exploración dinámica (GeoGebra) con una formalización sobre los resultados de las interacciones. En este escenario, se propone promover el tránsito hacia un nivel superior de razonamiento mediante un diseño que integra la visualización, la exploración y la formulación de conjeturas.

4.4.1. Tarea 1: Verificación de propiedades

En la fase inicial los estudiantes interactúan con el aplicativo “Teorema de Desargues” incluido en los anexos con el fin de validar las definiciones propuestas sobre los objetos geométricos.

Se presentan dos definiciones sobre *Triángulos en Perspectiva* como lo muestra la ***Figura 19:***

Figura 19*Definiciones propuestas de "Triángulos en Perspectiva"*

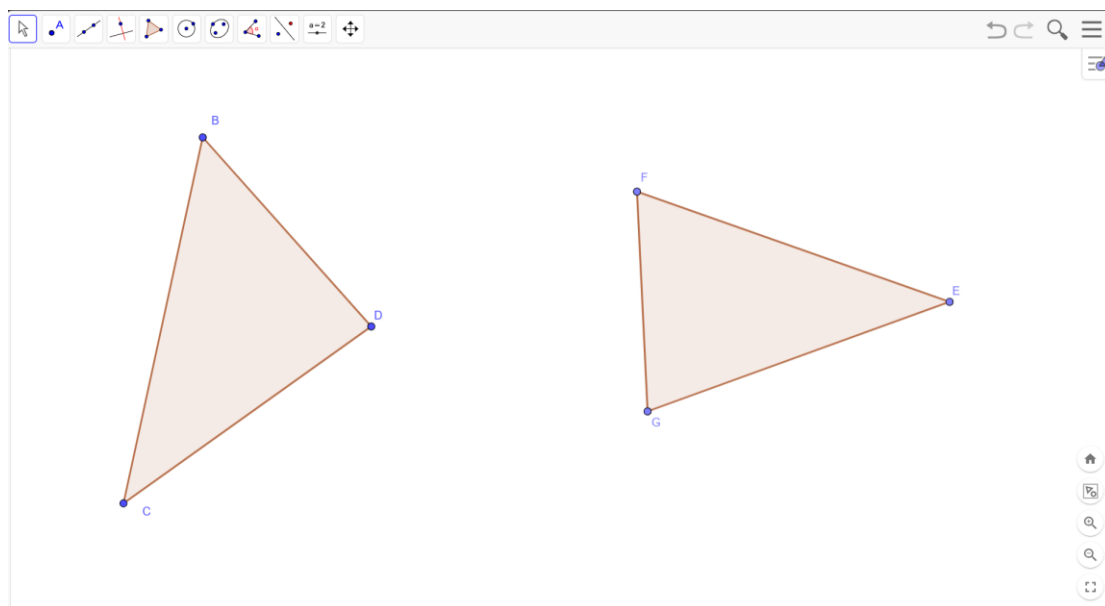
Def 1: Dos triángulos están en perspectiva desde un punto si, al unir cada vértice de un triángulo con el vértice correspondiente del otro, las tres rectas se intersecan en un punto.	Def 2: Dos triángulos están en perspectiva desde un punto si, las rectas que contienen los vértices correspondientes entre los triángulos, se intersecan en un punto.
--	---

Nota. Elaboración propia.

A partir de las definiciones, los estudiantes deben verificar si los triángulos presentados en el aplicativo (ver **Figura 20**) corresponden al objeto geométrico en cuestión, es decir, si satisfacen alguna de las definiciones; en definitiva, la tarea corresponde a determinar si reconocen los invariantes de la definición. Para esto, se espera que realicen construcciones auxiliares como rectas y puntos de interacción y puedan validar visualmente sus exploraciones. Se busca el reconocimiento de la relación de perspectiva y su dependencia de la alineación de los vértices con un centro de proyección común.

Figura 20

Representación aplicativo en GeoGebra “Teorema de Desargues”



Nota. Triángulos en perspectiva. Elaboración propia mediante software GeoGebra

Esta primera tarea corresponde a la Fase de Información, apuntando a la verificación de relaciones en objetos presentados con las definiciones. Esta validación se propone a través de exploración no dirigida y se hace a través de procesos visuales, por ende, corresponde al nivel 1 de razonamiento.

4.4.2. Tarea 2: Determinar Rectas

Para esta situación, se propone una Exploración Dirigida mediante la construcción de nuevos elementos auxiliares con una relación específica, tal y como lo muestra la **Figura 21**:

Figura 21

Fragmento del enunciado de la tarea 2 “Determinar Rectas”

2. Determinar las rectas que contienen cada par de lados correspondientes y asignarles un color.

Nota. Elaboración propia.

Con esta orientación, los estudiantes identifican que cada par de rectas se interseca y se obtiene un punto de cada intersección. A través de procesos de visualización y exploración, los estudiantes logran identificar propiedades sobre los tres puntos derivados de las intersecciones de los lados proyectados. Esta visualización permite al estudiante reconocer la colinealidad como una propiedad invariante que se mantiene a pesar de los cambios en la posición de los vértices.

Dicho lo anterior, la fase de aprendizaje propuesta a esta tarea corresponde a Orientación Dirigida, los estudiantes logran establecer una nueva relación entre los objetos mediante una secuencia de instrucciones. Así, el estudiante logra ubicarse en el nivel 2 de razonamiento, puesto que, mediante procesos de visualización y exploración, valida la concurrencia de las rectas con la colinealidad de los puntos de intersección, comprendiendo la invarianza de las propiedades según la ubicación de los vértices de los triángulos.

4.4.3. Tarea 3: Planteamiento de la conjetura

El cierre de la sesión se consolida bajo el planteamiento de una conjetura que logre aproximarse de manera lógica al Teorema de Desargues. En este momento se hace énfasis en la formalización del conocimiento construido a partir de las interacciones con las anteriores tareas. En particular esta tarea consiste en identificar con claridad los componentes de una afirmación

lógica de tipo teorema, para esto se propone a los estudiantes los aspectos fundamentales a tener en cuenta cuando se quiere plantear las características invariantes identificadas en la interacción con objetos geométricos. Como el objetivo de la sesión es poder describir estos descubrimientos, se muestra un ejemplo de cómo se organiza la información en una afirmación lógica en una propuesta reconocida (ver **Figura 22**). Con estas orientaciones, se espera lograr la consignación de una conjetura que se aproxime al teorema de Desargues según sus previas exploraciones y deducciones.

Figura 22

Enunciado que describe cómo plantear conjeturas

Aspectos a tener en cuenta: 1. Condiciones necesarias que garantizan el cumplimiento del consecuente. 2. Evitar incluir información irrelevante. 3. Garantizar que el teorema se cumpla en todos los casos.
Ejemplo: Teorema de Pitágoras <i>Si un triángulo es rectángulo (antecedente) entonces la suma del cuadrado de sus catetos es igual a su hipotenusa al cuadrado (consecuente).</i>

Nota. Elaboración propia.

Con respecto a la fase de la propuesta, se consolida en la Integración dado que los estudiantes logran integrar conceptos adquiridos previamente como intersección, colinealidad, vértices, correspondencia, entre otros, con relaciones y características de objetos descubiertos en su interacción con los mismos. Esta tarea logra marcar un punto crítico en su razonamiento, trascendiendo de expresiones como *¿qué está sucediendo?* a *“sí ocurre en evento seguramente se*

obtiene otro”. Este razonamiento corresponde al nivel 3, en donde se reconoce la colinealidad de los puntos determinados por la concurrencia no depende del azar, sino que es una consecuencia necesaria de los triángulos en perspectiva. El elaborar una conjetura, permite al estudiante sintetizar en una idea una cadena de razonamientos donde una propiedad geométrica identificada en objetos garantiza la existencia de otra.

En definitiva, este conjunto de tareas, cuidadosamente diseñadas atendiendo a la propuesta de fases de aprendizaje, pretende proporcionar las bases necesarias para que alcanzar niveles de razonamiento superiores a los encontrados, integrando la visualización dinámica con la formalización matemática.

5. Capítulo 5: Análisis retrospectivo

El presente capítulo tiene la intención de realizar el análisis de los resultados obtenidos durante la implementación de la secuencia de tareas, desarrollada a lo largo de cuatro sesiones de clases bajo la metodología de implementación de un experimento de enseñanza. En este enfoque, el análisis busca interpretar el aprendizaje de los estudiantes mediante la articulación de los niveles de razonamiento geométricos propuestos por van Hiele y la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) y presentados en el marco teórico del presente trabajo.

En ese sentido, se establecen conexiones entre las hipótesis planteadas en las THA y las acciones observadas en el aula, a partir de diversas evidencias recogidas a lo largo de la implementación. Dichas evidencias fueron seleccionadas intencionalmente, para realizar el análisis los procesos de razonamiento y las transformaciones conceptuales que realizan los estudiantes.

5.1. Sesión 1. El problema del Artista

La primera sesión se centra en el análisis de la problematización conceptual del paralelismo euclidiano y la construcción de explicaciones iniciales relacionadas con la perspectiva atendiendo a una aproximación cercana al contexto histórico del concepto. A partir de la evidencia recolectada en las tareas propuestas, se analiza la forma en que estas ideas comienzan a reorganizarse dentro del proceso de aprendizaje.

5.1.1. Tarea 1: La ventana de Durero

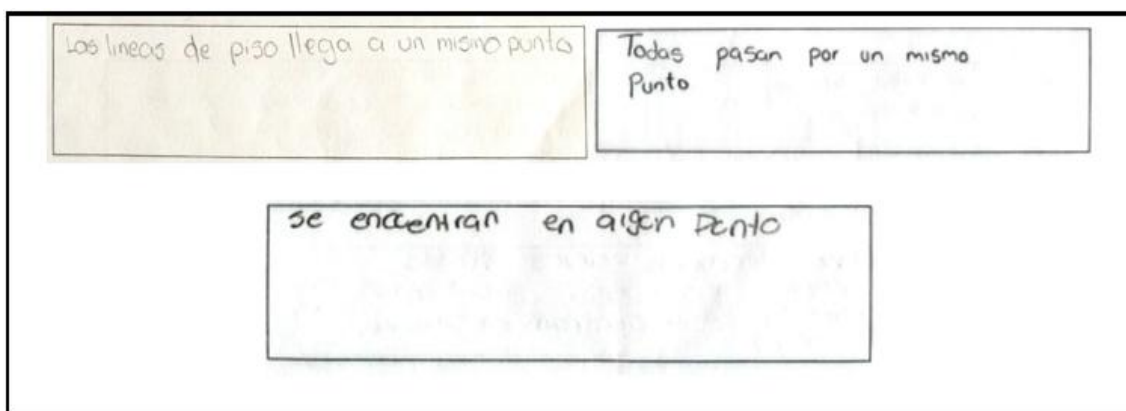
Como punto de partida de la tarea, se presentó a los estudiantes la imagen descrita en el apartado de tareas (ver **Figura 12**), con el propósito de explorar sus primeras aproximaciones a

la convergencia aparente de rectas y al cuestionamiento del paralelismo euclidiano, así como a la construcción inicial asociadas a la perspectiva.

Durante el desarrollo de la clase, se identificaron respuestas de algunos estudiantes sobre el reconocimiento de las líneas que conectan el piso y el techo convergen visualmente en un mismo punto. Expresiones como “*las líneas del piso llegan al mismo punto*”, “*todos pasan por un mismo punto*” y “*se encuentran en algún punto*”. (ver **Figura 23**)

Figura 23

Respuesta de los estudiantes en la que se evidencia la prolongación de las rectas y la identificación de un punto común.



Nota. Producción de un estudiante de grado 11 durante la Sesión 1, Colegio Técnico CEDID Guillermo Cano Isaza I.E.D. Elaboración propia.

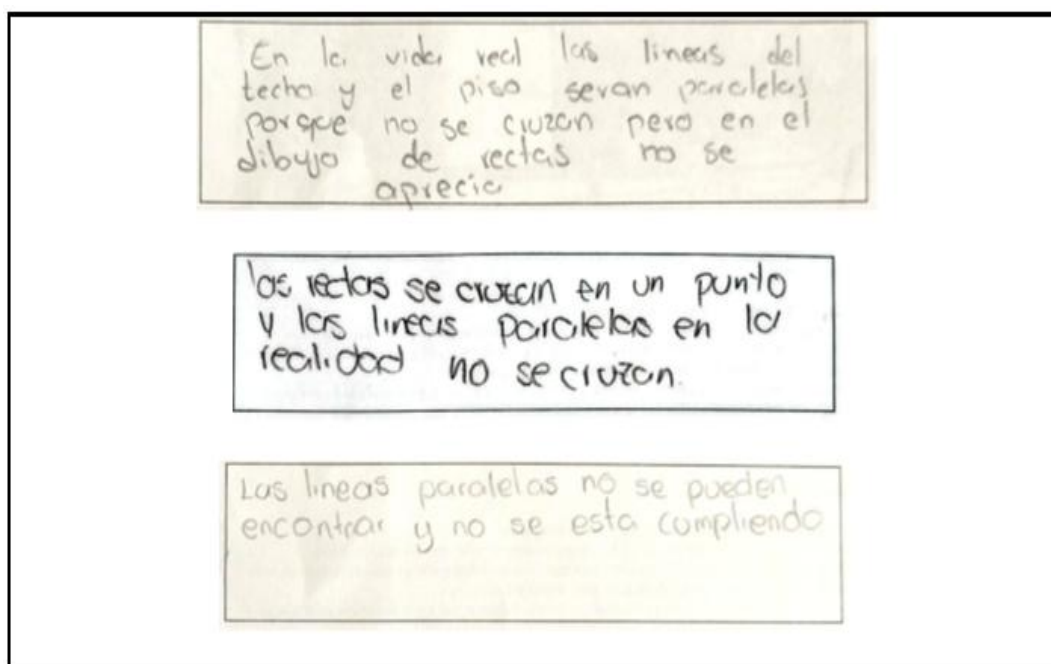
Estas producciones se sitúan en el nivel 1 (reconocimiento), fundamentadas en la percepción de la figura. No obstante, el hecho de prolongar las rectas y determinar un punto de encuentro representa un primer acercamiento al nivel 2 (análisis), al establecer relaciones entre los objetos geométricos de la imagen.

En este sentido, las evidencias son consistentes con las hipótesis planteadas en la THA, particularmente en el surgimiento de una convergencia aparente como punto de referencia para poner en duda la idea de paralelismo como la dada por su representación gráfica usual. Este proceso se ve acompañado por la aparición de un conflicto cognitivo

evidenciado en afirmaciones como “en la vida real las líneas del techo y el piso serán paralelas porque no se cruzan, pero en el dibujo de rectas no se aprecia”, “las rectas se cruzan en un punto y las líneas paralelas en la realidad no se cruzan” o “las líneas paralelas no se pueden encontrar y no se está cumpliendo”. (ver **Figura 24**)

Figura 24

Respuesta del estudiante donde se contrasta la representación gráfica con la propiedad euclidiana de paralelismo.



Nota. Producción de un estudiante de grado 11 durante la Sesión 1, Colegio Técnico CEDID Guillermo Cano Isaza I.E.D. Elaboración propia.

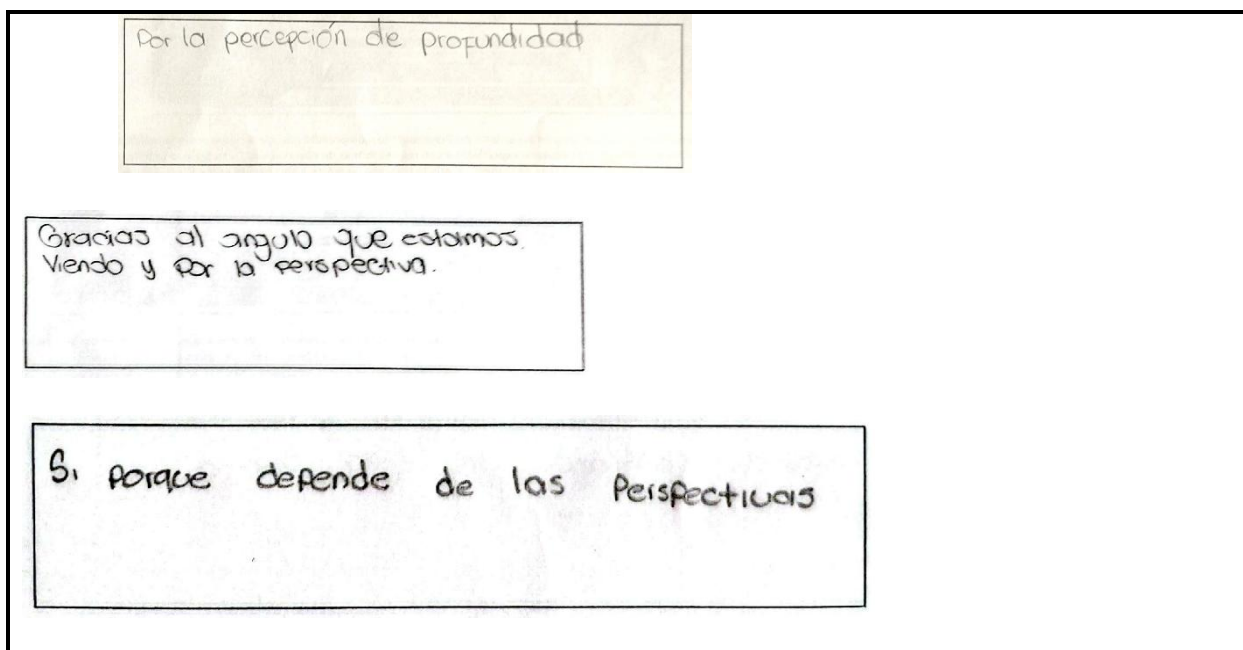
Estas respuestas son esencialmente relevantes, demostrando así la forma de cómo los estudiantes articularon visualmente sus conocimientos geométricos previos. Este tipo de razonamiento corresponde al nivel de análisis, en donde los estudiantes en lugar de simplemente describir la imagen empezaron a comparar una propiedad conocida con la nueva situación presentada. Asimismo, estas respuestas demuestran la aparición de una irregularidad entre el conocimiento previo y la situación planteada, dando pie a una interpretación como una manifestación del conflicto cognitivo introducido por la tarea. De acuerdo con la teoría de las

situaciones didácticas, este tipo de confrontación favorece la construcción de nuevos significados matemáticos (Brousseau, 2007).

Asimismo, algunos estudiantes empezaron a justificar el fenómeno observado relacionándolo con la perspectiva y la profundidad, evidenciado en expresiones como *“por la percepción de profundidad”*, *“gracias al ángulo que estamos viendo y por la perspectiva”* y *“depende de la perspectiva”*. (ver **Figura 25**)

Figura 25

Registro escrito en el que el estudiante explica la convergencia a partir de la perspectiva.



Nota. Producción de un estudiante de grado 11 durante la Sesión 1, Colegio Técnico CEDID Guillermo Cano Isaza I.E.D. Elaboración propia.

La aparición de estas explicaciones muestra un significativo progreso conceptual, en vista que los estudiantes van más allá de la descripción visual para dar una explicación de por qué ocurre el fenómeno, es decir, relacionar la convergencia aparente a causa de la perspectiva propia de la percepción y representación del espacio. Esto sugiere un acercamiento gradual al nivel 2, el cual inicia a establecer relaciones entre las características y es congruente con la THA. Desde la perspectiva de Duval (2017), estas respuestas pueden expresarse como un proceso de

interpretación del registro gráfico, atribuyendo significado a la representación. En particular, la respuesta *“la perspectiva es una representación 2D de lo que nosotros vemos en 3D”*, resulta ser significativa, pues evidencia un entendimiento inicial sobre la perspectiva como representación, algo esencial para el desarrollo posterior del concepto de punto de fuga.

En resumen, las evidencias analizadas revelan el aporte de esta tarea a la transición del nivel 1 a inicios del nivel 2, al facilitar el reconocimiento visual de la convergencia aparente, el cuestionamiento sobre el paralelismo euclidiano y la elaboración de explicaciones asociadas a la perspectiva. Estos avances constituyen un medio esencial para el desarrollo de las tareas realizadas durante la primera sesión, enfocadas en la elaboración del concepto de punto de fuga.

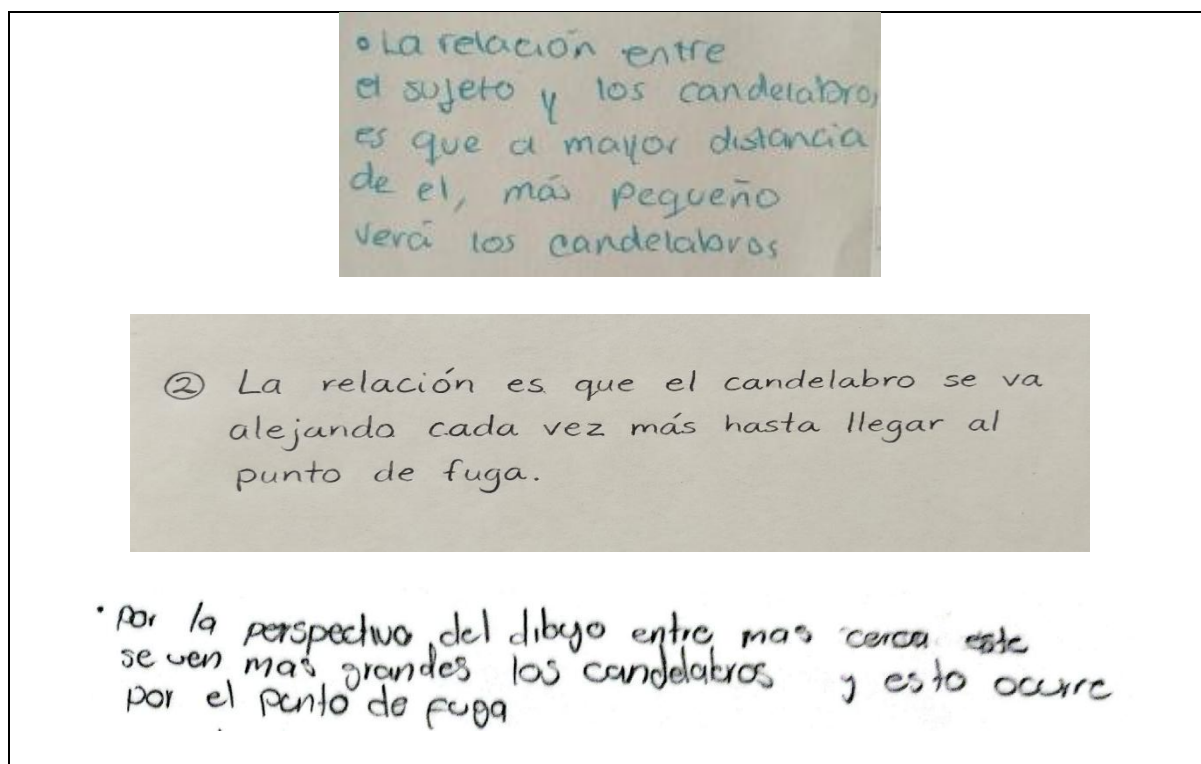
5.1.2. Tarea 2: Puntos de fuga

En la tarea 2, tiene como objetivo profundizar en la interpretación de la perspectiva, en particular en la identificación del punto de fuga y la percepción de profundidad. Respecto a la THA, se proyectaba un avance conceptual sobre la convergencia aparente y la variación dimensional teniendo en cuenta la distancia.

Las evidencias, demuestran como varios estudiantes lograron establecer relaciones entre la distancia del observador y la percepción del tamaño de los objetos, afirmando: *“[...] a mayor distancia de él, más pequeño verá los candelabros”*, en otra respuesta indica que *“[...]el candelabro se ve alejando cada vez más hasta llegar al punto de fuga”*. De manera similar, se menciona que *“[...] entre más cerca esté se ven más grandes los candelabros [...]”*. (ver **Figura 26**).

Figura 26

Producción de los estudiantes en la que se relaciona el tamaño de los objetos con la distancia en la representación.



Nota. Producción de un estudiante de grado 11 durante la Sesión 1, Colegio Técnico CEDID Guillermo Cano Isaza I.E.D. Elaboración propia.

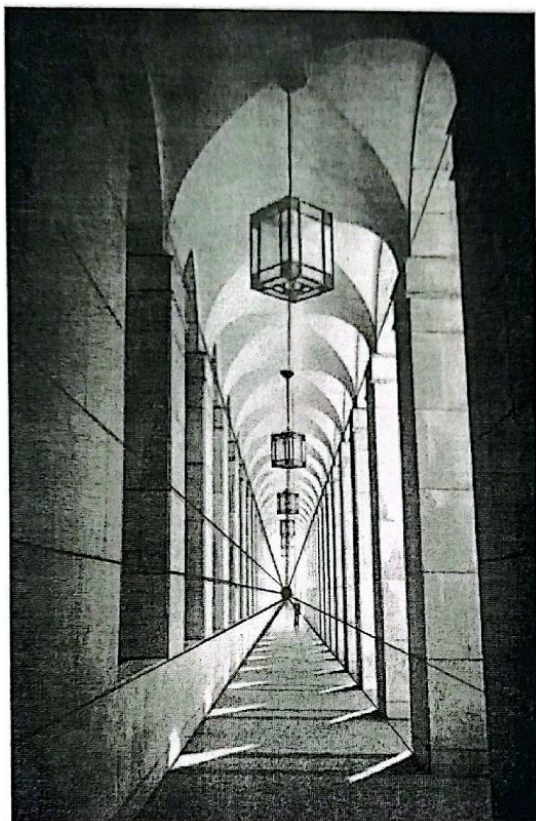
Estas respuestas evidencian el reconocimiento sobre regularidades asociadas a la profundidad, constituyendo un avance respecto a la tarea anterior. Esto sitúa a los estudiantes en un nivel de visual, debido a que se enfoca en la percepción de cambio de apariencia. Sin embargo, al articular la observación con la noción perspectiva, se logra evidenciar el tránsito hacia el nivel 2 (análisis), teniendo en cuenta la relación establecida entre los diferentes elementos de la representación.

Asimismo, se resaltan respuestas donde se reconocen el punto de fuga, mostrando avances significativos en la comprensión conceptual. Afirmaciones como “*se encuentran en el punto que trazamos*”, otra respuesta afirma explícitamente que “*es el punto de fuga*”. Asimismo, otra reconoce que “*llegan a un punto donde se conectan y ese punto es llamado punto de fuga*”.

Estas respuestas indicaron no solo la identificación visual del punto de fuga, sino que comienzan a nombrarlo y asociarlo con un concepto de la perspectiva, lo cual corresponde al nivel de análisis. (ver **Figura 27**)

Figura 27

Identificación del punto de fuga en las producciones de los estudiantes.



Nota. Producción de un estudiante de grado 11 durante la Sesión 1, Colegio Técnico CEDID Guillermo Cano Isaza I.E.D. Elaboración propia.

No obstante, también se identifican algunas respuestas que evidencian confusiones o interpretaciones parciales, (ver **Figura 28**) lo cual sugiere una localización espacial sin una comprensión clara de la convergencia.

Figura 28

Evidencia de interpretación parcial del punto de fuga.

Las líneas paralelas se encuentran al lado de la persona.

Nota. Producción de un estudiante de grado 11 durante la Sesión 1, Colegio Técnico CEDID Guillermo Cano Isaza I.E.D. Elaboración propia.

Además, algunas respuestas mezclan nociones dimensionales y paralelismo sin establecer relaciones completamente estructuradas, destacan afirmaciones como: *"En las columnas se encuentran las líneas paralelas. Crean una paralela y entre los candelabros están más alejados, se ven más pequeños. Las líneas paralelas se encuentran en un punto."* o *"La perspectiva del observador es que como lo ve más alejado se ve más grande o pequeño [...].* Estas evidencias resultan relevantes al identificar dificultades en la consolidación del concepto.

En resumen, los hallazgos de la Tarea 2 muestran un progreso hacia el nivel análisis (nivel 2) según el modelo van Hiele, definido por la detección del punto de fuga, la conexión entre dimensiones y distancias y comprender la convergencia lineal ilustrada. Además, persiste un desacuerdo respecto al paralelismo, lo que es consistente con la THA y se convierte en un aspecto fundamental para el desarrollo gradual del concepto de punto de fuga.

5.1.3. Tarea 3 El piso de Baldosas

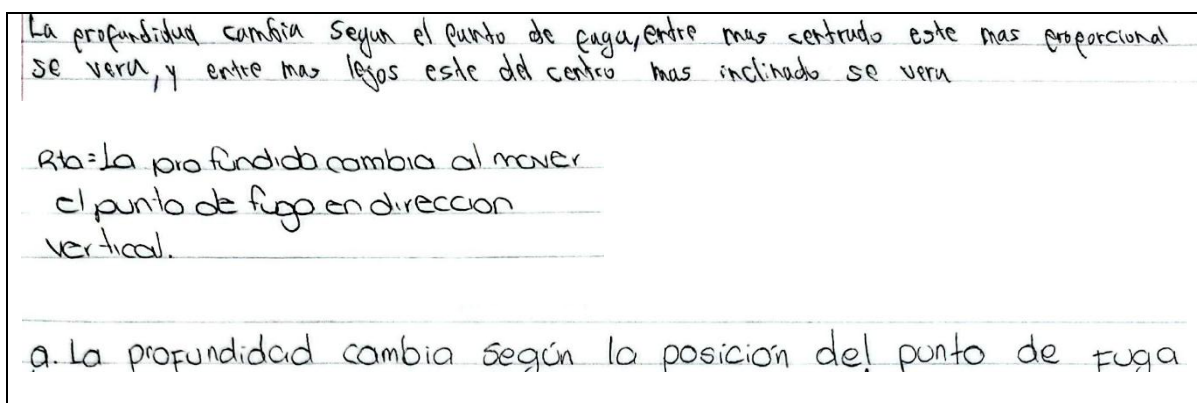
En la Tarea 3 se propuso la exploración de manera dinámica la relación entre la posición del punto de fuga y la configuración perspectiva, focalizado en la profundidad y organización de las rectas. De acuerdo con el THA, preveía un progreso hacia la comprensión del fenómeno ocurrido, reconociendo cómo el cambio en el punto de fuga altera la percepción espacial.

Las evidencias recolectadas permiten observar cómo los estudiantes reconocen sobre la percepción de la profundidad según la posición del punto de fuga. La afirmación *"la*

profundidad cambia según el punto de fuga, entre más centrado esté más proporcional se verá”,
 o *“la profundidad cambia al mover el punto de fuga en dirección vertical”*. De manera similar,
 la siguiente afirmación reconoce: *“la profundidad cambia según la posición del punto de fuga”*.
 (ver **Figura 29**)

Figura 29

Evidencias sobre la relación entre la posición del punto de fuga y la percepción de profundidad.



Nota. Producción de un estudiante de grado 11 durante la Sesión 1, Colegio Técnico CEDID Guillermo Cano Isaza I.E.D. Elaboración propia.

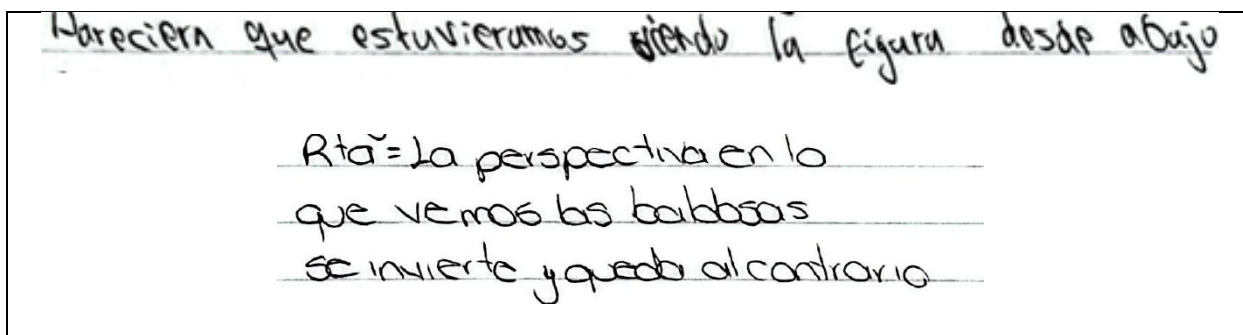
Estas respuestas muestran que los estudiantes han logrado relacionar las variables dentro de la representación gráfica. Esto coincide con el nivel de análisis consolidado. En general, se observa una mejora en los estudiantes respecto a tareas anteriores. Ahora, en lugar de limitarse a describir lo que observan, los estudiantes son capaces de identificar cómo se relacionan los diferentes elementos dentro de la configuración.

También se identifican respuestas que muestran comprensión de los efectos específicos al ubicar el punto de fuga en la parte superior o inferior del plano. Se menciona que *“pareciera que estuviéramos viendo la figura desde abajo”* cuando el punto está arriba, mientras que en otra evidencia indica que *“la perspectiva en lo que vemos las baldosas se invierte [...]”* (ver **Figura 30**) al ubicarlo en la parte inferior. Esto muestra que los estudiantes pueden relacionar la posición desde donde miran con la forma en que se representa la figura (posición relativa al observador).

Según la teoría de Duval, este tipo de respuestas muestra que los estudiantes pueden hacer conexiones entre las diferentes partes de la información dentro de la misma forma de representación. Esto significa que van más allá de solo ver la información de manera superficial.

Figura 30

Evidencias del cambio en la perspectiva según la posición del punto de fuga.



Nota. Producción de un estudiante de grado 11 durante la Sesión 1, Colegio Técnico CEDID Guillermo Cano Isaza I.E.D. Elaboración propia.

Resulta relevante, algunas respuestas muestran que los estudiantes son capaces al distinguir entre lo visual frente a lo geoméricamente conservado, afirmando “*la perspectiva nos hace pensar que la profundidad aumenta; sin embargo, es la misma*”, o indicando “*la profundidad es la misma, sólo que la perspectiva nos la hace ver diferente*”. Tales respuestas han sido consideradas importantes, mostrando un nivel de comprensión del fenómeno, separando la apariencia visual respecto a la invarianza de algunas propiedades. Este razonamiento puede considerarse una aproximación hacia la deducción informal dentro del modelo propuesto por van Hiele, pues los estudiantes comienzan a realizar diferenciaciones conceptuales más abstractas. Por otra parte, esa tensión entre lo percibido y lo mantenido refleja un conflicto entre intuición y conocimiento geométrico en términos de lo mencionado por Fischbein (1993), donde la percepción original no necesariamente se corresponde con las características del sistema geométrico.

Por otro lado, se observan respuestas generalizadas expresando el comportamiento en su conjunto. Algunos estudiantes afirman “*el punto de fuga determina la profundidad*”, mientras otros indican “*la perspectiva siempre irá hacia donde el punto de fuga se dirige*”. Estas afirmaciones muestran la construcción de reglas generales, implicando el fortalecimiento del razonamiento geométrico.

Desde la mirada de la THA, los resultados sugieren un progreso con respecto a las tareas anteriores, específicamente cuando algunos estudiantes lograron entender la relación entre variables y distinguir entre percepción frente a la propiedad geométrica. En este sentido, puede observarse un tránsito hacia un nivel cercano a la deducción informal, donde el estudiante no solo describe, sino que explica y generaliza el comportamiento del sistema.

En definitiva, los resultados en la Tarea 3 demostraron el fortalecimiento gradual en el pensamiento geométrico, permitiendo relacionar la idea de punto de fuga con la profundidad percibida y con la estructuración espacial, lo cual implicó un fortalecimiento en los procesos de resignificación comenzados en las tareas anteriores.

El análisis de las Tareas 1, 2 y 3 muestra una evolución en el razonamiento geométrico, acorde con la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje. En la tarea 1, se observa el predominio del nivel visual, identificaron la convergencia aparente de rectas y comienzan a dudar del paralelismo, lo cual genera un conflicto cognitivo (Brousseau, 2007).

En la Tarea 2 se fortalece el nivel de análisis, observado en la localización del punto de fuga y en la comparación entre distancia y tamaño, implicando mayor comprensión en el registro gráfico (Duval, 2017). Finalmente, en la tarea 3 pueden apreciarse ciertos avances hacia la deducción informal, al relacionar la profundidad con la posición del punto de fuga, y al

distinguir entre propiedad geométrica y percepción, lo cual puede ser interpretado como una tensión entre intuición y conocimiento formal (Fischbein, 1993).

Así se puede decir que toda la secuencia promueve el paso de interpretaciones perceptivas a la comprensión de relaciones geométricas, reafirmando la noción de punto de fuga en el marco de la geometría proyectiva.

5.2. Sesión 2. Proyecciones

Partiendo de los fundamentos establecidos en la Sesión 1, el interés se centró hacia la proyección como un proceso transformativo. Este cambio facilita la integración de diversos modelos geométricos y permite centrar la atención en la búsqueda para aquellas propiedades invariantes que subyacen a dichas transformaciones.

La sesión se articula a través de dos tareas: 1) *la esfera y el plano euclidiano* para, posteriormente, explorar 2) *el disco de Poincaré* en un entorno dinámico. Este proceso busca problematizar nociones tradicionales -como la recta y el paralelismo- y examinar cómo se transforman las relaciones de incidencia en distintos contextos.

5.2.1. Tarea 1: La esfera y el plano euclidiano

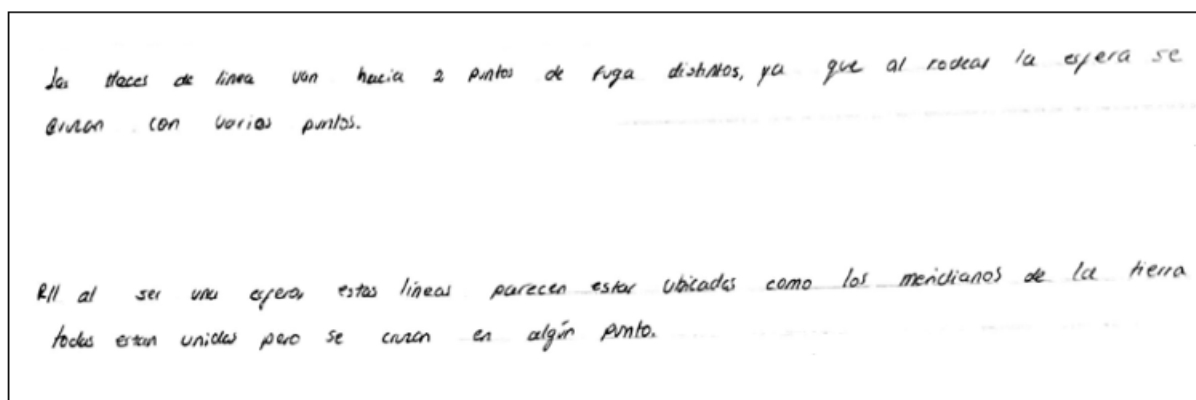
En esta tarea, se planteó una exploración, a partir, de una esfera con ciertas líneas que representan geodésicas, permitiendo problematizar la noción recta y el paralelismo en superficies no planas. Según lo establecido en las THA, los estudiantes harían un paso del reconocimiento visual de estas líneas en la esfera hacia logrando identificar la incidencia mediante la proyección con linterna sobre el plano euclidiano.

En las primeras producciones analizadas, los estudiantes describen las líneas sobre la esfera de manera visual. Frases como “*los haces de línea van hacia 2 puntos de fuga distintos,*

ya que al rodear la esfera se unen con varios puntos” o “al ser una esfera, estas líneas parecen estar ubicadas como los meridianos de la tierra; todas están unidas, pero se cruzan en algún punto” (ver **Figura 31**) estas afirmaciones revelan una interpretación centrada en lo visual, característica para un nivel inicial de razonamiento, donde las propiedades geométricas se asocian directamente con la percepción. Sin embargo, relacionar las líneas con los meridianos conforma un primer lazo entre la observación y un referente geométrico, es decir, podríamos arreglar un primer apunte hacia el nivel 2 (análisis).

Figura 31

Descripción de las líneas de la esfera. Fuente: Producción de los estudiantes

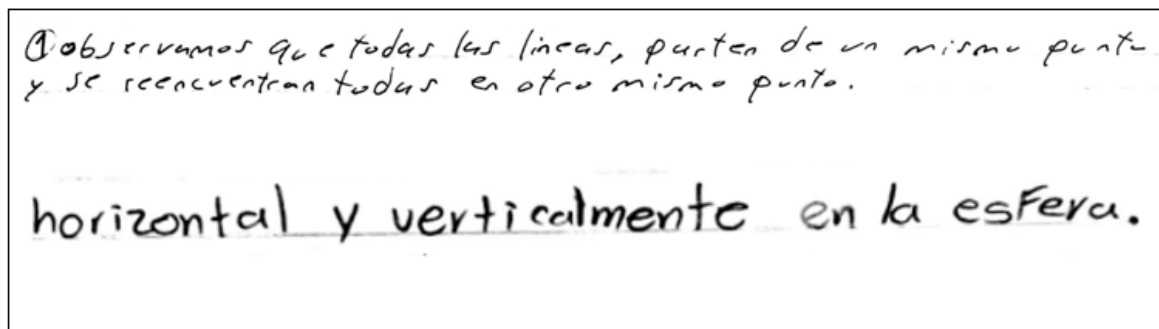


Nota. Producción de un estudiante de grado 11 durante la Sesión 2, Colegio Técnico CEDID Guillermo Cano Isaza I.E.D. Elaboración propia.

De acuerdo con lo anterior, algunos estudiantes señalan: “observamos que todas las líneas parten de un mismo punto y se reencuentran todas en otro mismo punto”, por otro lado, apunta hacia la ubicación de las líneas donde afirman “horizontal y verticalmente en la esfera” (ver **Figura 32**). Por lo tanto, los estudiantes establecen relaciones entre los objetos de la representación, permitiendo un primer indicio del nivel de análisis.

Figura 32

Ubicación de las líneas de la esfera. Fuente: producción de los estudiantes

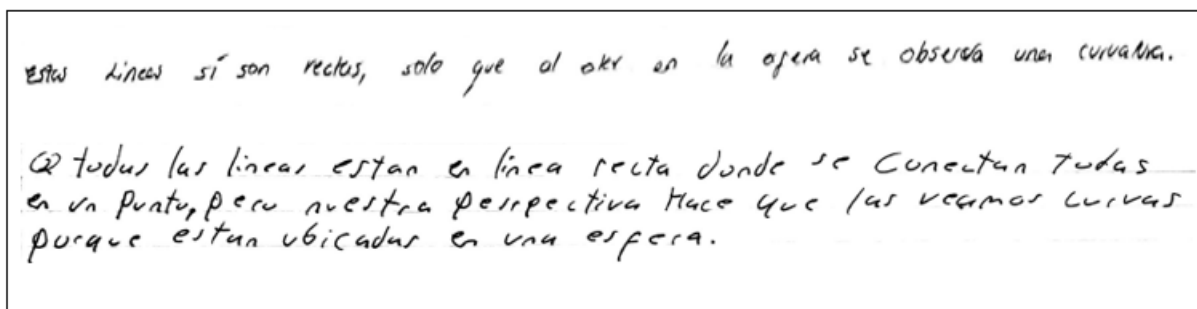


Nota. Producción de un estudiante de grado 11 durante la Sesión 2, Colegio Técnico CEDID Guillermo Cano Isaza I.E.D. Elaboración propia.

Algunas preguntas propuestas en la tarea generaron un conflicto cognitivo; en ella se les preguntó a los estudiantes si las líneas ubicadas en la esfera son rectas. Esto permitió recolectar afirmaciones como “estas líneas sí son rectas, solo que al estar en la esfera se observa una curvatura”, o “todas las líneas están en línea recta, pero nuestra perspectiva hace que las veamos curvas porque están ubicadas en una esfera” (ver **Figura 33**). De igual manera otros estudiantes mencionan “si hacen ver que son curvas, pero realmente no lo son, son líneas rectas”. Dichas respuestas sostienen la vinculación hacia sus conocimientos previos de la geometría con la nueva situación, es decir, comparar lo percibido con la propiedad que para ellos tiene la recta.

Figura 33

Respuestas de los estudiantes sobre su percepción de las rectas. Fuente: producción de los estudiantes.



Nota. Producción de un estudiante de grado 11 durante la Sesión 2, Colegio Técnico CEDID Guillermo Cano Isaza I.E.D. Elaboración propia.

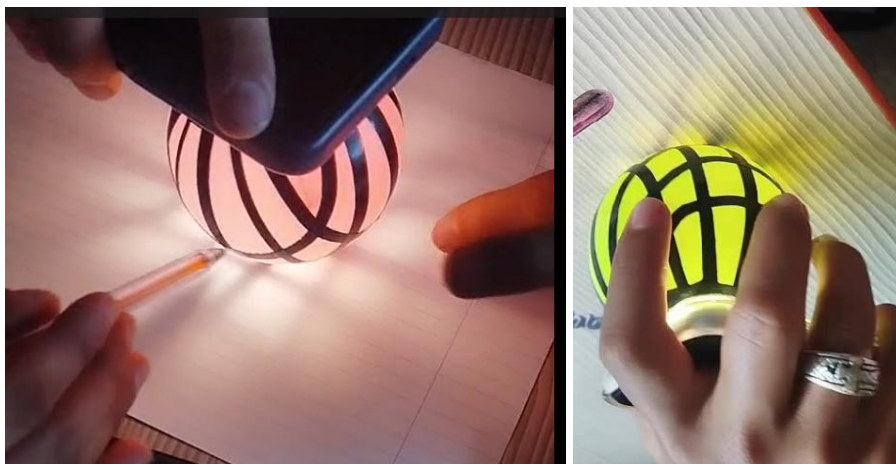
El desarrollo de este proceso es consistente con las hipótesis de la THA y muestra la naturaleza del conflicto cognitivo, tal como señala Brousseau (2007), favorece la constitución de nuevos significados matemáticos al plantear al estudiante una irregularidad entre lo que conoce y lo puesto en la situación.

En el desarrollo de la tarea de proyección, mediante el uso de la linterna del celular ubicándola en lo que se denominó polo norte en la esfera para proyectar las líneas en un hoja o mesa que representó el plano euclidiano, se obtuvieron registros escritos como audiovisuales (ver **Figura 34**). En estos registros se logró evidenciar cómo los estudiantes exploraban deliberadamente la posición tanto de la linterna como la esfera en el plano, y a su vez como cambiaba la proyección de las líneas, debido a las sombras generadas por la luz. Asimismo, se evidencia como ellos señalan con diferentes objetos como lápiz o el dedo, las sombras proyectadas en el plano, esto puede interpretarse, en términos de Almaida y Gallego (2019), como una exploración manipulativa orientada a identificar propiedades geométricas invariantes a partir de la observación directa.

Figura 34

Registro de la variación de la proyección al modificar la fuente de luz (captura de video).

Fuente: Registro de clase.

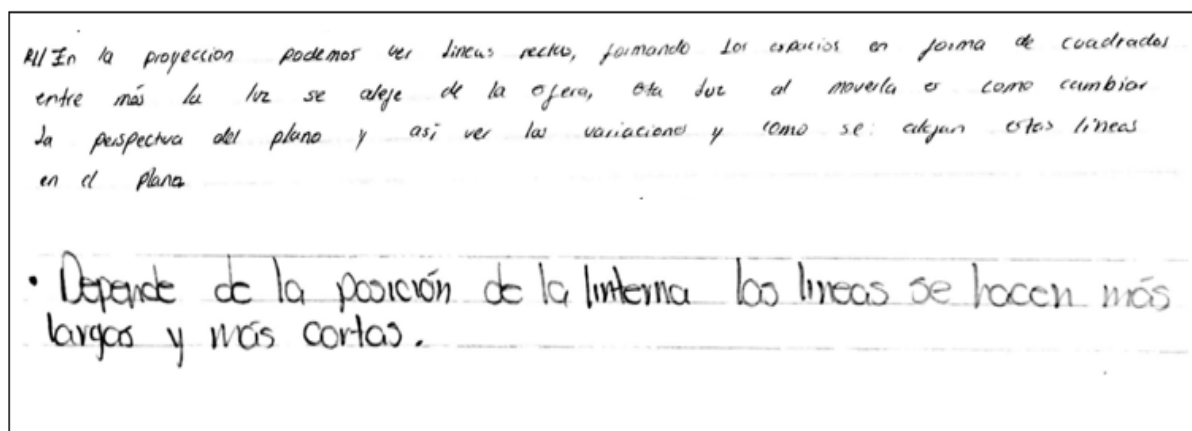


Nota. Producción de un estudiante de grado 11 durante la Sesión 2, Colegio Técnico CEDID Guillermo Cano Isaza I.E.D. Elaboración propia.

Las producciones escritas muestran avances en el análisis. Donde se identifican expresiones como *“en la proyección podemos ver líneas rectas, formando los espacios en forma de cuadrados; esta luz al moverla es como cambiar la perspectiva del plano”*, esto indica que algunos estudiantes relacionaron la posición de la luz con la transformación de la proyección. Asimismo, otros estudiantes afirman *“dependiendo de la posición de la linterna cambia la forma que se proyecta en el plano”* y *“dependiendo de la altura de la linterna se ven más grandes o pequeñas las líneas negras”* (ver **Figura 35**). Estas respuestas revelan la identificación generada por la posición de luz como variable determinante hacia la proyección, estableciendo así relaciones funcionales entre los elementos de la representación, lo cual es característico del nivel 2 (análisis).

Figura 35

Transformaciones de las proyecciones. Fuente: Registro de clase

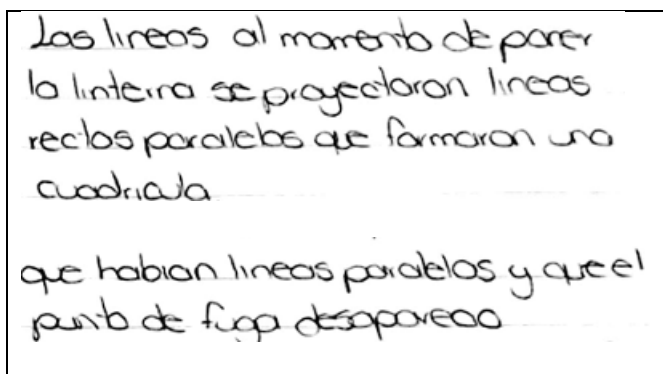


Nota. Producción de un estudiante de grado 11 durante la Sesión 2, Colegio Técnico CEDID Guillermo Cano Isaza I.E.D. Elaboración propia.

Una de las producciones más notorias de esta tarea corresponde a unos estudiantes, los cuales indicaron: “*las líneas al momento de poner la linterna se proyectaron líneas rectas paralelas que formaron una cuadrícula*” y también apuntaba a que “*el punto de fuga desapareció*” (ver **Figura 36**). Esa observación es relevante desde la perspectiva de la THA, dado que muestra que los estudiantes detectaron una transformación estructural entre el modelo de la esfera y el plano euclidiano, pues la convergencia en un punto -que está presente en el modelo esférico- se suspende dejando líneas paralelas. Esa diferencia entre los dos modelos geométricos presenta un avance al llegar al nivel 3 (deducción informal), donde entendieron los diferentes modelos organizaban de forma distinta las relaciones de incidencia.

Figura 36

Líneas y puntos de fuga. Fuente: Registro de clase



Nota. Producción de un estudiante de grado 11 durante la Sesión 2, Colegio Técnico CEDID Guillermo Cano Isaza I.E.D. Elaboración propia.

En conclusión, los resultados de la Tarea 1 dejan entrever una evolución en el razonamiento acorde a la THA, desde unas descripciones perceptivas ente las líneas de proyección en la esfera que corresponden al nivel 1, a una descripción donde se va conociendo las propiedades de incidencia junto con el efecto generado por la posición de luz, propio del nivel 2. Varios estudiantes, identificaron indicios de un razonamiento permitiendo anticipar la distinción entre modelos geométricos, constituyendo un punto de partida para la segunda tarea.

5.2.2. Tarea 2: El disco de Poincaré

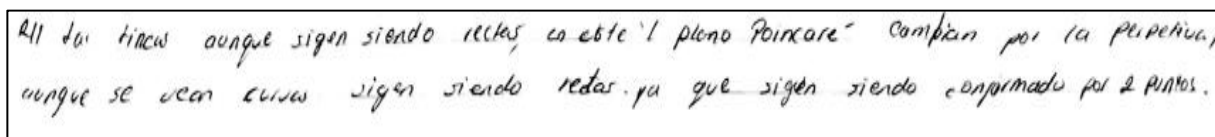
La tarea 2, tiene como propósito dar continuidad con el desafío cognitivo presentado en la tarea anterior cuestionando la noción intuitiva de recta y paralelismo en un modelo no euclidiano, realizando una exploración mediante el disco de Poincaré haciendo uso de geometría dinámica GeoGebra. Teniendo en cuenta lo planteado en la THA se prevea la creación de una recta con la opción “recta por dos puntos” generando un avance desde la identificación visual hacia la comprensión de propiedades de incidencia - y no la apariencia - son el criterio definitorio de la recta en geometría.

En el planteamiento realizado sobre si los objetos creados con la opción de recta se ven como rectas, en primer lugar, algunos estudiantes se encuentran en el nivel 1 y el nivel 2, encontramos expresiones como *"sí, hasta que mueven"* o *"cuando se ve de forma frontal todas las líneas se ven rectas pero cuando se gira un poco se ve curva aun cuando sigue recta"* asociando la rectitud ligada a la apariencia estática del objeto: la recta es recta mientras no se mueva o mientras se vea desde alguna inclinación. El nivel 1 se caracteriza por esta dependencia de la representación visual, en el sentido de que el estudiante razona a partir de la percepción de la figura y no a partir de sus propiedades.

Sin embargo, se muestra un avance importante hacia el nivel 2 e inicios del nivel 3. Estos estudiantes indican: *"las líneas, aunque siguen siendo rectas en este 'plano Poincaré' cambian por la perspectiva, aunque se vean curvas siguen siendo rectas ya que siguen estando conformadas por 2 puntos"* (ver **Figura 37**). Lo anterior permite identificar un criterio de definición el cual parte de una propiedad importante -estar conformada por dos puntos- mostrando una independencia hacia la apariencia visual.

Figura 37

Rectas en el "Plano de Poincaré" Fuente: Registro de clase.



Nota. Producción de un estudiante de grado 11 durante la Sesión 2, Colegio Técnico CEDID Guillermo Cano Isaza I.E.D. Elaboración propia.

Asimismo, otra respuesta afirma *"siempre son rectas, pero la perspectiva lo cambia todo"*. La convergencia mencionada por distintos estudiantes hacia una misma formulación no guiada directamente por las preguntas es evidencia de un razonamiento espontáneo trascendiendo por la descripción perceptiva, podría interpretarse como una elaboración

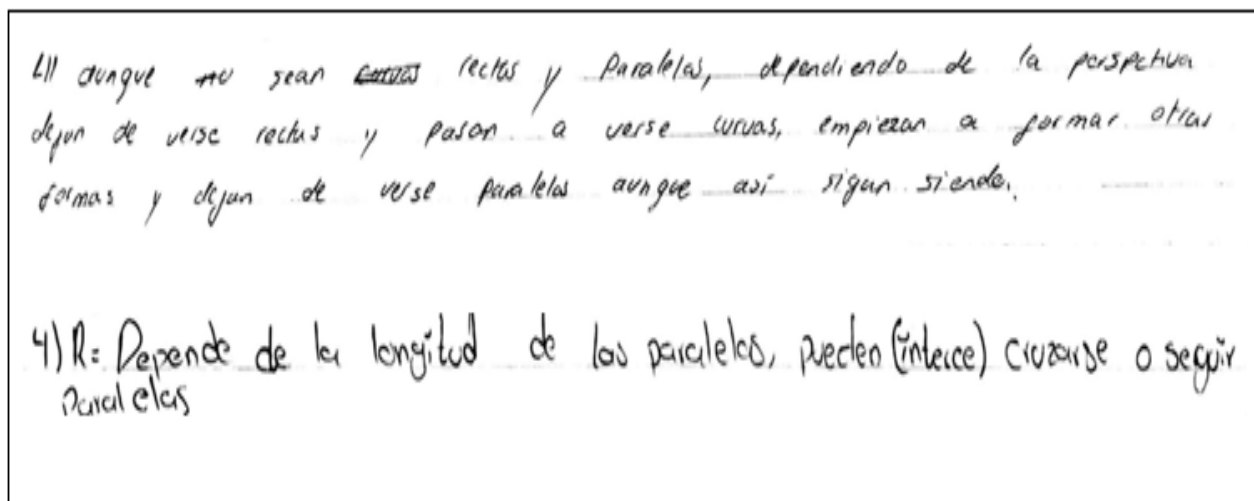
conceptual propia de la orientación libre (**fase 4**) descrita por van Hiele. De acuerdo con Fischbein (1993), las respuestas ponen una tensión entre la imagen perceptiva del objeto y el concepto formal que lo define, una tensión productiva para el desarrollo del pensamiento geométrico.

La pregunta evidenciada donde las rectas paralelas dentro del modelo del disco de Poincaré fue la que generó mayor diversidad de respuestas y, por tanto, el debate conceptual más rico de la sesión. Esta pregunta apuntaba directamente al quinto postulado de Euclides, y a su comportamiento en un sistema no euclidiano, punto central que la THA se había propuesto abordar en esta tarea.

Un conjunto de respuestas muestra que los estudiantes trasladan el marco euclidiano al nuevo modelo. Una de ellas afirma: *"aunque no sean rectas y pasen a verse curvas [...] empiezan a formar otras formas y dejan de verse paralelas, aunque así sigan siendo"*. Es una respuesta donde se reconoce la invarianza de la propiedad de paralelismo —las rectas siguen siendo paralelas, aunque no lo aparenten— pero todavía no logra diferenciar que el modelo del disco de Poincaré obedece a otras reglas de incidencia. A diferencia de lo expuesto anteriormente, otra respuesta afirma que *"depende de la longitud de los paralelos, pueden cruzarse o seguir paralelas"*, introduciendo la condición del comportamiento de los paralelos pueda ser cambiante en el interior del modelo y se va aproximando a comprender que el disco de Poincaré representa un sistema con sus propias reglas de incidencia, aunque sin llegar aún a una formalización de dicha comprensión (ver **Figura 38**).

Figura 38

Paralelas en el Plano de Poincaré. Fuente: Registro de clase.



Nota. Producción de un estudiante de grado 11 durante la Sesión 2, Colegio Técnico CEDID Guillermo Cano Isaza I.E.D. Elaboración propia.

Un segundo conjunto de respuestas corresponde a un avance conceptual identificado, afirmando lo siguiente: *"en este modelo no se cruzan"*. Otra respuesta indica: *"que al ser paralelas no se cruzan nunca"*. Al mismo tiempo *"no se van a cruzar estas rectas"*. Lo anterior permite que empiecen a desenvolverse con el disco de Poincaré como un sistema geométrico y sus correspondientes reglas de incidencias, separándolo del plano euclidiano. Este razonamiento, no solo describe, sino que también expresa una idea global de cómo se comporta el sistema, esto corresponde a los indicios del nivel 3 (deducción informal) del modelo de van Hiele, que trata de cómo se construyen relaciones entre propiedades en vez de recurrirse a la demostración formal.

La THA corroboran los resultados de la Tarea 2 al hacer uso del applet del *Disco de Poincaré* consigue el resultado de activar el conflicto cognitivo que debe lograrse para problematizar las nociones de recta y paralelismo; en términos de Brousseau (2007), el modelo dinámico actuó como una forma que permitió al estudiante a entrar en interacción con las discrepancias en las manifestaciones que con la lógica euclidiana; y de este modo emergieron

nuevos significados. No todos los estudiantes resolvieron el conflicto del mismo modo ni llegaron al mismo nivel, lo cual es coherente con el carácter secuencial y no homogéneo de las proposiciones de los niveles de van Hiele.

Así las cosas, el análisis de la Tarea 2 determina un tránsito específico, ya que ciertos estudiantes se mantiene el tránsito del nivel 1 o 2, mediante la adopción de la definición de rectitud como apariencia externa; en cambio, y otros genera la formulación del criterio de incidencia como propiedad definitoria y el uso del disco de Poincaré como un sistema geométrico autónomo, constituyendo este el avance más verdadero que se da durante la sesión hacia el nivel 3.

Por consiguiente, el disco de Poincaré hizo al evidenciar el conflicto se intensificara aún más al trasladar la controversia de la distinción constitutiva respecto de la dicotomía de la apariencia y la propiedad a un contexto dinámico. Los estudiantes que habían conseguido un mayor avance formulaban el criterio de incidencias de las rectas como base para la definición de recta, y comenzaron a distinguir el modelo del disco de Poincaré como el sistema geométrico al que se referían ahora, evidenciándose indicios del nivel 3 (deducción informal). La tensión entre la imagen perceptiva de los objetos y su definición que era recogida en la conceptualización, explicada por Fischbein (1993) se hizo presente, de una manera particular en las respuestas sobre las rectas paralelas, que constituyeron la controversia conceptual más fructífera de la sesión.

De esta forma, la Sesión 2 en su totalidad alcanzó el objetivo articulador que figuraba en la THA: disociar la idea de recta como representación mental asociada a la “linealidad” y la “rectitud” o lo “derecho”, con objeto para el estudio de modelos geométricos que ponían de relieve las relaciones de incidencia -y no ya la forma- que dominan el sistema. Esta producción

conceptual es la antesala de la Sesión 3, en la que se hará el primer acercamiento al plano de Fano y se profundizará en el plano proyectivo considerado como un sistema axiomático.

5.3. Sesión 3: El plano de Fano

La sesión 3 "*El plano de Fano*" se centró en el descubrimiento lógico de un sistema geométrico finito donde cambia el concepto de paralelismo euclidiano, es decir "dos rectas que no se cruzan". En este sentido, según la THA se propuso el tránsito en el reconocimiento visual hacia el análisis de las condiciones de concurrencia estableciendo siete puntos y siete rectas, de tal forma que cada punto esté en exactamente tres rectas y cada recta esté en exactamente tres puntos. Este cambio también supone poner en cuestión la noción de recta en un ámbito en el cual una de las siete rectas se presenta como el trazado de una curva dentro del modelo plano lo cual supone profundizar el conflicto cognitivo que se inició en la sesión 2.

5.3.1. Tarea 1: Construcción y verificación del plano de Fano

La primera tarea se les entregó a los estudiantes material concreto correspondiente (ver **Figura 18**)

Tablero de representación para la construcción del "Plano de Fano") se propuso a partir de esta representación construyeran el Plano de Fano teniendo en cuenta cumplir con las condiciones de incidencia establecidas. Para esto se anticipó en la THA realizara la verificación - cada punto pertenece a tres rectas y cada recta contiene a tres puntos - de esta manera se pretendía una transición del nivel 1 hacia el nivel 2, donde no solo se obtuvieran una descripción perceptiva de la figura, sino, establecer una relación entre los elementos del sistema.

Las respuestas halladas logro identificar que los estudiantes muestran de una manera clara el procedimiento (ver **Figura 39**), lo cual describe "*Para verificar que se cumplen todas las*

condiciones, tenemos que mirar que cada punto pertenezca a 3 rectas, y a cada línea le correspondan tres puntos." De manera análoga, señala "Podemos verificar observando que cada recta tenga tres puntos y cada punto tenga tres rectas." Esto demuestra una comprensión de la construcción del sistema, esta figura no genera un reconocimiento visual, sino de garantizar que sus relaciones de incidencia. Lo anterior permite ubicar a los estudiantes en el nivel 2, donde ellos realizan un análisis de los objetos a partir de sus propiedades.

Figura 39

Construcción del plano de Fano. Fuente: Registro de clase



Nota. Producción de un estudiante de grado 11 durante la Sesión 3, Colegio Técnico CEDID Guillermo Cano Isaza I.E.D. Elaboración propia.

No obstante, uno de los puntos fuertes de la tarea y el que generó debate entre los estudiantes, fue el planteamiento de la pregunta, si las siete rectas de las construcciones realmente eran rectas. Donde el plano de Fano representa la séptima recta en forma de circunferencia o curva, generando una contradicción de la geometría euclidiana. Según lo mencionado por Brousseau (2007), una situación de conflicto cognitivo diseñada deliberadamente: la representación visual se contrapone conceptualmente a la definición del objeto y puede constituirse en un obstáculo epistemológico.

Teniendo en cuenta el cuestionamiento anterior se logra evidenciar tres respuestas que diferencian su proceso de razonamiento. En primer lugar, se afirma que todas las rectas si son rectas como se menciona el siguiente estudiante *"Sí, porque todas las líneas son rectas."* Esta respuesta, a pesar de ser breve, permite deducir lo establecido como verdad en el sistema sin ser cuestionado, dando como interpretación de confianza de la teoría del modelo tecnológico que habrá de usarse para la práctica y soporte que puede ser una respuesta al interrogante que plantea su práctica, aunque no haya una elaboración desde lo teórico y por qué un objeto en este caso curvo en su apariencia y representación puede ser recta en este sistema.

En segundo lugar, la respuesta es negativa y la cual ofrece una justificación visual, ubicándose en el nivel 1, afirmando *"No, porque todas son líneas y ninguno es diferente a otro."* Esta respuesta completamente visual: al señalar que no hay distinción entre las líneas, sin tener en cuenta que de las siete rectas una de ellas tiene una representación diferente. La indicación al elemento visualmente se distingue de los demás es precisamente el arranque del conflicto cognitivo que busca situar la tarea.

Finalmente, destacan respuestas con avances conceptuales significativos al identificar la séptima recta como punto crítico del problema. Tales estudiantes proponen soluciones empleando las propiedades del modelo, afirmando: *"No, ya que la séptima recta es una recta en una superficie curva."* Esto permite introducir la noción fundamental sobre la rectitud como una propiedad relativa, dependiente de la superficie o el sistema geométrico sobre el cual se situó el objeto. Como señala Fischbein (1993), se evidencia que el estudiante ha empezado a diferenciar ente la percepción de la imagen y el concepto que lo define, de tal manera genera un avance importante al nivel 3 del modelo de van Hiele.

Asimismo, algunos estudiantes señalan que *"No hay una que vista desde arriba no se ve como recta, pero de lado sí lo es."* de esta manera, se recurre a la perspectiva como parte de la solución, lo cual genera una conexión con el objetivo de la Sesión 2: la rectitud como propiedad relacional cuya apariencia depende del punto de vista o del modelo desde el cual se observa. Aquí se hace explícita la persistencia conceptual entre las sesiones, prevista en la THA, en el razonamiento de los estudiantes.

5.3.2. Tarea 2: Paralelismo en el plano de Fano

La segunda tarea tuvo como interés en la exploración el plano de Fano específicamente en el comportamiento de las rectas paralelas, buscando comprobar la inexistencia de paralelismo en este sistema; es decir, la intersección de todo par lineal en al menos un punto. Lo anterior era un aspecto de debate conceptual, teniendo en cuenta con la THA, dado que los estudiantes se enfrentan al postulado euclidiano de las paralelas con las relaciones de incidencia del nuevo sistema.

De esta manera se encontraron respuestas que permiten evidenciar parcialmente la hipótesis de la THA. Algunos estudiantes afirman la no existencia del paralelismo en el sistema *"Ninguna es paralela porque todas en cierto punto se tocan."* y *"porque no hay líneas paralelas ya que todas se cruzan."* Esta afirmación permite que los estudiantes vayan más allá de la visualización generalizando la propiedad de incidencia, donde toda pareja de rectas se corta, manteniendo una característica primordial de plano de Fano. Según Fernández (2024), la caracterización del nivel 3 (van Hiele) señala cómo esta formulación general, basada en las propiedades sistémicas, resulta propia de la deducción informal.

Otras respuestas encontradas evidencian que algunos estudiantes mantienen la tensión entre el modelo euclidiano y el plano de Fano, donde resuelven el conflicto a partir de la

perspectiva afirmando que “*Dependiendo de la perspectiva las hay o no las hay, al ver el modelo lateralmente todas se ven paralelas, pero al verlo desde la vista superior no lo son, todo depende de la perspectiva.*” Esto ratifica una dificultad prevista por la THA, donde el empleo del recurso perspectiva -estudiado anteriormente- facilita una solución provisional sin alcanzar el reconocimiento sobre las propiedades sistémicas nuevas. Sosteniendo el paralelismo mediante la perspectiva con el modelo usado, sin tener en cuenta que el Plano de Fano no admite paralelas por definición, independientemente del punto de vista.

No obstante, es preciso señalar que, se encontró una respuesta la cual ofrece una formalización que sintetiza el avance de la sesión afirmando que “*Que cada línea parte de un mismo punto de fuga.*” A pesar de que tal respuesta recurre a un vocabulario de perspectiva para hacer alusión a la incidencia, la observación de que todas las rectas poseen un punto de convergencia se presenta como un acercamiento intuitivo a la propiedad de la intersección total del conjunto de rectas. Bajo la mirada de Duval (2017), tal respuesta facilita un proceso conversivo desde el registro perspectivo hacia el registro proyectivo geométrico buscado en esta secuencia.

En resumen, los resultados de la Sesión 3 corroboran las hipótesis de la THA: la construcción y verificación del plano de Fano promovió el razonamiento de los estudiante hasta el nivel 2, en la medida que requería la lectura sistemática de las relaciones de incidencia, y la pregunta sobre la séptima recta y sobre el paralelismo planteó el conflicto cognitivo del que se necesitaba la necesidad de poner en marcha el tránsito hacia el nivel 3 en los grupos más avanzados; la continuidad conceptual con la sesión anterior -y sobre todo con el uso de la perspectiva como recurso de razonamiento- se deja notar en las producciones, pero para algunos

grupos la continuidad operaba como un límite: el recurso a la perspectiva resuelve de forma visual el conflicto pero no acaba de acceder a las propiedades intrínsecas del sistema.

5.4. Sesión 4: Teorema de Desargues

En esta última sesión “*Teorema de Desargues*” se planteó introducir a los estudiantes en la noción de perspectiva desde un punto y sus consecuencias geométricas, por medio de la exploración del Teorema de Desargues en un entorno de geometría dinámica. Teniendo en cuenta lo planteado por las THA, se esperaba que los estudiantes lograran avanzar desde el reconocimiento entre los vértices del triángulo hasta identificar las propiedades de incidencia que se mantienen en la perspectiva -conurrencia de las rectas que unen los vértices correspondientes y colinealidad de las intersecciones de los lados correspondientes-, lo que corresponde al nivel 3 (deducción informal) del modelo de van Hiele.

5.4.1. Tarea 1: Verificación de propiedades

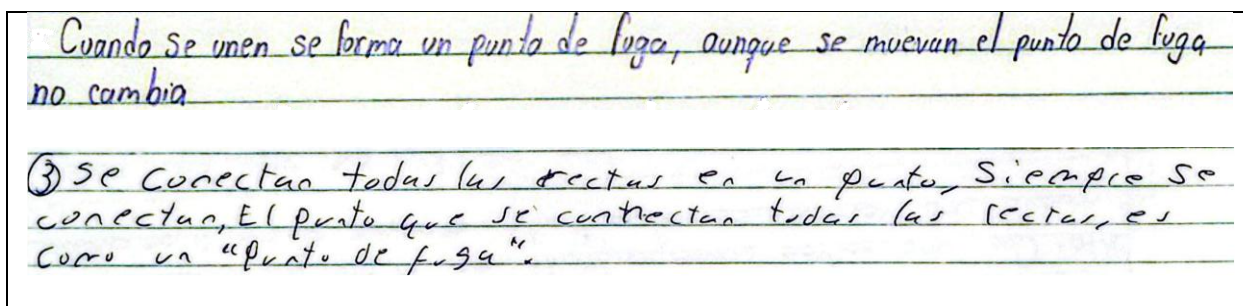
En la primera parte, se les indicó a los estudiantes que realizaran la exploración en GeoGebra dos triángulos en perspectiva desde un punto (ver **Figura 20**). La THA proponía identificar la concurrencia de las tres rectas en un punto -el centro perspectivo- mediante la manipulación dinámica, resultando una propiedad invariante pese a la ubicación de los vértices.

Gracias a la exploración varios de los estudiantes identificaron esta invarianza como hallazgo central de la tarea afirmaciones como “*Cuando se unen se forma un punto de fuga, aunque se muevan el punto de fuga no cambia.*” y “*Se conectan todas las rectas en un punto. Siempre se conectan. El punto que se conectan todas las rectas es como un 'punto de fuga'*” (ver **Figura 40**), además vincularon esta invariante con el concepto de punto de fuga aprendido en la Sesión 1. Dicho vínculo resulta relevante bajo la mirada de la THA: la secuencia didáctica logró

conectar la noción perspectiva —introducida intuitivamente mediante el dibujo del aula— con su fundamentación geométrica proyectiva. Finalmente, la invariabilidad del punto fuga frente al movimiento de los vértices constituye, según Duval (2017), un proceso de aprehensión operacional figurativa: el estudiante observa la imagen, pero también actúa sobre ella descubriendo una propiedad inalterable.

Figura 40

La concurrencia de las rectas como una propiedad invariante de la figura



Nota. Producción de un estudiante de grado 11 durante la Sesión 4, Colegio Técnico CEDID Guillermo Cano Isaza I.E.D. Elaboración propia.

Asimismo, encontramos respuestas como “*Todos salen de un mismo punto de fuga; esto lo evidenciamos porque al unirlos todas las líneas se cruzaron. Que las líneas son concurrentes, todas llegan a un mismo punto.*” (ver **Figura 41**) Esto permite ver un avance hacia el nivel 3 haciendo uso del término *concurrente* al describir la propiedad observada en la exploración, los estudiantes ha llegado a la terminología técnica de la geometría proyectiva para describir una relación que ha podido ser identificada experimentalmente por ellos, lo que corresponde a la Fase 3 de aprendizaje de van Hiele (Explicitación), donde los estudiantes aprenden y emplean el léxico específico del nivel mediante la comunicación (Corberan Salvador et al., 1994, citados por Fernández, 2024).

Figura 41

Uso del término concurrentes para describir una propiedad

todos salen de un mismo punto de fuga esto lo evidenciamos porque al unirlos todas lineas se cruzaron

Nota. Producción de un estudiante de grado 11 durante la Sesión 4, Colegio Técnico CEDID Guillermo Cano Isaza I.E.D. Elaboración propia.

Sin embargo, otros estudiantes afirmaron que “*Si se mueve el triángulo 1 el dos también se mueve. Cuando el triángulo 1 se mueve el triángulo 2 también, pero cuando se mueve el triángulo 2 no se mueve el triángulo 1.*” Esto fue un aspecto previsto en la THA fue la dificultad de algunos grupos para distinguir los dos triángulos como entidades separadas que están relacionadas.

Esta observación acerca de la asimetría en la relación de dependencia de los triángulos, esto es, constatar que el triángulo dependiente, depende del triángulo independiente, pero no al revés, esto es la dependencia no es simétrica; a la vez que también da a entender que son conscientes de la estructura de la perspectiva desde un punto: uno de los dos triángulos depende del otro, y este depende de él -es decir, determinado por el centro de la perspectiva. Es cierto que ellos no establecen la relación con los términos de las propiedades geométricas, pero la observación de la asimetría marca una entrada en el análisis de la estructura de la intersección proyectiva, acorde con el nivel 2 de las propiedades geométricas, nivel donde incluso los estudiantes pueden llegar al conocimiento del nivel 2 avanzado.

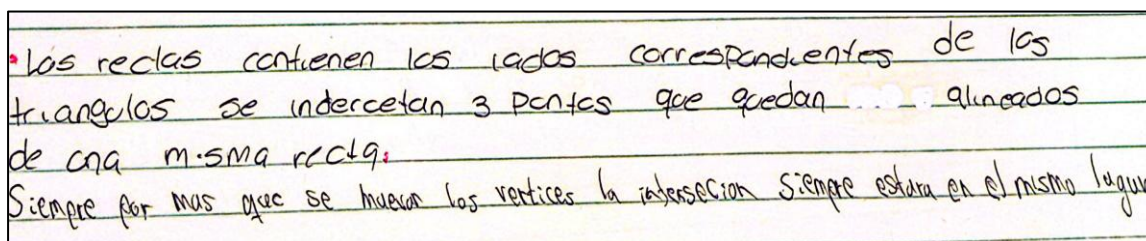
5.4.2. Tarea 1: Determinar Rectas

En la segunda parte de la tarea se planteó la perspectiva desde una recta; los estudiantes trabajaron en las intersecciones de los lados correspondientes de los dos triángulos observando que los tres puntos de las intersecciones -denominados P, Q y R- son colineales (es decir,

pertenecen a la misma recta, la cual se denomina eje de perspectiva), que corresponde a la segunda condición del Teorema de Desargues, representando el momento con mayor exigencia cognitiva. Esta segunda fase de la THA proyectaba la identificación sobre la colinealidad entre los puntos P, Q y R como propiedad invariante, vinculándola con la concurrencia observada durante la etapa inicial.

Las evidencias muestran que varios estudiantes identificaron la colinealidad de los vértices una de las afirmaciones es “*Las rectas contienen los lados correspondientes de los triángulos; se interceptan en 3 puntos que quedan alineados en una misma recta. Siempre, por más que se muevan los vértices, la intersección siempre estará en el mismo lugar*” (ver **Figura 42**).

Figura 42
Identificación de las propiedades invariantes



Nota. Producción de un estudiante de grado 11 durante la Sesión 4, Colegio Técnico CEDID Guillermo Cano Isaza I.E.D. Elaboración propia.

Lo anterior permite evidenciar que los estudiantes establecieron las dos propiedades, a saber, la intersección de los lados correspondientes en tres puntos y la alineación de esos tres puntos en una recta, y han indicado explícitamente la invarianza de la propiedad ante un movimiento de los vértices. Podríamos decir que, tal y como se expone en el modelo de van Hiele, esta formulación está relacionada con el nivel 3 (deducción informal), dado que el estudiante establece relaciones entre propiedades de la figura a partir de la exploración, sin

demostrarla formalmente, pero razonando más allá de la simple descripción visual (Fernández, 2024).

Desde otro punto de vista, algunos estudiantes confirman *“Al pasarlas por los vértices todas las rectas pasan por un mismo punto, todas tres se encuentran en un punto. Los puntos quedan en una recta.”* Al indicar *los puntos quedan en una misma recta*, de una manera concisa nombran una característica de la colinealidad del eje de perspectiva, logrando identificar la propiedad principal del Teorema de Desargues de una manera experimental.

Aunque varios estudiantes lograron identificar a través de la exploración propiedades invariantes específicas del Teorema, también algunos estudiantes no lograron identificar la colinealidad de una manera clara, como se refleja en la afirmación: *“Se podría concluir que se unen entre ellos, pero no están en la misma recta”*. Desde el punto de vista de la THA, indican la intersección entre lados correspondientes sin reconocer la colinealidad entre los puntos intersecados. Tal dificultad coincide con lo señalado por Brousseau (2007), aludiendo a un conflicto cognitivo planteado, pero no resuelto totalmente durante la sesión, lo cual no invalida el diseño, sino que señala la necesidad de continuar la exploración en sesiones posteriores.

5.4.3. Tarea 3: Planteamiento de la conjetura

La última tarea, tenía como propósito que los estudiantes lograran articular las propiedades halladas durante la exploración, concurrencia del centro de perspectiva y colinealidad del eje, con el fin que realizaran una conjetura que anticipara la formulación del Teorema de Desargues, esto permitía, en términos del modelo de van Hiele que los estudiantes lograran llegar al nivel 3 (deducción informal) en su forma más plena. Sin embargo, las discusiones y debates que surgieron durante el desarrollo de las tareas 1 y 2, en particular, en la

exploración del eje de perspectiva, consumió más tiempo de lo previsto, generando que esta tarea no se lograra implementar.

Desde la perspectiva del análisis desarrollado, la no realización de esta tarea genera en sí un hallazgo, indicando que el nivel de exploración alcanzado en las tareas anteriores fue lo suficientemente profundo para no permitir un cierre apresurado, lo cual es preferible, desde la perspectiva de la THA, a una formulación superficial de la conjetura. Como indica Camargo (2021), reflexionar sobre lo omitido durante la implementación integra el análisis retrospectivo: facilita identificar momentos donde la secuencia requiere ajustes temporales sin implicar fallos en el diseño.

En resumen, los resultados obtenidos en la sesión 4 validan las hipótesis de la THA en las tareas 1 y 2. La exploración de los triángulos en perspectiva desde el punto de vista generó la identificación de la concurrencia como propiedad invariante en la mayoría de los estudiantes, propicia el tránsito del razonamiento hacia el nivel 2. En la sesión, la exploración del eje de perspectiva ha sido el mayor reto cognitivo y, en los estudiantes más avanzados, esta ha comprobado claras del nivel 3 en la formulación de la colinealidad de las intersecciones como propiedad invariante.

Finalmente, la Tarea 3 no se pudo realizar a causa de las restricciones temporales, lo que dirige a una modificación de la distribución temporal en las siguientes implementaciones sin modificar el dispositivo conceptual de la secuencia (Camargo, 2021). La articulación sostenida de las nociones de perspectiva elaborado desde la Sesión 1 con las propiedades de la geometría proyectiva, confirma que el dispositivo didáctico ha conseguido una progresión del conocimiento, de forma consistente a lo largo de las cuatro sesiones.

5.5. Síntesis del general de la implementación

El análisis retrospectivo permite identificar un progreso en el razonamiento geométrico de los estudiantes de manera continua, en términos generales, con la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje diseñada. En la Sesión 1, se partió desde un nivel 1 (visualización), donde los estudiantes describían las rectas del salón de clase mediante su apariencia en la perspectiva; emergiendo nociones como punto de fuga como noción conceptual, lo que permitió que varios estudiantes comenzaran a transitar por el nivel 2 comprendiendo la perspectiva como representación y no como realidad geométrica.

En la Sesión 2, en la manipulación de la esfera y la exploración del disco de Poincaré, se profundizó en el conflicto cognitivo al comprobar que las representaciones en las que la rectitud euclidiana deja de ser visual. La mayoría de los estudiantes se mantuvieron en el nivel 2 al relacionar la posición de la luz con la proyección y al formular la rectitud como propiedad de incidencias; por otro lado, otros estudiantes lograron avanzar a inicios del nivel 3 al relacionar el disco de Poincaré como un sistema geométrico con sus propias reglas.

En la Sesión 3, al realizar la construcción y verificación del plano de Fano se consolidó el nivel 2 mediante el proceso de verificación sistemática de las condiciones planteadas de incidencia, permitiendo que los estudiantes lograran avanzar hacia el nivel 3 al identificar la no existencia de las paralelas como propiedad fundamental del sistema, haciendo diferencia en el marco euclidiano.

En la Sesión 4, la exploración del Teorema de Desargues logró que algunos estudiantes formularan propiedades invariantes como, por ejemplo: concurrencia y colinealidad, a partir de la manipulación en geometría dinámica; de esta manera se estableció la evidencia más sólida del nivel 3 en toda la secuencia. A pesar de que, no se logró concluir la Tarea 3, orientada al

planteamiento de la conjetura, los resultados obtenidos de las tareas anteriores permiten inferir que algunos estudiantes contaban con los elementos suficientes para realizar la formulación, lo que señala un ajuste temporal para futuras implementaciones sin comprometer la validez del diseño (Camargo, 2021), sin embargo, una afirmación categórica al respecto no puede ser lanzada.

Los hallazgos muestran que el diseño de la THA fue pertinente para que los estudiantes lograran transitar por algunos niveles de razonamiento propuestos por van Hiele, aunque con resultados diversos propios del carácter no lineal de dicho avance (Fernández, 2024; Bonilla Bernal, 2021; Bernal y Rojas Velázquez, 2022). El conflicto logrado a través de la manipulación concreta, el contexto dinámico y el hecho de proponer la confrontación de diferentes modelos de carácter geométrico, fue el verdadero motor del aprendizaje, tal y como se apunta desde una perspectiva de Brousseau (2007). La tensión que existe entre la imagen perceptiva de los objetos y su definición conceptual, tal y como se la describe Fischbein (1993), será hilo conductor, de hecho, de las cuatro sesiones y la secuencia didáctica que se ha ido desarrollando.

6. Conclusiones

En este capítulo se presentan las conclusiones de la monografía. En primer lugar, se describen los resultados obtenidos a partir del análisis del diseño y la implementación del experimento de enseñanza en relación con el alcance de los objetivos trazados. Posteriormente, se presenta una reflexión sobre el aporte que la síntesis y aplicación de estas tareas deja en el ejercicio profesional de los futuros educadores matemáticos autores de este trabajo. Como enfoque estructural para la presentación de estas se optó por hacerlo en relación con los objetivos específicos propuestos y al objetivo general.

6.1. Respecto al primer objetivo específico: Diseñar una secuencia de tareas estructurada en fases de aprendizaje, de acuerdo con el modelo de van Hiele.

En cuanto al diseño de las tareas, es pertinente destacar que la propuesta presenta una secuencia rigurosamente estructurada y fundamentada en las fases de aprendizaje del modelo de van Hiele. La secuencia, compuesta por cuatro sesiones, muestra una articulación coherente con el marco teórico seleccionado. Específicamente, en el diseño de cada tarea se describe de manera explícita la fase de aprendizaje correspondiente, buscando potencializar el razonamiento geométrico en los estudiantes. En términos generales, la propuesta inicia abordando las fases de información y orientación dirigida, mediadas por procesos de visualización. Posteriormente, el diseño avanza de manera lógica hacia las fases de explicitación y orientación libre, introduciendo geometrías y modelos no euclidianos, para culminar con tareas de formalización geométrica orientadas a la fase de integración. Esta planificación evidencia una gradualidad cognitiva

intencional, diseñada para guiar a los estudiantes en el tránsito por distintos niveles de razonamiento geométrico.

Por lo anterior, se concluye que la coherencia interna del diseño y su articulación con las fases de aprendizaje confirman el cumplimiento integral de este primer objetivo. No obstante, cabe señalar que la introducción de geometrías no tradicionales, ajenas a los currículos habituales, puede generar cierta incertidumbre o frustración cognitiva en los estudiantes al enfrentarse a nuevos sistemas axiomáticos en un periodo breve. Por esta razón, la expectativa de una intervención de tan corta duración no debe centrarse en lograr el dominio absoluto de una "nueva geometría", sino en despertar una duda razonable sobre la universalidad de la geometría clásica y fomentar la curiosidad por la existencia de otros "mundos geométricos".

6.2. Respecto al segundo objetivo específico: Implementar la secuencia de tareas con estudiantes de grado once del Colegio Técnico CEDID Guillermo Cano Isaza.

La implementación de la propuesta en el Colegio Técnico CEDID Guillermo Cano Isaza permitió validar la viabilidad de la secuencia en un entorno de educación media donde el paradigma euclidiano métrico se encuentra como único entorno geométrico. Al trabajar con estudiantes de grado once, se identificó un estado inicial donde la población carecía de formación previa en geometrías no tradicionales al currículo colombiano, limitando sus nociones geométricas a procesos de cálculo y medida. No obstante, la implementación del experimento de enseñanza facilitó una inmersión progresiva que aprovechó el conocimiento previo de los estudiantes en conceptos euclidianos para construir conceptos complejos subyacentes a la base conceptual de la geometría proyectiva. Los resultados obtenidos demuestran la intervención fue efectiva para movilizar el pensamiento de los estudiantes desde una visualización puramente intuitiva hacia niveles superiores de razonamiento geométrico. Particularmente, en sesiones

como las del plano de Fano y el disco de Poincaré, se observó cómo los estudiantes lograron gestionar el conflicto cognitivo, permitiéndoles cuestionar la universalidad de axiomas de paralelismo. En conclusión, el objetivo de implementación se considera cumplido de manera parcial; si bien, se logró que los estudiantes reconocieran la existencia de sistemas axiomáticos distintos al habitual, aportando a su red conceptual y cumpliendo con la trayectoria hipotética de aprendizaje planteada, factores externos al desarrollo de las sesiones, específicamente el cruce con actividades netamente institucionales, impidieron la finalización de la última tarea de la sesión cuatro. Como consecuencia de esta limitación de tiempo, los estudiantes no lograron consolidar en un escrito sus deducciones. A pesar de los contratiempos presentados, el avance cognitivo evidenciado durante la sesión ratifica la pertinencia de la propuesta presentada puesto que se completó la ejecución de las tareas diseñadas, a pesar de las situaciones externas a la clase que se presentan en el contexto inmerso en el aula y a su vez en la institución y sus dinámicas propias.

6.3. Respecto al tercer objetivo específico: Integrar el uso de entornos de geometría dinámica como recurso para la exploración y comprensión de conceptos proyectivos.

La incorporación de entorno de geometría dinámica resultó fundamental para que los estudiantes de grado once del Colegio Técnico CEDID Guillermo Cano Isaza lograran trascender la exploración puramente empírica y avanzaran hacia la formalización de conceptos proyectivos. El software permitió una interacción directa y explícita con la variabilidad y la conservación de propiedades geométricas, facilitando la identificación de invariantes como la colinealidad y la incidencia mediante la manipulación directa de objetos geométricos asociados a las tareas propuestas. A diferencia del material físico, también tuvo un papel relevante dentro de la propuesta, el entorno digital redujo en algunos casos la carga cognitiva asociada al trabajo con

objetos no dinámicos que dada su rigidez son exigentes no solo en su uso sino en su manipulación; esta disminución permitiendo que la atención se centrara en el análisis de las relaciones lógicas y estructurales del sistema propuesto.

Desde la perspectiva del modelo de van Hiele, el uso de esta herramienta fue un promotor en las fases de Orientación Dirigida y Explicitación. Especialmente en el estudio de modelos complejos como el disco de Poincaré, la tecnología permitió visualizar de manera inmediata relaciones no euclidianas que desafían los conceptos euclidianos habituales, lo que resultó esencial para que los estudiantes lograran comunicar sus hallazgos y construir conceptos sólidos sobre objetos en geometría proyectiva.

No obstante, es imperativo señalar que el cumplimiento del objetivo enfrentó algunos desafíos técnicos significativos relacionados con la tecnología digital disponible. No todos los estudiantes contaron con condiciones tecnológicas óptimas y en algunos casos, las redes de conexión débiles y algunos equipos con hardware obsoleto ralentizaron el proceso de interacción en algunos momentos. Por tanto, se concluye que el objetivo se cumplió satisfactoriamente, posicionando a la geometría dinámica no solo como un soporte visual, sino como un mediador cognitivo indispensable que permitió dotar de significado matemático a las proyecciones observadas durante toda la secuencia didáctica, demostrando el potencial pedagógico de estas herramientas a pesar de las brechas tecnológicas inmersas en el contexto escolar; sin embargo se deben potencializar los recursos tecnológicos pues los requerimientos de memoria operativa para los software son cada vez mayores.

6.4. Con respecto al cuarto objetivo específico: Analizar las producciones de los estudiantes para establecer si la secuencia de tareas favorece el tránsito entre los niveles de razonamiento de van Hiele.

El análisis de las producciones de los estudiantes mostró que la secuencia de tareas ayudó al tránsito del nivel de reconocimiento a algunos niveles superiores del razonamiento geométrico. En concreto, algunos estudiantes avanzaron desde el nivel de reconocimiento (nivel 1) hacia el nivel de deducción informal (nivel 3). Reflejado en la identificación de propiedades, el establecimiento de relaciones entre conceptos y la argumentación de sus respuestas. Estos resultados reflejan la promoción de procesos de razonamiento que trascienden del reconocimiento visual de las figuras geométricas.

Sin embargo, el análisis también reflejó que un reducido número de estudiantes permaneció en el nivel de reconocimiento, evidenciando dificultades para identificar y establecer relaciones entre las propiedades de los objetos geométricos. Este hallazgo muestra que el tránsito entre los distintos niveles no ocurre en las mismas proporciones para todos los estudiantes y depende de los procesos de apropiación de los conceptos y objetos con los que se está trabajando.

Cabe resaltar que el propósito del análisis no fue cuantificar las producciones de los estudiantes, sino interpretar las evidencias presentes en ellas para verificar si la implementación de la secuencia de tareas favorecía el progreso en los niveles de razonamiento geométrico según el modelo de van Hiele. Para ello, el análisis se articuló con la propuesta de caracterización de los niveles de razonamiento de van Hiele, utilizándolos como referentes para interpretar las producciones de los estudiantes y determinar el nivel de razonamiento evidenciado durante la resolución de las tareas. En este sentido, las producciones constituyeron la principal fuente de

información para identificar el posible tránsito entre niveles y comprender la evolución del razonamiento geométrico desarrollada por los estudiantes a lo largo del desarrollo de la secuencia de tareas.

Como sugerencia para futuras investigaciones, se propone mejorar las estrategias de organización de la información de los estudiantes e incorporar metodologías de análisis más sistemáticas que permitan profundizar en la interpretación de las producciones de los estudiantes.

6.5. Con respecto al objetivo general

Diseñar e implementar una secuencia de tareas para la enseñanza de elementos básicos de la geometría proyectiva en estudiantes de grado once del Colegio Técnico CEDID Guillermo Cano Isaza, con el fin de promover el tránsito a niveles superiores de razonamiento según la propuesta de van Hiele.

El objetivo de esta investigación se basa en la validación de la geometría proyectiva como un escenario óptimo para la potencialización del razonamiento geométrico en la educación media. Se logró diseñar una propuesta teóricamente robusta en el modelo van Hiele que, al implementarse, permitió a los estudiantes de grado once trascender su visualización estrictamente métrica que predominaba en su estructura cognitiva. Las articulaciones de la propuesta de tareas con las fases de aprendizaje del modelo van Hiele, facilitó el tránsito evidenciable desde el nivel de visualización hasta la deducción, identificando propiedades invariantes de objetos geométricos de estudio asociados a la geometría proyectiva. A pesar de

que la implementación se completó de manera parcial, los resultados obtenidos durante el desarrollo de la propuesta ratifican el éxito del experimento.

En términos de la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje, esta permitió anticipar, orientar y monitorear el progreso en el razonamiento geométrico de los estudiantes. El diseño de la propuesta permitió que la trayectoria se cumpliera de manera satisfactoria a pesar del cumplimiento parcial de la implementación. En definitiva, este plan de instrucción se consolidó como una herramienta apropiada de investigación que permitió constatar el tránsito hacia niveles superiores de razonamiento.

Es importante reconocer que la propuesta requiere ajustes que puedan optimizar el alcance obtenido, puesto que se pueden incluir sesiones previas o intermedias que formalicen conceptos de geometría proyectiva con el fin de que la presentación de los axiomas que la determinan no muestre un impacto que pueda resultar “abrupto” en una primera impresión.

Este proyecto ha mostrado que la inclusión de sistemas no euclidianos, fundamentados en modelos de razonamiento geométrico, es una vía efectiva para promover el razonamiento en general de estudiantes de educación media. Si bien la realidad del contexto escolar impuso algunos desafíos en la implementación, la experiencia ratifica el éxito de una propuesta de aprendizaje diferente a lo tradicional. Por último, el mayor aporte de la monografía radica en haber fomentado una postura crítica, analítica y flexible en cuanto a los objetos geométricos que se presentan en el aula, mostrando a educadores matemáticos el potencial pedagógico que representa la inclusión de nuevas perspectivas geométricas en contextos de educación media en Colombia.

6.6. Aportes en el desarrollo profesional y alcances de los futuros educadores matemáticos

Conforme al planteamiento y desarrollo del presente proyecto, se logró identificar que la experiencia ha trascendido el cumplimiento de un requisito académico. En primer lugar, el estudio de la geometría proyectiva representó un reto intelectual, permitiendo ampliar horizontes sobre el conocimiento matemático propio, reestructurando concepciones sobre el espacio, la incidencia y el infinito. Esta aproximación a un sistema axiomático no euclidiano no solo permitió fortalecer la formación disciplinar, sino que dotó sensibilidad necesaria para comprender el conflicto cognitivo que experimentan los estudiantes cuando se enfrentan a situaciones que desafían su propia intuición.

Fundamentar la propuesta sobre una base teórica sólida, permitió comprender la importancia de estructurar didácticamente la planificación escolar. El ejercicio de construir una propuesta que atienda a unos objetivos previamente establecidos no corresponde sólo a la transferencia de conocimientos, sino al diseño de situaciones que respeten los niveles de razonamiento de los estudiantes y promuevan en ellos actitudes críticas y reflexivas.

Para finalizar, este proyecto deja como un alcance principal, la convicción de la innovación en el aula de matemáticas para promover el desarrollo intelectual y personal de los estudiantes e incluso de los docentes. La capacidad de identificar un problema de enseñanza, proponer una posible solución estructurada y analizar sus alcances en un contexto real, otorga herramientas fundamentales para una futura práctica profesional.

Bibliografía

- Almaida, J., y Gallego, J. (2019). Del análisis y la representación de situaciones espaciales hacia el pensamiento teórico en geometría: una ruta de tercero a noveno grado.
- Anderson, J. W. (2005). *Hyperbolic geometry* (2nd ed.). Springer.
- Aray Andrade, C. A., Párraga Quijano, O. F., y Chun Molina, R. (2019). La falta de enseñanza de la geometría en el nivel medio y su repercusión en el nivel universitario: análisis del proceso de nivelación de la Universidad Técnica de Manabí. *ReHuSo: Revista de Ciencias Humanísticas y Sociales*, 4(2), 64-77.
<https://revistas.utm.edu.ec/index.php/ReHuSo/article/view/1785>.
- Bernal, J. C., y Rojas Velázquez, O. J. (2022). *La geometría proyectiva a través de la resolución de problemas retadores en estudiantes de educación media*. Bogotá: Universidad Antonio Nariño. <https://repositorio.uan.edu.co/items/2fc8af08-cc19-4c12-8bb2-b95ddb4ef0d2>
- Blum, W., & Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems. *Mathematical modelling (ICTMA 12): Education, engineering and economics*, 222-231.
- Bonilla Bernal, J. (2021). La geometría proyectiva a través de la resolución de problemas retadores en estudiantes de educación media. [Universidad Antonio Nariño]
<http://repositorio.uan.edu.co/handle/123456789/6144>.
- Boyer, C. B., & Merzbach, U. C. (2011). *A history of mathematics* (3rd ed.). Wiley.
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal. <https://archive.org/details/brousseau-g.-iniciacion-al-estudio-de-las-situaciones-didacticas/page/n3/mode/2up>

Camacho-Machín, M., Santos-Trigo, L. M., & Barrera-Mora, F. (2025). Contribuciones y perspectivas en la resolución y formulación de problemas matemáticos: El uso sistemático de tecnologías digitales en escenarios de enseñanza. En E. Flores-Medrano, M. Molina, I. Sandoval, & I. Polo-Blanco (Eds.), *Educación Matemática en México y España: Investigaciones y líneas de trabajo compartidas* (pp. 149–172). Editorial SOMIDEM - SEIEM.

<https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S2/2025/03-06>

Camargo Uribe, L. (2021). *Estrategias cualitativas de investigación en educación matemática: recursos para la captura de información y el análisis*. Editorial Universidad de Antioquia / Universidad Pedagógica Nacional.

Camargo, L., & Acosta, M. (2012). La geometría, su enseñanza y su aprendizaje. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, (32), 4-8.

Camargo, L., Perry, P., Samper, C., Molina, Ó., & Echeverry, A. (2010). Uso de la función de arrastre para generar experiencias de aprendizaje de la demostración en geometría. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, (27), 38-49.

Carrillo-Yañez, J., Montes Navarro, M. Á., y Contreras, L. C. (2022). *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino*. Madrid.

Corredor de Porras, M., y Londoño Ramos, C. A. (2019). *El arte y la historia de la construcción de la geometría proyectiva*. Universidad de Caldas.

Coxeter, H. S. M. (2007). *Projective Geometry*. Springer.

de Souza Melo, S., y Andrada, O. A. (2013). Adecuación de los recursos didácticos utilizados en clases de geometría proyectiva a los estilos de aprendizaje de los estudiantes. *Revista de Estilos de Aprendizaje*, 6(12). <https://doi.org/10.55777/rea.v6i12.990>

Duval, R. (2017). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (M. B. Vega Restrepo, Trad.). Cali: Universidad del Valle. (Trabajo original publicado en 1995)

Fernández Castro, G. (2024). *Enseñando geometría usando el modelo de Van Hiele* (Master's thesis).

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24(2), 139–162. <https://doi.org/10.1007/BF01273689>

Flick, U. (2007). *Introducción a la investigación cualitativa*. Madrid: Ediciones Morata.

Gamboa-Araya, R., y Ballesterio-Alfaro, E. J. (2021). La enseñanza y aprendizaje de la geometría: desde la perspectiva del profesor. *Funes: Repositorio de Documentos sobre Educación Matemática*. <https://funes.uniandes.edu.co/19809/>

Gonzáles, E. O. (2022). Déficit en el pensamiento espacial y su repercusión en el aprendizaje de la geometría en estudiantes de básica primaria colegio integrado la llana, Tibú–Norte de Santander. *Aibi revista de investigación, administración e ingeniería*, 10(1), 29-42.

Gutiérrez Vázquez, S. (2012). *Blaise Pascal: un matemático virtuoso*. *Revista SUMA*, (70), 105–114. Recuperado de <https://revistasuma.fespm.es/sites/revistasuma.fespm.es/IMG/pdf/70/105-114.pdf>

Gysin, L. M., y Fernández, G. I. (2012). Una propuesta para enseñar geometría proyectiva en la formación de profesores de matemática. *Revista de Educación Matemática, Extra* (1), 1–15.

Hernández Carrera, R. M. (2014). *La investigación cualitativa a través de entrevistas: su análisis mediante la teoría fundamentada*. Universidad Internacional de La Rioja.

Meléndez-Reyes, L. E., Cantillo-Reyes, W. D., Rodríguez Nieto, C. A., & Castro Inostroza, A. N. (2024). Análisis del razonamiento geométrico de un estudiante de bachillerato cuando determinan áreas de figuras geométricas. *Revista Cedotic*, 9(1), 149–175.

<https://doi.org/10.15648/cedotic.1.2024.3764>

Ministerio de Educación Nacional de Colombia. (1998). *Lineamientos curriculares: Matemáticas*. Bogotá: MEN.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Bogotá: MEN.

Moreno Triana, J. L. y Mojica Gómez, E. J. (2024). *Secuencia Didáctica para el Desarrollo y Fortalecimiento de Conocimientos Espaciales y Geométricos en Grado Tercero* [Trabajo de grado de licenciatura, Universidad Pedagógica Nacional]. Repositorio Institucional UPN. <https://repositorio.upn.edu.co/server/api/core/bitstreams/27d41824-77e9-47e8-a010-f5a6b0b0a96c/content>

Mulbasari, A. S., Putri, R. I. I., Zulkardi, y Aisyah, N. (2025). Developing a PMRI learning environment for pre-service teachers to teach geometry in elementary education. *Mathematics Education Journal*, 19(3), 585–608.

Panofsky, E. (1973). *La perspectiva como forma simbólica*. Tusquets Editores.

Tecné, Episteme y Didaxis, (32), 1–20. <https://doi.org/10.17227/ted.num32-1858>

Sánchez Ramos, J. (2023). *Secuencia didáctica: fortalecimiento del razonamiento geométrico con van Hiele, pensamiento espacial en estudiantes de grado séptimo* [Tesis de maestría, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia]. Repositorio Institucional UPTC.

Sandoval Cáceres, I. T., & Moreno Armella, L. E. (2012). Tecnología digital y cognición matemática: retos para la educación. *Horizontes Pedagógicos*, 14(1), 21-29.

Tonhato, C. R., Silva, J. A., y Oliveira, R. A. (2021). História da matemática e leitura de imagens: possibilidades para compreender relações geométricas. *Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, 12(2).

van Hiele, P. M. (1986). Structure and insight: A theory of mathematics education. Orlando, FL: Academic Press.

Viro, O. (2020). *Teoremas de geometría proyectiva: Desargues, Pappus y Pascal*. Notas de curso, Universidad de Linköping.

Yurksas, B. (2003). *Dibujo geométrico y de proyección* (11a ed.). Panamericana Editorial; Ediciones Don Bosco.

Zhunussova, A., Kenzhebekova, S., y [otros autores]. (2025). Conceptualization of loci in analytic and projective geometry: Cognitive development through van Hiele's theory. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 56(4), 512–530.

ANEXOS

Anexo 1. Encuesta aplicada para determinar el tratamiento de otras geometrías en Básica Secundaria

En el semestre 2025-2 se aplicó una encuesta a un grupo de estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional que cursaban el espacio académico Cálculo en Varias Variables. El grupo constaba de 28 estudiantes, pero sólo 25 de ellos participaron y fueron considerados por facilidad para la toma de los datos ya que el director del presente trabajo de grado orientaba ese espacio. El propósito de la encuesta era determinar con cinco preguntas abiertas algunos aspectos relacionados con la presencia de otros tipos de geometrías e incluso con la geometría euclidiana en la experiencia vivida por los participantes en su proceso de formación de su educación básica media y secundaria. A continuación, se presenta la encuesta aplicada.

Encuesta “Otras Geometrías”

¿Cómo viví la Geometría en mi educación secundaria?

Apreciado licenciado en formación, agradecemos su colaboración respondiendo las siguientes cinco preguntas que buscan determinar su experiencia con la geometría en su proceso de formación en la escuela básica secundaria y media.

Recuerde que su respuesta debe ser lo más detallada posible y que sus respuestas sólo se emplearan para caracterizar el estado de la enseñanza y el aprendizaje de la geometría y en particular desde ustedes como una muestra característica. De otra parte, sus respuestas e identidades estarán protegidas y por ello no se requiere que usted registre ninguna información personal ni académica; la información será empleada únicamente dentro del desarrollo de nuestro trabajo de grado.

1. ¿Qué contenidos de geometría recuerda haber abordado en su proceso de estudio durante la básica secundaria y media?

2. ¿Recuerda haber trabajado contenidos de Geometría Analítica? ¿Cuáles?

3. ¿Qué cónicas alcanzó a estudiar en secundaria? ¿Qué elementos de ellas?

4. ¿Qué otro tipo de geometrías estudio?

5. ¿Recuerda haber trabajado algunos conceptos de geometría proyectiva?
¿Cuáles?

RESULTADOS DE LA ENCUESTA

A continuación, se presentan los principales resultados obtenidos de la aplicación de la encuesta. No se detallan las narrativas presentadas pues no hace parte del interés de la encuesta ni del trabajo de grado.

1. ¿Qué contenidos de geometría recuerda haber abordado en su proceso de estudio durante la básica secundaria y media?

El 80% de los estudiantes encuestados manifestó que fueron pocos y un 68% que usualmente estos eran dejados para el final del curso. Un 36% indicó que los contenidos se redujeron al cálculo de áreas, perímetros y algo de volúmenes, pero centrados en la fórmula y el cálculo; finalmente, un 84% manifestó que nunca trabajó la geometría como se presenta en la línea de esta rama dentro del programa de formación inicial de licenciados en matemáticas en la Universidad Pedagógica Nacional, de hecho, se manifestó por el 16% de ellos que por eso les iba tan mal en esas asignaturas cuando iniciaron su formación como licenciados.

2. ¿Recuerda haber trabajado contenidos de Geometría Analítica?

El 28% manifestó que no habían trabajado contenidos de Geometría Analítica, en tanto que el restante 72% indicó que se limitó a estudiar la recta y la parábola y de ellos el 40% apuntó a que ese tratamiento se hizo como funciones (lineal y cuadrática) pero no propiamente como objetos geométricos y un 32% señaló que el manejo era meramente algebraico sin análisis de elementos o propiedades.

3. ¿Qué cónicas alcanzó a estudiar en secundaria? ¿Qué elementos?

El 80% de los encuestados manifestó no haber trabajado las cónicas, ni como secciones con unas propiedades geométricas específicas ni como expresiones analíticas. El 20% restante indicó que sólo se trabajó la parábola, pero como expresión analítica y sin hacer reconocimiento de propiedades o elementos característico de la misma. Las otras cónicas no son mencionadas por algún estudiante.

4. ¿Qué otro tipo de geometrías estudio?

El 100% de los estudiantes indicó que nunca abordó ningún tratamiento de otro tipo de geometrías en el aula. Solo 1 estudiante (4%) refirió que su profesor les mencionó que existían otras geometrías, pero sólo como un dato anecdótico.

5. ¿Recuerda haber trabajado algunos conceptos de geometría proyectiva? ¿Cuáles?

En esta pregunta, y un poco en contravía a lo manifestado en la pregunta anterior, el 20% de los estudiantes identificó que vio algunos elementos de geometría proyectiva, pero estos más ligados a las clases de dibujo técnico o artístico y hacen referencia a conceptos o procesos como proporciones, perspectiva, vistas de un sólido, armado y desarmado de una estructura (del sólido construir las vistas y de las vistas construir el sólido)

Los resultados obtenidos muestran que hacer presentaciones de la geometría proyectiva (u otro tipo de geometrías) en el aula es un asunto de muy difícil implementación ya que muchas veces ni siquiera la Geometría Clásica (Euclidiana) se aborda y si se hace es no dentro de un sistema axiomático local formal sino desde procesos de medidas o de cálculo incluso sin comprender las propiedades de los objetos. Igualmente se evidencian las dificultades que se pueden llegar al tratar de implementar sobre Geometría Proyectiva y algunos teoremas básicos.

Anexo 2 Sesión 1: El Problema del Artista

Introducción

Desde la época del Renacimiento, los artistas se enfrentaron a un problema en común: ¿Cómo se podría representar en un dibujo la manera en que realmente el ser humano ve el mundo? Para dar respuesta a este interrogante surgió la perspectiva: una manera de representarla en que entendemos la profundidad, la distancia y la mirada. Esta exploración en el arte dio paso a nuevas ideas que más adelante serían fundamentales en el desarrollo de la geometría proyectiva.

Esta sesión nos permitirá comprender relaciones fundamentales entre la observación, la representación y las formas de organizar el espacio.

1. Objetivos de aprendizaje

Al finalizar la sesión, el estudiante será capaz de:

1. Reconocer que las líneas paralelas del mundo real pueden representarse como líneas convergentes en un dibujo en perspectiva.
2. Comprender la necesidad de introducir los *puntos de fuga* o *puntos ideales* como respuesta a la limitación de la geometría euclidiana para modelar la visión humana.
3. Experimentar y describir cómo la perspectiva renacentista fundamenta la noción geométrica del punto en el infinito.
4. Modelar una situación de perspectiva en GeoGebra, moviendo y analizando el comportamiento del punto de fuga y su relación con la percepción de profundidad.

2. Materiales necesarios

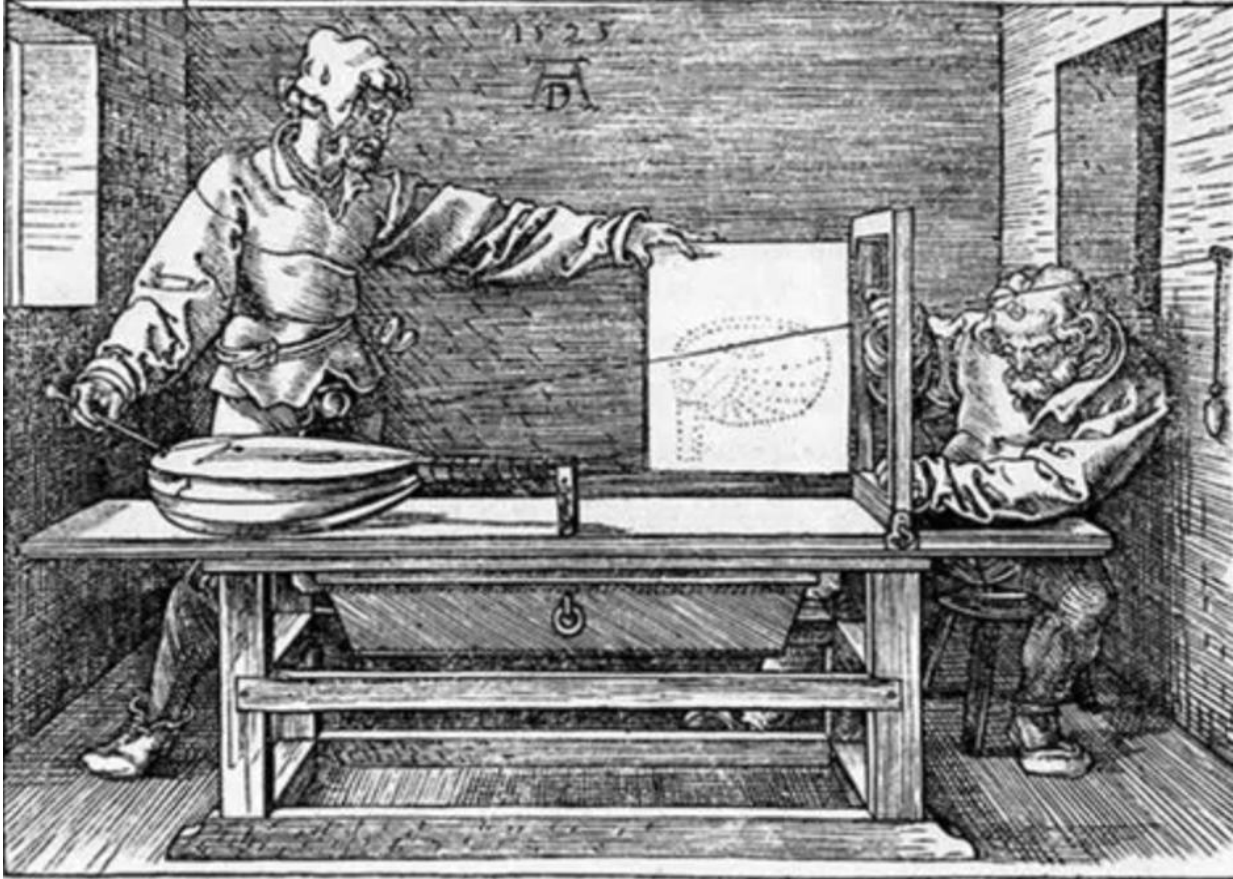
Para la tarea concreta (“La Ventana de Durero”)

- Láminas de acetato transparente tamaño carta
- Marcadores borrables
- Cinta adhesiva
- Teléfono celular con cámara
- Tablero y marcadores
- Diapositiva o imagen de obras renacentistas (Durero, Brunelleschi, u otro) o un dibujo en perspectiva, una calle, un zaguán, etc.
- Computadores o tabletas con acceso a **GeoGebra**
- Archivo base opcional: cuadrícula o piso de baldosas
- Proyector

Desarrollo de la sesión

Para el desarrollo de la sesión se han planificado tres tareas específicas que guiarán a los estudiantes sobre el desarrollo de la perspectiva en el arte renacentista.

Tarea 1: La Ventana de Alberto Durero



Alberto Durero, uno de los grandes artistas del Renacimiento, comprendió que para representar la realidad con mayor fidelidad, era necesario experimentar con nuevas formas de observación. En su famosa práctica conocida hoy como “La Ventana de Durero”, el artista colocaba un marco transparente entre él y la escena que deseaba pintar. Luego, fijaba su mirada desde un único punto y trazaba sobre el vidrio exactamente lo que veía tal y como lo muestra la imagen.

Instrucciones:



1. Utilizando el acetato, calquen exactamente lo que se ve en la fotografía y hagan énfasis en objetos como: bordes del techo, piso, marcos, objetos, líneas del pasillo, etc.
2. Haciendo uso de los marcadores borrables, prolongar las rectas que logre identificar en el dibujo.
3. Observen atentamente su dibujo y respondan las siguientes preguntas:
 - ¿Qué ocurrió con las rectas del piso?

- ¿Qué pasó con las líneas del techo?

- ¿Cuáles rectas consideran que son paralelas en la vida real? ¿Se ven paralelas en el dibujo?

- ¿Por qué crees que ocurren estos sucesos?

- ¿Qué afirmación matemática, con respecto a rectas, consideran que no se cumple?

- ¿Están de acuerdo con el siguiente enunciado? Justifiquen su respuesta.

*La geometría euclidiana **no puede representar fielmente la visión humana**, pues las paralelas “se encuentran” en la perspectiva.*

Acción Extra clase: Observar el video [La perspectiva y el punto de fuga en “La escuela de Atenas” de Rafael](#) y analizar lo que allí se presenta.

Ahora observa el video [Geometría proyectiva en la perspectiva \(Stop Motion-Matemáticas en el Arte\)](#) y haz una síntesis de lo allí expresado.

Tarea 2: Introducción al Punto de Fuga

1. Observar detalladamente la siguiente imagen



2. Preguntar:

- “¿Dónde parecen encontrarse las líneas paralelas?” Si es necesario pueden trazar sobre la imagen.

- ¿Qué relación existe con el tamaño de los candelabros y la distancia entre el posible observador?
3. ¿Puedes encontrar el siguiente objeto geométrico en la imagen? Señalar sobre la misma.

El punto de fuga: es la imagen proyectiva del infinito en una dirección dada, y aparece en perspectiva como el punto donde “parecen encontrarse” las rectas paralelas.

4. Según sus respuestas anteriormente dadas ¿que parece suceder con las rectas paralelas en la perspectiva? Justifique su respuesta.

Tarea Extra clase: Explora y analiza la construcción presentada en

<https://www.geogebra.org/m/nbsamvxu>

Tarea 3 El piso de Baldosas– GeoGebra

Instrucciones:

1. Abrir el aplicativo de GeoGebra. [Baldosas en Perspectiva – GeoGebra](#)
2. Identificar los objetos en la representación.
 - Punto de fuga.
 - Haces de rectas que pasan por el punto de fuga.
 - Rectas transversales paralelas.
3. Muevan el punto de fuga (A) hacia la **derecha, izquierda, arriba, abajo** y observar:
 - ¿Cómo cambia la profundidad?
 - ¿Qué sucede si A está muy cerca de la parte superior del plano del aplicativo?
 - ¿Qué sucede si A está muy cerca de la parte inferior del plano del aplicativo?

- ¿Qué sucede con la perspectiva y la sensación de profundidad si el punto de fuga se ubica en un lugar diferente al centro del plano del aplicativo?

4. Conclusión para registrar en el cuaderno:

El punto de fuga determina la dirección de observación y controla la “sensación de profundidad”. Matemáticamente es un punto que completa la familia de rectas paralelas: su punto común “en el infinito”.

Tarea 4 - Institucionalización y cierre

Preguntas guía:

- ¿Por qué las rectas paralelas que conocemos de la geometría en la escuela no podemos usarlas si queremos dibujar exactamente lo que vemos?
- ¿Qué sucede con la percepción de los objetos cuando están más cercanos o lejanos del punto de fuga?
- ¿Por qué el arte fue una puerta de entrada para esta nueva geometría?

Tarea extra clase:

Analizar lo presentado en el video [Puntos de fuga y líneas de horizonte son iguales para todos los objetos? Curso de Perspectiva](#)

- ¿Qué relación guarda lo visto en clase con lo aquí tratado?
- ¿Qué aprendiste de nuevo con la presentación del video?

Anexo 3 Sesión 2: Proyecciones

Objetivo de aprendizaje

Comprender la estructura del plano proyectivo real como una extensión del plano euclidiano, mediante el uso de material concreto y representaciones en software de geometría dinámica, con el fin de reconocer la necesidad de incorporar los puntos y la recta del infinito para explicar las relaciones de intersección entre rectas que no se cortan en el plano euclidiano.

Materiales

- Esfera cuya superficie representa la proyección de una cuadrícula.
- Linterna pequeña (puede ser la del teléfono celular)
- Hoja de papel o cartulina de preferencia blanca (plano euclidiano)
- Computador o tableta con acceso a GeoGebra
- Proyector

Desarrollo de la sesión

Tarea 1 La esfera y el Plano Euclidiano

En esta actividad se trabajará con un modelo concreto que nos permitirá explorar cómo se relacionan los puntos del espacio con su representación en un plano euclidiano. Se visualizará cómo se comporta la proyección de ciertos puntos en un plano euclidiano.

Enunciado de la tarea

Con los materiales entregados a cada grupo de estudiantes, seguir las instrucciones.

Primer listado de instrucciones:

1. Ubicar el plano euclidiano sobre una superficie plana y fijarlo.
2. Identifique en la esfera el Polo Norte y el Polo Sur.

Observar detalladamente la interacción entre los materiales y responder las siguientes preguntas:

- ¿Qué ocurre con las líneas en la esfera, que propiedades identifica?
- ¿Cómo considera que están ubicadas las líneas sobre la esfera? ¿Tienen alguna organización especial?
- ¿Se logra observar alguna interacción entre las líneas sobre la esfera?
- ¿Considera que las líneas ubicadas en la esfera son rectas?

Segundo listado de instrucciones:

1. Ubicar la linterna lo más cerca posible al punto central del polo norte. La linterna debe hacer contacto con la superficie de la esfera.

Responder las siguientes preguntas:

- ¿Qué sucede con la proyección en el plano euclidiano?
- ¿Logra identificar algunas características de las líneas en el plano euclidiano?
- ¿Qué se podría afirmar de estas líneas? ¿Qué apariencia tienen ahora las líneas sobre el plano euclidiano?
- ¿Podemos pensar esos puntos como si pertenecieran al plano, aunque no se proyecten en él?
- ¿Considera que las líneas en el plano proyectivo son rectas? ¿logra identificar algunas propiedades?

Tarea 2: Geometría dinámica – Cambio de modelo, mismas relaciones (45 minutos)

¿Conoces la siguiente afirmación?

“Dos puntos cualesquiera determinan una única recta”

Enunciado de la tarea

Mediante el applet de geometría dinámica [Disco de Poincaré – GeoGebra](#), realizar las siguientes instrucciones:

1. Identificar la región en blanco como el disco de Poincaré
2. Seleccionar la opción “punto” y determinar dos puntos **A** y **B** en el interior del disco.
3. Con la opción “recta por dos puntos” determinar la recta que contiene a **A** y **B**
4. Con la opción “mueve” mover los puntos **A** y **B** y observar detalladamente.
 - ¿Qué sucede con los puntos cuando se mueven?
 - ¿Los objetos creados con la opción recta se ven como rectas?
 - ¿Consideras que los objetos creados son rectas según las instrucciones y las opciones del aplicativo?
 - ¿Qué sucede con las rectas paralelas dentro de este modelo?

El **disco de Poincaré** es una forma de representar un espacio geométrico dentro de un círculo, en la que las rectas no siempre se ven rectas, sino que su apariencia se asemeja más a la de una curva. Aunque su forma visual cambia, las relaciones entre los puntos y las rectas se mantienen: dos puntos determinan una única recta y las rectas pueden intersectarse. Este modelo nos ayuda a comprender que en geometría lo más importante no es cómo se dibujan las figuras, sino cómo se relacionan entre sí.

Cierre o Institucionalización

¿En el plano proyectivo que sucede con dos parejas de rectas?

Acción extra clase: Observar los videos: [Los postulados de Euclides](#), y [180: geometría euclidiana y esférica | #aprendiendogeogebra #geogebra #geogebra bogota #maths - YouTube](#) y analizar qué se está diciendo y cómo se está haciendo la proyección

Se consolida la noción de **Plano Proyectivo Real** como el plano euclidiano al que se le añade la recta del infinito, permitiendo que toda pareja de rectas se interseca en un punto, ya sea finito o ideal.

Anexo 4 Sesión 3 El plano de Fano

El plano de Fano es una forma diferente de pensar y representar la geometría. En este modelo, los puntos y las rectas se organizan de tal manera que todas las rectas se intersecan. Su estudio nos invita a cuestionar ideas habituales del espacio y a comprender que la geometría puede construirse a partir de distintos conjuntos de reglas, según el modelo que se adopte.

Construcción del plano de Fano

En grupos de tres estudiantes vamos a construir el plano de Fano.

Materiales:

- Tablero de representación



- Lana o hilo de colores
- 7 puntos con soporte

Instrucciones de construcción:

- Ubicar todos los puntos en el tablero de forma libre usando la estructura principal.
- Unir los puntos del tablero con la lana de tal manera que cumplan todas las condiciones de construcción.

Condiciones de construcción:

1. El plano contiene exactamente 7 rectas y 7 puntos.
2. Cada recta debe contener exactamente 3 puntos.
3. Cada punto debe pertenecer a exactamente 3 rectas.

Realizar la construcción y responder las siguientes preguntas:

1. ¿Cómo verificar que se cumplen todas las condiciones?
2. ¿Todas las “rectas” se representan de la misma forma? ¿Por qué?
3. ¿Qué hace especial a esta construcción frente a las figuras geométricas habituales?
4. ¿Qué podemos decir sobre las rectas paralelas en este modelo geométrico?

Por cada grupo, preparar una pequeña socialización sobre cada uno de los ítems anteriores.

Anexo 5 Sesión 4: El teorema de Desargues

1. Abrir el aplicativo de GeoGebra llamado *Desargues* y verificar si la construcción cumple con la siguiente definición:

Def 1: Dos triángulos están en perspectiva desde un punto si, al unir cada vértice de un triángulo con el vértice correspondiente del otro, las tres rectas se intersecan en un punto.

Def 2: Dos triángulos están en perspectiva desde un punto si, las rectas que contienen los vértices correspondientes entre los triángulos se intersecan en un punto.

Preguntas orientadoras para la verificación:

Según la definición de triángulos en proyección:

- ¿Los triángulos deben tener alguna relación en su tamaño o características? ¿Es necesario que la tengan?
 - ¿Qué ocurre cuando unen cada vértice de un triángulo con el correspondiente del otro?
 - ¿Cómo se puede verificar los lados y los vértices correspondientes de los triángulos si es que los tienen? Enunciarlos.
 - ¿Qué sucede con las rectas que contienen los vértices correspondientes entre los triángulos?
2. Construir un par de triángulos diferentes a los presentados, verificar si cumple la definición para este nuevo caso. En dado caso que se cumpla o no, mencionar por qué se presenta esta conclusión.

A partir de la exploración con el aplicativo, se espera que los estudiantes reconozcan que la relación entre los dos triángulos no depende de su forma ni de sus características, sino de la

manera en que sus elementos se relacionan en el plano proyectivo. Al verificar que las rectas que contienen los vértices correspondientes concurren en un mismo punto, se verifica la definición de triángulos en perspectiva desde un punto.

3. En la construcción inicial, determinar las rectas que contienen cada par de lados correspondientes y asignarle un color diferente a cada par de rectas.

- ¿Qué resulta de la interacción de cada par de rectas?
- ¿Qué se logra identificar con la interacción de las rectas bajo esta nueva condición?

Bajo esta nueva condición, la prolongación de los lados correspondientes de ambos triángulos permite identificar que existen tres puntos de intersección. los estudiantes logran identificar estas interacciones mediante procesos de visualización.

4. Determinar con la herramienta de intersección la interacción de estos pares de rectas, de tal manera que se determinen los puntos que resulten de estas.

- ¿Qué se puede observar de estos tres puntos?
- ¿Si la posición de los vértices cambia, las condiciones de los puntos también cambian?
- ¿Se puede concluir una condición general de la posición de estos puntos? si es así ¿cómo se podría verificar que esta conclusión es cierta?

De este modo, se espera que los estudiantes puedan identificar cómo es que la concurrencia de las rectas que contienen los vértices correspondientes implica necesariamente la colinealidad de los puntos de intersección de los lados. La exploración

con los elementos en geometría dinámica permite comprender el Teorema de Desargues desde una verificación visual.

5. Formular el teorema de Desargues

Escribir el teorema de Desargues teniendo en cuenta las condiciones necesarias para que se cumpla lo que se ha descubierto en exploración anterior.

Aspectos a tener en cuenta:

1. Condiciones necesarias que garantizan el cumplimiento del consecuente.
2. Evitar incluir información irrelevante.
3. Garantizar que el teorema se cumpla en todos los casos.

Ejemplo:

Teorema de Pitágoras

Si un triángulo es rectángulo (antecedente) **entonces** la suma del cuadrado de sus catetos es igual a su hipotenusa al cuadrado (consecuente).