UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

TRABAJO DE GRADO:

DISEÑO DE UNA SIMULACIÓN PARA EL ANÁLISIS DE UN SISTEMA DE DOS CUERPOS BAJO LOS EFECTOS DE UNA FUERZA CENTRAL

AUTOR:
CRISTIAN DAVID SORIANO HERNÁNDEZ

DIRECTORES:
NESTOR MENDEZ HINCAPIE
IGNACIO ALBERTO MONROY CAÑON

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Titulo del documento	Diseño de una simulación para el análisis de un sistema de dos cuerpos bajo los efectos de una fuerza central
Autor(es)	Soriano Hernandez, Cristian David
Director	Méndez Hincapié, Néstor ; Monroy Cañón, Ignacio Alberto
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2017. 68 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	MECÁNICA CELESTE, FUERZA CENTRAL, ELEMENTOS ORBITALES, LEYES DE KEPLER, GRAVITACION.

2. Descripción

El presente trabajo es el diseño de una simulación la cual tiene por objetivo ser una herramienta computacional para el aprendizaje de la mecánica celeste. Se busca hacer un análisis detallado de los elementos orbitales y condiciones dinámicas de un cuerpo celeste para luego dar paso a la construcción de una simulación que además de permitir una mejor comprensión de estos temas, logre dar una idea de cuál sería la posible trayectoria que seguiría un asteroide que pase lo bastante cerca de un planeta como para ser afectado por la presencia de este posibilitando así una mejor comprensión del fenómeno.

3. Fuentes

- Vladimir A Chobotov. Orbital mechanics. Aiaa, 2002.
- Orestes Coloma Rodríguez. ¿Cómo utilizar software educativo en el aula? material de apoyo para el curso pre congreso pedagogía 2005, ciudad de la habana. 2005.
- Beer Ferdinand, RUSSELL Johnston, and CLAUSEN William. Mecánica vectorial para ingenieros. Dinámica. Mexico: McGraw-Hill, 2000.
- Richard Fitzpatrick. An Introduction to Celestial Mechanics. Cambridge University Press, 2012.
- D Bob Gowin and Joseph D Novak. Aprendiendo a aprender. Barcelona: Ediciones Martínez Roca, SA, 1988.
- Daniel Kleppner and Robert Kolenkow. An introduction to mechanics. Cambridge University Press, 2013.
- Jerry B Marion. Dinámica clásica de las partículas y sistemas. Reverte, 1975.

- Oliver Montenbruck and Arthur Hilary Armstrong. Practical ephemeris calculations. Springer-verlag Heidelberg, 1989.
- José Gregorio Portilla.Elementos de astronomía de posición. Bogotá: Observatorio Universidad Nacional de Colombia, 2001.
- John E Prussing and Bruce A Conway. Orbital mechanics. Oxford University Press, USA, 1993.
- James A Van Allen. Encounter of an asteroid with a planet. American journal of physics, 74(8):717–719, 2006.

4. Contenidos

El trabajo consta de 4 capítulos los cuales son:

Capítulo 1: **Introducción**: Introducción, planteamiento del problema y definición de los objetivos.

Capítulo 2: **El problema de los dos cuerpos**: Revisión de los conceptos físicos y matemáticos clásicos, análisis y posterior solución del problema de los dos cuerpos.

Capítulo 3: **La posición en el espacio**: Análisis de las órbitas de los cuerpos celestes en el espacio y determinación de los elementos orbitales.

Capítulo 4: **Diseño de la simulación**: Aplicación de los conceptos tratados a la simulación y desarrollo del programa en la plataforma VPython

5. Metodología

Se hace una revisión teórica sobre los conceptos más relevantes en el estudio de la mecánica celeste concerniente al problema de dos cuerpos teniendo en cuenta varias referencias bibliográficas y la pertinencia de los temas estudiados para la elaboración de la simulación. A partir de la pregunta problema se empieza a desarrollar el referente teórico el cual recoge elementos históricos, matemáticos y físicos que contextualizan la problemática y logran dar solución a esta. Después se pasa a desarrollar la simulación con los conceptos teóricos estudiados y atendiendo a los objetivos que se plantean, por último, se pasan a discutir y revisar los resultados obtenidos a partir de la simulación.

6. Conclusiones

- En ciertas condiciones el acercamiento de un asteroide con un planeta perturba y cambia la órbita del asteroide.
- El trabajo es un aporte que brinda herramientas e ideas para el estudio de la mecánica celeste y un punto de partida para la simulación de un sistema de más cuerpos.
- Las condiciones para que se vea afectada la órbita del asteroide son muy complejas de lograr en uno de los planetas menores teniendo en cuenta la escala de nuestro sistema solar y el radio de influencia de los planetas, particularmente para el caso tratado se logra una aproximación optima dadas las condiciones de Júpiter.
- El modelado de la trayectoria de un cuerpo por medio de sus elementos orbitales crea una órbita que es bastante estable y precisa al igual que al modelarla por medio de métodos numéricos arrojando análogamente resultados que coinciden con bastante aproximación.
- Es posible recalcular la órbita del asteroide con buena presión mediante las ecuaciones de transformación entre elementos orbitales y la posición y velocidad de un cuerpo pudiéndose así determinar por completo el tipo orbita final.
- Si bien las condiciones para que un asteroide se vea afectado por la presencia de un planeta en el espacio son difíciles de lograr, las condiciones para que se dé un impacto lo son aún más debido a los tamaños y las masas de estos en relación con el tamaño del sistema solar y la atracción gravitacional ejercida por el Sol.

Elaborado por:	Cristian David Soriano Hernandez
Revisado por:	Néstor Méndez Hincapié

Fecha de elaboración del Resumen:	18	Agosto	2017

Índice general

1. Introducción **8**

1.1. Descripción del problema 9

1.2. Objetivo general 10

1.3. Objetivos específicos 10

1.4. Contribución del trabajo de grado 11

2. El problema de los dos cuerpos **12**

2.1. Un poco de historia 13

2.1.1. La elipse 14

2.1.2. Segunda ley: Ángulos y áreas 16

2.1.3. Periodos y distancias, la tercera ley. 18

2.2. Las poderosas leyes de Newton 18

2.2.1. Ley de la inercia. 18

2.2.2. Ley dinámica. 19

2.2.3. Ley acción y reacción. 19

2.2.4. Ley de gravitación universal. 20

2.2.5. El potencial gravitatorio. 20

2.3. Resolviendo el problema de los dos cuerpos. 21

2.3.1. Elección del sistema de coordenadas. 23

2.3.2. El momentum angular. 25

2.3.3. La energía. 28

3. La posición en el espacio **35**

3.1. Los elementos orbitales. 40

3.1.1. Determinación de $\vec{r}$ y $\vec{v}$ a partir de los elementos orbitales. 43

3.1.2. Determinación de de los elementos orbitales a partir de $\vec{r}$ y $\vec{v}$. 43

4. Diseño de la simulación **47**

5. Conclusiones **58**

Índice de figuras

2.1. La elipse cos sus elementos representativos.(focos y semiejes) 14

2.2. Elipse con origen en uno de sus focos. 16

2.3. Representación gráfica de la ley de las áreas. 17

2.4. Ley de gravitación universal. 20

2.5. Configuración de dos cuerpos en un sistema inercial. 22

2.6. Sistema de referencia. 24

2.7. Momentum angular. 26

2.8. Plano coordenadas polares. 27

2.9. Relación área-angulo. 29

3.1. Relación geométrica entre las anomalías. 36

3.2. Plano de referencia y plano de la órbita. 41

3.3. Elementos orbitales. 42

3.4. Relación entre los elementos orbitales y los vectores $\vec{e}$ y $\vec{n}$. 46

4.1. Diseño de los ejes y declaración de las constantes. 48

4.2. Creación de los objetos y condiciones y iniciales. 50

4.3. Simulacion de la órbita de Júpiter con los elementos orbitales. 51

4.4. Simulación de la órbita de Júpiter y la del asteroide en simultaneo. 54

4.5. Trayectorias de los dos cuerpos sin que se encuentren (vista desde arriba). . . 55

4.6. Trayectorias de los dos cuerpos después de que se encuentran (vista desde arriba). 56

4.7. 1. Elementos orbitales antes del encuentro con Júpiter 2. Elementos orbitales después del encuentro con Júpiter. 57

Capítulo 1

Introducción

Uno de los mayores hitos y trabajos que se puede encontrar en la física y en el mundo científico es el desarrollado por el astrónomo y filósofo alemán Johannes Kepler, quien con su obra e investigaciones fue uno de los precursores de la revolución científica contribuyendo enormemente a la postulación de un modelo planetario que reestructuró ideas y modelos antiguos permitiendo una mejor comprensión de nuestro sistema solar. Kepler, basado en sus observaciones y gracias a la información del trabajo de toda una vida del astrónomo Tycho Brahe, quien poseía los datos de mayor precisión y confiabilidad de la época acerca del movimiento planetario, logró enunciar y postular las tres leyes que llevan su nombre. Estas leyes junto con el trabajo de otros físicos y la obra maestra de sir Isaac Newton descrita en sus "principia" constituyen los pilares y bases fundamentales del desarrollo de la mecánica celeste, eje central de este trabajo de grado. A partir de dichos descubrimientos y observaciones es que actualmente se conoce cuáles son las leyes por las que se rige el movimiento de los objetos tanto en La Tierra como en los cielos, y es por eso de vital importancia estudiar y analizar dichos conceptos y temáticas que encierran estas leyes como punto de partida para lograr abordar las implicaciones que tienen sobre nuestras ideas contemporáneas de la mecánica celeste.

El propósito central de este trabajo es el de hacer un análisis matemático y físico del efecto de una fuerza central actuando sobre un asteroide que circunde cerca de un planeta para luego ver la posible trayectoria después del encuentro, para ello se dispone de la elaboración de una simulación que modele dicho fenómeno.

El análisis puede extenderse a ver cómo se perturban las trayectorias de los objetos celestes y cuál sería, por ejemplo, la trayectoria que seguiría un asteroide que pase cerca de un planeta. El diseño y desarrollo de un programa en el cual se logre simular y evidenciar de manera más clara y real el modelo de un sistema de dos cuerpos bajo una fuerza central

podría permitir que el estudiante logre ver e interactuar de una forma más activa con los conceptos y objetos en torno al fenómeno posibilitando una mejor comprensión y aprendizaje del tema.

1.1. Descripción del problema

Uno de los problemas más frecuentes de los estudiantes dentro del aula de clase es la comprensión acerca de las leyes y conceptos propios dentro de la física. Si bien en muchos libros e incluso durante el desarrollo de las clases se abordan dichos conceptos, la profundidad y el análisis de sus implicaciones no siempre es el adecuado. En muchos cursos de física y más específicamente de mecánica clásica, se trabaja con las leyes de Kepler, las tres leyes de Newton y su ley universal de gravitación, incluso dentro de los textos de enseñanza tradicional podemos encontrar un capítulo dedicado a el tema de gravitación, sin embargo el tratamiento y el estudio que se le da se queda corto para el gran impacto y trascendencia que tienen estas leyes en la historia de la física y en la ciencia moderna. En el mejor de los casos los estudiantes logran aprender de memoria las leyes e incluso hacer uso de ellas para la resolución de un ejercicio para un contexto en particular, sin embargo cuando se indaga más acerca de las ecuaciones que describen estas leyes, su aplicación y su contexto histórico se ve un vacío teórico y conceptual reflejando así una falta de interiorización y comprensión real de las mismas. “ El aprendizaje significativo surgió como un intento de contrarrestar el aprendizaje repetitivo y el carácter no significativo del aprendizaje y va dirigido a garantizar el establecimiento de las relaciones esenciales y no de un modo arbitrario entre lo que debe aprenderse y lo que es conocido, es decir, lo que se encuentra en las estructuras cognitivas de la persona que aprende ” [5].

Una manera de realizar este aprendizaje es que los estudiantes tengan un acercamiento de estos conceptos teóricos con situaciones diferentes a las cotidianas, como por ejemplo el acercamiento de un asteroide con un planeta. Este acercamiento junto con el uso de herramientas computacionales generaría un aprendizaje de esta temática de forma diferente que complementa el trabajo de soluciones analíticas (problema de uno o dos cuerpos) con la construcción de aproximaciones numéricas. Por lo anterior es que se planteó la siguiente pregunta problema a desarrollar en este trabajo ¿ Cómo puede una Simulación en la plataforma VPython enriquecer y ayudar en el aprendizaje del concepto de fuerza central y sus implicaciones físicas?

1.2. Objetivo general

Diseñar una simulación en VPython como herramienta computacional para el aprendizaje de la mecánica celeste relacionada con el encuentro de un asteroide con un planeta.

La simulación consistiría en un sistema de dos cuerpos que se encuentren interactuando por medio de una fuerza central (gravitacional), aquí el usuario tendría la opción de modificar parámetros tales como las masas de los planetas o la excentricidad de las órbitas entre otros. A este sistema se añadiría un tercer cuerpo (asteroide) que vendría al encuentro con el cuerpo se encuentra en órbita. Este tercer cuerpo también seria susceptible de cambiar algunos de sus parámetros como su velocidad o su masa, todo atendiendo al principio de cómo se daría ese encuentro entre el asteroide y el planeta bajo el efecto de la fuerza de atracción gravitacional. Aquí lo que se pretende es ver cuáles serían las posibles trayectorias que seguiría el asteroide y así lograr con esta simulación del fenómeno una mejor comprensión del mismo.

1.3. Objetivos específicos

Los objetivos específicos que contribuirán a desarrollar el *objetivo general* del trabajo son los siguientes:

- Analizar las condiciones físicas del acercamiento de un asteroide con un planeta.

  Una vez conocidas las posibles trayectorias, se pasaría a estudiar cuales son las condiciones y parámetros de impacto para que haya una colisión entre un planeta y un asteroide. Este caso en particular es de gran importancia ya que los conceptos físicos y teóricos que se analizan tienen un gran impacto en el estudio de la mecánica celeste.

- Revisar la situación de un asteroide real y ponerla en contraste con la simulación.

  La idea es también poder simular la órbita de un asteroide real que se encuentre en una trayectoria próxima a la de una planeta. A partir de datos reales se pretende revisar como sería la trayectoria que seguiría un asteroide que haya sido observado transitar cerca a un planeta y poner esto en contraste con la simulación logrando así una visualización del fenómeno lo más cercano posible a la realidad.

1.4. Contribución del trabajo de grado

La razón primordial para abordar éste tema es la necesidad de ligar lo que las leyes físicas nos develan con lo observado en los fenómenos, también hacer una profundización teórica y más dinámica del tema con la construcción de una simulación en VPython que optimice su estudio. Las técnicas de simulación de modelos matemáticos-físicos y la tecnología computacional actual ofrecen una combinación excelente que ayudan a hacer realidad los conceptos de manipulación, exploración y descubrimiento. Es de resaltar que en nuestros días se ha convertido en un asunto importante el papel que juegan las nuevas tecnologías en la enseñanza de la física, por ello se vuelve vital que el estudiante tenga un acercamiento a la física por medio herramientas computacionales que posibiliten un mejor dominio y manejo de las temáticas abordadas para así ver como a partir de una serie de ideas lógicas e ingeniosas, y de observaciones que proporcionan información valiosa acerca del movimiento planetario fue que se construyó una teoría sólida y consistente de sistema planetario que permite hacerse a una idea de cómo funciona la naturaleza. Pero al igual que muchas ideas y teorías no basta solo con saberlas y repetirlas, deben tener un trasfondo y una conceptualización seria y significativa, por esto se hace necesario una profundización y análisis más riguroso de los conceptos físicos y elementos matemáticos inmersos en el problema del movimiento de dos cuerpos ligados al efecto de una fuerza central actuando sobre ellos y un tercero aproximándose. Es allí donde la herramienta pedagógica de la simulación juega un papel fundamental en el desarrollo del trabajo, sirviendo como un facilitador e integrador ayudando así a una mejor comprensión de los conceptos vistos y tratados durante el proyecto. “ Enfrentar los grandes desafíos que se imponen hoy día a la educación en todas partes del mundo presupone, entre otros aspectos, asumir como un hecho incuestionable la necesidad de reconsiderar los tradicionales métodos de enseñanza-aprendizaje e incorporar, de manera natural, los avances que la ciencia y la técnica pone a disposición del hombre contemporáneo ” [2].

Es una realidad que el contexto actual demanda cada vez más un mayor uso de las herramientas computacionales y, en el sistema educativo, esto se plasma en la edición de libros de texto. Estos contemplan el uso de enlaces a páginas web que contienen recursos educativos en línea y, en particular, los textos de disciplinas científico tecnológicas incluyen reseñas a determinados simuladores, sobre todo en el aprendizaje de la Física.

Por otro lado, la plataforma donde se desea desarrollar la simulación es en VPython, VPython es un lenguaje de programación dinámico y orientado a objetos. El principal objetivo que persigue este lenguaje es la facilidad, tanto de lectura, como de diseño y es de libre distribución.

Capítulo 2

El problema de los dos cuerpos

La mecánica celeste es una rama que se encarga principalmente de estudiar los fenómenos y propiedades de los cuerpos celestes, en especial los que se refieren al movimiento de éstos. Está amparada en las ideas Newtonianas junto con las de Kepler y constituyó en su tiempo de auge una visión del universo determinista al tratar de entender a la naturaleza. Las leyes de Newton logran explicar con mucha exactitud los movimientos en nuestro sistema solar y permite hacer predicciones acerca de éste que son incuestionables, sin embargo como cualquier teoría es susceptible de ser analizada y es así como se logran ver vacíos dentro de la misma como por ejemplo explicar en sí mismo. ¿ Qué es la gravedad?. Esta y más dudas junto con otros fenómenos observados en la bóveda celeste que no eran explicados por las ideas Newtonianas permanecieron como un interrogante que inquietaba a los intelectuales que trabajaban en ello, lo cual fue tema de estudio hasta mucho tiempo después cuando aparece Albert Einstein y su teoría de la relatividad. Por otra parte se reconocen los aportes teóricos de Lagrange que condujeron al estudio del problema de los tres cuerpos con lo cual se consolidan estudios posteriores concernientes a las órbitas de los asteroides troyanos y la determinación de las variaciones seculares y periódicas de los elementos orbitales de los planetas.

A continuación se desarrolla en este capitulo las nociones básicas relacionadas con las leyes de kepler y la teoría de la gravitación basado en las referencias consultadas.

2.1. Un poco de historia

Desde la antigüedad se ha tenido registro de la existencia de los planetas y otros cuerpos celestes que se diferenciaban de las estrellas fijas puesto que tenían un tipo de trayectorias particulares. En su intento por describir éstos fenómenos, los antiguos griegos diseñaron un modelo el cual se basaba en las ideas de que los cuerpos celestes giran en círculos perfectos, de manera uniforme y que estos giran en torno a la tierra. Este modelo, conocido como el modelo Ptolemaico se mantuvo vigente por varios siglos y era plausible en ese entonces aunque algo complejo por la introducción de unos conceptos llamados epiciclos que intentaban dar explicación al movimiento retrogrado de algunos cuerpos en el cielo.

Ya en el siglo XVI Nicolás Copérnico, un monje y astrónomo Polaco introduce un nuevo modelo planetario conocido como heliocéntrico, es decir, que sitúa el Sol en el centro de nuestro sistema planetario en torno al cual giran todos los planetas. Las órbitas son circulares y además la luna es el único cuerpo que gira alrededor de la Tierra. Esta idea revolucionaria en su momento ya había sido propuesta varios siglos atrás por Aristarco de Samos, un Astrónomo griego del siglo IV A.C. El modelo en sí no fue muy bien acogido por la autoridad eclesiástica de la época pero sienta las bases de una forma de pensamiento diferente y revolucionaria que cambio los paradigmas de la concepción de nuestro sistema planetario. Pasarían unos años más para que estas ideas fueran retomadas con más fuerza y dieran un giro a la mirada que se tenía de la naturaleza.

Uno de los primeros hombres en tratar de encontrar una relación matemática y geométrica que lograra dar cuenta de los movimientos de los cuerpos celestes fue Johannes Kepler. Casi cien años después de los trabajos publicados por Copérnico, éste matemático y astrónomo alemán se embarcó en la tarea tomar estas ideas y darles un sustento matemático que lograra describir por medio de reglas cuales serían las posibles trayectorias y movimientos de los planetas. La tarea significó un reto matemático de gran complejidad para Kepler puesto que para la época no se contaba con instrumentos para hacer mediciones tan precisas tal cual como lo hacemos hoy en día, pero esto no impidió que continuara con su idea y junto con la ayuda de Tycho Brahe logró desarrollar su teoría posteriormente. A pesar de que no trabajaron mucho tiempo debido a la repentina muerte de Brahe, este le proporcionó a Kepler la mayor y más precisa colección de datos de la época en cuanto a observaciones astronómicas se refiere.[9]

Tras una revisión de conceptos y una constante búsqueda donde se contrastaban teorías antiguas con ideas nuevas que ponían de manifiesto un arduo trabajo matemático, Kepler logró sintetizar la matemática implícita en los astros enunciando sus famosas tres leyes:

Primera ley: Los planetas que giran alrededor del Sol se mueven describiendo órbitas elípticas. El Sol se encuentra ubicado en un foco de dichas elipses.

Segunda ley: El radio vector que une el Sol con el centro de cada planeta barre áreas iguales en intervalos de tiempo iguales.

Tercera ley: Los cuadrados de los periodos de traslación de los planetas son respectivamente proporcionales al cubo del semieje mayor de la órbita de cada planeta.

Conviene ahora tratar un poco mas detalladamente cada una de las anteriores leyes con el propósito de profundizar en los temas matemáticos implícitos, junto con las leyes de Newton constituyen la bases para la posterior realización del programa, de ahí que se hagan a continuación las consideraciones correspondientes.

2.1.1. La elipse

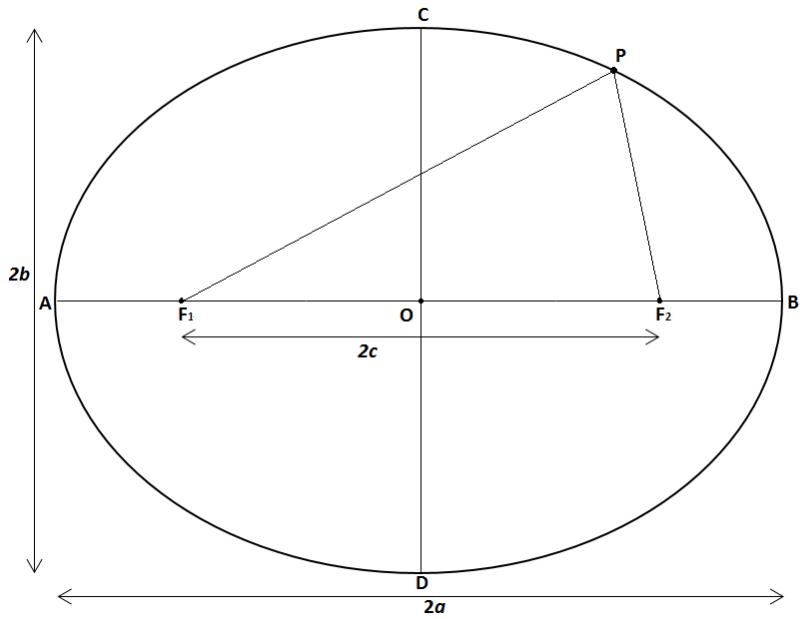

Figura 2.1: La elipse cos sus elementos representativos.(focos y semiejes)

La elipse es el lugar geométrico de los puntos que cumplen la siguiente relación:

$$\overline{PF_1} \quad + \quad \overline{PF_2} \quad = \quad constante,$$

donde P es cualquier punto de la elipse y F_1 y F_2 son los focos de la elipse.

Los segmentos $\overline{PF_1}$ y $\overline{PF_2}$ son respectivamente las distancias del punto P a los focos. En la Figura (2.1) se puede ver una imagen de la elipse con sus elementos más representativos.

La distancia $\overline{AB}$ es llamada el *eje mayor* de la elipse. Tenemos entonces de la Figura (2.1) que $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{AB}/2$ y es a esta distancia la que conocemos como *semieje mayor* de la elipse denotado con la letra a. De igual manera llamamos la distancia $\overline{CD}$ eje menor de la elipse; $\overline{OC} = \overline{OD} = \overline{CD}/2$ es llamado *semieje menor* de la elipse denotado con la letra b. De la definición de elipse tenemos que:

$$\overline{PF_1} \quad + \quad \overline{PF_2} \quad = \quad 2a,$$

La excentricidad de la elipse se denomina con la letra e y esta definida de la siguiente forma:

$$e \quad = \quad \frac{\overline{OF_2}}{\overline{OB}} \quad = \quad \frac{\overline{OF_1}}{\overline{OA}} \quad = \quad \frac{\overline{OF_2}}{a}$$

Aplicando las propiedades de los triángulos rectángulos se puede expresar el *semieje menor* en función del *semieje mayor* y e:

$$b \quad = \quad a\sqrt{(1-e^2)}. \tag{2.1}$$

Necesitamos ahora encontrar una ecuación que nos defina lo que es una elipse en el plano. Una elipse cuyo centro este ubicado en el origen se puede escribir de la siguiente manera:

$$\frac{x^2}{a^2} \quad + \quad \frac{y^2}{b^2} \quad = \quad 1.$$

Para efectos de simplicidad se suele usar como punto de referencia el Sol y no el centro de nuestro sistema de coordenadas. Puesto que el Sol se encuentra situado en un foco de la elipse y no en su centro debemos hacer una traslación de coordenadas. Los focos de nuestra elipse se encuentran sobre el eje x por eso es que debemos debemos sumar a la coordenada x la distancia $\overline{OF_2}$, que es igual a a multiplicado por e.

$$\frac{(x+ae)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{2.2}$$

Usualmente en astronomía y mecánica celeste se suele trabajar con coordenadas polares y es por esto que ahora debemos encontrar una expresión equivalente de una elipse pero ahora en coordenadas polares. Para ello procedemos a multiplicar por b^2 en ambos miembros de la ecuación y a desarrollar el álgebra correspondiente:

$$\left(x^2 + 2aex + a^2e^2\right)\left(1-e^2\right) + y^2 = a^2 - a^2e^2,$$

$$x^2 + 2aex - x^2e^2 - 2ae^3x + y^2 = a^2 - 2a^2e^2 + a^2e^4,$$

$$x^2 + y^2 = a^2\left(1-e^2\right)^2 - 2aex\left(1-e^2\right) + x^2e^2,$$

$$x^2 + y^2 = \left(a\left(1-e^2\right) - xe\right)^2,$$

La transformación entre las coordenadas polares y las cartesianas es:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \tag{2.3}$$

Reemplazando:

$$r^2 = \left[a\left(1-e^2\right) - re\cos\theta\right]^2,$$

organizando y al factorar obtenemos:

$$r + re\cos\theta = a\left(1-e^2\right),$$

$$r\left(1+e\cos\theta\right) = a\left(1-e^2\right),$$

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}. \tag{2.4}$$

La ecuación (2.4) es la ecuación de una elipse en coordenadas polares con origen en el foco. r es el *radio vector* que va desde el Sol hasta el planeta que describe la elipse el cual se encuentra ubicado en algún punto de ésta. θ es conocido como la *anomalía verdadera*, para mayor precision se puede observar la Figura (2.2).

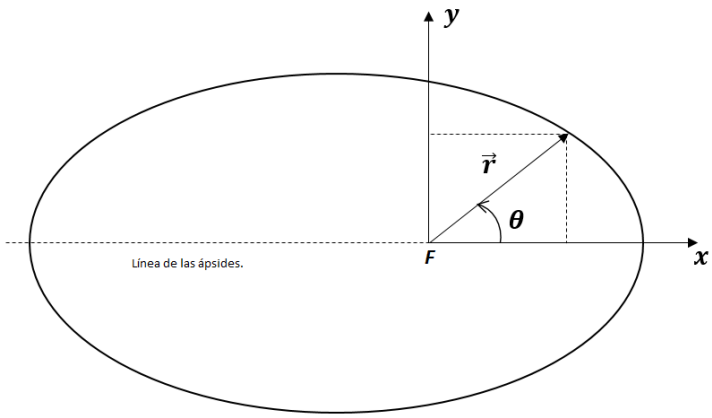

Figura 2.2: Elipse con origen en uno de sus focos.

2.1.2. Segunda ley: Ángulos y áreas

Si supusiéramos que efectivamente como se creía antes, los planetas se mueven en órbitas de tipo circular, con la segunda ley de Kepler tendríamos un movimiento circular uniforme en donde el cuerpo recorre áreas (o ángulos) iguales en tiempos iguales, es decir, su rapidez sería constante. Para el caso de trayectorias elípticas la segunda ley nos pone de manifiesto

que para recorrer iguales áreas en iguales intervalos de tiempo el planeta debe acelerar o desacelerar en ciertos puntos de la trayectoria para dar cumplimiento a esta ley.

En la Figura (2.3) se puede ver como para iguales intervalos de tiempo (un año), un planeta recorre diferentes distancias en la elipse o por decirlo de otra manera barre diferentes ángulos. Sin embargo el área 1 es equivalente a el área 2. Existen pues, zonas o sectores donde el planeta se acelera aumentando su velocidad y lugares donde ocurre lo contrario, llamadas perihelio y afelio respectivamente. Un planeta se mueve mas rápido cerca de su estrella mientras que lo hace mas lento al estar mas alejado de ella.

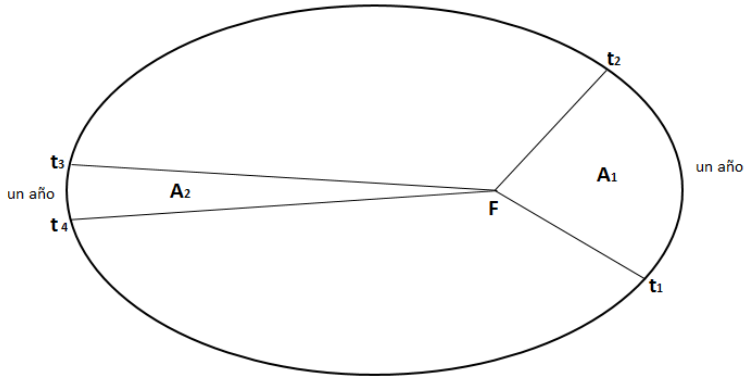

Figura 2.3: Representación gráfica de la ley de las áreas.

Una forma de poner en términos matemáticos lo que nos dice esta ley es la siguiente:

$$A \quad \propto \quad t \quad ,$$

donde A es el area barrida por el planeta y t es el tiempo. Si ahora agregamos una contante de proporcionalidad a nuestra ecuación tenemos:

$$A \quad \propto \quad Kt \quad . \tag{2.5}$$

Si nos vamos a nuestra figura (2.5) vemos que para un intervalo entre un $t1$ y un $t2$ que es igual a otro intervalo $t3$ y $t4$ (un año), se cumple que $A1 = A2$.

2.1.3. Periodos y distancias, la tercera ley.

La tercera ley nos habla de la relación existente entre el periodo de un planeta T, que no es otra cosa que el tiempo que tarda en dar una revolución completa y la longitud del *semieje mayor a*. La forma matemática de expresar esto es:

$$T^2 \quad \propto \quad a^3 \quad ,$$

Introduciendo la constante de proporcionalidad,

$$T^2 \quad \propto \quad K_1 a^3 \quad . \tag{2.6}$$

De aquí se puede deducir que mientras mas lejos se encuentre un planeta de su estrella, mayor sera el tiempo que tarde en completar un giro alrededor de ella, mientras que si esta mas cerca de ella, este tiempo se reducirá. Podemos inferir también a partir de esta ley que las velocidades de los planetas que están más cercanos a sus estrellas son mayores con relación a aquellos cuyas distancias son mayores.

2.2. Las poderosas leyes de Newton

De por si hablar de este gran personaje de la física daría para muchos libros y artículos, incursionó en la mayoría de los tópicos de la física y las matemáticas conocidas y es considerado como el padre de la ciencia moderna. Particularmente para el desarrollo siguiente pretendo abordar los aspectos mas relevantes de su obra los cuales dan sustento a gran parte del trabajo.

Newton logro enunciar las leyes por las cuales se rigen los movimientos tanto en la Tierra como en nuestro sistema solar. A continuación trataremos cada una de estas leyes publicadas en su trabajo llamado *principios matemáticos de la filosofía natural.*

2.2.1. Ley de la inercia.

Esta ley nos dice que: *Todo cuerpo en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme permanece en su estado de movimiento a menos de que una fuerza externa lo haga cambiar.* Esta ley es una de las que más entra en conflicto con nosotros o personas que tal vez se estén iniciando en estudiar física, es algo así como un concepto contra intuitivo, pues si observamos nuestro entorno vemos que esto no siempre se cumple, pues los cuerpos en la

tierra no mantienen su estado de movimiento en una forma perpetua. Tal vez nos parezca razonable que un cuerpo el cual carece de movimiento permanezca de esta manera, pero ocurre distinto para un cuerpo que ya esta dotado de algún tipo de movimiento, pues vemos que con el tiempo si la fuerza que le aplicamos cesa, el cuerpo tiende a detenerse. Esta y otras aparentes contradicciones a las que se pueden llegar solo llegan a resolverse cuando se introducen los conceptos de *fuerzas resistivas y marcos de referencia* que tal vez no somos consientes de su existencia pero que están ahí y hacen que los cuerpos cambien su estado de movimiento.

2.2.2. Ley dinámica.

Podemos decir entonces que si un cuerpo cambio su estado de movimiento, esto fue debido a la presencia de una fuerza pero, ¿ Cómo o en qué medida esta fuerza hace que cambie el movimiento de los cuerpos?. La ley que nos da respuesta a esta interrogante es la siguiente:

$$\vec{F}_{1x} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m_1\vec{v}\right), \tag{2.7}$$

donde $\vec{F}_{1x}$ es la fuerza que actúa sobre el cuerpo de masa m_1 debido a la interacción x (que origina la fuerza) y $\vec{p}$ es el momentum lineal. El momentum lineal de un cuerpo está definido como la masa del cuerpo multiplicada por su velocidad $\vec{v}$ con respecto a un sistema de referencia dado.

En nuestro caso en particular la masa de los planetas que orbitan alrededor de una estrella permanece constante por lo que podemos reescribir la ecuación (2.7) de la siguiente manera:

$$\vec{F}_{1x} = m_1\frac{d\vec{v}}{dt} = m_1\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad , \tag{2.8}$$

donde $\vec{r}$ es el vector posición del cuerpo m_1 con respecto al origen de un sistema de coordenadas y la velocidad es la derivada de la posición con respecto al tiempo.[9]

2.2.3. Ley acción y reacción.

Para toda fuerza que se genere, existe una fuerza opuesta que se genera de igual magnitud pero en sentido contrario. Si por ejemplo $\vec{F}_{1x}$ es la fuerza que se genera en nuestro cuerpo m_1 debido a la interacción del cuerpo x, se genera entonces otra fuerza debida a el cuerpo m_1 sobre el que generó dicha interacción y es igual a $\vec{F}_{x1}$. Es claro entonces que $\vec{F}_{1x} = -\vec{F}_{x1}$.[9]

2.2.4. Ley de gravitación universal.

La interacción existente entre dos partículas que posean masa puede describirse en términos de una ley dada a conocer por Newton. La ecuación que da cuenta de la fuerza que se ejerce sobre un cuerpo de masa m_2 debido a un cuerpo de masa m_1 es la siguiente:

$$\vec{F}_{21} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{u}_r \quad , \tag{2.9}$$

donde $\hat{u}_r$ es un vector unitario dirigido en la dirección del vector posición $\vec{r}$ que va desde m_1 hasta m_2 y cuya magnitud es r (ver Figura (2.4)). El signo negativo quiere decir que esta fuerza $\vec{F}_{21}$ es de atracción.

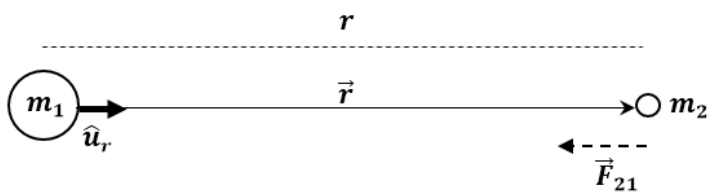

Figura 2.4: Ley de gravitación universal.

G es la constante de Cavendish nombrada así en honor al físico que se dió a la tarea de calcularla y su valor en unidades MKS es:

$$G = 6{,}67259 \times 10^{-11} m^3 s^{-2} kg^{-1}.$$

Usualmente la ecuación (2.9) se suele escribir en términos del vector posición $\vec{r}$ y puesto que $\vec{r} = r\vec{u}_r \quad$, tenemos que:

$$\vec{F}_{21} = -\frac{Gm_1m_2}{r^3}\vec{r}. \tag{2.10}$$

2.2.5. El potencial gravitatorio.

El potencial V para un cuerpo esférico de masa m_1 ejercido sobre un cuerpo de masa m_2 esta dado por la función:

$$V = -\frac{Gm_1m_2}{r}, \tag{2.11}$$

Este es un potencial el cual solo depende de la distancia a la cual se encuentren los cuerpos en cuestión. Esta ecuación es válida para cuerpos que cumplan una simetría totalmente esférica y una densidad uniforme de masa. Si vamos al caso real los planetas no cumplen estas condiciones en su totalidad debido a que no son esferas perfectas y ademas pueden tener densidades diferentes dentro de su atmósfera, sin embargo debido a la gran distancia que existe entre ellos y su estrella, la ecuación (2.11) nos brinda una excelente precision para calcularlo ya que estas consideraciones sobre nuestras variables se hacen despreciables para el caso del estudio de nuestro sistema solar.[9]

2.3. Resolviendo el problema de los dos cuerpos.

Desde mucho tiempo atrás éste ha sido el tema que ha fascinado a físicos y astrónomos a lo largo de la historia. El problema consiste en determinar cuales serian las ecuaciones de movimiento para dos partículas aisladas, esto quiere decir, que no se ven afectadas por la interacción con otras partículas. Una vez hecho esto, sí es posible, dar solución a estas ecuaciones para así definir por completo el estado mecánico de los cuerpos que se están analizando y con esto poder conocer cómo evoluciona el sistema de partículas en el tiempo. Palabras mas palabras menos, lo que interesa conocer es cual será la posición de los cuerpos que conforman el sistema para cada instante de tiempo que queramos.

Existen diferentes formas para dar solución a este problema. Por comodidad se trabajará en una solución particular que nos permita desarrollar nuestra simulación en el programa VPython. La manera en la que vamos a abordar el problema es estudiando el movimiento de una partícula con respecto a la otra: tomaremos como origen de nuestro sistema de referencia a una partícula y estudiaremos el movimiento de la otra. La razón por la cual hacemos esto es porque en realidad lo que buscamos es conocer la trayectoria de un planeta con respecto a la posición de su estrella, y en general siempre hacemos mediciones con respecto a esa estrella, lo que facilita dar solución al problema.[9]

Sean dos partículas de masa m_1 y m_2 cuyos vectores de posición a un origen arbitrario O son $\vec{r_1}$ y $\vec{r_2}$ respectivamente, separadas una distancia r ($r = |\vec{r}| = |\vec{r_2} - \vec{r_1}|$), donde $\vec{r}$ es el vector de posición de m_2 con respecto a m_1 (ver Figura 2.5).

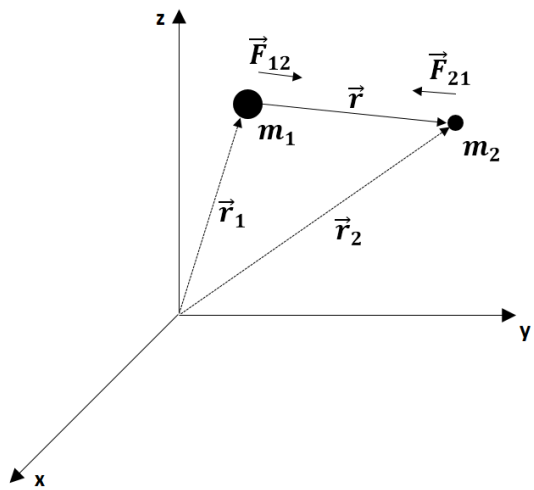

Figura 2.5: Configuración de dos cuerpos en un sistema inercial.

La fuerza que actúa sobre la partícula m_2 debido a m_1 esta dada por:

$$\vec{F}_{21} = -\frac{Gm_1m_2}{r^3}(\vec{r_2} - \vec{r_1}) \quad . \tag{2.12}$$

Por la tercera ley de Newton la fuerza ejercida sobre m_1 es:

$$\vec{F}_{12} = \frac{Gm_1m_2}{r^3}(\vec{r_2} - \vec{r_1}) \quad . \tag{2.13}$$

Teniendo en cuenta ahora la segunda ley de Newton, podemos expresar la fuerza como la masa por la segunda derivada del vector posición (ecuación (2.8)):

$$m_2\frac{d^2\vec{r_2}}{dt^2} = -\frac{Gm_1m_2}{r^3}(\vec{r_2} - \vec{r_1}), \qquad m_1\frac{d^2\vec{r_1}}{dt^2} = \frac{Gm_1m_2}{r^3}(\vec{r_2} - \vec{r_1}). \tag{2.14}$$

Los vectores $\vec{r_1}$ y $\vec{r_2}$ se encuentran en el espacio, por lo que cada uno tiene tres componentes. Entonces tenemos en total seis ecuaciones diferenciales de segundo orden a resolver. Por otro lado, el centro de masa del sistema esta localizado en:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2}}{m_1 + m_2}. \tag{2.15}$$

Teniendo en cuenta esta igualdad y el hecho de que $\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$ tenemos que:

$$\vec{r_1} = \vec{r}_{cm} - \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)\vec{r}, \qquad \vec{r_2} = \vec{r}_{cm} + \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)\vec{r} \tag{2.16}$$

Si ahora reemplazamos las ecuaciones (2.16) en (2.14) para $\vec{r_1}$ y $\vec{r_2}$, y tomamos en cuenta que la aceleración de el centro de masa para un sistema aislado es igual a cero tenemos que:

$$m_1 \frac{d^2\left(\dfrac{m_2}{m_1+m_2}\right)\vec{r}}{dt^2} = -\frac{Gm_1m_2}{r^3}(\vec{r_2}-\vec{r_1}),$$

$$m_2 \frac{d^2\left(\dfrac{m_1}{m_1+m_2}\right)\vec{r}}{dt^2} = -\frac{Gm_1m_2}{r^3}(\vec{r_2}-\vec{r_1}),$$

finalmente llegamos a:

$$\mu\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{Gm_1m_2}{r^3}(\vec{r_2}-\vec{r_1}). \tag{2.17}$$

donde

$$\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2} \tag{2.18}$$

μ es conocida como la masa reducida, una masa menor ya sea de m_1 o m_2. Hemos pasado entonces de resolver un sistema de dos cuerpos a resolver un problema equivalente de un solo cuerpo. Con la ecuación (2.17) que es la ecuación de movimiento para una partícula de masa μ actuando bajo una fuerza $f(r)\hat{u}_r$ podemos concluir que un sistema aislado de dos cuerpos puede ser reducido a un sistema equivalente de un solo cuerpo. Hoy en día no se conoce manera alguna de reducir las ecuaciones de tres o más cuerpos a las de uno, es por eso que no existe aún una solución exacta al problema de los tres cuerpos.[9]

2.3.1. Elección del sistema de coordenadas.

En el problema particular que se basa el siguiente trabajo es en el análisis de un sistema cuyas masas son muy diferentes. Si denotamos el Sol como m_1 y el Planeta como m_2 podemos definir que $m_1 \gg m_2$. Si elegimos como origen de nuestro sistema de coordenadas a nuestro centro de masa, $\vec{r}_{cm} = 0$, las ecuaciones (2.16) se reducen entonces a:

$$\vec{r_1} \approx 0$$

$$\vec{r_2} \approx \vec{r}$$

Con estas consideraciones la masa reducida μ es aproximadamente m_2 y el centro de masa se encuentra muy próximo a m_1. En este caso el origen de nuestro sistema de coordenadas estará situado en el cuerpo mas masivo. Definimos ahora un plano xy que no es otro sino el plano de la *ecliptica* (plano definido por la órbita terrestre en el cual el eje x apunta en dirección hacia el punto vernal) cuyo eje z es perpendicular al plano xy. (ver Figura (2.6)).

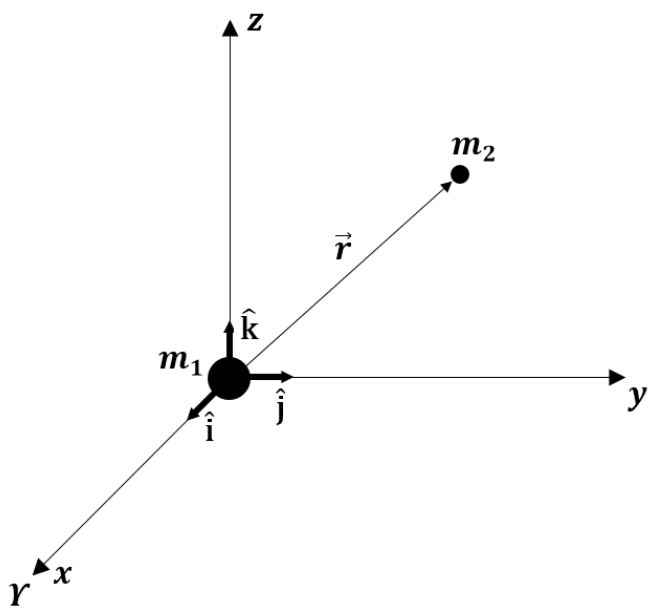

Figura 2.6: Sistema de referencia.

Las coordenadas de m_2 con respecto a nuestro sistema de coordenadas se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}, \tag{2.19}$$

donde $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$ son vectores unitarios que apuntan en las direcciones x, y y z respectivamente. La magnitud del vector $\vec{r}$ es:

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{2.20}$$

Los vectores velocidad y aceleración son respectivamente:

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}, \tag{2.21}$$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{x}}\hat{i} + \ddot{\vec{y}}\hat{j} + \ddot{\vec{z}}\hat{k}. \tag{2.22}$$

Si reemplazamos las ecuaciones (2.19) y (2.22) en (2.17):

$$\mu(\ddot{\vec{x}}\hat{i} + \ddot{\vec{y}}\hat{j} + \ddot{\vec{z}}\hat{k}) = -\frac{Gm_1m_2}{r^3}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \quad ,$$

dado que $\mu \approx m_2$, tenemos despejando que:

$$\ddot{\vec{x}}\hat{i} + \ddot{\vec{y}}\hat{j} + \ddot{\vec{z}}\hat{k} = -\frac{Gm_1}{r^3}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \quad . \tag{2.23}$$

Al factorizar los vectores unitarios en (2.23) resulta que:

$$\ddot{\vec{x}} = -\frac{Gm_1}{r^3}x, \quad \ddot{\vec{y}} = -\frac{Gm_1}{r^3}y, \quad \ddot{\vec{z}} = -\frac{Gm_1}{r^3}z \quad . \tag{2.24}$$

Estas ecuaciones diferenciales nos permite describir el movimiento de m_2 con respecto a m_1. Dar solución a cada ecuación de estas resulta engorroso debido a que se encuentran acopladas. Es por eso que mas adelante se buscará un método, cambiando de coordenadas, el cual nos permita obtener una solución analítica más sencilla para cada componente.[9]

2.3.2. El momentum angular.

El momentum angular es una magnitud vectorial que denotaremos con la letra h y lo definiremos como sigue:

$$\vec{h} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \tag{2.25}$$

La fuerza gravitatoria entre un planeta y su estrella es una fuerza central, esto quiere decir que el vector $\vec{r}$ es paralelo al vector $\vec{F}$ (ver Figura (2.7)). El momento de una fuerza es definido como el producto vectorial entre la fuerza y el vector posición, es decir:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{2.26}$$

En nuestro caso al ser paralelos los vectores tenemos que nuestro momento de fuerza es cero. Del teorema del momentum angular tenemos que:

$$\begin{gathered} \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{d\vec{h}}{dt} = 0, \\ \frac{d\vec{h}}{dt} = 0, \\ \vec{h} = constante. \end{gathered} \tag{2.27}$$

Al ser un vector constante tanto en magnitud y sentido, apuntando siempre en la misma dirección, podemos concluir que la única forma de que éste vector permanezca invariante en el tiempo es que el movimiento del cuerpo de masa m_2 con respecto al cuerpo de masa m_1 este contenido en un plano. El momentum angular es una cantidad que se conserva en el problema de una fuerza central actuando entre dos cuerpos y podemos hallar su magnitud así:

$$h = \mu r v \sin \vartheta \tag{2.28}$$

donde ϑ es el angulo formado entre los vectores $\vec{r}$ y $\vec{v}$

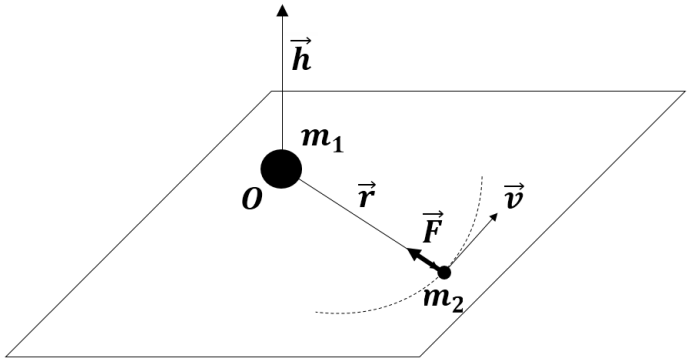

Figura 2.7: Momentum angular.

Coordenadas polares

Antes de seguir, hemos visto que las ecuaciones (2.24) no son posibles de resolver tal y como están. Podemos determinar la posición instantánea de un cuerpo usando un sistema de coordenadas cartesiano o también usando un sistema de coordenadas polar. Dada la conservación del momentum angular se hace posible solo usar dos coordenadas en lugar de tres que definan el movimiento y es por esto que un cambio de coordenadas facilita la resolución de las ecuaciones.

Primero definimos los vectores unitarios $\hat{u_r}$ y $\hat{u_\theta}$. El primero apunta radialmente saliendo desde el origen, mientras el segundo es un vector normal al primero en dirección al incremento de θ (ver Figura (2.8)).

Las componentes cartesianas de los vectores $\hat{u_r}$ y $\hat{u_\theta}$ son entonces:

$$\hat{u_r} = (\cos\theta, \sin\theta) \qquad \hat{u_\theta} = (-\sin\theta, \cos\theta). \tag{2.29}$$

Podemos escribir la posición de una planeta como $\vec{r} = r\vec{u_r}$, entonces tenemos para la velocidad:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\hat{u_r} + r\dot{\hat{u}}_r. \tag{2.30}$$

Notemos que $\hat{u_r}$ tiene una derivada diferente de cero en el tiempo (distinto a un vector unitario cartesiano) porque su dirección cambia a medida que el planeta se mueve. Derivando

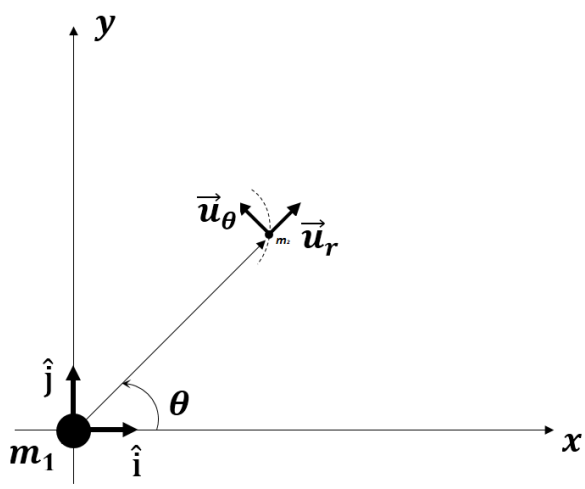

Figura 2.8: Plano coordenadas polares.

la primera de las ecuaciones (2.29) obtenemos:

$$\hat{\dot{u_r}} = \dot{\theta}(-\sin\theta, \cos\theta) = \dot{\theta}\hat{u_\theta}, \tag{2.31}$$

luego entonces:

$$\vec{\dot{r}} = \dot{r}\hat{u_r} + r\dot{\theta}\hat{u_\theta}. \tag{2.32}$$

La aceleración en coordenadas polares la obtenemos derivando de nuevo:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} = \vec{\ddot{r}} = \ddot{r}\hat{u_r} + \dot{r}\hat{\dot{u_r}} + (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{u_\theta} + r\dot{\theta}\hat{\dot{u_\theta}}. \tag{2.33}$$

Derivando $\hat{u_\theta}$ con respecto al tiempo tenemos:

$$\hat{\dot{u_\theta}} = \dot{\theta}(-\cos\theta, -\sin\theta) = -\dot{\theta}\hat{u_r} \quad . \tag{2.34}$$

Reemplazando (2.31) y (2.34) en la ecuación (2.33):

$$\vec{\ddot{r}} = \ddot{r}\hat{u_r} + \dot{r}(\dot{\theta}\hat{u_\theta}) + (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{u_\theta} + r\dot{\theta}(-\dot{\theta}\hat{u_r}),$$

$$\vec{\ddot{r}} = \ddot{r}\hat{u_r} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{u_\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{u_\theta} + r\ddot{\theta}\hat{u_\theta} - r\dot{\theta}^2\hat{u_r},$$

$$\vec{\ddot{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{u_r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{u_\theta}. \tag{2.35}$$

Los coeficientes que acompañan los vectores $\hat{u_r}$ y $\hat{u_\theta}$ suelen conocerse como *componente radial y transversal de la aceleración* respectivamente. Por facilidad escribimos la ecuación (2.17) de la siguiente forma:

$$\vec{\ddot{r}} = -\frac{Gm_1}{r^2}\hat{u_r}. \tag{2.36}$$

Finalmente reemplazamos la ecuación de la aceleración (2.35) en (2.36) y obtenemos:

$$(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{u_r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{u_\theta} = -\frac{Gm_1}{r^2}\hat{u_r}, \tag{2.37}$$

Cambiando la notación de las derivadas e igualando los coeficientes de ambos lados de la ecuación:

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{Gm_1}{r^2}, \tag{2.38}$$

$$r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} = 0. \tag{2.39}$$

Debido a que $\hat{u_r}$ y $\hat{u_\theta}$ son ortogonales las ecuaciones (2.38) y (2.39) son la *ecuación radial de movimiento* y la *ecuación transversal de movimiento.*

Podemos también encontrar la ecuación del momento angular en coordenadas polares reemplazando la ecuación (2.32) en la ecuación (2.25) como sigue:

$$\vec{h} = \mu\vec{r} \times (\dot{r}\hat{u_r} + r\dot{\theta}\hat{u_\theta}),$$

$$\vec{h} = \mu r\hat{u_r} \times (\dot{r}\hat{u_r} + r\dot{\theta}\hat{u_\theta}),$$

$$\vec{h} = \mu r^2\dot{\theta}\hat{k},$$

Donde $\hat{k}$ es un vector unitario ortogonal a $\hat{u_r}$ y $\hat{u_\theta}$. La magnitud de $\vec{h}$ seria igual a:

$$h = \mu r^2\dot{\theta}. \tag{2.40}$$

2.3.3. La energía.

Otra cantidad muy importante a tener en cuenta es la energía total del sistema. Como se trata de un sistema aislado en el que no hay disipación de energía podemos garantizar que la energía total se conserva y es otra constante dentro del sistema. La ecuación de la energía total relativa de m_1 y m_2 con respecto al centro de masa se reduce en coordenadas cartesianas a:

$$E = \frac{1}{2}m_2v^2 + \frac{k}{r}, \tag{2.41}$$

Donde k/r es la energía potencial debida a la fuerza conservativa gravitacional y donde $k = -Gm_1m_2$. En coordenadas polares reemplazando (2.32) en (2.41) tenemos:

$$E = \frac{1}{2}m_2(\dot{r}\hat{u_r} + r\dot{\theta}\hat{u_\theta})^2 + \frac{k}{r},$$

$$E = \frac{1}{2}m_2\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m_2r^2\dot{\theta}^2 + \frac{k}{r}, \tag{2.42}$$

Hemos entonces escrito las ecuaciones de movimiento en coordenadas polares de un planeta que gira en torno a una estrella debido a una fuerza central gravitatoria , de esta manera

sí es posible solucionar el problema por completo así que empecemos por nuestra ecuación (2.39). Si multiplicamos por r a ambos lados de la ecuación:

$$r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} = 0.$$

Sin embargo esta ecuación puede ser reescrita con la ayuda de la regla de Leibniz asi:

$$\frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt} = 0.$$

De ahí que $r^2\dot{\theta}$ es una cantidad que es constante en el tiempo y es igual al momentum angular por unidad de masa. Ahora supongamos que el radio vector conectando a un planeta con el origen de nuestro sistema de coordenadas rota un angulo $\delta\theta$ entre un tiempo t y un tiempo $t + \delta t$ (ver Figura 2.9).

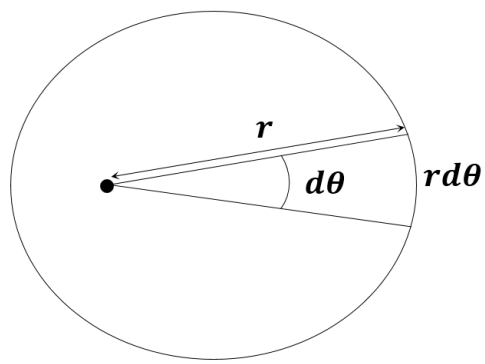

Figura 2.9: Relación área-angulo.

La región triangular aproximada barrida por el radio vector tiene un área:

$$\delta A \simeq \frac{1}{2}r^2\delta\theta,$$

debido a que el área de un triangulo es igual a un medio de su base ($r\delta\theta$) por su altura (r). La razón a la cual el radio vector barre el área es igual a:

$$\frac{dA}{dt} = \lim_{\delta\theta\to 0}\frac{r^2\delta\theta}{2\delta t} = \frac{r^2}{2}\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{2\mu}. \tag{2.43}$$

Así, el radio vector barre el área a un ritmo constante debido a que h es constante en el tiempo. Podemos concluir entonces que la segunda ley de Kepler es una consecuencia directa de la conservación del momentum angular.

Vamos ahora a obtener la ecuación de la trayectoria a partir de la energía y el momentum angular. Despejamos $\dot{\theta}$ en (2.40) y luego lo reemplazamos en (2.42) así:

$$E = \frac{1}{2}m_2\dot{r}^2 + \frac{h^2}{2m_2r^2} + \frac{k}{r},$$

Ahora despejando $\dot{r}$:

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - \frac{k}{r}\right) - \frac{h^2}{\mu^2r^2}}.$$

Tenemos que:

$$d\theta = \frac{d\theta}{dt}\frac{dt}{dr}dr = \frac{\dot{\theta}}{\dot{r}}dr. \tag{2.44}$$

Si ahora despejamos el valor de $\dot{\theta}$ de (2.40) y después reemplazamos este valor $\dot{\theta}$ junto con el de $\dot{r}$ obtenido anteriormente en (2.44), tenemos que:

$$d\theta = \frac{\left(\frac{h}{\mu r^2}\right)dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - \frac{k}{r}\right) - \frac{h^2}{\mu^2r^2}}},$$

ordenando:

$$d\theta = \frac{\left(\frac{h}{\mu r^2}\right)dr}{\sqrt{\frac{2E}{\mu} - \frac{2k}{\mu r} - \frac{h^2}{\mu^2r^2}}},$$

$$d\theta = \frac{\left(\frac{h}{\mu r^2}\right)dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu^2}\left(E\mu - \frac{k}{r}\mu - \frac{h^2}{2r^2}\right)}},$$

$$d\theta = \frac{\left(\frac{h}{\mu r^2}\right)dr}{\frac{1}{\mu}\sqrt{2\left(E\mu - \frac{k\mu}{r} - \frac{h^2}{2r^2}\right)}},$$

$$d\theta = \frac{\left(\frac{h}{r^2}\right)dr}{\sqrt{2\mu\left(E - \frac{k}{r} - \frac{h^2}{2\mu r^2}\right)}},$$

integrando:

$$\theta(r) = \int \frac{\left(\frac{h}{r^2}\right) dr}{\sqrt{2\mu\left(E - \frac{k}{r} - \frac{h^2}{2\mu r^2}\right)}}, \tag{2.45}$$

Si resolvemos la integral, tendremos la trayectoria en función de r y θ. Para resolverla haremos el cambio de variable $w = 1/r$ de lo que $dw = -(1/r^r)dr$, ademas factorizaremos h^2 de la expresión radical y el signo menos de el valor de k. ($-k = Gm_1m_2$).

$$\theta(r) = -\int \frac{hdw}{\sqrt{2\mu h^2\left(\frac{E}{h^2} + \frac{kw}{h^2} - \frac{w^2}{2\mu}\right)}},$$

$$\theta(r) = -\int \frac{dw}{\sqrt{\left(\frac{2\mu E}{h^2} + \frac{2\mu k}{h^2}w - w^2\right)}}. \tag{2.46}$$

Esta integral es una del tipo:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(ax^2 + bx + c)}} = -\frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin\left[\frac{2ax + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}}\right] + const.$$

Si hacemos $a = -1$, $b = 2\mu k/h^2$ y $c = 2\mu E/h^2$ en (2.46) tenemos por solución:

$$\theta + const. = \arcsin\left[\frac{-2w + \frac{2\mu k}{h^2}}{\sqrt{\left(\frac{2\mu k}{h^2}\right)^2 + 8\frac{\mu E}{h^2}}}\right],$$

deshaciendo el cambio de variable y aplicando la función inversa a ambos lados,

$$\sin(\theta + const.) = \frac{-\frac{2}{r} + \frac{2\mu k}{h^2}}{\sqrt{\left(\frac{2\mu k}{h^2}\right)^2 + 8\frac{\mu E}{h^2}}},$$

Arreglando la expresión de la derecha:

$$\sin(\theta + const.) = \frac{\frac{-2h^2 + 2\mu k r}{rh^2}}{\sqrt{\frac{4\mu^2 k^2}{h^4} + 8\frac{\mu E}{h^2}}},$$

factorizando:

$$\sin\left(\theta + const.\right) = \frac{\dfrac{-2h^2 + 2\mu k r}{r h^2}}{\sqrt{\dfrac{4\mu^2 k^2}{h^4}\left(1 + \dfrac{2Eh^2}{\mu k^2}\right)}},$$

$$\sin\left(\theta + const.\right) = \frac{\dfrac{2(\mu k r - h^2)}{r h^2}}{\dfrac{2\mu k}{h^2}\sqrt{\left(1 + \dfrac{2Eh^2}{\mu k^2}\right)}},$$

cancelando términos:

$$\sin\left(\theta + const.\right) = \frac{\dfrac{\mu k r - h^2}{\mu k r}}{\sqrt{\left(1 + \dfrac{2Eh^2}{\mu k^2}\right)}},$$

$$\sin\left(\theta + const.\right) = \frac{1 - \dfrac{h^2}{\mu k}\dfrac{1}{r}}{\sqrt{\left(1 + \dfrac{2Eh^2}{\mu k^2}\right)}},$$

$$-\sin\left(\theta + const.\right) = \frac{\dfrac{h^2}{\mu k}\dfrac{1}{r} - 1}{\sqrt{\left(1 + \dfrac{2Eh^2}{\mu k^2}\right)}},$$

podemos elegir el punto desde el cual θ es medido, así que si la constante es $-\pi/2$ tenemos:

$$-\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\dfrac{h^2}{\mu k}\dfrac{1}{r} - 1}{\sqrt{\left(1 + \dfrac{2Eh^2}{\mu k^2}\right)}},$$

usando identidades trigonométricas:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\dfrac{h^2}{\mu k}\dfrac{1}{r} - 1}{\sqrt{\left(1 + \dfrac{2Eh^2}{\mu k^2}\right)}},$$

$$\cos\theta = \frac{\dfrac{h^2}{\mu k}\dfrac{1}{r} - 1}{\sqrt{\left(1 + \dfrac{2Eh^2}{\mu k^2}\right)}},$$

ordenando:

$$1+\sqrt{\left(1+\frac{2Eh^2}{\mu k^2}\right)}\cos\theta=\frac{h^2}{\mu k}\frac{1}{r},$$

$$\frac{\mu k}{h^2}\left(1+\sqrt{\left(1+\frac{2Eh^2}{\mu k^2}\right)}\cos\theta\right)=\frac{1}{r},$$

$$\frac{\dfrac{h^2}{\mu k}}{1+\sqrt{\left(1+\dfrac{2Eh^2}{\mu k^2}\right)}\cos\theta}=r. \tag{2.47}$$

Esta es la ecuación de una cónica en coordenadas polares con origen en uno de sus focos (Sol). Dependiendo del valor de las constantes h y E, momentum angular y energia del sistema, podemos obtener un tipo de trayectoria ya sea elíptica, hiperbólica o parabólica. Con esto se generaliza la primera ley de Kepler pues las órbitas elípticas son un caso de los tipos de órbita que pueden tener dos cuerpos actuando debido a una fuerza central. Particularmente nos centraremos en el estudio de la órbita elíptica. Si contrastamos la ecuación (2.47) con la ecuación (2.4) deducimos que:

$$\frac{h^2}{\mu k}=a(1-e^2), \tag{2.48}$$

$$e=\sqrt{1+\frac{2Eh^2}{\mu k^2}}. \tag{2.49}$$

Las órbitas se clasifican según el valor de su excentricidad y por ende de su energía, la excentricidad en una elipse es $0<e<1$; lo cual permite unos valores de energía $-\mu k^2/2h^2<E<0$. Para el caso particular en que $E=-\mu k^2/2h^2$ la excentricidad es igual a cero y tenemos una trayectoria circular. Vamos ahora a encontrar el periodo del movimiento elíptico. Debido a que el radio vector que une al Sol con un Planeta barre áreas iguales en tiempos iguales, esperamos que el radio vector barra el área completa de la elipse en un periodo orbital T.

$$T=\frac{A}{dA/dt},$$

el área de una elipse es $A=\pi ab$, si reemplazamos el valor de dA/dt y b vía las ecuaciones (2.43) y (2.1) respectivamente tenemos:

$$T=\frac{2\pi\mu ab}{h}=\frac{2\pi\mu a^2(1-e^2)^{1/2}}{h}, \tag{2.50}$$

de (2.48) tenemos que:

$$\frac{h^2}{a\mu k}=(1-e^2),$$

$$\frac{h}{\sqrt{a\mu k}}=(1-e^2)^{1/2},$$

que al reemplazar en (2.50) resulta:

$$T = \frac{2\pi\mu a^2}{h}\left(\frac{h}{\sqrt{a\mu k}}\right) = \frac{2\pi\mu^{1/2}a^{3/2}}{k^{1/2}},$$

elevando al cuadrado:

$$T^2 = \frac{4\pi^2\mu a^3}{k}. \tag{2.51}$$

Esta es la tercera ley de Kepler. Siendo estrictos esta expresada sobre una partícula de masa μ equivalente al problema de los dos cuerpos. La tercera ley de Kepler se cumple siempre que $m_1 \gg m_2$, pues la constante varia dependiendo de la masa de cada planeta. Para nuestro caso particular tenemos que:

$$m_1 \gg m_2, \quad \mu \approx m_2, \quad k = Gm_1m_2, \quad T^2 = \frac{4\pi^2a^3}{Gm_1}.$$

Llamamos *movimiento medio* a la siguiente relación:

$$n = \frac{2\pi}{T}$$

usando esta relación podemos reescribir la tercera ley para nuestro caso:

$$Gm_1 = \frac{4\pi^2a^3}{T^2} = n^2a^3. \tag{2.52}$$

Capítulo 3

La posición en el espacio

Una de las cosas que se ha de tener en cuenta para desarrollar el programa es lograr identificar la posición de un cuerpo en el tiempo. En el capitulo anterior vimos como calcular r en función de θ y viceversa. Sin embargo, lo que necesitamos conocer es como varia θ y r en función de t. Si podemos encontrar una relación entre r y t, entonces seremos capaces luego de encontrar la relación entre θ y t. El ángulo θ es conocido como la *anomalía verdadera* y para determinarla en función del tiempo primero debemos ver la relación de esta con otro angulo conocido como *anomalía excéntrica* como sigue a continuación.

Sea una elipse de semieje mayor a inscrita en una circunferencia de radio a, (Figura 3.1):

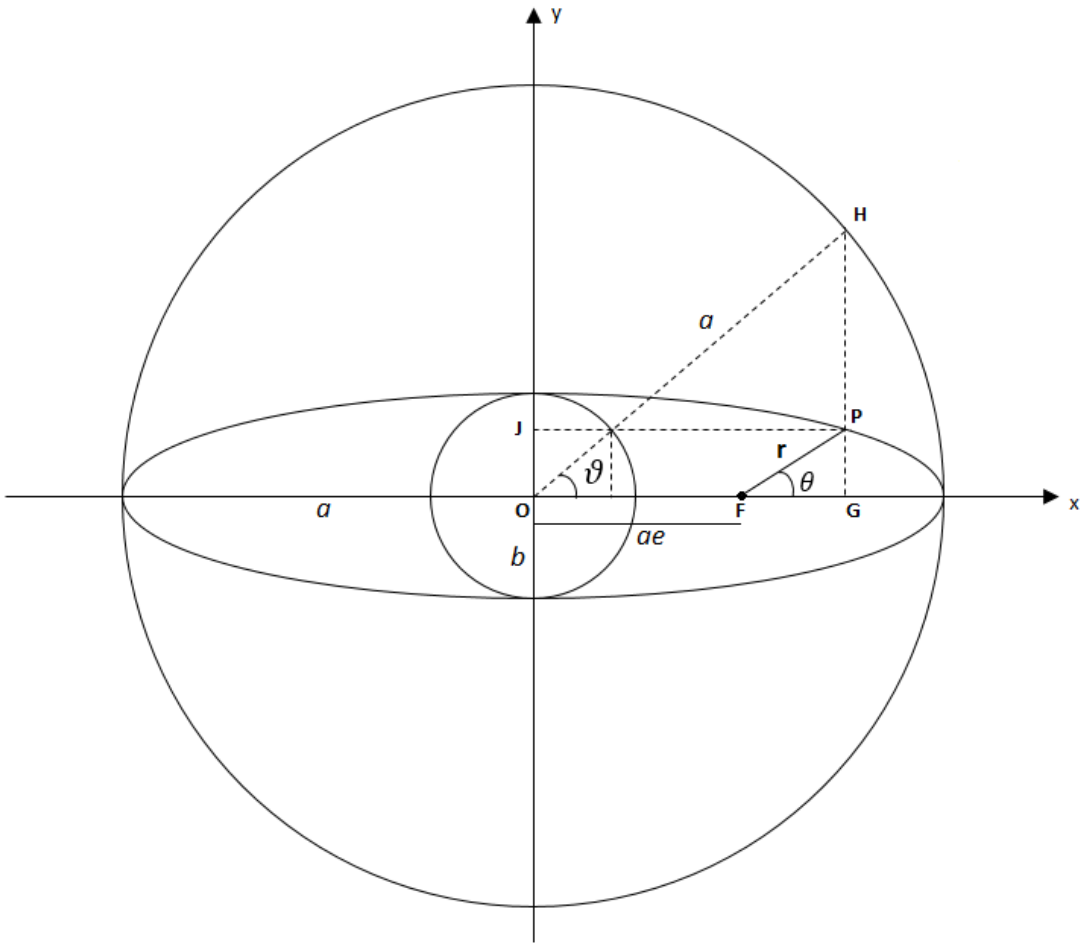

Figura 3.1: Relación geométrica entre las anomalías.

La anomalía excéntrica es el ángulo formado por el triangulo OGH. La distancia $\overline{FG}$ es igual a $r\cos\theta$, la distancia $\overline{PG} = \overline{JO} = r\sin\theta$. entonces tenemos en relación con el angulo ϑ:

$$\overline{FG} = a\cos\vartheta - ae, \qquad \overline{OJ} = b\sin\vartheta,$$

ahora en relación con r tenemos:

$$\overline{FG}^2 + \overline{OJ}^2 = (r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 = (a\cos\vartheta - ae)^2 + (b\sin\vartheta)^2,$$

reemplazando b de (2.1):

$$r^2 = a^2\cos^2\vartheta - 2a^2e\cos\vartheta + a^2e^2 + a^2(1-e^2)\sin^2\vartheta,$$

expresando el seno cuadrado en términos de coseno cuadrado:

$$r^2 = a^2\cos^2\vartheta - 2a^2e\cos e + a^2e^2 + a^2(1-e^2)(1-\cos^2\vartheta),$$

$$r^2 = a^2\cos^2\vartheta - 2a^2e\cos e + a^2e^2 + (a^2 - a^2e^2)(1-\cos^2\vartheta),$$
$$r^2 = a^2\cos^2\vartheta - 2a^2e\cos e + a^2e^2 + a^2 - a^2\cos^2\vartheta - a^2e^2 + a^2e^2\cos^2\vartheta,$$
$$r^2 = a^2 - 2a^2e\cos e + a^2e^2\cos^2\vartheta = (a - ae\cos\vartheta)^2,$$
$$r = (a - ae\cos\vartheta). \tag{3.1}$$

Con esta ecuación se ha determinado r en función de ϑ, ahora busquemos entonces una ecuación que nos relacione ϑ con θ. Para esto retomemos la ecuación (2.4), al reorganizarla de la siguiente manera:

$$r(1 + e\cos\theta) = a(1-e^2),$$
$$r + re\cos\theta = a(1-e^2),$$
$$re\cos\theta = a(1-e^2) - r, \tag{3.2}$$

si sumamos er a ambos lados:

$$re\cos\theta + er = a(1-e^2) - r + er,$$

$$er(1+\cos\theta) = a(1-e)(1+e) - r + er,$$
$$er(1+\cos\theta) = a(1-e)(1+e) - r(1-e),$$
$$er(1+\cos\theta) = (1-e)\left[a(1+e) - r\right],$$

si ahora reemplazamos el r de el miembro derecho de la ecuación por nuestro r hallado en (3.1):

$$er(1+\cos\theta) = (1-e)\left[a(1+e) - a(1-e\cos\vartheta)\right],$$
$$er(1+\cos\theta) = (1-e)\left[a + ae - a + ae\cos\vartheta\right],$$
$$er(1+\cos\theta) = a + ae - a + ae\cos\vartheta - ae - ae^2 + ae - ae^2\cos\vartheta$$
$$r(1+\cos\theta) = a - ae + a\cos\vartheta - ae\cos\vartheta,$$
$$r(1+\cos\theta) = a(1-e) + a\cos\vartheta(1-e),$$
$$r(1+\cos\theta) = a(1-e)(1+\cos\vartheta). \tag{3.3}$$

Si en ves de sumar er a ambos lados en (3.2) lo restamos y simplificamos tenemos:

$$re\cos\theta + er = a(1-e^2) - r + er,$$

$$r(1-\cos\theta) = a(1+e)(1-\cos\vartheta). \tag{3.4}$$

Dividiendo (3.4) entre (3.3):

$$\frac{r(1-\cos\theta)}{r(1+\cos\theta)} = \frac{a(1+e)(1-\cos\vartheta)}{a(1-e)(1+\cos\vartheta)},$$

$$\frac{(1-\cos\theta)}{(1+\cos\theta)} = \frac{(1+e)(1-\cos\vartheta)}{(1-e)(1+\cos\vartheta)},$$

sacando raíces:

$$\frac{\sqrt{(1-\cos\theta)}}{\sqrt{(1+\cos\theta)}} = \frac{\sqrt{(1+e)}\sqrt{(1-\cos\vartheta)}}{\sqrt{(1-e)}\sqrt{(1+\cos\vartheta)}},$$

aplicando la identidad de la tangente del angulo medio:

$$\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{\vartheta}{2}. \tag{3.5}$$

Esta ecuación permite calcular θ en función de ϑ. Si calculamos $\vartheta_{(t)}$ podemos pues obtener $\theta_{(t)}$. Se ha hecho esto debido a que no es sencillo encontrar una expresión que permita calcular θ en el tiempo, así que usamos un angulo que esté relacionado con θ, como lo es ϑ. Para calcular ϑ debemos hacer lo siguiente, debido a que el el radio vector posición necesita un tiempo T para barrer toda el área de una elipse, en este caso πab, y ya que la velocidad areolar es una constante del movimiento, entonces para un intervalo de tiempo Δt se habrá barrido una distancia $(\pi ab/T)\Delta t$. Este valor es igual a la integral de :

$$\frac{\pi ab}{T}dt = \int dA,$$

si reemplazamos dA de (2.43):

$$\frac{\pi ab}{T}dt = \frac{1}{2}\int_0^\theta r^2 d\theta. \tag{3.6}$$

Ahora relacionaremos esta ecuación con ϑ para poder calcularla en el tiempo como sigue. Si derivamos (3.5):

$$\frac{1}{2}\sec^2\theta d\theta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\sec^2\vartheta d\vartheta,$$

$$\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\frac{1}{\cos^2\vartheta}d\vartheta,$$

$$d\theta = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\vartheta}d\vartheta. \tag{3.7}$$

Ahora escribimos (3.3) como sigue:

$$r = a(1-e)\frac{1+\cos\vartheta}{1+\cos\theta},$$

usando la identidad del angulo medio del coseno:

$$r = a(1-e)\frac{2\cos^2(\vartheta/2)}{2\cos^2(\theta/2)},$$

$$r = a(1-e)\frac{\cos^2(\vartheta/2)}{\cos^2(\theta/2)}. \tag{3.8}$$

Entonces podemos escribir $r^2 d\theta$ en función de ϑ reemplazando un r de (3.1), el otro usando (3.8) y $d\theta$ de (3.7) como sigue:

$$r^2 d\theta = [a(1-e\cos\vartheta)]\left[a(1-e)\frac{\cos^2(\vartheta/2)}{\cos^2(\theta/2)}\right]\left[\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\frac{\cos^2(\theta/2)}{\cos^2(\vartheta/2)}d\vartheta\right],$$

$$r^2 d\theta = [a(1 - e\cos\vartheta)]\, a(1-e)\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}d\vartheta,$$

$$r^2 d\theta = [a(1 - e\cos\vartheta)]\, a(1-e)\sqrt{\frac{(1-e^2)}{(1-e)^2}}d\vartheta,$$

$$r^2 d\theta = [a(1 - e\cos\vartheta)]\, a\sqrt{1-e^2}d\vartheta,$$

$$r^2 d\theta = a^2\sqrt{1-e^2}(1 - e\cos\vartheta)d\vartheta. \tag{3.9}$$

Si reemplazamos (3.9) en (3.6) tenemos:

$$\frac{\pi ab}{T}dt = \frac{1}{2}\int_0^{\vartheta} a^2\sqrt{1-e^2}(1 - e\cos\vartheta)d\vartheta = \frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{2}\int_0^{\vartheta}(1 - e\cos\vartheta)d\vartheta,$$

integrando y reemplazando el valor de b obtenido en (2.1):

$$\int \frac{\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{T}dt = \frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{2}\int_0^{\vartheta}(1 - e\cos\vartheta)d\vartheta,$$

$$\frac{2\pi}{T}(t - t_0) = \vartheta - \sin\vartheta.$$

$2\pi/T$ es el movimiento medio n, y la expresión $n(t-t_0)$ es conocida como la *anomalía media* la cual es el angulo que mide la desviación angular de un cuerpo en una órbita circular con un periodo T. La *anomalía media* es una variable lineal en el tiempo y la denotaremos con la letra M resultando la siguiente ecuación, conocida como la *ecuación de Kepler*:

$$M = \vartheta - e\sin\vartheta, \qquad M = n(t - t_0). \tag{3.10}$$

Solución de la ecuación de Kepler.

La expresión (3.10) es una ecuación trascendente la cual no posee una solución analítica, esto quiere decir que no podemos obtener el valor de ϑ con algún tipo de arreglo algebraico (no podemos despejarlo). Sin embargo esto no quiere decir que no sea susceptible de ser resuelta con una alta aproximación. Para ello vamos aplicar un método numérico el cual es muy sencillo como se vera. Escribimos la ecuación (3.10) de la siguiente manera:

$$\vartheta = M + esen\vartheta,$$

debido a que la excentricidad de las órbitas en el caso de nuestro sistema solar es razonablemente pequeña, podemos despreciar el termino $esen\vartheta$ y obtener una primera aproximación que denominaremos ϑ_0 así:

$$\vartheta_0 = M,$$

una mejor aproximación sería el termino:

$$\vartheta_1 = M + e\sin\vartheta_0,$$

y así sucesivamente y en general de la forma:

$$\vartheta_i = M + e \sin \vartheta_{i-1},$$

seguimos iterando las veces necesarias hasta que la diferencia entre ϑ_i y ϑ_{i-1} sea menor que una cantidad prefijada por nosotros que nos dará cuenta del error en el calculo. Al realizar esta iteración varias veces veremos como ϑ_n converge hacia un valor en especifico, dependiendo del valor de la excentricidad esta convergencia sera rápida o lenta, por esto el valor real de la *anomalía excéntrica* sera aquel que cumpla la condición $\vartheta_n - \vartheta_{n-1} = 0$.

3.1. Los elementos orbitales.

El análisis previo es adecuado y suficiente cuando solo estamos trabajando con un solo planeta orbitando alrededor de su estrella. Sin embargo, este resulta inapropiado cuando estamos trabajando con más de un planeta y cada uno de estos posee diferentes órbitas cuyos planos y parámetros no coinciden entres sí. Para especificar completamente como es la órbita de un planeta con respecto a otro son necesarias seis constantes conocidas como los *elementos orbitales*. Hemos visto como calcular $\overrightarrow{r}$ y $\overrightarrow{v}$ y como conociendo estas dos variables para un tiempo en particular, podremos calcularlos para cualquier tiempo en el futuro, pero estos vectores no nos dicen mucho acerca de la órbita de un planeta, por ejemplo no nos dicen que tipo de cónica es. Es por esto que ahora introduciremos seis constantes que nos darán la información necesaria para especificar claramente el tipo y la forma de una órbita.

Como se había mencionado antes, el hecho de que $\overrightarrow{h}$ sea constante confina el movimiento a un plano, con lo que $\overrightarrow{r}$ y $\overrightarrow{v}$ se encuentran sobre ese mismo plano normal a $\overrightarrow{h}$. Ahora definiremos un plano de referencia fijo también en el espacio, este plano es el plano de la eclíptica, luego definimos ahora nuestra primera constante llamada *inclinación* la cual denotaremos con la letra i y es el angulo entre los planos. (ver Figura 3.2).

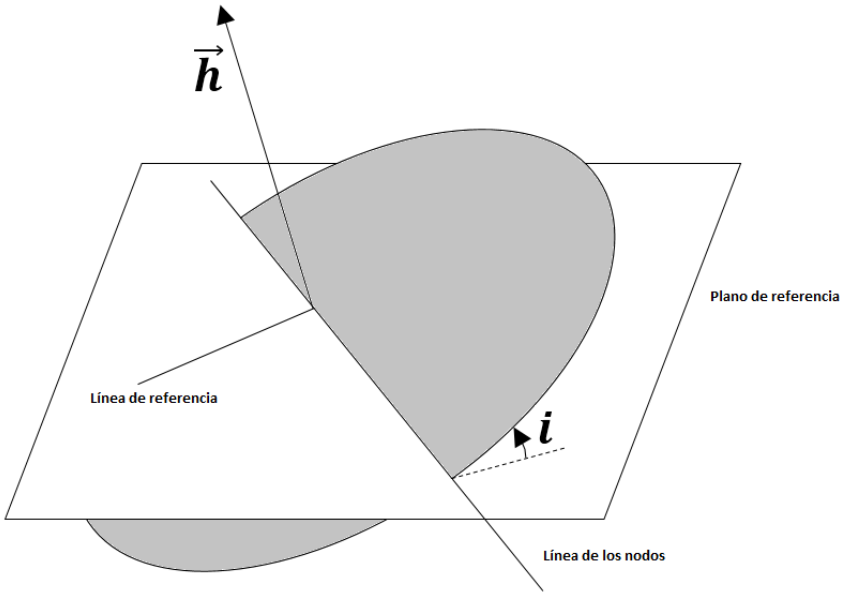

Figura 3.2: Plano de referencia y plano de la órbita.

La intersección de los dos planos es una línea conocida como la línea de los nodos y aquel punto donde el planeta cruza el plano de referencia de abajo hacia arriba lo llamaremos nodo ascendente, este nos ayudará a determinar el segundo elemento orbital. Nuestro plano de referencia esta orientado con el eje x apuntando en una dirección fija conocida como el *punto de aries* y es a parir de este eje x que se mide un angulo que va hasta la línea de los nodos , éste angulo es Ω y es conocido como la *longitud del nodo ascendente*, nuestro segundo elemento orbital.

Para describir la orientación de la órbita en el plano es suficiente con localizar la línea de las ápsides y consecuentemente la posición del periápside (distancia mas cerca al foco), esta puede ser medida desde la linea de los nodos con un angulo ω llamado el *argumento del periápside*.[10]

Para describir la forma y el tamaño necesitaremos conocer la *excentricidad* y el *semieje mayor* que serán nuestros otras dos constantes. Finalmente, la posición del planeta puede ser calculada por la *anomalía verdadera* (θ), medida en una época desde su paso por el periápside. En resumen, los elementos orbitales son los siguientes:

* i, *inclinación.*
* Ω, *longitud del nodo ascendente.*
* ω, *argumento del periápside.*
* a, *semieje mayor.*
* e, excentricidad.
* t_0, *tiempo de paso por el periápside.*

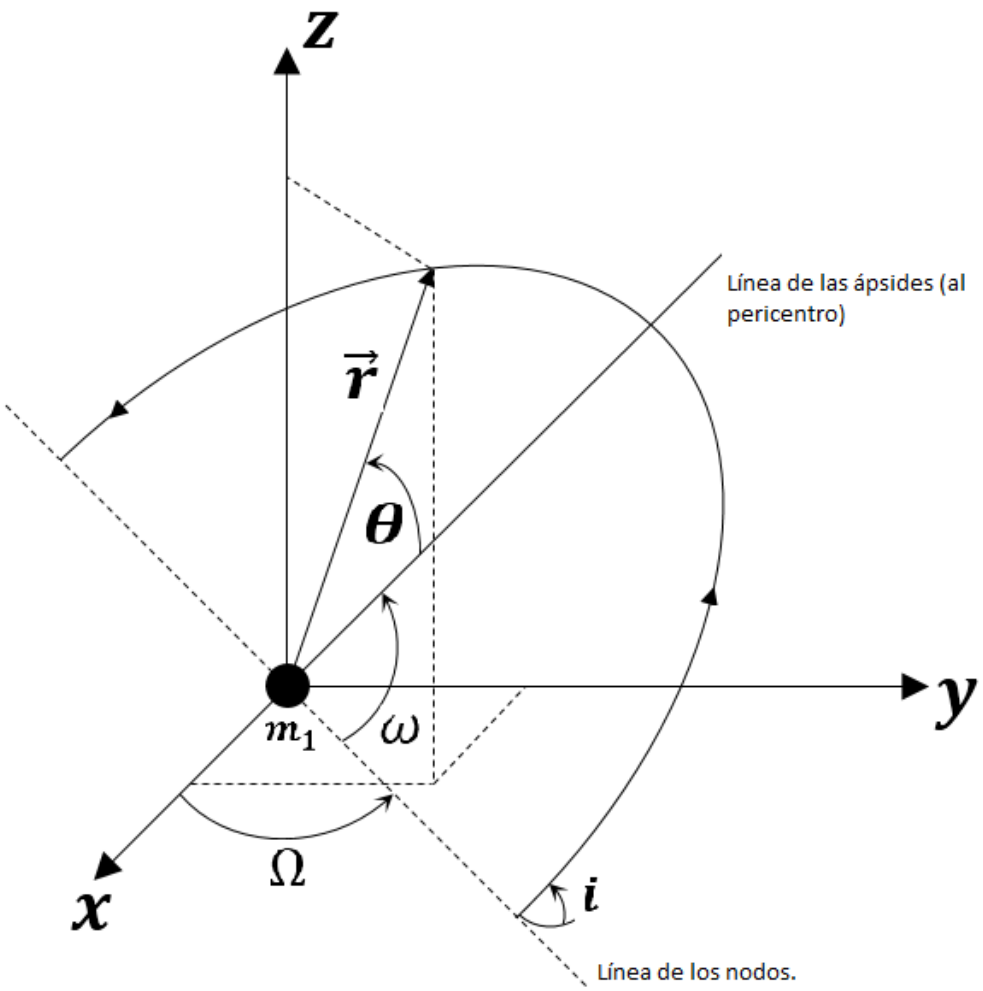

Figura 3.3: Elementos orbitales.

3.1.1. Determinación de $\vec{r}$ y $\vec{v}$ a partir de los elementos orbitales.

Será de utilidad para el programa a realizar poder averiguar las componentes de los vectores posición y velocidad conocidos los elementos orbitales de un planeta en un instante dado. Para esto vamos a definir los sistemas XYZ y xyz los cuales comparten el mismo origen y en los cuales sus ejes coinciden inicialmente. Lo que haremos será una transformación del sistema xyz (plano del cuerpo que orbita) al sistema XYZ (plano del cuerpo que es orbitado) mediante una serie de tres rotaciones. Primero una rotación mediante un ángulo Ω alrededor del eje z, luego una rotación un angulo i alrededor de nuestro nuevo eje x, y por ultimo una rotación mediante un angulo ω alrededor de el nuevo eje z.. Representando estas rotaciones matricialmente tenemos:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\Omega & -\sin\Omega & 0 \\ \sin\Omega & \cos\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega & 0 \\ \sin\omega & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Multiplicando las matrices y realizando las operaciones necesarias llegamos a:

$$X = r[\cos\Omega\cos(\omega+\theta) - \sin\Omega\sin(\omega+\theta)\cos i], \tag{3.11}$$

$$Y = r[\sin\Omega\cos(\omega+\theta) + \cos\Omega\sin(\omega+\theta)\cos i], \tag{3.12}$$

$$Z = r[\sin(\omega+\theta)\sin i]. \tag{3.13}$$

Podemos calcular $\vec{v}$ derivando las expresiones anteriores:

$$\dot{\vec{r}}_X = -\frac{G(m_1+m_2)}{h}[\cos\Omega(\sin\theta + e\sin\omega) + \sin\Omega(\cos\theta + e\cos\omega)\cos i], \tag{3.14}$$

$$\dot{\vec{r}}_Y = \frac{G(m_1+m_2)}{h}[\sin\Omega(\sin\theta + e\sin\omega) - \cos\Omega(\cos\theta + e\cos\omega)\cos i], \tag{3.15}$$

$$\dot{\vec{r}}_Z = \frac{G(m_1+m_2)}{h}(\cos\theta + e\cos\omega)\sin i. \tag{3.16}$$

3.1.2. Determinación de de los elementos orbitales a partir de $\vec{r}$ y $\vec{v}$.

Los elementos orbitales contienen información sobre el cuerpo que orbita de la misma manera que lo hacen los vectores $\vec{r}$ y $\vec{v}$, luego entonces debe ser posible una transformación entre estas constantes y la posición y velocidad para un tiempo determinado. Ahora asumiremos que lo que conocemos es $\vec{r}$ y $\vec{v}$ y lo que queremos averiguar son $a, e, \Omega, i, \omega, t_0$.

El semieje mayor puede ser determinado retomando la ecuación (2.41), si reemplazamos el valor de k en esta y dividimos por la cantidad m_2 a ambos lados, obtenemos ε, que es conocida como la *energía específica*, o energía por unidad de masa como sigue:

$$\varepsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{Gm_1}{r}. \tag{3.17}$$

La velocidad en cualquier punto de la trayectoria puede ser obtenida mediante la ecuación anterior. Para el caso concreto de una elipse en la cual r es finito para cualquier punto y puesto que la energía permanece constante tenemos que cuando $e \to 1, \quad v_a \to 0, \quad r_a \to 2a$. donde v_a y r_a son la velocidad y la posición en el punto mas alejado de la trayectoria (*afelio*). Si reemplazamos estos valores en (3.17) tenemos entonces que:

$$\varepsilon = -\frac{Gm_1}{2a}, \tag{3.18}$$

de donde podemos concluir que las órbitas elípticas tienen una energía negativa y que ademas ésta es determinada por su eje mayor. Si reemplazamos la ecuación (3.18) en la (3.17) obtendremos la velocidad para cualquier punto de un cuerpo que se mueva dentro de una trayectoria elíptica:

$$\begin{aligned} -\frac{Gm_1}{2a} &= \frac{v^2}{2} - \frac{Gm_1}{r}, \\ Gm_1(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}) &= \frac{v^2}{2}, \\ v &= \sqrt{Gm_1\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}, \end{aligned} \tag{3.19}$$

y es a partir de esta que podremos determinar cual sería el *semieje menor* despejando a como sigue

$$\begin{aligned} \frac{v^2}{Gm_1} &= \frac{2}{r} - \frac{1}{a}, \\ \frac{1}{a} &= \frac{1}{r}\left(2 - \frac{rv^2}{Gm_1}\right), \\ a &= \frac{r}{2 - \frac{rv^2}{Gm_1}}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Para calcular la excentricidad e definimos el vector $\vec{e}$, el cual es un vector constante que apunta hacia el periápside desde el centro de masa, en este caso m_1, su magnitud será igual a la excentricidad de la órbita.

$$\begin{aligned} \vec{e} &= \frac{\vec{v} \times \vec{h}}{Gm_1} - \frac{\vec{r}}{r}, \\ \vec{e} &= \left(\frac{v^2}{Gm_1} - \frac{1}{r}\right)\vec{r} - \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{Gm_1}\vec{v}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Para determinar el ángulo i lo hacemos vía el producto punto, pues este relaciona el ángulo i con el vector $\hat{k}$ unitario, definido en el plano de referencia, y con el vector $\vec{h}$ que se encuentra dentro del plano de la órbita (ver figura 3.4).

$$\vec{h} \cdot \hat{k} = h \cos i,$$

$$\cos i = \frac{h_z}{h},$$

$$i = \arccos\left(\frac{h_z}{h}\right). \tag{3.22}$$

Ahora definimos un vector $\vec{n}$ como sigue:

$$\vec{n} = \hat{k} \times \frac{\vec{h}}{h},$$

donde éste es un vector que se encuentra en ambos planos y además a lo largo de la linea de nodos apuntando hacia el nodo ascendente (ver figura 3.4). Análogamente la relación de este vector con el vector $\hat{i}$ en el plano de referencia me permitirá conocer el ángulo Ω:

$$\cos \Omega = \frac{\vec{n} \cdot \hat{i}}{n} = \frac{n_x}{n},$$

$$\Omega = \arccos\left(\frac{n_x}{n}\right). \tag{3.23}$$

Se debe tener en cuenta que $0 \leq \Omega \leq \pi$ si $\vec{n} \cdot \hat{j} = n_y \geq 0$. Si $n_y < 0$ entonces $\pi < \Omega < 2\pi$.

De igual forma obtenemos el ángulo ω de la relación entre los vectores $\vec{n}$ y $\vec{e}$ como sigue:

$$\cos \omega = \frac{\vec{n} \cdot \vec{e}}{ne},$$

$$\omega = \arccos\left(\frac{\vec{n} \cdot \vec{e}}{ne}\right). \tag{3.24}$$

Aquí de forma similar debemos tener cuidado ya que $0 \leq \omega \leq \pi$ si $\vec{e} \cdot \hat{k} = e_z \geq 0$, pero si $e_z < 0$ entonces $\pi < \omega < 2\pi$.

Ya para calcular nuestro último elemento orbital t_0 primero debemos calcular la *anomalía verdadera* θ de la siguiente relación:

$$\cos \theta = \frac{\vec{e} \cdot \vec{r}}{er},$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{e} \cdot \vec{r}}{er}\right), \tag{3.25}$$

donde $0 \leq \theta \leq \pi$ si $\vec{r} \cdot \vec{v} \geq 0$, pero si $\vec{r} \cdot \vec{v} < 0$, entonces $\pi < \theta < 2\pi$. Una vez calculado θ obtenemos la *anomalía excéntrica* ϑ de la ecuación (3.5), y una vez calculada esta pasamos

a calcular la *anomalía media* M con ayuda de la primera de las ecuaciones (3.10). Si ahora reemplazamos este valor de M en la ecuación $M = n(t-t_0)$. donde n es el movimiento medio para el planeta en cuestión, podremos saber el valor de t_0. Cabe aclarar que $(t - t_0)$ es el el tiempo transcurrido desde la última vez que el planeta pasó por su periápside donde t es el tiempo actual y t_0 es el tiempo para el cual el planeta se encontraba en su periápside y por tanto el valor de θ y ϑ era igual a cero.[10]

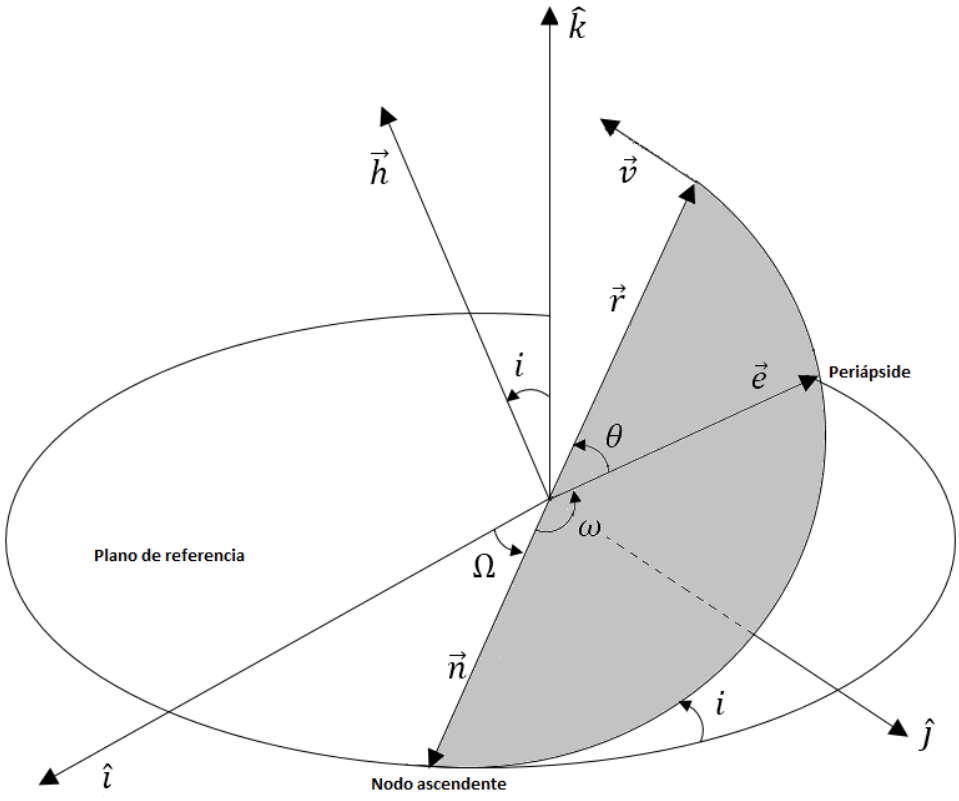

Figura 3.4: Relación entre los elementos orbitales y los vectores $\vec{e}$ y $\vec{n}$.

Capítulo 4

Diseño de la simulación

Para el desarrollo de la simulación se usó el entorno de programación VPython, ahí se diseño una simulación de nuestro sistema solar con las órbitas del planeta Júpiter y el asteroide troyano Hektor. Como es frecuente en muchos software de programación, las lineas iniciales de código son las que llaman a las librerías que se usarán dentro del programa a realizar. Primeramente se definen los ejes coordenados *x, y, z* los cuales serán los que nos definirán el plano de la *ecliptica*. VPython tiene su propio orden interno para asignar las variables *x, y, z* en el espacio de tres dimensiones, es por eso que hacemos un cambio de variables con el propósito obtener una mejor visualización de la simulación. Para esto lo único que tendremos que hacer es escribir todo lo que tenga que ver con la variable x en la variable z, lo de la variable$y$ en la variable x y lo de la variable z en la variable y.

Luego lo siguiente que haremos será definir nuestras constantes. Los elementos orbitales junto con la constante de Cavendish los escribimos en unidades astronómicas con el fin de optimizar los cálculos y por ende la visualización. Aquí nuestra unidad de longitud sera la distancia Tierra-Sol (149 597 870 700 m), la unidad de tiempo será el día terrestre (86400 s), y la unidad de masa será la masa del sol ($1{,}989 \times 10^{30}$kg). Por comodidad también trabajaremos los ángulos en grados.

Usaremos las letras *i, o* y *w* para definir los elementos orbitales *inclinación*, *Longitud del nodo ascendente*, y *argumento del periápside* respectivamente. Para el *semieje mayor*, la *excentricidad*, el *semieje menor*, y el *movimiento medio* usaremos las letras *a, e, b* y *n*.

Programafinal.py - C:\Users\CRISTIAN SORIANO H\Desktop\Programafinal.py

File Edit Format Run Options Windows Help

```
from visual import*
import math

eje1= arrow(pos=(0,0,0),axis=(5,0,0), shaftwidth=0.005)
eje2= arrow(pos=(0,0,0),axis=(0,5,0), shaftwidth=0.005)
eje3= arrow(pos=(0,0,0),axis=(0,0,5), shaftwidth=0.005)

tip1=label(text="Y",space=0.2, pos=(5,0,0), height=10, opacity=0.5)
tip1=label(text="Z",space=0.2, pos=(0,5,0), height=10, opacity=0.5)
tip1=label(text="X",space=0.2, pos=(0,0,5), height=10, opacity=0.5)

G= 2.951e-4

i=1.30230
o=-115.492
w=275.066

a=5.204267
e=0.04839266
b=a*(1-e**2)**0.5
n=0.0830525
```

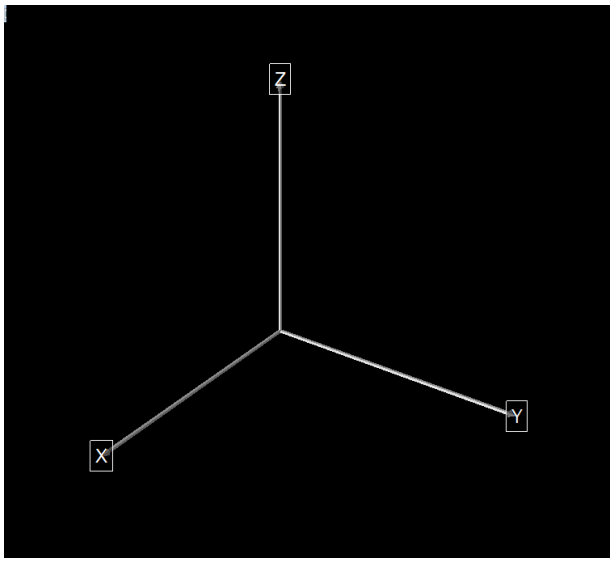

Figura 4.1: Diseño de los ejes y declaración de las constantes.

Ahora lo que haremos será definir las condiciones iniciales para cada cuerpo y seguidamente crear los objetos que los representan, que nuestro caso en particular solo son tres (*Sol, Júpiter* y *Asteroide*). Por motivos de mejorar la visualización los radios de los objetos no están a escala, el origen de nuestro sistema de coordenadas es el Sol y se agregó un efecto de rotación al planeta Júpiter para generar mayor realismo.

Para simular la trayectoria del planeta Júpiter usamos un método el cual calcula la posición del objeto en función de la *anomalía verdadera* la cual a su vez es función del tiempo y haciendo uso de los elementos orbitales. Las condiciones iniciales para Júpiter quedan entonces definidas por sus elementos orbitales y cuando hacemos un tiempo igual a cero, su trayectoria evoluciona conforme lo hace el tiempo. Mes el valor de la *anomalía media* que ira cambiando en el tiempo, *E0* y *E1* son variables que como se explicará más adelante nos sirven para realizar un método iterativo para calcular la *anomalía excéntrica*, *theta* es la *anomalía verdadera*, r es la magnitud del vector $\vec{r}$ que va desde el sol hasta el planeta Júpiter y x, y, y z son las componentes rectangulares del vector $\vec{r}$.

Para simular la trayectoria del asteroide se hizo uso de un método numérico y la interacción gravitatoria entre éste y los demás cuerpos. Para la órbita del asteroide solo se necesita conocer la posición y la velocidad en un punto cualesquiera de la trayectoria y luego el método se encarga de calcular los puntos de la trayectoria siguientes. El punto que se usa como punto de partida lo podemos calcular con un programa que se diseño previamente y se muestra al final.

Programafinal.py - C:\Users\CRISTIAN SORIANO H\Desktop\Programafinal.py

File Edit Format Run Options Windows Help

```
M = n*0
E0 = M
E1 = M + ((180/pi)*e*sin(E0*pi/180))

teta = 2*atan((((1+e)/(1-e))**0.5)*tan(E1/2*3.1419/180))*180/pi
r = a*(1-e*cos(E1*pi/180))

x=r*(sin(o*pi/180)*cos((teta*pi/180)+(w*pi/180))+cos(i*pi/180)*sin((teta*pi/180)+(w*pi/180))*cos(o*pi/180))
y=r*(sin((teta*pi/180)+(w*pi/180))*sin(i*pi/180))
z=r*(cos((teta*pi/180)+(w*pi/180))*cos(o*pi/180)-cos(i*pi/180)*sin(o*pi/180)*sin((teta*pi/180)+(w*pi/180)))

Sun = sphere(pos=(0,0,0), radius=0.9, color=color.yellow, material=materials.emissive,
               make_trail=True, interval=10)
Sun.mass=1

Jupiter = sphere(pos=(x,y,z), radius=0.25, color=color.orange, material=materials.marble ,
               make_trail=True, interval=10)
Jupiter.mass= 9.54367273e-4


Asteroide = sphere(pos=(1.34321834667,-0.0585273442016,-4.94228678176), radius=0.05, color=color.red, material=materials.wood,
            make_trail=True, interval=10)
Asteroide.mass = 1.004e-10
Asteroide.v = vector(-0.00706088655405, -0.00239725667064,-0.0018906242615)
```

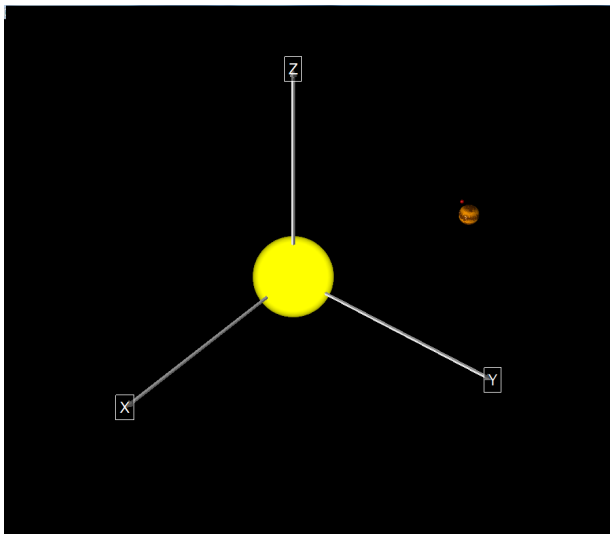

Figura 4.2: Creación de los objetos y condiciones y iniciales.

Ahora lo que hacemos es variar el tiempo en intervalos de un día para así simular la órbita del planeta Júpiter, esto se logra mediante un *loop*, fijamos un rango que va desde 0 hasta 1000000 días para de esta manera tener una cantidad razonable de datos que representen el movimiento y luego a cada tiempo t se le asigna una posición y una velocidad determinada. Antes de asignar esta posición, se debe agregar un paso intermedio en el cual se introduce un código que permita mediante sucesivas iteraciones calcular el valor de la *anomalía excéntrica*, dicho código no es mas que el método numérico para la solución de la ecuación de Kepler que se vio en el capitulo anterior (ecuación (3.10)).

Este proceso se repetirá hasta que haya terminado el ciclo, es decir, hasta que haya calculado la posición del planeta para el millón de días. En resumen, Las ecuaciones para hallar las componentes del vector posición del planeta, no son mas que las ecuaciones (3.11), (3.12) y (3.13) las cuales dependen de los elementos orbitales y de la *anomalía verdadera* y r, los cuales a su vez son función de la *anomalía excéntrica*, la cual a su vez es función de la *anomalía media*, la cual a su vez es función del tiempo.

Programafinal.py - C:\Users\CRISTIAN SORIANO H\Desktop\Programafinal.py

File Edit Format Run Options Windows Help

```
while True:


    for t in range (0,1000000):

        rate(200)


        M = n*t
        E0 = M
        E1 = M + ((180/pi)*e*sin(E0*pi/180))

        while abs ((E1-E0))>0.000000000001:

            E0=E1;
            E1=M+((180/pi)*e*sin(E0*pi/180));

        teta = 2*atan((((1+e)/(1-e))**0.5)*tan(E1/2*pi/180))*180/pi
        r = a*(1-e*cos(E1*pi/180))

        x=r*(sin(o*pi/180)*cos((teta*pi/180)+(w*pi/180))+cos(i*pi/180)*sin((teta*pi/180)+(w*pi/180))*cos(o*pi/180))
        y=r*(sin((teta*pi/180)+(w*pi/180))*sin(i*pi/180))
        z=r*(cos((teta*pi/180)+(w*pi/180))*cos(o*pi/180)-cos(i*pi/180)*sin(o*pi/180)*sin((teta*pi/180)+(w*pi/180)))

        Jupiter.pos = vector(x,y,z)
        Jupiter.rotate(axis=(0,1,0), angle=pi/400)
```

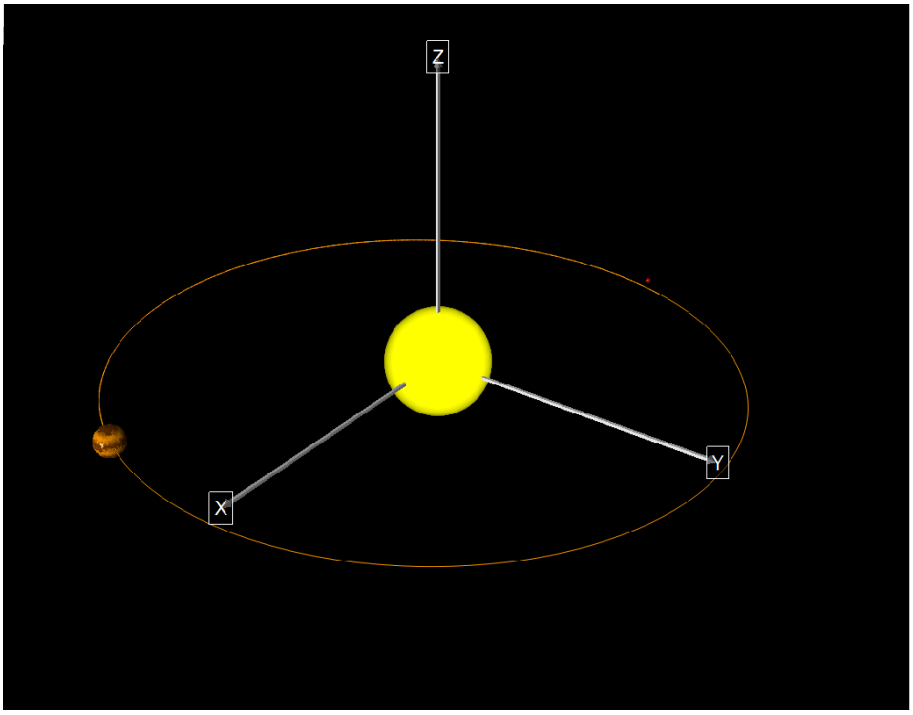

Figura 4.3: Simulacion de la órbita de Júpiter con los elementos orbitales.

Ahora pasaremos a simular la trayectoria del asteroide Hektor que como se había dicho antes , se hace con un método numérico conocido como el *método de verlet*. Otro concepto también importante que se debe tener en cuenta dentro de la simulación es el de la *esfera de influencia*, puesto que este parámetro será relevante a la hora de la interacción entre el planeta y el asteroide.

El método de verlet

El método consiste en escribir dos expansiones de Taylor para la posición de un cuerpo $r(t)$, una hacia adelante y la otra hacia atrás en el tiempo como sigue:

$$r(t+\delta t) = r(t) + v(t)(\delta t) + \frac{1}{2}a(t)(\delta t)^2,$$

$$r(t-\delta t) = r(t) - v(t)(\delta t) + \frac{1}{2}a(t)(\delta t)^2,$$

si sumamos las dos expresiones:

$$r(t+\delta t) + r(t-\delta t) = 2r(t) + a(t)(\delta t)^2,$$

$$r(t+\delta t) = 2r(t) - r(t-\delta t) + a(t)(\delta t)^2,$$

El algoritmo que usamos es una variación del anterior y es conocido como *velocidad de verlet*, en el cual las posiciones, velocidades y aceleraciones para un tiempo $t+\delta t$ se obtienen de las mismas cantidades en el tiempo t de la siguiente manera:

$$r(t+\delta t) = r(t) + v(t)(\delta t) + \frac{1}{2}a(t)(\delta t)^2, \tag{4.1}$$

$$v(t+\frac{1}{2}\delta t) = v(t) + \frac{1}{2}a(t)(\delta t),$$

$$a(t+\delta t) = -\frac{Gm_1}{r^3}r(t+\delta t), \tag{4.2}$$

$$v(t+\delta t) = v(t+\frac{1}{2}\delta t) + \frac{1}{2}a(t+\delta t)(\delta t),$$

$$v(t+\delta t) = v(t) + \frac{1}{2}a(t)(\delta t) + \frac{1}{2}a(t+\delta t)(\delta t),$$

$$v(t+\delta t) = v(t) + \frac{1}{2}(a(t) + a(t+\delta t))(\delta t). \tag{4.3}$$

Con este método se necesita conocer la posición y la velocidad del cuerpo en un instante y con esto bastará para calcular las demás posiciones y velocidades en el tiempo con un alto grado de fiabilidad.

La esfera de influencia.

Una esfera de influencia es en mecánica celeste la región alrededor de un cuerpo (Júpiter) donde la influencia gravitatoria predominante sobre un cuerpo en órbita (asteroide) es la de este cuerpo por encima de cualquier otro. Esto significa que para nuestro caso particular el planeta Júpiter tendrá un radio de influencia sobre cualquier objeto que circunde cerca de esta distancia. El calculo de esta distancia viene dado por la ecuación:

$$r_{inf} = a\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{2}{5}}. \tag{4.4}$$

De donde a es el semieje mayor del planeta que orbita al Sol, m es la masa del planeta y M es la masa del Sol. Si calculamos este valor para el planeta júpiter el resultado es $r_{inf} =$ 0.32285 UA. Esto quiere decir que cualquier asteroide u objeto de masa considerablemente pequeña que se encuentre a esta o una distancia menor de Júpiter, entonces su movimiento se verá influenciado predominantemente por el planeta Júpiter.

La trayectoria del asteroide tendrá entonces dos fases: una fase donde su movimiento se regirá única y exclusivamente por su interacción con el Sol, y otra fase en la cual si cumple la condición de estar dentro del radio de la esfera de influencia de Júpiter, entonces su movimiento quedará única y exclusivamente determinado por su interacción con éste.

La forma para programar esto se hizo por medio de un condicional en el cual si el asteroide se encuentra por fuera del radio de influencia de Júpiter, entonces se aplicará el método de verlet del sistema asteroide-Sol para simular su movimiento. Si esta condición no se cumple, y ahora el asteroide esta dentro del radio de influencia del planeta Júpiter, entonces su movimiento sera determinado por su interacción con Júpiter con el método de verlet pero esta vez aplicado al sistema Asteroide-Júpiter.

Definimos un paso δt =1 día para mantener la proporción con la simulación con la trayectoria del planeta Júpiter ademas de que este valor es considerablemente pequeño en relación con las otras magnitudes lo cual reduce bastante el error en el método. Si el asteroide entra en el radio de influencia de Júpiter entonces añadimos la instrucción de que el color de nuestro asteroide cambie para poder identificar que efectivamente entró en esta región.

Programafinal.py - C:\Users\CRISTIAN SORIANO H\Desktop\Trabajode grado\Programafinal.py

File Edit Format Run Options Windows Help

```
dt=1

if mag(Asteroide.pos-Jupiter.pos) > 0.32285:


    distance = Asteroide.pos - Sun.pos
    a1 = -G*Sun.mass*distance/mag(distance)**3
    Asteroide.pos += Asteroide.v*dt + 0.5*a1*dt*dt
    distance = Asteroide.pos - Sun.pos
    a2 = -G*Sun.mass*distance/mag(distance)**3
    Asteroide.v += 0.5*(a1 + a2)*dt




else :

    Asteroide.color = color.blue


    distance2 = Asteroide.pos - Jupiter.pos
    a12 = -G*Jupiter.mass*distance2/mag(distance2)**3
    Asteroide.pos += Asteroide.v*dt + 0.5*a12*dt*dt
    distance2 = Asteroide.pos - Jupiter.pos
    a22 = -G*Jupiter.mass*distance2/mag(distance2)**3
    Asteroide.v += 0.5*(a12 + a22)*dt
```

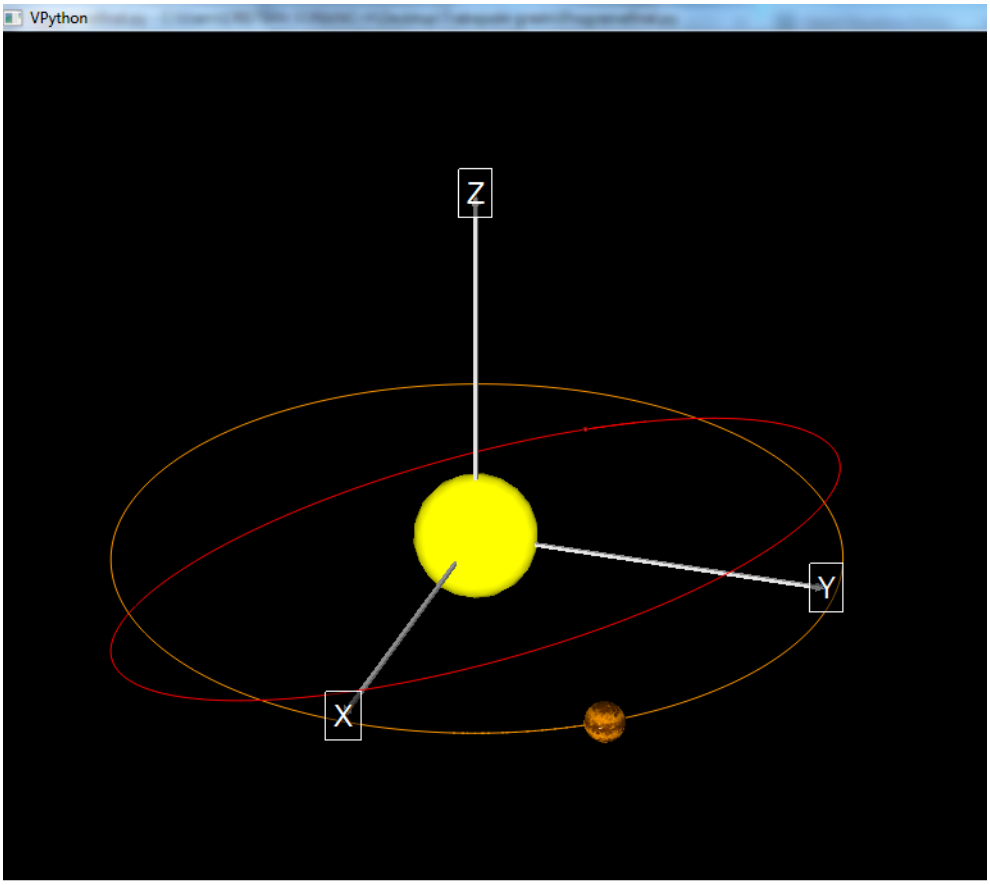

Figura 4.4: Simulación de la órbita de Júpiter y la del asteroide en simultaneo.

Hemos logrado simular la órbita del planeta Júpiter y un asteroide que órbita con cierta proximidad a la órbita del planeta. La idea ahora es hacer que de alguna manera los dos cuerpos se acerquen lo bastante como para que Júpiter afecte el movimiento del asteroide y así logre cambiar su trayectoria. Para esto se manipula alguno de los parámetros de uno de los dos cuerpos con el fin de que se acerque bastante al otro en algún punto de su trayectoria, en este caso, se modificó el *nodo ascendente* de Júpiter de tal manera que los dos cuerpos se encentren un tiempo después de que inician su movimiento. Para visualizar como cambia la trayectoria el asteroide se proporcionaran dos imágenes: una con la órbita que seguiría el asteroide normalmente cuando no se encuentra con el planeta, y la otra imagen, si hacemos que se encuentren.

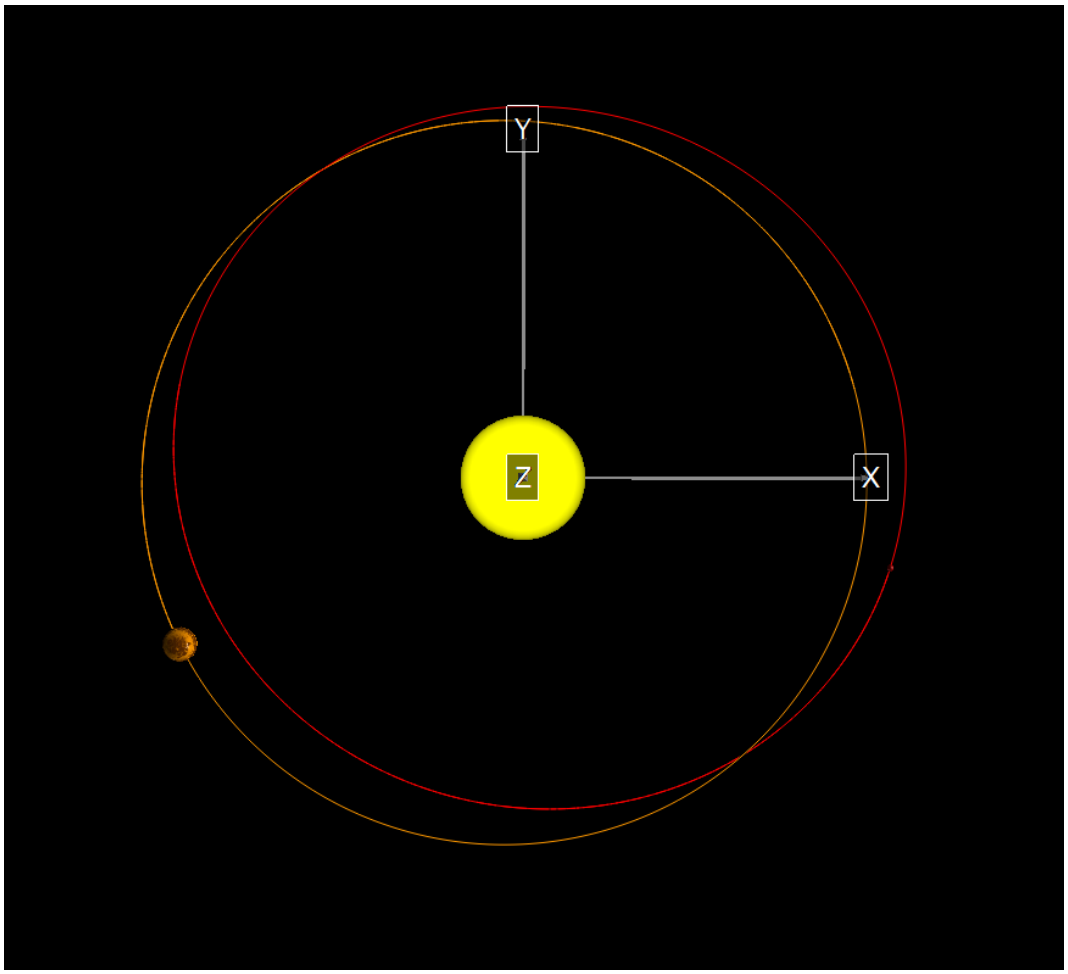

Figura 4.5: Trayectorias de los dos cuerpos sin que se encuentren (vista desde arriba).

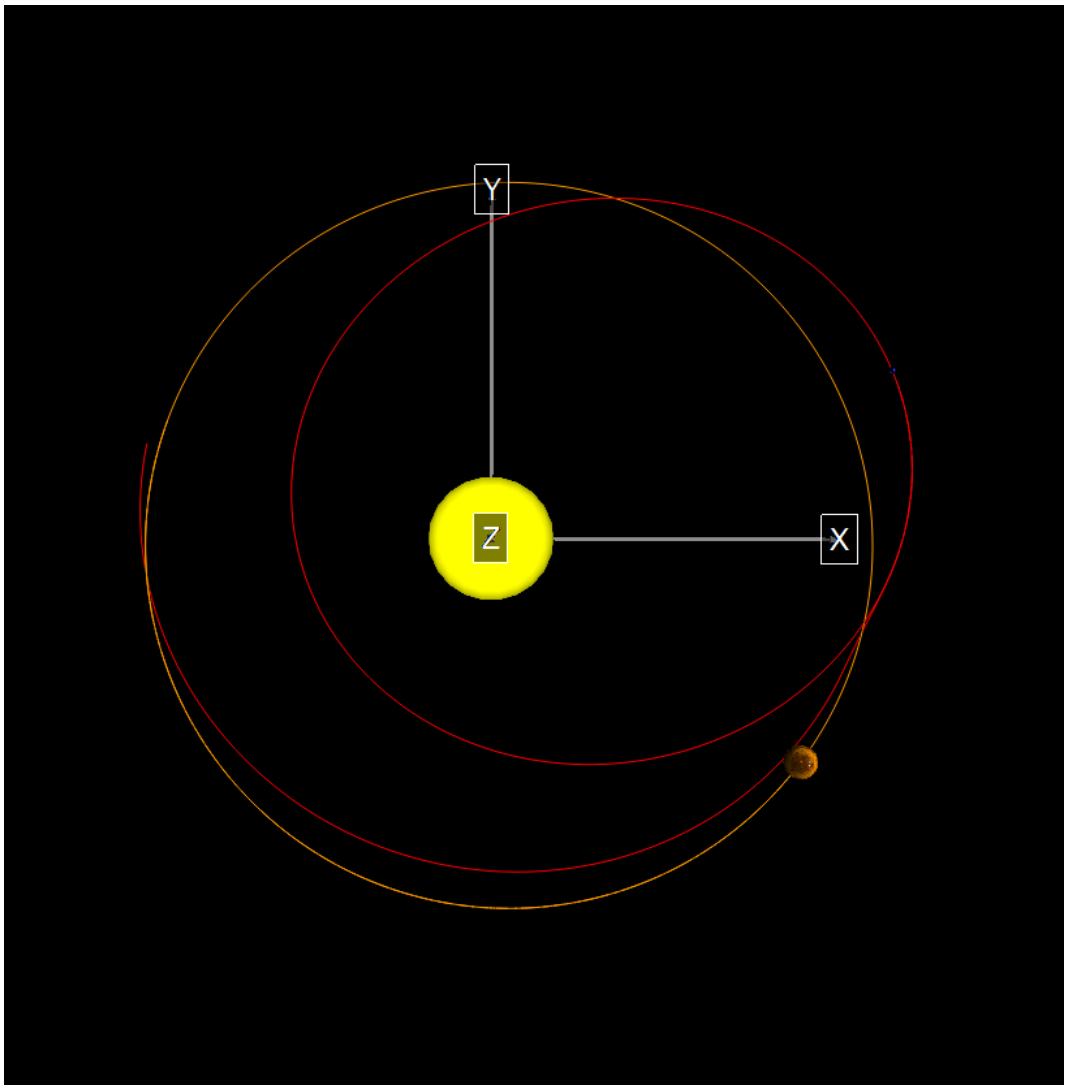

Figura 4.6: Trayectorias de los dos cuerpos después de que se encuentran (vista desde arriba).

En la Figura (4.6) vemos como se alteró la elipse que describía el asteroide, ahora quedando confinado en otro tipo de elipse cambiando por supuesto todos sus elementos orbitales.

Es posible conocer los elementos orbitales del asteroide correspondientes a su órbita inicial y final en su encuentro con Júpiter, para ello basta con conocer la posición y velocidad en un punto antes y después del encuentro con el planeta y emplear las ecuaciones (3.20) a (3.25) para obtenerlos. Añadimos estas ecuaciones al código en la parte en la cual el asteroide se encuentra dentro del radio de influencia y empleamos la función *print* para que nos imprima estos valores en una ventana aparte.

Programafinal.py - C:\Users\CRISTIAN SORIANO H\Desktop\Trabajode grado\Programafinal.py

File Edit Format Run Options Windows Help

```
else :

    Asteroide.color = color.blue


    distance2 = Asteroide.pos - Jupiter.pos
    a12 = -G*Jupiter.mass*distance2/mag(distance2)**3
    Asteroide.pos += Asteroide.v*dt + 0.5*a12*dt*dt
    distance2 = Asteroide.pos - Jupiter.pos
    a22 = -G*Jupiter.mass*distance2/mag(distance2)**3
    Asteroide.v += 0.5*(a12 + a22)*dt


    semiejemayor= (mag(Asteroide.pos))/(2-(mag(Asteroide.pos)*mag(Asteroide.v)**2/G*Sun.mass))


    excentricidad=(((mag(Asteroide.v)**2/G*Sun.mass)-1/mag(Asteroide.pos))*Asteroide.pos)-((Asteroide.pos.dot(Asteroide.v)/G*Sun.mass)*Asteroide.v)

    momangular=cross(Asteroide.pos,Asteroide.v)
    inclinacion=acos(momangular.y/mag(momangular))*180/pi


    kunitario=vector(0,1,0)
    vecnodal=cross(kunitario,momangular/mag(momangular))
    if vecnodal.x >= 0:
         nodoascendente=acos(vecnodal.z/mag(vecnodal))*180/pi
    else:
         nodoascendente=360-acos(vecnodal.z/mag(vecnodal))*180/pi


    if excentricidad.y >= 0:
        argumento=acos((vecnodal.dot(excentricidad)/mag(vecnodal)*mag(excentricidad)))*180/pi
    else:
         argumento=360-acos((vecnodal.dot(excentricidad)/mag(vecnodal)*mag(excentricidad)))*180/pi


    print ("a="),semiejemayor, ("e="),mag(excentricidad), ("i="),inclinacion, ("o="),nodoascendente, ("w="),argumento
```

Ln: 137 Col: 12

```
1  a= 5.26318668532 e= 0.0275812493694 i= 18.1892080303 o= 342.795895408 w= 269.956574118

2  a= 4.42154925722 e= 0.369184306787 i= 18.8279796915 o= 341.708505265 w= 264.219253244
```

Figura 4.7: 1. Elementos orbitales antes del encuentro con Júpiter 2. Elementos orbitales después del encuentro con Júpiter.

Capítulo 5

Conclusiones

En ciertas condiciones el acercamiento de un asteroide con un planeta perturba y cambia la órbita del asteroide. Si se logra hacer que la trayectoria del asteroide se acerque lo bastante a el planeta, esto es, que este dentro de su radio de influencia, podemos ver como es cambiada la trayectoria original del asteroide pasando de una elipse con unos elementos orbitales constantes a otra elipse diferente con otros elementos orbitales distintos pero también constantes en el tiempo.

El trabajo es un aporte que brinda herramientas e ideas para el estudio de la mecánica celeste y un punto de partida para la simulación de un sistema de más cuerpos. Si bien el trabajo aborda muchos elementos de la mecánica celeste, en su elaboración se construyeron programas preliminares que podrían aplicarse a la enseñanza de cada concepto que se trato en el trabajo. Ejemplo de esto seria la explicación de la atracción gravitatoria por medio de otra simulación o las leyes de Kepler, incluso el análisis de más tipos de órbitas que enriquecen el abordaje de estas temáticas en el aula.

Las condiciones para que se vea afectada la órbita del asteroide son muy complejas de lograr en uno de los planetas menores teniendo en cuenta la escala de nuestro sistema solar y el radio de influencia de los planetas, particularmente para el caso tratado se logra una aproximación optima dadas las condiciones de Júpiter. En la realización de la simulación se contempló un caso particular para la Tierra, pero dado su mínimo radio de influencia, al hacer una simulación con un asteroide que tenga una trayectoria próxima a la Tierra no se logra visualizar un resultado importante en el cambio de la trayectoria del asteroide ni influencia alguna sobre este.

El modelado de la trayectoria de un cuerpo por medio de sus elementos orbitales crea

una órbita que es bastante estable y precisa al igual que al modelarla por medio de métodos numéricos arrojando análogamente resultados que coinciden con bastante aproximación. Se encontró que al simular la órbita de un cuerpo ya sea por medio de sus elementos orbitales o bien sea por medio de el método numérico de Verlet, no se encuentra mayor diferencia entre estas proporcionando resultados bastante similares, lo cual da una idea clara de que el programa funciona correctamente y se asemeja a lo que se observa en la naturaleza.

Es posible recalcular la órbita del asteroide con buena presión mediante las ecuaciones de transformación entre elementos orbitales y la posición y velocidad de un cuerpo pudiéndose así determinar por completo el tipo órbita final. Independientemente de cual sean los parámetros y condiciones iniciales con que se muevan los cuerpos, conocidas las ecuaciones de transformación es posible conocer el tipo de órbita que resultara de la interacción entre un planeta y un asteroide.

Si bien las condiciones para que un asteroide se vea afectado por la presencia de un planeta en el espacio son difíciles de lograr, las condiciones para que se dé un impacto lo son aún más debido a los tamaños y las masas de estos en relación con el tamaño del sistema solar y la atracción gravitacional ejercida por el Sol. Lograr recrear una situación de impacto se hace un gran reto pues intervendrían otros parámetros a considerar y debería solucionarse el problema de las escalas, pues como se dijo anteriormente es algo complejo hacer coincidir los cuerpos en algún punto especifico en el tiempo y en el espacio dependiendo de los cuerpos.

Bibliografía

[1] Vladimir A Chobotov. *Orbital mechanics*. Aiaa, 2002.

[2] Orestes Coloma Rodríguez. ¿ cómo utilizar software educativo en el aula? material de apoyo para el curso pre congreso pedagogía 2005, ciudad de la habana. 2005.

[3] Beer Ferdinand, RUSSELL Johnston, and CLAUSEN William. Mecánica vectorial para ingenieros. dinámica. *Mexico: Mcgrawhill*, 2000.

[4] Richard Fitzpatrick. *An Introduction to Celestial Mechanics*. Cambridge University Press, 2012.

[5] D Bob Gowin and Joseph D Novak. Aprendiendo a aprender. *Barcelona: Ediciones Martínez Roca, SA*, 1988.

[6] Daniel Kleppner and Robert Kolenkow. *An introduction to mechanics*. Cambridge University Press, 2013.

[7] Jerry B Marion. *Dinámica clásica de las partículas y sistemas*. Reverté, 1975.

[8] Oliver Montenbruck and Arthur Hilary Armstrong. *Practical ephemeris calculations*. Springer-verlag Heidelberg, 1989.

[9] José Gregorio Portilla. Elementos de astronomía de posición. *Bogotá: Observatorio Universidad Nacional de Colombia*, 2001.

[10] John E Prussing and Bruce A Conway. *Orbital mechanics*. Oxford University Press, USA, 1993.

[11] James A Van Allen. Encounter of an asteroid with a planet. *American journal of physics*, 74(8):717–719, 2006.

ANEXO 1

Código del programa final.

```
from visual import*
import math

eje1= arrow(pos=(0,0,0),axis=(5,0,0), shaftwidth=0.05)
eje2= arrow(pos=(0,0,0),axis=(0,5,0), shaftwidth=0.05)
eje3= arrow(pos=(0,0,0),axis=(0,0,5), shaftwidth=0.05)

tip1=label(text="Y",space=0.2, pos=(5,0,0), height=20, opacity=0.5)
tip1=label(text="Z",space=0.2, pos=(0,5,0), height=20, opacity=0.5)
tip1=label(text="X",space=0.2, pos=(0,0,5), height=20, opacity=0.5)

G= 2.951e-4

i=1.30230
o=-115.492
w=275.066

a=5.204267
e=0.04839266
b=a*(1-e**2)**0.5
n=0.0830525

M = n*0
E0 = M
E1 = M + ((180/pi)*e*sin(E0*pi/180))

teta = 2*atan((((1+e)/(1-e))**0.5)*tan(E1/2*3.1419/180))*180/pi
```

```
r = a*(1-e*cos(E1*pi/180))


x=r*(sin(o*pi/180)*cos((teta*pi/180)+(w*pi/180))+cos(i*pi/180)*sin((teta*pi/180)+(w*pi/180))*c
os(o*pi/180))

y=r*(sin((teta*pi/180)+(w*pi/180))*sin(i*pi/180))

z=r*(cos((teta*pi/180)+(w*pi/180))*cos(o*pi/180)-
cos(i*pi/180)*sin(o*pi/180)*sin((teta*pi/180)+(w*pi/180)))


Sun = sphere(pos=(0,0,0), radius=0.9, color=color.yellow, material=materials.emissive,

        make_trail=True, interval=10)

Sun.mass=1


Jupiter = sphere(pos=(x,y,z), radius=0.25, color=color.orange, material=materials.marble ,

        make_trail=True, interval=10)

Jupiter.mass= 9.54367273e-4



Asteroide = sphere(pos=(1.34321834667,-0.0585273442016,-4.94228678176), radius=0.05,
color=color.red, material=materials.wood,

      make_trail=True, interval=10)

Asteroide.mass = 1.004e-10

Asteroide.v = vector(-0.00706088655405, -0.00239725667064,-0.0018906242615)



dt=1


while True:



  for t in range (0,1000000):
```

```
rate(200)


M = n*t
E0 = M
E1 = M + ((180/pi)*e*sin(E0*pi/180))

while abs ((E1-E0))>0.000000000001:

    E0=E1;
    E1=M+((180/pi)*e*sin(E0*pi/180));

teta = 2*atan((((1+e)/(1-e))**0.5)*tan(E1/2*pi/180))*180/pi
r = a*(1-e*cos(E1*pi/180))


x=r*(sin(o*pi/180)*cos((teta*pi/180)+(w*pi/180))+cos(i*pi/180)*sin((teta*pi/180)+(w*pi/180))*c
os(o*pi/180))
y=r*(sin((teta*pi/180)+(w*pi/180))*sin(i*pi/180))
z=r*(cos((teta*pi/180)+(w*pi/180))*cos(o*pi/180)-
cos(i*pi/180)*sin(o*pi/180)*sin((teta*pi/180)+(w*pi/180)))


Jupiter.pos = vector(x,y,z)
Jupiter.rotate(axis=(0,1,0), angle=pi/400)
```

```
    if mag(Asteroide.pos-Jupiter.pos) > 0.32285:



        distance = Asteroide.pos - Sun.pos
        a1 = -G*Sun.mass*distance/mag(distance)**3
        Asteroide.pos += Asteroide.v*dt + 0.5*a1*dt*dt
        distance = Asteroide.pos - Sun.pos
        a2 = -G*Sun.mass*distance/mag(distance)**3
        Asteroide.v += 0.5*(a1 + a2)*dt





    else :

        Asteroide.color = color.blue



        distance2 = Asteroide.pos - Jupiter.pos
        a12 = -G*Jupiter.mass*distance2/mag(distance2)**3
        Asteroide.pos += Asteroide.v*dt + 0.5*a12*dt*dt
        distance2 = Asteroide.pos - Jupiter.pos
        a22 = -G*Jupiter.mass*distance2/mag(distance2)**3
        Asteroide.v += 0.5*(a12 + a22)*dt



        semiejemayor= (mag(Asteroide.pos))/(2-
(mag(Asteroide.pos)*mag(Asteroide.v)**2/G*Sun.mass))
```

```
excentricidad=(((mag(Asteroide.v)**2/G*Sun.mass)-1/mag(Asteroide.pos))*Asteroide.pos)-
((Asteroide.pos.dot(Asteroide.v)/G*Sun.mass)*Asteroide.v)


momangular=cross(Asteroide.pos,Asteroide.v)

inclinacion=acos(momangular.y/mag(momangular))*180/pi



kunitario=vector(0,1,0)

vecnodal=cross(kunitario,momangular/mag(momangular))

if vecnodal.x >= 0:

   nodoascendente=acos(vecnodal.z/mag(vecnodal))*180/pi

else:

    nodoascendente=360-acos(vecnodal.z/mag(vecnodal))*180/pi



if excentricidad.y >= 0:

argumento=acos((vecnodal.dot(excentricidad)/mag(vecnodal)*mag(excentricidad)))*180/pi

else:

    argumento=360-
acos((vecnodal.dot(excentricidad)/mag(vecnodal)*mag(excentricidad)))*180/pi



print ("a="),semiejemayor, ("e="),mag(excentricidad), ("i="),inclinacion,
("o="),nodoascendente, ("w="),argumento
```

ANEXO 2

Código del programa que se usa para la visualización de los elementos orbitales y el cálculo de la posición y velocidad de un cuerpo en cualquier punto de la trayectoria.

```
from visual import*

import math


eje1= arrow(pos=(0,0,0),axis=(2,0,0), shaftwidth=0.005)

eje2= arrow(pos=(0,0,0),axis=(0,2,0), shaftwidth=0.005)

eje3= arrow(pos=(0,0,0),axis=(0,0,2), shaftwidth=0.005)


tip1=label(text="Y",space=0.2, pos=(2,0,0), height=10, opacity=0.5)

tip1=label(text="Z",space=0.2, pos=(0,2,0), height=10, opacity=0.5)

tip1=label(text="X",space=0.2, pos=(0,0,2), height=10, opacity=0.5)

tip1=label(text="Inclinacion",space=0.3, pos=(-1,1.5,0), height=10, opacity=0.5)


G=0.0002952


i=45

o=55

w=45



a=0.5

e=0

b=a*(1-e**2)**0.5

n=0.985628700
```

```
Sol = sphere(pos=(0,0,0), radius=0.05, color=color.yellow,
            make_trail=True, interval=10)


Planeta = sphere(pos=(0,0,0), radius=0.05, color=color.blue,
            make_trail=True, interval=10)

for t in range (0,10000):
  rate(100)
  M = n*t
  E0 = M
  E1 = M + ((180/pi)*e*sin(E0*pi/180))

  while abs ((E1-E0))>0.000000000001:

    E0=E1;
    E1=M+((180/pi)*e*sin(E0*pi/180));


  teta = 2*atan((((1+e)/(1-e))**0.5)*tan(E1/2*3.1419/180))*180/pi
  r = a*(1-e*cos(E1*pi/180))


x=r*(sin(o*pi/180)*cos((teta*pi/180)+(w*pi/180))+cos(i*pi/180)*sin((teta*pi/180)+(w*pi/180))*c
os(o*pi/180))
  y=r*(sin((teta*pi/180)+(w*pi/180))*sin(i*pi/180))
```

```
z=r*(cos((teta*pi/180)+(w*pi/180))*cos(o*pi/180)-
cos(i*pi/180)*sin(o*pi/180)*sin((teta*pi/180)+(w*pi/180)))


A=((4*pi**2*a**3)/(365**2))

B=((A*a*(1-e**2))**0.5)



vx=(A/B)*((sin(o*pi/180)*(sin((teta*pi/180)+(w*pi/180))+e*sin(w*pi/180)))-
(cos(o*pi/180)*(cos((teta*pi/180)+(w*pi/180))+e*cos(w*pi/180))*cos(i*pi/180)))

vy=(A/B)*((cos((teta*pi/180)+(w*pi/180))+e*cos(w*pi/180))*sin(i*pi/180))

vz=(-
A/B)*((cos(o*pi/180)*(sin((teta*pi/180)+(w*pi/180))+e*sin(w*pi/180)))+(sin(o*pi/180)*(cos((teta
*pi/180)+(w*pi/180))+e*cos(w*pi/180))*cos(i*pi/180)))


c= (vx**2+vy**2+vz**2)**0.5


#print c


Planeta.pos = vector(x,y,z)
```