

**DISEÑO DE TAREAS PARA PROMOVER HABILIDADES DE
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON SITUACIONES MODELADAS CON
TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS**

Autoras

Mirian Eliza Insfran Cabral

Nidia Andrea Duré Martínez

**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MAESTRIA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA**

Bogotá

Noviembre, 2024

**DISEÑO DE TAREAS PARA PROMOVER HABILIDADES DE
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS A PARTIR DE SITUACIONES MODELADAS
CON TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS**

Autoras

Mirian Eliza Insfran Cabral

Nidia Andrea Duré Martínez

Asesor

Dr. Edwin Ferley Ortiz Morales

**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MAESTRIA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA**

Bogotá

Noviembre, 2024

Agradecimientos

A Dios, por ser nuestra fuente de fortaleza y luz, que en cada paso nos guio hasta la culminación de esta etapa.

A nuestro asesor, Ferley Ortiz, por su tiempo, dedicación y paciencia infinita. Es un privilegio haber compartido este camino con tan ilustre profesional.

Dedicatoria

A mi ángel, Gladys Rafaela, quien me enseñó el valor del esfuerzo y la perseverancia y ha sido siempre fuente de mi inspiración. Tus consejos y palabras de aliento aún resuenan en mi mente, te llevo siempre en mi corazón. Te extraño cada día. Sé que desde el cielo me sonríes, mamá. Gracias por ser mi fortaleza en los momentos difíciles.

Nidia Andrea Duré Martínez

A mi familia, que, aunque distante, con sus mensajes de aliento y amor me brindaron la fuerza necesaria para llevar a cabo este trabajo y superar cada obstáculo, permitiéndome concluirlo de la mejor manera.

Mirian Eliza Insfran Cabral

Índice

INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO I. Generalidades.....	5
Inquietud pedagógica	5
Objetivos	11
General	11
Específicos	11
CAPÍTULO II. Antecedentes.....	12
Habilidades de resolución de problemas: argumentación y modelación	12
Tareas matemáticas para promover la competencia de resolución de problemas	17
Enseñanza de triángulos oblicuángulos	20
Uso de GeoGebra para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas	25
CAPÍTULO III. Marco Referencial.....	30
Competencias matemáticas en el currículo de la educación media	30
Habilidades en la Resolución de problemas	34
Argumentación en la resolución de problemas	36
Modelación en la resolución de problemas.....	38
Fundamentos teóricos para el diseño de tareas	40
Triángulos oblicuángulos y su relevancia en la enseñanza.....	43
Triángulos oblicuángulos: Definición, elementos y propiedades	44
Proceso de resolución del triángulo oblicuángulos.....	45
CAPÍTULO IV. Marco Metodológico.....	47
Categoría de análisis de las tareas.....	50
Población.....	51
CAPÍTULO V. Tareas y análisis de resultados	52
Diseño de tareas	52
Descripción de los elementos comunes de la tarea.....	53
Primera tarea: Aplicación del teorema del seno	58
Segunda tarea: Tareas relacionadas con el teorema del coseno.....	61
Tercera tarea: Tareas relacionadas con el teorema del coseno con materiales manipulativos	64

Cuarta tarea: problemas de situaciones contextualizadas sobre triángulos oblicuángulo.....	68
Quinta tarea: evaluación del aprendizaje	71
Análisis de resultados	75
Conclusiones	80
Reflexiones respecto al objetivo general	80
Reflexión sobre la experiencia de formación y el objeto de estudio	82
Reflexiones sobre la posible aplicación	83
Referencias.....	86

Índice de tablas

Tabla 1	44
Tabla 2	45
Tabla 3	¡Error! Marcador no definido.
Tabla 4	58
Tabla 5	61
Tabla 6	65
Tabla 7	69
Tabla 8	72

INTRODUCCIÓN

En el marco del Programa Nacional de Becas “Carlos Antonio López” (BECAL) de Paraguay y de la Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional, reconocemos la necesidad de fortalecer nuestra formación de profesores en áreas clave de la enseñanza de las matemáticas. Es esencial que nos proveamos de herramientas pedagógicas que nos permitan enfrentar los desafíos de la enseñanza de esta disciplina en los distintos niveles educativos. Asimismo, consideramos prioritario implementar didácticas que posibiliten que los estudiantes desarrollen competencias matemáticas, capacitándolos para resolver problemas de la vida real.

En este contexto, el Ministerio de Educación y Ciencias (MEC) de Paraguay propone que los estudiantes adquieran competencias matemáticas enfocadas en la resolución de problemas y el desarrollo del pensamiento crítico. No obstante, la ausencia de estándares definidos y la preparación insuficiente del profesorado han dificultado la correcta implementación de dicho enfoque, lo cual se refleja en los bajos resultados obtenidos en evaluaciones nacionales e internacionales, como el Sistema Nacional de Evaluación del Proceso Educativo (SNEPE) y Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes (PISA), lo que subraya aún más la necesidad de reforzar nuestra formación docente y de adoptar nuevas herramientas pedagógicas para enfrentar los desafíos educativos.

Ante esta situación, aunque existe varias formas de abordar estos desafíos, resulta relevante plantear las estrategias pedagógicas que promuevan metodologías que vayan más allá de la simple memorización de procedimientos. En ese sentido, es fundamental brindar a los estudiantes oportunidades que les permitan representar fenómenos, identificar patrones y

justificar sus razonamientos, lo que fortalecería su capacidad para resolver problemas y mejorar su competencia matemática.

En respuesta al reto, este trabajo de grado asume el desafío de desarrollar cinco tareas educativas con el objetivo de promover habilidades en la resolución de problemas. Para el diseño de estas tareas, se ha adoptado el modelo propuesto por Gómez et al. (2018), el cual ofrece una estructura basada en el análisis de la instrucción. Esta propuesta permite, describir y analizar cada componente de la tarea, asegurando que estén alineados con los objetivos de aprendizaje y fomenten el desarrollo de competencias cognitivas en los estudiantes.

El documento está compuesto de cinco capítulos. El primero aborda la inquietud pedagógica que motiva la investigación, resaltando los desafíos en la enseñanza de la trigonometría, específicamente en el manejo de triángulos oblicuángulos y los desafíos en la implementación del enfoque por competencias en la resolución de problemas del currículo paraguayo. Asimismo, se presentan los objetivos generales y específicos del estudio, enfocados en promover habilidades de modelación y argumentación a través del diseño de tareas que involucren la resolución de problemas con triángulos oblicuángulos.

Por consiguiente, para contextualizar el objeto de estudio y justificar la necesidad del trabajo, el segundo capítulo presenta los hallazgos de diecisiete investigaciones relacionadas con los temas de interés de nuestro trabajo. En este capítulo, se abordan estudios sobre la argumentación y la modelación en matemáticas, así como tareas que fomentan la competencia en la resolución de problemas. También se examina la enseñanza de triángulos oblicuángulos y el uso de GeoGebra como herramienta didáctica. Estas investigaciones apoyan el diseño de nuestra tarea educativa, al destacar prácticas que han demostrado ser efectivas en el desarrollo de habilidades para resolver problemas.

En línea con los antecedentes, el tercer capítulo presenta el marco de referencia, en el cual se aborda los fundamentos teóricos que sustentan el desarrollo de competencias matemáticas en el currículo de la educación media en Paraguay, enfatizando la resolución de problemas como una competencia esencial. Se analizan documentos oficiales, como la Actualización Curricular del Bachillerato Científico y la Priorización Curricular, se destaca la importancia de las habilidades de argumentación y modelación para promover la resolución de problemas, con especial atención a los triángulos oblicuángulos como objeto matemático. Se describe cómo estas habilidades son promovidas mediante tareas diseñadas para aplicar conceptos trigonométricos, apoyadas por el uso de herramientas tecnológicas como GeoGebra, en la enseñanza de la trigonometría.

Siguiendo las bases teóricas, en el cuarto capítulo se presenta la metodología utilizada para el diseño de las tareas, la cual se divide en tres ciclos: revisión bibliográfica, diseño de tareas y análisis a priori de las mismas. En la sección dedicada al diseño de tareas, se describen los elementos propuestos en el análisis de instrucción de Gómez et al. (2018) tales como requisitos, metas, formulación, materiales, agrupamiento, interacción y temporalidad. Además, se aborda el impacto potencial de las tareas en el aprendizaje de los estudiantes, las posibles dificultades que podrían surgir durante su implementación y las sugerencias para la intervención del profesor.

Por otro lado, en el último capítulo se presenta el diseño y análisis de cinco tareas dirigidas a estudiantes de primer curso de la Educación Media en Paraguay. Para ello, se considera una estructura detallada en el diseño de las tareas, siguiendo las recomendaciones de Gómez et al. (2018). Esta estructura incluye los objetivos de aprendizaje, el contexto en el que se sitúan las tareas, los conceptos y procedimientos que se abordarán, así como las posibles

dificultades o errores que los estudiantes podrían enfrentar. Además, el diseño presenta las posibles intervenciones pedagógicas necesarias para guiar a los estudiantes en su proceso de aprendizaje.

En este sentido, las tareas se centran en triángulos oblicuángulos, así como en la aplicación del software GeoGebra y de materiales manipulativos. El objetivo es promover la competencia de la resolución de problemas a través de las habilidades de modelación y argumentación. Asimismo, se presenta las posibles respuestas de los estudiantes, junto con las dificultades y errores potenciales que pueden surgir durante el proceso de resolución. También se incluyen intervenciones pedagógicas recomendadas para abordar la tarea. Al final del capítulo, se describe la efectividad de las tareas diseñadas, destacando su contribución al logro de los objetivos del trabajo.

Finalmente, presentamos nuestras reflexiones sobre tres aspectos fundamentales en torno al trabajo. La primera reflexión se centra en el objetivo general del estudio destacando la importancia de diseñar tareas acordes a las necesidades de los estudiantes y ofrecer el apoyo pedagógico necesario para que desarrollen competencias matemáticas; la segunda, en la experiencia formativa y el objeto de estudio; y la tercera, en las expectativas respecto a la aplicación de las tareas.

CAPÍTULO I. Generalidades

En este capítulo se expone la inquietud pedagógica que ha motivado la elaboración del presente trabajo, así como el contexto educativo en el que surge dicha preocupación. Se abordan los desafíos del proceso de enseñanza y aprendizaje de la trigonometría, que han inspirado estrategias didácticas más efectivas para promover un aprendizaje en los estudiantes específicamente sobre triángulos oblicuángulos. Desde esta inquietud, se formulan el objetivo general y los objetivos específicos del trabajo, que guiarán el diseño de las propuestas educativas presentadas en el documento.

Inquietud pedagógica

En el documento del marco normativo del Ministerio de Educación y Ciencias de Paraguay (MEC), la *Actualización Curricular del Bachillerato Científico de la Educación Media* establece como competencia específica en las matemáticas que los estudiantes “planteen y resuelvan problemas con actitud crítica y ética, utilizando el pensamiento lógico y el lenguaje matemático, para formular, deducir y realizar inferencias que contribuyan al desarrollo personal y social” (MEC, 2014 p.18). Es decir, el MEC se propone que los docentes ayuden a desarrollar en los estudiantes competencias específicas de las matemáticas, que se espera que estos adquieran y demuestren. Este enfoque implica según Santos (2008) ofrecer a los estudiantes oportunidades para aplicar el pensamiento matemático en situaciones de la vida cotidiana y resolver problemas del mundo real, solo así los estudiantes podrían comprender la utilidad y la aplicabilidad de las matemáticas en diferentes contextos.

Sin embargo, a pesar de la adopción del enfoque por competencias en el currículo de la Educación Media en Paraguay, aún no se ha establecido estándares de competencias en matemáticas. Esta carencia conlleva una falta de definición sobre qué aspectos serán enseñados,

qué habilidades subyacen en este enfoque y qué recursos son necesarios para su implementación (MEC, 2014). En consonancia, la investigación realizada por Mello (2017), evidencia que las instituciones educativas han enfrentado desafíos al intentar aplicar el enfoque. Entre los principales obstáculos se destaca la insuficiente preparación del profesorado en los principios y metodologías del enfoque por competencias, así como la complejidad del modelo, que genera resistencia del profesor y dificulta la integración de los elementos del enfoque de competencias en su práctica.

Estas debilidades del currículo, pese a las directrices del MEC, han llevado a Paraguay a obtener resultados pocos alentadores. Las evaluaciones del Sistema Nacional de Evaluación del Proceso Educativo SNEPE y del Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes PISA, este último reconocido como referente global en cuanto a la calidad educativa, no alcanzaron niveles satisfactorios. En la evaluación nacional solo el 19% de los estudiantes paraguayos alcanzaron el nivel esperado, lo que implica, que sus desempeños se limitan a aplicar algoritmos en operaciones combinadas para la resolución de problemas de su entorno (MEC, 2021). En cuanto a PISA, solo el 15% de los estudiantes paraguayos han logrado alcanzar el nivel 2 de competencia en matemáticas, es decir, una cantidad reducida de estudiantes que tienen la capacidad mínima de interpretar y reconocer cómo se puede representar matemáticamente una situación simple. Este nivel de competencia sugiere una comprensión básica de conceptos matemáticos (Jiménez et al., 2022).

Otro estudio que destaca la problemática de los bajos niveles en las competencias matemáticas es el realizado por Benítez y Giménez (2019) sobre la competencia matemática de estudiantes y profesores de colegios de Asunción y Central. Sus conclusiones revelaron que tanto el nivel de desarrollo de la competencia matemática de los estudiantes como el de los docentes es

bajo. Además, señalaron que las clases son más tradicionales por la muy poca participación de los estudiantes y las tareas descontextualizadas. Estos hallazgos ponen de manifiesto la necesidad urgente de implementar estrategias de enseñanza que fomenten la participación de los estudiantes y promueven un mayor desarrollo de la competencia matemática.

Ante este panorama, resulta esencial trabajar en una de las competencias específicas de matemáticas en el ámbito educativo paraguayo, la cual es que los estudiantes aprendan a resolver situaciones problemáticas que implican la aplicación de conceptos, operaciones, teoremas y propiedades trigonométricas para modelar situaciones reales. Para lograrlo, se considera importante identificar estrategias que mejoren la práctica pedagógica para alcanzar las competencias establecidas por el Ministerio de Educación (MEC, 2014).

En este contexto, la resolución de problemas surge como una competencia esencial que impulsa el entendimiento de las materias, fomenta el pensamiento crítico y favorece la incorporación creciente de nuevos saberes al sistema de conocimientos del sujeto (Lozada y Caballero, 2020). Para desarrollar esta competencia, según Santos (2008), es necesario ofrecer a los estudiantes una oportunidad que vaya más allá de la memorización de fórmulas y procedimientos, sino que puedan representar fenómenos de diversas maneras, identificar relaciones y patrones, formular conjeturas, justificar sus razonamientos y comunicar sus resultados eficazmente.

Dada la amplitud de la competencia matemática, es importante delimitar los aspectos necesarios para la realización de este estudio. En ese contexto, se priorizará el proceso de la argumentación y la modelación como herramientas clave para fomentar la competencia de resolución de problemas. Si bien todas las habilidades que involucren la competencia de resolver problemas matemáticos son relevantes, la elección es debido a los argumentos presentados por

Pollack citado por Henríquez Pizarro et al. (2020), quien afirma que la comunicación del razonamiento es fundamental para desarrollar el proceso de modelación de manera más efectiva, y que la argumentación es necesaria para validar este razonamiento, y que ambas competencias, modelación y argumentación, permitirán que la matemática presentada a los estudiantes sea más relevante y aplicable en el mundo real, promoviendo una interacción tanto entre los estudiantes como con su entorno.

Por otra parte, para dar sustento al desarrollo de competencias matemáticas mediante la “resolución de problemas”, se considerará lo propuesto por Solar (2009), que consta de tres elementos fundamentales. En primer lugar, los procesos matemáticos, que abarcan las habilidades cognitivas y procesos mentales necesarios para abordar problemas matemáticos. En este estudio, como ya se mencionó, se incorporarán los procesos de argumentación y modelación como componentes claves para favorecer la competencia de resolución de problemas.

En segundo lugar, se considerarán las tareas matemáticas contextualizadas que los estudiantes deben enfrentar para desarrollar la competencia de resolución de problemas, con relación a un objeto matemático. Por último, se tomará en cuenta el nivel de complejidad de estas tareas, el cual exige un procesamiento matemático avanzado que permitirá a los estudiantes establecer conexiones y reflexiones significativas entre conceptos y habilidades matemáticas (Gusmão, 2020).

Dentro del contexto de la situación problemática presentada, se advierte la necesidad de seleccionar un contenido curricular que promueva la habilidad de los estudiantes en la resolución de problemas. En consecuencia, se optó por la enseñanza de triángulos oblicuángulos, cuya pertinencia de su inclusión en el plan de estudios se detalla a continuación.

La inclusión de la trigonometría en el currículo de la educación media del bachillerato, específicamente en el primer curso, se debe a la importancia en el estudio de las matemáticas avanzadas y a sus aplicaciones en campos científicos y tecnológicos (León-Mantero et al., 2022). En esta etapa, se aborda la resolución de triángulos oblicuángulos, que es uno de los temas clave y requiere un mayor nivel de abstracción y pensamiento matemático avanzado (Gur, 2009), proporcionando a los estudiantes las herramientas necesarias para comprender y aplicar la trigonometría de manera más amplia y profunda, según lo indicado por el Ministerio de Educación y Ciencias (MEC, 2014).

La trigonometría aporta un conjunto de herramientas que permiten resolver problemas geométricos que surgen en diferentes situaciones reales (Dünder, 2015). También se destaca que los estudiantes consideran la trigonometría un área de las matemáticas difícil y abstracta en comparación con otras disciplinas de matemáticas (Gur, 2009), por lo que se fundamenta su selección.

Dado que la trigonometría generalmente se enseña en el séptimo grado de la Educación Escolar Básica, limitándose al estudio de las clasificaciones de los triángulos según sus lados y según sus ángulos (MEC, 2020), esta forma de enseñanza puede complicar a los estudiantes de grados más avanzados, ya que sus conocimientos previos son muy básicos. Por lo tanto, es relevante prestar atención al material de aprendizaje, ya que este provee la oportunidad para que el estudiante establezca relación entre el nuevo contenido y sus ideas existentes (Roa Rocha, 2021).

Por otro parte, la mera selección de contenido no resulta suficiente para fomentar el desarrollo de la competencia de resolución de problemas matemáticos entre los estudiantes. Aunque la comprensión del contenido es importante, la aplicación de métodos adecuados y

actualizados es relevante para facilitar el aprendizaje. Es por esa razón que se opta por métodos de resolución que permita respuestas abiertas (Gusmão, 2020) como herramienta didáctica, los cuales serán contextualizados para que los estudiantes puedan comprender los conceptos matemáticos, construir significados, resolverlos y comunicarlos, contribuyendo así a una percepción más completa y atractiva de las matemáticas (González, 2006).

Considerando estos argumentos, se propone diseñar tareas de aprendizaje para promover la habilidad de resolución de problemas sobre triángulos oblicuángulos, fomentando la interpretación geométrica de situaciones reales mediante el uso de GeoGebra. La utilización de GeoGebra para la modelación permitirá a los estudiantes visualizar que, cuando los datos incluyen relaciones entre lados y cuando sólo incluyen medidas de ángulos hay infinidad de soluciones diferentes que pueden pasar inadvertidas al resolver problemas en papel, pero lo notarán cuando los resuelvan en GeoGebra (Fiallo y Parada, 2018).

En consecuencia, se plantea elaborar esta propuesta de diseño dirigida a estudiantes del primer curso de la educación media, ya que en esta etapa inician el proceso de adquisición de nuevas habilidades en la resolución de problemas matemáticos, incluyendo la actitud crítica y ética requerida para el Currículo del Bachillerato científico de la Educación Media en Paraguay (MEC, 2014).

Desde esta perspectiva, se formula la inquietud pedagógica con el siguiente interrogante: ¿Qué tareas se pueden diseñar para promover habilidades de resolución de problemas en los estudiantes a partir de situaciones relacionados con triángulos oblicuángulos?

Objetivos

General

Diseñar tareas para promover habilidades de resolución de problemas en los estudiantes paraguayos del primer curso de la Educación Media a partir de situaciones modeladas con triángulos oblicuángulos.

Específicos

Proponer tareas que promuevan la modelación en la resolución de problemas relacionados con triángulos oblicuángulos.

Plantear problemas matemáticos en las tareas que favorezcan la habilidad de argumentación en la resolución de problemas relacionados con triángulos oblicuángulos.

CAPÍTULO II. Antecedentes

En este capítulo, se enumeran fuentes de investigación consultadas para identificar estudios afines al propósito de este trabajo, que consiste en diseñar tareas para promover habilidades de resolución de problemas relacionados con los procesos de argumentación y modelación de triángulos oblicuángulos. Las categorías asignadas a estos antecedentes se tornan con relación a cuatro aspectos: habilidades en resolución de problemas: Argumentación y Modelación, tareas matemáticas para promover la competencia de resolución de problemas, antecedentes relacionados con la enseñanza de triángulos oblicuángulos y antecedentes relacionados con el uso de GeoGebra para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Habilidades de resolución de problemas: argumentación y modelación

En esta categoría presentamos cinco investigaciones que materializan maneras de promover las habilidades de resolución de problemas relacionados con la argumentación y modelación.

Uno de los estudios analizados es de Ríos-Cuesta (2021) titulado *Argumentación en educación matemática: elementos para el diseño de estudios desde la revisión bibliográfica*, que buscó identificar las principales corrientes investigativas en el ámbito de la argumentación en la educación matemática, mediante una revisión documental. El autor destacó las cuestiones clave en los estudios existentes, ofreciendo elementos para diseñar futuras investigaciones y reflexiones sobre las tendencias y marcos teóricos predominantes.

El estudio logró identificar varias posturas sobre la argumentación en la educación matemática, subrayando la diversidad de enfoques y la falta de consenso sobre concepto de la argumentación. Ríos-Cuesta (2021) destacó el uso del modelo de Toulmin que proporciona un esquema lógico que incluye seis componentes (datos, garantía, soporte, indicador de fuerza

modal, refutaciones potenciales y conclusión) para analizar la estructura de los argumentos construidos por los estudiantes durante el proceso. Además, se identificaron diferentes categorías de argumentos como deductivos, inductivos, abductivos, entre otros y se discutieron las implicaciones pedagógicas de cada uno.

En cuanto a las conclusiones, el investigador señaló que, aunque la argumentación matemática está ganando relevancia en el currículo educativo, sigue siendo un desafío clarificar el concepto de argumentación por lo que es relevante implementar prácticas argumentativas en el aula y la realización de investigaciones en cuanto a la elección de modelos de análisis para estudiarla en contextos educativos.

En línea con estos hallazgos, el grupo Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría - AEG - (Molina et al., 2024) de la Universidad Pedagógica Nacional, Colombia, realizó un estudio titulado *Una propuesta para la formación de profesores de matemática: el caso de la argumentación matemática*. Este estudio tiene como objetivo operacionalizar un enfoque metodológico que promueva los procesos argumentativos y convierta la argumentación en un objeto de estudio en la formación inicial y continua de los profesores. La metodología utilizada es investigación - acción con un enfoque cíclico, donde cada ciclo consta de cinco fases, diseñadas para identificar evidencias del conocimiento didáctico - matemático y generar transformaciones a lo largo del proceso formativo.

El estudio destaca que en dos años se realizan entre dos y tres ciclos de investigación-acción, cada uno permite la reflexión, análisis y transformación del conocimiento sobre argumentación de los profesores. Se documenta el avance en la conceptualización sobre el argumento y su aplicación en el diseño de tareas didácticas que promuevan la argumentación.

Estos estudios brindan un marco teórico y metodológico que sustenta el presente trabajo, al proporcionar herramientas conceptuales para diseñar tareas orientadas a explorar la argumentación en el desarrollo de competencias matemáticas en los estudiantes. En este sentido, se considera la propuesta por Toulmin adaptado por AEG, la cual servirá de base para diseñar tareas que promuevan razonamientos deductivos o inductivos.

Por otro lado, en el artículo *Identificación de la argumentación en el desarrollo de la modelación en la sala de matemáticas* elaborado por Henríquez Pizarro et al. (2020), se reporta una investigación en la que se involucró a los estudiantes del 2° curso (15-16 años) de un colegio subvencionado de Santiago. En dicha investigación se analizaron los momentos argumentativos y la modelación para determinar relaciones entre ambas competencias en el aula de matemáticas, en el desarrollo de una clase de 90 minutos.

Se observó que las etapas clave para desencadenar la argumentación fueron la interpretación de la solución matemática y la validación en dichas etapas, los estudiantes comunicaban sus resultados y se cuestionaban sobre la validez de los procedimientos utilizados, lo que promovía la argumentación. Esta investigación destacó la importancia de la acción docente para desencadenar la argumentación, mediante la planificación anticipada y el uso de preguntas abiertas que fomente la exploración y la discusión de ideas entre los estudiantes.

El aporte de este estudio desarrollado por Henríquez Pizarro et al. (2020), ayuda a entender el proceso de argumentación durante la modelación en el contexto de la enseñanza de matemáticas y como un elemento clave para promover la competencia de resolución de problemas, ya que nos ofrece una perspectiva sobre cómo los estudiantes de secundaria participan en la argumentación durante el proceso de modelación. Además, nos brinda ideas sobre las tareas propuestas, pues debe contener preguntas abiertas para favorecer la argumentación durante el

proceso de modelación, y que permita a los estudiantes enfocarse en los algoritmos matemáticos y reflexionar sobre los significados construidos.

Otro estudio relevante en este contexto es el realizado por Ortiz et al. (2019) denominado *Modelación en el aula de matemática* en el que se realizó un taller para promover el trabajo independiente de los docentes para involucrarse en el ciclo de modelación a través de problemas de modelado matemático y analizar cómo ese proceso de modelación puede implementarse en el aula. El taller privilegió la interacción grupal que les permitió acercarse a los conceptos y procesos desde una perspectiva contextualizada y además comprender el rol de la modelación para describir fenómenos de la realidad.

El taller ofreció a los profesores participantes una perspectiva nueva sobre el aprendizaje, con la necesidad de establecer contextos apropiados para enseñar a matematizar, lo que da sentido al proceso de hacer matemáticas, centrada en la resolución de problemas. El trabajo de Ortiz et al. (2019) enfatizó la creación de contextos relevantes y el uso del aprendizaje cooperativo para promover la construcción de significados y la generación de argumentos.

Este estudio nos da una base teórica sobre los ciclos de modelación que consideraremos en nuestra propuesta adecuando al objeto matemático que abordaremos, ya que la misma promueve las habilidades de resolución de problemas centrados en la argumentación y la modelación.

El último artículo analizado en esta categoría fue de Solar et al. (2019) titulado *Desarrollo de la modelación por medio de una gestión argumentativa en el aula de matemáticas*, el cual se centró en un grupo de docentes de educación primaria con experiencia en argumentación con quienes se desarrolló una propuesta de formación de profesores basada en la modelación. Los resultados preliminares revelaron que, a pesar de las dificultades y errores que puedan surgir en la

resolución de problemas por parte de los profesores, los distintos ciclos de modelación que se aprecian en las producciones son oportunidades para la gestión argumentativa.

El estudio concluyó que el papel del profesor es importante para promover las competencias de argumentación y modelación en el aula. Esto implica gestionar la modelación, adaptar y diseñar tareas de modelación para su implementación efectiva. Se subraya también, la necesidad de un desarrollo profesional continuo por parte de los profesores para concebir y aplicar propuesta didáctica coherentes.

Los hallazgos de la investigación de Solar et al. (2019) nos sirven como fundamento teórico, demostrando que las tareas diseñadas para integrar la modelación con la argumentación son efectivas para promover la competencia en la resolución de problemas. En una tarea, se puede desarrollar habilidades matemáticas esenciales como identificar, plantear y resolver problemas matemáticos aplicados a diversas situaciones, además de fomentar la expresión de ideas y la construcción de argumentos en torno a los resultados obtenidos.

De acuerdo con lo anterior, se ha enfatizado la necesidad de proponer diseños de tareas contextualizadas, que fomenten la argumentación y la modelación en el aula, como medidas para fortalecer las habilidades de resolución de problemas matemáticos. Los argumentos mencionados dan una base teórica para el diseño que promuevan habilidades fundamentales. En ese sentido, resulta pertinente respaldar teóricamente el modelo de diseño de actividades matemáticas, para favorecer habilidades de resolución de problemas en los estudiantes. Por ende, llevamos a cabo unas revisiones bibliográficas de investigaciones previas relacionadas con las tareas matemáticas, para contextualizar y establecer una base para el estudio presente.

Tareas matemáticas para promover la competencia de resolución de problemas

En esta categoría, presentamos tres investigaciones que se centran en el diseño y uso de actividades matemáticas específicas para desarrollar habilidades de resolución de problemas en los estudiantes.

El estudio de Sepúlveda et al. (2009) denominado *La resolución de problemas y el uso de tareas en la enseñanza de las matemáticas*, examina el impacto de un enfoque de instrucción basado en la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas entre estudiantes de bachillerato. Este enfoque incluyó la realización de tareas que implican diferentes métodos de solución, dentro de un marco de trabajo grupal. La investigación enfatizó el trabajo en equipos pequeños por parte de los estudiantes para resolver los problemas, que luego presentaron y defendieron ante el grupo completo.

Como resultado, las consideraciones finales del proyecto destacan la importancia de proporcionar escenarios de aprendizaje que combinen trabajo colaborativo en pequeños grupos con el trabajo individual, y se resaltó que con las formas de instrucción se favoreció la participación de los estudiantes, al permitir que los estudiantes expresaran y defendieran sus ideas, lo que facilitó la modificación y mejora de estas mediante el intercambio de opiniones y críticas en el aula. Según los autores, el enfoque de enseñanza fomenta el trabajo colaborativo, la presentación y defensa de ideas y la revisión crítica de los intentos de solución, que ayuda a los estudiantes a desarrollar habilidades de resolución de problemas en la educación matemática.

La investigación desarrollada por Sepúlveda et al. (2009) aporta una base importante para el diseño de tareas, porque enfatiza el trabajo en pequeños equipos para resolver problemas, resaltando la importancia del trabajo colaborativo de los estudiantes, ya que con ello se fomenta

la articulación y justificación de las ideas propias frente al resto, lo que ayuda a promover la resolución de problemas vinculada con la argumentación.

Otro estudio relacionado con las tareas es el realizado por García y Benítez (2013) titulado *Diseño e implementación de tareas para apoyar el aprendizaje de las matemáticas*, en el cual proponen un enfoque para diseñar tareas que apoyen el aprendizaje de las matemáticas. El estudio utiliza una metodología cualitativa para documentar y analizar el tipo de razonamiento que los estudiantes emplean al realizar las tareas matemáticas asignadas.

Los objetivos propuestos por estos autores pretendieron analizar las características necesarias para que una tarea matemática sea considerada una buena oportunidad de aprendizaje y examinar los resultados del trabajo de un grupo de veinte estudiantes. También analizaron el trabajo de los estudiantes en las tareas asignadas, clasificándolas según los procedimientos utilizados.

Los resultados de la investigación realizada por García y Benítez (2013) revelaron que el aprendizaje de los estudiantes se ve beneficiado cuando las tareas presentan una congruencia entre la demanda cognitiva, el contenido matemático y los objetivos curriculares. El estudio concluyó que la calidad de las tareas asignadas influyó significativamente en el aprendizaje de las matemáticas en los estudiantes y que es necesario que esté alineada con los objetivos educativos y el nivel de habilidad de los estudiantes.

Además, este estudio evidenció que las tareas que permiten explorar múltiples representaciones favorecen el razonamiento de los estudiantes, independientemente de su conocimiento previo. Estos hallazgos proporcionan una guía práctica para los profesores, destacando la importancia de diseñar tareas que promuevan un pensamiento matemático y la construcción activa de significados matemáticos en los estudiantes.

Siguiendo la línea de las investigaciones anteriores, se analiza el estudio realizado por Espinoza et al. (2013) titulado *La invención de problemas y sus ámbitos de investigación en educación matemática*, con el objetivo de proporcionar información relevante a investigadores y educadores en educación matemática y resaltar la importancia y la utilidad de estas actividades en el aula. Los resultados obtenidos por este autor muestran que la creación de tareas matemáticas ha sido estudiada por motivos diversos, como el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes, la mejora de las actitudes hacia las matemáticas, la identificación del talento matemático, la observación de los procesos de resolución de problemas y su uso como herramientas para el aprendizaje. Este estudio concluye que los estudiantes reconocen mejor las partes de un problema y establecen relaciones entre ellas, lo que mejora sus habilidades en la resolución de problemas, ya que, al descomponerlos en partes, los estudiantes logran una comprensión de su estructura y de lo que implica el problema.

A partir de estos resultados, los hallazgos respaldan nuestro trabajo, pues se considera que las tareas no deben caer en la ejercitación rutinaria, sino que deben promover la exploración y el análisis, la mejora en la capacidad para descomponer problemas complejos, y en la identificación de los componentes clave para relacionarlos con posibles soluciones.

Finalmente, para promover habilidades de la resolución de problemas, no solo es necesario definir la habilidad de argumentación y modelación, sino también precisar el contenido matemático pertinente. En el contexto de nuestro estudio, dicho contenido se centra en el objeto matemático particular del triángulo oblicuángulo. En ese sentido, se presentan las revisiones bibliográficas que se centran en este objeto matemático específico, lo que nos permitirá orientar en la selección de metodologías y enfoques adecuados, y en la generación de nuevas perspectivas e ideas para nuestro estudio.

Enseñanza de triángulos oblicuángulos

En esta categoría, presentamos seis revisiones de estudios e investigaciones que analizan las prácticas pedagógicas empleadas en la enseñanza de triángulos.

Una de las investigaciones que contribuye a nuestro trabajo es la realizada por Guevara et al. (2019) en su artículo científico sobre *TRI-CRO: Aplicación para la comprobación, resolución de triángulos rectángulos, oblicuángulos y almacenamiento temporal de datos*, tomaron como población de estudio a los estudiantes del primer año de la Universidad Tecnológica de Panamá, Centro Regional de Coclé, cuya muestra fue de 20 estudiantes, quienes fueron sometidos a un proceso de evaluación mediante encuestas, que tenían como objetivo identificar las principales dificultades que enfrentan en el aprendizaje de matemáticas y determinar si la herramienta tecnológica TRI-CRO podría motivarlos a mejorar su comprensión de la materia.

El artículo concluyó que la aplicación puede ser una herramienta efectiva para captar el interés y mejorar el rendimiento de los estudiantes en matemática. A través del diseño y desarrollo de esta aplicación, se lograron captar y analizar datos que mostraron su eficacia en la resolución de problemas de triángulos rectángulos y oblicuángulos. Esto establece una conexión entre la investigación mencionada y el interés de nuestro estudio, ya que proporciona datos y resultados que permite comprender las dificultades de los estudiantes al resolver problemas sobre triángulos oblicuángulos y preverlas, y la necesidad de desarrollar estrategias y recursos educativos, como el uso de geometría dinámica, tareas que fomenten el pensamiento geométrico y trigonométrico.

El siguiente estudio que enriquece el análisis de nuestro trabajo es el de Escobar (2012) realizado en Colombia titulado *Propuesta didáctica para la enseñanza de la resolución de triángulos con el apoyo del programa Cabri Geometry*, que tuvo como objetivo el desarrollo del

pensamiento espacial y una propuesta de estrategia para mejorar la enseñanza y aprendizaje de la resolución de triángulos, dirigida a estudiantes de secundaria.

La investigación se basa en la revisión de teoremas fundamentales como el de Pitágoras, del seno y del coseno, haciendo uso del software para resolver ejercicios prácticos. La metodología propuesta se enfoca en organizar actividades que fomenten la construcción gradual del pensamiento espacial, utilizando el modelo teórico de Van Hiele, que describe distintos niveles de razonamiento geométrico. En las conclusiones, la investigadora sugiere que los profesores deben revisar la bibliografía relacionada con la didáctica de la trigonometría y el modelo de Van Hiele. Además, recomienda implementar de manera sistemática las guías de aprendizaje propuestas a lo largo del año escolar, con el fin de familiarizar a los estudiantes con el programa Cabri Geometry.

Nuestro enfoque difiere de la investigación analizada en que, además de emplear recursos tecnológicos como GeoGebra para la interpretación de problemas concernientes a triángulos oblicuángulos, también incorporaremos materiales manipulativos, estos últimos en nuestro trabajo se utilizarán para explorar las formas y elementos del triángulo, permitiendo a los estudiantes experimentar directamente con los conceptos geométricos. Esta práctica facilitará la comprensión conceptual y la internalización de estos.

Otro de los estudios de este análisis es la investigación de León (2017), titulada *Resolución de triángulos a partir de situaciones problema del entorno de los estudiantes con alumnos de grado décimo en el colegio Antonio Nariño*, en el que desarrolla una unidad didáctica compuesta por actividades en las que aplica conceptos propios de la geometría y la trigonometría para resolver problemas sobre distancias y alturas.

A pesar de las dificultades evidenciadas en los resultados de la prueba final, particularmente en lo referente a los conocimientos previos y la interpretación de las situaciones planteadas, León (2017) observó un avance significativo en el grupo experimental. Este avance se manifestó en aspectos como la representación gráfica, la verificación de respuestas y la reflexión sobre los procesos realizados. Durante las clases, los estudiantes se mostraron motivados y participativos, destacando la utilidad y aplicabilidad de la trigonometría en situaciones reales. El investigador llegó a la conclusión de que la unidad didáctica podría marcar un cambio positivo en el enfoque de enseñanza de la trigonometría. Este enfoque estaría orientado a acercar a los estudiantes a las matemáticas de manera práctica y reflexiva, demostrando así la relación directa entre esta disciplina y la realidad.

Este antecedente proporciona una guía para la implementación de estrategias pedagógicas eficaces destinadas a enseñar la resolución de problemas relacionados con triángulos oblicuángulos. Se destaca la relevancia de diseñar tareas contextualizadas que trascienden el entorno tradicional del aula, para involucrar a los estudiantes en la construcción de su propio proceso de aprendizaje, lo que permite vincular el contenido matemático con situaciones del mundo real, captar el interés de los alumnos y promover una comprensión de conceptos y construcción de significados trigonométricos.

Para promover la comprensión de los conceptos y significados matemáticos es importante considerar otros factores relacionados con la motivación. En ese sentido, se analiza el estudio realizado por Rodríguez y Sgreccia (2021) titulado *Predisposición y comprensión de estudiantes de secundaria cuando resuelven problemas trigonométricos*. En dichos estudios, se examinan los procesos implicados, tanto en términos de predisposición como de comprensión, que los estudiantes de cuarto año de secundaria muestran al resolver problemas. Este análisis se basó en

un enfoque metodológico cualitativo que se apoya en las teorías de aprendizaje significativo y modelos mentales.

En la investigación se concluye que existe un componente emocional, con incidencia negativa de bloqueo en los desempeños, debido a las sucesivas situaciones vividas por los estudiantes, por lo que es imperante proponer aprendizajes basados en problemas contextualizados, y que puede producir muy buenos resultados atendiendo a variables cognitivas, emocionales e históricas de cada estudiante.

Dado el contexto y los hallazgos de la investigación desarrollada por Rodríguez y Sgreccia (2021) y reconociendo la necesidad de desarrollar materiales educativos pertinentes para promover la competencia en la resolución de problemas, se propone diseñar tareas conectadas con situaciones cotidianas. Esto permitirá generar un mayor compromiso y motivación durante el proceso de resolución, a la vez que se consideran tanto aspectos cognitivos como los emocionales y contextuales.

Por otro lado, Segura (2018) en su tesis de maestría sobre *Representaciones semióticas para interpretar y solucionar triángulos oblicuángulos*, documenta un estudio orientado a fortalecer la comprensión de las diferentes representaciones semióticas para interpretar y dar solución a situaciones matemáticas semejantes a los triángulos oblicuángulos, para lo cual realiza una investigación con la intervención de 29 estudiantes de grado un décimo de un colegio público de la ciudad de Bogotá.

Durante las actividades de intervención, la estructura metodológica se desarrolló a través de guías, talleres, actividades dirigidas por el docente, actividades de campo, uso de material manipulable en matemáticas (GeoGebra, Geoplano). Asimismo, el trabajo individual y el trabajo en grupo (colaborativo y cooperativo) se evidencian en el desarrollo de las diferentes actividades.

La propuesta permitió evidenciar en los estudiantes un fortalecimiento del componente geométrico-métrico respecto al triángulo oblicuángulo, y la importancia de usar las diferentes representaciones semióticas clave para la enseñanza y aprendizaje de los objetos matemáticos, porque comunican y dan sentido a través de los registros semióticos.

A partir de la investigación desarrollada por Segura (2018), se puede identificar que la incorporación de diferentes formas de representación de triángulos oblicuángulos es favorable para explorar estrategias de resolución de problemas. Esta inclusión estimula al estudiante a analizar y argumentar sobre la selección y aplicación de métodos para la solución, promoviendo así la construcción de conexiones y reflexiones sobre los significados matemáticos desarrollados durante el proceso.

Con relación a los aspectos pertinentes al objeto de estudio Encinas- Pablos et al. (2017) realiza un estudio sobre *Diagnóstico de los conocimientos básicos de matemáticas en alumnos universitarios de nuevo ingreso* proponen en esta investigación determinar las deficiencias que tienen los alumnos de nuevo ingreso al Instituto Tecnológico de Sonora en el área de matemáticas, mediante la aplicación de un examen diagnóstico para identificar oportunidades de mejoras.

Al analizar las respuestas obtenidas mediante la aplicación de la prueba diagnóstica a 321 estudiantes, los autores evidenciaron que existen deficiencias en la solución de triángulos rectángulos y oblicuángulos.

A partir del análisis precedente, se evidencia que los estudiantes presentan problemas o dificultades en la resolución de problemas relacionados con triángulos oblicuángulos. Esta información se considera valiosa para la presente investigación ya que resalta la necesidad de realizar ajustes o adaptación del enfoque de enseñanza en esta disciplina para proporcionar un

apoyo a los estudiantes, utilizando estrategias y recursos educativos específicos para abordar dichas dificultades.

De los aspectos considerados por los investigadores para el desarrollo de competencias de resolución de problemas, consideramos que es importante integrar herramientas tecnológicas que puedan potenciar el aprendizaje. En este contexto, en este trabajo se utilizará la geometría dinámica a través de GeoGebra como recurso para explorar interactiva y visualmente conceptos geométricos, que puedan facilitar a los estudiantes la comprensión de conceptos relacionados con triángulos oblicuángulos.

En las siguientes revisiones bibliográficas se aborda el uso de GeoGebra en la enseñanza de la geometría que proporciona un sustento para incorporar esta herramienta en el diseño de tareas. Las investigaciones que se referencian demuestran que GeoGebra no solo puede facilitar la comprensión de conceptos relacionados con triángulos oblicuángulos, sino que también ayudaría a fomentar la competencia en la resolución de problemas. Esto refuerza la pertinencia de su uso como un recurso en el desarrollo de habilidades matemáticas.

Uso de GeoGebra para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

En esta última categoría, presentamos tres estudios que utilizaron GeoGebra como herramienta educativa para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, los cuales nos aportan ideas para el diseño de las tareas.

En primer lugar, se examina la tesis doctoral de Arévalos y Cáceres (2022), presentada en la Universidad Pedagógica Nacional, titulada *Enseñanza, aprendizaje y experiencias con GeoGebra y sus funcionalidades en la constitución del profesor de matemáticas*. Este estudio investiga el impacto de GeoGebra en su desarrollo como profesores de matemáticas. A través de una metodología que combina relatos autobiográficos y discusiones con su asesor, los autores

analizan la evolución de la identidad docente a lo largo del tiempo, desde su etapa como estudiantes hasta su ejercicio profesional, destacando el papel del software en dicho proceso.

En sus reflexiones colectivas, los autores identificaron varias funcionalidades de GeoGebra utilizadas en sus prácticas, como la creación de nuevos recursos didácticos, medios de interacción, motivación, construcción de conocimiento y conversión entre representaciones. Además, destacaron otra función que emergió del diálogo con el asesor, que es la función de conversión entre tablas y gráficos.

En el desarrollo de su investigación, los autores propusieron unidades didácticas apoyadas en GeoGebra, que demuestran el uso de la herramienta en aspectos como la visualización, la comunicación y la exploración mediante el arrastre de objetos. Su enfoque priorizó el aprendizaje matemático, utilizando GeoGebra para formular preguntas, presentar diversas formas de razonamiento y modelar situaciones matemáticas.

Por último, los autores reflexionan que el uso continuo de GeoGebra en sus clases les permitió observar cómo los estudiantes se apropian de las actividades, lo que los motivó a profundizar en el conocimiento de las vistas y herramientas del software. Además, reconocen que este proceso ha sido clave en su desarrollo como docentes, ya que les ha permitido ofrecer clases más dinámicas y efectivas en la enseñanza de las matemáticas.

Esta investigación enriquece nuestro trabajo, ya que los hallazgos de los autores nos proporcionan una base para diseñar tareas respaldadas por el uso de GeoGebra. Al aprovechar las diversas funcionalidades de esta herramienta, especialmente aquellas que facilitan la visualización y la exploración de conceptos matemáticos, podemos abordar de manera más efectiva la abstracción en trigonometría, pues el proceso de visualización es esencial para trabajar con los teoremas del seno y del coseno, y permitirá a los estudiantes entender conceptos de

manera intuitiva mediante representaciones gráficas, desarrollando habilidades matemáticas como la resolución de problemas.

Sobre el uso de GeoGebra en el proceso de enseñanza y aprendizaje, Auccahuallpa et al. (2022) realizó un estudio descriptivo denominado *Beneficios del uso de GeoGebra en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática*, en el que se aplicó un cuestionario de 24 ítems a una muestra representativa de 799 docentes a nivel nacional. Los datos recolectados se analizaron para evaluar el impacto del uso de GeoGebra en el aula, poniendo un énfasis en la valoración de los docentes de esta herramienta. Los resultados indicaron que una parte significativa de los docentes encuestados (39.67%) utiliza GeoGebra, mientras que el 60.33% no lo hace. Los que usan GeoGebra reconocen importantes beneficios, como el desarrollo del pensamiento crítico-analítico, el razonamiento lógico-matemático, la verificación de conjeturas y el aprendizaje significativo. Además, se destacó la capacidad de GeoGebra para fomentar el trabajo colaborativo y aumentar la motivación en los estudiantes.

El estudio concluyó que GeoGebra es una herramienta potente para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática. Los docentes que participaron en la formación continua valoran positivamente sus beneficios, señalando su capacidad para mejorar la comprensión de conceptos matemáticos y promover actitudes positivas hacia la matemática. Sin embargo, se identificó la necesidad de seguir capacitando a los docentes en el uso de esta herramienta para maximizar sus beneficios en el aula.

En consecuencia, el estudio de Auccahuallpa et al. (2022) proporciona una referencia para el diseño de tareas que utilicen GeoGebra como herramienta para promover habilidades de resolución de problemas en matemáticas. Los beneficios identificados, como el desarrollo del razonamiento lógico y la verificación de conjeturas, sugieren que GeoGebra puede ser eficaz en

la creación de tareas que desafíen a los estudiantes a aplicar sus conocimientos de manera crítica y colaborativa, fortaleciendo así su capacidad para resolver problemas matemáticos complejos.

De manera similar, el estudio de Padilla-Escorcía (2022) titulado *Caracterización del conocimiento especializado del profesor en la modelación de las funciones trigonométricas en GeoGebra* revela que el conocimiento especializado del profesor incluye comprensión teórica de los contenidos matemáticos, que permite aplicar herramientas como GeoGebra para desarrollar competencias matemáticas, como la modelación. El estudio identificó que las relaciones entre las categorías del conocimiento especializado son decisivas para que el docente pueda enseñar de manera efectiva utilizando GeoGebra. En particular, se destacó la importancia del conocimiento de los registros de representación y de las propiedades de las funciones trigonométricas en el proceso de modelación.

Según este artículo de investigación, GeoGebra es una herramienta potente para la enseñanza de funciones trigonométricas, dado que facilita la visualización y análisis dinámico de las funciones, lo cual sería difícil de lograr mediante métodos tradicionales. Además, el estudio de Padilla-Escorcía (2022) resalta la necesidad de que los docentes tengan un conocimiento especializado tanto en matemáticas como en pedagogía para aprovechar al máximo las TIC en la enseñanza.

Por consiguiente, esta investigación aporta significativamente a nuestro diseño de tareas al utilizar GeoGebra para potenciar la competencia de resolución de problemas. En particular, su enfoque en la caracterización del conocimiento especializado del docente ofrece una base teórica para explorar cómo la modelación con GeoGebra puede mejorar las habilidades de los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos.

En este sentido, los antecedentes proporcionan una visión amplia y detallada sobre los procesos para promover habilidades de resolución de problemas, la elaboración de tareas matemáticas con apoyo de GeoGebra, y aquellos relacionados con los triángulos oblicuángulos. Las investigaciones analizadas destacan la importancia de contextualizar las tareas diseñadas, promover la argumentación y modelación de conceptos matemáticos y adaptar las estrategias didácticas a las necesidades y estilos de aprendizaje de los estudiantes. Los hallazgos y recomendaciones de estos estudios sirven de base para diseñar tareas que favorezcan una nueva forma de aprendizaje.

Un aporte clave de los antecedentes fue la elaboración de tareas que combinan habilidades de modelación y argumentación para promover la competencia de resolución de problemas. Además, nos permitió elaborar tareas apoyados en GeoGebra lo que puede favorecer la exploración y la visualización de la relación de los lados y ángulos del triángulo oblicuángulo y facilitar a los estudiantes la construcción de modelos matemáticos.

Asimismo, otro aporte significativo es el de identificar sugerencias para la gestión e intervención del profesor, las cuales están orientadas para potenciar la construcción de argumentos durante el proceso de modelado.

Por último, los estudios que hemos analizado nos permitieron formular tareas matemáticas sobre triángulos oblicuángulos de naturaleza abierta. Esto significa que tales tareas no se limitan a una sola forma de solución, lo que, a su vez, puede favorecer a la creatividad de los estudiantes a través de la experiencia y el conocimiento previo.

CAPÍTULO III. Marco Referencial

En este capítulo se presentan los fundamentos teóricos que respaldan el desarrollo de este trabajo. Primero, se abordan las competencias matemáticas en el contexto del currículo de la educación media en Paraguay, mediante un análisis de los documentos oficiales que regulan la enseñanza de las matemáticas y su relevancia en la formación de los estudiantes, sustentados en los lineamientos del Ministerio de Educación y Ciencias (MEC), los cuales promueven la resolución de problemas como una habilidad esencial para la formación académica y personal.

Luego, se introducen las habilidades de argumentación y modelación, que guían el diseño de tareas orientadas a promover la resolución de problemas, objetivos principales de este estudio.

Finalmente, se profundiza en la importancia de desarrollar competencias que permitan a los estudiantes resolver problemas utilizando herramientas matemáticas, especialmente a través del estudio de los triángulos oblicuángulos.

Competencias matemáticas en el currículo de la educación media

En Paraguay existen documentos oficiales que rigen la Educación Básica escolar del tercer ciclo, siendo estas la *Actualización Curricular del Bachillerato Científico* (MEC, 2014) y la *Priorización Curricular 2021* (MEC, 2020), donde se detallan las competencias de las disciplinas, incluida las matemáticas. A continuación, se presenta una reseña sobre cada uno, haciendo énfasis en matemáticas.

El documento de *Actualización Curricular del Bachillerato Científico*, emitido por el Ministerio de Educación y Ciencias (MEC, 2014), tiene como objetivo principal brindar orientación a los docentes y directores en el desarrollo de los contenidos en diversas disciplinas,

entre las cuales se encuentra las matemáticas. En él se establecen tres finalidades claras: unificar capacidades nacionales, adecuarlas al currículo y actualizarlas según nuevas necesidades.

En el documento también se tiene definido la competencia general y específica de la educación media. Las competencias generales se desarrollarán a lo largo de los tres años de la Educación Media (EM), con el respaldo de las capacidades específicas de cada disciplina. Una de las competencias generales de la EM, que guarda consonancia con las matemáticas se describe así: “Planteen y resuelvan problemas con actitud crítica y ética, utilizando el pensamiento lógico y el lenguaje matemático, para formular, deducir y realizar inferencias que contribuyan al desarrollo personal y social” (MEC, 2014 p. 20).

En Paraguay, se define a la competencia como “una integración de capacidades (aptitudes, conocimientos, destrezas, habilidades y actitudes) para la producción de un acto resolutivo eficiente, lógico y éticamente aceptable en el marco del desempeño de un determinado rol” (MEC, 2014. p. 14).

Esta definición guía a los docentes al establecer las competencias que los estudiantes deben desarrollar. Asimismo, orienta en la selección de contenido, métodos de enseñanza y evaluación más adecuado para promover el logro de los objetivos educativos. Este marco proporciona una estructura y un conjunto de expectativas que orientarán el diseño de tareas de manera que sean relevantes, significativas y efectivas para el aprendizaje de los estudiantes.

Para desarrollar competencias durante los tres años de la Educación media se dispone de capacidades propuestas para las diferentes áreas académicas. Esto implica un desarrollo de actitudes y procedimientos en relación con un concepto o tema particular. En ese aspecto, el

documento define capacidad como el conjunto de conocimientos, destrezas y habilidades que articulados constituyen la competencia (MEC, 2014).

En consecuencia, definimos habilidades como el desarrollo de capacidades que permiten a los estudiantes pensar y actuar en diversos ámbitos, adquiriendo conocimientos mediante la experiencia, los cuales pueden aplicarse y emplearse para interpretar y comprender el contexto. (UNESCO, 2007).

Dentro del normativo de la Educación Media se definen los tres planes del componente académico: Plan común, plan específico y plan optativo. Dentro del plan común está el área de matemática y dentro de ella se inicia el estudio de la Trigonometría en el primer curso. Una de las capacidades que deben desarrollarse a nivel nacional es formular y resolver problemas que involucren el uso de triángulos oblicuángulos (MEC, 2014). Esto fundamenta la elección del objeto matemático a ser abordado, específicamente el triángulo oblicuángulo.

Por su parte, en los lineamientos se establece la competencia específica de matemática así: “formula y resuelve situaciones problemáticas que involucran el uso de conceptos, operaciones, teoremas y propiedades matemáticas del Álgebra, Trigonometría, Geometría Analítica y el Cálculo, aplicadas a modelizar situaciones reales” (MEC, 2014. p. 124).

En las orientaciones se sugiere que los problemas planteados se extraigan de contextos reales, de situaciones que atraigan a los estudiantes y así les resulte interesante la investigación y profundización de los temas abordados.

Otro documento oficial que sigue los lineamientos del currículo es la Priorización Curricular, diseñada para adaptarse a la realidad mundial surgida tras la propagación del COVID-

19. Este documento establece las capacidades específicas en cada área del conocimiento para cada ciclo educativo, que siguen siendo el punto de referencia en todos los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Las capacidades priorizadas permiten avanzar en los procesos pedagógicos hacia el logro de las competencias, aunque con un alcance reducido, pero igualmente significativo. La vigencia de este documento está determinada por las disposiciones de las autoridades educativas y actualmente es el marco utilizado en el país.

En la priorización curricular, se mantiene la esencia del currículo nacional, pero se ajusta la configuración del currículo para facilitar un enfoque de aprendizaje diferente. Este documento prioriza las capacidades esenciales de cada área, necesarias para el progreso del estudiante en su aprendizaje.

En el contexto, la enseñanza de los triángulos oblicuángulos se considera una prioridad, ya que estos son fundamentales en geometría y trigonometría, áreas que forman parte del currículo matemático. Su comprensión y dominio contribuyen al desarrollo de las habilidades en la resolución de problemas y razonamiento matemático, por lo tanto, abordamos este tema en específico, haciendo hincapié en su aplicación para la resolución de problemas, tal como se plantea en la capacidad que aborda el tema.

Siguiendo los lineamientos curriculares de la educación media en Paraguay en donde se destaca la importancia de desarrollar competencias matemáticas en la resolución de problemas, en los siguientes párrafos, se adentra en el enfoque de competencias matemáticas aplicado al estudio de los triángulos oblicuángulos. Se abordará este tema a la luz de las teorías que

respaldan la enseñanza de las matemáticas, destacando la relevancia de comprender y resolver problemas relacionados con esta figura geométrica en particular.

Competencia de la Resolución de problemas

Existen diversas definiciones y perspectivas sobre lo que es la resolución de problemas en matemáticas. En este trabajo, adoptaremos la resolución de problemas como una competencia, ya que se ajusta al contexto del currículo paraguayo y al interés de este trabajo.

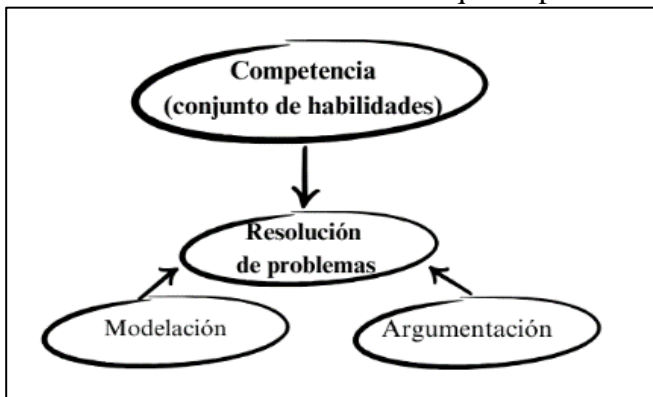
En primer lugar, según Pettersen y Nortvedt (2017) la resolución de problemas es una competencia matemática integral que va más allá del mero dominio de conocimientos procedimentales y conceptuales. Los estudiantes, por lo tanto, deben involucrarse en una amplia gama de actividades que abarquen competencias adicionales, como la comunicación y el razonamiento. Esta perspectiva sugiere que la resolución de problemas no solo implica aplicar procedimientos matemáticos, sino que también requiere el uso de habilidades sociales, de comunicación y razonamiento crítico para articular soluciones, justificar respuestas y reflexionar críticamente sobre los procesos empleados.

De manera similar, en Paraguay, la competencia de resolución de problemas es entendida como la integración de aptitudes, conocimientos, destrezas, habilidades y actitudes (MEC, 2014). A partir de esta definición, en este estudio se aborda la resolución de problemas como un conjunto de habilidades que los estudiantes deben desarrollar para mejorar su competencia en matemáticas.

Este enfoque holístico en la resolución de problemas permite diseñar tareas y estrategias de enseñanza que promuevan habilidades necesarias para lograr la competencia del estudiante.

En particular, tareas que favorezcan la discusión, el intercambio de ideas, la construcción de argumentos y la reflexión sobre los procesos utilizados para resolver problemas. Asimismo, esto se alinea con lo planteado por Gravemeijer et al. (citado por Ukobizaba et al. 2021) quienes destacan la necesidad de comprender el tipo de habilidades matemáticas necesarias en el mundo actual. Además, subrayan la importancia de realizar ajustes tanto en los contenidos como en la pedagogía para preparar a los estudiantes en el desarrollo de habilidades relevantes del siglo XXI, tales como el razonamiento matemático, el pensamiento crítico y la resolución de problemas matemáticos.

Con base en lo anterior, este trabajo adopta la resolución de problemas como una competencia clave para la enseñanza matemática. En este sentido, se priorizan dos habilidades que contribuyen a su desarrollo: por un lado, la argumentación y, por otro lado, la modelación matemática. Estas habilidades, a su vez, son promovidas mediante el diseño de tareas matemáticas adecuadas al contenido que se pretende enseñar. A continuación, se presenta el



Nota: Elaboración propia

esquema 1 que sintetiza el objeto de estudio:

Según el esquema, se consideran la argumentación y la modelación como habilidades a desarrollar para fortalecer

la competencia de resolución de

problemas matemáticos. Dichas habilidades servirán como indicadores para evaluar el avance de los estudiantes tanto en la construcción de razonamientos como en la aplicación de modelos matemáticos que representen situaciones reales o abstractas.

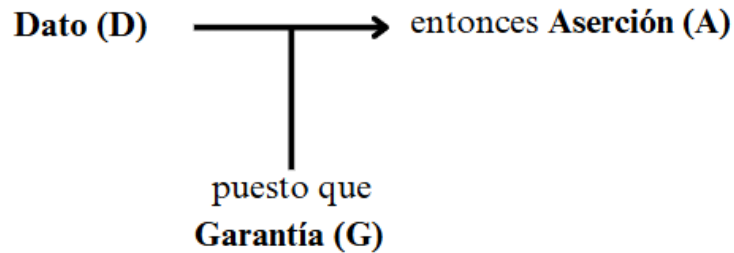
Argumentación en la resolución de problemas

La capacidad de resolución de problemas en el contexto educativo paraguayo es necesaria por los múltiples obstáculos de la educación en matemática. En particular se destaca la necesidad de desarrollar el pensamiento crítico como la competencia matemática de los estudiantes (Mello, 2017). Por ello, en este proyecto se plantea diseñar tareas que fomenten la competencia de resolución de problemas.

Uno de los aspectos clave para promover la competencia de resolución de problemas es la argumentación, que según Krummheuer (citado por Dede, 2019) implica explicar intencionalmente el razonamiento detrás de una solución matemática. Este proceso no solo ocurre durante la resolución del problema, sino también después, permitiendo a los estudiantes reflexionar sobre su pensamiento y proceso de toma de decisiones.

Según Camargo et al. (2024), en el aula, existen diversas situaciones que pueden facilitar el desarrollo de la argumentación, especialmente durante la resolución de problemas, cuando los estudiantes exploran una representación matemática, lo cual ofrece una gran oportunidad para desarrollar argumentos. Sin embargo, el hecho de estar en una situación propicia no garantiza la producción de argumentos. Para que los argumentos se consideren como tales, es necesario que sean comunicados de manera explícita y que incluyan al menos tres elementos principales que conforman un argumento matemático: datos, aserción y garantía (modelo de Toulmin adecuado por el grupo AEG) que justifica el razonamiento, por lo que se elabora tareas que propicien la construcción de argumentos teniendo en cuenta estos elementos para que garantice su validez. (Camargo et al., 2024).

Esquema 2
Modelo de Toulmin adecuado por el grupo AEG



Nota: tomado de Molinas et al (2024) p. 158.

Este modelo estructura la argumentación de manera funcional, los datos fundamentan la aserción, que a su vez se justifica mediante la garantía. En este esquema, la relación de apoyo entre el dato (evidencia) y la aserción (conclusión) se representa con una flecha, indicando que el dato fundamenta la aserción. Para justificar esta relación, se incluye la garantía, que es un enunciado general colocado debajo de la flecha que explica por qué el dato apoya la aserción, respaldando así esta conexión lógica. Este esquema gráfico permite visualizar cómo cada elemento contribuye a la solidez del argumento (Molina et al., 2024).

Por otro lado, tanto Krummheuer como Camargo definen la argumentación como un proceso, entendido éste como una serie de acciones que se llevan a cabo a lo largo de un periodo de tiempo con el propósito de encontrar una solución a la tarea planteada. Sin embargo, para los fines de este trabajo, abordamos la argumentación como una habilidad, destacando las capacidades del estudiante para resolver problemas matemáticos.

Esta aclaración resulta fundamental debido a la estrecha relación entre el proceso y la habilidad. En este contexto, la habilidad se considera la base para llevar a cabo procesos matemáticos. Es decir, mientras se desarrollan procesos matemáticos, las habilidades

relacionadas con estos pueden fortalecerse. Por tanto, este trabajo enfatiza la argumentación como una habilidad, ya que su objetivo específico es fomentarla.

Sin embargo, cabe destacar que la argumentación no es la única habilidad que contribuye a desarrollar la competencia de resolución de problemas. Entre las muchas habilidades relevantes, se incluye la modelación matemática, la cual resulta fundamental en este trabajo. La integración de la argumentación y la modelación en la enseñanza de las matemáticas puede promover la competencia de resolución de problemas. En consecuencia, se procede a fundamentar la importancia de la modelación como una habilidad clave en este contexto.

Modelación en la resolución de problemas

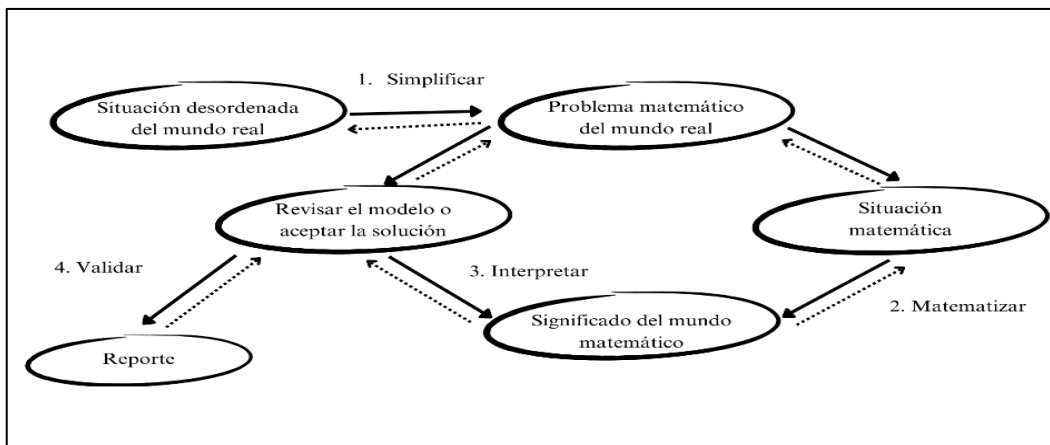
La modelación matemática es la siguiente habilidad que favorece a la resolución de problemas que buscamos fomentar; por lo tanto, describimos a continuación la fundamentación teórica que lo respalda.

La modelación, entendida como la habilidad de resolver problemas usando el lenguaje matemático para representar la realidad de manera simplificada, guarda una estrecha relación con la resolución de problemas, según Fonseca (2023). Esta habilidad tiene como objetivo conectar las matemáticas con el mundo real. Además, al generar espacios en el aula que promuevan la modelación se potencia la capacidad de los estudiantes para analizar, explicar y resolver problemas.

Con el fin de estructurar el diseño de nuestras tareas en consonancia con el propósito del trabajo, utilizamos el ciclo de modelación propuesto por Brown y Stillman (citado en Fonseca, 2023). Este ciclo comprende las fases de simplificar, matematizar, interpretar y validar, que a continuación se presenta en el esquema 3 junto con su descripción.

Esquema 3

Ciclo de modelado simplificado Brown y Stillman



Nota: Ciclo de modelado simplificado Brown y Stillman (citado en Fonseca, 2023)

En este ciclo se describe el proceso de modelado matemático aplicado a problemas del mundo real, específicamente en contexto que involucren triángulos oblicuángulos. El ciclo de modelado comienza con la identificación de un problema, que implica la resolución matemática y la interpretación y validación de los resultados obtenidos. Por lo tanto, el diseño de tarea propuesto tiene en cuenta el siguiente ciclo del modelado, descrito de la siguiente manera:

- **Simplificar:** En este ciclo, los estudiantes deben idear modelos matemáticos que simplifiquen la situación del mundo real en términos de triángulos oblicuángulos. Esto implica elegir representaciones matemáticas adecuados para la resolución del problema.
- **Matematizar:** Utilizando conocimientos trigonométricos como el teorema del seno y coseno, los estudiantes aplicarán estrategias heurísticas para resolver problemas específicos relacionados con estos triángulos.
- **Interpretar:** Una vez obtenidos los resultados matemáticos utilizando estos teoremas, los estudiantes deben relacionar estos resultados con situaciones del mundo real que

involucren triángulos oblicuángulos, lo cual les permitirá generalizar la situación obtenida.

- Validar: los estudiantes analizarán sus soluciones comparándolas con las de sus pares y reflexionarán sobre las posibles mejoras o diferentes enfoques para resolver el problema.

Lo que se pretende en este ciclo es que reconozcan la variedad de soluciones posibles y la importancia de la validación matemática en contextos reales.

Partiendo de la premisa de priorizar el desarrollo de la competencia en resolución de problemas en este estudio y de abordar el triángulo oblicuángulo como objeto matemático, es preciso definir los elementos teóricos del proceso de enseñanza y aprendizaje que servirán como base para la construcción de los principales ejes temáticos de este trabajo, por lo que se pasa a la descripción y explicación de este.

Fundamentos teóricos para el diseño de tareas

En este apartado, se abordan dos aspectos claves considerados en el diseño de las tareas. En primer lugar, como referente teórico, se considera a Gómez et al. (2018), quienes conceptualizan las tareas como herramientas fundamentales para el aprendizaje y proponen un análisis de instrucción estructurado en siete elementos. Este enfoque ofrece una base para la creación de tareas que promuevan el desarrollo de habilidades de argumentación y modelación matemática en la resolución de problemas relacionados con los triángulos oblicuángulos. En segundo lugar, se resalta la importancia de la tecnología en la enseñanza de la trigonometría, destacándose el uso de GeoGebra como un recurso pedagógico que facilita la visualización y la exploración de las propiedades de los triángulos oblicuángulos y el desarrollo de modelos matemáticos.

Siguiendo la orientación de Gómez et al., (2018) consideramos que el aprendizaje de las matemáticas ocurre cuando los estudiantes se enfrentan a tareas complejas que presentan problemas contextualizados. Durante este proceso, los estudiantes interactúan y se comunican con otros compañeros y el profesor, negociando significados y llegando a acuerdos sobre la solución de tarea. Además, justifican su solución basándose en sus conocimientos y habilidades que poseen.

La postura que adoptamos en cuanto a la enseñanza es resultado de la conceptualización de aprendizaje que hemos asumido. En este aspecto, el profesor debe generar oportunidades para que los estudiantes alcancen las expectativas de aprendizaje y superen limitaciones que puedan enfrentar y una de las formas de generar oportunidades es a través de las tareas, que Gómez y sus colegas la definen como una demanda estructurada y con un propósito de aprendizaje.

En ese contexto, las tareas formuladas se guían por el análisis de instrucción que sugiere Gómez et. al (2018) específicamente nos concentramos en el diseño de tareas, que son analizadas y formuladas considerando los siete elementos sugeridos por el autor: requisitos, metas, formulación, materiales y recursos, agrupamiento, interacción y temporalidad.

Respecto a los requisitos, este se refiere a los conocimientos que los estudiantes deben tener, como conceptos básicos de triángulos y medidas angulares; las metas se centran en desarrollar habilidades de resolución de problemas relacionados con triángulos oblicuángulos; la formulación consiste en las instrucciones dadas por el profesor; los materiales y recursos son todas las herramientas que demandará la tarea, para el caso en cuestión incluye el uso de GeoGebra y materiales manipulativos; el agrupamientos corresponde a la manera de organizar a los estudiantes para llevar a cabo la tarea; la interacción son las maneras en que se espera que los estudiantes y profesores se comuniquen cuando abordan la tarea; y la temporalidad se establece

la duración de la tarea, donde se especifica las fases, etapas y la asignación de tiempos específicos para su desarrollo.

El segundo aspecto que consideramos para el diseño de nuestras tareas es el uso de GeoGebra en la enseñanza de la trigonometría que se fundamenta en la necesidad de abordar las dificultades que enfrentan los estudiantes al comprender conceptos claves de esta disciplina. Por ello, se exponen a continuación los argumentos que respaldan su utilización.

Existen desafíos significativos en el aprendizaje de la trigonometría, ya que los estudiantes enfrentan dificultades para comprender y asimilar los conceptos de esta materia. Entre los problemas identificados se encuentran la falta de justificación, deficiencia en la visualización y conceptos débilmente adquiridos. Estos obstáculos pueden ser abordados mediante el uso de sistemas de geometría dinámica, que facilitan a los alumnos la visualización, construcción y manipulación de figuras, permitiéndoles experimentar y reflexionar sobre los conceptos para una mejor comprensión. Así, esta herramienta debe ser considerada al diseñar tareas de la unidad de trigonometría (Díaz Fernández, 2014).

En ese sentido, GeoGebra se presenta como una herramienta potente que según Sánchez y Borja (2022), ofrece funcionalidades para el desarrollo de habilidades en la resolución de problemas geométricos y trigonométricos. Además, el software no solo fomenta procesos cognitivos, sino que también promueve la argumentación, la visualización, la exploración, la sistematización y la conjetura.

Asimismo, los procesos de aprendizaje se vuelven más eficientes cuando integramos herramientas informáticas que faciliten los análisis matemáticos a través de los procesos visuales. Esto garantiza la conexión del aprendizaje adquirido con la aportación de soluciones matemáticas a los problemas de la sociedad (Sánchez y Borja, 2022).

Finalmente, GeoGebra facilita los procesos de abstracción al mostrar cómo se construye la relación entre un modelo geométrico y un modelo algebraico de soluciones de la vida real. Esto permite encontrar soluciones no solo matemáticas, sino también visuales que representan la solución de un problema específico (Sánchez y Borja, 2022).

Triángulos oblicuángulos y su relevancia en la enseñanza

En este apartado se expone la fundamentación para la elección del triángulo oblicuángulo como objeto de estudio en el contexto matemático. Esta figura geométrica es seleccionada en primer lugar debido al enfoque de competencia delineado en el currículo de la educación media del Paraguay. Este enfoque resalta la necesidad de aprendizaje que se alinee con la utilidad de la trigonometría en diversas ramas de las matemáticas y su aplicabilidad en los distintos campos.

En segundo lugar, se reconoce que la trigonometría a menudo se percibe como una disciplina abstracta, lo que puede desalentar su estudio, sin embargo, al presentarla desde una perspectiva práctica mediante el diseño de tareas contextualizadas que demuestren la aplicabilidad de los conceptos trigonométricos en la resolución de problemas, se puede despertar el interés de los estudiantes y facilitar la comprensión de los conceptos, así como la conexión de los conocimientos teóricos con situaciones reales.

Por último, la inclusión del triángulo oblicuángulo en el currículo oficial, al limitarse al cálculo de algoritmos no responde al enfoque de competencia, ya que se restringe a la aplicación de leyes y fórmulas para su resolución. Esta restricción impide que los estudiantes desarrollen habilidades más amplias y complejas para enfrentar problemas que involucren triángulos oblicuángulos en diversos contextos. Por lo tanto, se opta por seleccionar este objeto de estudio con el propósito de diseñar tareas que ofrezcan perspectivas alternativas, permitiendo a los

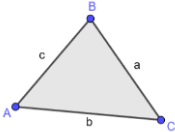
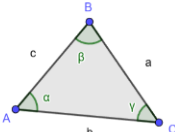
estudiantes establecer conexiones y reflexiones sobre su propio aprendizaje, lo que a su vez promueva su capacidad para resolver problemas desde diferentes alternativas.

Triángulos oblicuángulos: Definición, elementos y propiedades

Para los fines de este estudio, se construye la siguiente estructura de los conceptos que involucra el objeto matemático, los cuales son la definición de triángulos, los triángulos oblicuángulos, ángulos internos y externos, las relaciones trigonométricas y las leyes del seno y coseno, la construcción de triángulos dados sus elementos (lados y ángulos).

A continuación, se presenta la tabla 1 que sintetiza las definiciones necesarias para el estudio de los triángulos oblicuángulos y su aplicación en la resolución de problemas.

Tabla 1
Definición, elementos y propiedades

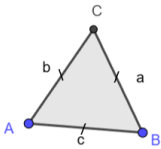
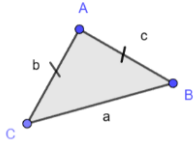
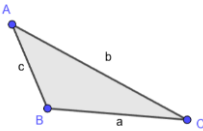
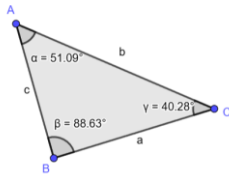
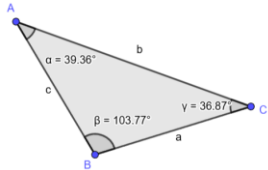
<p>Un triángulo es la región del plano limitada por tres segmentos de recta que se cortan dos a dos en tres puntos no colineales. Si A, B y C son tres puntos no colineales, el triángulo ABC, que se denota ΔABC, es la región finita del plano limitada por los segmentos de recta AB, BC y AC.</p>	
<p>Los elementos del triángulo que se tendrán cuenta son los siguientes:</p>	
<p>Vértice: Los puntos A, B y C se llaman vértices del triángulo.</p>	
<p>Ángulo: Un ángulo es la abertura formada por dos semirrectas, o rayos, que tienen un extremo común.</p>	
<p>Lados: Los segmentos de recta AB, BC y AC se llaman lados del triángulo.</p>	
<p>Triángulos Oblicuángulos: Los triángulos oblicuángulos son aquellos triángulos que no tienen ángulos rectos.</p>	

Nota: Fuente adaptada de Correa et al. (2015)

En la Tabla 2, se presenta la clasificación de los triángulos oblicuángulos, que están involucrados en el diseño de las tareas propuestas en este estudio. Esta clasificación incluye no solo la descripción de sus características geométricas, sino también las propiedades específicas que los distinguen dentro del contexto trigonométrico.

Tabla 2

Clasificación de triángulos oblicuángulos

Según sus lados		
Equilátero: El triángulo que tiene tres lados congruentes.		Todos sus ángulos son congruentes
Isósceles: El triángulo que tiene dos lados congruentes.		Los ángulos opuestos a los lados congruentes también son congruentes
Escaleno: el triángulo que no tiene ningún lado congruente.		No hay dos ángulos que tengan la misma medida
Según sus ángulos		
Triángulo acutángulo: El triángulo que tiene los tres ángulos agudos.		Si tiene dos ángulos congruentes entonces es un triángulo isósceles. Si ningún ángulo es congruente, entonces es un triángulo escaleno. Si sus tres ángulos son congruentes entonces es un triángulo equilátero.
Triángulo obtusángulo: El triángulo que tiene un ángulo obtuso.		Si tiene dos ángulos congruentes entonces es un triángulo isósceles. Si ningún ángulo es congruente, entonces es un triángulo escaleno.

Nota: Fuente adaptada de Correa et al. (2015)

Proceso de resolución del triángulo oblicuángulos

La resolución de triángulos oblicuángulos es el proceso de calcular los lados y ángulos del triángulo. Existen teoremas o leyes y procedimientos que permiten realizar los cálculos, dependiendo de los datos que se tenga del triángulo en estudio. Entre estos se destaca el teorema del seno y teorema del coseno.

El teorema del seno establece una relación proporcional entre los lados de un triángulo y el seno de sus ángulos opuestos. La misma es útil en casos donde se conocen dos ángulos y un lado o dos lados y un ángulo opuesto. La expresión matemática es la siguiente:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}}$$

donde a, b y c son los lados del triángulo opuesto a los ángulos \hat{A}, \hat{B} y \hat{C} respectivamente.

El teorema del coseno permite calcular un lado de un triángulo en función de los otros dos lados y el coseno del ángulo comprendido entre ellos. Es aplicable en situaciones donde se conocen dos lados y el ángulo comprendido o los tres lados del triángulo. Su expresión matemática es:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A} \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{B} \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C} \end{aligned}$$

donde a, b y c son los lados del triángulo opuesto a los ángulos \hat{A}, \hat{B} y \hat{C} respectivamente.

Desde el enfoque del currículo de la educación media de Paraguay, se presentó los fundamentos teóricos que sustentan este trabajo, destacando la resolución de problemas como competencia esencial y la relevancia de los triángulos oblicuángulos en el aprendizaje matemático. Se examinó el concepto de competencia y las capacidades descritas en el currículo de Paraguay que orientan la enseñanza matemática mediante habilidades como argumentación y modelación. La importancia de los triángulos oblicuángulos se aborda en términos de su aplicación en problemas reales, promoviendo un aprendizaje contextualizado que favorece la competencia de resolución de problemas.

CAPÍTULO IV. Marco Metodológico

La metodología empleada en este trabajo se fundamenta en el análisis de Instrucción propuesto por Gómez et al. (2018), el cual se enfoca en el diseño, descripción y análisis de las tareas de aprendizaje en matemáticas. Dado que este estudio no abarca la implementación de dichas tareas, el análisis se centra exclusivamente en su diseño. Este proceso permite planificar tareas que promuevan la aplicación de conocimientos previos, la identificación de errores, y prever posibles intervenciones o estrategias pedagógicas que los profesores podrían emplear al abordar dichas tareas en el aula.

En este contexto, las etapas del estudio se definieron tomando en cuenta los siguientes aspectos: revisión bibliográfica sobre el fenómeno de estudio, diseño de las tareas y análisis a priori de las mismas. A continuación, se detallan los momentos que se llevaron a cabo para el desarrollo del estudio.

En el primer momento, la revisión bibliográfica, se realizó una exploración anticipada y reflexiva sobre los fenómenos de indagación lo que nos permitió abordar un diseño de tareas acorde a las necesidades y propósitos del estudio, así como comprender diversas formas de promover en los estudiantes la competencia de resolución de problemas, desarrollando habilidades entorno a la argumentación y a la modelación, utilizando las medidas de longitud y amplitud angular de triángulos oblicuángulos.

Con relación a la resolución de problemas la asumimos como una competencia, tal como lo define Pettersen y Nortvedt (2017), puesto que no solo pretendemos que los estudiantes se limiten al dominio de conocimientos, procedimientos y conceptos, sino que abarquen habilidades como la modelación y la argumentación. En cuanto a la argumentación, utilizamos el modelo de

Toulmin adecuado por el grupo AEG (Molina et al., 2024); y para la modelación, seguimos el ciclo propuesto por Bronw y Stillman.

En el segundo momento, el diseño de tareas, estas están pensadas para estudiantes del primer curso de la educación media de Paraguay. Se diseñaron tareas de conexión y de reflexión, de naturaleza abierta y problemas contextualizados (Gusmão, 2020). Estas tareas atienden el propósito de nuestro trabajo: promover la habilidad de resolución de problemas mediante la argumentación y la modelación.

El diseño de las tareas fue guiado por el análisis de instrucción sugerido por Gómez et al. (2018), centrándose en los siete elementos descritos en el marco teórico (requisitos, metas, formulación, materiales y recursos, agrupamiento, interacción y temporalidad). A continuación, se relacionan con el diseño de tareas efectuado en este trabajo:

Requisitos: contemplan los conocimientos y habilidades previas que los estudiantes necesitan para abordar las tareas. Esto incluye conocimientos básicos sobre triángulos y medidas angulares, así como habilidades en geometría y trigonometría.

Metas: Las metas de las tareas están orientadas al desarrollo de habilidades específicas en la resolución de problemas relacionados con triángulos oblicuángulos, apoyadas en dos habilidades matemáticas: argumentación y modelación, que según Solar (2009) son necesarios para abordar problemas matemáticos. En este estudio, se prioriza la capacidad de los estudiantes para argumentar sobre las soluciones del problema, y la habilidad para representar situaciones cotidianas en modelos matemáticos.

Formulación: La formulación de las tareas incluye instrucciones claras y precisas que guían a los estudiantes en el proceso de resolución de problemas. Cada tarea describe

detalladamente el problema, situándolo en un contexto real y aplicable al entorno de los estudiantes. Los problemas requieren la aplicación de teoremas del seno y del coseno, y están apoyados en el uso de herramientas como GeoGebra para ilustrar y explorar las situaciones planteadas (Fiallo y Parada, 2018).

Las tareas son de naturaleza abierta y presentan un desafío cognitivo que fomenta la modelación matemática. Esto estimula a los estudiantes a explorar diversas estrategias y soluciones, siguiendo la propuesta de Gusmão (2020), lo que refuerza su habilidad para resolver problemas de manera creativa y flexible.

Materiales y recursos: se incorporó el uso de GeoGebra para desarrollar habilidades de modelación, además de materiales manipulativos para apoyar la comprensión y promover argumentaciones de los problemas planteados.

Agrupamiento: aunque las tareas no serán implementadas, el agrupamiento recomendado para su ejecución sugiere el trabajo en grupos pequeños, lo que facilita la colaboración y el intercambio de ideas entre los estudiantes. Esto tiene como objetivo fortalecer las habilidades de argumentación a través de la interacción entre compañeros.

Interacción: la interacción propuesta incluye discusiones grupales, sesiones de preguntas y respuestas, y la socialización y debate de las soluciones encontradas a los problemas planteados.

Temporalidad: aunque las tareas no se implementarán en esta fase, se diseñaron para realizarse en seis sesiones de clases, con una carga de cinco horas pedagógicas semanales, un total de 30 horas pedagógicas.

Finalmente, en el último momento se analizaron los posibles efectos de la implementación de las tareas. Este análisis consideró los logros que podrían alcanzar los estudiantes, así como las dificultades que podrían surgir durante la implementación a futuro.

Categoría de análisis de las tareas

En este apartado se presenta una evaluación anticipada de los aspectos que podrían influir en el aprendizaje y la enseñanza, antes de la implementación de las tareas. Para este propósito, se abordarán las siguientes categorías:

Logros de los estudiantes: En esta sección se identifican las competencias que los estudiantes podrían desarrollar como resultado de la aplicación de las tareas diseñadas. Se analiza como la metodología propuesta podría fomentar habilidades como la argumentación, la modelación y la resolución de problemas matemáticos.

Dificultades potenciales: en esta parte se explora los posibles obstáculos que podrían surgir durante la implementación de las tareas. Se identifica dos categorías de dificultades propuesta por Socas (citado en Gómez et al. 2018). La primera se refiere a las complicaciones inherentes a la complejidad de los conceptos matemáticos, que incluyen tanto su naturaleza teórica como práctica, así como las diversas formas de representación y las relaciones entre ellas, intensificadas por la complejidad del lenguaje matemático. La segunda categoría se centra en las dificultades asociadas con los procesos del pensamiento matemático, donde el razonamiento fundamental de las matemáticas genera problemas en la construcción de argumentos. Se consideró estas dos categorías porque están vinculadas directamente con el objeto matemático, que constituye el interés central de este trabajo.

Intervenciones del profesor: Esta categoría describe las acciones o estrategias que el profesor puede llevar a cabo para guiar a los estudiantes en la superación de errores o dificultades que puedan surgir al abordar las tareas. Esto incluye la orientación sobre las estrategias de solución que los estudiantes pueden aplicar, así como la identificación y corrección de posibles errores.

Población

El diseño de las tareas en este trabajo se fundamentó en criterios específicos orientados a promover habilidades de resolución de problemas, con un enfoque en el desarrollo de la capacidad de los estudiantes para argumentar y modelar situaciones matemáticas con sus características particulares. En un futuro estas tareas serán implementadas con la población descrita, como compromiso con Becal. Las tareas están dirigidas a estudiantes del primer año (de entre 14 y 15 años) de la educación media en los Colegios: Colegio Nacional San Miguel Arcángel y Colegio Nacional Rigoberto Caballero, instituciones públicas de Paraguay ubicadas en los departamentos de Caaguazú y Ñeembucú respectivamente. Este nivel educativo corresponde al inicio de su educación secundaria, una etapa en la que comienzan a consolidar conocimientos más abstractos y complejos en matemáticas.

Al considerar las particularidades de esta población, el diseño asegura que las tareas sean adecuadas tanto para el contexto como para las necesidades del grupo de estudiantes. De este modo, se proyecta que, en teoría, las tareas permitan a los estudiantes beneficiarse de una metodología que fomente la argumentación y modelación en el proceso de aprendizaje matemático.

CAPÍTULO V. Tareas y análisis de resultados

Este capítulo presenta el diseño y análisis de tareas orientadas a desarrollar habilidades de resolución de problemas en estudiantes de primer curso de la Educación Media, centrándose en el uso de triángulos oblicuángulos. Las tareas emplean herramientas como el teorema del seno, el teorema del coseno y el software GeoGebra, promoviendo la modelación y argumentación matemática. Con las cinco tareas propuestas, se presenta las respuestas esperadas de los estudiantes, identificando las dificultades y errores más comunes en el proceso de resolución. Además, se describen las intervenciones pedagógicas que el docente puede implementar para apoyar el aprendizaje, ofreciendo sugerencias para optimizar las tareas. Finalmente, se analiza la efectividad del diseño en el logro de los objetivos del estudio, destacando tanto los avances alcanzados como las áreas que requieren mejoras en futuras propuestas.

Diseño de tareas

En este capítulo se expone cinco tareas que se alinean con los objetivos del trabajo. Estas tareas se desarrollan siguiendo el modelo de análisis de la instrucción propuesto por Gómez et al. (2018), el cual se centra en siete elementos fundamentales que constituyen la base estructural de dichas tareas. Este enfoque detallado permite desglosar cada componente de la tarea, asegurando que cada aspecto contribuya de manera efectiva al desarrollo de competencias en la resolución de problemas.

En esta sección, se presenta inicialmente una descripción general de los elementos comunes de las tareas. Luego, se describen las tareas diseñadas, considerando sus aspectos particulares, y se enuncian los objetivos que se espera alcanzar con cada una, seguidos de su formulación. Estos enunciados están organizados en tablas, junto con el análisis de las posibles respuestas esperadas, los conceptos geométricos y/o trigonométricos vinculados a la tarea, y las

dificultades o errores que los estudiantes podrían enfrentar. Finalmente, se incluye la tabla 8 sobre las posibles intervenciones del profesor para ayudar a los estudiantes a superar dichas dificultades o corregir los errores que podrían surgir al abordar la tarea.

La primera tarea está enfocada en la aplicación del teorema del seno para resolver problemas, apoyándose en algunas herramientas de GeoGebra. La segunda tarea se centra en la resolución de problemas utilizando los teoremas del seno y del coseno, ambas tareas están basadas en el mismo contexto: la situación de una rueda de la fortuna.

La tercera tarea se enfoca en aplicar el teorema del coseno para resolver problemas con triángulos oblicuángulos, utilizando materiales concretos como pajitas e hilo. La cuarta tarea tiene como objetivo mostrar la aplicación del teorema del coseno en la resolución de problemas dentro del contexto paraguayo. Finalmente, la última tarea, que es una tarea de evaluación, vuelve a plantear situaciones que requieren el uso de los teoremas del seno y del coseno, vinculadas al contexto de Paraguay.

Descripción de los elementos comunes de la tarea

Las cinco tareas diseñadas poseen enunciados y características específicas. Sin embargo, también comparten elementos comunes, ya que han sido creados con el objetivo de promover la competencia en resolución de problemas. A continuación, se describen estas características comunes.

Descripción general de los requisitos: para llevar a cabo las tareas, consideramos que los estudiantes necesitan contar con los siguientes conocimientos:

- **Conocimiento sobre trigonometría y geometría:** es importante que los estudiantes estén familiarizados sobre las notaciones de lados y ángulos y representaciones gráficas de

triángulos y circunferencias que se explorará en cada tarea. Además, deben conocer el teorema del seno y teorema del coseno y su campo de aplicación.

- Procedimientos: Los estudiantes deben estar familiarizados con procedimientos matemáticos como el de resolver ecuaciones algebraicas, simplificar expresiones trigonométricas, uso adecuado de las propiedades geométricas para calcular ángulos desconocidos dentro de un triángulo.
- Destrezas: para abordar las tareas los estudiantes deben tener la habilidad de realizar construcciones y exploraciones en GeoGebra, plantear y resolver ecuaciones trigonométricas.

Descripción general de las metas: en general, necesitamos promover en los estudiantes el desarrollo de habilidades en la resolución de problemas mediante la modelación matemática y la argumentación. Pretendemos fomentar esto a través de la representación y análisis de situaciones físicas en un entorno geométrico utilizando GeoGebra o lápiz y papel. Las actividades incluyen la aplicación de conceptos geométricos y trigonométricos para identificar relaciones entre elementos de los triángulos oblicuángulos, facilitando la transición de situación real a un contexto matemático. Se espera que los estudiantes fortalezcan su capacidad de visualización espacial y argumentación matemática.

A continuación, presentamos la descripción de las metas propuestas para cada tarea diseñada, lo cual nos permite resaltar las habilidades específicas que se desea trabajar en cada una de ellas.

- Meta de la tarea 1: Esta pretende que los estudiantes representen situaciones físicas en un entorno geométrico utilizando GeoGebra. Con la misma se pretende que fortalezcan su habilidad de representar situaciones reales a un lenguaje matemático, también que puedan

aplicar el teorema del seno para validar soluciones aproximadas con GeoGebra y argumentando sobre los procedimientos empleados.

- Meta de la tarea 2: Esta tarea tiene como propósito desarrollar la habilidad para identificar, según los datos proporcionados, el teorema más adecuado para modelar la situación y reconociendo también la posibilidad de utilizar otros métodos para llegar a la solución.
- Meta de la tarea 3: Esta tarea tiene el propósito de desarrollar la habilidad de los estudiantes para analizar y argumentar sobre las propiedades de los triángulos utilizando la relación entre los lados y los ángulos. A través de la construcción de un triángulo con material manipulativo, los estudiantes aplicarán las mediciones y su conocimiento geométrico para identificar el tipo de triángulo y, posteriormente, validar los resultados utilizando una herramienta matemática adecuada.
- Meta de la tarea 4: el propósito de esta tarea es modelar situaciones reales utilizando el teorema del coseno para resolver problemas relacionados con triángulos oblicuángulos. A través de esta actividad, se espera que los estudiantes desarrollen la habilidad de aplicar conceptos matemáticos en diversos contextos. Y a su vez que los estudiantes construyan un argumento matemático correspondiente al análisis de cómo las variaciones en los ángulos de un triángulo afectan las longitudes de sus lados.
- Meta de la tarea 5: el propósito de esta tarea es evaluar la habilidad de los estudiantes para modelar situaciones reales donde deberán aplicar el teorema del seno y del coseno para calcular distancias en un triángulo oblicuángulo. A su vez, se pretende evaluar la habilidad de los estudiantes para construir argumentos que justifiquen los resultados obtenidos y reflexionen sobre ellos.

Descripción general de la formulación de la tarea: se proporcionará al estudiante una guía con la formulación del problema y algunas instrucciones sobre cómo proceder para cada actividad. Las instrucciones comunes a cada tarea es que modelen las situaciones planteadas en la guía, utilizando material concreto o GeoGebra y que expliquen los procedimientos aplicados.

Descripción general del agrupamiento e interacción: Inicialmente, sugerimos que los estudiantes trabajen en grupos de tres para desarrollar las tareas. Posteriormente, se realizará la socialización en un grupo más grande. Se entregará a los estudiantes una página impresa que contendrá la formulación del problema, la cual deberán leer y analizar. Después de un tiempo adecuado, el profesor brindará algunas aclaraciones. Los estudiantes discutirán sus puntos de vista y propondrán una conjetura sobre las posibles soluciones al problema. Cada grupo podrá solicitar la orientación al profesor cuando lo considere necesario. El profesor se acercará a cada grupo para ofrecer las ayudas necesarias. Varios grupos presentarán sus resultados a toda la clase, y estos serán validados por los demás grupos, con la orientación del profesor durante todo el proceso.

Descripción general de la temporalidad: Para la construcción, observación e identificación del tipo de triángulo se destinarán 20 minutos. A continuación, los estudiantes tendrán 25 minutos para las discusiones en grupo y el consenso de la respuesta que compartirán con los compañeros del salón. Para socializar las respuestas consensuadas se preverán unos 10 minutos. Finalmente, se destinarán 35 minutos a la construcción de la argumentación.

Descripción general de materiales y recursos: para llevar a cabo las tareas propuestas, se sugiere utilizar GeoGebra o construcciones a papel de manera indistinta. Esta flexibilidad ofrece a los estudiantes diferentes herramientas para modelar las situaciones dadas, lo que los ayuda a desarrollar la capacidad de abordar problemas desde métodos diversos. Al permitir que elijan la

herramienta que mejor se ajuste a su estilo de aprendizaje o a las características de la tarea específica, se fomenta su autonomía y creatividad en la resolución de problemas.

Además, consideramos que la integración de recursos tecnológicos, como GeoGebra, permitirá a los estudiantes trabajar de manera activa y colaborativa. Al interactuar con los conceptos matemáticos, los estudiantes pueden experimentar con distintos escenarios y observar los resultados en tiempo real, lo que les brinda ejemplos concretos para construir y respaldar sus argumentos. Por eso, las tareas están diseñadas para combinar diferentes herramientas, ya sea GeoGebra o construcciones a papel. Sin embargo, algunas de ellas están orientadas exclusivamente trabajar con GeoGebra, enfocándose en la representación y en la aproximación de soluciones.

En este sentido, presentamos los materiales y recursos que serán comunes a todas las tareas. En los casos en que se requieran materiales específicos, se describirán en detalle junto con la tarea correspondiente, como sucede con la tarea 3. Los materiales y recursos generales son los siguientes:

- Para tareas que utilicen geometría dinámica, se necesitarán computadoras o dispositivos móviles con GeoGebra instalado.
- Para tareas que involucren construcciones a mano, se requerirán regla, compás y transportador.
- Materiales de referencia sobre geometría y trigonometría, como libros de texto y apuntes de clase sobre relaciones y razones trigonométricas.

A continuación, presentamos de manera detallada cada una de las tareas atendiendo a los elementos antes expuestos:

Primera tarea: Aplicación del teorema del seno o del coseno

Esta tarea fue diseñada para que los estudiantes modelen una situación real mediante la aplicación del teorema del seno o coseno para la resolución del problema. La tarea consta de dos etapas: en la primera, se enfatiza la simplificación de la situación y algunos aspectos de la matematización mediante el uso de GeoGebra. Esta herramienta permitirá a los estudiantes visualizar la problemática y formular una aproximación preliminar a la solución. En la segunda etapa, el enfoque se traslada al teorema del seno y la construcción de argumentos matemáticos que permitan interpretar y validar el resultado obtenido. De este modo, se promueven dos habilidades clave para la resolución de problemas: la modelación y la argumentación.

Presentamos los objetivos de aprendizaje, con el enunciado, las respuestas esperadas por los estudiantes y las posibles dificultades y/o errores que podrían tener.

Objetivos de aprendizaje

Modelar situaciones reales utilizando GeoGebra y la aplicación del teorema del seno y el teorema del coseno en la resolución de problemas que involucre triángulos oblicuángulos.

Elaborar argumentos matemáticos que justifiquen los procedimientos empleados en la modelación de problemas con triángulos oblicuángulos.

Tabla 3

Tarea 1. Adaptación de la actividad 5 de Fiallo y Parada (2018), pág. 179

Una persona está paseando en una rueda de la fortuna que tiene un radio de 10 metros, la cual gira en sentido antihorario desde la perspectiva de un observador. En un momento dado, la persona se encuentra en una posición tal que el ángulo formado entre el centro de la rueda, la posición de la persona y el punto más bajo de la rueda (que está a 1 metro del suelo) es de 30° .	
<ol style="list-style-type: none">1. Utilizando GeoGebra, representa la rueda de la fortuna y determina la distancia entre el punto más bajo de la rueda y la posición de la persona.2. ¿Se puede validar la solución obtenida en GeoGebra por medio de procedimientos matemáticos? Escribe las razones.	
Respuestas deseables o esperadas por los estudiantes	Posibles errores o dificultades de los resultados presentados por el estudiante

Simplificación del problema:

Se espera que los estudiantes hagan una representación a escala de la situación real iniciando con la identificación de los datos dados por el problema.

- Circunferencia con centro y radio 10.
- Identificación de dos puntos sobre la circunferencia (la persona y el punto más bajo de la rueda).
- Ángulo de 30° entre el centro de la rueda (A), la persona (B) y el punto más bajo (C).

Seguido a eso, que identifiquen que dentro la circunferencia hay un triángulo, que visualicen los elementos del triángulo, y las medidas de los lados y ángulos. Además de esto, el estudiante debe reconocer que la distancia aproximada de la persona y el punto más bajo es 17,32 metros.

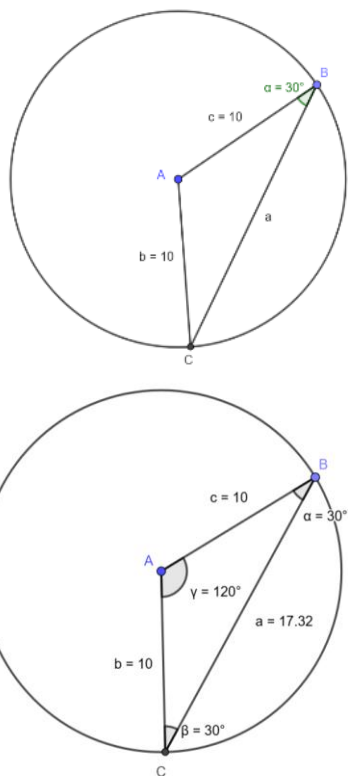


Figura 1: Construcciones a escala en GeoGebra

Los conceptos geométricos trabajados son la construcción de la circunferencia y del triángulo, y el ángulo formado por los segmentos.

Matematización del problema:

Se espera que los estudiantes verifiquen por medio de un procedimiento matemático la solución obtenida en GeoGebra. En este ciclo se espera que los estudiantes elaboren sus argumentos (A_n siendo "n" el número de argumentos) teniendo en cuenta los tres elementos (*datos, aserción y garantía*).

- A1: Los lados b y c del triángulo ABC están formados por el radio de la circunferencia, por lo tanto, son iguales.
- A2: Los lados b y c del triángulo son iguales, por lo tanto, el triángulo es isósceles.

Dificultades asociadas a los objetos matemáticos Socas (1997, citado en Gómez et al. 2018)

- o Los estudiantes podrían situar el ángulo en un punto equivocado del triángulo.
- o Los estudiantes podrían no distinguir que el punto más bajo está alineado verticalmente con el centro de la circunferencia y no fuera de ella.
- o Podrían no comprender que el valor 17,32 corresponde a la distancia entre la persona y el punto más bajo de la rueda.

Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento Socas (1997, citado en Gómez et al. 2018)

- o Dificultades para comprender la necesidad de una representación a escala.
- o Los estudiantes podrían tener dificultades para representar la posición de la persona bajo un ángulo de 30° .
- o Podrían tener problemas de interpretación lo que dificulta la capacidad del estudiante para visualizar y construir una representación coherente con los datos del problema.
- o Problemas en la interpretación del sentido antihorario de la rueda.

Dificultades asociadas a los objetos matemáticos Socas (1997, citado en Gómez et al. 2018)

- No reconocer que el triángulo formado es isósceles, la dificultad puede estar en identificar que las medidas de los lados iguales (radios) determinan que el triángulo es isósceles, lo que afecta el resto de los cálculos.
- Podrían no identificar que el ángulo de 30° en la base del triángulo es congruente con el ángulo opuesto al otro radio de 10 metros, que también es de 30° .
- Los estudiantes podrían no entender que, necesitan hallar el valor del ángulo \hat{A} antes de aplicar el teorema del seno o del coseno.

<p>A3: Como el triángulo es isósceles los ángulos opuestos (formado en B y C) a los lados b y c son congruentes.</p> <p>A4: Como el ángulo formado en C es congruente con el ángulo formado en B y éste mide 30°, por lo tanto, el ángulo formado en C es igual a 30°.</p> <p>Luego se espera que el estudiante reconozca la propiedad de la suma de los ángulos internos de un triángulo y calcule el tercer ángulo, realizando el siguiente procedimiento:</p> $\widehat{BAC} + \widehat{ACB} + \widehat{ABC} = 180^\circ$ $\widehat{BAC} = 180^\circ - (\widehat{ABC} + \widehat{ACB})$ $\widehat{BAC} = 180^\circ - (30^\circ + 30^\circ)$ $\widehat{BAC} = 120^\circ$ <p>A partir de estos descubrimientos, se espera que reconozcan que por medio del teorema del seno se puede calcular la distancia entre C y B, atendiendo los datos. Luego que apliquen el teorema del seno.</p> $\frac{a}{\text{Sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{Sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{Sen } \hat{C}}$ $\frac{a}{\text{Sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{Sen } \hat{B}}$ $\frac{a}{\text{Sen } 120^\circ} = \frac{10}{\text{Sen } 30^\circ}$ $a = \frac{10 \cdot \text{sen } 120^\circ}{\text{sen } 30^\circ}$ $a \approx 17,32$ <p>Por otra parte, el problema también puede ser resuelto por el teorema del coseno, y se espera que algunos de los grupos de estudiantes opten por usar este procedimiento.</p> <p>Concepto trigonométrico involucrado:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Teorema del seno - Triángulo isósceles: dos lados congruentes - Congruencia de ángulos: ángulos opuestos a lados iguales son congruentes - Suma de ángulos internos de un triángulo. 	<p>Algunos estudiantes podrían utilizar términos matemáticos incorrectos o de manera confusa para formular sus argumentos.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Los estudiantes podrían tener dificultad para identificar los datos que son relevantes para el argumento. <p><i>Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento Socas (1997, citado en Gómez et al. 2018)</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Dificultad para aplicar el razonamiento lógico necesario para usar la propiedad de la suma de los ángulos internos en un triángulo, es decir, no reconocer que se puede hallar el valor del tercer ángulo por la propiedad. - Podrían no reconocer que se puede usar el teorema del coseno o del seno para calcular la distancia requerida y validar la solución de GeoGebra. - Los estudiantes podrían tener dificultades para identificar correctamente qué lados y ángulos utilizar para aplicar el teorema del seno o coseno. - Los estudiantes podrían tener problemas en la ejecución de procedimientos algebraicos y en la secuenciación de pasos necesarios para obtener el resultado correcto como despejar una variable o realizar operaciones aritméticas básicas. - Los estudiantes podrían presentar argumentos matemáticos incompletos (carece de dato o aseveración). - Podrían no emplear correctamente la garantía o los datos para llegar a una aseveración correcta. - Los estudiantes pueden tener problemas para comunicar sus ideas por la falta de práctica en el uso de un lenguaje formal y riguroso de las matemáticas.
<p><i>Interpretación</i></p> <p>En este punto, es importante señalar que la interpretación del problema puede ser realizada por los estudiantes en cualquiera de los ciclos del proceso de modelación. Sin embargo, para mantener la organización y claridad en la estructura del trabajo, la descripción de las respuestas deseadas se incluye en esta parte del cuadro.</p> <p>Se espera que, al comparar los resultados obtenidos en GeoGebra y por teorema del seno o del coseno los estudiantes hagan la siguiente interpretación o similar a ella: Como el problema involucra un triángulo isósceles, que tiene dos ángulos agudos y uno obtuso y la distancia que se desea calcular es el lado opuesto al ángulo de mayor amplitud, por lo tanto, la distancia debe ser mayor que los lados congruentes del triángulo, por lo que la solución obtenida de 17,32 metros resulta coherente y válida como respuesta al problema.</p> <p><i>Validación del resultado</i></p> <p>En este ciclo, se espera que los estudiantes validen la solución del problema comparando sus resultados y procesos con los de sus demás compañeros. Este intercambio les permitirá identificar si sus respuestas coinciden, si hay</p>	<p><i>Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos</i></p> <ul style="list-style-type: none"> ○ Los estudiantes pueden tener dificultad en la interpretación de como los ángulos afectan la longitud de los lados <p><i>Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático</i></p> <ul style="list-style-type: none"> ○ Los estudiantes pueden tener dificultad para evaluar la calidad de las soluciones obtenidas, especialmente si no se les ha enseñado a reflexionar sobre la efectividad de los modelos matemáticos empleados.

discrepancias o si es necesario replantear el modelo matemático construido. Además, se busca que los estudiantes dialoguen sobre la efectividad de los modelos desarrollados, evaluando cual fue más efectivo, sencillo o preciso en la resolución del problema.	
--	--

Segunda tarea: Tareas relacionadas con el teorema del coseno y del seno

El teorema del coseno y del seno son una relación fundamental en trigonometría que relaciona las longitudes de los lados de un triángulo con el coseno o seno de sus ángulos. Estos teoremas son especialmente útiles para resolver triángulos que no son rectángulos. Con la tarea que proponemos, buscamos que los estudiantes comprendan y apliquen conceptos trigonométricos a través de la exploración, desarrollen habilidades en la formulación de expresiones matemáticas, utilicen distintos métodos de resolución y validen modelos matemáticos mediante el cálculo. De este modo, el triángulo se convierte en un objeto de exploración y, al mismo tiempo, en una herramienta para resolver problemas.

Objetivo de aprendizaje

Utilizar estrategias de modelación matemática para resolver problemas relacionados con triángulos oblicuángulos, aplicando el teorema del coseno y el teorema del seno.

Tabla 4

Tarea 2. Tareas relacionadas con el teorema del coseno

En una rueda de la fortuna de radio 10 metros en el que se conoce la amplitud del ángulo formado entre los ejes que sostienen las cabinas consecutivas. Analiza la siguiente situación.	
<ol style="list-style-type: none"> 1. Formula una expresión matemática que permita calcular la distancia entre las dos cabinas. 2. ¿Existe otra expresión matemática que permita calcular la distancia entre las dos cabinas? Si es así, escribe la expresión matemática correspondiente. 3. Cómo podrías garantizar que las expresiones matemáticas construidas son válidas. 	
Respuestas deseables o esperadas por los estudiantes	Posibles errores o dificultades de los resultados presentados por el estudiante
<p><i>Simplificación de la situación</i></p> <p>Se espera que los estudiantes reconozcan los datos del problema como la amplitud del ángulo y el radio de la rueda que sostienen las dos cabinas y a partir de ella hagan sus construcciones ya sea empleando lápiz y papel o GeoGebra.</p>	<p><i>Dificultades asociadas a la complejidad del objeto matemático</i></p> <ul style="list-style-type: none"> ○ Los estudiantes podrían confundir el ángulo central con los ángulos internos del triángulo formado por el centro de la rueda y las cabinas. ○ Los estudiantes pueden tener dificultades para diferenciar el radio (la distancia desde el centro de la rueda hasta las cabinas) y la cuerda (la distancia entre las dos cabinas)

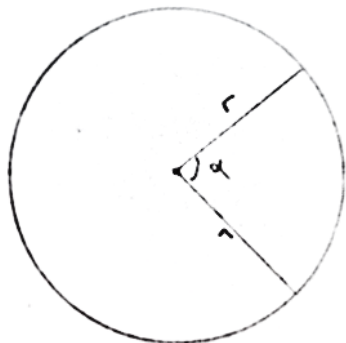
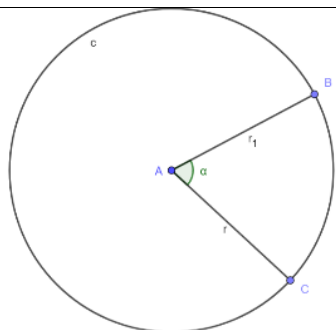


Figura 2: Construcciones en GeoGebra y lápiz y papel

Luego que puedan identificar la distancia de las dos cabinas como la incógnita del problema y a partir de eso identificar el triángulo formado.

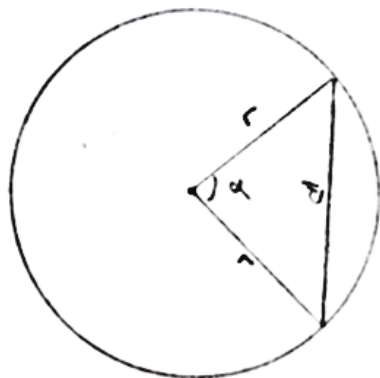
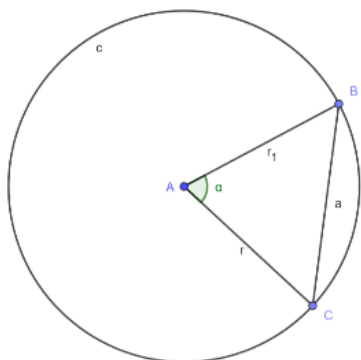


Figura 3: Construcciones del triángulo en GeoGebra y lápiz y papel

Concepto matemático involucrado es:

- Los estudiantes pueden confundir la distancia radial (del centro a cada cabina) con la distancia entre las cabinas mismas, que no es constante y depende del ángulo entre ellas.

Dificultades asociadas a los procesos del pensamiento matemático

- Los estudiantes pueden tener problemas para interpretar los datos (el ángulo y el radio) para hacer las representaciones gráficas en GeoGebra o en papel.
- Pueden tener dificultades para identificar la distancia entre las dos cabinas como la incógnita del problema.
- Los estudiantes podrían no relacionar adecuadamente los datos proporcionados (radio, ángulo) con las características geométricas de la figura.

<p>- Construcción de circunferencia: radio y centro - Ángulo central de la circunferencia - Construcción de triángulo</p>	
<p><i>Matematización del problema</i> Después de identificar el triángulo, se espera que los estudiantes elijan un método de resolución que les permita formular la expresión matemática solicitada. Dado que esta tarea puede resolverse utilizando el teorema del seno o el teorema del coseno, pueden surgir dos casos: Caso 1: Si los estudiantes reconocen que tienen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos, condiciones suficientes para aplicar el teorema del coseno, se espera que escriban la fórmula correspondiente, relacionen los datos proporcionados con la fórmula y luego realicen las operaciones algebraicas necesarias.</p> $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos a$ $a^2 = r^2 + r^2 - 2 \cdot r \cdot r \cdot \cos a$ $a^2 = 2r^2 - 2r^2 \cos a$ $a^2 = 2r^2(1 - \cos a)$ $a = \sqrt{2r^2(1 - \cos a)}$ $a = r\sqrt{2(1 - \cos a)}$ <p>Y como $r = 10$, por lo tanto: $a = 10\sqrt{2(1 - \cos a)}$</p> <p>Caso 2: Si los estudiantes identifican que el triángulo formado es isósceles, ya que dos de sus lados corresponden al radio de la circunferencia y, por lo tanto, son iguales, podrán aplicar el teorema del seno siguiendo los siguientes razonamientos y cálculos: - Dado que dos de los lados del triángulo son el radio de la circunferencia, el triángulo es isósceles. - Al tener dos lados congruentes, los ángulos opuestos a estos lados también deben ser congruentes - Reconociendo que hay dos ángulos congruentes, los estudiantes deben aplicar la propiedad de la suma de los ángulos internos del triángulo para determinar el valor del tercer ángulo, y expresarlo en función del ángulo conocido.</p> $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ $\alpha + 2\beta = 180^\circ$ $2\beta = 180^\circ - \alpha$ $\beta = \frac{180^\circ - \alpha}{2}$ $\beta = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ <p>- Finalmente, al formular la expresión matemática, los estudiantes deben aplicar el teorema del seno, estableciendo la relación entre los ángulos y lados correspondientes para calcular la distancia entre las cabinas</p> $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{r}{\sin \beta} = \frac{r}{\sin \beta}$ $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{r}{\sin \beta}$ $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{r}{\sin \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}$ $a = \frac{r \cdot \sin \alpha}{\sin \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}$ <p>Y como $r = 10$, por lo tanto: $a = \frac{10 \cdot \sin \alpha}{\sin \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}$</p>	<p><i>Dificultades relacionadas con la complejidad del objeto matemático</i></p> <ul style="list-style-type: none"> ○ Los estudiantes pueden tener problemas para traducir la situación verbal y visual (la circunferencia, los radios, el ángulo) en una representación matemática precisa ○ Los estudiantes pueden no comprender que en un triángulo isósceles los ángulos opuestos a los lados congruentes también son congruentes ○ Los estudiantes pueden confundir qué valor deben encontrar, ya que podrían centrarse en los ángulos en lugar de la distancia entre las cabinas. ○ Al utilizar el teorema del seno, los estudiantes podrían no relacionar correctamente los lados y los ángulos opuestos, lo que les conduciría a fórmulas incorrectas. <p><i>Dificultades relacionadas con los procesos de pensamiento matemático</i></p> <ul style="list-style-type: none"> ○ Los estudiantes podrían no distinguir correctamente entre las condiciones en las que se aplica cada teorema. ○ Algunos estudiantes pueden sentirse inseguros al cambiar el teorema del seno o del coseno a otro, lo que les impide explorar ambas vías de resolución del problema. ○ Los estudiantes podrían cometer errores al reorganizar términos, como al trabajar con el factor común o al realizar operaciones algebraicas. ○ Algunos estudiantes podrían perder de vista la incógnita del problema (la distancia entre las cabinas) y enfocarse en calcular otros elementos, como los ángulos o radios, lo que desviaría su atención del objetivo principal de la tarea. ○ Aunque los estudiantes pueden llegar a la solución correcta, pueden tener dificultades para justificar por qué eligieron un determinado teorema (seno o coseno) en cada caso.

<p>Para responder a la segunda pregunta de la tarea, los estudiantes que inicialmente resolvieron la situación mediante el teorema del coseno (Caso 1) deberán explorar las condiciones para aplicar el teorema del seno, reconociendo que el triángulo es isósceles y aplicando los pasos que ya hicieron sus compañeros en el Caso 2. Del mismo modo, los estudiantes que utilizaron el teorema del seno (Caso 2) ahora deberán emplear el teorema del coseno, utilizando los dos lados y el ángulo comprendido entre ellos para hallar la expresión matemática. De esta forma, los estudiantes recorrerán ambos caminos, demostrando que la situación puede resolverse de manera alternativa con los dos teoremas.</p> <p>Concepto trigonométrico involucrado:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Condiciones para aplicar el teorema del coseno y del seno - Propiedad de ángulos internos de un triángulo 			
<p><i>Interpretación</i> Al abordar este problema, se espera que los estudiantes, al formular sus expresiones matemáticas, comprendan que estas les permiten calcular la distancia entre las cabinas para cualquier valor de ángulo dado.</p> <p><i>Validación</i> Finalmente, para que los estudiantes validen las expresiones matemáticas que construyeron, se les solicita realizar los cálculos con los valores determinados (ángulo de 45° y radio 10). Se espera que los estudiantes validen ambas expresiones previamente construidas (una utilizando el teorema del coseno y otra el teorema del seno) sustituyendo en ellas los valores determinados.</p> <table border="0" style="width: 100%;"> <tr> <td style="width: 50%; vertical-align: top;"> <p>Expresión matemática que involucra teorema del seno</p> $a = \frac{r \cdot \operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} \left(90^\circ - \frac{a}{2}\right)}$ $a = \frac{10 \cdot \operatorname{sen} 45^\circ}{\operatorname{sen} \left(90^\circ - \frac{45^\circ}{2}\right)}$ $a = \frac{10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\operatorname{sen} (90^\circ - 22,5^\circ)}$ $a = 7,65366865$ </td> <td style="width: 50%; vertical-align: top;"> <p>Expresión matemática que involucra teorema del coseno</p> $a = r \cdot \sqrt{2(1 - \cos a)}$ $a = 10\sqrt{2(1 - \cos 45^\circ)}$ $a = 10 \sqrt{2 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$ $a = 10\sqrt{0,29289321}$ $a = 7,65366865$ </td> </tr> </table> <p>Se espera que, al comparar los resultados obtenidos, los estudiantes concluyan que las expresiones matemáticas formuladas utilizando tanto el teorema del seno como el teorema del coseno son correctas y válidas para calcular la distancia.</p>	<p>Expresión matemática que involucra teorema del seno</p> $a = \frac{r \cdot \operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} \left(90^\circ - \frac{a}{2}\right)}$ $a = \frac{10 \cdot \operatorname{sen} 45^\circ}{\operatorname{sen} \left(90^\circ - \frac{45^\circ}{2}\right)}$ $a = \frac{10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\operatorname{sen} (90^\circ - 22,5^\circ)}$ $a = 7,65366865$	<p>Expresión matemática que involucra teorema del coseno</p> $a = r \cdot \sqrt{2(1 - \cos a)}$ $a = 10\sqrt{2(1 - \cos 45^\circ)}$ $a = 10 \sqrt{2 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$ $a = 10\sqrt{0,29289321}$ $a = 7,65366865$	<p><i>Dificultades relacionadas con la complejidad del objeto matemático</i></p> <ul style="list-style-type: none"> ○ Los estudiantes podrían no entender que el teorema del coseno se puede usar para calcular los ángulos internos del triángulo cuando se conocen los lados. ○ Los estudiantes pueden no comprender que la expresión construida es válida cuando los resultados de sus cálculos son iguales. <p><i>Dificultades relacionadas con los procesos de pensamiento matemático</i></p> <ul style="list-style-type: none"> ○ Al calcular las distancias, los estudiantes pueden cometer errores al introducir valores para los lados o ángulos, lo que puede llevar a resultados incorrectos. ○ Los estudiantes podrían tener problemas para formular una conclusión sobre los resultados. ○ Los estudiantes podrían tener problemas para organizar sus ideas y presentar una explicación matemática coherente y justificada. ○ Los estudiantes pueden tener problemas para generalizar que ambos teoremas pueden ser utilizados en situaciones similares y que, si se aplican correctamente, deberían llevar a la misma conclusión.
<p>Expresión matemática que involucra teorema del seno</p> $a = \frac{r \cdot \operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} \left(90^\circ - \frac{a}{2}\right)}$ $a = \frac{10 \cdot \operatorname{sen} 45^\circ}{\operatorname{sen} \left(90^\circ - \frac{45^\circ}{2}\right)}$ $a = \frac{10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\operatorname{sen} (90^\circ - 22,5^\circ)}$ $a = 7,65366865$	<p>Expresión matemática que involucra teorema del coseno</p> $a = r \cdot \sqrt{2(1 - \cos a)}$ $a = 10\sqrt{2(1 - \cos 45^\circ)}$ $a = 10 \sqrt{2 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$ $a = 10\sqrt{0,29289321}$ $a = 7,65366865$		

Tercera tarea: Tareas relacionadas con el teorema del coseno con materiales manipulativos

En esta parte se busca que los estudiantes comprendan y apliquen el teorema del coseno usando materiales manipulativos para construir triángulos manualmente. Consideramos que la construcción manual permitirá que los estudiantes visualicen y entiendan mejor las propiedades del teorema del coseno. Consideramos que con esta tarea los estudiantes podrán construir argumentos teóricos que respalden el procedimiento seguido para resolver problemas. Esto implica explicar por qué el teorema del coseno es el método adecuado para la resolución del

problema dado, cómo se ha aplicado la fórmula, y cómo se ha obtenido los resultados con la construcción realizada. Además, pretendemos que los estudiantes modelen situaciones geométricas usando los triángulos construidos. Por lo tanto, la tarea está diseñada para reforzar la comprensión del teorema del coseno, fomentar la habilidad de argumentación teórica y mejorar las habilidades de modelación y resolución de problemas utilizando un enfoque práctico y manipulativo.

Materiales y recursos específicos de la tarea: Para esta actividad se utilizarán materiales manipulativos destinados a la construcción de triángulos, específicamente pajitas (pitillos) e hilos. El profesor distribuirá estos recursos entre los estudiantes, asegurándose de que las longitudes de las pajitas no permitan la formación de triángulos rectángulos. De esta manera, se facilitará la exploración y aplicación del teorema del coseno.

Objetivo de aprendizaje

Construir argumentos teóricos que respalden el procedimiento de resolución de problemas mediante la identificación y aplicación del teorema del coseno, conectando la teoría con los triángulos construidos manualmente.

Tabla 5

Tarea 3. Tareas relacionadas con el teorema del coseno con materiales manipulativos

Utilizando pajitas e hilo, construye un triángulo. Asegúrate de que el triángulo sea estable y que las pajitas estén bien unidas en los vértices.	
<ol style="list-style-type: none"> 1. Identifica las propiedades del triángulo construido que te permitan clasificarlo según sus ángulos empleando instrumentos de medición. Sustenta tu clasificación por escrito. 2. Verifica por medio del teorema del coseno la amplitud de los ángulos medidos utilizando las longitudes de los lados del triángulo. Compara el resultado obtenido con el valor medido. 	
Respuestas deseables o esperadas por los estudiantes.	Posibles errores o dificultades de los resultados presentados por el estudiante.
<p><i>Simplificación de la situación</i></p> <p>Es importante aclarar que el profesor será responsable de proporcionar a los estudiantes los materiales necesarios para la construcción de los triángulos, asegurándose de que ninguna de las longitudes sea tal que permita formar triángulos rectángulos. A partir de ahí, lo que se espera es que los estudiantes unan las pajitas en sus extremos utilizando hilo, garantizando que cada unión sea firme para</p>	<p><i>Dificultades relacionadas con la complejidad del objeto matemático</i></p> <ul style="list-style-type: none"> ○ Los estudiantes podrían tener dificultades con la unión de los vértices, que podrían no ser firmes y esto afectaría la observación de los ángulos y la identificación del tipo de triángulo.

asegurar la estabilidad del triángulo, como se ve en la siguiente figura.

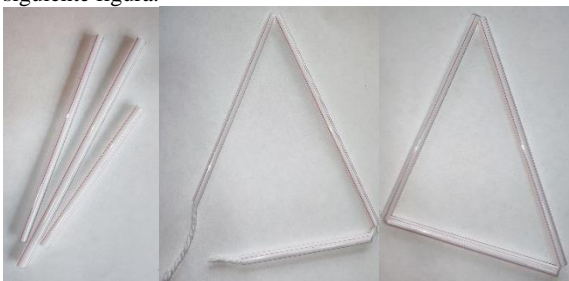


Figura 4. Construcción de triángulos con pajitas

Se espera que, tras realizar la construcción, el estudiante avance al siguiente ciclo de modelado: matematización. Sin embargo, también es posible que el estudiante considere necesario realizar una construcción en papel. En este caso, se espera que el estudiante represente el triángulo y utilice las notaciones adecuadas, tal como se muestra en la figura a continuación.

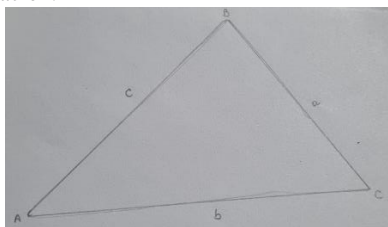


Figura 5. Representación en papel

Matematización de la situación

Hecho esto, se espera que los estudiantes para poder identificar las propiedades del triángulo hagan las mediciones de los ángulos con apoyo de un transportador y tomen apuntes de ello, como se ve en la figura de abajo.

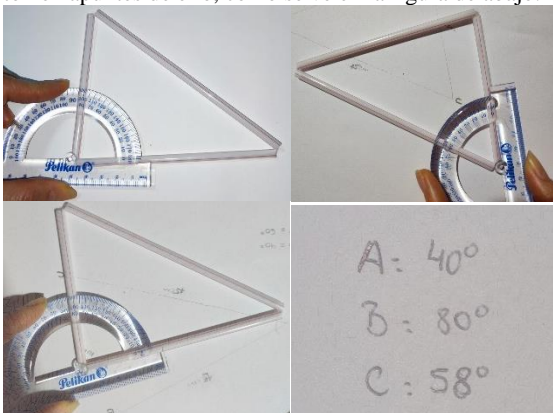


Figura 6. Medición de ángulos internos del triángulo

Después de realizar las mediciones, se espera que los estudiantes reconozcan que los triángulos construidos son oblicuángulos, con ángulos agudos u obtusos. A partir de este reconocimiento, deben construir sus argumentos considerando los tres elementos: *datos*, *aserción* y *garantía*. De esta manera, se busca que desarrollen argumentos teóricos siguiendo esta estructura:

A₁: Como todos los ángulos son menores que 90°, por lo tanto, los ángulos internos del triángulo son agudos.

- Los estudiantes podrían no distinguir triángulos oblicuángulos de rectángulo por falta de reconocimiento de los atributos de los triángulos.
- Los estudiantes podrían tener confusión en los criterios de clasificación mezclando la clasificación por ángulos y la clasificación por lados.
- Los estudiantes podrían confundirse al mezclar los criterios de clasificación por ángulos y por lados
- Los estudiantes podrían llegar a conclusiones incorrectas sin considerar las propiedades geométricas y basarse en apariencia visual.

Dificultades relacionadas con los procesos de pensamiento matemático

- Los estudiantes podrían tener dificultad en la estimación de ángulos y lados, alejándoles de las aproximaciones
- Los estudiantes podrían centrarse demasiado en la construcción física, y no profundizar en conceptos matemáticos involucrados.
- Los estudiantes podrían no reconocer adecuadamente los atributos que definen cada tipo de triángulo.

Dificultades relacionadas con la complejidad del objeto matemático

- Los estudiantes podrían tener dificultades para diferenciar entre triángulos oblicuángulos y otros tipos de triángulos (rectángulos, equiláteros).
- Al utilizar el transportador, los estudiantes podrían no posicionarlo correctamente, lo que daría lugar a mediciones inexactas. Esto puede suceder debido a la falta de precisión o a errores de alineación entre el vértice y el transportador.
- Algunos estudiantes podrían tener problemas para identificar visualmente cuándo un ángulo es agudo u obtuso, especialmente en triángulos con ángulos muy cercanos a los límites de 90°.
- Podrían no captar completamente que el hecho de que no haya un ángulo de 90° es un criterio fundamental para clasificar el triángulo como oblicuángulo.
- Si un ángulo es cercano a 90°, algunos estudiantes podrían dudar en clasificar el triángulo correctamente, creyendo erróneamente que el triángulo puede ser rectángulo si no perciben claramente la diferencia.

Dificultades relacionadas con los procesos de pensamiento matemático

- Los estudiantes podrían realizar las mediciones de los ángulos, pero tener dificultades para

A₂: Ningún ángulo interno mide 90°, por lo tanto, el triángulo no es rectángulo.

A₃: Si el triángulo no es rectángulo, por lo tanto, es un triángulo oblicuángulo.

A₄: Todos los ángulos del triángulo son agudos, por lo tanto, el triángulo construido es un acutángulo.

A₅: La suma de los ángulos de la figura construida es 180°. Por lo tanto, cumple con la propiedad de los triángulos: la suma de sus ángulos internos siempre es igual a 180°

Luego, se les solicita a los estudiantes que verifiquen sus argumentos a través de una operación matemática que involucra al teorema del coseno, en el que, primeramente, se espera que los estudiantes identifiquen que necesitan las longitudes de los lados del triángulo, para aplicar el teorema del coseno, y hagan las mediciones necesarias con ayuda de una regla.

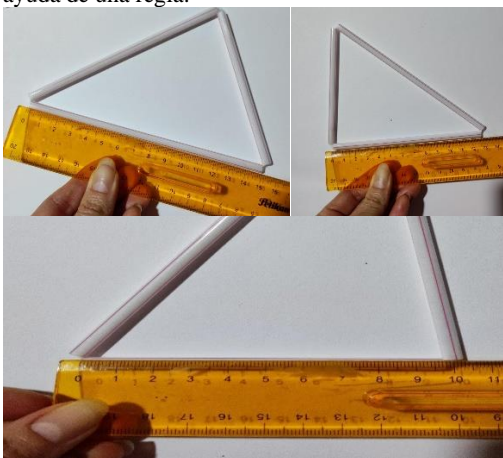


Figura 7. Medición de lados del triángulo

y a partir de ello calcular los ángulos del triángulo aplicando el teorema

Valor del ángulo formado en \hat{A}

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$$

$$\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{-2 \cdot b \cdot c}$$

$$\cos \hat{A} = \frac{15^2 + 13^2 - 10^2}{-2 \cdot 15 \cdot 13}$$

$$\cos \hat{A} = 0,75384615385$$

$$\hat{A} = 41^\circ 4' 31''$$

Valor del ángulo formado en \hat{B}

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{B}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{-2 \cdot a \cdot c}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{10^2 + 13^2 - 15^2}{-2 \cdot 10 \cdot 13}$$

$$\cos \hat{B} = 0,16923076923$$

$$\hat{B} = 80^\circ 15' 24''$$

Valor del ángulo formado en \hat{C}

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C}$$

$$\cos \hat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{-2 \cdot a \cdot b}$$

$$\cos \hat{C} = \frac{10^2 + 15^2 - 13^2}{-2 \cdot 10 \cdot 15}$$

interpretar correctamente los resultados y relacionarlos con los conceptos de triángulos oblicuángulos.

- Algunos estudiantes podrían no abstraer adecuadamente la situación geométrica a una formulación matemática que incluya las propiedades de los triángulos oblicuángulos, debido a una falta de conexión entre la representación visual y las propiedades teóricas.
- Después de realizar las mediciones, podrían generalizar incorrectamente los atributos del triángulo.
- En la toma de apuntes, podrían no registrar correctamente las mediciones, lo que lleva a conclusiones incorrectas o imprecisiones en el análisis posterior.
- Algunos estudiantes podrían tener dificultades para estructurar un argumento lógico claro. Específicamente, podrían tener problemas para articular la relación entre el dato observado.
- Podrían usar incorrectamente términos matemáticos en su explicación.
- Aun cuando reconozcan que ningún ángulo es de 90°, algunos estudiantes podrían no basar su clasificación en la garantía correcta (que un triángulo oblicuángulo no tiene un ángulo de 90°).
- Los estudiantes podrían tener dificultades para identificar cuándo la aserción (C: el triángulo es oblicuángulo) es válida o no.
- Los estudiantes pueden cometer errores en la etapa de traducción de los valores numéricos al modelo algebraico del teorema.
- Los estudiantes pueden cometer errores en el manejo de la estructura algebraica y simbólica.
- Los estudiantes pueden tener dificultades en los procedimientos matemáticos, como la manipulación de ecuaciones y operaciones, afectando el proceso de cálculo.
- Los estudiantes pueden tener confusión en el cálculo del coseno inversa, indicando una falta de comprensión de las herramientas matemáticas (coseno inverso) y de cómo utilizarlas para obtener resultados que den sentido a las mediciones.

<p style="text-align: center;">$\cos \hat{A} = 0,52$ $\hat{A} = 58^{\circ}40'4''$</p> <p>Una vez hecho los cálculos, se espera que los estudiantes inicien la validación de sus mediciones comparando los valores obtenidos mediante el cálculo y la medición directa en sus grupos de trabajo.</p> <p>Durante este proceso, deberán observar si los valores calculados son aproximados a las mediciones hechas, lo que les permitirá determinar la validez del modelo construido.</p> <p>Conceptos matemáticos involucrados: - Triángulos oblicuángulos y sus atributos.</p>	
<p><i>Interpretación del modelo</i></p> <p>Una vez que el estudiante haya identificado el tipo de triángulo construido y fundamentado su clasificación, se espera que interprete que, con los datos obtenidos (longitud de los lados del triángulo) y considerando que es un triángulo oblicuángulo, el teorema adecuado para verificar estas mediciones es el teorema del coseno. Es importante que comprendan que, si se desea calcular la amplitud de los ángulos, el teorema del seno no es aplicable en este caso, ya que requiere al menos un ángulo conocido. En cambio, el teorema del coseno es aplicable cuando se quiere calcular ángulos teniendo las tres longitudes del triángulo.</p> <p><i>Validación</i></p> <p>Se espera que, en este ciclo, los estudiantes comiencen a comparar los resultados obtenidos, tanto en sus mediciones como en los cálculos realizados, con los de sus compañeros. Además, si al comparar las amplitudes de los ángulos se encuentra una discrepancia significativa, se espera que los estudiantes analicen esta diferencia y reinicien el ciclo de modelado. En esta nueva iteración, evaluarán su proceso desde la simplificación para identificar posibles errores y determinar si es necesario ajustarlo o mejorarlo.</p>	<p><i>Dificultades relacionadas con la complejidad del objeto matemático</i></p> <ul style="list-style-type: none"> ○ Los estudiantes podrían no comprender porque el teorema del coseno es más adecuado para calcular la amplitud de los ángulos en este caso, al no reconocer que el teorema del seno requiere al menos un ángulo conocido. ○ Si los resultados obtenidos mediante mediciones directas y cálculos presentan diferencias significativas, podrían no entender por qué ocurren estas discrepancias ni relacionarlas con posibles errores en sus procesos previos, como una mala medición o la aplicación incorrecta del modelo matemático. <p><i>Dificultades relacionadas con los procesos de pensamiento matemático</i></p> <ul style="list-style-type: none"> ○ Los estudiantes pueden tener dificultad en la revisión y en la validación de los resultados obtenidos. ○ Los estudiantes pueden cometer errores en la interpretación del resultado. ○ Los estudiantes pueden mostrar dificultad para vincular los resultados con los conocimientos previos.

Cuarta tarea: problemas de situaciones contextualizadas sobre triángulos oblicuángulo

El propósito de esta tarea es desarrollar habilidades de modelación y argumentación matemática a través del análisis de un problema real relacionado con la instalación de una tirolesa. Los estudiantes aprenderán a aplicar conceptos de geometría y trigonometría para resolver problemas de tensión en cuerdas y ángulos. Los estudiantes deberán representar la situación del problema gráficamente, utilizando el software GeoGebra. Se explorarán las relaciones entre las longitudes de las cuerdas y los ángulos que forman con el suelo. Por otra parte, los estudiantes argumentarán sobre la validez de la solución obtenida.


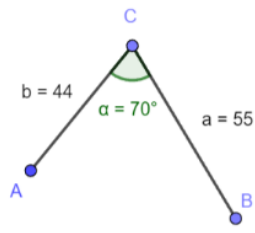
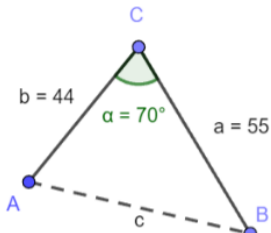
Objetivo de aprendizaje

Modelar en GeoGebra la instalación de la tirolesa, incorporando las longitudes de las cuerdas y los ángulos, para analizar la configuración geométrica.

Construir argumentos basados en propiedades trigonométricas, detallando el proceso y las implicaciones que llevan a la solución final.

Tabla 6

Tarea 4. Problemas de situaciones contextualizadas sobre triángulos oblicuángulos

	<p>El siguiente gráfico nos muestra la imagen del Castillo Echauri, uno de los lugares turísticos de Paraguay, donde se quiere montar una tirolesa, para lo cual se necesita tensionar dos cuerdas desde el punto más alto del castillo (Punto C) hasta los puntos A y B que se encuentran en el piso. En el diseño inicial de la tirolesa, se tiene presupuestado que la cuerda que va desde C hasta A mide 44 m y la que va desde C hasta B mide 55 m. A su vez, que, el ángulo entre ambas cuerdas es de 70° aproximadamente.</p> <p>Por cuestiones de seguridad, también se quiere que el ángulo formado en A sea de 50°. ¿Es posible mantener las condiciones del diseño inicial? Modela esta situación en GeoGebra y sustenta por escrito el resultado.</p>
<p>Respuestas deseables o esperadas por los estudiantes.</p>	<p>Posibles errores o dificultades de los resultados presentados por el estudiante.</p>
<p><i>Simplificación de la situación</i></p> <p>Se espera que los estudiantes representen en GeoGebra la situación inicial planteada en el problema, la cual incluye las longitudes de las cuerdas (44 m y 55 m) y el ángulo entre ellas (70°)</p>  <p><i>Figura 8. Construcción inicial con GeoGebra</i></p> <p>A través de esta representación inicial, se busca que los estudiantes reconozcan que, a partir de estos puntos, es posible formar un triángulo oblicuángulo y completar la construcción del triángulo. Esta identificación les permitirá resolver el problema.</p>  <p><i>Figura 9. Representación del triángulo en GeoGebra</i></p>	<p><i>Dificultades relacionadas con la complejidad del objeto matemático</i></p> <ul style="list-style-type: none"> Algunos estudiantes pueden tener dificultades para reconocer que, con las longitudes y el ángulo dados, se puede formar un triángulo oblicuángulo. Puede haber confusión sobre cómo los ángulos y lados de un triángulo están interrelacionados, lo que puede dificultar la identificación correcta de las amplitudes de los ángulos internos. Al representar las longitudes de las cuerdas en GeoGebra, los estudiantes pueden cometer errores al ingresar las longitudes y ángulos, lo que resultará en una representación incorrecta del triángulo. <p><i>Dificultades relacionadas con los procesos de pensamiento matemático</i></p> <ul style="list-style-type: none"> Los estudiantes pueden tener problemas para traducir el enunciado del problema a una representación matemática adecuada en GeoGebra. Puede haber una falta de habilidades espaciales que impida a los estudiantes imaginar cómo se verá el triángulo a partir de las longitudes y ángulo dados. Algunos estudiantes pueden tener dificultades para seguir una secuencia lógica en su pensamiento, lo que podría llevar a errores en la identificación de las relaciones entre los lados y los ángulos. Los estudiantes podrían tener dificultades para utilizar correctamente las herramientas de GeoGebra para construir y representar el triángulo con las medidas dadas.

Con estas condiciones establecidas, los estudiantes podrán determinar la amplitud de los ángulos internos del triángulo

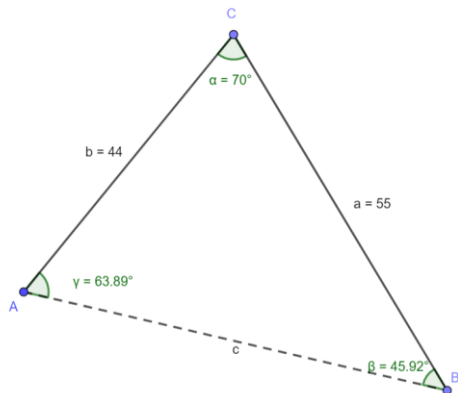


Figura 10. Construcción en GeoGebra (simplificación)

Se espera que los estudiantes se cuestionen: ¿Cómo afecta el cambio en el ángulo formado en A la longitud de la cuerda CB?

Matematización

Para abordar esta tarea, es importante destacar que el problema puede resolverse de diversas maneras, dependiendo de los conocimientos matemáticos de los estudiantes. Para los fines de este trabajo, se presenta una de las posibles formas de solución. A partir de la representación (figura 11), se espera que el estudiante observe que el ángulo formado en A no cumple con la condición especificada en el problema, que establece que ese ángulo debe medir 50°. Lo siguiente que se espera que los estudiantes hagan es que ajusten su construcción de manera que el ángulo formado en A mida 50°. Para lograr esto, se espera que arrastren el vértice B del triángulo y observen como varían los ángulos y los lados del triángulo. Dependiendo de la estrategia que el estudiante utilice, se tiene:

Primer caso: Si se arrastra el vértice B, conservando la longitud de la cuerda AC y los ángulos formados en C y A.

Segundo caso: Si se arrastra el vértice B y se conserva las longitudes de las cuerdas AC y BC y el ángulo formado en A.

- **Primer caso:**

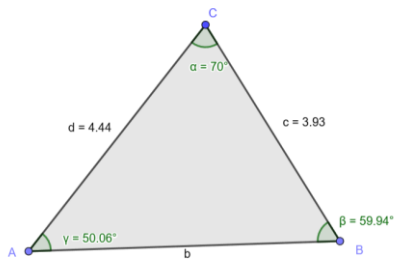


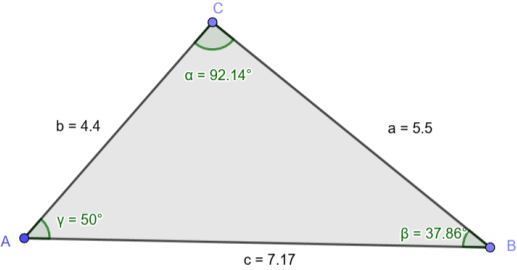
Figura 11. Arrastre del vértice B conservando las medidas del lado AC y los ángulos formados en C y A

Dificultades relacionadas con la complejidad del objeto matemático

- Los estudiantes pueden tener dificultades para comprender que el ajuste del ángulo A a 50° afecta las longitudes de los lados del triángulo, lo que puede llevar a errores en la construcción.
- La falta de familiaridad con GeoGebra puede provocar que los estudiantes no realicen correctamente los ajustes necesarios, afectando la representación del triángulo.

Dificultades relacionadas con los procesos de pensamiento matemático

- Puede ser complicado para los estudiantes traducir la observación de que el ángulo A no cumple con la condición en acciones concretas para ajustar la construcción.
- Algunos estudiantes pueden tener dificultades para visualizar cómo los cambios en el ángulo A afectan la forma y las proporciones del triángulo.
- Los estudiantes pueden no entender por qué es necesario ajustar el ángulo A a 50° o cómo este ajuste se relaciona con las propiedades geométricas del triángulo.
- Puede que no verifiquen si su ajuste cumple con las condiciones del problema, lo que podría resultar en la aceptación de configuraciones incorrectas y en la falta de una conclusión adecuada sobre la viabilidad de la construcción.

<p>En esta representación, se espera que el estudiante analice la figura y construya argumentos considerando los elementos esenciales: <i>datos</i>, <i>garantía</i> y <i>aserción</i>, similares al siguiente:</p> <p>A₁: En las condiciones planteadas del problema, donde se mantienen fijas la longitud de la cuerda CA y los ángulos formados en C y A, se puede concluir que la longitud de la cuerda BC varía. Por lo tanto, no es posible mantener las condiciones establecidas en el diseño inicial.</p> <p>- Segundo caso:</p>  <p>Figura 12. Arrastre del vértice B conservando las medidas de los lados AC y BC y el ángulo formado en A</p> <p>En el segundo caso, se espera que el estudiante construya el siguiente argumento:</p> <p>A₂: Al mantener fijas las longitudes de las cuerdas AC y BC y el ángulo formado en A, el ángulo formado en C varía. Por lo tanto, no es posible mantener las condiciones establecidas en el diseño inicial.</p>	
<p><i>Interpretación</i></p> <p>Se espera que el estudiante interprete cómo las medidas de los ángulos influyen en las longitudes de los lados, y viceversa. O que interpreten la relación de proporcionalidad entre los lados y ángulos, ya que en un triángulo el lado opuesto a un ángulo más grande será más largo, mientras que el lado opuesto a un ángulo más pequeño será más corto. Esto se debe a que la magnitud de los ángulos y los lados están directamente relacionadas.</p> <p><i>Validación</i></p> <p>Para validar la modelación realizada, se espera que los estudiantes comparen las construcciones desarrolladas en GeoGebra con la de sus compañeros. Además, deben evaluar la efectividad y las ventajas del modelo utilizado en la resolución del problema, identificando cuál ofrece mejores resultados en términos de precisión y simplicidad.</p>	<p><i>Dificultades relacionadas con la complejidad del objeto matemático</i></p> <ul style="list-style-type: none"> ○ Los estudiantes pueden tener dificultades para entender cómo las propiedades geométricas limitan las medidas de los lados y ángulos del triángulo. Esto puede llevar a errores en la identificación de relaciones entre los ángulos y los lados. ○ Puede haber confusión al interpretar las condiciones dadas (ángulos A y C, y el lado b), lo que podría resultar en conclusiones incorrectas sobre la medida del lado a. <p><i>Dificultades relacionadas con los procesos de pensamiento matemático</i></p> <ul style="list-style-type: none"> ○ Al redactar sus conclusiones, puede que no logren articular las razones por las cuales las medidas no son viables, lo que puede resultar en una falta de comprensión de la relación entre ángulos y lados en un triángulo. ○ Los estudiantes pueden no realizarlos ajustes necesario al modelo cuando se detectan discrepancias, lo que refleja una dificultad para adaptarlo según los resultados obtenidos.

Quinta tarea: evaluación del aprendizaje

En esta sección, se presenta una actividad que integra todas las habilidades desarrolladas en tareas anteriores, con el propósito de evaluar los conocimientos adquiridos por los estudiantes.

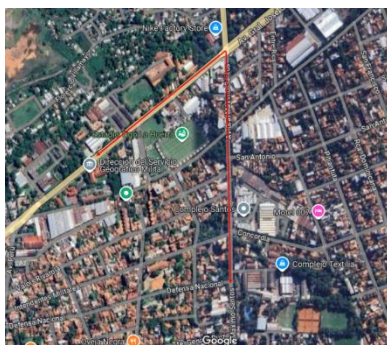
Esta tarea tiene como objetivo evaluar la capacidad de los estudiantes para resolver problemas relacionados con triángulos oblicuángulos, determinando si se aplican el teorema del seno o el teorema del coseno, solicitando que realicen un proceso de modelación sobre la solución potencial, durante el cual se evaluará su habilidad para construir argumentos coherentes y fundamentados acerca de la resolución de los problemas planteados.

Objetivos de aprendizaje:

Evaluar el aprendizaje de los estudiantes entorno al desarrollo de habilidades de argumentación y modelación dentro de la resolución de problemas relacionados con triángulos oblicuángulos.

Tabla 7

Tarea 5. Evaluación del aprendizaje

<p>Dos automóviles parten desde la intersección de la Avenida José Gervasio Artigas y General Máximo Santos. Uno de los automóviles se desplaza a lo largo de la Avenida General Máximo Santos y el otro a lo largo de la Avenida José Gervasio Artigas. Se sabe que el automóvil que va por la Avda. General Máximo Santos recorrió el triple de distancia que el otro, y que el ángulo en la intersección de las dos avenidas es de 60°.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Modela una expresión matemática que represente la distancia entre los dos automóviles después de una hora. 2. Utilizando el teorema del seno, calcula la distancia a la que se encuentran los automóviles sabiendo que el vehículo de menor velocidad recorrió 81 km y que se encuentra bajo un ángulo de $100^\circ 53' 24''$ con relación al otro vehículo y la Avda. Gral. José Gervasio Artigas. 3. Calcula la distancia de los vehículos utilizando la expresión matemática construida (en el ejercicio 1) y compara con la solución obtenida en el ejercicio anterior. 	
<p>Respuestas deseables o esperadas por los estudiantes</p>	<p>Criterios para evaluar la tarea</p>
<p><i>Simplificación.</i> Cuando el estudiante aborda la tarea, lo primero que se espera que haga es que identifique los datos proporcionados en el enunciado, representando la situación con un triángulo oblicuángulo y utilice notaciones matemáticas para referirse a cada dato. Siendo así, lo que se espera que identifique son: Auto 1: d Auto 2: 3d (puesto que la distancia de uno de los automóviles es el triple que la del otro) Ángulo entre la intersección de las avenidas: $\alpha = 60^\circ$ Una vez identificado estos datos, se espera que el estudiante haga la representación, de manera que se cumpla las tres condiciones determinadas, como el de la imagen siguiente:</p>	<p>Los criterios que se considera para evaluar a los estudiantes son los siguientes:</p> <ul style="list-style-type: none"> ○ Identifica todos los datos del problema ○ Representa la situación con la construcción de un triángulo oblicuángulo ○ Utilice notaciones matemáticas correctas para referirse a cada dato, como la distancia de los autos y el ángulo ○ Establece las relaciones matemáticas correctas entre los lados del triángulo. ○ Reconoce la incógnita del problema.

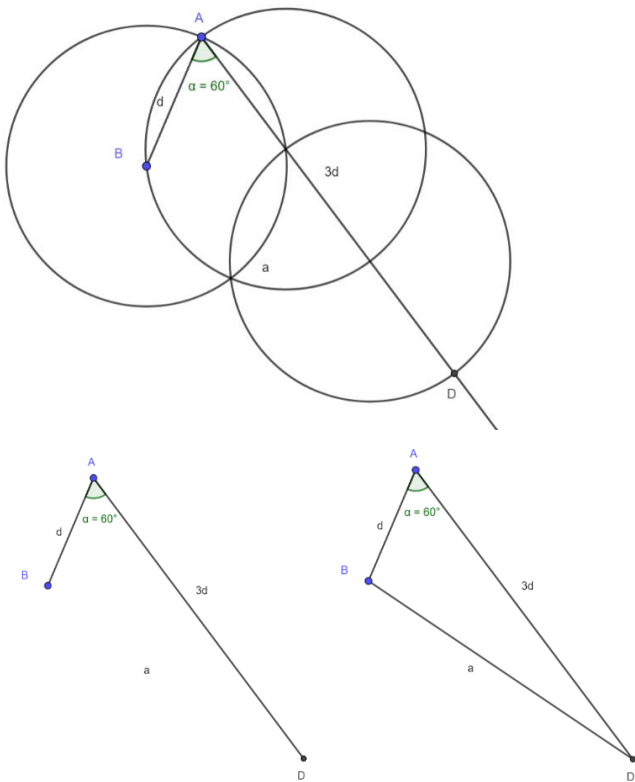


Figura 13. Proceso de construcción en GeoGebra

Aquí se espera que el estudiante garantice que su construcción efectivamente representa la situación real en el lenguaje matemático, es decir, que efectivamente el ángulo mida 60° y que los lados se construyan de manera a que uno de ellos sea el triple del otro. También se espera que el estudiante relacione la situación con un triángulo oblicuángulo y la termine de construir.

Matematización

Representada la situación con las notaciones de los elementos correspondientes, se espera que el estudiante analice las condiciones en las que el teorema del seno y del coseno se aplica, y a partir de ella, identifique que el problema se puede modelar con el teorema del coseno y opere de la siguiente manera:

Modelación con el teorema del coseno

$$a^2 = d^2 + 3d^2 - 2 \cdot d \cdot 3d \cdot \cos 60^\circ$$

$$a^2 = d^2 + 9d^2 - 6d^2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$a^2 = 10d^2 - 3d^2$$

$$a = \sqrt{7d^2}$$

$$a = d\sqrt{7}$$

Una vez que el estudiante haya deducido la expresión matemática, se espera que concentre su atención en el requerimiento del ítem 2, donde se le solicita calcular la distancia entre los automóviles, dado un ángulo de $100^\circ 53' 2''$ y un trayecto de 81 km recorrido por el automóvil más lento. En el enunciado se proporciona al estudiante más información para que pueda realizar los cálculos pertinentes. Se espera que identifique los datos necesarios para operar y luego realice los cálculos correspondientes.

Se espera que el estudiante identifique que el trayecto de 81 km corresponde al automóvil más lento y que el ángulo de $100^\circ 5' 24''$ es adyacente al lado del triángulo que representa la Avda. Artigas.

Los criterios que se debe considerar cuando los estudiantes trabajan con la matematización son:

- Reconoce si el problema se puede modelar con el teorema del coseno o del seno, según la situación planteada.
- Representa la situación con las notaciones adecuadas.
- Realice los cálculos para llegar a la expresión matemática.
- Identifica los datos para los cálculos de la distancia entre los automóviles teniendo ángulos y distancia
- Aplica el teorema del seno en el cálculo de la distancia entre los automóviles
- Utiliza correctamente la relación de los lados y ángulos
- Indica por escrito los procedimientos realizados para llegar a la solución

<p>Además, que el ángulo formado por la intersección de las avenidas es de 60°. Se espera que el estudiante haga los cálculos de la siguiente manera:</p> $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ $\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B})$ $\hat{C} = 180^\circ - (60^\circ + 100^\circ 53' 24'')$ $\hat{C} = 19^\circ 6' 36''$ <p>Teniendo el ángulo \hat{C}, la relación del teorema del seno que resuelve la situación es:</p> $\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}}$ $a = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} \cdot \text{sen } \hat{A}$ $a = \frac{81}{\text{sen } 19^\circ 6' 36''} \cdot \text{sen } 60^\circ$ $a \approx 214,269 \text{ km}$	
<p>Interpretación Una vez que el estudiante haya realizado los cálculos, se espera que, siguiendo la indicación del ítem 3, analice sus resultados. De esta manera, se espera que comprenda que, a través de la expresión matemática construida, también podrá calcular la distancia entre los automóviles.</p> <p>Validación Una vez hecho los cálculos, se espera que el estudiante compare los resultados obtenidos en el problema y reflexione sobre la ventaja del modelo utilizado.</p>	<ul style="list-style-type: none"> ○ Compara los resultados obtenidos en las dos partes del problema. ○ Reconoce las similitudes o diferencias en ambos resultados. ○ Valida la consistencia del resultado con los datos del problema y la expresión matemática. ○ Argumenta porque los resultados son válidos.

Sugerencias generales de intervenciones del profesor durante el abordaje de la tarea

Tabla 8

Posibles intervenciones del profesor

<p>Para garantizar que los estudiantes ejecuten adecuadamente la <i>simplificación del problema</i> y logren resultados satisfactorios, el profesor puede aplicar las estrategias siguientes:</p> <ul style="list-style-type: none"> ○ Hacer una retroalimentación sobre los requisitos con los que el estudiante necesita estar familiarizado como los conceptos matemáticos y habilidades en el uso de GeoGebra. ○ El profesor puede comentar sobre la importancia de hacer las representaciones a escala para que de esa manera se puedan aproximar los resultados a la solución del problema y enfatizar que los datos proporcionados en el problema son datos necesarios e importantes que se debe considerar para las construcciones. ○ Monitorear la construcción que realiza el grupo de estudiantes, observando y brindando asistencia durante representación de la situación planteada sobre todo cuando haya mala interpretación, es decir, cuando ubican mal los ángulos, la orientación del triángulo, las medidas de ángulos, etc. ○ Hacer preguntas adicionales sobre la marcha que ayuden al estudiante a visualizar el triángulo junto con sus elementos y magnitudes. También que realicen preguntas que ayude a los estudiantes a relacionar los elementos del triángulo con la situación que están representando. <p>Para el siguiente ciclo de modelación, que es la <i>matematización del problema</i>, es fundamental que el profesor trabaje de cerca con los estudiantes, brindando orientaciones oportunas para que puedan llegar a los descubrimientos necesarios y validar la solución del problema. Algunas de las intervenciones sugeridas son:</p> <ul style="list-style-type: none"> ○ El profesor debe formular preguntas al grupo de estudiantes que los guíe a reconocer las propiedades involucradas, relaciones entre ángulos y lados para resolver el problema. ○ El profesor debe ejercer su rol de guía, cuando los estudiantes seleccionan el teorema que no corresponde, debe redireccionarlos hacia el correcto, haciendo preguntas que los haga reflexionar si la elección que han hecho es la correcta. ○ El profesor debe asegurarse de que los estudiantes reconozcan todos los datos importantes del problema. ○ Monitorear activamente los progresos de los estudiantes, escuchando sus discusiones y observando cómo abordan el problema, para que en caso de que necesiten, les dé orientaciones adicionales sobre todo cuando establecen la relación de los lados y ángulos que van a utilizar en sus cálculos. <p>En el momento en que los estudiantes deben <i>interpretar y validar el resultado</i>, el profesor es guía y colaborador de las construcciones de los argumentos de sus estudiantes, algunas acciones que debe hacer son:</p>

- Proporcionar un marco para que los estudiantes estructuren sus argumentos (datos, aseercción, garantía) y realicen ejercicios donde puedan practicar la formulación de justificaciones matemáticas claras y coherentes.
- Realizar actividades donde revisen y discuten en clase los argumentos presentados por los estudiantes, enfocándose en la precisión terminológica y la claridad en la comunicación de sus ideas.
- Invitar a los estudiantes a reflexionar sobre sus propios razonamientos y la lógica detrás de sus respuestas, reforzando el uso de un lenguaje matemático adecuado y riguroso.
- Es crucial que el profesor supervise cómo los estudiantes secuencian los pasos en la aplicación del teorema del seno. Puede proporcionar retroalimentación inmediata si observa errores, por ejemplo, si los estudiantes no colocan correctamente los lados y ángulos en la fórmula
- Durante la resolución algebraica, el profesor puede monitorear el uso de la fórmula y ayudar en los cálculos algebraicos y trigonométricos, interviniendo en caso de operaciones incorrectas o despejes erróneos.
- El profesor debe pedir a los estudiantes que comparen su resultado con el obtenido en GeoGebra, en tareas donde se utilice esta herramienta, fomentando la revisión y validación de los resultados numéricos, para que comprendan si han llegado a una solución correcta o si necesitan revisar su procedimiento.

Análisis de resultados

En esta sección se presenta un análisis de los resultados, organizado en función de los objetivos establecidos para este trabajo. Consideramos que las tareas diseñadas están alineadas con los objetivos de aprendizaje propuestos, los cuales están relacionados con la modelación y argumentación matemática en la resolución de problemas, contribuyendo así al logro de los propósitos planteados en este trabajo.

Con relación al objetivo general, que consistió en "diseñar tareas para promover habilidades de resolución de problemas en los estudiantes paraguayos del primer curso de la Educación Media a partir de situaciones modeladas con triángulos oblicuángulos", se puede afirmar que este se cumplió. Se elaboraron cinco tareas específicas vinculadas a triángulos oblicuángulos, cuyo propósito principal fue promover habilidades en la resolución de problemas. Estas tareas no se limitaron únicamente a la aplicación de procedimientos matemáticos, sino que también promovieron la comprensión y el razonamiento en la resolución de situaciones complejas.

Para promover el desarrollo de competencias, durante el diseño de las tareas se siguieron algunas recomendaciones de Pettersen y Nortvedt (2017) como la de diseñar tareas para que los estudiantes pudieran articular soluciones, justificar sus respuestas y reflexionar críticamente sobre los procesos empleados.

En todas las actividades propuestas, ya sea utilizando geometría dinámica, lápiz y papel o materiales manipulativos, se puso un énfasis particular en que los estudiantes, al momento de modelar matemáticamente las situaciones, fueran capaces de argumentar sus procedimientos, justificar sus conclusiones mediante propiedades geométricas y trigonométricas, y reflexionar sobre el razonamiento implicado en la resolución de los problemas planteados.

Estas tareas se centraron en el desarrollo de estrategias pedagógicas, tales como la diversificación de los métodos de resolución de problemas y la adaptación al contexto de los estudiantes, con el fin de anticipar y gestionar posibles dificultades que pudieran surgir al abordar la tarea. Por esta razón, el diseño de estas es flexible y puede ajustarse según sea necesario, permitiendo una mayor adaptabilidad a las circunstancias específicas del aprendizaje.

Si bien el diseño de las tareas ofrece un marco para desarrollar habilidades en la resolución de problemas, se reconocen posibles desafíos en la comprensión inicial de los conceptos relacionados con triángulos oblicuángulos. En futuras iteraciones, sería recomendable incluir actividades previas que refuercen la comprensión de los elementos geométricos antes de abordar tareas más complejas. Durante el diseño y análisis de las tareas, identificamos la necesidad de profundizar en el teorema del seno y del coseno. Por ello, sugerimos que, antes de abordar estas tareas, se propongan actividades a los estudiantes que les ayuden a construir el significado de dichos teoremas mediante la exploración de las propiedades que los involucran.

Con relación al primer objetivo específico, que busca “proponer tareas que promuevan la modelación en la resolución de problemas relacionados con triángulos oblicuángulos” podemos concluir que se logró proponer tareas que impliquen la modelación, pues las mismas presentan situaciones extraídas del mundo real, lo cual enriquece el proceso de aprendizaje y facilita que los estudiantes conecten los conceptos matemáticos con aplicaciones prácticas.

Por medio de las tareas 1 y 2, en donde se les solicita modelar una situación a partir de una rueda de la fortuna, es una forma de fomentar en los estudiantes la habilidad de visualizar y comprender cómo los triángulos oblicuángulos están presentes en estructuras cotidianas. A esto se le suma la manipulación de materiales físicos para construir triángulos, solicitado en la tarea 3, que puede favorecer una comprensión de las propiedades geométricas, ayudando a los estudiantes a modelar de manera más intuitiva.

Aunque la tarea 3 no plantea problemas o situaciones directamente vinculadas con la vida cotidiana, se desarrolla en un contexto didáctico diseñado para enseñar conceptos geométricos y trigonométricos. A través de la manipulación de materiales, la tarea busca conectar conceptos abstractos con experiencias concretas, lo que consideramos relevante para alcanzar los propósitos de este trabajo.

Asimismo, las tareas 4 y 5 se centran en contextos específicos del entorno paraguayo, con el objetivo de fomentar la resolución de problemas a partir de situaciones que los estudiantes puedan reconocer en su entorno. Estas tareas están diseñadas para desarrollar modelos matemáticos que potencien su pensamiento, ya que, según Fonseca (2023), la relación entre el mundo real y las matemáticas facilita la resolución de los problemas planteados.

Además, el uso de herramientas digitales como GeoGebra en varias de las tareas no solo facilita la representación gráfica y la visualización, sino que también potencia la capacidad de los estudiantes para explorar diferentes aproximaciones, construir modelos matemáticos y validar sus resultados de manera dinámica e interactiva.

No obstante, las tareas son susceptibles de ajustes debido a la falta de información precisa sobre los conceptos matemáticos que manejan los estudiantes. Este desconocimiento inicial implica la necesidad de adaptar las actividades propuestas, lo que a su vez abre la posibilidad de

modificar las tareas para incorporar nuevas perspectivas y explorar caminos alternativos que faciliten el logro de los objetivos de aprendizaje. Además, estos ajustes permiten una mayor flexibilidad en el diseño de las tareas, favoreciendo un enfoque más dinámico y ajustado a las necesidades reales de los estudiantes.

En cuanto al segundo objetivo específico, "plantear problemas matemáticos en las tareas que favorezcan la habilidad de argumentación en la resolución de problemas relacionados con triángulos oblicuángulos", podemos afirmar que se logró plantear problemas matemáticos que invitan a los estudiantes a justificar sus procedimientos y resultados, ya sea a través del uso de teoremas como el del seno y el coseno. En las tareas, se desafía a los estudiantes a interpretar datos, verificar hipótesis y validar sus conclusiones, lo que contribuye al desarrollo de su habilidad de argumentar.

Las dos primeras tareas se enmarcan en un contexto conocido del estudiante: la rueda de la fortuna. En la tarea 1, los estudiantes deben no solo seleccionar y aplicar un método adecuado para resolver el problema, sino también justificar la elección del teorema empleado en su resolución. En la tarea 2, más allá de realizar cálculos para validar las expresiones obtenidas, se les guía hacia la interpretación de los resultados y se les invita a analizar si las soluciones propuestas son correctas.

La utilización de materiales manipulativos, como pajitas e hilos, en la tarea 3, permite a los estudiantes construir triángulos de manera concreta, facilitando la exploración de las propiedades geométricas. A partir de estas construcciones tangibles, los estudiantes desarrollan hipótesis, realizan mediciones precisas mediante instrumentos y validan las propiedades geométricas del triángulo en relación con sus lados y ángulos. En este proceso, deben justificar

sus construcciones, argumentar la validez de los resultados obtenidos y, cuando no se cumplan los criterios establecidos, proponer ajustes y mejoras.

La tarea 4, por su parte, se enfoca en el uso de GeoGebra para la modelación dinámica de situaciones geométricas, lo que permite a los estudiantes explorar cómo varían las longitudes de las cuerdas al modificar los ángulos. En este contexto, se les exige una justificación rigurosa de sus construcciones y la argumentación matemática del por qué ciertas soluciones podrían no ser viables, reforzando tanto la comprensión geométrica como la capacidad de razonamiento lógico.

Asimismo, las tareas están diseñadas para reforzar la habilidad de argumentación desde dos perspectivas: la formulación de modelos matemáticos y la validación de soluciones. Los estudiantes deben construir expresiones matemáticas a partir de los datos proporcionados en los problemas y justificar cada paso del proceso. Además, al solicitarle que calculen y comparen resultados utilizando teoremas, como el teorema del seno y coseno, se fomenta la habilidad para argumentar y validar las soluciones como un componente esencial de la resolución de problemas.

Conclusiones

En esta parte presentamos nuestras reflexiones sobre la importancia de diseñar tareas que promuevan la competencia en la resolución de problemas matemáticos, específicamente en el contexto educativo paraguayo, a través del estudio de triángulos oblicuángulos. Estas posturas son el resultado de nuestra propia experiencia en el diseño de dichas tareas, que busca influenciar en las metodologías tradicionales de enseñanza de las matemáticas, que a menudo se centran en la repetición de fórmulas, hacia prácticas pedagógicas más dinámicas que conecten los conceptos abstractos con situaciones concretas de la vida cotidiana. Reflexionamos sobre cómo estas tareas pueden contribuir al desarrollo de habilidades críticas, como la argumentación y el modelado, al tiempo que fomentan un aprendizaje contextualizado. Asimismo, se analiza el impacto que la implementación de estas estrategias puede tener en la enseñanza y el aprendizaje de los estudiantes, promoviendo una visión significativa de las matemáticas.

Reflexiones respecto al objetivo general

El objetivo general de este estudio es diseñar tareas que fomenten las habilidades de resolución de problemas en estudiantes paraguayos de primer curso de la Educación Media con situaciones modeladas con triángulos oblicuángulos. Proponemos un enfoque planificado que consideramos esencial en el contexto educativo paraguayo. Nuestra intención es crear tareas desafiantes que permitan a los estudiantes enfrentar y resolver problemas que vayan más allá de lo teórico, estableciendo una conexión significativa con su vida cotidiana.

En primer lugar, reconocemos que la elección de los triángulos oblicuángulos como objeto central en el diseño de nuestras tareas ofrece una gran riqueza matemática, tanto por sus diversas propiedades como por sus múltiples aplicaciones prácticas. Este objeto permitirá a los estudiantes explorar conceptos fundamentales como la ley de senos y la ley de cosenos, al tiempo

que desarrollan habilidades analíticas y de resolución de problemas. Las tareas elaboradas no se han limitado a un estudio puramente académico, sino que buscan conectar este conocimiento con situaciones de la vida real, para que los estudiantes puedan transferir lo aprendido a nuevos problemas y contextos.

En segundo lugar, siguiendo a Gusmão (2019), reconocemos que las tareas no solo influyen en el aprendizaje de los estudiantes, sino también en su percepción de las matemáticas. Por ello, diseñamos tareas que brindan especial atención al contexto de los estudiantes paraguayos, tratando con ellas conectar situaciones del mundo real con las matemáticas, despertar el interés de los estudiantes y al mismo tiempo que les resulten desafiantes.

Sin embargo, hemos identificado que diseñar tareas que promuevan la resolución de problemas implica no solo presentar situaciones contextualizadas y desafiantes, sino también proporcionar herramientas y apoyo necesarios para que los estudiantes puedan desarrollar estas competencias. En un contexto como el de Paraguay, donde pueden existir obstáculos para el aprendizaje, la efectividad de las tareas dependerá en gran medida de nuestra capacidad para adaptarlas a las necesidades y niveles de los estudiantes.

Este objetivo resulta especialmente relevante en el contexto educativo paraguayo, donde los estudiantes enfrentan dificultades para aplicar de manera práctica sus conocimientos matemáticos. Por lo tanto, la tarea no se limitaría en mejorar el rendimiento académico, sino que también busca potenciar la capacidad de los estudiantes para usar las matemáticas como una herramienta eficaz para resolver problemas en diversos contextos.

Aunque el objetivo es pertinente y responde a una necesidad del ámbito educativo, su éxito dependerá de la flexibilidad en el diseño de las tareas, el apoyo pedagógico ofrecido a los estudiantes y la manera en que se evalúe y ajuste la tarea para asegurar que las habilidades de

resolución de problemas se desarrollen de manera efectiva y sostenida. Así, se espera que este proyecto, en algún momento en que se pueda implementar pueda contribuir al desarrollo de las habilidades de los estudiantes en la resolución de problemas.

Reflexión sobre la experiencia de formación y el objeto de estudio

En el marco de nuestra formación profesional, nos ha proporcionado una perspectiva sobre la importancia de implementar prácticas pedagógicas que desarrollan habilidades en los estudiantes. A lo largo de este proceso, hemos comprendido que, para promover la competencia en resolución de problemas, es necesario adoptar métodos que favorezcan tanto la construcción de significados como el pensamiento crítico.

En nuestra formación, uno de los mayores desafíos es transformar nuestras metodologías de enseñanza tradicionales, que a menudo se centran en la repetición de fórmulas y procedimientos matemáticos. Esto nos llevó a reconocer la importancia de diseñar tareas que permitan a los estudiantes no solo aprender a aplicar formulas, sino también a interpretar y modelar situaciones del mundo real, argumentar sus razonamientos y validar sus conclusiones de manera crítica y reflexiva.

Al enfrentar el diseño de tareas, nos dimos cuenta de que, transformar nuestra propia práctica, era necesario cambiar nuestra propia manera de entender y enseñar las matemáticas. Este proceso nos exigió tomar conciencia de que continuábamos aplicando prácticas tradicionales en el aula, aquellas con las que fuimos formadas y que, hasta ese momento, seguíamos replicando.

Por otro lado, el hecho de que nuestro objeto de estudio sea la resolución de problemas sobre triángulos oblicuángulos nos llevó a reflexionar sobre cómo este contenido matemático, caracterizado por su abstracción y de difícil comprensión, puede convertirse en una herramienta

poderosa para desarrollar competencias clave. Este análisis nos condujo a la convicción de que, si la enseñanza de los triángulos oblicuángulos se aborda a través de actividades que promuevan la exploración, visualización y justificación de resultados crea una oportunidad para que los estudiantes desarrollen habilidades y un pensamiento matemático más abstracto. Hemos descubierto que, al integrar los triángulos oblicuángulos en tareas cuidadosamente diseñadas, se puede vincular los conocimientos matemáticos con situaciones cotidianas, permitiendo a los estudiantes comprender la aplicabilidad de la trigonometría en su vida diaria.

Además, la incorporación del uso de GeoGebra como herramienta de apoyo en nuestras tareas ha transformado nuestra visión como profesoras. GeoGebra no solo facilita la construcción de modelos matemáticos y la aproximación de modelos matemáticos y la aproximación de soluciones a situaciones modeladas, sino que también nos permitió apreciar las potencialidades de esta herramienta en el aula de matemáticas. Este proceso nos ha llevado a explorar diversos usos y perspectivas de GeoGebra, comprendiendo como apoya el proceso de construcción de significados de los conceptos trigonométricos en los estudiantes y, al mismo tiempo, promueve una experiencia de aprendizaje más dinámica y significativa.

Reflexiones sobre la posible aplicación

Creemos que, si se implementan las tareas diseñadas, estas pueden tener un impacto directo en los estudiantes y ofrecer una serie de beneficios a la comunidad educativa en general, por las siguientes razones:

En primer lugar, desde los profesores hasta la gestión educativa, estas tareas pueden transformarse en un material didáctico esencial para impulsar el desarrollo del pensamiento crítico y avanzado del estudiante. La implementación de estas tareas nos puede ofrecer nuevas estrategias para enseñar geometría y trigonometría de manera más dinámica y efectiva. A través

del uso de tareas abiertas y contextualizadas, podemos adoptar una práctica pedagógica centrada en el estudiante, promoviendo una enseñanza activa y participativa. Además, la retroalimentación obtenida de los resultados de estas tareas permitirá ajustar los métodos de enseñanza según las necesidades y dificultades observadas en los estudiantes.

Por otro lado, al promover la resolución de problemas como una competencia transversal en el aula, la comunidad educativa puede avanzar hacia una cultura que valore el razonamiento crítico y la creatividad en la resolución de situaciones complejas. Esto no solo se limitará a las clases de matemáticas, sino que podrá extenderse a otras áreas del currículo, impactando positivamente en la formación integral de los estudiantes.

A su vez, estas tareas contextualizadas pueden abrir una vía para involucrar a los padres y a la comunidad local en el proceso educativo. Debido a que están basadas en situaciones del mundo real, los padres pueden ver cómo sus hijos aplican los conocimientos matemáticos a problemas que podrían enfrentar en su vida diaria, lo que puede reforzar la relación entre el hogar y la escuela. Asimismo, la comunidad local puede colaborar ofreciendo ejemplos de situaciones prácticas que los estudiantes podrían modelar en sus tareas, fortaleciendo así su aprendizaje.

De igual manera, al diseñar tareas abiertas, se crea un espacio donde todos los estudiantes pueden participar de manera activa, independientemente de su nivel de habilidad. Estas tareas pueden permitir a los estudiantes diferentes estilos de aprendizaje y capacidades para trabajar a su propio ritmo y explorar soluciones desde sus propias perspectivas, promoviendo así una mayor equidad en el aula. Además, las tareas contextualizadas pueden adaptarse para abordar situaciones y problemas relevantes para diversas comunidades, respetando y valorando la diversidad cultural y social del alumnado.

La tarea final de evaluación permitirá no solo medir cuánto han aprendido los estudiantes en términos de conceptos geométricos y trigonométricos, sino también evaluar habilidades como el razonamiento, la toma de decisiones y la argumentación. Este tipo de evaluación, más centrada en procesos que en productos, ofrecerá una visión más completa del progreso de los estudiantes y de su desarrollo cognitivo.

En el ámbito institucional, si estas tareas se implementan a nivel institucional o distrital, pueden transformarse en recursos compartidos entre los centros educativos, generando un banco de tareas que otros docentes podrán utilizar y adaptar según sus necesidades. Este enfoque colaborativo puede fomentar la creación de comunidades de aprendizaje entre profesores, donde se compartan experiencias que enriquezcan la enseñanza de las matemáticas.

Por último, al enseñar a los estudiantes a enfrentar problemas abiertos y a modelar situaciones complejas, se les puede preparar no solo para enfrentar desafíos académicos, sino también para resolver problemas en su vida personal y profesional.

Referencias

Arévalos, B. R., y Cáceres, J. S. (2022). *Enseñanzas, aprendizajes y experiencias con GeoGebra y sus funcionalidades, en la constitución del profesor de matemáticas* [Tesis de Maestría en Docencia de la matemática. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá Colombia].

<https://acortar.link/hIwdQO>

Auccahuallpa, R., Troya Vásquez, R., y Rodríguez Rodríguez, D. (2022). *Beneficios del Uso de GeoGebra en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática*.

<https://congresos.unae.edu.ec/index.php/ivcongresointernacional/article/view/507/480>

Benítez Prieto, C. S., y Giménez Amarilla, S. (2019). Estudio de la incidencia de la competencia matemática de los docentes en el desarrollo de la misma en los estudiantes de 1 ° ciclo de la Educación Escolar Básica , en cinco instituciones educativas de Asunción y Central.

REVISTA DE INGENIERÍA, CIENCIA Y SOCIEDAD, 1–9.

Camargo, L., Perry, P., Molina, Ó., Samper, C., y Vargas, C. (2024). Diversidad de acepciones de argumento: necesidad de la formación de profesores. *PNA. Revista de Investigación En Didáctica de La Matemática*, 18(3), 313–338. <https://doi.org/10.30827/pna.v18i3.26749>

Correa, B. E., Muñoz, L. E., y Villegas de Arias, C. (2015). *Geometría Euclidiana: Guías de clase para 45 lecciones*. Escuelas de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia sede Medellín.

Dede, A. T. (2019). Argumentos construidos dentro del ciclo de modelación matemática. *Revista Internacional de Educación Matemática En Ciencia y Tecnología*, 50(2), 292–314.

<https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1501825>

Díaz Fernández, T. (2014). *Enseñanza de trigonometría en 4º de la ESO con Geogebra* [Tesis de maestría en Educación, Universidad Internacional de la Rioja]. repositorio:

<https://reunir.unir.net/handle/123456789/2426>

Dündar, S. (2015). Mathematics teacher-candidates' performance in solving problems with different representation styles: The trigonometry example. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 11(6), 1379–1397.

<https://doi.org/10.12973/eurasia.2015.1397a>

Encinas- Pablos, F. J., Peralta, J., Cuevas-Salazar, O., y Ansaldo, J. C. (2017). Diagnóstico de los conocimientos básicos de matemáticas en alumnos universitarios de nuevo ingreso. *Revista de Docencia e Investigación Educativa*, 3(7), 1–13.

Escobar, M. I. (2012). *Propuesta didáctica para la enseñanza de la resolución de triángulos con el apoyo del programa Cabri Geometry* [Tesis de Maestría en enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Colombia].

<https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/20036>

Espinoza, J., Lupiañez, J. L., y Segovia, I. (2013). La invención de problemas y sus ámbitos de investigación en educación matemática. *Matemática, Educación e Internet*, 1, 1–15.

<http://funes.uniandes.edu.co/1191/>

Fiallo Leal, J. E., y Parada Rico, S. E. (2018). *Estudio dinámica del cambio y la variación*. (1^o Edición). Ediciones UIS.

Fonseca, L. M. (2023). *Modelo didáctico para el desarrollo del pensamiento matemático a través de la resolución de problemas mediado por la modelación geométrica* [Tesis doctoral en Educación Matemática, Universidad Antonio Nariño].

<http://repositorio.uan.edu.co/handle/123456789/9324>

García, M. L., y Benítez, A. A. (2013). Diseño e implementación de tareas para apoyar el aprendizaje de las matemáticas. *Formacion Universitaria*, 6(1), 13–19.

<https://doi.org/10.4067/S0718-50062013000100003>

Gómez, P., Mora, M. F., y Velasco, C. (2018). *Análisis de instrucción. En P. Gómez, formación de profesores de matemáticas y prácticas de aula: conceptos y técnicas curriculares.*

Universidades de los Andes.

González Urbaneja, P. M. (2006). Historia de la matemática: Integración cultural de las matemáticas, génesis de los conceptos y orientación de su enseñanza. *Enseñanza de Las Ciencias. Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, 9(3), 281–289.

<https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.4731>

Guevara, L., Calderón, H., Sánchez, L., y Tejedor Morales, M. Y. (2019). TRI-CRO: Aplicación para la comprobación, resolución de triángulos rectángulos, oblicuángulos y almacenamiento temporal de datos. *Revista de Iniciación Científica*, 5(1), 61–66.

<https://doi.org/10.33412/rev-ric.v5.1.2238>

Gur, H. (2009). Trigonometry Learning. *New Horizons in Education*, 57(1), 67–80.

Gusmão, T. C. R. S. (2020). Ciclo de estudio y diseño de tareas. *Educ. Matem. Pesq.*, 22(23), 666–697.

Henríquez Pizarro, D., Pinto Toledo, M., y Solar Bezmalinovic, H. (2020). Identificación de la argumentación en el desarrollo de la modelación en la sala de matemáticas. *Revista de Estudios y Experiencias En Educación*, 19(41), 391–407.

<https://doi.org/10.21703/rexe.20201941henriquez22>

Jiménez Chaves, V. E., Riego Esteche, A. P., y Sosa de Wood, P. (2022). Conocimientos y habilidades de estudiantes de 15 años en matemática, lectura y ciencias: estudio de caso pisa 2022. *UNIDA Científica*, 8, 19–24.

León-Mantero, C., Madrid, M. J., y Maz-Machado, A. (2022). La evolución de los métodos de

resolución de triángulos oblicuángulos en los libros de texto sobre trigonometría publicados en España. *Investigación En Educación Matemática*, 213–230.

<http://hdl.handle.net/10396/25590>

Leon, H. (2017). *Resolución de triángulos a partir de situaciones problema del entorno de los estudiantes*. Universidad Nacional de Colombia.

Lozada, J. A. D., y Caballero, J. R. D. (2020). La resolución de problemas desde un enfoque epistemológico. *Foro de Educación*, 18(2), 191–209. <https://doi.org/10.14516/FDE.694>

MEC. (2014). *Actualización Curricular del Bachillerato Científico de la Educación Media*.

MEC. https://www.mec.gov.py/cms_v2/adjuntos/9657?1414677082

MEC. (2020). *PRIORIZACIÓN CURRICULAR 2021- 3º ciclo de la Educación Escolar Básica y Educación Media 3º ciclo de la Educación Escolar Básica y Educación Media* (pp. 1–129).

MEC. <https://aprendizaje.mec.edu.py/dw->

[recursos/system/otros recursos/Guías de priorización y del educador para Aprendizaje/1-PRIO2021.3ºyEM.DGDE.f](https://aprendizaje.mec.edu.py/dw-recursos/system/otros_recursos/Guías_de_priorización_y_del_educador_para_Aprendizaje/1-PRIO2021.3ºyEM.DGDE.f)

MEC. (2021). Informe de resultados: Departamento de Caaguazú. SNEPE 2018. In *Instituto Nacional de Evaluación Educativa*. MEC. <https://www.ip.gov.py/ip/2020/09/09/mec-presento-resultados-del-sistema-nacional-de-evaluacion-del-proceso-educativo/>

Mello Román, J. D. (2017). El enfoque de competencia en el currículo de Matemática de al Educación Media. La perspectiva docente sobre su implementación. *Revista Internacional de Investigación En Ciencias Sociales*, 3(2), 14–24. <https://doi.org/10.33996/reba.v3i2.6>

Molina, O., Camargo, L., Vargas, C., Samper, C., y Perry, P. (2024). Una propuesta para la formación de profesores de matemáticas: El caso de la argumentación matemática. *RIME*, 1(1), 151–185. <https://doi.org/10.32735/s2810-7187202400013356>

- Ortiz, A., Aravena, M., Solar, H., y Cárdenas, L. (2019). Modelización en el aula matemática. *XV CIAEM-IACME, Medellín, Colombia.*
- Padilla-Escorcia, I. A. (2022). Caracterización del conocimiento especializado del profesor en la modelación de las funciones trigonométricas en GeoGebra. *Encuentros*, 20(2), 23–39.
- Pettersen, A., y Nortvedt, G. A. (2017). Identificación de demandas de competencia en matemáticas. Tareas: reconocer lo que importa. *Int J de Ciencias y Matemáticas*.
<https://doi.org/10.1007/s10763-017-9807-5>
- Ríos-Cuesta, W. (2021). Argumentación en educación matemática: elementos para el diseño de estudios desde la revisión bibliográfica. *Revista Amazonia Investiga*, 10(41), 96–105.
<https://doi.org/10.34069/ai/2021.41.05.9>
- Roa Rocha, J. C. (2021). Importancia del aprendizaje significativo en la construcción de conocimientos. *Revista Científica de FAREM-Estelí*, 63–75.
<https://doi.org/10.5377/farem.v0i0.11608>
- Rodríguez, G., y Sgreccia, N. (2021). Predisposición y comprensión de estudiantes de secundaria cuando resuelven problemas trigonométricos. *Números. REvista Didáctica de Las Matemáticas*, 108, 119–148.
- Sánchez, R. W., y Borja, A. M. (2022). GeoGebra en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. *Dominio de Las Ciencias*, 8(2), 33–52.
<http://dx.doi.org/10.23857/dc.v8i2.2737>
- Santos, M. (2008). La Resolución de Problemas Matemáticos: Avances y Perspectivas en la Construcción de una Agenda de Investigación y Práctica. *Investigación En Educación Matemática XII*, 1985, 1–24. [file:///C:/Users/User/Downloads/MSantosTSEIEM08](file:///C:/Users/User/Downloads/MSantosTSEIEM08%20resoluci%20n%20de%20problemas.pdf)
resolución de problemas.pdf

- Segura, C. (2018). *Representaciones semióticas para interpretar y solucionar triángulos oblicuángulos* [Tesis de Maestría en Educación en la Modalidad de Profundización, Universidad Externado de Colombia]. <https://bdigital.uexternado.edu.co/handle/001/1216>
- Sepúlveda, A., Medina, C., y Sepúlveda, D. (2009). La resolución de problemas y el uso de tareas en la enseñanza de las matemáticas. *Educación Matemática*, 21(2), 79–115. http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262009000200004&lng=es&nrm=iso&tlng=es
- Solar Bezmalinovic, H. (2009). *Competencias de modelización y argumentación en interpretación de gráficas funcionales: propuesta de un modelo de competencia aplicado a un estudio de caso* [Tesis doctoral en Didáctica de la matemática, Universitat Autònoma de Barcelona]. <http://www.tdx.cat/handle/10803/4725>
- Solar Bezmalinovic, H., Aravena Díaz, Ma., Goizueta, M., y Ulloa Sánchez, R. (2019). Desarrollo de la modelación por medio de una gestión argumentativa en el aula de matemáticas. *XV CIAEM-IACME, 2012*.
- Ukobizaba, F., Nizeyimana, G., y Mukuka, A. (2021). Estrategias de evaluación para mejorar la resolución de problemas matemáticos de estudiantes Habilidades : una revisión de la literatura. *Revista EURASIA de Educación En Matemáticas, Ciencias y Tecnología*. <https://doi.org/doi.org/10.29333/ejmste/9728>