UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

Educadora de educadores

EXPLICACIÓN DEL MOVIMIENTO BROWNIANO: UN ABORDAJE PARA EL ESTUDIO DE SISTEMAS MICROSCÓPICOS EN FÍSICA ESTADÍSTICA.

JULIAN DAVID PEÑUELA SARTA

Código: 2018146037

Universidad Pedagógica Nacional de Colombia

Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de Física

Bogotá D.C

2023

EXPLICACIÓN DEL MOVIMIENTO BROWNIANO: UN ABORDAJE PARA EL ESTUDIO DE SISTEMAS MICROSCÓPICOS EN FÍSICA ESTADÍSTICA.

Julián David Peñuela Sarta.

Trabajo de grado para optar al título de Licenciado en Física

Asesorado por:

Sandra Bibiana Avila Torres

Línea de profundización:

La enseñanza de la física y la relación física matemática.

Universidad Pedagógica Nacional de Colombia

Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de Física

Bogotá D.C

2023

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo es el resultado del apoyo de muchas personas que, gracias a Dios, me han acompañado y respaldado en mi formación y crecimiento como persona. De igual manera, deseo dedicarle este trabajo a mi difunta abuela, quien me formó y me brindó los valores que me han permitido ser mejor cada día. También, a mi madre, quien, aunque en la distancia, siempre me ha apoyado, y a mi asesora de grado la profesora Sandra Avila, maestra que, sin su guía y apoyo, hasta el día de hoy, no habría logrado culminar este proceso. A todas, estaré siempre ETERNAMENTE AGRADECIDO.

CONTENIDO

ÍNDICE DE TABLAS

INTRODUCCIÓN

Este trabajo de grado se centra en el análisis de referentes bibliográficos y documentos históricos del movimiento browniano, enfocándose en los métodos teóricos surgidos para describir la cinemática de las observaciones realizadas por Robert Brown en 1828. Esto tiene como finalidad presentar dicho fenómeno como concepto didáctico con la capacidad de permitir a los estudiantes del pregrado en licenciatura en física de la Universidad Pedagógica Nacional llevar a cabo una serie de actividades. Estas actividades, orientadas a la modelización de la cinemática de partículas brownianas, buscan obtener herramientas físico - matemáticas que guíen a los estudiantes hacia resultados beneficiosos en el curso de física estadística.

El resultado de la investigación es una guía didáctica que, orientada desde la pedagogía proyectiva, presenta una serie de actividades experimentales y teóricas. Estas actividades tienen como objetivo que el estudiante construya en ideas alrededor del movimiento aleatorio, funciones de distribución de probabilidad, y otras herramientas para la construcción de la dinámica molecular.

En el primer capítulo, se presentan los comienzos del movimiento Browniano, detallando los objetivos de investigación de Robert Brown y sus consideraciones experimentales. Además, se explora cómo, históricamente, desde la termodinámica, se buscó resolver las dificultades encontradas por Robert Brown.

El segundo capítulo, está dedicado al análisis de los documentos que fueron más relevantes para la investigación en el entendimiento de la cinemática de las partículas brownianas. Se realiza así una descripción crítica de los artículos de Albert Einstein que tratan sobre la modelización teórica de los resultados de Brown. A su vez, se contrastan sus resultados con los trabajos de personajes como Langevin y Smoluchowski, con la finalidad de filtrar el método más adecuado para el diseño de la guía didáctica.

En el tercer capítulo, se presenta las actividades que se desarrollan en la guía didáctica y el tipo de pedagogía empleado en esta misma, mostrando que la guía didáctica está diseñada de tal manera que se trabaja desde un tema clave (el movimiento de partículas brownianas) que se articula en un proyecto que involucra al estudiante en su proceso de ejecución y evaluación para que su proceso de aprendizaje logre ser significativo, los temas desarrollados en esta van desde la replicación de los montajes experimentales de Robert Brown, las posibles soluciones propuestas desde el energetismo, la descripción probabilística del movimiento de la partícula browniana y las soluciones desde la teoría cinético-molecular.

PROBLEMÁTICA

En la enseñanza de la física uno de los objetivos principales que se desea alcanzar es mostrar las diferentes formas de medida que se usan en ciencias para lograr entender el universo a través de lo que logramos cuantificar, dichas medidas nos ayudan a conocer propiedades del fenómeno observado, como lo puede ser su posición respecto a la persona que hace dicha medida, su velocidad, temperatura, presión, etc. Es así como haciendo uso de las relaciones de medida, podemos entender de qué forma interactúan los cuerpos bajo ciertas condiciones en el equilibrio, en el estudio de sistemas en física estadística.

De esta forma es como se procura enseñar estas relaciones de medida, la mayoría de las veces, con la finalidad de mostrar a los estudiantes que, si se puede caracterizar el estado de equilibrio de cierto fenómeno, se logra describir éste de forma completa, dándoles a entender que siempre conseguirán caracterizar la física de forma determinista. En sí, dicho modelo es válido cuando se estudian sistemas macroscópicos de pocas partículas interactuando; la dificultad se ve cuando los estudiantes se enfrentan con sistemas de muchas partículas microscópicas, ya que se cambian las interpretaciones en el formalismo matemático aludido en la enseñanza habitual, que enfatiza más en una visión instrumentalista, dejando de lado tanto los aspectos conceptuales básicos, como las diferentes interpretaciones que han surgido y de esta forma se podría plantear que obstaculiza la comprensión por parte de los estudiantes (Greca & Freire, 2014).

Es por tanto que presentar formas alternas de describir los modos de explicación para la enseñanza de la física brinda nuevas perspectivas, ya que es allí donde se articulan las formas de entender la naturaleza. Para ello se requiere reconocer que estos modos siguen una secuencia histórica, de forma que se posibilite la construcción de conocimiento a partir de preguntas que surjan en el entorno del aula (Martinez, 1997); por lo tanto, se hace conveniente establecer un desarrollo transitivo entre los procesos macroscópicos a los microscópicos, el cual puede darse a través de un fenómeno cuya explicación permita adentrarse a la construcción de explicaciones mediante el conocimiento probabilístico.

En concordancia con lo anterior, se presenta la posibilidad de realizar dicha introducción mediante un fenómeno que permita que las primeras explicaciones sean desde la medición de variables macroscópicas, y que a medida que se profundice en el comportamiento de este fenómeno, se liguen las explicaciones probabilísticas que puedan sustentar sus hipótesis. hasta el momento relacionadas con las variables macroscópicas.

Por lo tanto, en el presente trabajo de grado se propone la revisión alrededor de la fenomenología y la explicación del movimiento de partículas brownianas, como candidato capaz de permitirle al estudiante de pregrado que cursa la materia de física estadística sobrellevar las dificultades para conceptualizar el pensamiento probabilístico, considerando dicha revisión como una herramienta conceptual que permite visibilizar los procesos estadísticos en las descripciones de sistemas microscópicos que dan explicación a sistemas macroscópicos, permitiéndoles hacer las correspondientes abstracciones de cómo la cinemática molecular de la materia, da sustento a las leyes que rigen la fenomenología macroscópica en termodinámica.

De lo ya mencionado los estudiantes tienden a analizar trayectorias o variables de estado termodinámicos (estados macroscópicos), en sistemas de pocas partículas interactuantes y por tanto, al momento de enfrentarse con fenómenos microscópicos de muchas partículas notan que no es posible tener el conocimiento exacto respecto a las mediciones que desean hacer desde los métodos a los que están acostumbrados en el fenómeno observado, por lo que se hace necesario reforzar la claridad respecto a las herramientas estadísticas que modela la fenomenología de los sistemas microscópicos (Viau, Moro, Zamorano, & Szigety, 2008).

Es así como para la realización del trabajo de grado se propone una alternativa respecto a la forma en la que se abarca la conceptualización de los fenómenos en física estadística; principalmente porque a través de ésta se puede hacer un acercamiento al entendimiento involucrado en el estudio del mundo microscópico, por ende, si se establece un modelo que le permita al estudiante relacionar las variables macroscópicas con las microscópicas, puede ser provechoso usar un fenómeno, que de forma transitiva pase de la caracterización de variables macro a los micro.

Es así como el fenómeno que se postula es la cinemática de partículas brownianas, ya que se puede revisar de forma histórica la observación de variables macroscópicas en este fenómeno y lo que presentó la necesidad de buscar diferentes formas de explicación que condujeron a un cambio de pensamiento y a una nueva forma de medir y comenzar a relacionar dicha medida con variables aleatorias que daban cuenta del comportamiento del sistema de forma microscópica, además, cómo dichas medidas microscópicas terminaban dando sustento a las ya hechas de forma macroscópicas (Mayorga, 2020).

Teniendo en cuenta lo anterior se planteó la siguiente pregunta de investigación y los respectivos objetivos específicos.

¿Cómo a través del comportamiento de las partículas brownianas, se puede conceptualizar los saberes necesarios para comprender los procesos probabilísticos en las interacciones de sistemas microscópicos para estudiantes de pregrado de la licenciatura en física en la Universidad Pedagógica Nacional?

OBJETIVOS

Objetivo General

Diseñar una guía didáctica que le permita a los estudiantes del curso de física estadística de la Universidad Pedagógica Nacional, tener una alternativa para la conceptualización de las nociones probabilísticas a partir de la fenomenología presente en el estudio del movimiento browniano.

Objetivos Específicos

- Realizar una revisión de los trabajos y documentos que tienen mayor impacto histórico alrededor del estudio de las partículas brownianas.
- Definir las herramientas estadísticas necesarias para potenciar la comprensión de los análisis probabilísticos a partir del estudio del movimiento de las partículas brownianas.
- Elaborar una propuesta de guía didáctica que emplee la pedagogía proyectiva, con el fin de dar una alternativa para el abordaje de los procesos probabilísticos a través del movimiento browniano.

ANTECEDENTES

Los antecedentes recolectados necesarios para el presente trabajo de grado son investigaciones relacionadas a la enseñanza de la física estadística o a la fenomenología del movimiento Browniano. Es así como inicialmente se tiene a (Mendez, 2019) en el artículo "Introducción del concepto de probabilidad en física desde la mecánica estadística" donde presenta un trabajo que busca que los estudiantes conciban el concepto de probabilidad física usando la distribución de Maxwell-Boltzmann aplicada al gas clásico, para dicho trabajo la metodología se dividió en tres partes: la primera, en donde se contextualiza al estudiante en los conceptos básicos de la teoría de los gases, una segunda que consiste en distribuir los estados de pocas partículas y un tercero que consiste en ya distribuir un gran número de partículas en estudiantes de secundaria. Este trabajo sirvió para dar un vistazo de cómo adentrarse al modelo estadístico que se utiliza en el entendimiento del gas clásico y permitió ver una implementación para conocer alcances, fortalezas y debilidades al momento de llevar las ideas de la mecánica de Boltzmann al Aula.

Por otra parte, se tiene a (Mayorga, 2020), autor del artículo, “Albert Einstein 1905 de las fluctuaciones energéticas a las fluctuaciones moleculares”, quien realiza una investigación histórica alrededor de la construcción conceptual del movimiento Browniano; revisando los Artículos originales de personas que llegaron abordar las temáticas relacionadas al estudio de partículas brownianas, tomando referentes a Einstein, Perrin J; Van’t Wolff, Smoluchowski, Poincaré, etc.

Mayorga presenta la trayectoria histórica hecha para desarrollar el formalismo descriptivo de la presión Osmótica y las leyes de la difusión de solventes en medios acuosos. El desarrollo teórico publicado por Einstein desde su análisis termodinámico hasta su desarrollo estadístico y por último se muestran las conclusiones experimentales hechas por Perrin J; importantes ya que presenta las verificaciones experimentales del trabajo realizado por Einstein. El trabajo de Mayorga, benefició a la investigación ya que muestra la relación desarrollada para el entendimiento de las partículas brownianas, permitiendo ver cómo la física estadística tiene los alcances para relacionar fenómenos macroscópicos y microscópicos de tal forma que, permita dar explicaciones de cómo las interacciones microscópicas de la materia construyen las variables necesarias para describir el sistema de forma macroscópica.

Por último, se presenta a (Zarate, 2013) autor del trabajo de grado “Lo continuo y lo discreto una discusión desde el movimiento Browniano”, donde muestra un trabajo de impacto en el Colegio de Hermanos Maristas Champagnat de Bogotá, ubicado en la localidad de Teusaquillo. Con el fin de beneficiar esta comunidad, se realiza una indagación histórica para mostrar cómo se ha desarrollado el entendimiento de la materia contrastando los puntos de vistas continuos y discretos de ésta, para la implementación de una guía que presenta lo recolectado, a fin de dar un panorama más amplio sobre las ideas de la corriente atomista en la población en la que se realiza la implementación de dicha guía.

Es así como este antecedente le es importante para el presente trabajo de grado ya que permitió visualizar, con resultados en el aula, que la fenomenología alrededor del movimiento Browniano puede ser una herramienta para ayudar a los estudiantes a reforzar su pensamiento estocástico en el contexto de las interacciones microscópicas.

CAPITULO I. DESCRIPCIÓN DEL FENÓMENO BROWNIANO A PARTIR DE 1828 HASTA 1911.

El propósito principal de este capítulo es sumergir al lector en el primer análisis documentado del movimiento browniano, destacando su evolución histórica a través de las diversas posturas que se han desarrollado a lo largo del tiempo.

En este sentido, es fundamental explorar cómo las descripciones del botánico inglés Robert Brown generaron un legado de investigación que influyó en generaciones posteriores de científicos e investigadores. Su trabajo no solo impactó la ciencia, sino también las matemáticas. Es esencial presentar las diversas corrientes del pensamiento humano que surgieron a partir del estudio de la materia y la energía. Estos desarrollos dieron lugar a la consolidación de marcos conceptuales que ofrecen claridad en la comprensión del mundo que nos rodea.

El análisis del movimiento browniano no solo es relevante en términos científicos, sino que también abre la puerta a una comprensión más profunda de cómo las ideas y observaciones iniciales de Brown sentaron las bases para avances significativos en campos interrelacionados. Desde la física hasta la matemática y la filosofía, el estudio del movimiento browniano ha desencadenado discusiones e innovaciones que han redefinido la manera en que percibimos y comprendemos el universo y su funcionamiento.

El análisis detallado de este fenómeno no solo ilustra la evolución de la comprensión científica, sino que también destaca cómo el pensamiento humano, impulsado por la curiosidad y la necesidad de comprender el entorno, ha forjado nuevos caminos en el conocimiento. A través de este capítulo, se busca ofrecer una panorámica histórica que no solo resalte la evolución del estudio del movimiento browniano, sino que también muestre cómo este campo ha nutrido el progreso en diversas disciplinas, contribuyendo al desarrollo intelectual y científico a lo largo del tiempo.

1.1. Robert Brown y la observación de partículas granulares.

Nuestra cotidianidad nos rodea de ejemplos o cuerpos que podríamos describir como partículas brownianas; el papel que tiene Robert Brown en la historia es el poder describir y clasificar el movimiento de uno de estos muchos ejemplos que nos otorga el mundo natural y ser el precursor del estudio más riguroso del movimiento de dichos objetos bajo una lupa más deductiva, es asi como en 1828 Rober Brown publica en la cuarta edición de la *Philosophical Magazine and Annals* *of Philosophy* un artículo titulado "*A Brief Account of Microscopical Observations* (…)". En este documento, Brown menciona que, al observar fragmentos de polen suspendidos en agua, muchos de ellos estaban en un evidente movimiento; que se caracterizaba por ser totalmente irregular (Mayorga, 2020).

Brown describe que, después de frecuentes observaciones, estos movimientos eran de una naturaleza tal que estaba seguro de que no surgían de corrientes internas (flujo) en el fluido ni de su gradual evaporación. Si no, afirma que pertenecían a la partícula misma. Todo esto bajo la mirada de un "microscopio simple" de lente de una 1/32 nd de pulgada. De esta observación surge una hipótesis por parte de este autor, en la cual se plantea la búsqueda de evidencia respecto a la existencia de "fuerzas vitales" en los materiales vivos, e incluso diferenciando dichas fuerzas en activas y pasivas para los movimientos ejercidos por las partes macho y hembra de plantas (Brown, 1828).

Luego Brown procede a experimentar con granos de polen de plantas recientemente muertas y otros pertenecientes a plantas muertas de hace 100 años, descubriendo que la edad y o vitalidad de las plantas no importaba, ya que los fragmentos se movían de la misma manera, dicho experimento consistía en colocar las partículas de polen en una película de agua y observar sus movimientos en el microscopio. Con esto propone que el movimiento observado era intrínseco a los fragmentos independientemente de si la planta de procedencia estaba viva o muerta; dicho experimento también fue replicado en materiales orgánicos fosilizados, productos vegetales, tejidos animales entre otros, en donde obtuvo el mismo resultado y llega a la conclusión de que dicho movimiento estaría presente siempre y cuando las partículas fuesen lo suficientemente pequeñas alrededor de los micrómetros; él no sabía por qué ocurría el movimiento, pero sí concluye que no era una forma de distinguir entre materia viva de la no viva (Brown, 1828).

Otros investigadores de la época compartían el interés de Brown en responder a la pregunta de por qué las partículas se movían. Tras la muerte de Brown en 1858 se le atribuye a este movimiento el nombre de "movimiento browniano". Dos años después atrajo la atención de Christian Wiener quien afirmó que dicho movimiento se debía al liquido mismo en donde se suspendían las partículas. Dicha idea fue apoyada por varios investigadores de la época, en donde afirmaban que el movimiento se les atribuye a las cualidades térmicas del líquido, mostrando asi un posible camino, para demostrar la veracidad de la teoría mecánica del calor.

Así se abre un terreno de investigación rico para indagar en las respuestas a este movimiento irregular. No solo desde una perspectiva biológica, sino también desde el interés mecánico y la búsqueda de caracterizar sus propiedades termodinámicas.

1.2. La termodinámica y su relación con la construcción del concepto de molécula.

La termodinámica es una rama esencial de la física que estudia los procesos que involucran la transferencia de energía, particularmente en relación con las propiedades y el comportamiento de la materia. Surge como una amplia síntesis que buscó integrar la explicación de diversas fuerzas presentes en procesos mecánicos, eléctricos, químicos, térmicos y magnéticos. Este proceso de unificación comienza abordando la integración de los estudios sobre calor y mecánica, inicialmente considerados como disciplinas independientes. Su objetivo principal es comprender y predecir los cambios en la energía de un sistema, asi como los efectos que estos cambios tienen sobre las propiedades del sistema y su capacidad para realizar trabajo (Solbes, Furió-Gómez, & Furió Mas, 2007).

En la historia de la termodinámica hubo aporte de muchos científicos como lo son el conde de Rumford, Davy y Meyer, entre otros, quienes a lo largo del tiempo se proponen la tarea de establecer marcos conceptuales capaces de explicar cómo diferentes procesos que se presentan en el mundo natural se pueden explicar a través del concepto de energía. Una de las ideas de mayor discusión fue el entendimiento del calor y cómo la comunidad científica quedó dividida al momento de buscar explicaciones que sustentaran la forma en que este fenómeno se logra modelar correctamente.

Bacon, Hooke y Newton mantenían en el siglo XVII que “el calor era una propiedad del cuerpo calentado resultando del movimiento (vibratorio) o agitación de sus partes” (Reif, 1965) Luego en el siglo XVIII proliferaban teorías basadas en fluidos, sustentando la combustión de la materia mediante el intercambio de una especie de fluido denominado ‘flogisto' y concebido como el principio de inflamabilidad de los cuerpos (Reif, 1965) En relación al calor, surge la "teoría del calórico" que inicialmente establecía la distinción entre la teoría del calor sensible y el calor latente, propuesta por J. Black. Sin embargo, esta teoría fue cuestionada por Benjamín Thompson (1753-1814), conocido como conde de Rumford. Thompson se sumergió en el estudio de sistemas de calentamiento a vapor mientras supervisaba la actividad de perforar cañones de bronce en los talleres del arsenal militar de Múnich llevó a cuestionar la esencia misma del calórico. En este procedimiento, se puso en duda la naturaleza sustancial del calórico al notar que la fuente de calor originada por la fricción del dispositivo que cortaba las virutas en el bronce de los cañones parecía ser inextinguible. En consecuencia, surgió la hipótesis más plausible de que el calor podría ser interpretado como un tipo de movimiento (Solbes, Furió-Gómez, & Furió Mas, 2007).

La crítica del conde de Rumford respecto a la esencia sustancial del calórico continuó en el siglo XIX, en un contexto científico y social notablemente diferente. En esta época, se buscaban explícitamente conexiones entre la mecánica, el calor, la electricidad y la química. Durante este siglo, figuras como James Prescott Joule, entre 1843 y 1849, presentaron demostraciones experimentales que revelaban cómo la energía mecánica podía transformarse en calor, mediante un dispositivo de su propia invención. Joule diseño un dispositivo el cual consistía en el uso de unos pesos sujetos por un sistema de poleas el cual está unido a un dispositivo con un fluido en su interior el cual, por fricción al caer los pesos, el fluido aumentaba su temperatura. Probando con diferentes fluidos como agua, mercurio y grasa de ballena, Joule llego a la conclusión que la fuerza viva (energía cinética) debía conservarse a un equivalente igual, cuyo experimento mostraba que debía ser calor cuyos resultados quedaron publicados en su artículo "*Sobre el equivalente mecánico del calor según es determinado a partir del calor disipado en la fricción de los fluidos*", que fue presentado a la reunión de la asociación británica de Oxford de 1847 (Pérez, 2005).

Por otro lado, se destaca el trabajo de Nicolas Leonard Sadi Carnot, quien en 1824 publica sus "*Reflexions sur la puissance motrice du feu et sur les machines propres à augmenter cette puissance*". En esta obra, aborda la mejora del rendimiento de la "potencia motriz del fuego" en las máquinas térmicas. Carnot emplea el término "calor" para referirse al proceso de transferencia de energía térmica de un cuerpo a otro que se encuentra a una temperatura diferente, y utiliza la palabra "calórico" para describir lo que hoy denominamos como la "energía interna" del sistema material debido a su temperatura específica (Solbes, Furió-Gómez, & Furió Mas, 2007).

El renombrado "teorema de Carnot" expresaba que el trabajo máximo realizado por una máquina térmica es función de la cantidad de calórico y de las temperaturas del foco caliente y del frío entre los que trabajaba la máquina. El calor intercambiado entre los dos focos se aprovechaba para producir trabajo y la cantidad de calor que pasa de un foco al otro se mantiene constante. En este trabajo se llegaba a la conclusión que no podía aprovecharse todo el calor de la fuente caliente para convertirlo en trabajo (Solbes, Furió-Gómez, & Furió Mas, 2007).

Lord Kelvin (1849), entre otros que defendían fuertemente el análisis de procesos físicos a través del entendimiento energético y el respaldo total de la naturaleza energética del calor (Reif, 1965) da a conocer la contradicción entre los resultados de Joule y Carnot demostrando que el calor se podía producir de manera inagotable haciendo un trabajo de fricción y que por lo tanto la energía se degradaba, mientras que Carnot suponía que el calórico siempre se conservaba. Dicha diferencia fue resuelta por Rudolf Clausius en 1850 en su memoria publicada en Poggendorff's Annalen de la mano del nacimiento de la teoría daltoniana. Aquí se considera al calor como la energía cinética asociada al movimiento de las moléculas de la materia, dando razón a la hipótesis de Carnot cambiando la conservación del calórico por el principio de conservación de la energía total de un sistema aislado, lo que más adelante se consideraría la primera ley mecánica del calor (Solbes, Furió-Gómez, & Furió Mas, 2007)

Estos trabajos ya mencionados anteriormente, ponen a la energía como la entidad ontológica de mayor uso para el entendimiento y predicción de fenómenos físicos. Un distinguido partidario de dicha afirmación es Wihelm Ostwaldl, para quien la energía era un importante y unificador en las ciencias, dando afirmación como; "Ninguno permite expresar tantas cosas relativas al contenido de este mundo, ni expresarlas con tanta precisión y unirlas tan perfectamente entre sí. Este concepto es la energía" (Zarate, 2013). Sin embargo la energía en su misma esencia conserva un gran misticismo al momento en el que busca describirse, ya que no es una entidad que se logre percibir con los sentidos, quedando por ende muy a la interpretación del investigador la misma naturaleza de la energía, con esto dicho no es de extrañar que la teoría que se contrapone a este modelo tenía que tener sustento en algún elemento que se logre percibir con los sentidos, es asi como nace la teoría mecanicista quien propone que todos los efectos que ocurren en la naturaleza de forma macroscópica son debidos a procesos microscópicos que se generan a nivel atómico (Zarate, 2013).

Uno de los promotores más fuertes de esta teoría es l. Boltzmann quien contrario al pensamiento energetista de Ostwall, menciona que "la energía parece estar todavía muy lejos de poder solucionar todos los problemas que hemos esbozado aquí. Hasta que lo haya logrado no se puede emitir un juicio sobre las hipótesis auxiliares que la energética necesita para una tarea semejante..." (Zarate, 2013), criticando directamente a la energía como concepto ontológico unificador para la explicación de todos los fenómenos diciendo que contrario a esto dicha forma de ver la naturaleza presenta problemas en su capacidad explicativa, sobre todo los problemas específicos de termodinámica que ni siquiera la teoría cinético molecular de la materia ha podido demostrar. Con esto dicho Boltzmann afirma que el concepto átomo en si no puede ser considerado como la entidad ultima de la materia, ya que el átomo no debe ser considerado como un concepto, si no como un ente real que posee ciertas propiedades, y el entender estas diferentes propiedades es cómo es posible encontrar explicaciones a los diferentes fenómenos en la naturaleza (Zarate, 2013).

Así, a lo largo de la historia, hemos observado y relacionado cómo, si bien la energía cuenta con un sólido respaldo tanto teórico como experimental, la teoría atomista aporta un análisis novedoso que logra integrar el paradigma energético y amplía la rama de estudio hacia el entendimiento molecular. Este enfoque se ve fuertemente respaldado por la teoría del movimiento Browniano, cuyos fundamentos quedan plenamente respaldados en el artículo "*Les Atomes*" de Jean Perrin (Zarate, 2013).

La teoría atomista no solo enriquece nuestra comprensión de los fenómenos estudiados desde el concepto de energía, sino que también proporciona una base más sólida para explorar el mundo a nivel molecular.

1.3. Procesos difusivos en solventes, análisis desde la teoría energetista.

Como ya se mencionó anteriormente se ha desarrollado por la comunidad científica dos métodos predilectos al momento de estudiar los fenómenos naturales a los cuales se les desea dar explicaciones, la primera es a través del análisis energético cuando el fenómeno de estudio llega en un equilibrio térmico, y el otro método consiste en realizar una descripción de forma mecánica de las partículas materiales que componen dicho fenómeno.

Teniendo presente lo ya mencionado esta sección está dedicada a revisar un análisis a las observaciones de Robert Brown desde una mirada energetista.

En esencia, cuando miramos los resultados previstos por Brown, podemos ver que el movimiento de sus partículas granulares se debe al proceso de difusión de una mezcla en la cual una de las dos sustancias está constituida por un número muy reducido de componentes materiales, a tal grado que se puede hablar de la cantidad de partículas que componen al disolvente. (cabe aclarar que cuando se hable de partículas no se está aceptando de forma directa la existencia atómica si no se estará hablando de cuerpos masicos esféricos con una cierta cantidad de material) es así como si estudiamos los experimentos de Brown a la luz de la termodinámica, podemos establecer que al momento en el que se deja reposar las partículas de polen en la placa con agua estas comenzaran a interactuar con este en forma de mezcla hasta que alcancen el equilibrio térmico, ya en este momento se logra definir una cantidad de variables que en el equilibrio quedan completamente determinadas y para facilidad en los cálculos todas estas deben ser funciones homogéneas de primer grado respecto a todas las funciones aditivas de primer grado (Landau & Lifshitz, 1950).

El análisis realizado a continuación es presentando por Landau en 1950 el cual realiza una descripción del fenómeno difusivo, no con la intención de demostrar el movimiento Browniano, pero si brinda las herramientas teóricas convenientes para entender cómo se puede modelar el movimiento browniano desde una mirada energetista, con la finalidad de ver los alcances y desaciertos de modelar el movimiento Browniano desde el concepto de energía.

Es asi como desde una mirada energetista la disolución, Landau la definido a través de los potenciales (los cuales representan la energía que tiene cada sustancia o cuerpo masico para generar una reacción en el fenómeno), uno por cada sustancia en donde podremos observar que el potencial del soluto (en este caso partículas granulares), será dependiente de N, numero de partículas granulares y n pasara a ser el correspondiente masico del disolvente (en este caso particular el medio por el cual se mueven las partículas brownianas), es por ende que nuestro potencial para el soluto tome la forma:

$$\phi_o(T, P, N) \qquad (1.)$$

Donde las variables: temperatura (T), presión (P) y numero de partículas del soluto (N)se miden en el equilibrio completo del fenómeno observado, ya con esto dicho establecemos el potencial del disolvente de la forma:

$$\mu_o(T, P) \qquad (2.)$$

Ya establecida la nomenclatura entre potenciales y variables dependientes de estos, Landau establece que la relación entre el potencial del soluto y del disolvente está dada por la relación:

$$\phi_o(T, P, N) = N\mu_o(T, P) \qquad (3.)$$

Cabe aclarar que la ecuación (3.) solo sería válida para el caso puntual en el que, al momento de juntarse las dos sustancias no se produce ningún tipo efecto; es asi como se hace necesario agregar otro termino, que especifique la energía liberada al momento de la reacción, un nuevo potencial

α que dependa de las variables de estado ya establecidas de tal forma que obtengamos un:

$$\alpha : \alpha(T, P, N) \qquad (4.)$$

Este nuevo potencial descrito en (4.), representara la energía liberada por la interacción de sustancias, el cual debe ser agregado en la ecuación (3.), por conservación de la energía se deben colocar los potenciales en forma de adicción de términos, de tal manera que obtenemos la expresión:

$$\phi_o(T, P, N) = N\mu_o(T, P) + n\alpha(T, P, N) \qquad (5.)$$

Ya con este término tenemos balanceada una ecuación que tiene presente la energía potencial del soluto, del solvente y de la energía que se libera al momento en que las dos sustancias se mezclan, sin embargo, hay que tener presente que existe una energía libre umbral ($\mathcal{U}$) debido a la manera en la que se distribuyen las n partículas de polen del disolvente teórico, que se describe como:

$$\mathcal{U} = Tln(n!) \qquad (6.)$$

Que representa la forma en la que se logran mezclar las diferentes partículas brownianas con las entidades másicas del soluto. Ya agregando este último parámetro, quedará completamente balanceada nuestra ecuación de energía. Cabe decir que el término que se agrega es completamente estadístico, ya que muestra la relación de permutar las diferentes moléculas de las sustancias. Se logra ver que, aunque Landau en su intento por realizar una descripción estadística, se hace necesario agregar la interacción molecular para poder llegar a términos semejantes a lo que muestran los resultados experimentales (Landau & Lifshitz, 1950), optando así por la forma:

$$\phi_o(T, P, N) = N\mu_o(T, P) + n\alpha(T, P, N) + Tln(n!) \qquad (7.)$$

Reorganizando términos, con la finalidad de tener una expresión más corta y homogénea respecto a los términos N y de n, hacemos uso de la relación $Tln(n!) = Tnln\left(\frac{n}{d}\right)$, para obtener la ecuación:

$$\phi_o(T, P, N) = N\mu_o(T, P) + nTln\left(\frac{n}{d}e^{\frac{\alpha}{T}}\right) \qquad (8.)$$

De esta última expresión podemos ver que si deseamos que la función $\phi_o(T, P, N)$ sea una función homogénea de primer grado respecto a N y n, se debe hallar una función que remplace a la función $\boldsymbol{e^{\frac{\alpha}{T}}}$ y a la vez esta sea inversamente proporcional a N, tal que obtengamos la expresión:

$$\phi_o(T,P,N) = N\mu_o(T,P) + nTln\left(\frac{n}{dN}\right) + nTln(f(P,T)) \qquad (9.)$$

Donde se puede establecer una nueva función: $\psi(P,T) = Tlnf(P,T)$, de tal manera que nos queda la expresión:

$$\phi_o(T,P,N) = N\mu_o(T,P) + nTln\left(\frac{n}{dN}\right) + n\psi(P,T) \qquad (10.)$$

Esta expresión ya nos muestra cómo el potencial del soluto queda completamente homogeneizado respecto a las variables N y n, tal que el potencial en el equilibrio queda definido como:

Potencial químico dependiente de N	Potencia químico dependiente de n
$\mu' = \frac{\partial \phi_o}{\partial N}$ $\mu' = \mu_o(T,P) - T\frac{n}{N}$ $\mu' = \mu_o(T,P) - Tc$	$\mu'' = \frac{\partial \phi_o}{\partial n}$ $\mu'' = Tln\left(\frac{n}{N}\right) + \psi$ $\mu'' = Tln(c) + \psi$

Tabla 1. Sistemas de ecuaciones de difusión para mezclas no homogéneas.

Se evidencia que el análisis efectuado por (Landau & Lifshitz, 1950) sobre de la descripción de mezclas no homogéneas, ilustra la necesidad de abordar directamente la interacción molecular desde la perspectiva del análisis energético. Esto pone de manifiesto las dificultades inherentes al enfoque energético al tratar fenómenos como el movimiento Browniano o procesos de mezcla donde el solvente contiene escasa cantidad de materia. Este escenario abre la puerta para que la teoría atomista cobre fuerza como un marco conceptual capaz de describir fenómenos que el concepto de energía no logra abordar con precisión.

Hay que denotar que la expresión encontrada en la tabla 1 de igual forma logra probar los análisis ya dados por Brown, ya que se establece que la energía de las partículas brownianas es directamente proporcional a la temperatura y que dicha temperatura aumentará la actividad de las partículas brownianas, sin embargo, este mismo análisis muestra la necesidad de establecer entidades corpusculares que ya desde el trabajo de Robert Brown se establecían.

Así, es como se logra ver que, aunque la descripción desde el concepto de energía confirma las observaciones realizadas por experimentadores en algunos casos, no abarca por completo aquellas mencionadas en secciones anteriores. Esta percepción nos lleva a buscar una alternativa diferente al concepto de energía que brinde más herramientas para abordar las interrogantes surgidas a raíz de las observaciones experimentales, como la dificultad en determinar trayectorias o la causa del movimiento. Es desde este análisis que se observa que el energetismo no logra modelar integralmente el fenómeno del movimiento Browniano. Por lo tanto, en los siguientes capítulos, se explorarán teorías que, desde una base completamente atomista, proporcionarán respuestas que el energetismo no puede ofrecer por completo.

CAPITULO II. MODELOS DE EXPLICACIÓN PARA LAS PARTÍCULAS BROWNIANAS.

El desafío principal que se abordó en el capítulo anterior involucra la creación de un modelo dinámico para explicar el movimiento de partículas en un entorno acuoso, particularmente, la dificultad que surge al intentar describir el comportamiento de las partículas analizadas por Robert Brown. Este desafío se deriva de la extrema irregularidad en el movimiento de estas partículas, una complejidad que impidió en la época de Brown un análisis completo basado en la teoría energetista.

Por consiguiente, el presente capítulo explorará la aplicación de la teoría atómica para ofrecer una solución que brinda un modelo que logre recoger todas las observaciones experimentales a este problema. Este enfoque alternativo para la época, basado en la teoría cinética molecular brinda un espectro de soluciones más amplias debido a que, si suponemos que el movimiento de la partícula browniana es debido a las diferentes colisiones que tiene esta con los millones de moléculas que componen el fluido donde esta, está suspendida; la teoría atomista toma fuerza y genera un modelo más esperanzador a la hora de construir un modelo explicativo que describa la cinemática de la partícula browniana.

Este cambio hacia la teoría atómica abre la puerta a un análisis más profundo y sistemático. Además, a lo largo del tiempo, varios científicos han contribuido al desarrollo de esta nueva perspectiva, cada uno aportando su propio enfoque para comprender mejor la dinámica de las partículas en suspensión en un medio líquido. Todos estos esfuerzos se basan en el presupuesto fundamental de la existencia de partículas que componen la materia y que interactúan entre sí, un principio crucial para el entendimiento de los fenómenos observados en el campo de la termodinámica.

Este capítulo por ende muestra distintos enfoques atomistas para describir el fenómeno de difusión entendiendo este como una interacción de partículas, cabe aclarar que se presentaran los modelos que fueron más convenientes y significativos para la presente investigación, en el desarrollo de la teoría de la cinemática de partículas brownianas.

2.1. Albert Einstein un modelo de explicación teórico de la cinemática de las partículas brownianas.

El análisis de los artículos que se centran en la termodinámica de Albert Einstein revela una defensa sólida y apasionada de las ideas propuestas por Boltzmann sobre la teoría cinética molecular. Einstein, a través de sus escritos, demuestra un marcado interés en utilizar la misma termodinámica para respaldar la validez de la teoría atómica como un modelo real de la naturaleza. Esta convicción y fascinación se reflejan en fragmentos de sus comunicaciones con Mileva Maric en septiembre del año 1900, donde expresa su admiración por Boltzmann y su trabajo:

> "El Boltzmann es absolutamente Magnifico. Ya casi he terminado con él. Estoy firmemente convencido de lo correcto de los principios de su teoría y estoy convencido de que, en el caso de los gases, estamos tratando realmente con puntos masicos discretos de tamaño finito que se mueven según ciertas condiciones" (Mayorga, 2020).

Esta cita ilustra la intensa fascinación de Einstein por la teoría atomista de Boltzmann y su firme convicción en la existencia de entidades discretas que siguen condiciones específicas. Einstein mostró un claro interés en explorar cómo los fenómenos podrían ser modelados a partir de la teoría atomista, especialmente en relación con la descripción cinemática de partículas brownianas.

El interés de Einstein cuando comenzó a estudiar el movimiento Browniano centró en resolver el desafío de describir el movimiento de dichas partículas desde la perspectiva de la teoría atómica. A través de sus trabajos, intentó proporcionar una demostración de la existencia atómica en la materia basándose en el fenómeno browniano. Este enfoque buscaba no solo explicar el comportamiento de las partículas en suspensión en un líquido, sino también respaldar la validez de la teoría atómica como un marco fundamental para comprender la naturaleza misma de la materia.

Es así como, a continuación se realizará un análisis crítico de cómo Einstein logra generar un modelo más amplio, que a pesar de no llegar a una teoría completamente dinámica de las partículas brownianas centra el estudio en un marco conceptual robusto frente a las trayectorias de la partícula y brinda una elegante demostración frente a la hipótesis de que el movimiento de la partícula es causada debido a las diferentes colisiones de esta con las moléculas presentes en el fluido donde se está moviendo.

2.1.1. Análisis del documento: sobre el movimiento requerido por la teoría cinética molecular del calor de pequeñas partículas suspendidas en un líquido estacionario.

El trabajo presentado por Albert Einstein sobre el movimiento Browniano esta desarrollado durante 5 artículos publicados desde 1905 hasta 1911, donde aborda de manera significativa la modelización de los experimentos de Robert Brown. A través de estos trabajos, Einstein demuestra cómo los montajes de Brown se pueden entender teniendo en cuenta el sistema en su estado de equilibrio. Esto implica que las variables de estado en el sistema deben ser homogéneas en términos de cambios temporales. Einstein propone que este sistema se asemeja a un gas ideal que interactúa con una partícula diferente de las que conforman el gas. En este contexto, las colisiones entre las partículas del gas se convierten en la causa del movimiento browniano de la partícula, que es diferente a las del gas.

Además de esta suposición fundamental, Einstein plantea que, en el límite de las colisiones de la partícula browniana con las partículas del gas, se produce un fenómeno similar al que se observa en las membranas osmóticas. Estas membranas generan diferencias de presión, lo que impide que la partícula browniana se mezcle con el gas. Sin embargo, las partículas del gas pueden atravesar la membrana. (Einstein , Movement of Small Particles Suspended in a Stationary Liquid Demanded by the Molecular-Kinetic Theory of Hea, 1905).

Einstein destaca la importancia de estos experimentos de Brown como evidencia de la existencia de partículas a escala molecular. Según Einstein:

> "La naturaleza microscópica del montaje posee magnitudes que pueden ser verificadas con un microscopio, pero debido a su naturaleza microscópica, la termodinámica clásica ya no puede considerarse aplicable con precisión a dimensiones distinguibles incluso a través de un microscopio. Por lo tanto, este enfoque permitiría una determinación exacta de las dimensiones atómicas reales. Por otro lado, si la comprobación resultara incorrecta, proporcionaría un argumento en contra de la teoría cinética molecular" (Furth, 1956).

Esta declaración resalta la limitación de la termodinámica clásica en la modelización de fenómenos microscópicos, incluso cuando se observan a través de un microscopio. Einstein argumenta que la existencia de átomos, si se demuestra correctamente a través de estos experimentos, cambiaría fundamentalmente nuestra comprensión de la naturaleza.

El trabajo de Einstein no se limita a demostrar la existencia de átomos, sino también busca demostrar que la teoría cinética molecular de Boltzmann representa un cambio de paradigma. Esta teoría tiene la capacidad de unificar la termodinámica clásica y predecir con precisión los fenómenos microscópicos. Este trabajo muestra los dos puntos de vista de la modelización de la membrana osmótica, con la finalidad de demostrar que la teoría atómica logra describir los fenómenos de la termodinámica clásica.

2.1.1.1. Demostración desde la termodinámica clásica.

Como ya se mencionó anteriormente Einstein en su búsqueda de la demostración de la existencia de la teoría atómica presenta como de forma clásica se logra modelar la presión que se genera en la membrana osmótica, para esto utiliza la ecuación de gas ideal en donde la reescribe para que tenga la forma:

$$p = \frac{RTc}{V}$$

(11.)

Donde c representa el coeficiente de difusión que se produce por la interacción de la partícula y la membrana del fluido donde esta se está moviendo, siendo asi redefinida como n/N, donde n: es la cantidad de partículas brownianas que se mueven en la membrana que genera la presión osmótica y N el número de moléculas que conforman el fluido en donde se está moviendo la partícula, tal que nuestra ecuación queda como:

$$p = \frac{RT}{N}\frac{n}{V}$$

(12.)

Ecuación que, aunque denota términos microscópicos su explicación continúa siendo desde la termodinámica clásica, cabe aclarar que dicho análisis es hecho por Einstein para demostrar como la teoría cinético molecular logra llegar al mismo resultado clásico, mostrando asi como la teoría cinético molecular engloba la termoiónica clásica pero como no la termodinámica clásica logra explicar fenómenos de dimensiones pequeña.

2.1.1.2. Demostración desde la teoría cinética-molecular.

Como ya se había mencionado anteriormente Einstein presenta un gran respaldo a la teoría cinética molecular, asi como lo menciona en su artículo *Movement of Small Particles Suspended in a Stationary Liquid Demanded by the Molecular-Kinetic Theory of Heat*, de 1905, en el capítulo Mov*ement of small particles*, en donde detalla las presiones ya mencionadas anteriormente sobre la consideración de la existencia molecular para modelar el movimiento browniano.

De esta manera presenta la demostración de como de forma estadística se logra demostrar de igual manera la presión osmótica que se produce en una membrana osmótica en un fluido. Para lograr esto se establece un conjunto de variables de estado P_1 correspondiente a una partícula interactuante en el sistema, de igual manera a cada partícula le corresponderá su variable de estado de tal manera que para un sistema de n-esimas partículas tendremos $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ variables de estado que a su vez son linealmente independiente entre ellas tal que:

$$\frac{\partial P_n}{\partial t} = \varphi(P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n)$$

(13.)

Donde se obtiene que:

$$\sum \frac{\partial \varphi}{\partial P_n} = 0$$

(14.)

De las cuales lo idóneo es encontrar un conjunto de curvas que satisfagas la ecuación (7.), donde se logre obtener una solución en términos de la energía que denote independencia en el tiempo y que este en termino de las variables de estado que definen a las partículas del sistema, de modo que se encuentre una solución de la forma:

$$E(P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n) = constante.$$

(15.)

para lograr esto Einstein presenta una solución desde la entropía del sistema herramienta de preferencia de este mismo para el modelado de sistemas físicos, es asi como en el artículo (Einstein, Eine Theorie der grundlagen der thermo-dynamilk, 1903), deduce una expresión de la entropía similar a la propuesta por Boltzmann ya que la construye en función de la interacción de partículas:

$$S = \frac{\bar{E}}{T} + \frac{R}{N} \ln \left(\int e^{-EN}/_{RT}\, dP_1 dP_2 \dots dP_l\right)$$

(16.)

Expresión de la entropía hallada por Einstein que denota como la interacción molecular en el equilibrio estadístico logra describir variables de estado macroscópicas como lo son entropía, energía y temperatura. Este utiliza esta definición y la remplaza en la ecuación de energía libre de Gibbs:

$$G = U - TS + PV$$

(17.)

En la cual al momento de remplazar 16 en 17 obtenemos la expresión:

$$G = -\frac{R}{N} T ln \left(\int e^{-EN}/_{RT}\, dP_1 dP_2 \dots dP_l \right) = -\frac{RT}{N} \ln (B)$$

(18.)

Donde J expresa la naturaleza de los movimientos aleatorios de las partículas que componen al fluido, si se estableciera un sistema de referencia con coordenadas $(x_1, x_2, x_3, \dots, y_1, y_2, y_3, \dots, z_1, z_2, z_3)$, podríamos establecer la métrica de las posibles medidas que podría realizar dicho observador como:

$$dB = J dx_1 dx_2 dx_3, \dots, dy_1 dy_2 dy_3, \dots, dz_1 dz_2 dz_3$$

(19.)

De manera igual se podría establecer otro observador con otro tipo de coordenadas que en términos físicos tendría que obtener los mismos resultados en términos de medida por la misma naturaleza aleatoria del sistema de partículas tal que se podría obtener un sistema de coordenadas primado que cumple con la siguiente definición:

$$dB' = J' dx'_1 dx'_2 dx'_3, \dots, dy'_1 dy'_2 dy'_3, \dots, dz'_1 dz'_2 dz'_3$$

(20.)

Donde por la misma naturaleza aleatoria del sistema se puede deducir que se debe cumplir que:

$$dx'_1 dx'_2 dx'_3, \dots, dy'_1 dy'_2 dy'_3, \dots, dz'_1 dz'_2 dz'_3 \\ = dx_1 dx_2 dx_3, \dots, dy_1 dy_2 dy_3, \dots, dz_1 dz_2 dz_3$$

(21.)

Donde se prueba que sin importar el marco de referencias las distribuciones de probabilidad que describen el movimiento aleatorio de las partículas son totalmente invariante al observador

$$J = J'$$

(22.)

Ya con esto demostrado el autor prueba que ya que existe esta invariancia respecto a los marcos de referencias todos los posibles conjuntos de coordenadas que se manejen en el sistema no van a afectar a la distribución de probabilidad tal que:

$$B = J \int dx_1 dx_2 dx_3, \dots, dy_1 dy_2 dy_3, \dots, dz_1 dz_2 dz_3 = JnV$$

(23.)

Es asi como si remplazamos 23 en 18 obtenemos la forma de la energía libre:

$$G = -\frac{RT}{N}\{\ln(J) + \ln(nV)\}$$

(24.)

Ahora sabiendo que la membrana osmótica debe garantizar una presión constante en todo el fluido, su definición estaría dada como la primera derivada respecto al volumen de tal manera que obtenemos que:

$$P = -\frac{\partial G}{\partial V} = \frac{RT}{V}\frac{n}{N} = \frac{RT}{V}c$$

(25.)

De la cual queda demostrado que la membrana osmótica se logra modelar y construir de igual manera con el análisis atomista de la materia, de tal forma que este análisis le da pesa a la hipótesis del autor de que el montaje experimental de Brown lograra dar sustento tanto a la existencia atómica como peso a la física estadística de Boltzmann.

Cabe dar luz a lo relevante de este resultado para la investigación presente ya que el resultado mostrado aquí por Einstein denota, no solo que la física estadística es capaz de resolver problemas clásicos si no también que, desde una mirada completamente atomista de la materia se logran llegar a resultados que la comunidad científica detecta como ciertos.

2.1.1. Cinética molecular de Einstein.

Hasta aquí hemos analizado los procesos y las características de los solventes entendiendo este sistema desde variables completamente deterministas y macroscópica, el artículo de Albert Einstein *On the Theory of the Brownian movement* de 1906 nos presenta una mirada distinta desde la primicia de que el movimiento aleatorio de las partículas constituye un fluido de partículas que no interactúan entre ellas cada una de estas partículas con movimientos irregulares e independientes entre ellos en el tiempo.

Es asi como Einstein establece un parámetro τ que es infinitesimalmente muy pequeño en el tiempo que se logra medir al observar el movimiento de las partículas del solvente, adicionalmente veremos que el movimiento de una partícula en dos intervalos de tiempo es independiente entre ellas.

Suponiendo que existe un total de n partículas suspendidas en un líquido en un intervalo temporal en x-coordenadas para cada una de las partículas que tienen desplazamientos χ, donde χ tiene un valor diferente para cada partícula en un intervalo temporal τ, siendo de naturaleza aleatoria, es asi como las n partículas tendrán desplazamientos espaciales comprometidas entre χ hasta $\chi + d\chi$, definirán la variable de una densidad de distribución de probabilidad (Einstein, On the Theory of the Brownian Movement, 1906), con homogeneidad de probabilidad de eventos espaciales tal que, la función de densidad de probabilidad debería ser par para mostrar que el movimiento no tendrá preferencia hacia alguna dirección:

$$\phi(\chi) = \phi(-\chi)$$

(26.)

Con la finalidad de que la función (26.) sea una función probabilística se normaliza respecto a la variable espacial, de tal manera que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(\chi)d\chi = 1$$

(27.)

Que se relaciona con las partículas de la siguiente forma:

$$dn = n\phi(\chi)d\chi$$

(28.)

Ya definida la densidad de probabilidad de los desplazamientos realizados por las partículas, se hace necesario revisar como la densidad de probabilidad, ecuación (19-27.) se relaciona con el coeficiente de difusión del solvente, limitándonos a estudiarlo en el caso puntual en el que el número de partículas por unidad de volumen depende solo del tiempo y del espacio tal que:

$$\upsilon : \upsilon(x, t)$$

(29.)

En donde es estudia la distribución de partículas entre t hasta $t + \tau$ para la parte temporal de la distribución, a su vez espacialmente vemos que de forma paralela en el intervalo x hasta $x + dx$, la función de densidad de probabilidad $\phi(\chi)$ describe el número de partículas que se encuentran por unidad de volumen tal que:

$$\upsilon(x, t + \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \upsilon(x + \chi, t)\phi(\chi)d\chi$$

(30.)

Ahora como τ es tan pequeño podemos escribir la función υ como:

$$\upsilon(x, t + \tau) = \upsilon(x, t) + \tau \frac{\partial \upsilon}{\partial t}$$

(31.)

Si se realiza la expansión en potencias de la variable aleatoria χ, tenemos:

$$\upsilon(x+\chi,t)=\upsilon(x,t)+\chi\frac{\partial\upsilon}{\partial x}+\frac{\chi^2}{2!}\frac{\partial^2\upsilon}{\partial x^2}+\cdots$$

(32.)

Integrando la ecuación 27 en 32 obtenemos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\upsilon(x+\chi,t)\phi(\chi)d\chi=$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}(\upsilon(x,t)+\chi\frac{\partial\upsilon}{\partial x}+\frac{\chi^2}{2!}\frac{\partial^2\upsilon}{\partial x^2}+\cdots)\phi(\chi)d\chi$$

(33.)

Y por la relación ya establecida en 30, nuestra expresión nos queda de la forma:

$$\upsilon(x,t+\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}(\upsilon(x,t)+\chi\frac{\partial\upsilon}{\partial x}+\frac{\chi^2}{2!}\frac{\partial^2\upsilon}{\partial x^2}+\cdots)\phi(\chi)d\chi$$

(34.)

Y remplazando la ecuación 32 en 34 obtenemos la ecuación:

$$\upsilon(x,t)+\tau\frac{\partial\upsilon}{\partial t}=\upsilon(x,t)\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\chi)d\chi+\frac{\partial\upsilon}{\partial x}\int_{-\infty}^{\infty}\chi\phi(\chi)d\chi+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2\upsilon}{\partial x^2}\int_{-\infty}^{\infty}\chi^2\phi(\chi)d\chi+\cdots$$

(35.)

Por la ecuación 27 el primer término del lado izquierdo de la ecuación 35, es igual a uno y por simetría de la variable χ cuando esta esta elevada a una potencia impar se debe anular, de tal forma que la expresión 35 queda de la siguiente forma:

$$\frac{\partial\upsilon}{\partial t}=\frac{\partial^2\upsilon}{\partial x^2}\left(\frac{1}{\tau 2!}\frac{\partial^2\upsilon}{\partial x^2}\int_{-\infty}^{\infty}\chi^2\phi(\chi)d\chi+\cdots\right)$$

(36.)

Donde:

$$D = \frac{1}{\tau 2!}\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2}\int_{-\infty}^{\infty} \chi^2 \phi(\chi) d\chi + \cdots$$

(37.)

Representa la constante de difusión del solvente de tal manera que nuestra ecuación nos queda como:

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2}$$

(38.)

Que representa la ecuación de difusión en partículas disueltas en un solvente en equilibrio térmico y estadístico, soluciones a esta ecuación se encuentra varios métodos para hallar soluciones a la ecuación de difusión, más el autor propone como solución a la campana gaussiana con media $\mu_o = 0$

$$\upsilon(x,t) = \frac{n}{\sqrt{4\pi D t}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

(39.)

Donde la varianza de la función determina el desplazamiento cuadrático medio tal que $\sigma^2 = \overline{x^2}$ de tal manera que obtenemos:

$$\overline{x^2} = 2Dt$$

(40.)

La ecuación 39 que expresa las posibles distancias que una partícula browniana puede tomar en un fluido en equilibrio térmico y estadístico es un punto fundamental en la descripción de este fenómeno. Esta ecuación representa la probabilidad de encontrar la partícula en una posición dada en función del tiempo, lo que es esencial para entender la distribución de las partículas en el fluido a lo largo del tiempo.

Sin embargo, es importante destacar que la función de probabilidad que describe la ecuación número 38 no es un modelo completo del sistema. Esta función de probabilidad, dependiendo del tiempo, proporciona información sobre la probabilidad de encontrar la partícula en ubicaciones específicas. Aunque Einstein ofrece un marco conceptual sólido para comprender el movimiento de las partículas brownianas, esta función de distribución en la ecuación 38 solo ofrece información sobre las posibles ubicaciones de la partícula browniana. No ofrece una descripción detallada de cómo se comporta la partícula en términos de velocidad, aceleración u otras propiedades dinámicas.

Además, vale la pena mencionar la importancia de la ecuación diferencial que se encuentra en la ecuación 37. Esta ecuación se conoce comúnmente como la segunda ley de Fick y describe cómo se produce el transporte de materia en una mezcla hasta alcanzar el equilibrio. Con las contribuciones de Einstein, se puede ver cómo estas leyes, que originalmente se aplicaban a la difusión de sustancias químicas en una mezcla, también se pueden utilizar para comprender el comportamiento de partículas brownianas en un fluido.

Einstein amplió la aplicabilidad de estas leyes, lo que demuestra su capacidad para encontrar conexiones entre fenómenos aparentemente diferentes. Este enfoque más amplio demuestra cómo las mezclas de sustancias y las partículas brownianas son, en esencia, sistemas dinámicos en los que diferentes partículas intercambian propiedades y se desplazan en respuesta a las fuerzas y la energía térmica del entorno. Este enfoque interdisciplinario y la aplicación de conceptos fundamentales a diferentes fenómenos son ejemplos notables de la capacidad de Einstein para unificar y avanzar en la comprensión de fenómenos complejos.

2.1.2. Determinación de la constante de difusión en el modelo de Einstein.

Como ya se pudo ver en la ecuación 39 el desplazamiento medio cuadrático depende de la constante D la cual Einstein se da a la tarea de describir teniendo en cuenta que la partícula debe estar en un equilibrio dinámico tal que la variación de la energía libre desaparece para un desplazamiento virtual δx, para la partícula libre, tal que obtenemos la relación:

$$\delta G = \delta E - T\delta S \tag{41.}$$

Sabiendo que la partícula está en equilibrio dinámico establecemos que su movimiento va desde un $x = 0$ hasta un $x = l$, tal que la variación del δE, quede descrito como:

$$\delta E = \int_0^l Fv\delta x dx$$

(42.)

Donde las fuerzas virtuales son causadas por la presión osmótica que se genera debido a las moléculas activas en el fluido.

Ahora si variamos la ecuación (16.), la cual es la entropía definida por Einstein obtenemos la expresión:

$$\delta S = -\frac{R}{N}\int_0^l \frac{\partial v}{\partial x}\delta x dx$$

(43.)

Donde $v = n/V$ la cual representa la cantidad de partículas del fluido por unidad de volumen, ahora si sustituimos 42 y 41 en la ecuación 40 se obtiene la expresión:

$$\frac{RT}{N}\frac{\partial v}{\partial x} - Fv = 0$$

(44.)

Ya obtenido esto se requiere analizar que la velocidad que adquiere la partícula browniana se puede describir a través de la teoría de Stokes el cual dice que:

$$vu = \frac{Fv}{6\pi\eta r}$$

(45.)

Donde η es la viscosidad dinámica del fluido en donde se está generando el efecto de difusión y r el radio de la partícula browniana cabe aclara que a la ecuación de Stokes Einstein le agrega el ν, con la finalidad de poder hallar una relación dada por la primera ley de Fick la cual dice que el flujo de partículas en un efecto de difusión es:

$$J = vu$$

(46.)

O escrita es su forma diferencial la primera ley de Fick se puede escribir como:

$$J = -D\frac{\partial v}{\partial x}$$

(47.)

Ahora si se igual las ecuaciones 45 y 46 y en la ecuación 45 se remplaza por la expresión 44 se obtiene la siguiente relación:

$$\frac{Fv}{6\pi\eta r} - D\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

(48.)

La cual podemos ver que si iguala con la ecuación 43 se logra encontrar una expresión para la constante de difusión molecular en termino de variables física óptimamente medibles para los investigadores, de tal manera que la constante de difusión queda expresada como:

$$D = \frac{RT}{N}\frac{1}{6\pi\eta r}$$

(49.)

Dando asi una expresión de la difusión en la cual se debe tener en cuenta la existencia molecular, estableciendo que esta constante cambia dependiente de que tan activas estén o no las moléculas debido a que depende de la temperatura y de la misma cantidad de esta debido a la constante N, también es interesante observar que el mismo resultado arroja que el tamaño de la partícula browniana importa sus dimensiones ya que a mayor tamaño menor será el fenómeno de difusión pero entre menor sea el tamaño más interactuara con las moléculas del fluido.

2.1.3. Determinación de las dimensiones moleculares desde el modelo de Einstein.

Como ya se ha mencionado en capítulos anteriores uno de los objetivos fundamentales y primordiales por los que Einstein deseo trabajar específicamente en el fenómeno del movimiento Browniano era la demostración de la existencia atómica y de la teoría cinética de molecular de Boltzmann como marco conceptual capaz de describir de forma correcta dichos fenómenos microscópicos. Es asi como en su artículo *A New Determination of Molecular Dimension* de 1906, propone un método para poder primeramente conocer las dimensiones moleculares y a su vez la constante de Avogadro.

El método de Einstein presenta una gran genialidad respecto a la forma en la que el propone encontrar dichos valores, para los cuales propone realizar un análisis de viscosidades dinámicas de las moléculas del fluido con la de la partícula browniana la cual Einstein propone como:

$$\frac{\eta'}{\eta} = 1 + \frac{5}{2}V_m$$

(50.)

Donde los valores de η' es la viscosidad dinámica del fluido en donde se desplaza la partícula y η, la de la partícula browniana, esta relación encontrada directamente de realizar análisis dinámicos de las interacciones moleculares, relacionan el volumen molecular con las viscosidades y las relaciona con el volumen de las moléculas.

Con la ecuación (50.) ya descrita, se logra ver que el volumen molecular cumple que:

$$\frac{n}{N_A} = \frac{\rho}{m}$$

(51.)

Donde en el miembro izquierdo de la ecuación (51.), podemos ver que el volumen molecular es igual a la cantidad de partículas presentes en el fluido, entre una constante que exprese dimensiones moleculares (constante de Avogadro); y por otro lado vemos que el volumen molecular debe ser también igual a la masa de la partícula browniana entre el peso molecular.

Remplazando (51.) en (50.) obtenemos la relación:

$$N_A R^3 = \frac{3m}{10\pi\rho}\left(\frac{\eta'}{\eta} - 1\right)$$

(52.)

Con esta relación determinada Einstein con la finalidad de poder resolver la ecuación (52.), busca el plantear un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas para poderlo resolver, es asi como haciendo uso de que la única fuerza existente interactuando en el sistema en la presión osmótica plantea que, dicha fuerza debe ser:

$$F = -\frac{m}{\rho N_A}\frac{dP}{dx}$$

(53.)

Donde la ecuación (53.) dicta que la fuerza que genera que la partícula browniana se mueva es debida al gradiente de la presión osmótica, la cual aumentara o reducirá su intensidad debido a las dimensiones de las moléculas y su cantidad de masa.

Derivando a la ecuación de Van’t Hoff descrita en la ecuación (25.) la expresión de la fuerza de (53.) quede expresada como:

$$F = -\frac{RT}{N_A}\frac{d\nu}{dx}$$

(54.)

Remplazando la expresión (54.) en la ecuación de velocidad de Stocks obtenemos:

$$\omega = -\frac{RT}{6\pi\eta N_A R}\frac{d\nu}{dx}$$

(55.)

Donde haciendo uso de la primera Ley de Fick, encontramos que el coeficiente de difusión quede tener minado como:

$$D = \frac{RT}{6\pi\eta}\frac{1}{N_A R}$$

(56.)

Donde Haciendo uso de las ecuaciones (52.) y (56.) y teniendo en cuenta las consideraciones realizadas por Graham en su Calculated out by Stephan, donde postulan que la constante de difusión en agua azucarada a 9.5 °C tiene un valor de 0.38 y su viscosidad dinámica un valor de 0.0135 a la misma temperatura (Furth, 1956), podemos determinar las siguientes consideraciones:

Sistema de ecuaciones.	Resultados Haciendo uso de las consideraciones de Graham.
$N_A R = \frac{RT}{6\pi\eta}\frac{1}{D}$ $N_A R^3 = \frac{3m}{10\pi\rho}\left(\frac{\eta'}{\eta} - 1\right)$	$N_A R = 2.08 \times 10^{-16}$ $N_A R^3 = 80$

Tabla 2. Relación entre el número de Avogadro y el radio molecular.

De las cuales los valores del radio y de la constante de Avogadro según el trabajo de Einstein tienen los siguientes valores:

$$N_A = 3.3 \times 10^{23}.$$

$$R = 6.2 \times 10^{-8}\ cm.$$

(57.)

Cuando los comparamos con los valores que se tienen en la actualidad, los valores de Einstein presentan un error del 12,7% en el valor del radio molecular y un error del 50,3% en la constante de Avogadro.

En general podemos decir que la recolección bibliográfica que se logra recopilar en este trabajo proporciona un análisis a la mirada de como Einstein construye un modelo de explicación sobre el porqué del movimiento irregular del movimiento Browniano mostrando asi como la física estadística si logra dar respuestas mas amplias que desde el energetismo, asi como se vio en el capítulo uno, la energía no logra dar respuestas puntuales al porque del movimiento de las partículas de polen, sin embargo como ya se mostró el análisis de Einstein no es solo teóricamente correcto, si no que adicionalmente logra describir de forma más exacta el porqué de los movimientos irregulares.

2.2. Descripción estadística de Smoluchwki's del movimiento browniano, herramientas estadísticas.

"Sin lugar a duda, el papel de Smoluchowski es fundamental al revisar los trabajos teóricos que respaldaron la teoría atomista desde la perspectiva del movimiento browniano. Destacados científicos como Sommerfield escribieron cosas como: "Su nombre será recordado para siempre, con el florecimiento de la teoría atomista" (Piasecki, 2007). Del mismo modo, Kac menciona la importancia de Smoluchowski en la resolución del enorme problema que planteaba el movimiento de la partícula browniana al violar la segunda ley de la termodinámica. Parecía que tenía un movimiento perpetuo, o al menos, las observaciones experimentales mostraban que el movimiento aleatorio de la partícula no presentaba indicios de reducción de la energía de movimiento. El mérito que se le atribuye a Smoluchowski es haber demostrado que la partícula browniana no tiene energía infinita, sino que su movimiento se debe a las interacciones moleculares presentes en el fluido por el cual se desplaza. De esta manera, la entropía, tal como la previó Boltzmann en su mecánica, modela la evolución temporal de la energía de esta partícula.

Otro problema abordado por el autor fue la consideración de las escalas microscópicas y macroscópicas en las colisiones entre moléculas, de las cuales las estimaciones sugerían que la velocidad de colisión debía ser alrededor de 10^{-9}m/s. Los marcos conceptuales establecidos desde la termodinámica clásica mostraban que esto no era posible según la ecuación:"

$$V = \sqrt{\frac{m}{M}} v$$

(58.)

Ecuación que describe colisiones elásticas pero cuyos valores de la velocidad de colisión resulta en mediciones relativamente altas a las que se deberían generar en la colisión atómica.

El análisis desarrollado por Smoluchowski se extiende a través de varios artículos que se enfocan en revisar la interconexión entre la cinemática de las partículas y variables macroscópicas cuantificables, como la viscosidad, la conductividad térmica y la difusión, vinculándolas al concepto del camino medio libre. Entre todos los posibles análisis cinemáticos que podrían realizarse, el camino medio libre surge como un concepto crucial. Este concepto no solo resalta la necesidad primordial de abordar la descripción probabilística de los fenómenos físicos en escalas microscópicas, sino que también permite establecer relaciones entre las ideas planteadas por Clausius y Maxwell (Piasecki, 2007).

El concepto del camino medio libre es fundamental, ya que no solo fundamenta la necesidad intrínseca de adoptar un enfoque probabilístico para comprender fenómenos a escalas diminutas, sino que también actúa como un puente conceptual que une las teorías establecidas por Clausius y Maxwell en el campo de la física. Esta conexión entre el camino medio libre y las teorías previas sirve para ilustrar cómo los fenómenos microscópicos, previamente desafiantes de comprender en términos macroscópicos, pueden ser entendidos a través de enfoques probabilísticos que a su vez se relacionan con conceptos más consolidados en la termodinámica clásica. Además, al demostrar la relación entre la cinemática de partículas y las magnitudes macroscópicas medibles, Smoluchowski logra establecer un puente esencial entre las observaciones microscópicas y los fenómenos que observamos en una escala más amplia, contribuyendo significativamente al avance de la física teórica en su época.

Con lo ya mencionado el presente trabajo se centrará en establecer la relación de camino libre aleatorio que es fundamental al momento de representar la trayectoria de partículas que no siguen caminos deterministas y como este se relaciona con la ecuación de Smoluchwki's la cual allá relaciones de medida con escala corregida para la constante de difusión y para el desplazamiento cuadrático medio el cual según el autor presenta gran importancia en la demostración de la existencia atómica es asi como el trabajo se centrara en presentar las herramientas de modelamiento para entender el camino libre aleatorio y en otra sección las ecuaciones derivadas de los artículos de Smoluchwki'.

2.2.1. Camino libre aleatorio.

Puede ser que uno de los movimientos más comunes de apreciar es el movimiento de objetos que se van desplazando por fluidos, los cuales no parecen seguir trayectorias fijas o en trayectorias totalmente caracterizadas por las leyes de Newton, por su misma naturaleza no determinista se vuelve necesario realizar un análisis de forma probabilística para poder conocer una expresión para poder determinar el movimiento de este tipo de fenómenos no deterministas.

Por simplicidad de cálculos se estudiará un movimiento unidimensional, entonces el cuerpo solo tendría dos maneras posibles de desplazarse, hacia la izquierda el cual será caracterizado con la letra q, el cual tiene un 50% de que el cuerpo vaya hacia la izquierda, de igual manera la probabilidad de que el cuerpo se dirija hacia la derecha se denotara con la letra p y tiene un 50% de probabilidad de que el cuerpo de un paso hacia la derecha de tal manera que se cumple la siguiente relación:

$$q + p = 1$$

(59.)

Donde, adicional a la información ya suministrada se debe tener en cuenta la cantidad de movimientos hacia la izquierda y la cantidad de movimientos hacia la derecha los cuales serán:

$$n_1 : \; movimientos\ hacia\ la\ derecha.$$

$$n_2 : movimientos\ hacia\ la\ izquierda.$$

(60.)

De los cuales se puede inferir que el desplazamiento neto del cuerpo estudiada es:

$$\Delta n = n_2 - n_1$$

(61.)

Y asi la secuencia de probabilidades del fenómeno nos brindara información sobre la densidad de probabilidad respecto a los movimientos de los cuales se desee analizar, de tal forma que la siguiente expresión determina la relación de probabilidad respecto a la cierta cantidad de movimientos que genere el cuerpo.

$$qqq \ldots ppp = q^{n_1} p^{n_2} = w_N(n_1)$$

(62.)

Donde N es el número total de datos:

$$N = n_1 + n_2$$

(63.)

Pero como hay varias maneras de que el cuerpo recorra los N movimientos la expresión encontrada en (62.), debe ir acompañada de la combinatoria de los movimientos de tal manera que nuestra distribución de probabilidad queda determinada como:

$$w_N(n_1) = \frac{N!}{n_1!\,(N-n_1)!}\,q^{n_1}p^{N-n_1}$$

(64.)

Expresión la cual nos dicta la probabilidad de encontrar al cuerpo en cierta cantidad de movimientos realizados hacia la derecha, pero ya para que la expresión quede en términos del desplazamiento del cuerpo si se remplaza la expresión (61.) en (64.), podemos encontrar la relación de probabilidad que nos dicta el valor de encontrar el cuerpo después de cierta cantidad de desplazamientos, sin que ningún ente externo lo esté afectando

$$w_N(\Delta n) = \frac{N!}{\left[\frac{1}{2}(N-\Delta n)\right]!\left[\frac{1}{2}(N+\Delta n)\right]!}\,q^{\frac{(N+\Delta n)}{2}}(1-q)^{\frac{(N-\Delta n)}{2}}$$

(65.)

La cual nos dicta la probabilidad de encontrar la partícula dependiente únicamente de variables macroscópicas que se pueden extrapolar para que también den interpretaciones microscópicas.

Cabe aclarar que el desarrollo que se ha proporcionado hasta aquí no ha dado información respecto al elemento que establece la relación sobre los desplazamientos y distancias que puede generar el cuerpo de movimiento aleatorio, el elemento que da esta información es conocido como dispersión de las variables que caracterizan la función de probabilidad y se determina para este caso puntual como:

$$\langle \Delta n^2 \rangle = \sum_{i=1}^{N} w_N(\Delta n)(\Delta n - \langle \Delta n \rangle)^2$$

(66.)

Cuyo valor es el camino cuadrático medio, elemento que da información sobre los desplazamientos de la partícula y cual para el camino libre aleatorio tiene el valor de:

$$\langle \Delta n^2 \rangle = 4N\,qp$$

(67.)

De la cual si el cuerpo tiene la misma probabilidad de ir tanto a la izquierda como a la derecha la ecuación (67.) queda reducida a:

$$\langle \Delta n^2 \rangle = N \tag{68.}$$

El desplazamiento cuadrático medio no se ve afectado por las condiciones de otro tipo de cuerpo o medio que lo influya. Este valor será igual a la cantidad total de movimientos generados por el cuerpo (Reif, 1965).

2.2.2. Ecuación de Smoluchwki's.

Uno de los méritos más destacados de Smoluchowski radicaba en su capacidad excepcional para abordar los problemas de manera directa y desentrañar la información crucial necesaria para resolverlos de una forma elegante y clara. Su enfoque consistía en mirar de frente los desafíos científicos y destilar la información pertinente, lo que le permitía encontrar soluciones que destacaban por su simplicidad y claridad, lo que a menudo resultaba en avances significativos.

En particular, Smoluchowski se embarcó en la tarea de trabajar el problema del movimiento de las partículas brownianas, un enigma que lo cautivaba profundamente. Su fascinación residía en la posibilidad de descubrir una relación que pudiera vincular el problema de las escalas ya mencionado anteriormente en el contexto de las colisiones moleculares, con el movimiento Browniano.

En su búsqueda, Smoluchowski desarrolló un modelo probabilístico que, en un primer momento, satisfacía la hipótesis de que el movimiento browniano se asemejaba a un coloide. En este modelo, el solvente, es decir, la sustancia en la que se movían las partículas brownianas estaba compuesto por moléculas que se asemejaban a cuerpos esféricos y que poseían masa. Estas moléculas interactuaban entre sí, colisionando de forma elástica.

En la naturaleza del coloide la partícula browniana la modelo como si fuera una molécula muy grande que interactúa con las demás partículas, es asi como haciendo uso de la teoría de los vuelos aleatorios de Rayleigh, Smoluchwki's, plantea una función de distribución de probabilidad:

$$P_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{ct}{\lambda}\right)^n e^{-ct/\lambda}$$

(69.)

Donde c representa la velocidad inercial que llevaría la partícula browniana, n una constante a definir y λ el camino libre medio, ecuación que describe la interacción molecular, pero al momento de contrastarla con modelos previstos en la época la curva no encajaba con los resultados experimentales, es asi como Smoluchwki's decide ajustar la curva teniendo en cuenta la distribución de Poisson y encontrar la relación:

$$P_n(x) = \left(\frac{3}{4\pi n\lambda^2}\right)^{3/4} e^{-\frac{3x^2}{4n\lambda^2}}$$

(70.)

Para la cual tiene media cuadrática de la distancia:

$$\langle x^2 \rangle = 2n\lambda^2$$

Además de esto Smoluchwki's generando una versión estadista de la segunda ley de Fick determina que la función de densidad de probabilidad que rige la partícula browniana obedece la siguiente ley:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = div\left(DgradW - \frac{M}{\beta}W\right)$$

(71.)

Donde:

$$\beta = \frac{6\pi r\eta}{M} \qquad\qquad D = \frac{k_B T}{\beta}$$

(72.)

Y tiene solución con la siguiente función de densidad de probabilidad

$$W(x,t) = \frac{n}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

(73.)

Donde se llega a la solución de Einstein, cabe aclarar cómo se vio en el desarrollo que ambos llegan al mismo resultado, verificando y dando pruebas de que la función tanto descrita en la ecuación (73.), como en la (39.), describen el mismo fenómeno con una alta precisión.

Mostrando y dando veracidad que la teoría de Einstein se logra abordar no solo desde una mirada meramente desde la física estadística de Boltzmann si no de igual manera desde una mirada completamente estadística.

2.3. Proceso de Langevin, como modelo dinámico del movimiento browniano.

En 1908, el físico Paul Langevin propuso un método alternativo y más directo en comparación con la propuesta de Albert Einstein para abordar el problema del Movimiento Browniano. Langevin propuso una solución que se basaba en la segunda ley de Newton, que establece la relación entre la fuerza aplicada a un objeto, su masa y la aceleración resultante ($\vec{F}$ = m$\vec{a}$). Su enfoque fue revolucionario, ya que propuso que el fenómeno de la difusión del movimiento Browniano podía ser estudiado de manera completamente dinámica, utilizando principios fundamentales de la mecánica clásica (Contreras. O, Azuara. L, SF).

Langevin introdujo un término perturbativo, de naturaleza constante, a la ecuación de la segunda ley de Newton para tener en cuenta las múltiples colisiones que podrían ocurrir entre las moléculas de un fluido y una partícula macroscópica. Esto permitió establecer un modelo dinámico mediante un sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas de segundo orden, que describen el movimiento de la partícula en un entorno donde está constantemente interactuando con las moléculas del fluido.

Este enfoque dinámico propuesto por Langevin proporciona una forma más detallada de entender el movimiento Browniano. Al utilizar la mecánica clásica y ampliarla con un enfoque estocástico, Langevin logró crear un marco teórico que describe no solo la dinámica de una partícula en un fluido, sino también cómo las colisiones constantes con las moléculas del fluido influyen en su movimiento. Este enfoque muestra la influencia del entorno en el comportamiento de una partícula en un nivel más microscópico.

En términos de enseñanza, este modelo propuesto por Langevin puede ofrecer una introducción más didáctica y detallada para los estudiantes que desean comprender el movimiento molecular. Al relacionar la segunda ley de Newton con el comportamiento aleatorio de las partículas en un fluido, se proporciona una base teórica sólida que no solo explica el fenómeno observado experimentalmente, sino que también une la física macroscópica y microscópica.

La presentación de este enfoque en el aula podría ofrecer una visión más completa del movimiento Browniano al mostrar cómo las fuerzas y la interacción con el entorno a nivel microscópico se traducen en el comportamiento observable a nivel macroscópico. Además, este método podría ser una introducción valiosa para aquellos que deseen adentrarse en la física estadística y la mecánica de partículas, al presentar un modelo teórico sólido y detallado que conecta la mecánica clásica con la aleatoriedad inherente al mundo molecular.

2.3.1. Planteamiento del modelo probabilístico de Langevin.

A continuación, se mostrará el desarrollo de la ecuación de Langevin en condiciones en las que la ecuación pueda dar un modelo explicativo a las observaciones realizadas por Robert Browne. Para poder lograr este desarrollo se postula una partícula en un medio acuoso cuyo movimiento es producido por las interacciones aleatorias de choques de moléculas con la partícula que está flotando en dicho medio; entrando en tecnicismos se va denominar dicha interacción “fluctuación, y va estar ligada a los procesos disipativos que se tienen debido a las diferentes colisiones que se presentan en un tiempo t con la partícula browniana que puede desencadenar un acumulador térmico a cierta temperatura T, el cual debe ser diferente a la temperatura del sistema que por simplicidad en el cálculo se postula en equilibrio térmico. Con esto definido, se puede asociar una coordenada x dependiente del tiempo tal que:

$$x: x(t)$$

(74.)

Debido a la naturaleza asociativa de los demás grados de libertad de la partícula que están asociados con la acumulación térmica ya mencionada anteriormente podemos agrupar a esta con una fuerza neta como se muestra a continuación:

$$F: F(t)$$

(75.)

De esta manera se explica la sumatoria de fuerzas que interactúan con la partícula, de tal forma que si se establece en términos de las leyes de Newton obtenemos la expresión:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum F(t)$$

(76.)

No obstante, se sabe muy poco de la naturaleza de F, razón por la cual se torna complicado encontrar una relación funcional entre la fuerza neta ejercida en la partícula debida a la interacción de miles de millones de partículas del solvente y a la variable de cambio temporal, volviendo de extrema complejidad el caracterizar la fuerza hecha por cada partícula que interactúa con la partícula browniana. Por tal motivo, se hace necesario hacer un análisis estadístico, de tal forma que se pueda relacionar una función de probabilidad en un tiempo estipulado t_o en una interacción F_o, de modo que:

$$P(F_o, t_o)dF_o$$

(77.)

Ya expuestos los análisis anteriores se puede definir la estructura para escribir de manera dinámica el comportamiento de la partícula browniana que tiene: $\mu = 0$ y $\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle$ en donde el análisis dinámico toma la forma de:

$$F = -\alpha\dot{x} + \xi(t)$$

(78.)

Donde F es la fuerza de interacción de las partículas del solvente ya mencionado anteriormente, $\alpha\dot{x}$ es la fuerza de rozamiento que se genera del choque de las partículas del solvente en la coordenada x, $\xi(t)$: es el termino fluctuante usado para representar la disipación de energía en forma de calor generado por las colisiones de las moléculas del solvente.

Dicho esto, se plantea reescribir nuestra función dinámica de tal manera que se de información relevante de un sistema que está en constante vibración no regular, para esto se modifica la expresión de tal forma que podemos expresar la ley de Newton como una ecuación diferencial:

$$mx\frac{d^2x}{dt^2} = -\alpha x\frac{dx}{dt} + x\xi(t)$$

(79.)

Donde podemos ver que la fuerza con la que chocan las moléculas es debida a una interacción hidrodinámica, caracterizada por la fuerza de stocks para una partícula esférica que interactúa en un fluido y el segundo termino describe las diferentes fluctuaciones debidas a la naturaleza aleatoria del movimiento de las partículas brownianas, con el deseo de querer encontrar la media cuadrática del desplazamiento se reorganiza la ecuación anterior y obtenemos la expresión:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2x^2}{dt^2} - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -\frac{\alpha}{2m}\frac{dx^2}{dt} + \frac{x}{m}\xi(t)$$

(80.)

La expresión que muestra el cambio en aceleraciones y velocidades en función del cuadrado de la coordenada es un aspecto crucial para comprender y predecir el movimiento de las partículas, especialmente en el contexto del movimiento Browniano. Esta expresión es fundamental para calcular valores ponderados en la dinámica de partículas y está destinada a relacionar la media de los cuadrados de las distancias, lo que proporciona información valiosa sobre el movimiento promedio de la partícula al interactuar con las moléculas del medio acuoso en el que se desplaza.

Langevin, en su análisis, introduce consideraciones esenciales para comprender y modelar el movimiento Browniano. Sus apreciaciones se enfocan en entender cómo la partícula browniana experimenta cambios en su velocidad y aceleración en relación con la posición cuadrada. Esto le permite proponer un método para obtener valores ponderados que describan de manera más precisa el comportamiento promedio de la partícula en su entorno.

El objetivo principal de considerar la media de los cuadrados de las distancias es capturar la información sobre el movimiento promedio de la partícula browniana. Esto es especialmente útil para entender cómo se comporta la partícula al interactuar con las moléculas del medio acuoso en el que se mueve. La relación entre el cambio en las aceleraciones y velocidades con el cuadrado de la coordenada proporciona una herramienta para estimar y predecir la dinámica promedio de estas partículas en un entorno fluido, con esto dicho Langevin propone las siguientes características que se deben cumplir:

1. El promedio de las fluctuaciones debe ser nulo $\langle \xi(t) \rangle = 0$, debido a que todas estas tienen desviación estándar nula su promedio debe encontrarse en el cero.

2. El medio acuoso debe estar en equilibrio térmico y estadístico tal que se logre modelar como un gas ideal, de tal modo que se pueda hacer uso de las expresiones de la mecánica estadística de Boltzmann.

$$\frac{1}{2}m\langle\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\rangle = \frac{1}{2}K_BT$$

(81.)

Con estas consideraciones podemos reescribir nuestra expresión encontrada como:

$$\frac{d^2\langle x^2\rangle}{dt^2} + \frac{\alpha}{m}\frac{d\langle x^2\rangle}{dt} = \frac{K_BT}{m}$$

(82.)

Esta ecuación plantea una partícula que está vibrando de forma amortiguada y forzada debido a la interacción molecular que, debido a las fluctuaciones moleculares en tiempos de colisión extremadamente cortos, que al momento de solucionarla describe la media cuadrática del desplazamiento, de tal manera que queda descrito como:

$$\langle x^2\rangle = \frac{2K_BT}{\alpha}[t + \gamma^{-1}(1 - e^{-\gamma t})]$$

(83.)

Donde, $\frac{2K_BT}{\alpha}$ se denomina constante de difusión en la relación encontrada por Einstein, y $\gamma = \frac{\alpha}{m}$, es la constante de amortiguamiento debido a las fluctuaciones moleculares que interactúan con la partícula de polen.

Esta solución presenta dos posibles casos interesantes de estudio el primero es cuando $t \ll \gamma^{-1}$

En este caso por Analís de Fourier $e^{-\gamma t} = 1 - \gamma t + \frac{1}{2}\gamma^2 t^2 + \cdots$ y por parto nuestra solución para este caso toma la forma de:

$$\langle x^2 \rangle = \frac{2K_BT}{m}t^2$$

(84.)

La cual describe una partícula que se mueve con una velocidad constante durante periodos de tiempo extremadamente cortos, cuya velocidad debe ser causadas por la disipación térmica producida por las fluctuaciones moleculares del fluido en donde se mueve la partícula $\upsilon\alpha T$, inversamente proporcional a la cantidad de materia de la partícula browniana, de tal modo que podemos expresar que la velocidad con la que se movería la partícula durante tiempos extremadamente muy pequeños debe cumplir la relación propuesta por Boltzmann en el equilibrio térmico y estadístico:

$$\langle \upsilon \rangle = \sqrt{\frac{3K_BT}{m}}$$

(85.)

Ahora para el caso en el que tenemos tiempos extremadamente grandes $t \gg \gamma^{-1}$, la función $e^{-\gamma t} \rightarrow 0$ por tanto nuestra solución de la ecuación de Langevin queda expresada como:

$$\langle x^2 \rangle = \frac{2K_BT}{\alpha}t$$

(86.)

En donde podemos ver que la partícula describe un movimiento aleatorio dependiente del coeficiente de difusión ya mencionado anteriormente en el desarrollo realizado en el trabajo de Einstein, tal que el coeficiente de difusión remplazando también con los términos de la constante de Stock queda expresado como:

$$D = \frac{K_BT}{6\pi kr}$$

(87.)

2.3.2. Conclusiones pedagógicas a partir del modelo de Langevin.

Al emplear un enfoque que hace uso de la mecánica clásica, mediante el abordaje de leyes deterministas se espera que los estudiantes encuentren un camino que posibilite relacionar conceptos que manejan de manera mas clara con los nuevos que están viendo en física estadística.

En primer lugar, la mecánica clásica, que se basa en las leyes de Newton, es una base fundamental en la física que la mayoría de los estudiantes estudian antes de abordar teorías más avanzadas. Las leyes de Newton describen el comportamiento de objetos macroscópicos en movimiento y proporcionan una comprensión sólida de cómo las fuerzas influyen en el movimiento. Al recurrir a esta familiaridad con la mecánica clásica, los estudiantes pueden sentirse más cómodos y seguros al abordar conceptos más avanzados.

La teoría de fluctuaciones, por otro lado, se enfoca en cómo las partículas individuales en un sistema interactúan y fluctúan en torno a un estado de equilibrio, lo que es fundamental para comprender el comportamiento de las partículas en un fluido. Al combinar esta teoría con la mecánica clásica, es posible mostrar cómo las fluctuaciones en la velocidad y la posición de las partículas en un fluido se relacionan con las propiedades macroscópicas observables, como la viscosidad o la difusión.

Al introducir a los estudiantes mediante una teoría aparentemente determinista se les brinda la posibilidad de explorar conceptos más avanzados en termodinámica y mecánica estadística. Además, esta metodología fomenta un enfoque holístico para la enseñanza de la física, conectando principios aparentemente dispares y destacando cómo la física se aplica a una amplia gama de fenómenos en el mundo real. En última instancia, este enfoque puede fomentar una comprensión más profunda y duradera de los fundamentos de la física y su aplicación en la descripción de la naturaleza.

Sin embargo, se deja también abierta la reflexión alrededor de cómo involucrar estos conceptos con la física moderna y así generar un camino que pueda llevar hacia las estadísticas propias de la física moderna, lo cual no es propósito de este trabajo, pero podría abordarse en futuras investigaciones.

CAPITULO III. APLICACIÓN PEDAGÓGICA DEL MODELO BROWNIANO EN LA ESTADÍSTICA DE BOLTZMANN Y METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN.

En este capítulo se abordarán las concepciones pedagógicas que han surgido como resultado del desarrollo teórico descrito en los capítulos anteriores. El propósito principal es desarrollar, a partir de las consideraciones y análisis previos, la mejor manera de diseñar una unidad didáctica que permita a los estudiantes iniciar su estudio no solo en relación con sistemas compuestos por múltiples partículas, sino también en lo que respecta a las interacciones atómicas y la propia demostración de su existencia.

De esta forma, se presentará la trayectoria pedagógica que se pretende abordar en la unidad didáctica, junto con las actividades que se desarrollarán en ella. El enfoque está destinado a brindar a los estudiantes una experiencia educativa integral y enriquecedora, que les permita comprender de manera efectiva los conceptos relacionados con sistemas de partículas y las interacciones a nivel atómico, contribuyendo así a su desarrollo académico y cognitivo.

3.1. Metodología para la construcción de la guía.

Desde el punto de vista metodológico, la presente investigación se enfoca en el desarrollo de una guía didáctica. Esta guía está fundamentada en la pedagogía proyectiva, que busca que la conceptualización de los conocimientos sea significativa al poner al estudiante en el centro del proceso de construcción del conocimiento. En este enfoque, el estudiante se convierte en el principal agente que construye conocimiento a partir de sus propias experiencias y de las orientaciones proporcionadas por el maestro. Por consiguiente, la guía didáctica consistirá en un conjunto de actividades diseñadas para cumplir con estas condiciones. Además, cada actividad estará diseñada de manera que se relacionen entre sí y se refuercen mutuamente. Esto se logrará mediante el uso de datos históricos, teóricos y experimentales recopilados en el segundo capítulo de este trabajo.

El objetivo de esta metodología es crear un entorno de aprendizaje en el que los estudiantes no solo adquieran conocimientos de manera pasiva, sino que también participen activamente en su proceso de aprendizaje. Al centrarse en la experiencia del estudiante y en la integración de diferentes tipos de datos, se busca enriquecer el proceso de enseñanza-aprendizaje y promover una comprensión más profunda y significativa de los conceptos abordados en la investigación sobre el movimiento de partículas Brownianas, de tal manera que las actividades se desarrollan desde los análisis teóricos y experimentales que se recolectaron en la investigación.

3.2. Población

Este trabajo está propuesto para ser implementado con estudiantes que estén abordando por primera vez el curso de física estadística en la Universidad Pedagógica Nacional. El propósito fundamental es proporcionarles las herramientas necesarias para que puedan desarrollar una comprensión más sólida y profunda del pensamiento probabilístico que subyace a los procesos microscópicos estudiados en este curso.

Conscientes de la complejidad inherente a los conceptos y fenómenos abordados en la física estadística, se ha estructurado este material de manera que sea accesible y relevante para los estudiantes que están dando sus primeros pasos en este campo de estudio. Se espera cultivar en ellos una comprensión intuitiva y sólida de los principios probabilísticos que gobiernan el comportamiento de sistemas físicos a nivel microscópico.

3.3. Pedagogía proyectiva.

En esta sección, se realiza un análisis detallado y una descripción exhaustiva del modelo pedagógico que se propone como el más adecuado para desarrollar una unidad didáctica que satisfaga plenamente los objetivos de este trabajo. El propósito principal de esta sección es presentar un conjunto de actividades que, haciendo uso de las herramientas conceptuales y teóricas previamente abordadas en los capítulos uno y dos, se sustenta en la pedagogía proyectiva.

La pedagogía proyectiva se distingue por ser una propuesta innovadora y dinámica, en constante proceso de renovación y recreación. En contraposición a un enfoque estático, este enfoque pedagógico se nutre del trabajo colaborativo de todos los sujetos involucrados en el proceso educativo, tanto los educandos que participan en el desarrollo de las actividades como los docentes que las proponen. En este contexto, se valora profundamente el acumulado histórico de conocimientos y experiencias, que sirve como un referente fundamental para el desarrollo de la pedagogía proyectiva. Este acervo no solo se ha acumulado a lo largo del tiempo, sino que también ha sido objeto de reflexión y sistematización, lo que lo convierte en una base sólida y valiosa para la evolución continua.

Además, la concepción epistemológica subyacente a la pedagogía proyectiva se caracteriza por considerar el conocimiento y los conceptos como construcciones en constante desarrollo. Este enfoque se aleja de la epistemología positivista, (Aguilera Morales & Martínez Lara , 2009) que busca establecer conocimientos y verdades definitivas. Aquí, el sujeto desempeña un papel central como agente activo en la construcción del conocimiento, conectando ideas y conceptos a través de una serie de actividades que permiten una comprensión profunda y significativa de los temas que se pretenden conceptualizar, brindando a los educandos la oportunidad de ser participantes activos en su proceso de aprendizaje.

La proyección es una de las ideas base por la cual se desea usar este modelo educativo ya que esta puede entenderse como una acción en cadena; en otras palabras, permite encaminar hacia un futuro, hacia la consecución de un "algo" deseado, ello implica que la proyección se encuentra movida por un deseo y no por un ejercicio mecánico como respirar. (Aguilera Morales & Martínez Lara , 2009), por ello se considera como necesario asumir el concepto de deseo como algo que trasciende un objetivo de comportamiento; se considera como una filosofía y una ética de vida que corresponden a un comportamiento social preciso y se relacionan directamente con un algo proyectado (Vassileff, 1999), y a su vez también implica el reconocimiento de la formación en la autonomía.

$$\overline{x^2} = \frac{2K_B T}{\alpha} t$$

Con lo ya mencionado, se pretende crear un documento que despierte un profundo interés en el estudiantado. El eje principal es establecer la cinemática molecular como un concepto fundamental que debe ser enseñado de manera integral en los cursos de física estadística. Además, se busca desarrollar de manera transversal las herramientas matemáticas, los conceptos históricos y las concepciones físicas relacionadas con esta área del conocimiento.

Este enfoque no solo se limita a la teoría, sino que también incorpora actividades experimentales fundamentales. Estas actividades, inspiradas en el trabajo pionero de Robert Brown, permiten a los estudiantes explorar y comprender los fenómenos a nivel microscópico. Además, se redirigen desde las perspectivas y apreciaciones realizadas por Jean Perrin sobre el trabajo de Albert Einstein. Este enfoque proporciona una base sólida para el aprendizaje al involucrar a los estudiantes en la observación y análisis de eventos en la cinemática molecular. A través de este enfoque experimental, los estudiantes pueden adquirir una comprensión más profunda de los conceptos físicos y matemáticos relacionados con la física estadística, lo que en última instancia contribuirá a su formación integral en el campo de la física.

3.4. Unidad didáctica.

Como ya se mencionó en la sección 3.2, la finalidad de esta unidad didáctica es generar un plan de trabajo proyectado sobre una temática en particular e ir escalonándola con ejes temáticos relacionados que se van generando de forma trasversal a la temática general par que ninguno de los temas que se están tratando se descontextualicen con la temática central.

Reconociendo que el eje principal es el movimiento de partículas en fluidos cuyas trayectorias no muestran tener comportamiento determinista por los métodos clásicos, se postulan una serie de sesiones que constituyen la unidad didáctica, las cuales tienen la finalidad de proporcionarle al estudiante una alternativa para el abordaje del movimiento molecular teniendo presente la transición entre variables macroscópicas a las microscópicas y segundo tener claridad conceptual de las formulaciones matemáticas y concepciones físicas, para tomar temas de más complejidad cuando se estudie la mecánica estadística de Boltzmann. Estas sesiones se describen a continuación y la propuesta para el aula se encuentra en los anexos.

3.4.1. Montaje experimental. (ANEXO 1)

Esta propuesta para la sesión 1 tiene como propósito, introducir al estudiante a la investigación del movimiento Browniano a través de la experimentación, es asi como los educandos deben recrear las condiciones del montaje original propuesto por Rober Brown y tomar apuntes de los diferentes movimientos que evidencie que puede realizar la partícula.

La intencionalidad de esta actividad es permitirles a los estudiantes sacar sus propias conclusiones respecto al por qué del movimiento de la partícula y adicionalmente, contrastarlas con las consideraciones que habían sacado los científicos de la época, las cuales son recopiladas en los trabajos de L. Gouy; este científico en 1888 añadió, a las características antes mencionadas, que el movimiento browniano no dependía de las vibraciones que podían transmitirse al fluido. Generalizó sus observaciones en los siguientes puntos:

1. El movimiento es bastante irregular, compuesto de translaciones y rotaciones, la trayectoria que aparece no tiene tangente.
2. Dos partículas se mueven independientemente, aun cuando la distancia entre ellas es menos que su diámetro.
3. El movimiento es más activo en las partículas más pequeñas.
4. La composición y la densidad de las partículas no tienen efecto.
5. El movimiento es más activo, si el fluido es menos viscoso.
6. El movimiento nunca para. (Nelson, 2001).

En cuanto al último punto, parecía que el movimiento iba en contra de la segunda ley de la termodinámica que prohíbe los movimientos perpetuos. En otras palabras, el movimiento browniano parecía ser perpetuo. (Zarate, 2013).

Con las actividades del ANEXO 1, se tiene la expectativa de que los estudiantes logren hacer evidentes algunas de estas características, y por tanto, se abra la posibilidad de hacer notorio cómo algunos logran notar algunas características diferentes a las de sus compañeros para la posterior discusión propuesta.

3.4.2. Conjunto de variables, ¿qué puedo medir? (ANEXO 2)

Ya habiendo reflexionado sobre los problemas y el tema central de estudio del movimiento Browniano se hace necesario que los estudiantes construyan conjuntos de variables y comiencen a reflexionar sobre las naturalezas macro y micro de cada una de ellas, para esto es necesario que haciendo uso del desplazamiento cuadrático medio relacionen qué variables afectan el montaje y cuáles no.

Para el desarrollo de la segunda sesión 2 (ANEXO 2) es necesario que el maestro haciendo uso de las herramientas presentadas en el primer capítulo contextualice a los estudiantes en como históricamente diferentes científicos comenzaron a relacionar variables con las diferentes formas en las que se puede estudiar el movimiento Browniano, como un gas ideal, como un proceso de mezcla no heterogenia, como un coloide, etc.

3.4.3. Construcción de un modelo teórico. (ANEXO 3)

En la sesión 3, como se presentó en el apartado (2.3.2.) se propone el uso de las leyes de Newton para modelar el movimiento Browniano, lo cual puede permitir al estudiante tener en cuenta las consideraciones ya realizadas en la sesión 1 y, a partir de las variables necesarias encontradas en la sesión 2, construir un modelo dinámico que abarque las consideraciones ya hechas.

En esta sesión es necesario que el docente direccione y aborde el tema de termino fluctuante debido a la interacción molecular.

Acompañado del análisis dinámico, se recomienda mostrar las soluciones del trabajo de Einstein para que los estudiantes tengan a la mano la función de densidad de probabilidad del movimiento y la ecuación estocástica dinámica que también describe a este.

3.4.4. Determinación de constantes fundamentales. (ANEXO 4)

Para la sesión 4, con las formulaciones obtenidas en la sesión 3 y con ayuda del docente, los estudiantes haciendo uso de los valores obtenidos de sus variables en la sesión 2, deben encontrar las relaciones de las dimensiones moleculares halladas por Einstein en el apartado (2.1.3.), de tal modo que los estudiantes deben encontrar el radio molecular, el número de Avogadro y la constante de difusión para el solvente en el montaje.

Las actividades de esta sesión tienen como propósito contextualizar a los estudiantes en dos aspectos: primero, la comprobación de la existencia molecular como fruto de su propio trabajo en el aula y segundo el uso adecuado de variables y su relación entre las dimensiones micro y macro.

3.4.5. Espacio colaborativo. (ANEXO 5)

Con la finalidad de poder recoger, las experiencias y el conocimiento construido por los estudiantes, es necesario que se cree un espacio de socialización en donde todas las personas expongan sus valores encontrados, narren sus ideas, sus aciertos sus errores, lo que le sorprendió, lo que le disgusto, etc., esto para generar lazos que le permitan al estudiante conceptualizar lo aprendido desde lo emocional y lo cognitivo, para que las actividades realizadas no se queden como una actividad más de una materia si no que genere pasión y deseo por el estudiante por conocer más de las temáticas relacionadas en las actividades ya realizadas por el estudiante.

3.5. Recomendaciones al docente.

Las actividades que se detallan en los ANEXOS de este documento están diseñadas con el propósito fundamental de ofrecer un enfoque alternativo y enriquecedor para introducir a los estudiantes en el fascinante mundo de la física estadística. Este enfoque se fundamenta en la aplicación de la pedagogía proyectiva, que se distingue por su enfoque holístico y su énfasis en el proceso de aprendizaje en lugar de la evaluación meramente cuantitativa.

Al adoptar la pedagogía proyectiva, se espera liberar al estudiante de la presión constante que suele acompañar la importancia de obtener una calificación, permitiéndole centrar su atención en el verdadero desarrollo de la secuencia de actividades. Este enfoque busca fomentar un ambiente de aprendizaje más participativo, donde el énfasis está puesto en el proceso de adquisición de conocimientos y habilidades, en lugar de la obsesión por los resultados numéricos.

Al quitar la carga de la calificación, se busca que el estudiante se sumerja de manera más activa y comprometida en su aprendizaje. Al permitirles concentrarse en el proceso y comprensión de la física estadística, se fomenta su curiosidad, creatividad y abordaje los conceptos propios de esta rama de la física, lo cual puede favorecer así un aprendizaje significativo y perdurable.

El planteamiento propuesto no solo se orienta a transmitir conocimientos teóricos, sino que también pretende cultivar habilidades de indagación, de resolución de problemas y alrededor del pensamiento crítico. Al permitir que los estudiantes se concentren en el proceso de aprendizaje, se alienta su capacidad para explorar, cuestionar y reflexionar, promoviendo un enfoque más activo y autónomo en la adquisición de conocimientos.

REFLEXIONES FINALES.

Este trabajo se centró en la búsqueda documental de materiales que permitan a los estudiantes entender los fenómenos probabilísticos que se desarrollan en el marco del estudio de los sistemas microscópicos en física estadística, con la finalidad de permitirles conceptualizar de manera más clara el paradigma desarrollado en el estudio de sistemas microscópicos (Viau, Moro, Zamorano, & Szigety, 2008). Es por ende que la guía, fruto de la investigación, tiene como propósito el desarrollo de competencias en el pensamiento probabilístico en los modelos de explicación que el estudiante tiene que desarrollar en física estadística, así como el andamiaje matemático crucial al momento de modelar estos fenómenos naturales. Es así como desde la guía se espera que, en la sesión uno, el estudiante logre reconocer e interactuar con el movimiento browniano desde su experiencia, construyendo conocimiento a través de la observación y reflexiones que se generan al momento de observar cómo se mueve la partícula browniana. En la segunda actividad, ya experimentado el movimiento de la partícula browniana, se desea que los estudiantes logren entender la diferencia entre variables macroscópicas y microscópicas, así como entender el concepto de camino libre aleatorio, como primer elemento teórico para entender el movimiento browniano. Ya en la sesión tres, se busca que los estudiantes tengan la capacidad de construir un modelo dinámico capaz de replicar los resultados obtenidos en los trabajos de Einstein y Langevin a través del concepto de ruido gaussiano. Todas estas habilidades que se esperan desarrollar en los estudiantes que realicen la guía están focalizadas para que logren entender de mejor manera el movimiento molecular y así, cuando comiencen a describir los formalismos en física estadística, tengan desarrollado el pensamiento probabilístico de tal manera que logren obtener resultados satisfactorios en los temas que verán en el curso de física estadística.

Al orientador que desee desarrollar la guía didáctica, se le sugiere que, desde la misma naturaleza de la alternatividad de la guía frente a lo pedagógico, encamine a los estudiantes a desarrollar las habilidades mencionadas desde la comprensión, respetando procesos y en todo momento les permita a los estudiantes vivir y adentrarse en los temas desde la autonomía vivencial y en compañía de su acompañamiento, fomente la curiosidad y el desarrollo adecuado de los procedimientos teóricos.

CONCLUSIONES.

La revisión del trabajo original de Robert Brown y la descripción del montaje con el cuál él realizó la observación de las partículas brownianas, permitió presentar los interrogantes originales alrededor del fenómeno, los cuales fueron abordados posteriormente por diferentes científicos y finalmente se presentan las propuestas de descripción del fenómeno de Einstein, Langevin y Smoluchwki. De acuerdo con esto se estableció el punto de partida para la unidad didáctica con base en el montaje inicial de Brown.

La indagación sobre la forma en que se intentó describir inicialmente el fenómeno del movimiento de las partículas brownianas previo al siglo XX, permitió hacer evidente que, a pesar de que la termodinámica clásica tenía un gran respaldo teórico y experimental al momento de realizar análisis sobre los fenómenos macroscópicos, no es la teoría más apropiada para proporcionar el análisis de fenómenos a nivel microscópico. Esto dio pie para establecer las demostraciones brindadas desde los artículos de Albert Einstein, que dan un robusto marco teórico frente a la existencia de partículas microscópicas (moléculas), cuya interacción cinemática es la causante del fenómeno observado en el movimiento de las partículas Brownianas.

Con la descripción de la solución propuesta por Einstein del movimiento Browniano, se muestra un ejemplo puntual sobre un fenómeno macroscópico que da razón de la existencia molecular y sustenta la naturaleza probabilística de los procesos microscópicos. Esta descripción brindó a la investigación los ejes conceptuales, las relaciones de variables, funciones y constantes alrededor del fenómeno estudiado con el respectivo formalismo matemático. Además, se complementó con la teoría de Langevin que, basado en la mecánica Newtoniana, engloba los temas trabajados por Einstein y los unifica en una teoría mecánica del movimiento Browniano, lo cual fue fundamental para la propuesta de unidad didáctica sobre cómo y qué se espera hacer evidente del fenómeno en el aula para el abordaje desde la física estadística.

BIBLIOGRAFÍA

Aguilera Morales , A., & Martínez Lara , A. (2009). La Pedagogía Proyectiva: aproximaciones a una propuesta innovadora. *Pedagogia y saberes* , pág. 11.

Brown, R. (1828). A brief Account of microscopical observations made in the months of june, july, and August, 1827, on the Particles contained in the pollen of plants, and on the general existence of ative molecules in organic and Inorganic Bodies. *The Philosophical Magazine ans Annals of Philosophy*, 13.

Einstein , A. (1905). Movement of Small Particles Suspended in a Stationary Liquid Demanded by the Molecular-Kinetic Theory of Hea. *Ann.d.Phys*, 549-560.

Einstein, A. (1903). Eine Theorie der grundlagen der thermo-dynamilk. *Annalen der physik*, 170-187.

Einstein, A. (1906). On the Theory of the Brownian Movement. *Ann.d .Phys*, 371-381.

Furth, R. (1956). Investigation on the theory of the Brownian movement by Albert Einstein. *Methuen Co.*, 25.

Greca , I., & Freire, O. (2014). Teaching introductory quantum physics and chemistry: caveats from the history of science and science teaching to the training of modern chemists. *Chem. Educ. Res. Pract.*, 286-296.

Landau, L., & Lifshitz, E. (1950). *Física Estadística* (Vol. 5). U.R.S.S.: REVERTE S.A.

Martinez, S. F. (1997). *De los efectos a las causas* .

Mayorga, A. (2020). Albert Einstein 1905 de las flutuaciones energeticas a las fluctuaciones moleculares. *Academia: Accelerating the world's research.*, 36.

Mendez, N. (2019). Introducción del concepto de probabilidad en física desde la mecánica estadistica. *CIDC*, 13.

Nelson, E. (2001). Dynamical Theories of Brownian Motion.

Pérez, J. (2005). Una aproximación a la vida y obra de James Prescott Joule. Del motor eléctrico a la conservación de la energía. *El día.*, pág. 6.

Piasecki, J. (2007). Centenario de la teoría del movimiento browniano de Marian Smoluchowski.

Reif, F. (1965). *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics.* McGRAW-HILL BOOK COMPANY.

Solbes, J., Furió-Gómez, C., & Furió Mas, C. (2007). LA HISTORIA DEL PRIMER PRINCIPIO DE LA TERMODINÁMICA Y. *la ciencia ayer y hoy*, 16.

Vassileff, J. (1999). Historias de vida y pedagogía de proyecto en La pedagogía de Proyectos: Opción de cambio social.

Viau, J., Moro, L., Zamorano, R., & Szigety, E. (15 de 1 de 2008). Un modelo analógico como marco experimental para el movimiento browniano en la enseñanza media. *Revista iberoamericana de educación* , pág. 11.

Zarate, C. (2013). Lo Continuo y lo Discreto, una discusión desde el movimiento browniano. *Trabajo de grado*, 71.

ANEXOS

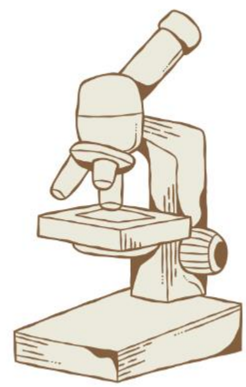
GUÍA DIDACTICA:

ANEXO 1 - SESIÓN 1:

¿SE MUEVE? MONTAJE EXPERIMENTAL.

MATERIALES:

1. Microscopio por equipo.
2. Películas de agua.
3. Partículas brownianas (estos deberán escogerlos el estudiante teniendo presentes que deben ser cuerpos que según el se consideren relativamente pequeños).



4. Computador con la aplicación Tracker (sitio web oficial de descarga de la aplicación: https://physlets.org/tracker/).

OBJETIVO DE APRENDIZAJE:

1. Reconocer de forma experimental el movimiento de partículas brownianas.
2. Realizar medidas aproximadas del movimiento de partículas brownianas

como evidencia de la escala micro.

TIEMPO SUGERIDO:

Dos clases, cada una de dos horas.

1 ACTIVIDAD:

Con la finalidad que los estudiantes conozcan de primera mano la existencia molecular y adicionalmente aprender a modelarla de la manera más adecuada, con ayuda del maestro los estudiantes colocaran diferentes cuerpos masicos en películas de agua y con ayuda de una barra de calibración tomara diferentes medidas de los materiales que ellos escojan para mirar el movimiento bajo el microscopio.

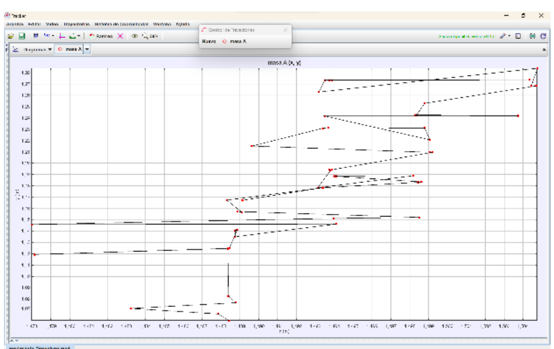
Ya escogido por el miso estudiante las partículas que se colocaran bajo el microscopio se deberá grabar el movimiento para posteriormente analizar el video en la aplicación Tracker (sitio web oficial de descarga de la aplicación: https://physlets.org/tracker/), para un análisis más riguroso y llenar la siguiente tabla:

PARTICULAS BROWNIANAS			
#	TIPO	TAMAÑO (micrómetros)	DESCRIPCIÓN DEL MOVIMIENTO

1			
2			
3			
4			
5			
6			

Tabla 1. Medidas de las partículas brownianas.

Se sugiere que a cada movimiento de la partícula se le agregue su correspondiente grafica diseñada en Tracker así como se ve en el ejemplo 1



Ejemplo 1, grafica de movimiento experimental de una partícula browniana de unos 110 micrómetros.

2 ACTIVIDAD:

El maestro reunirá a todos los grupos y reflexionara sobre el laboratorio, encaminando las reflexiones a los análisis realizados por M.Gouy quien en 1888 añadió a las características antes mencionadas que el movimiento browniano dependía de las vibraciones que podían transmitirse al fluido. Generalizó sus observaciones en los siguientes puntos:

1. El movimiento es bastante irregular, compuesto de translaciones y rotaciones, la trayectoria que aparece no tiene tangente
2. Dos partículas se mueven independientemente, aun cuando la distancia entre ellas es menos que su diámetro.
3. El movimiento es más activo en las partículas más pequeñas.
4. La composición y la densidad de las partículas no tienen efecto.
5. El movimiento es más activo, si el fluido es menos viscoso.
6. El movimiento nunca para. (Nelson, 2001)

En cuanto al último punto, parecía que el movimiento iba en contra de la segunda ley de la termodinámica que prohíbe los movimientos perpetuos. En otras palabras, el movimiento browniano parecía ser perpetuo. (Zarate. C, 2013), importante enfatizar en este último punto ya que desde este se motiva a los estudiantes a construir un modelo cinemático que no viole la primera y segunda ley de la termodinámica.

Nota: posibles preguntas que puede realizar el maestro:

- ¿Qué tipo de movimientos pueden observar en las partículas?
- ¿El movimiento depende del tamaño de la partícula?
- ¿Estudiaron el movimiento cambiando las variables del medio?

ANEXO 2 - SESIÓN 2:

CONJUNTO DE VARIABLES, ¿QUÉ PUEDO MEDIR?

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE:

1. Reconocer variables macroscópicas y microscópicas para analizar el experimento realizado en la sesión 1.
2. Hacer el correcto uso del desplazamiento mínimo cuadrado, como alternativa para el abordaje de la cinemática del movimiento Browniano.
3. Orientar las discusiones matemáticas a la estadística de Boltzmann.

Tiempo sugerido:

Una clase de dos horas**.**

ACTIVIDAD 1:

Ya con la tabla 1 completada, los grupos deberán reflexionar freten a que medidas que se pueden realizar al experimento que ya realizaron y clasificarlas entre variables microscópicas y macroscópicas en la siguiente tabla:

VARIABLES	
MACROSCÓPICA	MICROSCÓPICA

Tabla 2: medidas de variables por parte de los estudiantes.

Al terminar este ejercicio el maestro debe con los equipos reencaminar las discusiones para que se usen variables relevantes con el estudio, que permitan dirigir a un análisis cinemático de las partículas másicas que componen el experimento.

$$w_N(n_1) = \frac{N!}{n_1!\,(N-n_1)!} q^{n_1} p^{N-n_1}$$

Ecuación de distribución para conocer la probabilidad de encontrar la partícula a la izquierda o a la derecha.

ACTIVIDAD 2:

Desarrollo del desplazamiento cuadráticos medio, una de las conclusiones que ya se ha podido deducir en las actividades anteriores, es la ausencia de una trayectoria que se pueda determinar a través de

un modelo cinemático convencional

es asi como para ello se debe hacer uso de la estadística por ende en este apartado haciendo uso de las herramientas que se dedujeron en el capitulo dos “sobre el Camino aleatorio” del documento: explicación del movimiento browniano: una herramienta para el estudio de sistemas microscópicos en física estadística; los estudiantes deberán calcular primeramente la probabilidad de la partícula que se dirija más hacia alguna dirección con la ecuación de distribución de probabilidad.

Para lograr esto se deben conocer el número de pasos que la partícula dio hacia la izquierda o hacia la derecha y su N, el cual no es más que la suma de todos los pasos dados por la partícula en cada fotograma en la aplicación Tracker, viendo que debido a la naturaleza del experimento no hay factores que hagan que exista una dirección predilecta de movimiento causando que q=p.

- Describa lo obtenido matemáticamente: ______________________________

Conocido este valor es importarte que se calcula la dispersión de las medidas tomadas del experimento la cual se suele determinar como el cuadrado de la varianza de los datos obtenido la cual ya se ha mencionado en explicación del movimiento browniano: una herramienta para el estudio de sistemas microscópicos en física estadística.

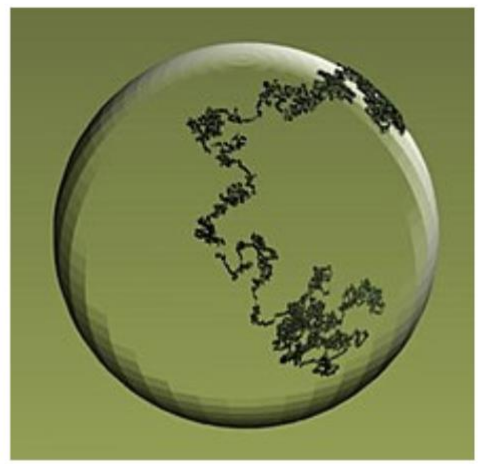
$$\langle \Delta n^2 \rangle = \sum_{i=1}^{N} w_N(\Delta n)(\Delta n - \langle \Delta n \rangle)^2$$

Camino cuadrático medio.

A la cual también se le suele conocer como camino cuadrático medio el cual da información de la distancia de los desplazamientos entre fotogramas del experimento, es importante que los resultados hallados sean coherentes con las dos ecuaciones mostradas es por ende que el maestro debe generar las correspondientes discusiones en donde se le permita al educando reflexionar sobre el carácter estadístico del fenómeno para ayudarlo a concebir el movimiento ya no desde una mirada clásica si no desde los posibles movimientos aleatorios que se pueden generan en el montaje realizado por él.

- Describa lo obtenido matemáticamente:

ACTVIDAD 3:



Thomas Steiner,1983

Esta tercera actividad tiene como intenciones fomentar el pensamiento causal natural en los estudiantes que están desarrolla esta actividad, ya que hasta el momento los educandos ya tienen conocimiento sobre el cómo pueden modelar las trayectorias de la partícula browniana se hace necesario buscar las causas del movimiento.

ANEXO 3 - SESIÓN 3:

CONSTRUCCIÓN DE UN MODELO TEÓRICO:

OBJETIVO DE APRENDIZAJE:

1. Reconocer la teoría dinámica del movimiento Browniano.
2. Describir las implicaciones matemáticas y físicas de la variable de ruido.

TIEMPO SUGERIDO:

Se sugiere que esta actividad se haga en una clase.

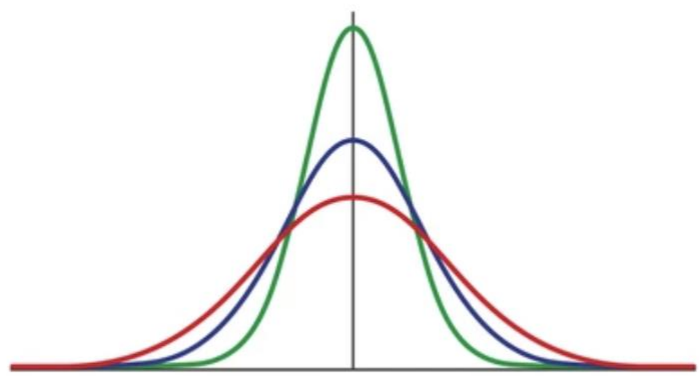
ACTIVIDAD 1:

Con lo ya realizado hasta el momento los estudiantes tienen las herramientas para ver que el movimiento es afectado por el movimiento molecular y adicionalmente tienen las herramientas matemáticas para conocer posiciones y distancias del movimiento de la partícula, pero no se ha desarrollado en si un entendimiento dinámico del fenómeno es asi como esta actividad busca que los estudiantes haciendo uso de las leyes de Newton construyan un sistema de ecuaciones dinámicas del fenómeno.

Para esto el maestro debe dirigir los análisis, de tal manera que la fuerza que produce que la partícula browniana se mueva se logra modelar como fuerza de Stokes.

ACTIVIDAD 2:

En esta actividad el maestro, haciendo uso del sistema de ecuaciones encontradas de forma Newtoniana agregara los términos de ruido para llegar a la ecuación de Langevin para que los educandos obtengan un sistema de ecuaciones dinámico del fenómeno en el que están trabajando.



Se le sugiere al maestro contrarrestar resultados con las soluciones en los artículos de Einstein los cuales se presentan en el segundo capítulo del trabajo de grado: EXPLICACIÓN DEL MOVIMIENTO BROWNIANO: UNA HERRAMIENTA PARA EL ESTUDIO DE SISTEMAS MICROSCÓPICOS EN FÍSICA ESTADÍSTICA.

ANEXO 4 - SESIÓN 4:

DETERMINACION DE CONSTANTE FUNDAMENTALES:

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE:

1. Encontrar constantes fundamentales que les permita a los estudiantes reforzar su entendimiento de la teoría cinético molecular.

TIEMPO SUGERIDO:

Una sesión de una hora.

ACTIVIDAD 1:

Con los datos y el modelo explicativo desarrollado encontrar el radio de las moléculas.

ACTIVIDAD 2:

Encontrar el número de Avogadro, comparar con el resultado de Einstein y la medida contemporáneo de este valor y reflexionar sobre la importancia de este número en el análisis.

ACTIVIDAD 3:

Encontrar la constante de difusión y reflexionar sobre estos números.

ANEXO 5 - SESIÓN 5:

ESPACIO COLABORATIVO.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE:

1. Reflexionar sobre todas las actividades realizadas en la guía didáctica.
2. Establecer un momento de colaboración para compartir resultados con los diferentes grupos.

TIEMPO SUGERIDO:

Una sesión de una clase.

ACTIVIDAD 1:

Ya para finalizar se le propone al maestro presentar un momento de colaboración en donde todos los grupos presenten sus resultados sus modelos y contrastar que tanto error tienen los valores de sus constantes encontradas.