La idea gauge y su implementación en la electrodinámica clásica

Juan Manuel Cardoso Castillo

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología

Licenciatura en física

2024

La idea gauge y su implementación en la electrodinámica clásica

Juan Manuel Cardoso Castillo

Asesor

Mauricio Rozo Clavijo

Trabajo de grado para optar por el título de licenciado en física

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología

Licenciatura en física

2024

A mis abuelos Melba y Leonardo,

quienes me brindaron su apoyo para iniciar

este proceso y a pesar de no estar presentes a

día de hoy, continúan guiándome con su ejemplo .

Have a good time, enjoy life

Life is too short to be brought down and be discouraged

You have to keep moving you have to keep going

Put on foot in front of the other, smile and keep on rolling.

Kobe Bryant

Agradecimientos

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a mi tía Nancy Castillo, cuyo apoyo incondicional fue fundamental en esta etapa de mi vida. Sin ella, no habría podido completar mi carrera.

A mi madre Yaneth Castillo Quien siempre guarde en mis pensamientos y que a pesar de no estar presente en la totalidad de mi proceso me dio fuerzas.

También deseo agradecer a Andrés David, Loren, Juana Valentina, Juan David y Sara Sofia, quienes fueron parte importante de este proceso y me brindaron un apoyo valioso que siempre atesoraré.

A mi asesor, el docente Mauricio Rozo por su guía y ayuda en la realización del trabajo de grado. A la docente Sandra Ávila quien me hizo apasionar por la física y a los profesores Francis Moreno y Diana Castro quienes me brindaron su ayuda en un momento de dificultad.

Índice

Índice de figuras

Introducción

En la segunda década del siglo XX, Hermann Weyl, un matemático alemán, sentó la base de la Teoría Gauge, que ha sido esencial en la descripción de las interacciones fundamentales de la naturaleza y han despertado un gran interés en la física contemporánea. La génesis de esta idea surgió con el propósito de abordar el desafío de unificar la Teoría General de la Relatividad (TGR) y el electromagnetismo.

El trabajo pionero de Weyl se enfocó en el estudio del movimiento de vectores sobre espacios curvos, marcando así los primeros pasos hacia el desarrollo de la teoría gauge. A medida que estos avances se profundizaban, se revelaba una similitud sorprendente entre estos desarrollos contemporáneos y una teoría ya establecida: el electromagnetismo descrito por las ecuaciones de Maxwell. Esta conexión condujo a considerar al electromagnetismo de Maxwell como la primera teoría gauge.

Al explorar la teoría electromagnética desde la perspectiva gauge, se abrió un camino alternativo para explicar los fenómenos físicos. Bajo esta perspectiva, se abrió la puerta para la implementación del principio gauge en el marco de la física clásica. Este enfoque alterno reveló que, independientemente de la ruta tomada, las leyes de la física seguían siendo consistentes y se mantenían invariantes.

El sentido y significado de la Teoría Gauge se presenta a menudo como una problemática en física, ya que puede resultar difícil para muchos entender la esencia de este marco teórico. La dificultad radica en la necesidad de captar tanto los aspectos conceptuales como técnicos de la teoría, así como su aplicación en diversos contextos de la física.

En la formulación de la Teoría Gauge, se introducen simetrías implicando la obtención de la interacción entre partículas. Sin embargo, el principio gauge puede ser desafiante de comprender para aquellos que no están familiarizados con los conceptos matemáticos y físicos subyacentes. Además, la aplicación de los principios de la Teoría Gauge en diferentes contextos físicos puede resultar confusa, ya que requiere una comprensión profunda de cómo estas simetrías se manifiestan en las ecuaciones que describen el comportamiento de las partículas y campos físicos. Es por esto, que en el trabajo se aborda la problemática que reside en la necesidad de proporcionar una explicación clara y accesible sobre el significado y la relevancia del principio gauge, así como en mostrar cómo este principio puede ser aplicado de manera efectiva en la comprensión y descripción clásica de fenómenos físicos.

Brindar una contextualización detallada sobre la esencia y el significado del principio gauge es fundamental para establecer un sólido marco teórico que puede servir como punto de partida en la aplicación de esta idea en los contextos más actuales de la física. Al implementar este principio dentro del contexto de la física clásica, se logra una comprensión más profunda de los principios fundamentales que subyacen a la idea gauge, lo que a su vez facilita su aplicación en una variedad de situaciones y problemas físicos.

La investigación tiene como objetivo abordar la problemática relacionada con el principio gauge, centrándose especialmente en su implementación en la electrodinámica clásica. La investigación está estructurada en tres capítulos. En el primero, se establece la distinción entre las transformaciones gauge de tipo global y local, ilustrándolo con un ejemplo de traslación de un punto respecto a un sistema de coordenadas.

En el segundo capítulo, se profundiza en por qué la teoría electromagnética de Maxwell se considera la primera teoría gauge. Se implementa el principio gauge al potencial escalar y vectorial, y se muestra el efecto que tiene esta recalibración en los campos eléctrico y magnético.

Finalmente, se extiende la implementación de la idea gauge al contexto electromagnético, pero ahora bajo consideraciones que involucran la teoría de la relatividad, con el fin de mostrar cómo la idea gauge sigue siendo compatible incluso en este marco teórico.

Capítulo 1

1.1. Contexto problemático

El trabajo de Hermann Weyl en "Gravitation und Elektrizität"(Weyl, 1921) fue importante para la física teórica, ya que sentó la base para futuras investigaciones en el campo de la unificación de las fuerzas fundamentales de la naturaleza hasta entonces conocidas. Aunque es debatible si su principal objetivo fue unificar el campo electromagnético y gravitacional (Quintero y Molina, 2009), su trabajo fue fundamental para el desarrollo de la teoría de la relatividad general de Einstein y para la comprensión de la geometría diferencial en la física (Lamberti y Rodríguez, 2019).

Uno de los principales aportes de Hermman Weyl radica en su convicción de que la geometría y la física no podían separarse, dado que las propiedades geométricas del espacio están intrínsecamente ligadas a las fuerzas que actúan sobre los objetos. Asimismo, subrayó la importancia de las estructuras matemáticas subyacentes en la física teórica, reconociendo, que si bien, esta disciplina se basa en la observación empírica, su progreso depende en gran medida de la capacidad de los matemáticos para formular teorías coherentes y precisas capaces de describir el mundo natural (Chaviguri y Silva, 2011). El trabajo de Weyl marcó un hito significativo en la historia de la física teórica, sentando las bases para futuras investigaciones en la unificación de las fuerzas fundamentales de la naturaleza. Su perspectiva sobre la estrecha relación entre geometría y física ha influido notablemente en el desarrollo posterior de la física teórica y la teoría de gauge, siendo relevante en la actualidad para la búsqueda de una teoría unificada (Lamberti y Rodríguez, 2019).

La idea de gauge es una herramienta importante en la física teórica para calibrar las magnitudes físicas dentro de los modelos matemáticos que describen los fenómenos naturales. Respecto al electromagnetismo se notó la independencia de las ecuaciones de Maxwell al elegir un potencial arbitrario, lo que ha llevado a investigar la simetría en estas ecuaciones (Pedreros Cifuentes, 2020). La idea de gauge es importante ya que permite identificar las simetrías ocultas en las ecuaciones que describen los fenómenos naturales y, al aplicar esta idea dentro del contexto de la física de partículas de altas energías, se obtiene la dinámica de interacción entre partículas (Lamberti y

Rodríguez, 2019).

1.2. Planteamiento del problema

Como afirmó (Ayala, 2006),"El saber no puede estar ausente en la docencia de ese saber". Esta cita destaca la responsabilidad de los docentes de implementar estrategias que garanticen que los estudiantes adquieran un conocimiento actualizado en el campo enseñado. No basta con contar con una formación básica; es fundamental mantenerse al tanto de los avances y desarrollos más recientes (Ostermann y Moreira, 2000). Los educadores deben brindar una educación de calidad, ayudando a los estudiantes a comprender los temas tratados y fomentando el desarrollo de habilidades y destrezas necesarias para su futuro desempeño profesional. Además, tienen el papel crucial de inspirar a los estudiantes a continuar aprendiendo y explorar nuevas aplicaciones del conocimiento adquirido. Por lo tanto, es esencial que los docentes estén bien preparados en su área de enseñanza para garantizar una educación de alta calidad. En consecuencia, el dominio profundo y actualizado del contenido por parte de los docentes debe ser una prioridad en cualquier programa de formación docente (Ayala, 2006).

Las teorías gauge representan un tema de vanguardia en la física moderna, pero su comprensión puede ser desafiante debido a su naturaleza abstracta y, a menudo, poco intuitiva. Por esta razón, es crucial recopilar y organizar los conceptos fundamentales que forman a esta teoría. Este proceso facilita la asimilación y el entendimiento de su sentido y significado dentro del contexto de las teorías físicas contemporáneas. Al desglosar y clarificar estos elementos, se puede proporcionar una base sólida para obtener elementos que faciliten el entendimiento de las contemporáneas leyes de interacción en física. Es por esta razón que se plantea la siguiente pregunta de investigación:

1.3. Pregunta problema

¿Cuál es el sentido y significado de la idea gauge?

1.4. Objetivo general

Obtener elementos para la implementación de la idea gauge en la electrodinámica clásica

1.4. Objetivos específicos

- Realizar una contextualización sobre la transformación gauge global y local.
- Implementar la idea gauge dentro del contexto electromagnético a través del potencial eléctrico y magnético para obtener la invariancia de los campos electromagnéticos bajo la recalibración de los potenciales.
- Extender la implementación de la idea gauge en electrodinámica clásica bajo el contexto de la relatividad especial.

1.5. Antecedentes

Como antecedentes de esta investigación, se destacan:

- El trabajo de pregrado titulado ”El Surgimiento de la Simetría Gauge durante el Primer Tercio del Siglo XX y su Relación con la Teoría Electromagnética alrededor del Potencial Vectorial desde la Perspectiva de Hermann Weyl“, realizado por Daniel Alejandro Pedreros Cifuentes en la Universidad Pedagógica Nacional. Este trabajo proporciona un análisis histórico y un desarrollo basado en la formulación del campo de potenciales eléctrico y magnético. Su relevancia radica en el tratamiento del electromagnetismo mediante las formulaciones gauge. Además, introduce los factores de ajuste, fundamentales en la idea gauge para desarrollar la teoría electromagnética de manera invariante bajo transformaciones gauge, tal como se expone en el trabajo de grado. De esta manera, ofrece una sólida base histórica y conceptual para la investigación actual sobre la idea gauge y su aplicación en el electromagnetismo y la electrodinámica clásica.

- El artículo “Sobre el concepto gauge, global y local, y su implementación en la física”, escrito por Mauricio Rozo para la revista Visión Electrónica, presenta la teoría gauge a través de dos desarrollos que introducen este concepto. Comienza con ejemplos que requieren un conocimiento básico de física, como traslaciones y rotaciones, para luego adentrarse en temas más complejos, como su aplicación en la electrodinámica y la mecánica cuántica. Este artículo resulta fundamental para el desarrollo de la investigación actual, ya que amplía los desarrollos previamente mencionados sobre los campos potenciales y el cuadri-potencial, al tiempo que introduce la formulación lagrangiana para el sistema. Este último aspecto es crucial en las teorías gauge, dado que el lagrangiano debe permanecer invariante tras aplicar las transformaciones gauge.

- El trabajo titulado “Efectos dinámicos de los sistemas no inerciales: una explicación desde la perspectiva de la idea gauge”, escrito por Cesar Geovanni Suarez Bermúdez, ofrece una visión innovadora para analizar los fenómenos de rotación de sistemas no inerciales mediante la idea gauge. Si bien este fenómeno había sido previamente estudiado desde la perspectiva newtoniana, el trabajo presenta una comparación entre los resultados obtenidos mediante la recalibración de estos sistemas y los obtenidos desde la perspectiva newtoniana tradicional. A pesar de utilizar un enfoque diferente, se encontraron resultados consistentes. Este estudio representa una alternativa interesante para abordar ciertos sistemas desde una perspectiva distinta, lo que lo hace relevante en el contexto de la investigación sobre la aplicación de la idea gauge en el electromagnetismo y la electrodinámica clásica.

Capítulo 2

Primer acercamiento a la idea gauge: Traslación de coordenadas de dos puntos en el espacio

Numerosos avances contemporáneos en física están enmarcados en la teoría gauge, cuya estructura fundamental implica calibrar magnitudes específicas y garantizar que las leyes físicas permanezcan invariantes bajo recalibraciones. Sin embargo, el término "invariancia gauge" puede resultar problemático y poco intuitivo para muchos. Por esta razón, es importante comenzar con una contextualización que permita entender su sentido y significado, mostrando la base de esta idea. De este modo, se puede obtener una comprensión más intuitiva de los fundamentos de las teorías gauge.

Se muestra cómo implementar la idea gauge utilizando la recalibración de la posición de dos puntos en el espacio para obtener la invariancia del intervalo. Este ejercicio permite establecer los primeros pasos para aplicar esta idea utilizando la ubicación de un punto en el espacio como ejemplo. Al hacerlo, se definen tanto las transformaciones de tipo global como las locales dentro de esta idea para así ir desglosando los conceptos que subyacen en la teoría gauge.

2.1. Traslación de coordenadas de dos puntos en el espacio

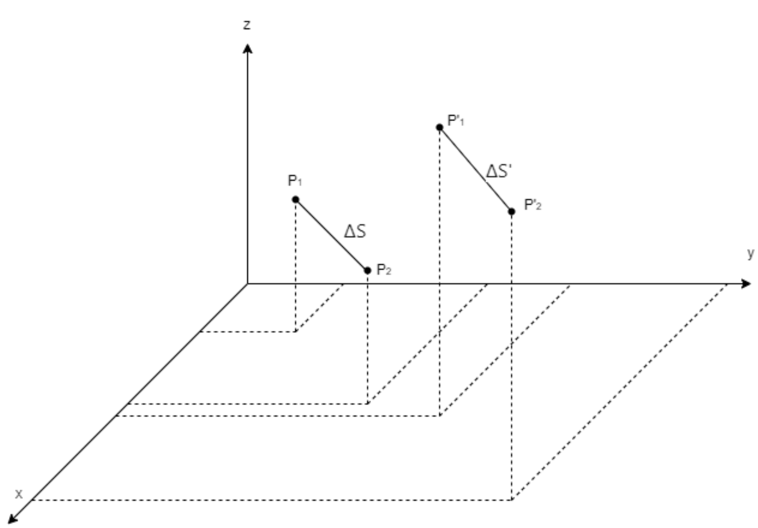

Figura 1: Dos puntos en el espacio que experimentan una traslación, Autoría propia

En la Figura 1 se observan los puntos P_1 y P_2, que tienen como coordenadas (X_1, Y_1, Z_1) y (X_2, Y_2, Z_2) respectivamente. El intervalo ΔS muestra la distancia entre los puntos, definiéndose como:

$$\Delta S^2 = (X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2. \tag{1}$$

Se realiza una recalibración del punto inicial como del final introduciendo una constante M; constante que representa la calibración de los puntos P_1 y P_2 en el espacio, transformándolos[1] así en los puntos P_1' y P_2'. La recalibración de los puntos P_1 y P_2 se representa de la siguiente manera:

$$P_1 \rightarrow P_1' = P_1 + M, \tag{2}$$

$$P_2 \rightarrow P_2' = P_2 + M. \tag{3}$$

2.2. Transformación global

Al considerar un grupo de observadores que desean medir el intervalo ΔS entre los puntos antes y después de la recalibración, es necesario definir las características de M. Esta constante en término de sus componentes adopta la forma:

$$M = (x, y, z). \tag{4}$$

La característica principal de la constante que define la recalibración como global es su universalidad: se establece de manera igual para todos los observadores. Esto implica que la constante se vuelve general, y todos los observadores ejecutarán la misma recalibración.

La constante se expresa en términos de componentes facilitando la recalibración de las coordenadas punto por punto en el espacio. De tal manera que los puntos quedan definidos tras la transformación:

[1] Para referir a la acción de transformar de ahora en adelante se utiliza el símbolo $\rightarrow$.

$$P_1 \to P_1' = (X_1 + x, Y_1 + y, Z_1 + z), \tag{5}$$

$$P_2 \to P_2' = (X_2 + x, Y_2 + y, Z_2 + z). \tag{6}$$

Como se mencionó previamente, los observadores tienen el interés de medir la distancia entre los puntos y determinar si el intervalo varía después de la transformación realizada. Basándose en la ecuación (1), también se puede determinar el intervalo ΔS para otro observador que recalibra los puntos con la misma constante M. Por lo tanto, se debe cumplir que: $\Delta S = \Delta S'$.

La distancia entre los puntos para los observadores queda definida como:

$$\Delta S^2 \to \Delta S'^2 = (P_2' - P_1')^2, \tag{7}$$

reemplazando los valores de P_1' y P_2':

$$\Delta S'^2 = ((X_2 + x, Y_2 + y, Z_2 + z) - (X_1 + x, Y_1 + y, Z_1 + z))^2, \tag{8}$$

tal que el intervalo primado queda:

$$\Delta S'^2 = (X_2 - X_1, Y_2 - Y_1, Z_2 - Z_1)^2, \tag{9}$$

$$\Delta S'^2 = (X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2, \tag{10}$$

se puede ver que:

$$\Delta S'^2 = \Delta S^2. \tag{11}$$

Dada la implementación de la idea gauge, el intervalo queda invariante bajo una recalibración de la posición de los puntos. En otras palabras, la magnitud del intervalo medido entre dos puntos será el mismo para los observadores, tanto antes como después de la transformación.

2.3. Transformación local

Como se mencionó anteriormente, la transformación era la misma para todos los observadores, lo que respaldaba su carácter global. Sin embargo, en el contexto de la teoría gauge, existe otro tipo de calibración llamada transformación local. En este caso, los observadores pueden recalibrar la posición de los puntos de diferentes maneras, añadiendo una constante distinta para cada uno. Así, se supone que cada observador calibra los puntos de una manera particular. Esto significa que la constante utilizada por cada observador para la recalibración de la posición de los puntos será diferente, pero dichas constantes mantienen invariante el intervalo. Esta transformación se denomina local porque los puntos son transformados de manera arbitraria por cada observador, eliminando el carácter universal de la transformación. La forma que toma la constante entonces se expresa en este caso de la siguiente manera:

$$M_n = (x_n, y_n, z_n). \tag{12}$$

Los valores de las coordenadas para este caso van a depender de cada observador como ya se mencionó, y se representan como (x_n, y_n, z_n). Cada uno de estos valores es arbitrario y dependiente del observador, teniendo esto en cuenta la transformación local es de la siguiente manera:

$$P_1 \to P_1' = (X_1 + x_n, Y_1 + y_n, Z_1 + z_n), \tag{13}$$

$$P_2 \to P_2' = (X_2 + x_n, Y_2 + y_n, Z_2 + z_n). \tag{14}$$

Se mantiene el interés de los observadores en medir el intervalo entre los puntos, pero ahora deben considerar dos aspectos importantes. Primero, qué sucede con la distancia entre los puntos después de la calibración realizada. Segundo, cuál es la relación de esta magnitud con la encontrada por los demás observadores, dado que cada uno transforma los puntos de manera particular. La distancia entre los puntos transforma para cada observador de la siguiente manera:

$$\Delta S^2 \to \Delta S'^2 = (P'_2 - P'_1)^2, \tag{15}$$

reemplazando los valores de P'_{n1} y P'_{n2}:

$$\Delta S'^2 = ((X_1 + x_n, Y_1 + y_n, Z_1 + z_n) - (X_2 + x_n, Y_2 + y_n, Z_2 + z_n))^2, \tag{16}$$

esta expresión muestra claramente que el intervalo:

$$\Delta S'^2 = \Delta S^2. \tag{17}$$

Según lo mencionado anteriormente en la ecuación (17) se llega a una única conclusión sobre el intervalo entre los puntos: independientemente de la constante que cada observador elija para transformar los puntos, obtendrá el mismo intervalo. Además, esta magnitud no depende del observador, ya que todos medirán la misma distancia entre los puntos, sin importar su calibración particular.

2.4. El corazón de la idea gauge

La idea de gauge se refiere a la invariancia de magnitudes bajo transformaciones gauge, las cuales pueden ser de tipo global o local, como se ha mostrado. En el ejemplo específico de la traslación de dos puntos en el espacio, se ilustra cómo la magnitud de la distancia entre los puntos (el intervalo) permanece invariante a pesar de las transformaciones realizadas, sin importar su tipo. El principio gauge se fundamenta en lo siguiente: la implementación de la transformación gauge a magnitudes las deja invariantes después de la recalibración, lo que significa que las leyes físicas no cambian bajo este tipo de transformación (Quigg, 1993).

Con esta base esencial de la teoría gauge, se establecen los fundamentos para los desarrollos posteriores en este trabajo. El objetivo es aplicar estos conceptos a la electrodinámica de Maxwell, proporcionando un contexto sobre cómo se utiliza la idea gauge en un marco clásico. Además, se destaca cómo esta teoría se basa en el principio de que las leyes físicas permanecen invariantes.

Capítulo 3

La invariancia de los campos eléctrico y magnético bajo una transformación gauge

La teoría electromagnética clásica es un conjunto de leyes que encapsulan las descripciones matemáticas de los fenómenos electromagnéticos. Su desarrollo comenzó con las primeras investigaciones sobre la electrostática realizadas por Benjamin Franklin, Charles- Augustin de Coulomb y Henry Cavendish. Posteriormente, se unificaron los fenómenos eléctricos y magnéticos, gracias a los trabajos de André-Marie Ampère y Michael Faraday. Finalmente, James Clerk Maxwell recopiló y formuló las célebres ecuaciones de Maxwell, que describen de manera integral los fenómenos electromagnéticos (Furió y Guisasola Aranzabal, 1997).

La teoría electromagnética de Maxwell, desarrollada en el siglo XIX, puede considerarse la primera instancia de una teoría gauge en la historia de la física (Suárez Bermúdez, 2016). El objetivo de este capítulo es mostrar por qué esta teoría se considera así y explicar cómo se desarrolla la idea gauge dentro del contexto electromagnético. Al formular las ecuaciones que describen los fenómenos electromagnéticos, Maxwell introdujo inadvertidamente conceptos que más tarde serían fundamentales para la teoría gauge en la física moderna.

3.1. El electromagnetismo definido a partir de los campos eléctrico y magnético

Las ecuaciones de Maxwell,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{18}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{19}$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{20}$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{J}{\varepsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \tag{21}$$

están formuladas en términos de los campos eléctrico y magnético, destacando la importancia fundamental que Maxwell asignó a los campos en la descripción de los fenómenos electromagnéticos. Antes de Maxwell, las teorías sobre electricidad y magnetismo se centraban principalmente en las fuerzas y las cargas individuales. Sin embargo, Faraday introdujo la noción de campo, revolucionando la perspectiva adoptada por Maxwell, quien la implementó en su conjunto de ecuaciones que describen los fenómenos electromagnéticos. Esta idea de los campos transformó el papel del espacio en la descripción de los fenómenos en la física (Furió y Guisasola Aranzabal, 1997).

Al formular estas ecuaciones en términos de campos, Maxwell no solo proporcionó una descripción más completa y unificada de los fenómenos electromagnéticos, sino que también estableció las bases para el desarrollo de la teoría de campos en la física. Su teoría describe el comportamiento de los campos eléctrico $\mathbf{E}$ y magnético $\mathbf{B}$, y revela una profunda conexión entre estas magnitudes y los potenciales vectorial $\mathbf{A}$ y escalar ϕ.

La introducción de los potenciales permitió una descripción simétrica de los fenómenos electromagnéticos. Maxwell mismo reconoció la importancia de estos potenciales como herramientas que describen cómo está configurado el espacio en el que ocurren los fenómenos (Feynman, 1989).

3.2. Sobre el potencial escalar y vectorial

En el marco del electromagnetismo, se identifican dos potenciales fundamentales: el potencial escalar, vinculado a la componente eléctrica y el potencial vectorial, asociado al componente magnético. Estos potenciales encuentran su definición en el tratamiento vectorial de las ecuaciones de Maxwell, que como se mencionó son las leyes fundamentales que rigen los fenómenos electromagnéticos. El potencial escalar ϕ y el potencial vectorial $\mathbf{A}$ son esenciales para proporcionar una descripción de la interacción entre campos eléctricos y magnéticos. La utilización de estos potenciales no solo simplifica las ecuaciones, sino que también facilita la comprensión y el análisis de fenómenos electromagnéticos, permitiendo una representación de las interacciones entre cargas y corrientes (Feynman, 1989).

De manera análoga a la formulación newtoniana de la gravedad, surgió la teoría de la electricidad, promovida por pensadores como Benjamín Franklin, Charles-Augustin de Coulomb y Henry Cavendish, quienes la desarrollaron desde una perspectiva mecanicista. Esta teoría experimentó un notable avance gracias a los análisis realizados por científicos como André-Marie Ampère y Michael Faraday del experimento de Oersted.

Faraday, en particular, postuló que " el fenómeno no está confinado al cable, sino que se extiende a lo largo del espacio" (Furió y Guisasola Aranzabal, 1997), introduciendo así la noción de líneas de campo, entidades a través de las cuales la acción se propaga en el medio. Su teoría fue bien recibida por George Green y Carl Friedrich Gauss, quienes establecieron un paralelo entre estas afirmaciones y los avances en el campo de la gravitación.

Inspirados por ello, se adoptó la idea de la "función de fuerza" propuesta por Pierre-Simón Laplace en el contexto gravitacional, empleándola para describir los fenómenos electrostáticos. Esta aproximación implicaba asociar un potencial al fenómeno para así determinar la interacción. El potencial permitió la descripción del campo en cuestión (Criado Pérez y Criado García-Legaz, 1988).

El potencial eléctrico puede comprenderse como una herramienta física conveniente para describir el comportamiento eléctrico en un espacio tridimensional. Este campo escalar describe el potencial eléctrico como una función matemática que asigna un valor escalar a cada punto en el espacio, asignándole propiedades geométricas al medio en el cual los fenómenos suceden (Feynman, 1989).

Por otra parte, Ampère ya había hecho aportes que afirmaban que la fuerza eléctrica y magnética tenía una estrecha relación y además ya se venía trabajando con la idea de campo y la relación con el potencial de manera análoga a la teoría de la gravedad como se mencionó. Inspirado por Faraday, Maxwell exploró la inducción electromagnética y propuso el concepto de estado electrotónico. Este estado, vinculado a cambios magnéticos, se formalizó con magnitudes físicas, brindando una realidad tangible a través de la fuerza electromotriz inducida.

Maxwell, al caracterizar el espacio como acción del momento electromagnético, relacionó la inducción magnética y la fuerza electromotriz al potencial vectorial $\mathbf{A}$. Su argumento central afirmaba que la corriente inducida surge del cambio en el flujo magnético a través de una superficie cerrada, formalizando así la teoría electromagnética (Avila Torres, 2013).

En este contexto, el potencial vectorial, el cual es la formalización del estado electrotónico, es una herramienta fundamental utilizada para describir el campo magnético B en términos de funciones potenciales. Formalmente, el potencial vectorial $\mathbf{A}$ es una función vectorial definida en el espacio tridimensional, cuyas componentes representan los elementos del campo magnético.

La formulación matemática indica que el campo magnético puede expresarse como el rotacional del potencial vectorial. El significado físico atribuido al potencial vectorial es de interpretación abierta, ya que no posee una interpretación directa como el campo magnético B (Jackson, 1962). Sin embargo, es destacable cómo en la teoría de Maxwell se establece una estrecha vinculación entre la física y la geometría al incorporar atributos espaciales en las leyes que explican los fenómenos.

3.3. El campo E y B en términos de los potenciales

Es importante comprender la relación entre los potenciales y los campos eléctrico y magnético. La teoría electromagnética de Maxwell está formulada en términos de estos campos, y entender esta relación permite ver cómo los potenciales se integran en la teoría.

Para ver esta relación se comienza con la ecuación (19) y considerando el siguiente teorema del cálculo vectorial: si la divergencia de un campo, en este caso $\mathbf{B}$, es igual a 0:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{22}$$

entonces existe un campo $\mathbf{A}$ tal que

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \tag{23}$$

El campo $\mathbf{A}$ se denomina potencial vectorial y muestra cómo se puede obtener el campo magnético a partir de dicho potencial. Para relacionar los potenciales con el campo eléctrico, se reemplaza $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ en la ecuación (20) y se realiza el siguiente tratamiento matemático:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}). \tag{24}$$

Utilizando la identidad vectorial que establece que el rotacional de la derivada temporal de un vector es la derivada temporal del rotacional de ese vector, se obtiene:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \tag{25}$$

reorganizando, se tiene que:

$$\nabla \times \mathbf{E} + \nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0, \tag{26}$$

por propiedades del rotacional:

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0, \tag{27}$$

y aplicando el teorema del cálculo vectorial que dice que si el rotacional de un campo $\mathbf{M}$ es cero, entonces existe un potencial escalar ϕ tal que $\mathbf{M} = \nabla\phi$, se llega a:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\phi. \tag{28}$$

La ecuación (28) describe el campo eléctrico y, este apunta, en la dirección de mayor disminución del potencial eléctrico. En un campo eléctrico conservativo, donde el trabajo realizado para mover una carga entre dos puntos depende solo de sus posiciones inicial y final, esta relación es fundamental. Permite derivar el campo eléctrico a partir del potencial escalar, simplificando así el análisis de sistemas electrostáticos (Criado Pérez y Criado García-Legaz, 1988). La ecuación (28) generaliza el comportamiento del campo eléctrico $\mathbf{E}$ en presencia de campos magnéticos dinámicos y establece la relación completa entre los potenciales y el campo eléctrico.

3.4. La idea gauge implementada en los potenciales

Las expresiones anteriores tienen como objetivo ilustrar cómo se aplica la idea gauge en el contexto del electromagnetismo. Como se mencionó al inicio del capítulo, la meta es comprender cómo los potenciales determinan los campos eléctrico y magnético y como la idea gauge entra en juego en los potenciales. Previamente, se definió que el campo eléctrico $\mathbf{E}$ y el campo magnético $\mathbf{B}$ pueden ser derivados a partir del potencial escalar ϕ y el potencial vectorial $\mathbf{A}$. Esta relación otorga a los potenciales una importancia fundamental en la teoría electromagnética.

Siguiendo el ejemplo de la traslación de coordenadas, que establece los fundamentos para aplicar la idea gauge, es necesario identificar sobre qué elementos realizar la recalibración en el contexto electromagnético. En este caso, se recalibrarán los potenciales, ya que tanto el campo eléctrico como el campo magnético pueden determinarse a partir de estos(Landau, 1981).

Una vez determinado que la transformación se aplicará a los potenciales, se procede a recalibrarlos. Esta recalibración se lleva a cabo de manera similar al ejemplo de la traslación de los puntos en el espacio, sumando una constante a la magnitud física correspondiente. Es crucial analizar la forma que debe tener esta constante para que sea posible sumarla a los potenciales. La transformación se establece de la siguiente manera (Pedreros Cifuentes, 2020):

$$\mathbf{A} \to \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Lambda, \tag{29}$$

$$\phi \to \phi' = \phi - \frac{\partial\Lambda}{\partial t}, \tag{30}$$

la razón por la que está con signo negativo en el potencial eléctrico es por el hecho de perseverar la simetría del sistema, tal que si este factor de ajuste se suma sobre una de las ecuaciones hay que restarlo en la otra (Pedreros Cifuentes, 2020).

La función Λ debe ser un campo escalar para que pueda recalibrar adecuadamente los potenciales. Al calcular $\nabla\Lambda$, se obtiene un campo vectorial, lo que permite sumarlo al potencial vectorial $\mathbf{A}$. Así mismo, al calcular $\frac{\partial \Lambda}{\partial t}$, se obtiene un campo escalar, compatible con el potencial escalar ϕ.

Λ es una función arbitraria que sirve como el centro de la recalibración y relaciona ambas transformaciones. Esta función, define la naturaleza de la transformación realizada. Similar a lo discutido en el capítulo anterior, la forma específica de esta función determina la transformación aplicada. En primer lugar, se considerará Λ como independiente de las coordenadas y del tiempo, tal que:

$$\Lambda = \Lambda_0, \tag{31}$$

al asumir que Λ_0 es una constante, la transformación se vuelve global. Debido a que las derivadas de una constante $\nabla\Lambda_0$ y $\frac{\partial \Lambda_0}{\partial t}$ son iguales a cero, esta transformación no modifica los campos potenciales.

$$\phi' = \phi, \tag{32}$$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A}. \tag{33}$$

Por otro lado si la función es dependiente de las coordenadas espaciales y también del tiempo de la forma $\Lambda(\mathbf{r}, t)$ la transformación se hace local, y se ve de la siguiente manera:

$$\mathbf{A} \to \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Lambda(\mathbf{r}, t), \tag{34}$$

$$\phi \to \phi' = \phi - \frac{\partial}{\partial t}\Lambda(\mathbf{r}, t). \tag{35}$$

Es evidente, entonces, que los potenciales son invariantes bajo recalibraciones globales, como se puede observar en las ecuaciones (32) y (33), pero estos potenciales no conservan su forma y es evidente la transformación si es de tipo local, tal como lo muestran las ecuaciones (34) y (35). Cabe recordar, como se hizo en la traslación de coordenadas, que la idea gauge consiste en realizar transformaciones y determinar qué elementos permanecen invariantes. En este contexto, ya se ha realizado el primer paso: recalibrar los potenciales. Ahora se examinará el efecto de esta recalibración sobre los campos eléctrico y magnético.

3.5. La invariancia del campo eléctrico y magnético bajo la recalibración de los potenciales

Habiendo recalibrado los potenciales tanto global como localmente, es crucial explorar las implicaciones de esta transformación en los campos, dado que estos quedan expresados en términos de los potenciales. Es importante destacar que la transformación considerada para esta sección es la transformación gauge local, como se representa en las ecuaciones (34) y (35). Es hora de centrarse en cómo el campo eléctrico y magnético responde a esta transformación, ya que es en esta relación donde se revelará la verdadera influencia de la recalibración realizada.

Tomando en cuenta la ecuación (23), que relaciona el campo magnético con el potencial vectorial, se puede examinar cómo se transforma el campo magnético ante la recalibración del campo $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{B} \to \mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}', \tag{36}$$

$$\mathbf{B}' = \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla\Lambda(\mathbf{r}, t)), \tag{37}$$

por propiedades del rotacional:

$$\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times (\nabla\Lambda(\mathbf{r}, t)), \tag{38}$$

aquí se justifica entonces el porque se eligió esta manera particular de elegir la forma de la constante adicionada en la recalibración, ya que:

$$\nabla \times (\nabla \Lambda(\mathbf{r}, t)) = 0, \tag{39}$$

El campo magnético entonces queda:

$$\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}, \tag{40}$$

lo anterior muestra que el campo magnético es invariante para cualquier observador, sin importar la transformación realizada sobre el potencial vectorial.

Ahora, se debe analizar cómo el campo eléctrico queda invariante bajo esta transformación. Recordando la expresión para el campo eléctrico (28) y considerando su transformación, se procede a examinar su comportamiento:

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}' = -\nabla \phi' - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t}, \tag{41}$$

la transformación del campo eléctrico se ve entonces:

$$\mathbf{E}' = -\nabla \left(\phi - \frac{\partial}{\partial t} \Lambda(\mathbf{r}, t) \right) - \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A} + \nabla \Lambda(\mathbf{r}, t)), \tag{42}$$

$$\mathbf{E}' = -\nabla \phi - \nabla \left(\frac{\partial}{\partial t} \Lambda(\mathbf{r}, t) \right) - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \Lambda(\mathbf{r}, t) \right), \tag{43}$$

reorganizando la expresión:

$$\mathbf{E}' = -\nabla \phi - \nabla \left(\frac{\partial}{\partial t} \Lambda(\mathbf{r}, t) \right) - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \left(\frac{\partial}{\partial t} \Lambda(\mathbf{r}, t) \right), \tag{44}$$

entonces el campo eléctrico queda:

$$\mathbf{E}' = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{E}. \tag{45}$$

Se observa una coherencia en las expresiones que representan los campos, a pesar de las modificaciones realizadas en los potenciales. La idea gauge revela una condición de suma importancia con respecto a los potenciales eléctrico y magnético: estos pueden ser recalibrados por diferentes observadores de infinitas maneras y aun así obtener los mismos campos. No hay una recalibración privilegiada al describir los campos; cualquier calibración conducirá a la misma descripción tanto para el campo $\mathbf{E}$ como para el campo $\mathbf{B}$ y, por ende, la física descrita por estos campos será la misma (Pedreros Cifuentes, 2020). Finalmente, la invariancia de los campos eléctrico y magnético bajo transformaciones gauge globales y locales, es fundamental en la teoría electromagnética ya que permite realizar calibraciones específicas en los potenciales que permitan hacer un tratamiento de las ecuaciones de Maxwell.

3.6. El Gauge de Lorenz

Debido a la capacidad de elegir cualquier calibración y obtener el mismo campo eléctrico y magnético asociado, es posible realizar calibraciones que revelen efectos específicos dentro de la teoría en cuestión (Magpantay, 1994), para ver entonces como la idea gauge puede ser usada para revelar ciertos efectos en las teorías por medio del uso de las recalibraciones se plantea lo siguiente entonces:

Se parte en primer medida de la ecuación (18) llamada la Ley de Gauss y se reemplaza el campo por su equivalencia en termino de los potenciales expresada en (28):

$$\nabla \cdot \left(-\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{46}$$

lo que da como resultado la siguiente ecuación que esta en termino de los potenciales:

$$\nabla^2\phi + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \tag{47}$$

siguiendo esta linea se reemplaza entonces la equivalencia de los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ en termino de los potenciales en a ecuación (21):

$$c^2\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{J}{\varepsilon_0} + \frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right), \tag{48}$$

teniendo en cuenta que $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$ se reemplaza en la ecuación:

$$c^2(\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}) = \frac{\mathbf{J}}{\epsilon_0} - \nabla\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}, \tag{49}$$

dividiendo entre la velocidad de la luz al cuadrado ambos lados de la igualdad:

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A} = \frac{J}{c^2\varepsilon_0} - \frac{1}{c^2}\left(\nabla\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}\right), \tag{50}$$

como $\mu_0 = \frac{1}{c^2\varepsilon_0}$, entonces:

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\left(\nabla\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}\right) = \mu_0\mathbf{J}, \tag{51}$$

teniendo en cuenta las propiedades del gradiente, la expresión se simplifica a:

$$\nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) - \nabla^2\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \mu_0\mathbf{J}. \tag{52}$$

Las ecuaciones (47) y (52) representan las ecuaciones de Maxwell en términos de los potenciales. El problema con estas ecuaciones es que están acopladas, ya que cada una depende tanto del potencial escalar como del vectorial. Aquí es donde una calibración adecuada puede simplificar este problema. Para ello, se debe considerar una transformación que se puede aplicar a los potenciales, permitiendo lo siguiente:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t}. \tag{53}$$

Esta condición se conoce como el Gauge de Lorenz, el cual surge debido a la posibilidad de realizar infinitas calibraciones sobre los potenciales sin alterar los campos eléctrico o magnético (Nevels y Shin, 2001). Al aplicar el Gauge de Lorenz en las ecuaciones (47) y (52), se observa cómo estas se desacoplan:

$$\nabla^2\phi + \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \tag{54}$$

$$\nabla\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) - \nabla^2\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = \mu_0\mathbf{J}, \tag{55}$$

lo que da como resultado:

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \tag{56}$$

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\mathbf{J}. \tag{57}$$

Lo primero que se puede evidenciar de ambas ecuaciones es que están desacopladas, con cada una dependiendo únicamente del potencial escalar o del potencial vectorial. Esta calibración ha permitido desacoplar las ecuaciones de manera efectiva y quitando el problema definido para las ecuaciones (47) y (52).

La segunda y más importante consecuencia es que tanto (56) como (57) tienen la forma de la ecuación general de onda. Esto implica que estos campos potenciales se comportan como ondas que se propagan por el espacio a la velocidad de la luz. Esta característica está en consonancia con la descripción de los campos eléctrico y magnético, los cuales también exhiben un comportamiento ondulatorio. Por lo tanto, este comportamiento similar refuerza la relevancia y la validez de los potenciales, al mostrar que se comportan de manera coherente con las propiedades ondulatorias de los campos tanto eléctrico como magnético (Feynman, 1989).

Una última consecuencia importante de estas ecuaciones es que describen el comportamiento de los potenciales en presencia de fuentes, ya que incluyen la densidad de carga ρ y la densidad de corriente $\mathbf{J}$. Esto significa que las ondas de los potenciales se propagan bajo la influencia de estas fuentes. Sin embargo, si la densidad de carga y la densidad de corriente se hacen cero, es decir, en ausencia de fuentes, las ecuaciones se simplifican a:

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0, \tag{58}$$

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = 0. \tag{59}$$

Estas ecuaciones también respaldan la naturaleza ondulatoria de los potenciales y muestran que estas perturbaciones pueden propagarse incluso en ausencia de fuentes, es decir, que se propagan en el vacío.

3.7. Ejemplo de aplicación de la idea gauge y el uso de los potenciales

Se ha estado trabajando con la idea de gauge en relación con el potencial ϕ y $\mathbf{A}$. Por lo tanto, no es descabellado tratar un ejercicio desarrollando estos potenciales. Por ello, se propone el siguiente ejemplo (ejercicio tomado de (Durán, 2016)):

Al interior de una guía de ondas se transmite una onda electromagnética (solución de las ecuaciones de Maxwell en ausencia de cargas y corrientes $\rho = 0$ y $\mathbf{J} = 0$) tal que las componentes del campo magnético $\mathbf{B}$ son B_x y B_z. Su expresión en función de las coordenadas x, z y del tiempo t es:

$$B_x = \frac{aB_0k}{\pi} sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) sin(kz - \omega t), \tag{60}$$

$$B_z = B_0 cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) cos(kz - \omega t), \tag{61}$$

en donde a, B_0, k y ω son constantes. Encontrar la expresión del campo eléctrico $\mathbf{E}$.

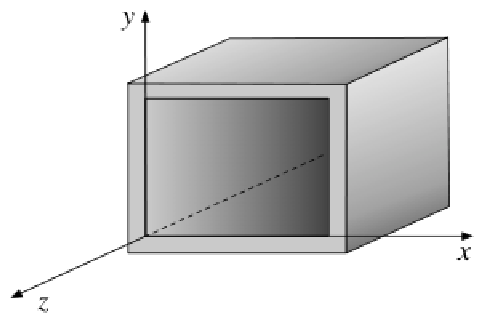

Figura 2: Guía de ondas. Tomado de: Problemas propuestos y resueltos de electromagnetismo (2016), Durán, R.

Para resolver este problema, primero se tomarán en cuenta las siguientes consideraciones:

- Al ser una guía de ondas con $\rho = 0$ y $\mathbf{J} = 0$ (ausencia de fuentes en su interior) la contribución del campo escalar ϕ va a tender a cero.

- Debido a que las componentes del campo $\mathbf{B}$ están definidas como $\mathbf{B} = (B_x, 0, B_z)$ se debe elegir un potencial que no genere componente B_y pero si genere B_x y B_z, por ende la forma que se asume del potencial vectorial es $\mathbf{A} = (0, A_0(x, z, t), 0)$ (recordando que el ejercicio dice que no hay dependencia de la coordenada y).

Partiendo de estas dos consideraciones, las expresiones para los campos en términos de los potenciales quedan entonces definidas como:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \tag{62}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \tag{63}$$

Es imprescindible entonces determinar el valor del potencial vectorial, ya que ambos campos están definidos a partir de este. Para hacer esto, se toma en cuenta la ley de Ampère y se tiene en cuenta que $\mathbf{J} = 0$:

$$c^2\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \tag{64}$$

reemplazando por la expresión de $\mathbf{B}$ y dividendo entre c^2 queda:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \tag{65}$$

teniendo en cuenta que $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$ y el valor para el campo $\mathbf{E}$ (62) se reemplaza en (65):

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}, \tag{66}$$

es aquí donde entra en juego la idea de gauge para simplificar la ecuación anterior. Así como se eligió un calibre específico para obtener la expresión que define el gauge de Lorenz, en este caso se va a elegir:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \tag{67}$$

este es llamado el gauge de Coulomb (Magpantay, 1994). Al aplicarlo sobre la ecuación (66), queda:

$$\nabla^2\mathbf{A} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}, \tag{68}$$

esta es la conocida ecuación general de onda, cuya solución en la parte real proporciona la expresión para el campo $\mathbf{A}$, el cual es entonces (Recordando que esta es la componente y para el campo):

$$\mathbf{A} = A_0 cos(kz - \omega t). \tag{69}$$

Ahora es importante determinar el valor de A_0, para esto se tiene en cuenta entonces el rotacional de $\mathbf{A}$:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & A_y & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{B}, \tag{70}$$

la componente en x del campo $\mathbf{B}$ sera igual entonces:

$$B_x = -\frac{\partial A_y}{\partial z}, \tag{71}$$

$$\frac{aB_0k}{\pi} sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) sin(kz - \omega t) = -\frac{\partial}{\partial z} A_0 cos(kz - \omega t), \tag{72}$$

$$\frac{aB_0k}{\pi} sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) sin(kz - \omega t) = A_0 k sin(kz - \omega t), \tag{73}$$

si se hacen las simplificaciones se puede ver que:

$$A_0 = \frac{aB_0}{\pi} sin\left(\frac{\pi x}{a}\right), \tag{74}$$

la expresión general entonces del campo vectorial $\mathbf{A}$ es:

$$\mathbf{A} = \frac{aB_0}{\pi} sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) cos(kz - \omega t)\hat{j}. \tag{75}$$

Con esto se cumple lo considerado anteriormente, ya que esta expresión genera componentes en B_x y B_z pero no en B_y. se puede ver la consistencia del desarrollo encontrando la componente B_z a partir de (70):

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x}, \tag{76}$$

$$B_z = B_0 cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) cos(kz - \omega t). \tag{77}$$

Para encontrar el campo $\mathbf{E}$ no es mas que utilizar la ecuación (62)

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{aB_0}{\pi} sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) cos(kz - \omega t)\right)\hat{j}, \tag{78}$$

$$\mathbf{E} = -\frac{a\omega B_0}{\pi} sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) sin(kz - \omega t)\hat{j}, \tag{79}$$

este es el resultado del ejercicio propuesto como ejemplo, dicho resultado es el mismo al mostrado en el solucionario de donde fue tomado (Durán, 2016).

Un camino para solucionar el problema a partir de las ecuaciones de Maxwell en termino de los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ es considerar la ley de Faraday-Lenz:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{80}$$

la expresión parta el rotacional queda:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{81}$$

$$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = i\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) - j\left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}\right) + k\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right), \tag{82}$$

si se analiza componente a componente:

$$-\frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}, \tag{83}$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}, \tag{84}$$

$$-\frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}, \tag{85}$$

teniendo en cuenta que no hay dependencia de la variable y las ecuaciones se simplifican y quedan:

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial z}, \tag{86}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial z}, \tag{87}$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x}. \tag{88}$$

Tanto la ecuación (86) como la ecuación (88) pueden resolverse derivando las expresiones para el campo $\mathbf{B}$ y luego integrando respecto a las derivadas espaciales x y z. Sin embargo, la ecuación (87) presenta una particularidad, ya que su igualdad depende de conocer los valores de las componentes de $\mathbf{E}$. Este problema puede resolverse utilizando los resultados obtenidos con el tratamiento del campo potencial $\mathbf{A}$, que da resultados nulos para las componentes E_x y E_z, eliminando así la dificultad de la ecuación (87).

Por otro lado por medio de la ley de Ampère descrita por la ecuación (64) también se puede solucionar el problema:

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \tag{89}$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & 0 & B_z \end{vmatrix} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \tag{90}$$

lo que da como resultado:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = i\left(\frac{\partial B_z}{\partial y}\right) - j\left(\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z}\right) + k\left(-\frac{\partial B_x}{\partial y}\right), \tag{91}$$

y recordando que no hay dependencia de la coordenada y la expresión queda:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_y}{\partial t} = \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right)\hat{j}, \tag{92}$$

aunque esta expresión es sencilla y muestra concretamente que el campo $\mathbf{E}$ solo tiene componentes en $\hat{j}$, presenta una dificultad en el tratamiento de las constantes, debido a la aparición del factor $\frac{1}{c^2}$.

Anteriormente, se han presentado tres métodos para solucionar el problema de la guía de ondas. Todos ellos conducen a la solución del problema, tal como se describe en el solucionario del libro. Sin embargo, el método planteado a partir del tratamiento de los potenciales y la idea gauge parece ser el que sigue una linealidad más clara y que puede facilitar su solución. Utilizar los potenciales y la idea gauge puede llegar a simplificar problemas que tengan que ver con guías de ondas, dipolos magnéticos estacionarios y móviles y en aplicaciones mas contemporáneas como el efecto Aharonov-Bohm (Matteucci, 2018).

En este capítulo, se exploró por qué la electrodinámica de Maxwell es considerada la primera instancia de una teoría gauge. Se demostró cómo tanto el campo eléctrico como el magnético permanecen invariantes ante recalibraciones en los potenciales, subrayando una profunda simetría subyacente en la naturaleza de estos campos. Además, se presentó un ejemplo concreto de una calibración realizada sobre los potenciales, lo que permitió describir la naturaleza ondulatoria de los campos electromagnéticos.

Por otro lado, se mostró un ejemplo de aplicación de la idea gauge y los potenciales en un problema particular, en el cual los resultados son equivalentes a los obtenidos trabajando con los campos eléctrico y magnético. Esto resalta la aplicabilidad de la idea gauge dentro del contexto electromagnético.

Este análisis no solo ilustra la elegancia y utilidad del principio gauge en la física, sino que también destaca cómo la teoría electromagnética sienta las bases para comprender la esencia de la idea gauge.

La idea de gauge en el contexto electromagnético se ilustra mediante la recalibración de los potenciales eléctrico y magnético. Aunque existen infinitos potenciales, es decir, infinitas maneras de recalibrar el potencial escalar y vectorial, los campos eléctrico y magnético permanecen invariantes. Esto demuestra que la elección de una recalibración particular no afecta la física subyacente del sistema, resaltando que las teorías gauge modernas se basan en el hecho de que las leyes físicas pueden transformarse sin alterar las observaciones físicas (Quigg, 1993). Esto proporciona una comprensión más profunda de la simetría y la estructura de las ecuaciones de Maxwell, y destaca la libertad en la elección de los potenciales.

Se presentó el gauge de Lorenz como un ejemplo de cómo la idea gauge puede usarse para simplificar las ecuaciones de Maxwell. Este gauge desacopla las ecuaciones de los potenciales escalar y vectorial, permitiendo que cada una se comporte como una onda propagándose a través del espacio. Además, demuestra que los potenciales también obedecen a la naturaleza ondulatoria de los campos eléctrico y magnético, describiendo cómo se propagan tanto en presencia de fuentes como en el vacío.

Capítulo 4

La idea gauge en electrodinámica clásica relativista

Como se mostró en el capítulo anterior, tanto el campo eléctrico como el magnético pueden expresarse en términos de los potenciales. El objetivo específico de este capítulo es explorar cómo la idea gauge puede implementarse en el contexto relativista de la teoría electrodinámica, ofreciendo una perspectiva más completa sobre la naturaleza de los campos electromagnéticos en el marco de la relatividad. Un objetivo secundario es evidenciar cómo el potencial escalar y vectorial pueden unificarse en un solo ente. Esta unificación revela la consistencia de la idea gauge con los principios fundamentales de la teoría de la relatividad.

4.1. El potencial eléctrico y magnético en el espacio-tiempo

A principios del siglo XX, Albert Einstein sentó los fundamentos de la teoría especial de la relatividad. Con el paso de los años, esta teoría ganaba cada vez más fuerza. Surgió así la necesidad de actualizar los avances en la teoría electromagnética para que fueran compatibles con los trabajos de Einstein, como parte del desafío de unificar las fuerzas existentes desde el siglo XIX, en referencia a la gravedad y al electromagnetismo (Lamberti y Rodríguez, 2019).

Para sumergirse en el contexto relativista, el primer paso implica abordar los potenciales. Es crucial comprender la relevancia de estos potenciales y por qué es fundamental seguir trabajando con ellos en el ámbito de la electrodinámica. La noción de potencial desempeña un papel fundamental en el desafío de unificar las fuerzas. Los potenciales electromagnéticos surgieron a partir de la idea de Laplace sobre el potencial gravitacional, lo que sugirió que para lograr la unificación de las interacciones era necesario tratar todas las fuerzas de manera análoga (Furió y Guisasola Aranzabal, 1997).

Se desarrolla entonces el cuadripotencial, que constituye un pilar fundamental en la teoría electrodinámica relativista, proporcionando una descripción unificada del potencial eléctrico y magnético en el contexto de la teoría de la relatividad especial de Einstein. Su introducción ha transformado significativamente la formulación de las ecuaciones de Maxwell.

Este concepto se materializa como un cuadrivector A^μ, que comprende cuatro funciones. Estas funciones están distribuidas entre la componente temporal A^0, y las componentes espaciales (A^1, A^2, A^3). La notable característica del cuadripotencial radica en su capacidad para encapsular información sobre ambos campos, eléctrico y magnético, en una única entidad matemática.

$$A^\mu = \left(\frac{\phi}{c}, A\right) = \left(\frac{\phi}{c}, A_x, A_y, A_z\right). \tag{93}$$

Siendo el valor del potencial escalar ϕ la componente temporal del cuadripotencial y las componentes espaciales están ligadas a las componentes del potencial magnético $\mathbf{A}$.

4.2. La idea gauge implementada al cuadripotencial

Siguiendo los desarrollos de los capítulos anteriores, se realizará una recalibración, esta vez enfocada en el cuadripotencial. Esta calibración se llevará a cabo en un espacio-tiempo, dado que se está trabajando en el campo de la relatividad. Por lo tanto, la transformación debe generalizarse. Es importante revisar la forma de la constante que se añadió a los potenciales en el capítulo anterior. En las ecuaciones (29) y (30), se puede observar que la recalibración realizada está descrita por: $\nabla\Lambda$ y $\frac{\partial\Lambda}{\partial t}$.

En estas ecuaciones, se puede observar que la primera representa la derivada de la componente temporal, mientras que la segunda muestra el gradiente que representa las derivadas espaciales de la función. Esto permite definir y generalizar la transformación sobre el potencial de la siguiente manera:

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial t} + \nabla\Lambda = \frac{\partial\Lambda}{\partial t} + \frac{\partial\Lambda}{\partial x} + \frac{\partial\Lambda}{\partial y} + \frac{\partial\Lambda}{\partial z} = \partial^\mu\Lambda. \tag{94}$$

De manera similar a cómo se generalizó previamente, esta constante puede añadirse al cuadripotencial para implementar la transformación. Esto permite ilustrar claramente el concepto de la idea gauge en la electrodinámica clásica relativista:

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \Lambda, \tag{95}$$

la función Λ sigue siendo arbitraria y el tipo de transformación hecha se clasifica de la misma manera que en el capitulo anterior, para realizar una transformación de tipo global Λ no dependerá de las coordenadas para este caso espacio-temporales, por ende:

$$\Lambda = \Lambda_0, \tag{96}$$

ya que las derivadas $\partial^\mu \Lambda_0$ de una constante son iguales a cero, entonces:

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \Lambda_0, \tag{97}$$

$$A'^\mu = A^\mu. \tag{98}$$

La transformación gauge de tipo global deja invariante el cuadripotencial. Para hacer entonces una transformación de tipo local se hace depender Λ de las coordenadas espacio-temporales. Esto lleva a la expresión general del concepto de gauge en el contexto sobre el que se está trabajando:

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \Lambda(r^\mu). \tag{99}$$

Dicha expresión es la equivalencia de las ecuaciones (34) y (35) en el contexto relativista. Para continuar con la implementación de la idea gauge, es crucial identificar qué magnitudes físicas permanecen invariantes. Siguiendo la línea argumental del capítulo anterior y considerando que ahora se está aplicando está idea en el contexto relativista, se puede intuir que los campos (el eléctrico y el magnético) deberán permanecer invariantes bajo la transformación gauge. Sin embargo, antes de mostrar esto, es necesario definir cómo se representan los campos en el marco de la relatividad.

4.3. El tensor de campo electromagnético

El tensor electromagnético es una expresión matemática fundamental que surge en el contexto de la teoría electromagnética relativista, proporcionando una descripción unificada de los campos eléctrico y magnético dentro del marco de la teoría de la relatividad especial. Esta herramienta es esencial para expresar de manera compacta y elegante las leyes fundamentales de la electrodinámica en situaciones donde los efectos relativistas son significativos (Weinberg, 1972).

El tensor electromagnético, comúnmente denotado como $F^{\mu\nu}$, se deriva del cuadripotencial A^{μ}. Sus componentes se definen como:

$$F^{\mu v} = \partial^{\mu} A^{v} - \partial^{v} A^{\mu}, \tag{100}$$

donde ∂^{ν} representa la derivada respecto a las coordenadas espacio temporales.

Este tensor encapsula las leyes fundamentales de la electrodinámica relativista en una forma tensorial que es invariante bajo transformaciones de Lorentz. Esto significa que al utilizar el tensor electromagnético, las ecuaciones de Maxwell pueden expresarse de manera concisa y simétrica, respetando la estructura de la relatividad especial.

En términos prácticos, el tensor electromagnético $F^{\mu\nu}$ tiene componentes que corresponden a los campos eléctrico y magnético. Por ejemplo, en un sistema de coordenadas cartesianas, las componentes espaciales de $F^{\mu\nu}$ se relacionan directamente con las componentes del campo magnético, mientras que las componentes mixtas (que involucran tanto coordenadas espaciales como temporales) están asociadas con el campo eléctrico (Vargas Moreno y Barrera Mendivelso, 2016).

Una de las características más importantes del tensor electromagnético es que permite una descripción unificada y coherente de los fenómenos electromagnéticos en el marco de la teoría de la relatividad especial. Al emplear $F^{\mu\nu}$, las ecuaciones de Maxwell toman una forma más elegante y son más fáciles de manipular en cálculos que involucran altas velocidades y efectos relativistas.

4.4. La invariancia del tensor de campo electromagnético

El tensor electromagnético representa la unificación de los campos eléctrico y magnético, consolidándolos en un solo concepto: el campo electromagnético. En este campo se encapsula el comportamiento de ambos campos, lo que lleva a considerar las transformaciones en el cuadripotencial. Como se ha mostrado, este tensor está en términos de los potenciales, y estos potenciales han sido recalibrados. De acuerdo con la idea gauge, es fundamental identificar qué magnitudes físicas permanecen invariantes bajo una transformación gauge. Por ello, se analizan las implicaciones de esta idea en el tensor de campo electromagnético.

Para hacer explícito qué sucede con el tensor, se comienza calculando las siguientes derivadas para la ecuación (99):

$$\partial^\mu A^v \to \partial^\mu A'^v = \partial^\mu A^v - \partial^\mu \partial^v \Lambda(r^v), \tag{101}$$

$$\partial^v A^\mu \to \partial^v A'^\mu = \partial^v A^\mu - \partial^v \partial^\mu \Lambda(r^\mu), \tag{102}$$

si estas dos expresiones se restan se obtiene entonces la representación de la transformación del tensor de campo electromagnético:

$$F^{\mu v} \to F'^{\mu v} = \partial^\mu A'^v - \partial^v A'^\mu, \tag{103}$$

$$F'^{\mu v} = \partial^\mu A^v - \partial^\mu \partial^v \Lambda(r^v) - \partial^v A^\mu + \partial^v \partial^\mu \Lambda(r^\mu), \tag{104}$$

esa transformación se puede agrupar de la siguiente manera:

$$F'^{\mu v} = \partial^\mu A^v - \partial^v A^\mu - \partial^\mu \partial^v \Lambda(r^v) + \partial^v \partial^\mu \Lambda(r^\mu), \tag{105}$$

lo que es igual a:

$$F'^{\mu v} = F^{\mu v} - \partial^\mu \partial^v \Lambda(r^v) + \partial^v \partial^\mu \Lambda(r^\mu). \tag{106}$$

Hay que ver entonces que relación guardan los factores $\partial^\mu \partial^v \Lambda(r^v)$ y $\partial^v \partial^\mu \Lambda(r^\mu)$ que acompañan la transformación del tensor. Para esto entonces se empieza teniendo en cuenta la propiedad conmutativa de las derivadas parciales:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \tag{107}$$

dado que Λ es una función de las coordenadas r^μ (donde μ es un índice de Lorentz), y considerando ∂^μ y ∂^ν como derivadas parciales con respecto a diferentes componentes de estas coordenadas, se puede aplicar la propiedad de conmutatividad.

Así, para la función $\Lambda(r^\nu)$ (donde r^ν representa una coordenada particular ν):

$$\partial^\mu \partial^\nu \Lambda(r^\nu) = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x^\nu}\right), \tag{108}$$

de la misma manera, para la función $\Lambda(r^\mu)$ (donde r^μ representa una coordenada particular μ):

$$\partial^\nu \partial^\mu \Lambda(r^\mu) = \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x^\mu}\right), \tag{109}$$

aplicando la conmutatividad:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x^\nu}\right) = \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x^\mu}\right), \tag{110}$$

por lo tanto, se tiene que:

$$\partial^\mu \partial^\nu \Lambda(r^\nu) = \partial^\nu \partial^\mu \Lambda(r^\mu), \tag{111}$$

esta igualdad se sostiene bajo las condiciones usuales de diferenciabilidad de la función Λ.

Al saber que estas dos expresiones son iguales, se deriva una consecuencia muy importante para el comportamiento del campo electromagnético originario de la ecuación (105). Bajo la transformación, se puede observar que:

$$F'^{\mu v} = F^{\mu v}. \tag{112}$$

Por lo tanto, se muestra que el tensor electromagnético queda invariante bajo la transformación de los potenciales, lo cual tiene importantes implicaciones. En primer lugar, confirma que la teoría gauge mantiene su validez en el contexto relativista de la electrodinámica. En segundo lugar, significa que el campo electromagnético presenta una simetría al conservar su forma después de las recalibraciones realizadas en el potencial.

El tensor electromagnético conserva su simetría incluso después de la recalibración, resaltando su propiedad intrínseca. Esta característica subraya la versatilidad del cuadripotencial, que, al igual que los potenciales electromagnéticos, puede ser recalibrado de infinitas maneras manteniendo los campos físicos invariantes. Dado que el tensor electromagnético encapsula la teoría electromagnética de Maxwell, su simetría implica que los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ permanecen invariantes, sin importar cómo se recalibre el cuadripotencial.

4.5. El gauge de Lorenz relativista

Gracias a la flexibilidad en la elección del cuadripotencial, se introdujo originalmente el Gauge de Lorenz (ecuación (53)). Este calibre particular para los potenciales puede generalizarse al contexto relativista. Para comprender cómo se transita de la expresión no relativista $\frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ a una expresión relativista, es necesario:

Primero, considerar el cuadripotencial A^μ, que en notación relativista se expresa como $A^\mu = (\frac{\phi}{c}, \mathbf{A})$. En la relatividad, las derivadas espaciales y temporales se combinan en un cuadrivector de derivadas, que se define como $\partial^\mu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right)$ (Weinberg, 1972).

Ahora, la condición de Lorenz no relativista es:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \tag{113}$$

se multiplica ambos términos de la ecuación por c para ajustar las unidades y facilitar la transición a notación covariante:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \tag{114}$$

notese que $\frac{\phi}{c}$ es el componente temporal del cuadripotencial A^μ, y que $\partial^0 = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$ es el componente temporal del operador de derivada. Entonces, se puede reescribir $\frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t}$ en términos de derivadas parciales covariantes:

$$\partial^0 A^0 + \partial^i A^i = 0, \tag{115}$$

donde i denota las componentes espaciales.

En notación compacta, esto se puede escribir como:

$$\partial_\mu A^\mu = 0, \tag{116}$$

donde ∂_μ es el operador de derivada que combina las derivadas temporal y espacial, y A^μ es el cuadripotencial.

Por lo tanto, al pasar de la expresión no relativista $\frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ a la expresión relativista, se obtiene la condición de gauge de Lorenz:

$$\partial_\mu A^\mu = 0, \tag{117}$$

este gauge relativista sigue siendo efectivo para el tratamiento de las ecuaciones de Maxwell en el contexto relativista. Al aplicar este gauge, se obtienen las ecuaciones de Maxwell desacopladas.

Su generalización al contexto relativista se realiza de la siguiente manera:

Restando las dos ecuaciones (56) y (57) se obtiene:

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \nabla\mathbf{A} + -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} + \mu_0\mathbf{J}, \tag{118}$$

se puede hacer la siguiente agrupación de términos:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)(\phi - \mathbf{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} + \mu_0\mathbf{J}, \tag{119}$$

se define un nuevo operador llamado d'Alembert, el cual es:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) = \partial_\mu\partial^\mu = \Box, \tag{120}$$

quedando la expresión:

$$\Box A^\mu = J^\mu. \tag{121}$$

La ecuación (121) es una representación de las ecuaciones de onda (56) y (57) en la relatividad especial. El operador de d'Alembert permite describir la propagación de ondas en el espacio-tiempo. Esto implica que el cuadripotencial exhibe un comportamiento ondulatorio, similar a lo encontrado en el capítulo anterior. Este cuadripotencial puede propagarse tanto en presencia de fuentes como en el vacío, como se describe en la ecuación:

$$\Box A^\mu = 0. \tag{122}$$

4.6. La idea gauge en la física moderna

En la física contemporánea, muchos de los avances más significativos están estrechamente ligados a la exploración y comprensión de las simetrías, así como a la búsqueda de estas simetrías en las leyes físicas fundamentales. Las simetrías desempeñan un papel crucial en la formulación de teorías físicas, ya que dictan la estructura de las ecuaciones que gobiernan los fenómenos naturales.

La teoría gauge, en particular, se centra en las simetrías locales y ha sido fundamental para el desarrollo del Modelo Estándar de la física de partículas. Esta teoría unifica las interacciones electromagnética, débil y fuerte dentro de un marco común, explicando cómo las partículas elementales interactúan a través de campos gauge (Kosso, 2000).

Estos avances abren la puerta a una exploración más profunda de la idea gauge en diversos contextos, incluso adentrándose en la electrodinámica clásica. Aquí, la implementación de la idea gauge permite analizar las interacciones entre partículas cargadas. Por ejemplo, gracias a esta implementación, se obtiene que el fotón actúa como el mediador de las interacciones en el electromagnetismo (Rozo-Clavijo et al., 2019), y a partir de esta perspectiva surgen numerosos desarrollos adicionales.

La idea gauge en la física moderna es un concepto fundamental que ha transformado la comprensión de las interacciones fundamentales de la naturaleza, especialmente en el ámbito de la teoría de campos como la electrodinámica cuántica y la cromodinámica cuántica. Este concepto, que tuvo sus raíces en el campo de la teoría electromagnética clásica, ha demostrado ser crucial para la unificación de las fuerzas fundamentales y para la formulación coherente de la teoría cuántica de campos (Chaviguri y Silva, 2011).

En esencia, la idea gauge implica que la descripción física para un sistema pueden variar según la elección de ciertas magnitudes (como lo son los potenciales en la electrodinámica). Aunque estos potenciales no tienen un significado físico directo, las cantidades observables, como los campos, pueden derivarse de ellos. La clave radica en el hecho de que diferentes elecciones de potenciales pueden conducir a las mismas predicciones físicas observables (Quigg, 1993).

Este concepto adquiere una relevancia excepcional en el marco de la teoría de campos cuánticos, donde las simetrías gauge desempeñan un papel central. La teoría cuántica de campos moderna utiliza estas simetrías para construir modelos teóricos que describen las interacciones fundamentales de manera coherente y consistente, abarcando fenómenos como el electromagnetismo, la fuerza nuclear débil y la fuerza nuclear fuerte.

Un ejemplo destacado de la aplicación de la idea gauge es la teoría electrodébil, que unifica el electromagnetismo y la fuerza nuclear débil en una única descripción teórica. En esta teoría, la simetría gauge es esencial para explicar cómo las partículas adquieren masa y cómo se transmiten las interacciones electromagnéticas y débiles. Además, la teoría cromodinámica cuántica, que describe la interacción fuerte entre partículas subatómicas, también se basa en el principio de simetría gauge.

Conclusiones

Se ha presentado una introducción esencial a la idea gauge en física, empleando el ejemplo de la traslación de coordenadas cartesianas. Se ha ilustrado cómo tanto las transformaciones globales como las locales dejan invariante a ciertas magnitudes físicas, como el intervalo que determina la distancia entre dos puntos, incluso después de ser recalibrado por diferentes observadores.

La electrodinámica clásica constituye un claro ejemplo de una teoría gauge, destacando cómo esta idea puede ser aplicada a una teoría establecida. Al desarrollar las ecuaciones de Maxwell, se revela una conexión profunda entre los conceptos clásicos de la teoría electromagnética y los principios modernos de simetría. La recalibración de los potenciales electromagnéticos evidencia la invariancia de los campos eléctrico y magnético, independientemente de la elección específica de la calibración hecha sobre estos potenciales. Este análisis no solo subraya la versatilidad de la teoría gauge en la descripción de fenómenos electromagnéticos, sino que también destaca la importancia de considerar la configuración del espacio en la comprensión de estos fenómenos. La introducción de un gauge específico como el gauge de Lorenz proporciona herramientas matemáticas fundamentales para el tratamiento de las ecuaciones de Maxwell, desacoplando las variables y revelando la naturaleza ondulatoria intrínseca de las interacciones electromagnéticas.

La aplicación de la teoría gauge en la electrodinámica clásica, especialmente en el contexto relativista, muestra la versatilidad del cuadripotencial y su papel fundamental en la descripción de los fenómenos electromagnéticos. Las transformaciones gauge en el cuadripotencial demuestran que el tensor electromagnético conserva su simetría incluso después de las recalibraciones, resaltando la capacidad del cuadripotencial para describir la interacción electromagnética de manera invariante. Además, los resultados siguen siendo consistentes, ya que al aplicar el gauge de Lorenz relativista, se conservan las propiedades de comportamiento ondulatorio en el cuadripotencial.

A pesar de ser un elemento de la física moderna que puede parecer complejo, las teorías gauge modernas se fundamentan en el principio expuesto en este trabajo. Esencialmente, estas teorías consisten en realizar recalibraciones sobre magnitudes y observar cómo las leyes físicas permanecen invariantes, de manera similar a cómo se recalibraba la posición o los potenciales en ejemplos anteriores para encontrar magnitudes físicas invariantes. Este enfoque establece un marco sólido para la comprensión y aplicación de las teorías gauge contemporáneas, que se basan en la misma esencia: realizar recalibraciones, identificar las simetrías subyacentes y analizar los efectos resultantes de dichas simetrías.

Referencias

Avila Torres, S. B. (2013). Sobre la naturaleza del potencial vectorial, su sentido y significado.

Ayala, M. M. (2006). Los análisis histórico-críticos y la recontextualización de saberes científicos. Construyendo un nuevo espacio de posibilidades. *Revista Pro-posiçoes*, *17*(1), 4.

Chaviguri, R. H., & Silva, F. V. (2011). Simetrías gauge local aplicadas a la física. *Revista de Investigación de Física*, *14*. https://doi.org/10.15381/rif.v14i01.8537

Criado Pérez, A. M., & Criado García-Legaz, A. M. (1988). Análisis crítico e histórico del concepto de potencial eléctrico. *IX Encuentros de Didáctica de las Ciencias Experimentales (pp. 32.1-32-5). Tarragona: Escola Universitària del Magisteri*.

Durán, R. (2016). *Problemas propuestos y resueltos de electromagnetismo*.

Feynman, R. P. (1989). *Lectures on physics II: Mainly electromagnetism and matter*.

Furió, C., & Guisasola Aranzabal, J. (1997). Deficiencias epistemológicas en la enseñanza habitual de los conceptos de campo y potencial eléctrico. *Enseñanza de las Ciencias*, *15*(2), 259-271.

Jackson, J. D. (1962). *Classical electrodynamics*.

Kosso, P. (2000). The empirical status of symmetries in physics. *The British Journal for the Philosophy of Science*, *51*(1), 81-98.

Lamberti, P. W., & Rodríguez, V. R. (2019). Hermann Weyl y el gauge.

Landau, L. (1981). *Teoría Clásica de los campos: Segunda edición)*. Nauka Moscú.

Magpantay, J. A. (1994). The Coulomb Gauge Revisited. *Progress of Theoretical Physics*, *91*. https://doi.org/10.1143/ptp.91.573

Matteucci, G. (2018). The Aharonov-Bohm effect, controversial features of a long-standing debate. *Revista de la Facultad de Ciencias*, *7*(1), 9-22.

Nevels, R., & Shin, C. S. (2001). Lorenz, Lorentz, and the gauge. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, *43*. https://doi.org/10.1109/74.934904

Ostermann, F., & Moreira, M. A. (2000). Física contemporánea en la escuela secundaria: una experiencia en el aula involucrando formación de profesores. *Enseñanza de las Ciencias*, *18*(3), 391-404.

Pedreros Cifuentes, D. A. (2020). El surgimiento de la simetría gauge, durante el primer tercio del siglo XX y su relación con la teoría electromagnética alrededor del potencial vectorial, desde la perspectiva de Hermann Weyl.

Quigg, C. (1993). *Gauge Theories of the Strong, Weak, and Electromagnetic Interactions: Second Edition (STU-Student edition)*. Princeton University Press.

Quintero, N., & Molina, F. (2009). Una descripción sencilla de las Teorías Gauge. *Tumbaga*, *1*(4), 19-29.

Rozo-Clavijo, M., et al. (2019). Sobre el concepto gauge, global y local, y su implementación en física. *Visión electrónica*, *2*(2), 285-296.

Suárez Bermúdez, C. G. (2016). Efectos dinámicos de los sistemas no inerciales: una explicación desde la perspectiva de la idea Gauge.

Vargas Moreno, E. J., & Barrera Mendivelso, E. S. (2016). Análisis de la falta de simetría del Electromagnetismo clásico y su solución relativista: tensor de campo electromagnético.

Weinberg, S. (1972). *Gravitation and Cosmology: Principles and Aplications of the General Theory of Relativity*.

Weyl, H. (1921). Electricity and gravitation. https://doi.org/10.1038/106800a0