



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA
NACIONAL
Educadora de educadores

UNA EXPERIENCIA DE DISEÑO DE TAREAS PARA PROMOVER EL
RAZONAMIENTO PROPORCIONAL

RAFAEL MORENO LEÓN
ROGER ALEXANDER MAYORGA QUEVEDO

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA
BOGOTÁ, D.C.
2017

UNA EXPERIENCIA DE DISEÑO DE TAREAS PARA PROMOVER EL
RAZONAMIENTO PROPORCIONAL

RAFAEL MORENO LEÓN
CÓDIGO 2016185009
CC. 79.614.203

ROGER ALEXANDER MAYORGA QUEVEDO
CÓDIGO 2016185006
CC. 1.022.943.601

Trabajo de Grado realizado como requisito parcial para optar al título de
Magister en Docencia de la Matemática

Director:
Edgar Alberto Guacaneme Suárez
Doctor en Educación – Énfasis en Educación Matemática

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA
BOGOTÁ, D.C.
2017

Para todos los efectos, declaramos que el presente estudio es original y de nuestra total autoría; en aquellos casos en los cuales hemos requerido del trabajo de otros autores o investigadores, hemos proporcionado los respectivos créditos.

Rafael Moreno León

Roger Alexander Mayorga Quevedo

A los tres dragones que custodian y sustentan mi corazón: David, Gillian y Mony.

A Doña María y Don Rafael quienes aún me bendicen desde el cielo.

Rafael

*A los que me cuestionaron acerca de lo que sabía de matemáticas
y a quienes me preguntaron "qué son las matemáticas"*

Roger



UNIVERSIDAD PEDAGOGICA
NACIONAL

Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ACTA DE VALORACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado *Una experiencia de diseño de tareas para promover el razonamiento proporcional*, presentado por los estudiantes:

Rafael Moreno León, Cód. 2016185009,

CC. 79.614.203

Roger Alexander Mayorga Quevedo, Cód. 2016185006,

CC. 1.022.943.601

como requisito parcial para optar al título de **Magíster en Docencia de la Matemática**, analizado el proceso seguido por el estudiante en la elaboración del trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigna la calificación de **Aprobada**, con 44 puntos.

Observaciones:

Los jurados recomiendan la distinción meritoria para el Trabajo de Grado.

En constancia se firma a los 27 días del mes de noviembre de 2017.

JURADOS

Director del Trabajo: Profesor: Edgar Q. Guacame S.
EDGAR ALBERTO GUACANEME (UPN)

Jurados: Profesor: Camilo S. F.
JEISON CAMILO SUA FLOREZ (UPN)

Profesora: Ligia Amparo Torres
LIGIA AMPARO TORRES
(UNIVERSIDAD DEL VALLE)

Agradecimientos


Al hacer el recuento de los dos últimos años de estudio, es muy importante para nosotros reconocer a aquellas personas que apoyaron nuestra formación como profesionales de la educación. En este último tiempo hemos entendido que no basta con tener el título de educadores, si nosotros mismos no le damos el estatus correspondiente a nuestra profesión.

Inicialmente, queremos destacar al profesor Edgar Alberto Guacaneme Suárez, con quien cursamos varios seminarios de la maestría y quien nos asesoró en este trabajo de grado. El profesor Edgar, nuestro mentor durante este viaje tan maravilloso por el conocimiento, ha tenido una infinita paciencia ante nuestras falencias, y ha potencializado nuestras ganas de querer saber más sobre la proporcionalidad. Además, queremos reconocer lo fundamental que ha sido para nuestra formación, su espíritu y compromiso docente, como elementos indispensables en la profesionalización del educador matemático.

Tampoco podemos olvidar a las profesoras Cecilia Agudelo, Leonor Camargo y Gloria García, quienes nos ayudaron a comprender los elementos necesarios para incursionar como docentes investigadores. Sus aportes han sido significativos para nosotros, porque nos permitieron comprender la importancia de hacer sentir la voz del educador, como gestor de conocimiento.


De igual manera agradecemos a la Universidad Pedagógica Nacional por permitirnos avanzar en nuestra formación profesional. La institución nos ha acogido gratamente, por eso ha puesto a nuestra disposición un sinnúmero de personas que han colaborado en nuestro paso por el programa de la Maestría.

Finalmente, queremos agradecer a nuestras familias por apoyarnos y comprendernos ante esta empresa tan exigente de los últimos dos años; su impulso y cariño nos llevan siempre a feliz puerto.

	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: GUI002GIB	Versión: 02	
Fecha de Aprobación: 21-06-2017	Página viii de 133	

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Una experiencia de diseño de tareas para promover el razonamiento proporcional
Autor(es)	Rafael Moreno León y Roger Alexander Mayorga Quevedo
Director	Edgar Alberto Guacaneme Suárez
Publicación	Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional, 2017
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	Razonamiento proporcional, Semejanza de figuras, Proporcionalidad geométrica no métrica, Diseño de tareas, Conocimiento del profesor de matemáticas

2. Descripción
<p>Este trabajo de grado es una reflexión sobre la experiencia de diseñar un conjunto de tareas para promover el razonamiento proporcional, en el grado séptimo u octavo de la Educación Básica. Para lograr lo anterior, caracterizamos el conocimiento para la enseñanza del profesor de matemáticas, al abordar el tema de la proporcionalidad geométrica no métrica y la semejanza de figuras, y todos aquellos conocimientos relacionados con el diseño de tareas y el contexto de aplicación elegido. Es por ello que optamos por las técnicas e instrumentos que permiten dibujar proporcionalmente, para analizar los elementos que caracterizan el razonamiento proporcional, al resolver las tareas propuestas.</p> <p>Para poder lograr la indagación planteada, la relación entre el diseño de tareas, que procuran el desarrollo del razonamiento proporcional, y el conocimiento del profesor, hacemos una reflexión detallada sobre el conocimiento del profesor de matemáticas al diseñar un conjunto de tareas sobre el contexto referido. Por tal razón, exponemos los diferentes momentos de estudio por los que pasamos al abordar el tema matemático propuesto; así mismo, el conocimiento para la enseñanza reportado en este estudio, da cuenta y razón de nuestras comprensiones logradas sobre el tema.</p>

	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: GUI002GIB	Versión: 02	
Fecha de Aprobación: 21-06-2017	Página ix de 133	

3. Fuentes

En el desarrollo de este trabajo de grado consultamos diversas fuentes bibliográficas durante estos dos años de estudio. A continuación, detallamos aquellas que se consideran primordiales en el estudio:

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>

Beta, G. (1990). *Proporcionalidad geométrica y semejanza*. Madrid: Editorial Síntesis.

Fernández, c., & Ilinares, s. (2012). Características del desarrollo del razonamiento proporcional en la educación primaria y secundaria. *Enseñanza de las ciencias*, 30(1), 129–141. Recuperado en <http://ensciencias.uab.es/article/view/596>

Guacaneme, E. A. (2001). *Estudio didáctico de la proporción y la proporcionalidad: Una aproximación a los aspectos matemáticos formales y a los textos escolares de matemáticas (tesis de maestría)*. Universidad del Valle, Cali.


Guacaneme, E. A. (2012). Significados de los conceptos de razón y proporción en el Libro V de los Elementos. In *Pensamientos, epistemología y lenguaje matemático* (pp. 99–135). Cali: Doctorado Interinstitucional en Educación.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional Reasoning. In *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (pp. 93–118). Reston, VA: Lawrence Erlbaum & National Council of Teachers of Mathematics. Recuperado en http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject/88_10.html#top

Obando, G., Vasco, C. E., & Arboleda, L. C. (2014). Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17(1), 59–81. <https://doi.org/10.12802/relime.13.1713>

Oller Marcén, A. M., & Gairín Sallan, J. M. (2013). La génesis histórica de los conceptos de razón y proporción y su posterior aritmetización. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 16(3), 317–338. <https://doi.org/10.12802/relime.13.1632>

Perry, P., Guacaneme, E., Andrade, L., & Fernández, F. (2003). *Transformar la enseñanza de la proporcionalidad en la escuela: un hueso duro de roer*. Bogotá: una empresa docente.

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Escuela de Pedagogía</small>	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: GUI002GIB	Versión: 02	
Fecha de Aprobación: 21-06-2017	Página x de 133	

Puertas, M. L. (1994). *Euclides. Elementos. Libros V-IX*. Madrid: Editorial Gredos.

Torres, E. (2015). *El conocimiento del profesor de matemáticas en la práctica: enseñanza de la proporcionalidad (tesis doctoral)*. Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona. Recuperado en <https://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=100095>

4. Contenidos

Este trabajo de grado está organizado en cinco capítulos, a través de los cuales se desarrolla la propuesta. El segundo, tercer, cuarto y quinto capítulo, corresponden al desarrollo de las fases del estudio: fundamentación, descripción, análisis y reflexión sobre el conocimiento para la enseñanza del profesor de matemáticas.


Capítulo 1: Generalidades del estudio. En este capítulo exponemos los aspectos generales del trabajo de grado, como son: el planteamiento del problema, su justificación, la formulación de los objetivos y la propuesta metodológica. La intención de este apartado es contextualizar al lector sobre las generalidades del estudio, como puerta de entrada al resto del escrito.

Capítulo 2: Marco de referencia. En este capítulo planteamos aquellos acuerdos teóricos que hacemos o a los que nos adscribimos para desarrollar la propuesta y de esta forma responder la pregunta de indagación. Es así como revisamos las diferentes perspectivas teóricas de las razones, las proporciones y la proporcionalidad (RPP) y planteamos ciertos rasgos del razonamiento proporcional desde nuestra revisión bibliográfica.

Capítulo 3: Técnicas e instrumentos de dibujo asociados con la proporcionalidad geométrica. El capítulo muestra la descripción de la propuesta de diseño de tareas mencionada. Dado el contexto de enseñanza elegido, este apartado trata de las técnicas e instrumentos que permiten dibujar proporcionalmente. Hemos querido conectar dos saberes en este capítulo, las matemáticas y el dibujo artístico.

Capítulo 4: Análisis de las tareas experimentadas. En este capítulo elaboramos el análisis de la experimentación lograda sobre el conjunto de tareas diseñadas. Se han piloteado todas las tareas consideradas como sustento de cualificación y reelaboración de las mismas.

Capítulo 5: Conclusiones y discusión. En el último capítulo mostramos las conclusiones y resultados más relevantes del trabajo de grado. Por ello, se da cuenta y razón del conocimiento del

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Escuela de Pedagogía</small>	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: GUI002GIB	Versión: 02	
Fecha de Aprobación: 21-06-2017	Página xi de 133	

profesor referido en este estudio, desde un modelo de conocimiento de la Educación del Profesor de Matemáticas (EPM), asimismo destacamos nuestras comprensiones sobre la proporcionalidad geométrica y la semejanza de figuras, a través del análisis logrado sobre el contexto de enseñanza.

5. Metodología

Este trabajo de grado es de tipo cualitativo-descriptivo, desarrollado bajo la estrategia del estudio de casos. En el estudio hemos pretendido explorar, describir, analizar y explicar el conocimiento del profesor de matemáticas necesario para la enseñanza, referido a la proporcionalidad geométrica no métrica y la semejanza de figuras, en el grado séptimo de la Educación Básica. Para el propósito planteado hemos realizado una reflexión detallada de la experiencia que implica este tipo de diseño de tareas y hemos identificado diferentes momentos de estudio.

Dentro de la información recolectada, destacamos: 37 audios de tutorías con el asesor del trabajo de grado, cinco horas de vídeo-grabaciones de la experimentación de tareas y el registro de un diario de campo para complementar las observaciones sobre la información recolectada.


El trabajo de grado se desarrolló en cuatro fases a saber:

- i) Fundamentación del conocimiento especializado de las razones, las proporciones y la proporcionalidad desde diferentes perspectivas teóricas.
- ii) Diseño del conjunto de tareas.
- iii) Análisis de las experimentaciones, y
- iv) Reflexión sobre el conocimiento del profesor de matemáticas.

6. Conclusiones

A lo largo del trabajo de grado se detalla el conocimiento del profesor para la enseñanza de la proporcionalidad geométrica no métrica, el cual se puede organizar bajo el modelo propuesto por Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008).

Existe una relación entre el dibujo artístico y las matemáticas, establecida a partir del análisis de las técnicas e instrumentos usados para dibujar proporcionalmente.

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Escuela de Pedagogía</small>	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: GUI002GIB	Versión: 02	
Fecha de Aprobación: 21-06-2017	Página xii de 133	

El conocimiento especializado del contenido matemático (SCK) es un saber fundamental en cualquier propuesta de enseñanza o diseño de tareas, relacionado con las RPP o la proporcionalidad geométrica no métrica.

Es necesario considerar el conocimiento pedagógico del contenido (PCK) como complemento del conocimiento del contenido (SMK), al diseñar tareas sobre los objetos matemáticos y contexto de enseñanza referidos en este trabajo.

El conocimiento de las RPP en el horizonte matemático (HCK) nos permite construir en la enseñanza un saber conectado, lo que debe posibilitar mejores niveles de comprensión del contenido.

El trabajo de grado nos ha permitido la cualificación del conocimiento de las RPP, como un primer paso en nuestra profesionalización, al incursionar como docentes investigadores en la práctica (ver ponencia a II CEMACYC (Moreno, Mayorga, & Guacaneme, 2017)).

Elaborado por:	Rafael Moreno León y Roger Alexander Mayorga Quevedo
Revisado por:	Edgar Alberto Guacaneme Suárez

Fecha de elaboración del Resumen:	19	09	2017
--	----	----	------

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN.....	1
1 GENERALIDADES DEL ESTUDIO.....	3
1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	3
1.1.1 Formulación del problema	3
1.2 JUSTIFICACIÓN DEL PROBLEMA	6
1.3 OBJETIVOS.....	9
1.3.1 Objetivo general.....	9
1.3.2 Objetivos específicos	9
1.3.3 Ubicación del problema	10
1.4 PROPUESTA METODOLÓGICA	12
1.4.1 Contexto experimental.....	12
1.4.2 Instrumentos para la recolección de información	13
1.4.3 Características del diseño de tareas propuesto.....	14
1.4.4 Categorías de análisis.....	14
1.4.5 Tipo de estudio y fases.....	15
2 MARCO DE REFERENCIA.....	17
2.1 PERSPECTIVAS TEÓRICAS DE RAZÓN, PROPORCIÓN Y PROPORCIONALIDAD ..	17
2.1.1 El método de la antifairesis o antanaireis	18
2.1.2 La proporcionalidad abordada desde la obra Elementos de Euclides	22
2.1.3 Teoría de las magnitudes para la proporcionalidad.....	34
2.1.4 Teoría de la proporcionalidad centrada en los números reales	38
2.1.5 La razón y la proporción como relaciones de comparación.....	41

2.2	RAZONAMIENTO PROPORCIONAL.....	41
2.2.1	¿Qué es el razonamiento proporcional?	42
2.2.2	Elementos del razonamiento proporcional.....	43
2.2.3	Estrategias de resolución de situaciones proporcionales	44
3	TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE DIBUJO ASOCIADOS CON LA PROPORCIONALIDAD GEOMÉTRICA.....	45
3.1	CONCEPTOS Y PROCEDIMIENTOS ASOCIADOS A LA PROPORCIONALIDAD GEOMÉTRICA Y LA SEMEJANZA DE FIGURAS PLANAS	47
3.1.1	Teorema de Thales.....	48
3.1.2	Teoremas de semejanza de triángulos.....	48
3.2	EL OBJETIVO DE LAS TAREAS PROPUESTAS EN TÉRMINOS DE LA COMPRENSIÓN DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS IMPLICADOS.....	49
3.3	EL USO DE LA CUADRÍCULA PARA DIBUJAR.....	50
3.3.1	Taller 1 concurso “dibujemos el logo de Nike”.....	54
3.3.2	El objetivo del Taller 1 concurso “dibujemos el logo de NIKE”.....	55
3.3.3	La pertinencia de la tarea y su secuencialidad.....	55
3.3.4	Las posibles soluciones previstas de los estudiantes ante la tarea y los conceptos/procedimientos matemáticos asociados a ella.....	55
3.3.5	Los errores previstos en las soluciones dadas por los estudiantes.....	55
3.4	EL USO DE LA PROYECCIÓN DEL LÁPIZ SOBRE LA IMAGEN PARA CAPTURAR LONGITUDES Y ÁNGULOS	56
3.4.1	Taller 2: Vamos a dibujar “con el lápiz”.....	58
3.4.2	El objetivo del Taller 2: Vamos a dibujar “con el lápiz”	59
3.4.3	La pertinencia de las tareas y su secuencialidad.....	60
3.4.4	Las posibles soluciones previstas de los estudiantes ante las tareas y los conceptos/procedimientos matemáticos asociados a ella.....	60
3.4.5	Los errores previstos en las soluciones dadas por los estudiantes.....	60
3.5	EL PANTÓGRAFO.....	61
3.5.1	Taller 3: Dibujando con el pantógrafo	65

3.5.2	El objetivo del Taller 3: Dibujando con el pantógrafo.....	65
3.5.3	La pertinencia de las tareas y su secuencialidad.	66
3.5.4	Las posibles soluciones previstas de los estudiantes ante la tarea y los conceptos/procedimientos matemáticos asociados a ella.....	66
3.5.5	Los errores previstos en las soluciones dadas por los estudiantes.	66
3.6	EL DIVISOR DE PROPORCIONES	67
3.6.1	Taller 4: Dibujando con el divisor de proporciones.....	69
3.6.2	El objetivo de la tarea 4: Dibujando con el divisor de proporciones	70
3.6.3	La pertinencia de las tareas y su secuencialidad.	70
3.6.4	Las posibles soluciones previstas de los estudiantes ante la tarea y los conceptos/procedimientos matemáticos asociados a ella.....	70
3.6.5	Los errores previstos en las soluciones dadas por los estudiantes.	70
4	ANÁLISIS DE LAS TAREAS EXPERIMENTADAS	73
4.1	EL USO DE LA CUADRÍCULA PARA DIBUJAR.....	73
4.1.1	Pilotaje del Taller 1.....	73
4.1.2	Aplicación del Taller 1.....	75
4.2	EL USO DE LA PROYECCIÓN DEL LÁPIZ SOBRE LA IMAGEN PARA CAPTURAR LONGITUDES Y ÁNGULOS	77
4.3	EL PANTÓGRAFO.....	82
4.3.1	Experimentación con el pantógrafo físico	82
4.3.2	Experimentación con el pantógrafo digital	85
4.4	EL DIVISOR DE PROPORCIONES	88
4.4.1	Cómo funciona y cómo se construye un divisor de proporciones.....	89
4.4.2	Pilotaje del Taller 4.....	92
4.5	OTRAS TAREAS QUE SURGEN AL MOMENTO DE EXPERIMENTAR.....	93
5	CONCLUSIONES Y DISCUSIÓN	97
5.1	EL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS SOBRE LAS RPP	98
5.1.1	El Modelo de Ball, Thames y Phelps.....	99

5.1.2	Uso del Modelo de Ball, Thames, & Phelps (2008)	100
5.2	RESULTADOS DE LA EXPERIMENTACIÓN DE TAREAS Y DISCUSIÓN.....	103
6	REFERENCIAS	107
	ANEXOS	111

INTRODUCCIÓN

Este estudio se enmarca dentro de la Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional, y forma parte de nuestra formación profesional al participar en el programa. Este escrito recopila gran parte de nuestras expectativas e intereses personales sobre el tema de la proporcionalidad, inclusive desde antes de matricularnos al programa posgradual.

Este trabajo de grado es un estudio de tipo cualitativo, basado en la reflexión que hacemos al describir nuestra propia experiencia, al cualificar nuestro conocimiento sobre la enseñanza de las razones, las proporciones y la proporcionalidad (RPP, en adelante), al diseñar un conjunto de tareas. Este conocimiento del profesor de matemáticas constituye un objeto de investigación dentro del campo de la Educación del Profesor de Matemáticas (En adelante, EPM) y por tanto este estudio se enmarca en esta línea de investigación.

Esta reflexión la llevamos a cabo al evidenciar, desde nuestro conocimiento, ciertas falencias sobre el aprendizaje y enseñanza de la proporcionalidad en nuestras prácticas. Debemos reconocer que nuestra formación sobre el tema no ha sido la adecuada, evidenciado esto en la cualificación de nuestro saber, a lo largo de los últimos dos años, mediante la revisión de artículos de investigación, tesis de maestría y doctorales, y muchos otros momentos, como las discusiones desarrolladas en los seminarios de la maestría.

La propuesta de diseño de tareas en el grado séptimo u octavo de la Educación Básica, se caracteriza por basarse en dos aspectos fundamentales como son: el estudio de las RPP desde las magnitudes, como relaciones de comparación y el uso del contexto de las técnicas e instrumentos para dibujar, como escenario de enseñanza. Las fases del estudio son básicamente cuatro: i) Fundamentación del conocimiento especializado de las RPP desde diferentes perspectivas teóricas; ii) Diseño del conjunto de tareas; iii) Análisis de las experimentaciones, y iv) Reflexión sobre el conocimiento del profesor de matemáticas.

El objetivo general desarrollado en el trabajo de grado plantea indagar cuál es la relación entre el diseño de tareas, que procuran el desarrollo del razonamiento proporcional en estudiantes de grado séptimo, y el conocimiento del profesor. Por tal razón fue necesario caracterizar ciertos elementos del razonamiento proporcional, entendiendo este proceso como “la habilidad para utilizar significativamente conceptos propios de las razones y las

proporciones en la solución de situaciones típicas de proporcionalidad directa” (Obando, Vasco, & Arboleda, 2014, p. 67).

Este trabajo de grado está organizado en cinco capítulos, a través de los cuales desarrollamos la propuesta. El segundo, tercer, cuarto y quinto capítulo, corresponden al desarrollo de las fases del estudio: fundamentación, descripción, análisis y reflexión sobre el conocimiento del profesor de matemáticas.

En el primer capítulo exponemos los aspectos generales del trabajo de grado, como son: el planteamiento del problema, su justificación, la formulación de los objetivos y la propuesta metodológica. La intención de este apartado es contextualizar al lector sobre las generalidades del estudio, como puerta de entrada al resto del escrito.

En el segundo capítulo planteamos el marco de referencia del trabajo de grado, como aquellos acuerdos teóricos que hacemos o a los cuales nos hemos adscrito para desarrollar la propuesta y responder la pregunta de indagación. Es así como se revisan las diferentes perspectivas teóricas de las RPP y planteamos ciertos rasgos del razonamiento proporcional desde nuestra revisión bibliográfica.

El tercer capítulo muestra la descripción de la propuesta de diseño de tareas mencionada. Dado el contexto de enseñanza elegido, este apartado trata de las técnicas e instrumentos que permiten dibujar proporcionalmente. Hemos querido conectar dos saberes en este capítulo, las matemáticas y el dibujo artístico.

En el cuarto capítulo elaboramos el análisis de la experimentación lograda sobre el conjunto de tareas diseñadas. Señalamos que hemos querido pilotear todas las tareas consideradas como sustento de cualificación y reelaboración de las mismas.

En el último capítulo mostramos las conclusiones y resultados más relevantes del trabajo de grado. Por ello, se da cuenta y razón del conocimiento del profesor referido en este estudio, desde un modelo de conocimiento de la Educación del Profesor de Matemáticas, asimismo destacamos nuestras comprensiones sobre la proporcionalidad geométrica y la semejanza de figuras, a través del análisis logrado sobre el contexto de enseñanza.

1 GENERALIDADES DEL ESTUDIO

En este capítulo se abordan entre otros aspectos, el planteamiento del problema, su justificación, la formulación de los objetivos del estudio, la importancia que encierra este problema para el campo de investigación en el cual se enmarca este estudio (la EPM), y una propuesta metodológica. Es de interés para los autores mostrar los aspectos generales del trabajo de grado en este apartado.

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1.1 Formulación del problema

El propósito central de la enseñanza de las matemáticas debería ser involucrar al estudiante con su entorno, así el mundo que lo rodea podría ser interpretado y transformado mediante el lenguaje que esta ciencia brinda. La formación matemática permite al individuo, entre otros aspectos, facilitar su participación en todas las decisiones que lo afectan en los ámbitos económico, político, administrativo y cultural de la Nación (MEN, 1994).

Pero lo anterior no es posible si el enfoque de enseñanza usado por los docentes no brinda las herramientas necesarias para poder usar las matemáticas con un sentido práctico, lleno de significación para los aprendices. Es así como en el ejercicio profesional del profesor, surgen constantemente las siguientes preguntas, entre otras: ¿Cuáles son las matemáticas que deben ser llevadas al aula para enseñar?, ¿qué relación guardan los contenidos matemáticos entre sí?, ¿qué relación guardan los contenidos con otros saberes?, ¿cuál es la pertinencia del saber matemático en relación con los intereses de los estudiantes?

Las respuestas dadas por los docentes, a los anteriores interrogantes, evidencian múltiples concepciones respecto a las matemáticas, entendiendo que el término incluye, además del conocimiento, las creencias y las actitudes de los profesores hacia la enseñanza, el aprendizaje y la ciencia (Agudelo-Valderrama, 2007). Es así como en la clase de matemáticas los saberes se presentan desarticulados y descontextualizados de la realidad, pues no se permite en el estudiante un aprendizaje para la comprensión, por el enfoque de enseñanza. Dado lo anterior, coincidimos con García, Castiblanco & Vergel (2005) en entender la comprensión como aquellos hilos conductores que el estudiante establece entre los contenidos y en relación a otros saberes (García et al., 2005)

Otro aspecto fundamental de la problemática, aparte de la comprensión, considera el papel que cumplen los libros de texto en la enseñanza de las matemáticas, en particular de las RPP. Muchos educadores siguen fielmente los libros como insumo para su trabajo, tal vez replicando las formas como ellos mismos aprendieron matemáticas; de esta manera la elección del libro de texto obedece a la experiencia personal de los mismos docentes y no a los intereses propios de los estudiantes (Beta, 1990).

Todo lo anterior, nos lleva a pensar y a cuestionar en dónde reside el conocimiento del profesor de matemáticas sobre las RPP. Este conocimiento de proposiciones y creencias, adquiridas en su formación, conjuga su formación académica y sus prácticas de aula, como productos de sus concepciones frente al saber matemático (Torres, 2015).

Es así como muchas tareas¹ y temas de matemáticas se presentan de manera compartimentalizada, es decir sin unidad entre los mismos contenidos y sin conexiones² hacia otros temas dentro y fuera de la matemática (Agudelo-Valderrama & Martínez, 2015, p. 3). Además, las tareas y temas son “estructurados en procesos de estudio atomizados en diferentes momentos de la escolaridad y con pocas conexiones entre sí” (Obando et al., 2014, p. 61 citando a García, 2005, Guacaneme, 2002 y Lundberg, 2011). Esta fragmentación o desarticulación se da por varias razones, pero en especial por no mostrar el área al enseñarla, como una herramienta útil y poderosa para comprender nuestro entorno, sino como una serie de algoritmos y procedimientos sin significación ni relación.

Dentro de las diversas herramientas para comprender el entorno, se presenta a los estudiantes la resolución de problemas. Más allá de la discusión de si es una metodología de enseñanza o una herramienta para el aprendizaje, creemos, al igual que el grupo Beta (1990), que las situaciones llevadas al aula con el propósito de enseñar, son ejercicios, situaciones o tareas prefabricadas y “pseudoreales”, con la intención de poner en práctica o evaluar un saber. Por ejemplo, los “problemas” que el docente lleva a sus estudiantes no poseen un contexto real, y generalmente se presentan como ejemplos y luego como ejercicios; estas tareas no son un problema real para el estudiante, porque no surgen de la actividad natural escolar, son prefabricadas por el docente y luego son llevadas al aula.

¹ Entendemos el término en el contexto del estudio, como el trabajo que asigna el docente al estudiante, para que ponga en práctica su saber o para que aprenda sobre las matemáticas en un tiempo determinado. Vemos en esta dimensión del aprendizaje dos clases diferentes, el logrado por los estudiantes y el nuestro al diseñar las tareas.

² En este trabajo de grado las conexiones referidas hacen alusión a las asociaciones logradas entre diversos conceptos, como evidencia de comprensión.

En este problemático contexto asociado a la enseñanza y en el ámbito de la resolución de problemas, surge el razonamiento proporcional, como un asunto problemático entre muchos otros. El docente lleva al aula tareas o situaciones de proporcionalidad y espera que sus estudiantes razonen adecuadamente al resolverlas. A nuestro entender, hay una falencia en el diseño o elección de tareas para promover el razonamiento proporcional, los resultados de las evaluaciones externas lo confirman, como las pruebas Saber de los últimos años.

Por otra parte, el razonamiento proporcional toma cerca de cinco años en consolidarse en el pensamiento de los estudiantes, desde la primaria hasta la secundaria (Fernández & Llinares, 2012; Obando et al., 2014); esto implica gran complejidad para su abordaje en la enseñanza. Al mismo tiempo, la transición del pensamiento aditivo al multiplicativo en estos años denota la dificultad de los estudiantes de diferenciar situaciones proporcionales, de situaciones con estructura aditiva, puesta de manifiesto por el uso abusivo de métodos aditivos erróneos para resolver las situaciones proporcionales (Fernández & Llinares, 2012). Por tanto, en muchas situaciones de aula de tres términos conocidos y uno desconocido, los estudiantes recurren indiscriminadamente al uso de técnicas o estrategias proporcionales, tanto en problemas aditivos como en problemas proporcionales (Fernández & Llinares, 2012). Lo anterior demuestra que los estudiantes recurren a estrategias o técnicas de resolución de situaciones proporcionales, en situaciones que tal vez no lo sean, sin mostrar comprensión de lo qué hacen y por qué lo hacen, esto claramente es un indicio de un mal enfoque desde la enseñanza.

En lo que respecta a las propuestas de enseñanza de las RPP, estas han estado centradas en los contextos numéricos, asociando la razón a un cociente o número y a la proporción a la igualdad de dos cocientes o dos números, desconociendo el carácter de relación de comparación de dichas relaciones matemáticas (Freudenthal, 1983 citado en Perry, Guacaneme, Andrade, & Fernández, 2003). Dado lo anterior, para Obando et al. (2014) aún hay cuestiones abiertas por resolver sobre el tema; por ello los autores plantean si: “(...) ¿Pueden los enfoques no aritmetizados (construidos sobre las magnitudes o las funciones, en particular las lineales) contribuir a un mejor paso de lo aditivo a lo multiplicativo?” (p.73).

Adicional a lo anterior, conviene subrayar ahora que la proporcionalidad es una relación matemática que va en dos sentidos, “entre los valores de la misma magnitud o espacio de medida y entre las dos magnitudes o espacios de medida” (Torres, 2015, p. 71). Esta relación, referida desde la obra de Euclides, contrasta con la presentación que se hace de ella en muchos libros de texto, donde esta se reduce a una relación en una sola vía (producto cruzado), donde se muestra la proporcionalidad sólo entre magnitudes (Torres, 2015). A nuestro juicio, se restringe el carácter relacional en diversos sentidos de las

razones y proporciones; desde la enseñanza se limita la comprensión, por no promover las diferentes propiedades de las proporciones que muestran los diversos sentidos de la relación de proporcionalidad.

En concordancia con lo anterior, el inadecuado abordaje de las RPP, señalamos ahora que el enfoque de enseñanza ha estado centrado en la proporcionalidad entre números, y por ello sería conveniente un enfoque diferente. Tal vez por el asunto algorítmico y mecánico que restringe el razonamiento proporcional a cuestiones de “regla de tres” en situaciones de hallar la cuarta proporcional, con números, como se reporta ampliamente en la investigación sobre el tema.

Todo lo anterior, asociado a la falta de comprensión en los estudiantes, al uso reiterado de los textos, al enfoque de enseñanza centrado en la razón como cociente, al uso de situaciones no significativas para la resolución de problemas, entre otros aspectos, nos lleva a pensar que el conocimiento del profesor de matemáticas sobre las RPP debe robustecerse, porque quizás el saber que posee no tiene los elementos necesarios para construir una propuesta innovadora para la enseñanza y el aprendizaje del razonamiento proporcional. Muy probablemente su acción está guiada por las experiencias que tuvo cuando fue estudiante y aprendió algunas cosas sobre la proporcionalidad, lo cual repercute en el diseño y selección de tareas para la enseñanza.

Todo lo escrito hasta ahora en esta sección nos lleva a plantear la siguiente pregunta: *¿Cuál es la relación entre el diseño de tareas y el conocimiento del profesor sobre las RPP, que permite apoyar el desarrollo del razonamiento proporcional en un grupo de estudiantes de la Educación Básica Secundaria?* Esta pregunta no logra agotar toda la reflexión e intención del trabajo de grado, pero sintetiza muchos de los aspectos contemplados, nos queda la duda si atrapa todo lo referenciado en la problemática expuesta.

El estudio procura una experiencia de diseño de tareas que promuevan el razonamiento proporcional y el uso comprensivo de las RPP, para ello se tiene como hipótesis de trabajo la relación dialéctica entre dicha práctica y el conocimiento del profesor de matemáticas. Es decir que, si se robustece el conocimiento del profesor sobre las RPP, el diseño de tareas tendría unas facetas diferentes a las usuales.

1.2 JUSTIFICACIÓN DEL PROBLEMA

Para nosotros, ha sido de especial interés el abordaje de este problema, porque lo consideramos fundamental en el ámbito de nuestras propias concepciones sobre las RPP. Desde nuestra formación como educadores, hasta el ejercicio ahora de nuestra práctica docente, el razonamiento proporcional ha ocupado un papel principal en el aprendizaje de las matemáticas.

Al revisar la literatura sobre el tema, en concordancia con las expectativas de los autores, en especial el documento “Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte” de (Obando et al., 2014), se observa que las RPP:

...constituyen un campo ampliamente investigado en los últimos cincuenta años. Evaluaciones recientes muestran que estos objetos de conocimiento siguen siendo difíciles de aprender para la mayoría de los estudiantes, lo que constituye un certero indicador de la necesidad de hacer mayor investigación didáctica que permita nuevas comprensiones de dicha problemática y, por esa vía, lograr mayores impactos en el sistema educativo (p. 59).

En este escenario surge para nosotros el razonamiento proporcional, evidenciado en el uso significativo de las razones y proporciones en situaciones que lo requieran. Esta habilidad se desarrolla inicialmente desde la Primaria hasta el grado noveno de la Educación Básica, cuando se consolida. Por lo cual, esta forma de razonar tarda años en consolidarse, no es aun aspecto que se genera espontáneamente.

Como se dijo anteriormente, los elementos matemáticos más relevantes asociados al razonamiento proporcional son la razón y la proporción. La razón, como muchos temas de las matemáticas escolares, desde el ámbito de los *Estándares básicos de competencias en matemáticas*, se enmarca dentro de una estructura de conocimiento mostrada de forma secuencial (coherencia vertical) y que relaciona distintos tipos de pensamiento matemático (coherencia horizontal) (MEN, 2006). Por tal motivo, la razón aparece, bajo la normatividad vigente, con hilos conductores desde el grado quinto hasta el grado once de la Educación Escolar; relacionando no solo los pensamientos numérico y métrico, sino todos aquellos contextos que requieran la proporcionalidad. Es por ello que deben proponerse desde la gestión docente, situaciones de aula que posibiliten un saber conectado.

Concretamente el razonamiento proporcional está presente en muchos temas del currículo de matemáticas. El estudiante ha abordado varios tipos de razones matemáticas sin saberlo, como lo proponen Fernández y Llinares (2012), Lamon (1993), Silvestre y Da-Ponte (2011) y Singh (2000); los autores señalan entre otros aspectos: el precio por artículo, las fracciones, los porcentajes, la probabilidad, la velocidad, la medición, la ampliación y la reducción de formas y figuras, y π como una relación entre la circunferencia de un círculo y su diámetro. Posteriormente la razón corresponde a la misma pendiente de la función lineal, sirve para resolver triángulos bajo los criterios de semejanza, es usada en la resolución de triángulos rectángulos en trigonometría y sirve de soporte a un importante tema del análisis de funciones, la función derivada (Agudelo-Valderrama & Martínez, 2015; Godino & Batanero, 2002; Reyes-Gasperini, 2013).

De la misma manera, la razón es vista como un elemento principal en relaciones funcionales que involucran dos magnitudes físicas, en el contexto de las ciencias naturales. Sin embargo, el abordaje de enseñanza en estas ciencias no evidencia una forma de comparación multiplicativa; por esta situación, magnitudes como la densidad, la fuerza, el trabajo, etc. no tienen mucha significación en los estudiantes, por la falta de interpretación de la razón (Agudelo Valderrama & Martínez, 2015).

A continuación, mostraremos algunos antecedentes investigativos relacionados con nuestra propuesta de trabajo, es decir tareas caracterizadas por el uso de las magnitudes y no por el uso tradicional de los números, estas últimas reportadas ampliamente en la literatura especializada sobre el tema. Debemos anotar que el manejo significativo de las RPP en contextos de resolución de tareas, como lo afirman también Lesh, Post, & Behr (1988), refiere a dos tipos de habilidades: el razonamiento cuantitativo y el razonamiento cualitativo³.

Sobre el razonamiento cuantitativo no numérico, revisamos principalmente la tesis de maestría de Quintero y Molavoque (2012), “Análisis de las tareas asociadas a la proporcionalidad geométrica y la semejanza, presentes en libros de texto de matemáticas”. En este trabajo, las autoras presentan un análisis de un conjunto de tareas relacionadas con la proporcionalidad geométrica y la semejanza en un grupo de textos escolares.

Un segundo referente para nuestro trabajo lo constituye el libro “La transversalidad de la proporcionalidad” de Reyes-Gasperine (2013), en él encontramos un gran número de tareas para la enseñanza de las RPP, en el contexto de varios saberes del currículo de la escuela, pero nos enfocamos en aquellas que se refieren al uso de las magnitudes, como las longitudes y las áreas. Es importante señalar que los estudiantes deben atender asuntos referidos a la estimación de magnitudes cuando razonan proporcionalmente, pero esta cuestión no refiere directamente a cantidades o números.

Otro trabajo interesante para nosotros es “*Teaching Fractions and Ratios for Understanding: Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers*” de Lamon (2012) Este libro muestra una amplia guía para los profesores sobre actividades de enseñanza y las consideraciones necesarias para abordar la relación existente entre las fracciones y las razones, en cuanto a cómo la concepción que se tenga de número racional incide en la comprensión del concepto de razón. De este libro analizamos los problemas referidos a las mezclas como: las cantidades necesarias de los colores de temperas para formar otros al combinarlos y así cambiar tonalidades; la combinación de las cantidades de

³ Preferimos llamarle a este último razonamiento cuantitativo no numérico.

azúcar y jugo de limón para formar cierto tipo de sabor; entre otros. En estos problemas nos llamó la atención la ausencia de la cantidad (número) para resolver las tareas propuestas, ya que se indagaba por cuestiones de apreciación (estimación) de las mezclas, por ejemplo ¿Qué tan clara o oscura es la mezcla de colores a cierto color? ¿qué tan dulce es la limonada o qué tan acida está en relación a otro sabor?

Finalmente, en lo relacionado a la proporcionalidad y la forma, señalamos el artículo de Ruiz y Valdemoros (2006) “Vínculo entre el pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo: el caso de Paulina”; en este trabajo se presenta un estudio de caso, en el cual el pensamiento cuantitativo de una estudiante se ve fortalecido a partir de una serie de tareas de pensamiento cualitativo (cuantitativo no numérico). Es así como las autoras rescatan el uso de la cuadrícula para fortalecer en los estudiantes procesos referidos al razonamiento proporcional, como la estimación de magnitudes y la semejanza de figuras.

En este marco investigativo y en consecuencia de todo lo anterior, la caracterización del razonamiento proporcional constituye un insumo muy relevante para cualquier investigación sobre el tema, de ahí surge nuestro interés por fundamentar nuestro conocimiento sobre las RPP. Pero dicho conocimiento no solo es importante en el ámbito investigativo, este saber debe permitir la mejora de las prácticas de enseñanza y debe robustecer el conocimiento del profesor de matemáticas.

Finalmente, en el contexto de este trabajo de grado, entendemos el razonamiento proporcional como “la habilidad para utilizar significativamente conceptos propios de las razones y las proporciones en la solución de situaciones típicas de proporcionalidad directa (fundamentalmente situaciones de cálculo de una cuarta proporcional)” (Obando et al., 2014, p. 67 citando a Modestou & Gagatsis, 2009, 2010). En concordancia con dichos autores, creemos que el diseño de tareas propuesto, debe permitir el uso significativo de las RPP.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo general

Indagar cuál es la relación entre el diseño de tareas, que procuran el desarrollo del razonamiento proporcional en estudiantes de la Educación Básica Secundaria, y el conocimiento del profesor.

1.3.2 Objetivos específicos

1. Fundamentar el conocimiento del profesor de matemáticas sobre las RPP, desde diferentes facetas.

2. Describir la experiencia del profesor en el diseño de tareas, a partir del conocimiento necesario para tal fin.
3. Analizar y explicar los efectos de la experimentación del conjunto de tareas, desde la perspectiva del profesor, con la intención de caracterizar las situaciones de aula diseñadas.

Dado lo anterior, se propone al lector como ruta de navegación en el documento, seguir las siguientes asociaciones:

- Para el conocimiento especializado de las RPP, como una de las facetas posibles, ver el Capítulo 2,
- Para el conocimiento del profesor de matemáticas necesario para diseñar el conjunto de tareas, ver el Capítulo 3, y
- Para el análisis de la experimentación del conjunto de tareas, ver el Capítulo 4.

1.3.3 Ubicación del problema

El trabajo de grado se enmarca dentro de la línea de investigación del campo de la EPM, desarrollada por el grupo RE-MATE (*Research on Mathematics Teacher Education*) de la Universidad Pedagógica Nacional. Anteriormente, Guacaneme y Mora (2012) han argumentado que la EPM es un campo de investigación y que existe un sistema didáctico de la EPM de referencia, en dimensiones o planos donde se pueden estudiar múltiples aspectos (ver la Ilustración 1).

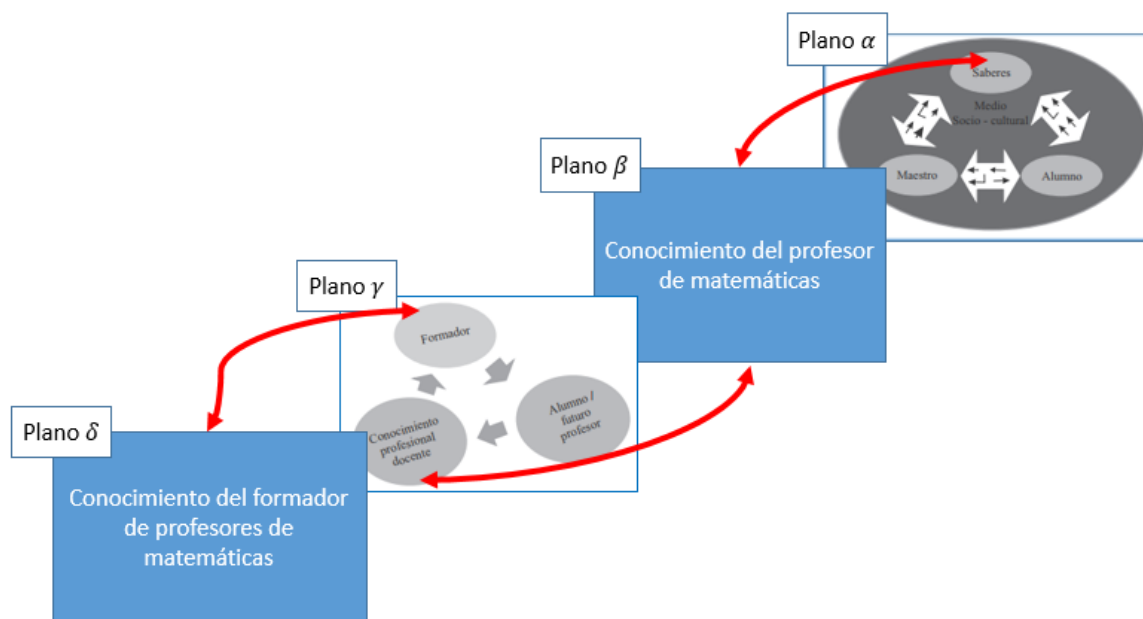


Ilustración 1: Planos o líneas de investigación de la EPM⁴

Por tal razón, son objetos de estudio para el grupo RE-MATE:

- *Las prácticas profesionales de los profesores de Matemáticas.* Esta dimensión vincula el quehacer del docente relacionado con el trabajo que realiza en las instituciones educativas, basado en las interacciones con otros profesionales de la educación o en el nivel de reflexión que logre al abordar su propia cualificación.
- *Los conocimientos de los profesores de Matemáticas.* Este ámbito se refiere a las diferentes creencias, visiones y concepciones de los profesores, en relación con el aprendizaje, la enseñanza y el conocimiento mismo de las matemáticas.
- *Las prácticas de formación de profesores de Matemáticas.* En este aspecto se contemplan los ámbitos de formación de educadores de matemáticas, así como asuntos curriculares sobre dichos programas, entre otras cuestiones que son abordadas en este plano.
- *Los conocimientos profesionales de los formadores de profesores de Matemáticas.* Este aspecto refiere a las creencias, visiones y concepciones que tengan los formadores de profesores de matemáticas en relación con el aprendizaje, la enseñanza y el conocimiento de los temas de formación de educadores de matemáticas.

⁴ Imagen adaptada de Guacaneme & Mora (2012), La educación del profesor de Matemáticas como campo de investigación.

En concordancia con lo anterior, el grupo RE-MATE plantea para la línea de investigación de la EPM en el programa de la Maestría en Docencia de la Matemática (MDM), los siguientes objetivos de estudio:

- a) Aportar a la construcción de conceptos teóricos, tales como “conocimiento pedagógico del contenido matemático”, “matemáticas para la enseñanza”, “reflexión en/sobre/para la acción”, “aprendizaje docente en comunidades de práctica”, etc.
- b) Profundizar en el estudio de asuntos clásicos de indagación como las creencias, visiones y concepciones de los profesores, las prácticas de los profesores, los conocimientos y competencias de los profesores, el aprendizaje de los profesores, o la relación entre teoría y práctica.
- c) Avanzar en la investigación sobre asuntos emergentes como el diseño y papel de tareas en la educación de los profesores, el papel de la investigación en los programas de formación, o la educación y desarrollo de los educadores de profesores.⁵

En relación al segundo objetivo de la línea de investigación de la MDM, en concordancia con nuestro estudio, queremos resaltar la reflexión planteada sobre nuestras prácticas docentes. Este asunto involucra el abordaje de la cualificación de nuestro conocimiento sobre las RPP y porque no decirlo, un aprendizaje sobre estos objetos matemáticos al profundizar en su estudio. Es así como esta experiencia de diseño de tareas se enmarca en el segundo plano de investigación de la EPM: *Los conocimientos de los profesores de Matemáticas*.

1.4 PROPUESTA METODOLÓGICA

1.4.1 Contexto experimental

Este estudio está centrado en nuestra reflexión sobre una experiencia de diseño de tareas, para apoyar el razonamiento proporcional de un grupo de estudiantes, y el conocimiento necesario del profesor de matemáticas para tal fin. Hemos querido analizar nuestra propia práctica docente, porque consideramos que nuestra formación profesional ha estado caracterizada, por los mismos aspectos referidos al exponer nuestro problema de indagación. En consecuencia, uno de nosotros es el docente que aplica las tareas en los contextos de enseñanza y a la vez diseña, describe y analiza el efecto de las tareas. No

⁵ Tomado del sitio web de la MDM, líneas de investigación del programa, ver en <https://goo.gl/az1Jmx>

obstante, esto no implica que se desconozcan totalmente las acciones de los estudiantes; este aspecto por momentos se aborda para analizar la eficacia de las tareas y así cualificarlas.

Para la fase de experimentación de tareas se han seleccionado dos grupos de estudiantes, un curso completo de 40 estudiantes de grado séptimo del Colegio IED Francisco de Miranda y un grupo de tres estudiantes de grado octavo del mismo colegio. El primer grupo se considera cómo el grupo focal u objetivo del estudio y el segundo grupo aquel donde se adelanta el pilotaje de las tareas diseñadas. El hecho de tener estudiantes de diferente nivel escolar en los dos grupos, no reporta impedimento alguno para lo planteado, porque las edades de los estudiantes no difieren mucho. Además, han tenido un acercamiento muy similar a los temas relacionados con las RPP.

1.4.2 Instrumentos para la recolección de información

Dentro de nuestro proceso de reflexión al diseñar un conjunto de tareas, hemos identificado diferentes momentos de estudio como: las tutorías, el trabajo en los seminarios de la MDM, el trabajo grupal y el trabajo individual. Para estos momentos de trabajo, hemos utilizado diferentes medios para registrar y documentar lo sucedido en ellos.

En cuanto al *registro de nuestras reflexiones* sobre el diseño y cualificación de tareas, se han recolectado 37 sesiones de trabajo con el tutor, compiladas en registros de audio de aproximadamente dos horas de duración cada uno. En estas sesiones de trabajo se estudió y reflexionó sobre las RPP, las tareas, las técnicas e instrumentos de dibujo, y todo lo concerniente a la experimentación. El estudio de este material ha sido vital en el desarrollo, no solo del trabajo de grado, sino de las comprensiones de los autores sobre el tema.

En lo que respecta a *la experimentación de las tareas diseñadas*, el segundo grupo (de pilotaje) alcanzó a desarrollar todas las actividades propuestas; sin embargo, el primer grupo (objetivo) solo alcanzó a desarrollar el Taller 1 (ver anexo 1). En ambos grupos se han hecho anotaciones en un diario de campo, para registrar las dificultades y aciertos de las sesiones de trabajo con estudiantes, y como insumo para complementar los demás fragmentos de información.

Para la experimentación con el curso completo de estudiantes del grado séptimo, decidimos no filmar la actividad, para no interrumpir el ambiente natural de la clase y no condicionar las respuestas de los estudiantes, cuando dialogaban con el docente sobre las preguntas del taller. Para el segundo grupo de estudiantes hemos filmado toda su actividad al resolver las tareas propuestas; este registro consta de alrededor de cinco horas de videograbaciones.

1.4.3 Características del diseño de tareas propuesto

Hay dos aspectos que caracterizan la propuesta de diseño de tareas, como son el estudio de las RPP desde las magnitudes en el grado séptimo y las técnicas e instrumentos para dibujar, como contexto de trabajo. A continuación, se argumenta el motivo de tales decisiones en el ámbito de este trabajo de grado.

En el estudio de las RPP a nivel escolar se observa cierto tipo de confusión, en especial la razón representa una dualidad de significados para los estudiantes. Por un lado, la razón es entendida en cuanto a su naturaleza misma, como una relación de comparación que involucra dos objetos de la misma o diferente naturaleza; por otro lado, la aritmetización de la razón como un cociente, señala que tiene sentido considerarla entre dos cantidades de una misma magnitud o entre dos números (Oller & Gairín, 2013, p. 333).

Lo anterior, sumado al deficiente manejo dado a tales conceptos, en los libros de texto, como lo sugiere Guacaneme (2002), genera falta de comprensión de dichas nociones. Es por ello que, en el contexto de este trabajo de grado, se aborda el estudio de las RPP desde la primera perspectiva, como una relación de comparación; concretamente es a partir de la proporcionalidad geométrica no métrica y el estudio de las magnitudes, que se elabora la propuesta.

Consideramos que la proporcionalidad geométrica no métrica y la semejanza de figuras, puede abordarse en el grado séptimo desde la ampliación y reducción de figuras. En grados anteriores, los estudiantes han usado la técnica de la cuadrícula para reproducir figuras y han explorado el concepto de escala en la lectura de mapas. Además, han enfrentado la circunstancia de dibujar, esquematizar o diagramar la información que compilan en sus apuntes, o el evento de querer comunicar sus ideas por carteleras, avisos, etc. Por todo lo anterior, consideramos que las técnicas e instrumentos que permiten dibujar proporcionalmente, son un interesante contexto de trabajo para el diseño y cualificación de tareas, para apoyar el desarrollo del pensamiento proporcional.

1.4.4 Características del razonamiento proporcional

Luego del diseño y cualificación del conjunto de tareas referido, se hace necesario analizar la experimentación de dicho material para la enseñanza. Como el propósito de las tareas planteadas es promover el desarrollo del razonamiento proporcional, se precisa centrar la atención en este aspecto, para medir la eficacia de las acciones al resolver las situaciones presentadas, y así mismo cualificar de nuevo el diseño.

Por tal razón, buscamos en la revisión bibliográfica, la caracterización de dichos elementos del razonamiento proporcional, para construir nuestra noción. Tomando las ideas de varios

autores ya referidos en este estudio, un indicio de razonar proporcionalmente en los estudiantes se verá en el despliegue de la habilidad de utilizar significativamente los conceptos propios de las razones y las proporciones en la solución de situaciones típicas de proporcionalidad directa. En consecuencia, se analiza en la experimentación del diseño de tareas, *el uso significativo de las RPP y las estrategias* que el estudiante dispone en la solución de situaciones de este tipo de proporcionalidad (ver Ilustración 2).

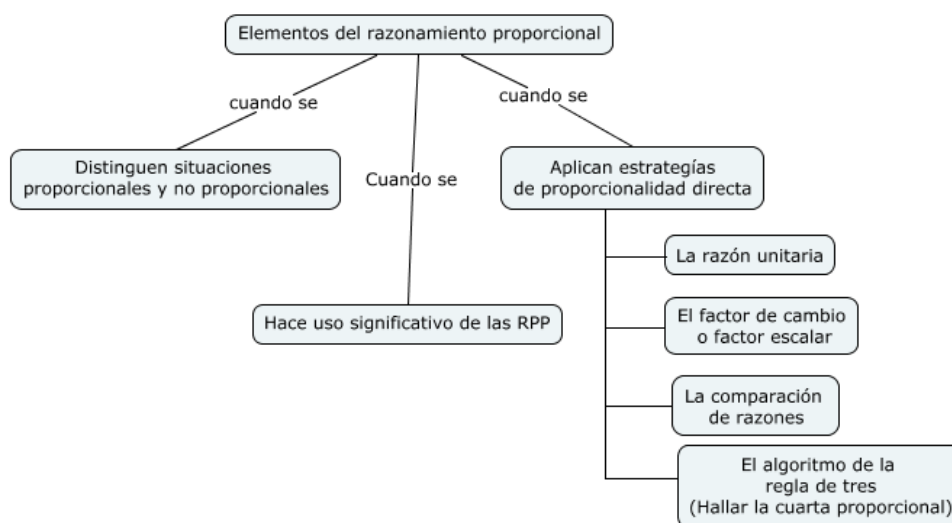


Ilustración 2: Elementos del razonamiento proporcional, noción propia construida con varios referentes (Fernández & Linares, 2012; Lesh, R., Post, T., & Behr, 1988; Obando et al., 2014; Silvestre & Da-Ponte, 2011)

1.4.5 Tipo de estudio y fases

Este estudio es de tipo cualitativo, basado en el estudio de casos, con la finalidad de describir la reflexión que hacen los autores sobre su propia experiencia, al cualificar su conocimiento sobre las RPP al diseñar un conjunto de tareas para la enseñanza. Este estudio de caso, el de los autores al diseñar el conjunto de tareas en concordancia con Molina., Castro, Molina y Castro (2011), pretende documentar “las interacciones entre los estudiantes y profesores, la evolución de las concepciones y en general, cómo se realiza la enseñanza a lo largo de la experimentación” (p.75).

Luego del planteamiento del problema de investigación en el primer semestre de la MDM, durante el segundo semestre se han revisado los aspectos teórico-matemáticos de la razón, la proporción y la proporcionalidad, desde varias perspectivas. Esta revisión teórica fortalece indudablemente el diseño de las situaciones de aula y muestra para los autores del trabajo de grado, un referente importante y decisivo que complementa el conocimiento del profesor de matemáticas para la enseñanza. Ya para el tercer y cuarto semestre, se plantea

el diseño, experimentación y cualificación de las situaciones de aula que fortalezcan el desarrollo del razonamiento proporcional en los estudiantes (ver Ilustración 3).

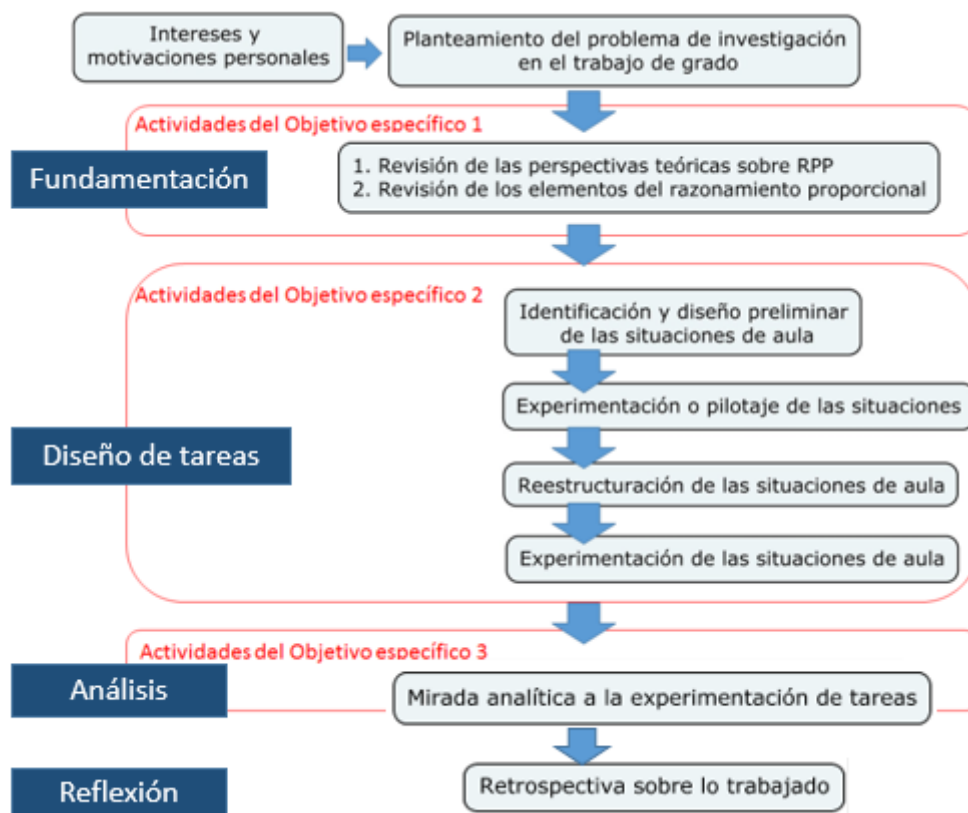


Ilustración 3: Fases del trabajo de grado

2 MARCO DE REFERENCIA

Este capítulo recoge una serie de acuerdos conceptuales que tendremos para responder la pregunta de indagación en nuestro trabajo de grado. Además, respondiendo a lo planteado en el primer objetivo específico, se enunciarán las perspectivas teóricas de la razón, proporción y la proporcionalidad, así como las características del razonamiento proporcional en el pensamiento del estudiante.

Es primordial para nosotros, fundamentar nuestro conocimiento especializado sobre las RPP, en concordancia con el primer objetivo del trabajo de grado. Por tal razón, se efectuó inicialmente esta revisión, con el propósito de usar este saber en el posterior diseño de tareas. Más adelante en el escrito, el lector podrá ver una contextualización de las definiciones, proposiciones, etc., pero en el contexto de las tareas diseñadas.

2.1 PERSPECTIVAS TEÓRICAS DE RAZÓN, PROPORCIÓN Y PROPORCIONALIDAD

En este apartado se revisarán cuatro perspectivas teóricas diferentes sobre los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad. Para lograr un acercamiento más preciso de estos aspectos se marcan varias rutas en la revisión conceptual, en la consolidación de una o varias teorías sobre la proporcionalidad. A continuación, mostramos dicha clasificación de perspectivas teóricas:

- El método de la Antifairesis o Antanairesis (antes de Eudoxo)
- La proporcionalidad abordada desde la obra *Elementos* de Euclides (Libros V, VI y VII)
- La teoría de las magnitudes para la proporcionalidad.
- La teoría de la proporcionalidad centrada en los números reales.

En la medida de lo posible, desde cada perspectiva se enunciarán las definiciones de razón y proporción, junto con las propiedades de las proporciones y otros aspectos relacionados con la proporcionalidad. Se hace necesaria esta revisión conceptual, para precisar los aspectos matemáticos relacionados con el razonamiento proporcional, porque este estudio favorece y amplía nuestro conocimiento sobre el objeto matemático escogido.

Luego de la revisión se discutirá si estas perspectivas se correlacionan o no, con lo que se conoce en la actualidad sobre razonamiento proporcional. Es decir, verificar si desde la literatura especializada en Educación Matemática, lo que se conoce como razonamiento proporcional se adecúa a una o varias perspectivas teóricas sobre las RPP.

2.1.1 El método de la antifairesis o antanairesis

Existe una teoría de la proporción para magnitudes geométricas y para números, que antecede a la presentada por Euclides en los Libros V, VI y VII de *Elementos*, y que se basa en la idea de *Antifairesis o Antanairesis* o método de restas sucesivas (conocido como algoritmo de la sustracción de Euclides) (Guacaneme, 2015). Desde esta perspectiva se enunciarán las definiciones de razón y proporción solamente.

Este proceso de la antanairesis, se hace de la siguiente manera: dados dos *números o magnitudes homogéneas*⁶, se resta el menor al mayor tantas veces como se pueda, hasta que quede un residuo menor que el menor de los números de partida. Entonces se repite el proceso tomando como partida el menor de los números iniciales y el residuo obtenido; y así sucesivamente (Oller & Gairín, 2013). Este proceso genera una n-upla que resume el proceso realizado; con esta relación establecemos un referente o índice de comparación entre dos objetos (entre números o magnitudes).

Ejemplo 1: Veamos cómo obtener la antanairesis entre los números⁷ 6 y 4.

Restando 6 de 4 se obtiene 2, luego 2 se compara en relación a 4

$$\{6; 4\} \rightarrow \{2; 4\}$$

Invirtiendo los papeles entre 2 y 4 tenemos

$$\{4; 2\} \rightarrow \{2; 2\} \rightarrow \{0; 2\}$$

En total hemos hecho primero una resta y luego dos restas, de lo que se concluye que la antanairesis entre 6 y 4 es $[1,2]$.

Para magnitudes dadas por segmentos, veamos cómo se desarrolla dicho proceso en el siguiente ejemplo.

⁶ Por ahora se dirá que son magnitudes de la misma naturaleza.

⁷ Este método es tomado de Oller Marcén (2013)

Ejemplo 2: Dados dos segmentos A y B , con la magnitud A mayor que la de B , se trata de ver inicialmente cuantas veces cabe B en A , luego se repite el proceso con el residuo R_1 en relación a B y se continua la comparación con R_1 y R_2 .

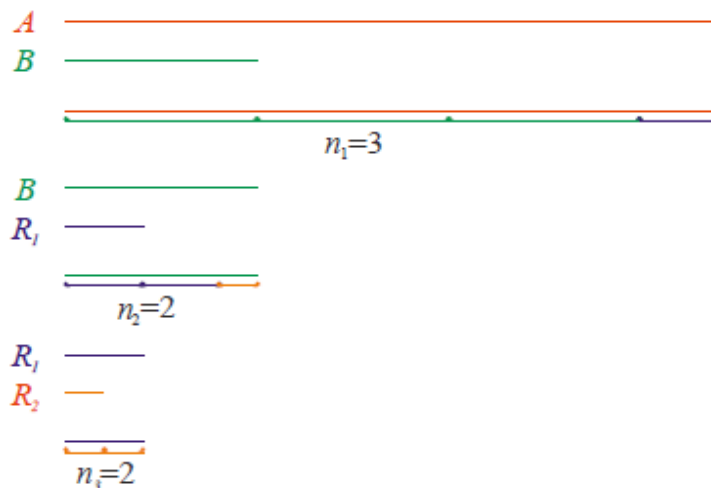


Ilustración 4: Antanaresis $[3,2, 2]$ de dos segmentos⁸

Para los segmentos A y B se puede ver su proceso de antanaresis en la Ilustración anterior. Nótese que no se sabe la medida (tamaño medido por una cantidad), pero eso no importa para realizar el proceso respectivo de la antanaresis entre los segmentos A y B .

Dados los anteriores ejemplos podríamos establecer una comparación entre las cantidades 6 y 4 asignada por $[1,2]$ y entre los segmentos A y B dada por $[3,2,2]$. Podríamos afirmar que esta dupla y tripla respectivamente, son una razón matemática, para cada par de cantidades (6 y 4) y cada par de magnitudes (segmentos A y B).

2.1.1.1 Razón matemática

Sean P y Q dos cantidades o magnitudes homogéneas, llamaremos *razón matemática* entre P y Q , a la relación de comparación entre ellas, dada por la n-upla.

Podemos concluir para el caso de las magnitudes que si la n-upla⁹ es finita $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ tras el proceso, la razón representa la comparación de magnitudes conmensurables y si por el contrario la n-upla es infinita $[a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$, la razón dada es una comparación de tipo inconmensurable. Para el caso de las cantidades, el n-upla o el proceso de la

⁸ Imagen tomada de Guacaneme (2015) del documento ¿Versiones históricas no multiplicativas de la proporcionalidad?

⁹ En la n-upla, n representa el número de veces que se ha restado en la antanaresis.

antanairesis siempre es finito, es importante indicar que el proceso siempre termina en un número finito de pasos debido a la existencia del máximo común divisor entre cada par de cantidades.

Ahora consideremos si se pueden establecer comparaciones, entre pares de n-uplas de cantidades, o entre pares de n-uplas de magnitudes o entre pares de n-uplas formadas de cantidades y magnitudes. Se sabe que estas comparaciones entre pares de razones equivalentes dan origen a la proporción matemática, veamos si desde esta perspectiva teórica también es posible.

Ejemplo 3: Analicemos la antanairesis entre 6 y 4, y entre 3 y 2, para poder establecer una relación entre sus n-uplas.

Ya sabemos que entre 6 y 4, tenemos la antanairesis [1,2] (por el resultado del ejemplo 1).

Para 3 y 2, tenemos:

$\{3; 2\} \rightarrow \{1; 2\}$, obteniendo una resta del primer nivel y de

$\{2; 1\} \rightarrow \{1; 1\} \rightarrow \{0; 1\}$, se obtienen dos restas sucesivas.

Dado lo anterior, la antanairesis entre 3 y 2 es [1,2], lo que nos muestra que cada par de cantidades tiene la misma antanairesis. El conocimiento matemático actual que poseemos, nos lleva a establecer una proporción entre estas dos parejas de números (Sabemos que 6 es a 4 como 3 es a 2).

Ejemplo 4: Las circunferencias a continuación, C y D , se comparan usando la hipotenusa y uno de los catetos del triángulo rectángulo mostrado en la figura siguiente. El diámetro de la circunferencia C corresponde a la hipotenusa y el diámetro de la circunferencia D corresponde a uno de los catetos. El lado restante T_1 del triángulo rectángulo resultante, se considera como otro diámetro a relacionar junto con el diámetro de D . A continuación se replica el mismo proceso pero usando las circunferencias D y T_1 (obtenida como residuo del primer nivel). Para el tercer nivel se relacionan o comparan T_1 y T_2 .

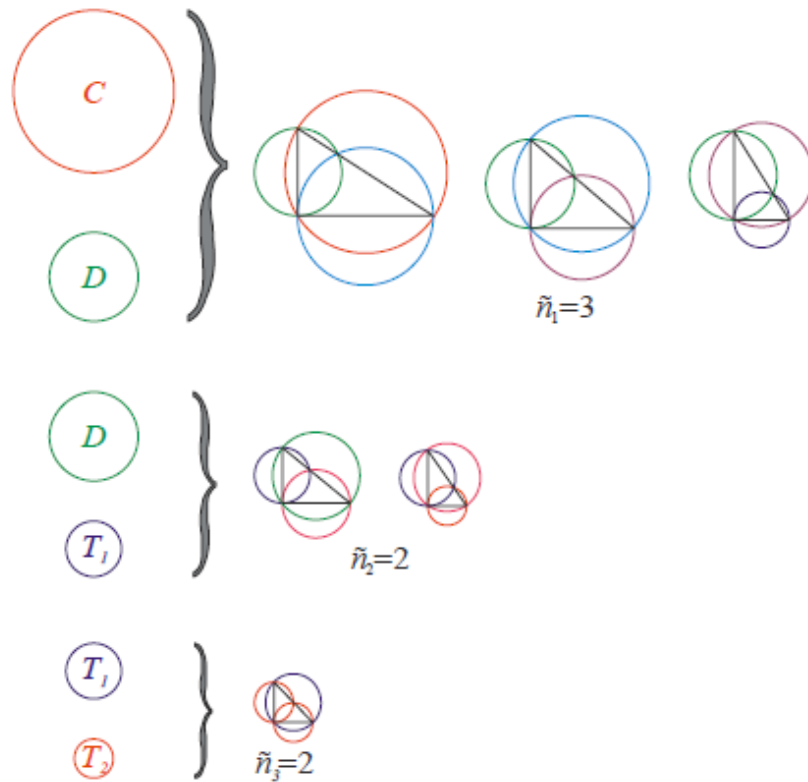


Ilustración 5: Antanairensis [3, 2, 2] de dos círculos¹⁰

Si se comparan las áreas de dichos círculos, como se muestra en la anterior ilustración, se obtiene la antanairensis [3, 2, 2], la cual es la misma obtenida entre los segmentos A y B del ejemplo 2. Advirtiendo que tienen el mismo resultado, al aplicar el proceso ejemplificado, decimos que (A, B, C, D) son magnitudes proporcionales, en otras palabras A y B guarda la misma razón que C y D .

2.1.1.2 Proporción matemática

Dadas dos cantidades o magnitudes P y Q , se dice que son proporcionales a otras dos cantidades o magnitudes R y S , si la n -upla generada por la antanairensis entre P y Q es la misma que entre R y S .

Debemos señalar ahora, en concordancia con Guacaneme (2015), que para este tratamiento de la proporcionalidad, no se ha recurrido en ningún momento a procesos multiplicativos, sino a un enfoque aditivo (por restas sucesivas). Esta perspectiva se muestra en contraposición a la usual, donde el aspecto multiplicativo se destaca.

¹⁰ Imagen tomada de Guacaneme (2015)

Será recurrente durante todo el trabajo de grado, en destacar que la razón matemática, no es una operación asociada al cociente de dos magnitudes o números, sino es un índice o relación de comparación asociada a un par de elementos. Desde esta perspectiva, la comparación está dada por una n-upla que surge del proceso referenciado en párrafos anteriores.

2.1.2 La proporcionalidad abordada desde la obra Elementos de Euclides

La obra *Elementos* de Euclides resulta de gran utilidad para establecer el conocimiento teórico que se tenía en la época con respecto a los conceptos estudiados. Sin embargo, no es nuestro propósito hacer un análisis exhaustivo de dicho texto; nos enfocaremos en mostrar cómo este puede ser un soporte para una teoría de la proporcionalidad. De los trece libros que conforman la obra de Euclides, son tres los dedicados a la razón y la proporción. Oller y Gairín (2013) señalan para su estudio solo: el libro V, dedicado a las magnitudes, y el libro VII dedicado a la aritmética; no obstante, para el tema concreto de nuestro trabajo de grado, hemos añadido a este análisis el libro VI dedicado a la proporcionalidad geométrica y la semejanza.

2.1.2.1 El libro V, la proporcionalidad desde las magnitudes

Al revisar el Libro V de Euclides en Puertas (1994) notamos la aparición del término “magnitud”, comúnmente esta se identifica como una característica de los segmentos geométricos que permite su comparación. Pero podría interpretarse el término magnitud, de una forma más general desde esta perspectiva, como la característica común a porciones de superficies, de volúmenes, etc. En general la magnitud es la característica común de los elementos de un conjunto de objetos que sean medibles.

Encontramos expresamente en las definiciones de este Libro V, la aparición de los términos necesarios, para construir una teoría de la proporcionalidad. Desde esta perspectiva se definirán los términos razón y proporción, y se revisarán unas propiedades de las proporciones dadas desde las proposiciones de este Libro V.

Razón matemática

Definición 3: Una razón es determinada relación respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas (Puertas, 1994, p. 9).

Podemos observar que, con esta definición de razón matemática, empezamos a identificar este elemento, como una relación de comparación entre dos objetos, desprovista de cantidad alguna para su referenciación.

Ejemplo 1:

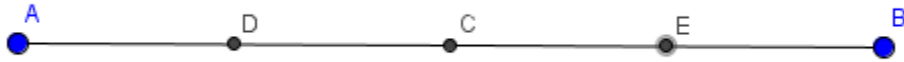


Ilustración 6: Razón matemática entre cantidades de longitud de segmentos

Vemos que \overline{AB} es cuatro veces \overline{AD} la razón respecto al tamaño de los dos segmentos es de “ser el cuádruple”, el primero en relación al segundo.

Aunque la razón es una relación entre magnitudes, no toda pareja de magnitudes forma una razón (al menos conmensurable) se debe cumplir una condición que Euclides la enuncia como:

Definición 4: Se dice que las magnitudes guardan razón entre sí cuando, al multiplicarse, puedan exceder la una a la otra (Puertas, 1994, p. 10)

Ejemplo 2: Considerando \overline{AE} y \overline{AB} del ejemplo 1, entonces como el doble de \overline{AE} es mayor a \overline{AB} entonces existe una razón entre \overline{AE} y \overline{AB} .

Ahora si dos parejas de magnitudes guardan la misma razón, entonces son proporcionales.

Proporción matemática

Llámense proporcionales las magnitudes que guardan la misma razón (Definición 6).

Ejemplo 3: Considerando las siguientes razones, tomadas del mismo ejemplo 1, tenemos que la relación que hay entre \overline{AD} y \overline{AC} , y la relación entre \overline{AC} y \overline{AB} , son la misma: “ser la mitad de”. Por lo tanto \overline{AD} y \overline{AC} , junto con \overline{AC} y \overline{AB} están en proporción, al manejar la misma relación de comparación.

Propiedades de las proporciones

A continuación, se revisarán algunas propiedades de las proporciones que comúnmente se usan al hablar de proporcionalidad. Es decir, existe una fundamentación teórica desde la obra de Euclides que permite dicha manipulación con las proporciones. Para ello se tendrá

en cuenta el análisis de Guacaneme (2012) sobre las propiedades de las proporciones y desproporciones¹¹ dadas en las proposiciones consignadas en la obra de Euclides.

- **Propiedades relacionadas con la equivalencia de razones**

Proposición 4: *Propiedad del equimúltiplo*. Si una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda que una tercera con una cuarta, cualquier equimúltiplo de la primera y la tercera guardarán la misma razón con cualquier equimúltiplo de la segunda y la cuarta respectivamente, tomados en el orden correspondiente (Puertas, 1994, p. 25).

Si $w : x :: y : z$, entonces $\forall m$ y n , $mw : nx :: my : nz$.

Ejemplo 4:

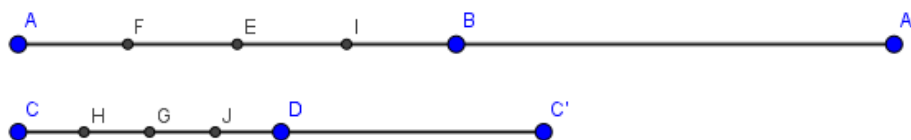


Ilustración 7: Propiedad del equimúltiplo dado en la proposición 4 del Libro V

La razón determinada por \overline{AF} y \overline{AB} es la misma que la determinada por \overline{CH} y \overline{CD} , \overline{AI} y \overline{CJ} son equimúltiplos de \overline{AF} y $\overline{CC'}$ y $\overline{AA'}$ son equimúltiplos de \overline{AB} y \overline{CD} por lo tanto la razón entre \overline{AI} y \overline{CJ} es la misma que entre $\overline{CC'}$ y $\overline{AA'}$.

De la misma forma las siguientes proposiciones se relacionan con la equivalencia de razones:

Proposición 7: Si $x = y$, entonces $x : z :: y : z$ y $z : x :: z : y$

Proposición 9: Si $x : z :: y : z$, entonces $x = y$. Y, si $z : x :: z : y$, entonces $x = y$

Proposición 11: Si $u : v :: w : x$ y $w : x :: y : z$, entonces $u : v :: y : z$

Proposición 15: $x : y :: nx : ny$

Proposición 16: Si $w : x :: y : z$, entonces $w : y :: x : z$

Proposición 17: Si $(w + x) : x :: (y + z) : z$, entonces $w : x :: y : z$

¹¹ Son llamadas así por Guacaneme (2012) haciendo alusión a situaciones con relación de comparación diferente a la equivalencia de razones.

Proposición 18: Si $w : x :: y : z$, entonces $(w + x) : x :: (y + z) : z$

Proposición 19: Si $(w + x) : (y + z) :: w : y$, entonces $(w + x) : (y + z) :: x : z$

- **Propiedades relacionadas con la desigualdad de razones**

Proposición 8: De magnitudes desiguales, la mayor guarda con una misma magnitud una razón mayor que la menor, y la misma magnitud guarda con la menor una razón mayor que con la mayor (Puertas, 1994, p. 31).

Si $x < y$ entonces $z : x > z : y$ y $x : z > y : z$.

Esta propiedad primero identifica que se puede establecer una relación de orden entre razones, desde la relación de orden de las magnitudes, y además que el orden de relacionarlas importa así si A y B son las magnitudes donde $A < B$ y C es la tercera magnitud entonces $(B, C) > (A, C)$ y $(C, A) > (C, B)$. El recíproco de esta propiedad también es cierta (Proposición 10). Si $x : z < y : z$, entonces $x > y$.

Así mismo existen otras proposiciones relacionadas con situaciones “desproporcionales” como:

Proposición 8: si $x < y$ entonces $z : x > z : y$ y $x : z > y : z$

Proposición 13: Si $u : v :: w : x$ y $w : x > y : z$, entonces $u : v > y : z$

Proposición 14: Si $w : x :: y : z$ y $w \leq y$, entonces $x \leq z$

- **Otras propiedades dadas en las proposiciones**

Proposición 16: Propiedad de alternancia. Si cuatro magnitudes son proporcionales, también por alternancia serán proporcionales. Cuando hablan de cuatro magnitudes proporciones se refiere a que la razón de la primera y la segunda es igual a la tercera y la cuarta, si se tiene lo anterior entonces también se cumple que la razón de la primera con la tercera sea igual a la segunda con la cuarta (Puertas, 1994, p. 42).

Si $w : x :: y : z$, entonces $w : y :: x : z$.

Otras proposiciones revisadas son las siguientes:

Proposición 20: Si $u : v :: x : y$ y $v : w :: y : z$ y $u \leq w$, entonces $x \leq z$

Proposición 21: Si $u : v :: y : z$ y $v : w :: x : y$ y $u \leq w$, entonces $x \leq z$

Proposición 22: Si $x_1 : x_2 :: y_1 : y_2, x_2 : x_3 :: y_2 : y_3, \dots$,

Y $x_{n-1} : x_n :: y_{n-1} : y_n$, entonces $x_1 : x_n :: y_1 : y_n$

Proposición 23: Si $u : v :: y : z$ y $v : w :: x : y$, entonces $u : w :: x : z$

Proposición 24: Si $u : v :: w : x$ y $y : v :: z : x$, entonces $(u + y) : v :: (w + z) : x$

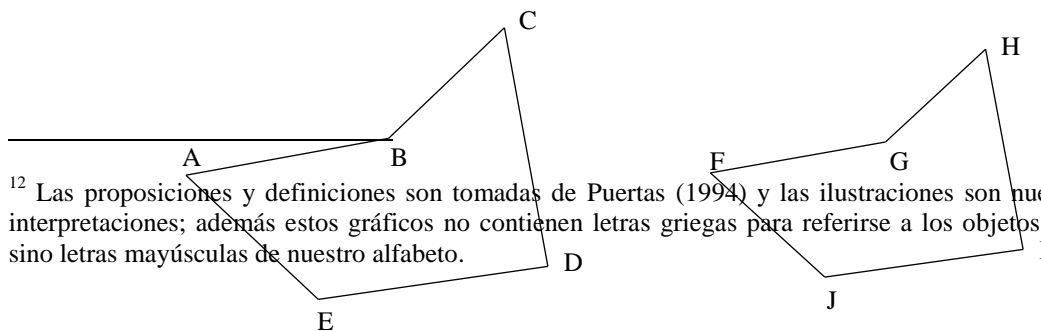
2.1.2.2 El libro VI, la proporcionalidad geométrica y la semejanza

En este libro desarrolla una teoría de la proporcionalidad geométrica y la semejanza, centrada en las magnitudes, sin incorporar la medida de la cantidad de dichas magnitudes, no obstante, sí se considera la cantidad de magnitud. Es decir, bajo esta perspectiva de Euclides, por ejemplo, se puede considerar qué tan largo es un segmento de recta (cantidad de magnitud), pero sin incorporarle un número que determine esta propiedad (medida de la cantidad de magnitud).

En este apartado no se observan asociaciones a las definiciones concretas de la razón y la proporción; se encuentran proposiciones que cimientan una teoría sobre la proporcionalidad geométrica y la semejanza; a nuestro modo de ver se muestra un contexto de aplicación de la proporcionalidad definida en el libro V. Por tal razón, a continuación se enuncian la definición 1 y algunas proposiciones¹² que se relacionan con los contextos o situaciones planteadas, en el conjunto de tareas de este trabajo de grado.

Definición 1. Figuras rectilíneas semejantes son las que tienen los ángulos iguales uno a uno y proporcionales los lados que comprenden los ángulos iguales (Puertas, 1994, p. 55).

Se entiende en esta definición una noción de *semejanza* para las figuras rectilíneas (polígonos), no así para aquellas formadas por segmentos curvos. Se establecen con esta definición las dos condiciones que conocemos actualmente para la semejanza de triángulos, ángulos congruentes y proporcionalidad entre los lados que los forman; estos pares de lados deben ocupar posiciones análogas. Además, es claro que la disposición de las figuras rectilíneas de la ilustración siguiente, muestra la misma forma u orientación sobre el plano, pero podrían disponerse de forma diferente, al aplicarse una rotación o una reflexión sobre alguna de ellas y la condición de semejanza que plantea Euclides se mantendría.



¹² Las proposiciones y definiciones son tomadas de Puertas (1994) y las ilustraciones son nuestras propias interpretaciones; además estos gráficos no contienen letras griegas para referirse a los objetos geométricos, sino letras mayúsculas de nuestro alfabeto.

Ilustración 8: Figuras rectilíneas semejantes.

Definición 3. Se dice que una recta ha sido cortada en extrema y media razón cuando la recta entera es al segmento mayor como el (segmento) mayor es al menor (Puertas, 1994, p. 56).

Mientras que la definición 1 hace alusión a la semejanza de figuras, la definición 3 refiere a la *proporcionalidad geométrica* entre segmentos. Es decir, la semejanza es una relación entre figuras rectilíneas, mientras que la proporcionalidad geométrica es una relación entre las proporciones que se pueden establecer entre las cantidades de magnitud de objetos geométricos. Para ilustrar la proporcionalidad geométrica veamos el siguiente ejemplo, en la Ilustración 9, el segmento \overline{CD} corresponde al doble de \overline{AB} y la razón asociada entre ellos sería 2 (no como número, sino como cantidad de longitud), de la misma manera \overline{GH} corresponde al doble de \overline{EF} y así los cuatro segmentos cumplen una relación de proporcionalidad: \overline{CD} es a \overline{AB} como \overline{GH} es a \overline{EF} .

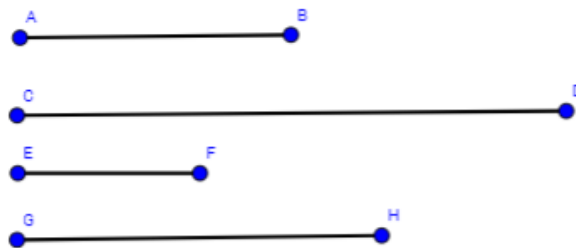


Ilustración 9: Proporcionalidad entre segmentos

Proposición 4: En los triángulos equiángulos, los lados que comprenden los ángulos iguales son proporcionales y los lados que subtienden los ángulos iguales son correspondientes (Puertas, 1994, p. 62).

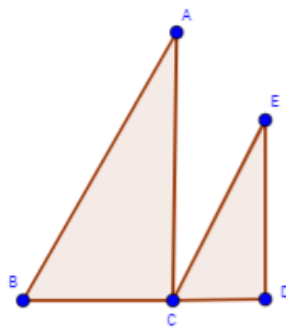


Ilustración 10: Triángulos equiángulos

Esta proposición señala el término *equiángulo*, para aludir a ángulos iguales en pares de figuras que se comparan; preferimos llamarlos congruentes. Además, esta proposición permite establecer diferentes razones que forman varias proporciones.

Según la anterior ilustración se tienen por ejemplo las siguientes proporciones: \overline{AB} es a \overline{EC} como \overline{AC} es a \overline{ED} , \overline{AC} es \overline{CB} como \overline{ED} es a \overline{DC} , \overline{CB} es \overline{BA} como \overline{DC} es \overline{CE} . Se puede apreciar que en la ilustración hay dos triángulos semejantes y que estos cumplen la definición 1.

Proposición 5: Si dos triángulos tienen sus lados proporcionales, los triángulos serán equiángulos y tendrán iguales los ángulos a los que subtienden los lados correspondientes. (Puertas, 1994, p. 63)

Esta proposición 5 es la expresión recíproca de la proposición 4. Antes a partir de la definición de triángulo equiángulo se establecía la proporcionalidad entre las cantidades de longitud de los lados, ahora en la proposición 5, a partir de la proporcionalidad entre cantidades de longitud de lados se establece la congruencia de ángulos correspondientes del triángulo.

Proposición 6: Si dos triángulos tiene un ángulo (del uno) igual a un ángulo (del otro) y tienen proporcionales los lados que comprenden los ángulos iguales, los triángulos serán equiángulos y tendrán iguales los ángulos a los que subtienden los lados correspondientes (Puertas, 1994, p. 65).

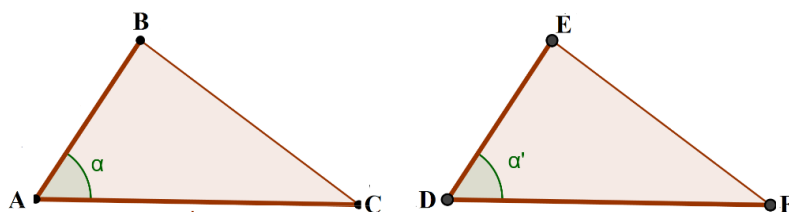


Ilustración 11: Triángulos que cumplen la proposición 6

Se puede apreciar en la ilustración anterior que los triángulos son equiángulos, como lo señala Euclides, debido a que tienen dos ángulos congruentes, α y α' y los lados que forman dichos ángulos son proporcionales, esto es: \overline{BA} es \overline{AC} como \overline{ED} es \overline{DF} . Lo anterior no es otra cosa que el criterio de la semejanza de triángulos que conocemos como LAL.

Por otro lado podemos precisar la congruencia no como la igualdad de ángulos, sino como la equivalencia de las cantidades de amplitud de los mismos. Siendo un poco estrictos con el lenguaje, podríamos decir cuando expresamos ángulos iguales, aquellos que refieren a ángulos que ocupan la misma posición y tienen semirrectas o segmentos iguales, pero esto no lo interpretamos así.

Proposición 12: Dadas tres rectas, encontrar una cuarta proporcional (Puertas, 1994, p. 74).

Entendemos el procedimiento de la regla de tres, como el enunciado que dice que dados tres valores conocidos se puede hallar un cuarto, si los dos pares de términos son proporcionales. No obstante, en el libro VII se habla de proporcionalidad geométrica y esta proposición se refiere a las longitudes de los segmentos, como magnitudes y no como números. Según Puertas (1994) para analizar este aspecto del algoritmo de la regla de tres, como hallar la cuarta proporcional entre números, se debe revisar en el Libro IX, las proposiciones 18 y 19.

La proposición 12 se puede justificar desde el teorema de Thales, dadas dos rectas paralelas sobre otras dos que se cruzan, estas generan cuatro segmentos proporcionales, entonces conocidas las longitudes de tres de ellos es posible hallar la cuarta longitud del segmento proporcional a los anteriores. Esta construcción geométrica con regla y compás permite dividir un segmento cualquiera en n-partes iguales.

Proposición 15: En los triángulos iguales que tienen un ángulo (de uno) igual a un ángulo (del otro), los lados que comprenden los ángulos iguales están inversamente relacionados. Y aquellos triángulos que tienen un ángulo (de uno) igual a un ángulo (del otro) cuyos lados que comprenden los ángulos iguales están inversamente relacionados, son iguales (Puertas, 1994, p. 77).

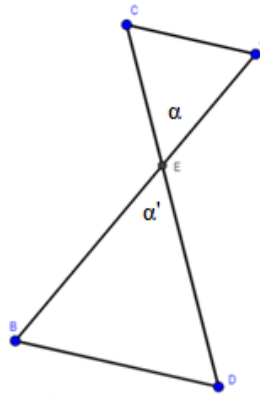


Ilustración 12: Triángulos referidos de la proposición 15

Para explicar esta proposición seguiremos la ilustración anterior, en ella se pueden apreciar dos ángulos congruentes α y α' que a su vez generan la siguiente proporción: \overline{AE} es \overline{EB} como \overline{CE} es \overline{ED} . Nótese que hay una relación de comparación (razón) entre un lado del triángulo ΔAEC y otro lado del triángulo ΔBED , es decir una proporcionalidad geométrica entre dichos segmentos.

Proposición 19: Los triángulos semejantes guardan entre sí la razón duplicada de sus lados correspondientes (Puertas, 1994, p. 83).

Para ilustrar al lector podemos ver en la imagen siguiente, la situación contemplada en la proposición 19. En ella se establece la semejanza de los triángulos ΔABC y ΔFDE , además de la proporcionalidad entre las cantidades de longitud de los lados de los triángulos de la siguiente forma: \overline{AB} es \overline{BC} como \overline{DE} es \overline{EF} .

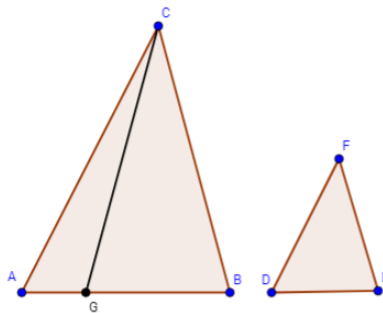


Ilustración 13: Triángulos referidos en la proposición 19

Proposición 21: Las figuras semejantes a una misma figura rectilínea son también semejantes entre sí (Puertas, 1994, p. 89).

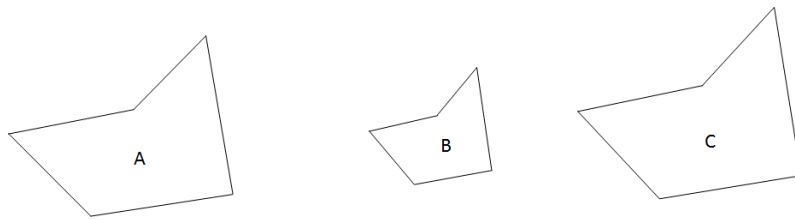


Ilustración 14: Tres figuras rectilíneas semejantes

Es bastante claro, según la anterior ilustración, que si las figuras B y C son semejantes a la figura A , entre las dos (B y C) también debe haber la misma correspondencia. Lo anterior debido a aplicar la definición 1 entre las figuras A y B , así como entre las figuras A y C , en todas ellas los ángulos son congruentes uno a uno, así como la cantidad de longitud de sus lados son proporcionales entre sí; y estas mismas propiedades se trasladan a la comparación entre B y C .

Proposición 26: Si se quita de un paralelogramo un paralelogramo semejante y situado de manera semejante al paralelogramo entero que tenga un ángulo común con él, está en torno a la misma diagonal que el (paralelogramo) entero (Puertas, 1994, p. 97).

Esta proposición plantea la semejanza entre paralelogramos que comparten una diagonal (ver la siguiente ilustración). De esta forma el paralelogramo $MNOP$ es semejante al paralelogramo $MSQR$, porque ellos cumplen con la definición 1, y se pueden establecer las siguientes proporciones entre los segmentos referidos: \overline{MN} es \overline{MS} como \overline{MP} es a \overline{MR} , \overline{PO} es \overline{RQ} como \overline{ON} es a \overline{QS} entre otras. Esta comparación de proporcionalidad es referida a las cantidades de longitud de dichos segmentos y a la cantidad de amplitud de los ángulos correspondientes.

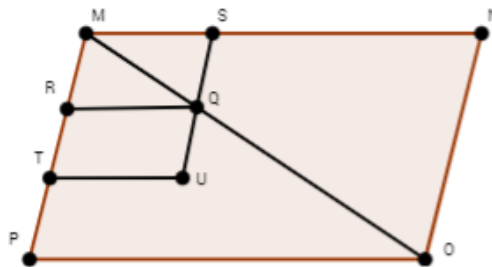


Ilustración 15: Paralelogramo que ilustra la proposición 26

Proposición 32: Si dos triángulos que tienen dos lados (de uno) proporcionales a dos lados (del otro) se construyen unidos por un ángulo de modo que sus lados correspondientes sean paralelos, los restantes lados de los triángulos estarán en línea recta (Puertas, 1994, p. 106).

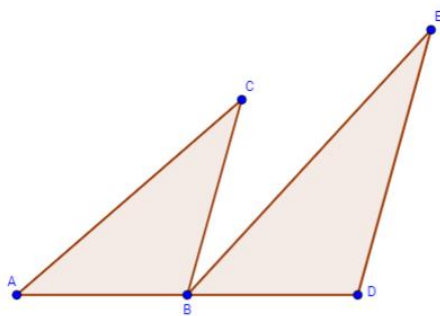


Ilustración 16: Triángulos unidos por un ángulo y lados correspondientes paralelos

Como se aprecia en la ilustración anterior, los triángulos ΔABC y ΔBDE son semejantes por la definición 1 y se establece la proporción \overline{CA} es \overline{EB} como \overline{CB} es a \overline{ED} ; se puede apreciar además que hay varios segmentos de los triángulos (lados) que son paralelos: \overline{CA} y \overline{EB} , \overline{CB} y \overline{ED} , así como \overline{AB} y \overline{BD} . Esta proposición 32 ilustra tanto la semejanza de figuras rectilíneas como la proporcionalidad geométrica entre segmentos de lados.

2.1.2.3 El libro VII, la proporcionalidad desde las cantidades

En este libro se plantea una teoría sobre la proporcionalidad centrada sobre números, es decir desde la Aritmética (Oller & Gairín, 2013). En este libro, como afirman los mismos autores al estudiar la obra de Euclides, no se hace una definición clara y precisa sobre los términos “razón” y “proporción”, pero sí se hace alusión directa a ellos a partir de tres relaciones diferentes, entre cada par de números. Esto no quiere decir que la razón o la proporción sea un número en sí, sino que estas son el resultado de la comparación de dos elementos, en este caso números.

2.1.2.4 Razón matemática

Como se dirá recurrentemente a lo largo de este capítulo, una razón es una relación matemática. Euclides define tres relaciones que son disyuntas, es decir una de ellas no depende de las otras dos para definirse o referenciarse.

Definición 3: Relación parte. Un número es parte de un número, el menor del mayor, cuando mide al mayor.

Definición 4: Relación partes. Un número es partes de un número, el menor del mayor, cuando no mide al mayor.

Definición 5: Relación múltiplo. el mayor es múltiplo del menor cuando es medido por el menor (Puertas, 1994, p. 113).

Si dos números se relacionan mediante una de las tres relaciones anteriores entonces diremos que los números determinan una **razón**.

Ejemplo 1:

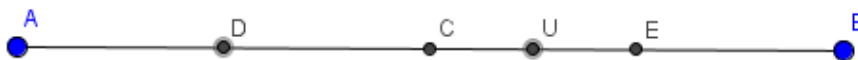


Ilustración 17: Los tres tipos de relación entre números

El número dado por AD mide a AB por lo tanto AD es **parte** de AB , como AD no mide AU entonces AD es **partes** de UB y como CU mide a AD entonces AD es **múltiplo** de CU . Observe que AD se ha relacionado con otras medidas mediante las tres relaciones enunciadas, y para cada relación que involucre a AD esta se relaciona con otras medidas diferentes. En otras palabras, los conjuntos que determinan cada relación son disyuntos, donde los elementos de esos conjuntos son parejas de magnitudes que se relacionan mediante una de las tres relaciones definidas anteriormente.

2.1.2.5 Proporción matemática

Definición 21: Unos números son proporcionales cuando el primero es el mismo múltiplo o la misma parte o las mismas partes del segundo que el tercero del cuarto (Puertas, 1994, p. 118).

Ejemplo 2: Los números CU , AD , AC y AB del ejemplo 1, son proporcionales porque AD es el doble de CU y AB es el doble de AC .

2.1.2.6 Propiedades de las razones y proporciones

Dentro de las proposiciones de este libro de la obra de Euclides, se destacan algunas que pueden ser tomadas como propiedades de las razones y proporciones matemáticas desde esta perspectiva. Sin embargo, el tratamiento e interpretación de estas proposiciones no es tan evidente como lo apreciado en el Libro V, donde aparecía de manera más explícita.

Proposición 4: Propiedad de la existencia de la razón. Todo número es parte o partes de todo número, el menor del mayor (Puertas, 1994, p. 126).

Proposición 5: Propiedad de la suma entre razones. Si un número es parte de un número, y otro es la misma parte de otro, la suma será también la misma parte de la suma que el uno del otro (Puertas, 1994, p. 127).

En términos de razones, si la razón entre A y B , dos números, es la misma que entre C y D , otros dos números, entonces la razón entre $A + C$ y $B + D$ es la misma que A y C .

Proposición 9: Propiedad de alternancia de razones. Si un número es parte de un número y otro número es la misma parte de otro, también, por alternancia, la parte o partes que el primero es del tercero, la misma parte o partes será el segundo del cuarto (Puertas, 1994, p. 131).

Obsérvese que esta propiedad también es enunciada en el libro V de Euclides (ver sesión anterior) y se conoce como el “intercambio de medios” en una proporción. La proposición 10 la enuncia para la relación partes, mientras que la proposición 13 la enuncia para toda proporción.

Proposición 19: Propiedad fundamental de proporciones. Si cuatro números son proporcionales, el producto del primero y el cuarto será igual al del segundo y el tercero; y si el producto del primero y el cuarto es igual al producto del segundo y el tercero, los cuatro números serán proporcionales (Puertas, 1994, p. 141).

Esta propiedad permite relacionar las razones iguales con la multiplicación de números, es decir que ya no se necesitaría determinar cuándo dos relaciones son la misma (iguales), solo bastaría con multiplicar los medios y multiplicar los extremos y si los productos son los mismos entonces se establecería una proporción.

Pensamos que en esta interpretación se da la ruptura entre lo relacional, característico de las razones, y lo operativo distintivo del manejo de cantidades. La proporción debe ser entendida y dispuesta para la enseñanza, como la comparación de relaciones iguales y no como un algoritmo carente de significado. La proposición 19 del Libro VII, mal entendida desde la teoría de las cantidades, no permite inferir comparaciones entre parejas de razones matemáticas.

2.1.3 Teoría de las magnitudes para la proporcionalidad

Al hablar de proporcionalidad es inevitable usar términos como: magnitud, cantidad, medida, espacio de medida o espacio métrico, entre otros, por eso es necesario precisar en el lenguaje, porque recurrentemente serán usados estos conceptos, por tanto, deben considerarse sus alcances y los ámbitos de aplicación de lo referenciado. Teniendo en cuenta lo estudiado por Guacaneme (2001) y Obando, Vasco, y Arboleda (2009) se enunciará el concepto de *magnitud*, y como se puede hacer una aproximación al concepto de *proporcionalidad* desde esta perspectiva.

2.1.3.1 El concepto de magnitud

Según la RAE, el término “magnitud” se asocia con el tamaño de los cuerpos, pero desde el punto de vista de la Física, es una propiedad o característica de los objetos que puede ser medida; (e.g., la longitud, el área, el volumen, la temperatura, el peso, etc.). Pero es

conveniente desde el punto de vista de las Matemáticas, para nuestro propósito de formalización dentro de la teoría a construir, enunciar un concepto que abarque los diferentes conjuntos que podrían ser medibles (si se nos permite la asociación de ideas).

Esta formalización inicia con el enunciado de la magnitud, como un conjunto especial, según lo señala Guacaneme (2001):

Si en un conjunto homogéneo¹³ \mathcal{M} se ha definido la operación suma $(+)$ ¹⁴, los elementos de \mathcal{M} definen una **magnitud**, entendiendo por tal la cualidad común que hace que los elementos de \mathcal{M} sean igualables y sumables (p.75).

En otras palabras la *magnitud* es el concepto usado para asociar una cualidad común a todos los elementos de un conjunto, esta cualidad permite relacionarlos (igualarlos) y operarlos (sumarlos) (Guacaneme, 2001; citando a Trocóniz y Belda, 1959). Usualmente este término se vincula con las magnitudes físicas y geométricas usuales, pero el sentido del conjunto \mathcal{M} , mencionado anteriormente, es mucho más amplio, pues se aplica a todo conjunto que muestra esta estructura particular, con una cualidad común entre sus elementos.

Ahora la pregunta sería cómo poder comparar los elementos de \mathcal{M} entre sí, para establecer diferenciaciones entre sus elementos. Un principio de *orden* permitirá una estructura más robusta para nuestro propósito de precisar los conceptos, además de establecer comparaciones entre los elementos del conjunto referenciado.

Dado lo anterior Guacaneme (2001) también precisa que: “una magnitud se llama **escalar** si los elementos de \mathcal{M} se pueden *ordenar linealmente*¹⁵” (p.78).

Según esto muchos conjuntos numéricos serían a la vez magnitudes escalares; estarían dentro de esta clasificación, los enteros, los racionales y los reales, con la suma usual y el orden mencionado antes, así mismo los números complejos también serían magnitudes, con

¹³ Se dice que un conjunto no vacío \mathcal{M} , es *homogéneo*, si entre sus elementos se puede establecer una relación de *igualdad* ($=$), la cual es una relación de equivalencia, es decir, a la vez es reflexiva, simétrica y transitiva.

¹⁴ La *suma* es una operación cualquiera definida en el conjunto \mathcal{M} , tal que aplicada a dos elementos cualesquiera A, B de \mathcal{M} , da cuenta de otro $(A + B)$ de \mathcal{M} , denominado suma entre A y B ; esta suma satisface los principios de: uniformidad, conmutatividad, asociatividad y de la existencia del elemento neutro (todo elemento de \mathcal{M} , al sumarse con este elemento da como resultado él mismo).

¹⁵ Se entiende que los elementos de \mathcal{M} se pueden ordenar linealmente cuando es posible definir en \mathcal{M} una relación de orden (\leq) si se verifican las siguientes condiciones:

- i) $\forall A, B \in \mathcal{M}$, se verifica una y sólo una de estas relaciones: $A = B$ ó $A < B$ ó $A > B$.
- ii) $\forall A, B, C \in \mathcal{M}$, si $A < B$ y $B \leq C$ entonces $A < C$
- iii) $\forall A, B, C \in \mathcal{M}$, si $A < B$ entonces $A + C < B + C$

la suma definida dentro de su estructura numérica, pero con un orden particular. Lo que formalmente implicaría asociar los números con las magnitudes, bajo este punto de vista (Guacaneme, 2001, p. 78).

2.1.3.2 *Razón matemática*

Usualmente se acostumbra asociar el concepto de razón matemática a un cociente, pero buscaremos otra vía de entendimiento que no genere contradicciones, para nuestro propósito usaremos el concepto de pareja ordenada.

Si se opera el conjunto \mathcal{M}_1 (el mencionado antes para definir la cualidad magnitud) con otro \mathcal{M}_2 de la misma naturaleza, mediante el producto cartesiano, se obtiene otro conjunto de parejas ordenadas que usualmente se refiere al conjunto $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ que representa todas las relaciones entre los elementos de los conjuntos \mathcal{M}_1 y \mathcal{M}_2 en ese orden respectivo.

En concordancia con lo anterior entendemos por **razón matemática** a cualquier elemento de $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$.

Por ahora no interesa precisar o saber cómo se da esta relación de \mathcal{M}_1 hacia \mathcal{M}_2 , solo conviene decir que (a, b) forma una razón matemática, y que obviamente las razones (a, b) y (b, a) no son las mismas¹⁶, porque es claro que no representan el mismo elemento matemático, por el sentido de la misma relación (de \mathcal{M}_1 hacia \mathcal{M}_2) y por la visión usual de cociente con el que se abordan las razones matemáticas, es decir no representan la misma cantidad. Además puede darse dicha relación dentro de un mismo conjunto inclusive (de \mathcal{M} en \mathcal{M}), por ejemplo cuando se comparan longitudes, áreas o volúmenes entre sí.

2.1.3.3 *Proporción matemática*

Ahora bien, desde la forma usual, la igualdad de dos razones define o forma una proporción, desde esta perspectiva, una proporción se define como la relación entre relaciones (razones).

Dado el conjunto $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ existe una relación \mathcal{R} de parejas de parejas ordenadas tal que:

$$\mathcal{R} = \{((a, b), (c, d)) \in \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 / (a, b) \cong (\alpha c, \alpha d)\}, \text{ con } \alpha \in R$$

¹⁶ Además el hecho que exista (a, b) no garantiza que exista (b, a) tómese el caso de $\mathbb{R} \times \mathbb{N}$, existe $(-2, 2)$ pero no existe $(2, -2)$.

Así \mathcal{R} forma un nuevo conjunto al que denotaremos por $[(a, b)]$, la clase de equivalencia¹⁷ de todas las parejas ordenadas de $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$, que cumplen la relación \mathcal{R} . Esta relación de equivalencia, determina parejas (de parejas ordenadas) que están en **proporción**. Los elementos de \mathcal{R} son de la forma: $((a, b), (\alpha c, \alpha d))$.

En relación a la pareja (a, b) ¹⁸ se establecerían así infinitas parejas (c, d) que estén en proporción a (a, b) , bastaría con multiplicar cada componente de (a, b) por un α diferente cada vez. No obstante $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$, define algunos puntos, si la naturaleza de los conjuntos es finita, como también podría ser una cuadrícula infinita de puntos (en cuanto a su extensión como superficie), si el producto cruz se define entre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, volviéndose esta cada vez más densa si se usan otros conjuntos numéricos (rationales, reales, etc.).

Por ejemplo si tomamos dentro de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, a la pareja $(2,1)$, a esta se le pueden asignar las parejas $(4,2)$, $(6,3)$, $(8,4)$ y $(10,5)$ entre otras (ver Ilustración 18).

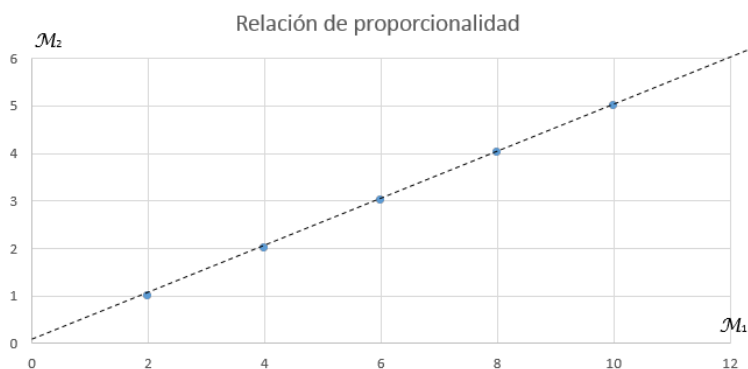


Ilustración 18: Relación de proporcionalidad desde la teoría de las magnitudes

En el ejemplo anterior cada pareja en relación a las otras forma una proporción, además podría establecerse visualmente una línea imaginaria o rayo desde el origen (línea punteada en la figura anterior) en el plano cartesiano, sobre la cual estarían todas aquellas parejas ordenadas de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ que son proporcionales a la pareja $(2,1)$. Dicha cantidad de parejas ordenadas sería infinita, dependiendo la cantidad de puntos o parejas, de la naturaleza discreta o continua del conjunto \mathcal{M} .

Es claro que anteriormente relacionamos parejas ordenadas vinculadas a $(2,1)$, es decir que son proporcionales a ella; pero también existen otras familias de parejas proporcionales, y estas tendrán su propio rayo desde el origen con diferente inclinación al que cruza por

¹⁷ Es de equivalencia si la relación es reflexiva, simétrica y transitiva. Además, no podemos hablar de parejas iguales, porque sólo habría una sola pareja relacionada a sí misma.

¹⁸ Parejas ordenadas diferentes a $(0,0)$

(2,1). Existen además muchos tipos de familias de parejas ordenadas (que puede ser proporcionales o no proporcionales), pero solo nos ocuparemos de aquellas con cierta característica o aplicación funcional particular.

2.1.3.4 La función de proporcionalidad

Según la RAE, la “proporcionalidad” es una conformidad o proporción de unas partes con el todo o de cosas relacionadas entre sí. Para nuestro propósito, en relación a lo ya mencionado anteriormente, definiremos la proporcionalidad como una función.

Sea $f: \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$ una función¹⁹ biyectiva, llamada *proporcionalidad*, tal que:

- a) $f(a_1 + a_2) = f(a_1) + f(a_2)$ (Homogeneidad con respecto a la suma).
- b) $f(\lambda a) = \lambda f(a)$ (Homogeneidad con respecto a la multiplicación por un escalar).
- c) $\forall a \in \mathcal{M}_1, \frac{f(a)}{a} = k$.

Siguiendo con el ejemplo anterior de proporciones definido en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, veamos qué pasa con esta lista de parejas ordenadas: (2,1), (4,2), (6,3), (8,4) y (10,5), a la luz de esta definición.

Para las parejas (2,1) y (4,2) se tiene la propiedad a); $f(2 + 4) = f(2) + f(4)$, por lo tanto $f(6) = 1 + 2$, es decir verifica la primera propiedad $f(6) = 3$.

Así mismo existe un λ , tal que $f(3 * 2) = 3 \odot f(2)$, por el cual $f(6) = 3 \odot 1$, verificando nuevamente que $f(6) = 3$; comprobando la propiedad b) para este caso.

Para el lector debe ser claro, luego de verificar para las cinco parejas listadas en el ejemplo, el cumplimiento de la propiedad c). Un caso particular mostraría que $\frac{f(6)}{6} = \frac{1}{2}$ también se puede corroborar que $\frac{f(8)}{8} = \frac{1}{2}$. Algunos llaman a este último valor obtenido la constante de proporcionalidad (k).

2.1.4 Teoría de la proporcionalidad centrada en los números reales

Consideramos que esta perspectiva es la usual, en el tratamiento que se da a los aspectos relacionados con la proporcionalidad. No es nuestra intención profundizar en la naturaleza del número real, como elemento abstracto, representable a partir de los infinitos puntos que

¹⁹Definida entre dos conjuntos homogéneos, con una suma definida y un orden establecido, es decir con una magnitud definida.

componen una recta numérica. En ella, por ejemplo, el número real puede representar una doble naturaleza, como magnitud o cantidad.

El número real puede ser una *magnitud*, cuando se considera una porción de la recta numérica (un conjunto de puntos, un segmento) o puede representar una *cantidad*, una posición, o un valor específico sobre ella (un único punto). Consideramos que esta doble naturaleza del número real, tiene fuertes implicaciones sobre la enseñanza de la proporcionalidad. Las concepciones que tienen los docentes sobre el número real y los elementos de la proporcionalidad, inciden decisivamente sobre sus prácticas docentes, de ahí la importancia de buscar precisión en los conceptos o al menos otros enfoques teóricos de la proporcionalidad.

Tomaremos de Guacaneme (2001) las siguientes definiciones. En primer lugar, definamos el concepto de *fracción de números reales*, como un ente constituido por un *par ordenado* de números reales, donde se supone el segundo de ellos no cero. Si α y β son estos, la fracción se representa así: $\frac{\alpha}{\beta}$. A pesar de usar la fracción, no necesariamente nos referiremos a un cociente entre dos reales, sino más bien a una pareja ordenada de números reales.

Dado lo anterior, precisaremos el siguiente conjunto, un conjunto de fracciones reales que puede denotarse como $\mathcal{F}_{\mathbb{R}} = \{(\alpha, \beta) / \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} - \{0\}$. Por ahora no se aclarará porque las segundas componentes, no pueden ser 0, sin embargo sabemos que sí hay razones con consecuente 0, igual se acomodarían a este modelo que se quiere construir.

2.1.4.1 *Razón matemática*

Al cociente indicado $\frac{\alpha}{\beta}$ ó $\alpha : \beta$ se le denomina también **razón** de los números α y β , donde α (dividendo) es llamado antecedente y β (divisor) consecuente.

Analizando dicha definición podríamos inferir, al hablar de igualdad entre el cociente exacto y la fracción de números reales, ciertas contradicciones, como por ejemplo ver una pareja ordenada (α, β) con doble naturaleza, como número real y como pareja de números reales. Tal vez la doble naturaleza del número real, como se señaló antes, permita hacer esto, pero esto genera algo de confusión.

Establecer una función que transforme la pareja en un único valor resolvería la anterior cuestión. Una función que convierta la pareja (α, β) en un número real γ , o más precisamente una *función cociente* $\mathcal{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, que asigna a cada pareja ordenada (α, β) el cociente exacto γ de α y β .

Un criterio de *equivalencia* (no de igualdad) entre fracciones, en el cual las fracciones son *equivalentes* ($\frac{\alpha}{\beta} \cong \frac{\lambda\alpha}{\lambda\beta}$), determina un nuevo conjunto de fracciones equivalentes a otra dada. Se ha definido una relación de equivalencia en el conjunto $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ a través del cociente exacto, es decir, una relación de equivalencia entre parejas ordenadas diferente a la igualdad usual. Es obvio que esta relación de equivalencia (\cong) determina una partición del conjunto $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$; como lo señala Guacaneme (2001) cada una de las clases de equivalencia así determinadas podría representarse a través de una de las fracciones de términos reales, o por el cociente exacto asociado mediante \mathcal{F} .

De lo anterior puede deducirse, de la misma forma que se hizo en la perspectiva de la proporcionalidad desde la *teoría de las magnitudes*, que cada par de términos de dicha clase de equivalencia, forma una proporción matemática. Por ejemplo, las parejas (4,2) y (6,3), tienen asociado bajo \mathcal{F} el cociente 2, y ambas parejas ordenadas pertenecen a la clase de equivalencia generada por la pareja (2,1).

2.1.4.2 Proporción matemática

Llamaremos *proporción* a la igualdad de dos razones y la escribiremos así:

$$\frac{\alpha}{\beta} \cong \frac{\gamma}{\delta} \text{ o bien } \alpha : \beta \cong \gamma : \delta$$

donde los números α y δ se llaman *extremos* y los números β y γ *medios*; el número δ se denomina también *cuarta proporcional* de los números α , β y γ .

Coincidimos con Guacaneme (2001) en pensar que:

... La proporción como una relación definida entre dos elementos de $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ —es decir, una relación entre dos parejas ordenadas— que podríamos representar a través de la pareja ordenada de parejas $((\alpha, \beta), (\gamma, \delta))$ —e incluso, sacrificando el rigor, a través de la cuádrupla ordenada $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ — tal que sus elementos satisfagan la condición $\frac{\alpha}{\beta} \cong \frac{\gamma}{\delta}$ p.69.

De la misma manera que lo hicimos en la anterior perspectiva teórica de la proporcionalidad, podríamos establecer un rayo (línea desde el origen de coordenadas), al representar gráficamente aquellas razones (parejas de números reales), que forman una proporción con una razón dada. Bastaría con definir un conjunto (subconjunto de $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$) donde se ubicarán aquellas parejas que forman una proporción con una pareja dada.

Así dado el conjunto $\mathcal{F}_{\mathbb{R}} \times \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ podríamos construir un subconjunto \mathcal{P} de $\mathcal{F}_{\mathbb{R}} \times \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ tal que todos sus elementos fuesen proporciones, es decir:

$$\mathcal{P} = \{((\alpha, \beta), (\gamma, \delta)) \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}} \times \mathcal{F}_{\mathbb{R}} / (\alpha, \beta) \cong (\gamma, \delta)\}$$

2.1.5 La razón y la proporción como relaciones de comparación

Hasta aquí se revisaron los cuatro referentes teóricos mencionados, tratando de buscar definiciones para los términos de razón y proporción desde cada perspectiva. Se puede concluir que, desde cada una de las perspectivas examinadas, tanto la razón como la proporción se tipifican como relaciones de comparación entre dos objetos matemáticos, que pueden ser tanto números como magnitudes. También es oportuno señalar que quitarle ese sentido de la comparación relacional a estos elementos matemáticos (la razón y proporción) por la necesidad de operar o cuantificar es quitarles la esencia a estos elementos. Es en este punto donde surgen contradicciones porque al momento de la enseñanza, se evidencia prioridad por estimar mediante una cantidad dichas relaciones de comparación.

Así mismo se precisó principalmente desde la obra *Elementos* de Euclides, las propiedades de las proporciones que pueden aportar de manera significativa a la elaboración de las situaciones de aula que se diseñan en el trabajo de grado. Es bastante evidente la influencia que Euclides ha mostrado sobre toda la obra matemática, durante más de dos mil años, lo cual no se debe despreciar. Podrían haberse tomado otros referentes teóricos para tal fin, pero *Elementos* fundamenta el sentido teórico que captura la propuesta de intervención en el aula del trabajo de grado.

En la siguiente sección se precisará qué elementos posee el razonamiento proporcional y qué relación guarda este con las perspectivas teóricas revisadas en esta sección. Explorar esta forma de razonar es el interés primordial del estudio del trabajo de grado, porque al elaborar una propuesta de intervención en el aula se hace necesario caracterizar que es el razonamiento proporcional.

2.2 RAZONAMIENTO PROPORCIONAL

En esta sección se enuncian los elementos que caracterizan el razonamiento proporcional, porque es de nuestro interés identificar estos rasgos para ser usados en el desarrollo del trabajo de grado. Este aspecto del pensamiento es una herramienta vital en la resolución de problemas que involucran la proporcionalidad, entre cantidades (números) o entre magnitudes, pero son las segundas nuestro foco de atención en el contexto de este escrito, específicamente como relaciones de comparación.

La investigación sobre el tema muestra que esta forma de pensamiento está asociada a la razón y la proporción, pero como lo señalan Perry, Guacaneme, Andrade y Fernández (2003, citando a Freudenthal, 1983), la enseñanza de estos elementos ha estado centrada en los contextos numéricos, asociando la razón a un cociente o número y a la proporción a la

igualdad de dos cocientes o dos números, desconociendo el carácter de relación de comparación de dichas relaciones matemáticas.

Dentro de la búsqueda de estos rasgos del razonamiento proporcional, creemos que esta forma de pensamiento en los estudiantes, se expresa en el desempeño de habilidades relacionadas con la selección, implementación y evaluación de estrategias para la resolución de problemas; además de la justificación y la comunicación de estas y sus resultados.

2.2.1 ¿Qué es el razonamiento proporcional?

Para muchos autores es referencia obligada considerar las ideas de Lesh, R., Post, T., y Behr (1988, p. 93) sobre el razonamiento proporcional, como la habilidad que le permite a las personas, abordar situaciones asociadas a la variación, el cambio, un sentido de covariación y comparaciones múltiples, y la capacidad de procesar y almacenar mentalmente varias piezas de información; este está estrechamente ligado con la inferencia y la predicción e involucra tanto métodos de pensamiento cuantitativo como métodos de pensamiento cualitativo²⁰.

Según Lamon (2012) este tipo de razonamiento tiene que ver con el nivel de argumentación logrado para justificar enunciados y que establecen las relaciones estructurales entre cuatro cantidades. Estos enunciados están hechos en contextos que al mismo tiempo involucran la covariación entre cantidades y la invariancia de razones o productos, por lo tanto el razonamiento proporcional podría ser considerado como la habilidad que no sólo permite diferenciar la relación multiplicativa entre dos cantidades, sino, también como la capacidad de poder extender dicha relación a otro par de cantidades (Sánchez Ordoñez, 2013, p. 12).

El razonamiento proporcional visto así, resulta restringido y descontextualizado de un sinnúmero de situaciones que podrían asociarse a esta manera de argumentar o justificar procedimientos de solución de situaciones. Se observa en la mayoría de la literatura revisada sobre el tema, dos cuestiones importantes para señalar: i) la razón es vista como una relación multiplicativa exclusivamente y ii) las situaciones de aula (definiciones, ejemplos, problemas, ejercicios, actividades, etc) sobre razonamiento proporcional están centradas en contextos asociados a hallar la cuarta proporcional.

²⁰ Preferimos llamar al componente cualitativo, cuantitativo no numérico; este aborda cuestiones de estimación y comparaciones relacionales (como “ser el doble de”, “ser la tercera parte de”, etc.).

Para lo primero bastaría señalar el acercamiento aditivo que se hace por el método de la antanairesis a los términos de razón y proporción en contraposición a lo que señala la mayoría sobre la razón matemática, como relación de comparación multiplicativa. Se mostró en la sección anterior que es posible razonar proporcionalmente al establecer relaciones de comparación entre parejas de números, o parejas de magnitudes homogéneas (razones), o entre pares de parejas de estos elementos (proporciones).

Con respecto a lo segundo, desde el libro V de Elementos de Euclides, se plantea una teoría sobre proporcionalidad. A partir de las proposiciones que dan cuenta y justificación del significado de razón, proporción y las propiedades de las proporciones, se establecen los elementos necesarios o herramientas para hablar de un razonamiento proporcional. Pero desde esta perspectiva se muestran aquellas situaciones que no sólo hablan de hallar la cuarta proporcional, sino de aquellas que hablan de situaciones “desproporcionales”. Por ejemplo, aquellas relaciones de comparación de razones, no centradas en la equivalencia de ellas.

Claramente en relación con lo anterior, se debe destacar que razonar proporcionalmente también se refiere a otro tipo de situaciones que no solo se refieran a la manipulación de razones en proporciones y “desproporciones”, sino también al entendimiento de aquellas funciones que relacionan dos magnitudes que se comparan, específicamente aquellas que cumplen las características de la función de proporcionalidad definida en la sección 3.3.4. A eso habría que referirse al hablar de razonamiento proporcional, al manejo de las proporciones, las “desproporciones” y la función de proporcionalidad entre dos magnitudes.

También habría que considerar sobre qué nivel de escolaridad se desarrolla la propuesta de intervención curricular. Como se señaló anteriormente es sobre el grado séptimo de la Educación Básica que se aplicará la secuencia de actividades, por lo que se descartaría la función de proporcionalidad para su estudio en el aula.

2.2.2 Elementos del razonamiento proporcional

Para nuestro propósito del trabajo de grado, diremos inicialmente que el estudiante posee razonamiento proporcional cuando:

- a) Distingue situaciones proporcionales de aquellas que no son proporcionales (e.g. situaciones proporcionales y situaciones aditivas) y
- b) Cuando aplica estrategias o técnicas asociadas al tratamiento de situaciones proporcionales.

De lo anterior se deduce que, para diseñar una propuesta de intervención en el aula centrada en el desarrollo del razonamiento proporcional, se deben considerar *las estrategias de*

solución en situaciones de proporcionalidad. Este elemento como lo señalan Lamon (2012) y Singh (2000) es un factor decisivo en la comprensión, por parte de los estudiantes, de los conceptos de razón y proporción asociados a los problemas proporcionales.

2.2.3 Estrategias de resolución de situaciones proporcionales

Varias investigaciones identifican y caracterizan las estrategias usadas por los estudiantes al resolver situaciones de proporcionalidad directa (Lesh, R., Post, T., & Behr, 1988; Silvestre & Da-Ponte, 2011). Dentro de estas se señalan:

- a) *La razón unitaria*: es una estrategia intuitiva conocida como “cuanto para uno” que involucra el cálculo de la razón unitaria en problemas de división, y el cálculo de múltiplos de la razón unitaria en problemas de multiplicación.
- b) *El factor de cambio o factor escalar*: es una estrategia conocida como “tantas veces como”, condicionada a aspectos numéricos de los problemas. En ella, dependiendo de las cantidades implicadas en el problema, el estudiante busca relaciones alternas entre ellas.
- c) *La comparación de las razones*: es una estrategia asociada a problemas de comparación que permite establecer razones unitarias, a través de dos divisiones.
- d) *El algoritmo del producto cruzado o regla de tres simple*²¹: es una estrategia en la que el estudiante elabora inicialmente un esquema, dando cuenta de las magnitudes y cantidades del problema. A continuación, se multiplica de forma cruzada, los cuatro términos resultantes del esquema, luego de la expresión resultante, se despeja el valor desconocido o incógnita del problema.

²¹ Esta estrategia corresponde a hallar la cuarta proporcional; para nuestro trabajo de grado se pueden diseñar tareas con razones que involucren magnitudes y no números, y para su solución, no necesariamente se debe usar el algoritmo de regla de tres.

3 TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE DIBUJO ASOCIADOS CON LA PROPORCIONALIDAD GEOMÉTRICA

En concordancia con el desarrollo del segundo objetivo específico del trabajo de grado, en este capítulo se describen los aspectos relacionados con el conjunto de tareas, que nos permiten analizar el desarrollo de un aspecto del razonamiento proporcional en el grado séptimo de la Educación Básica, la proporcionalidad geométrica y la semejanza de figuras planas. Esta descripción es vista desde la perspectiva del conocimiento necesario para la enseñanza, y plantea, a partir de las *técnicas e instrumentos* que permiten dibujar proporcionalmente, contextos de aplicación en las tareas propuestas que promuevan el razonamiento proporcional. Es así como enunciamos en este trabajo de grado, un conjunto de tareas desde la perspectiva de la práctica y uso de cierto tipo de técnicas e instrumentos para dibujar como: a) *La cuadrícula*, b) *la proyección del lápiz sobre la imagen para capturar longitudes y ángulos*, c) *el pantógrafo*, y d) *el divisor de proporciones*.

Fiol y Fortuny (1990) indican que aprender a dibujar involucra lograr que la imagen y su reproducción estén en proporción, es decir debe haber una correspondencia entre las partes de la imagen y lo dibujado. A esta relación de correspondencia preferimos llamarla semejanza, no en el sentido del término dado desde el lenguaje común, de tener la misma forma, sino desde aquella acepción de la palabra de poseer ciertos atributos matemáticos que permiten asociar la imagen y su reproducción.

Esta habilidad en los estudiantes de dibujar, se ha puesto a prueba durante toda su vida escolar. Cada vez que ellos toman apuntes del tablero, al copiar imágenes, esquemas, tablas, etc.; también cuando ellos deben diseñar una cartelera o aviso y disponen del espacio de trabajo en relación a lo que diagraman. Al elaborar carteles los estudiantes deben: centrar o justificar el texto, escoger el tamaño adecuado de la letra y organizar el texto e imágenes al hacer un bosquejo de la información que quieren comunicar. Todas las anteriores tareas contemplan el uso de esta habilidad en los estudiantes a lo largo de su vida escolar.

En la realización exitosa de estas tareas se puede evidenciar un intuitivo razonamiento proporcional de los estudiantes, porque logran realizar diseños adecuados y estéticamente agradables. Inmediatamente surgen los siguientes interrogantes: ¿estos estudiantes son

conscientes de la semejanza geométrica que manejan al dibujar? ¿Aquellos estudiantes que no son buenos para dibujar, pueden mejorar sus habilidades mediante ciertas técnicas e instrumentos asociados con la proporcionalidad geométrica?

Desde nuestra experiencia docente creemos que dibujar bien requiere talento y el desarrollo de cierto tipo de habilidades, a partir del entrenamiento de las técnicas adecuadas. Pero no todas las personas tienen talento para dibujar, es decir una vista aguda que permita estimar de forma adecuada, las proporciones entre las imágenes y sus reproducciones, sin tanto despliegue de instrumentos de medida. Por tal razón, planteamos que mediante cierto tipo de tareas matemáticas, asociadas con la proporcionalidad geométrica y la semejanza de figuras al dibujar, se puede mejorar esta habilidad básica de toda persona.

Por otra parte, la implementación de estas técnicas e instrumentos del dibujo, asociadas a nuestro objeto matemático deben encajar en el diseño, elaboración e implementación de un grupo de talleres que respondan al objetivo de este proyecto de grado. Por lo tanto, creemos que uno de los aspectos más relevantes en la gestión del profesor de matemáticas es la preparación o escogencia de tareas para la enseñanza, de tal forma que esas decisiones sobre la enseñanza deben girar en torno a las siguientes preguntas:

¿Cuál es el conocimiento matemático necesario para la enseñanza de dicho contenido desarrollado en una secuencia o conjunto de tareas? ¿Cuáles son los elementos dentro del anterior análisis que permiten tomar decisiones sobre el diseño de dichas tareas?

Con respecto a elaborar una secuencia de trabajo o conjunto de tareas para desarrollar el pensamiento proporcional, creemos como Perry, et al. (2003, p. 18) que esta “hace referencia a la actividad requerida para llegar a tener por escrito una serie de tareas y preguntas secuenciadas y articuladas para proponer a los estudiantes con una determinada intención relativa al aprendizaje”. Este diseño busca hacer todas las consideraciones al respecto de las actividades planteadas en el conjunto de tareas, como por ejemplo:

- Los conceptos y procedimientos asociados a la proporcionalidad geométrica y la semejanza de figuras, así como métodos alternos para medir usando la semejanza de triángulos (Conocimiento común del contenido).
- El objetivo de cada tarea propuesta, en términos de la comprensión de los objetos matemáticos implicados (Conocimiento del currículo y del horizonte matemático).
- La pertinencia de las tareas y su tentativa secuencialidad (Conocimiento del currículo y del horizonte matemático).
- Las posibles soluciones previstas de los estudiantes ante dichas tareas y los conceptos/procedimientos matemáticos asociados a ellas (Conocimiento del contenido y la enseñanza) y

- Los errores previstos en las soluciones dadas por los estudiantes (Conocimiento del contenido y de los estudiantes).

3.1 CONCEPTOS Y PROCEDIMIENTOS ASOCIADOS A LA PROPORCIONALIDAD GEOMÉTRICA Y LA SEMEJANZA DE FIGURAS PLANAS

Es ineludible asociar el razonamiento proporcional con la comprensión de los conceptos de razón y proporción implicados en una situación del tal tipo. Es por ello que a lo largo de este trabajo de grado nos hemos enfocado en la razón y la proporción como elementos obtenidos de una cierta comparación de dos entidades, sin asociar a dichos conceptos cantidades específicas. En efecto la proporcionalidad la analizaremos como aquella propiedad de los segmentos análogos, en dos figuras que sean o no, semejantes; es claro que un dibujo está compuesto de otros segmentos, que pueden ser rectos o curvos, y estos son considerados como magnitudes sin medida de cantidad de longitud (desprovisto de algún número).

En consecuencia coincidimos con Perry et al (2003) quienes consideran que la manera usual de abordar la proporcionalidad en el contexto escolar, es asociándola con “números y con cantidades adjetivadas” que simbolizan los valores de las magnitudes relacionadas. Pero este enfoque desprovee el carácter natural comparativo que posee la razón y la proporción, y no considera por ejemplo, aspectos del razonamiento proporcional basados en lo cuantitativo no numérico.

Los segmentos por ejemplo, poseen una característica particular, la longitud²², que permite hacer comparaciones con otros elementos de su misma naturaleza. Bastaría con colocar los segmentos apilados de manera horizontal para hacer dicha comparación y así estimar la longitud de ellos. De la misma manera cada par de segmentos puede formar una razón matemática, si se ubican de manera perpendicular: $a:b$ y $c:d$, de esta forma $a : b :: c:d$, es decir las razón entre los segmentos a y b , junto con la razón $c:d$ forman una proporción, ver la Ilustración 19 a continuación²³.

²² La cantidad de longitud del segmento es diferente a la medida de la cantidad de longitud, la segunda toma un número para enunciarse

²³ Imagen tomada de Perry et al (2003)

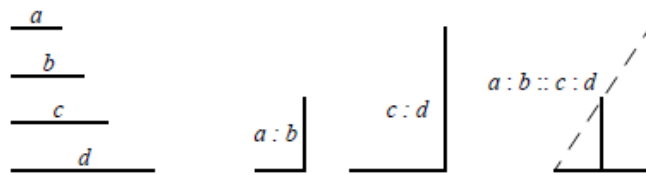


Ilustración 19: Razones entre longitudes de segmentos y proporción entre ellas

Para lo anterior no fue necesario pensar en la medida de los segmentos, esto muestra que si se puede hablar de proporcionalidad entre objetos que no poseen un número que represente dicha cualidad, a la que llamamos longitud. Pero realmente:

- ¿Qué significa que dos figuras sean semejantes?
- ¿Dos figuras son semejantes si tienen la misma forma?
- ¿El tamaño se asocia con la semejanza de las figuras o es independiente a ella?
- ¿Sólo existen criterios de semejanza para triángulos?
- ¿Cómo determino que dos segmentos circulares o curvos son semejantes el uno al otro?

La solución a estas preguntas puede llegar a complejizarse dependiendo el ámbito escolar donde se respondan. En nuestro estudio del tema, nos hemos apoyado en trabajos como los del grupo Beta (1990), acerca de la proporcionalidad geométrica y la semejanza. En este apartado haremos un acercamiento desde el conocimiento básico de la proporcionalidad geométrica y la semejanza de triángulos.

3.1.1 Teorema de Thales

El esquema anterior (ver ilustración 19), está sustentado en el primer Teorema de Thales que garantiza la semejanza de triángulos. Dicho teorema dice que *todo haz de rectas o semirrectas que se intersecte con dos o más que sean paralelas, generan segmentos análogos proporcionales*.

Lo anterior crea las bases para entender los criterios de semejanza entre triángulos, por ejemplo. Así mismo, con estos mismos criterios puede darse un análisis de la semejanza de muchas otras figuras que puedan ser formadas, como composición de triángulos (el rectángulo y los cuadriláteros en general).

3.1.2 Teoremas de semejanza de triángulos

Existen tres criterios básicos de semejanza de triángulos, comúnmente conocidos como AAA, LAL y LLL. Pero a nuestro modo de ver son consecuencia del mismo Teorema de Thales.

- Teorema AAA: dados dos triángulos, estos son semejantes si poseen sus tres ángulos congruentes.
- Teorema LAL: dados dos triángulos, estos son semejantes si poseen un ángulo congruente y los lados que lo forman son proporcionales.
- Teorema LLL: dados dos triángulos, estos son semejantes si poseen sus lados proporcionales entre sí.

La siguiente ilustración muestra dos triángulos semejantes que satisfacen los tres teoremas a la vez, esto sucede con los triángulos equiláteros (ver Ilustración 20).

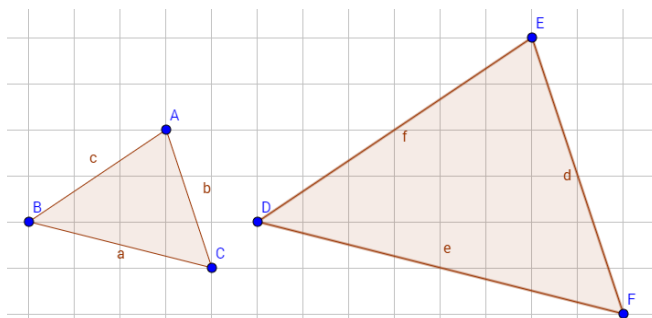


Ilustración 20: Dos triángulos semejantes

Ahora bien, la relación de comparación que interesa para efectos de los talleres propuestos, es aquella que denota pares de lados proporcionales. Es así como $c:f :: a:e$, siempre y cuando el $\triangle ABC$ y el $\triangle EDF$ sean semejantes. Esta comparación entre pares de lados de los triángulos, no necesariamente debe darse a partir de lo numérico, como se mostró en este mismo apartado en páginas anteriores, los lados poseen una característica que es la cantidad de *magnitud* que se refiere a la extensión de los segmentos de recta y no necesariamente a la medida de la longitud (número).

Es oportuno señalar que pueden darse otros tipos de comparaciones entre dichos pares de lados, en virtud que las cuatro magnitudes son homogéneas. Por ejemplo $c:a :: f:e$ en virtud de la Proposición 16 de Euclides, Libro V: Si $c:f \approx a:e$, entonces, $c:a :: f:e$. Esta propiedad de las proporciones permite alternar dichas comparaciones y mostrar otras estrategias de solución en situaciones de medición reales que requieran la modelación por triángulos para su solución.

3.2 EL OBJETIVO DE LAS TAREAS PROPUESTAS EN TÉRMINOS DE LA COMPRENSIÓN DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS IMPLICADOS

En concordancia con lo anterior, según el MEN (2006) los objetivos de las tareas propuestas, en términos de la comprensión de los objetos matemáticos implicados (Estándares de competencias), para el grupo de grados sexto y séptimo son:

- Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte.
- Resuelvo y formulo problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencias usando representaciones visuales.

A nuestro modo de ver, pretendemos plantear una ruta de trabajo diferente a la usual en el aula: a) introducción del tema, teoría matemática, b) ejemplos explicativos del tema, c) ejercicios de práctica centrada en algoritmos y situaciones pseudomatemáticas de aplicación y d) evaluación del tema visto a partir de b) y c); en resumen, desde la matemática hacia el mundo real (al menos en intención). Queremos con nuestra propuesta de enseñanza, partir de un contexto real de trabajo, como son *las técnicas e instrumentos usados para dibujar proporcionalmente*, e introducir luego las matemáticas que permiten mejorar dicha habilidad. Así el trabajo matemático del estudiante surge de los contextos y tareas planteadas.

3.3 EL USO DE LA CUADRÍCULA PARA DIBUJAR

Luego de consultar en blogs²⁴ publicados para enseñar a dibujar con cuadrícula, extraemos algunas recomendaciones que se adecuan a nuestras tareas propuestas. Sin embargo, esta es una labor propuesta desde primaria a los estudiantes para lograr hacer ampliaciones y reducciones de figuras simples, y se supone que los estudiantes del grado séptimo tienen cierto dominio sobre ella.

Una definición apropiada para cuadrícula la tomaremos de la RAE, como el sistema de referenciación o “conjunto de los cuadrados que resultan de cortarse perpendicularmente dos series de rectas paralelas”. Esta cuadrícula puede usarse de varias formas para dibujar, por ejemplo, podría marcarse sobre la imagen a copiar y luego referenciar cada cuadrado para poder así capturar dichos atributos en nuestro dibujo (ver la siguiente ilustración).

²⁴ Consulta hecha en <http://dibujoencuadrícula.blogspot.com.co/> y <http://es.wikihow.com>



Ilustración 21: Imagen tomada de <http://es.wikihow.com>

De esta manera el todo de la imagen a dibujar se parcela o se divide en secciones más fáciles de delinear, porque el dibujo se convierte en una serie de rasgos que deben corresponder cuadro a cuadro según la referencia dada. Para nuestro interés, rescatamos de la imagen el atributo de la proporcionalidad, en efecto, la imagen y su dibujo deben estar relacionados, no importa si se hace una ampliación, reducción o se copia a escala 1 a 1.

La cuadrícula permite muchas tareas para desarrollar el pensamiento proporcional a través del dibujo de imágenes, sin embargo, en el siguiente análisis no nos centraremos en esas posibilidades. El dibujar usando las referencias de la cuadrícula desplaza la atención del dibujante hacia la forma de la figura y no tanto a sus dimensiones. Mediante el uso de esta técnica de dibujo, también estamos interesados en hacer una reflexión sobre la forma de las figuras semejantes y como la proporcionalidad ayuda en dicha discusión de determinar cuándo dos figuras son semejantes.

Esta *relación de proporcionalidad* entre la imagen y su dibujo, distingue dos casos particulares a nuestro modo de ver, en el contexto de las tareas propuestas con esta técnica, el dibujo de *segmentos rectilíneos* y *curvilíneos*. Lo anterior dado por la imagen escogida para dibujar en el taller 1²⁵ (ver Ilustración 22), figura que posee 4 segmentos, dos de cada tipo.

²⁵ Para el análisis de la semejanza, entre la figura y su dibujo, consideraremos la línea de contorno, no la región dentro, en términos topológicos la frontera del conjunto de puntos que conforman el logo.

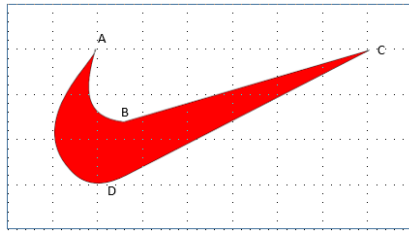


Ilustración 22: El logo de Nike usado para dibujar por la técnica de la cuadrícula

Los segmentos referidos anteriormente son: \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} y \overline{DA} . A partir de estas cuatro líneas se pueden ver dos tipos de semejanza de figuras al dibujar o copiar el logo, basta con dividirlo en dos secciones como se muestra a continuación.

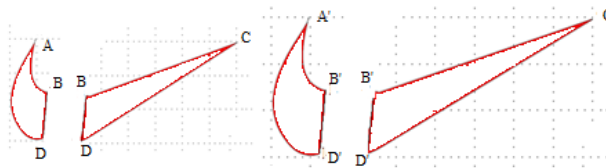


Ilustración 23: Descomposición del logo de Nike

- Los sectores triangulares.* Para la semejanza entre las regiones BCD y $B'C'D'$, bastaría con aplicar el criterio de semejanza de triángulos LAL para justificar porque esta parte del logo es semejante a su reproducción. Lo anterior se debe a la proporcionalidad existente: \overline{BC} es a $\overline{B'C'}$, como \overline{CD} es a $\overline{C'D'}$; además los ángulos ubicados en C y C' son congruentes.
- Los sectores curvos.* Para probar la semejanza entre estos sectores podemos considerar dos aspectos: el segmento recto \overline{BD} , y los segmentos curvos \widehat{AB} y \widehat{DA} . Para los segmentos \overline{BD} y $\overline{B'D'}$, se debe tener presente que estos deben guardar entre ellos la razón de semejanza, de ampliación en este caso. Para los segmentos curvos \widehat{AB} y \widehat{DA} y sus imágenes en la ampliación de la derecha, deben considerarse las rectas tangentes a ellos como se muestra en la siguiente imagen.

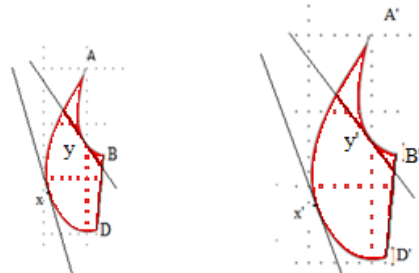


Ilustración 24: Rectas tangentes paralelas una a una

Sobre los segmentos \widehat{DA} y \widehat{AB} se pueden trazar múltiples rectas tangentes en x e y que serán paralelas a otras, una a una, sobre los segmentos $\widehat{D'A'}$ y $\widehat{A'B'}$; este paralelismo punto a punto, entre las tangentes de la imagen y su dibujo, puede considerarse como un indicio de semejanza entre las figuras. Esta condición del paralelismo entre rectas tangentes, lo retomaremos más adelante en otras técnicas e instrumentos para dibujar.

En general diremos que cualquier curva²⁶, en términos geométricos, es semejante a otra si se puede copiar usando alguno de los métodos referidos en la Ilustración 25. El primero es similar al método de exhaustión para calcular áreas bajo la curva, pero en lugar de rectángulos usa triángulos, y permite establecer las condiciones de semejanza en ellos, uno a uno, de la primera a la segunda curva; entre más triángulos se usen más fina será la apreciación de la semejanza entre las curvas. El segundo método usa vectores tangentes a la curva para establecer su orientación, estos sirven para construir una curva semejante a ella, basta con considerar vectores paralelos uno a uno, tanto en la curva como en su reproducción, y además las magnitudes de los vectores (A y A') forman además la razón de semejanza entre las curvas.

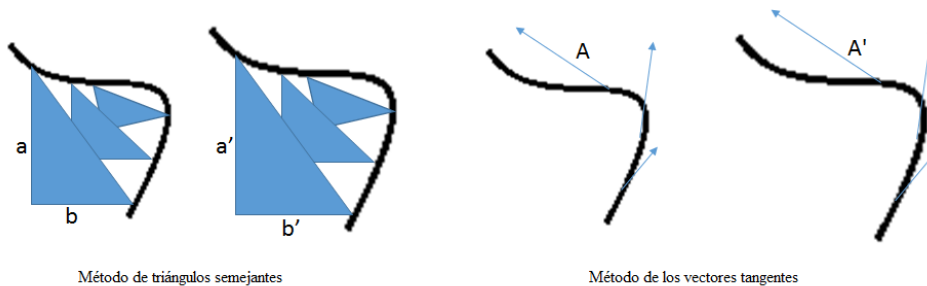


Ilustración 25: Dos métodos para determinar la semejanza entre curvas

En las tareas propuestas en el siguiente apartado, se quiere explorar el uso de diferentes áreas de trabajo para lograr copiar dibujos semejantes a un original. Para ello se facilitarán a los estudiantes regiones proporcionales y no proporcionales, dicho de otra manera, con igual o diferente relación de aspecto²⁷. Se acostumbra ver en los libros de texto que dichas regiones, área del modelo a copiar y área de la zona donde se dibuja, tienen la misma razón entre sus dimensiones.

²⁶ Entendemos por curva una línea recta o curvilínea en general

²⁷ Con el mismo o diferente número de cuadrados de alto y de ancho en el rectángulo, entre la cuadrícula del modelo y la cuadrícula de la zona en donde se dibuja.

3.3.1 Taller 1 concurso “dibujemos el logo de Nike”

El siguiente es el paso a paso del desarrollo de la actividad propuesta:

1. En el tablero se pega la figura (Ver Ilustración 26), dibujada en un pliego de papel periódico, sobre una cuadrícula de 7×11 unidades. A los estudiantes se les entrega la misma figura, pero reducida de tamaño como se muestra a continuación, junto con unas preguntas orientadoras que buscan la explicación por parte de ellos, de la forma como logran reproducir el dibujo lo más parecido posible.

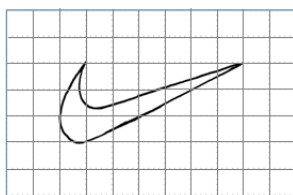


Ilustración 26: Logo de Nike

2. Luego de 20 minutos que los estudiantes reproduzcan la figura planteada, tanto en la primera como en la segunda cuadrícula y hayan resuelto las preguntas orientadoras de la actividad, se realizarán grupos de 2 y luego de 4 estudiantes para compartir experiencias sobre el trabajo realizado de manera individual. Se debe registrar el trabajo hecho, describiendo lo dibujado y argumentando cada paso. Se nombrará un relator que será el encargado de participar en el debate de ideas junto a la clase, luego de plantear por grupos un acuerdo sobre la manera adecuada de resolver las tareas.
3. Acto seguido se publicarán en el tablero, junto a la cartelera los mejores dibujos de cada grupo a modo de exposición. Mientras que el docente toma fotografías de dichos modelos para proyectarlas, los estudiantes compararan los trabajos realizados con el dibujo principal.
4. Al proyectar a la clase los mejores dibujos sobre la cartelera, por medio de un video beam, se pretende frente a la clase determinar unos criterios de semejanza de figuras geométricas que permitan establecer el ganador del concurso.

Se ha querido trabajar inicialmente de forma individual y luego en grupo, para validar el conocimiento de los estudiantes, como una construcción colectiva de la clase, ante todo. *El propósito de la enseñanza, a partir del concurso planteado, no es otro que establecer en la clase los criterios de semejanza de triángulos y de figuras con segmentos circulares.* Esto a la vez conviene para efectos del aprendizaje de los estudiantes, como una práctica evaluativa no sólo del concurso, sino del tema matemático propuesto.

3.3.2 El objetivo del Taller 1 concurso “dibujemos el logo de NIKE”

Como se insinuó en el apartado anterior, la intención de esta primera actividad es: Determinar cuáles son los criterios que permiten a los estudiantes establecer la semejanza entre pares de segmentos contiguos rectos (partes de un triángulo) y entre dos segmentos de líneas curvas. Está claro, dado el diseño del logo de NIKE, que esta figura es la composición de dos tipos de líneas: rectas y curvas, y por lo tanto deberían establecerse dos tipos de criterios de semejanza de figuras (o el mismo si es posible), para determinar el ganador del concurso propuesto.

3.3.3 La pertinencia de la tarea y su secuencialidad.

Consideramos que la pertinencia del Taller 1 radica en la aplicación de la proporcionalidad geométrica en la elaboración de los dibujos de los participantes del concurso. Dicho de otra manera, es bastante claro que para reproducir o dibujar a escala una figura o dibujo, se debe usar la proporcionalidad, en este caso entre segmentos lineales y curvos. De la misma forma es interesante discutir con los estudiantes cuál es su noción de semejanza y los criterios para determinar la semejanza de figuras planas.

3.3.4 Las posibles soluciones previstas de los estudiantes ante la tarea y los conceptos/procedimientos matemáticos asociados a ella

Las posibles estrategias para solucionar la tarea son:

- Usar un modelo obtenido luego de calcar la figura guía dada en la hoja, para luego resolver la tarea dada.
- Ubicar los puntos más extremos de la figura o aquellos que marcan la unión de líneas rectas y curvas, para ver su relación con la cuadrícula y su ubicación de derecha/izquierda y/o arriba/abajo.
- Establecer una estimación del ángulo formado por las líneas rectas para lograr su reproducción.
- Establecer una estimación del grado de concavidad de las partes curvas para lograr su reproducción.
- Emplear el lápiz extendiendo el brazo y proyectándolo sobre el modelo del tablero para trasladar las características del dibujo a la reproducción, como la longitud de los segmentos o los ángulos.

3.3.5 Los errores previstos en las soluciones dadas por los estudiantes.

Los siguientes son los errores previstos ante las tareas propuestas:

- El estudiante no tiene en cuenta la cuadrícula al establecer una correspondencia entre dos medidas, largo y ancho, por lo tanto, se deforma la figura reproducida.
- El estudiante no diferencia los conceptos de congruencia y semejanza de figuras geométricas.
- El estudiante no muestra su pensamiento proporcional al realizar las reproducciones, estableciendo la posición adecuada de los segmentos de rectas y curvas, como correlación en sentido horizontal y vertical.
- El estudiante confunde la noción de semejanza que tiene desde el lenguaje común con la noción desde la proporcionalidad geométrica.
- El estudiante no precisa el tamaño de la forma o las formas que componen el logo de NIKE, porque al referirse al tamaño no hay certeza de saber si se refiere a el perímetro, el área, el ancho o el largo de la figura o a que exactamente.

3.4 EL USO DE LA PROYECCIÓN DEL LÁPIZ SOBRE LA IMAGEN PARA CAPTURAR LONGITUDES Y ÁNGULOS

El capturar relaciones entre las partes de un dibujo y el todo se puede considerar como una técnica apropiada para dibujar proporcionalmente, porque atrapa o hace explícita la relación de covariación entre pares de magnitudes. Conviene subrayar que este es un aspecto fundamental del razonamiento proporcional, el manejo de la proporción como equivalencia de razones, que se pone de manifiesto en el despliegue de esta técnica de dibujo.

Para ello el estudiante que se encuentra sentado a cierta distancia del tablero extiende su brazo hacia él, proyectando el lápiz sobre el objeto a medir, como se aprecia en la siguiente figura. Se recomienda cerrar un ojo y tratar de hacer la captura de magnitudes desde la misma posición, brazo extendido y con la misma posición de nuestro cuerpo; cualquier variación de estos aspectos malogra la captura de atributos de las imágenes a dibujar. También es importante señalar que la posición óptima del dibujante, al aplicar esta técnica, es aquella donde la línea de visión forma una perpendicular con el plano de la imagen y su punto central, es decir el dibujante debe estar de frente al objeto a dibujar.

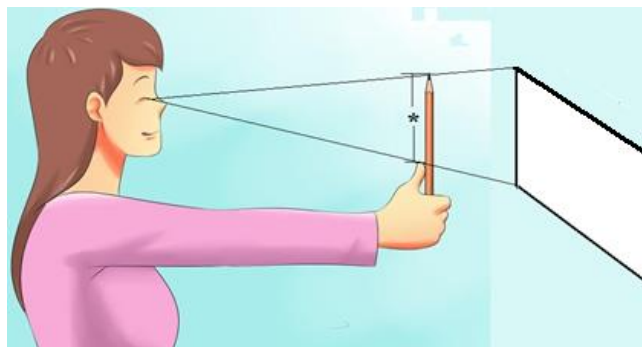


Ilustración 27: Técnica para capturar medidas en dibujo artístico sin el uso de la regla²⁸

El estudiante determina una medida sobre el lápiz al proyectarlo sobre los objetos a dibujar, a la cual llamaremos “unidad” (*)²⁹. Esta medida debe elegirse de tal forma que corresponda a un elemento constitutivo del dibujo, una parte de él; porque este componente del dibujo guarda una posición, un tamaño específico y una relación de aspecto o proporción con el dibujo. Por ejemplo, los dibujantes dicen que la cabeza guarda una relación de 1 a 8 con la altura de las personas, y así esta sirve de “unidad” comparativa con las proporciones de otras partes del cuerpo humano.

Luego de determinar cuántas veces cabe esta medida sobre la línea u objeto a reproducir, esta se lleva a la hoja donde se trasladará y servirá para desarrollar el dibujo. Por ejemplo. Si la unidad de medida cabe tres veces en la imagen, en su dibujo deberá mantener esta misma medida asociada a tres veces la unidad. Es posible también que la “unidad” señalada en el modelo real, usando el lápiz, se transforme en otra unidad más pequeña sobre el papel.

Para desarrollar la reproducción los dibujantes acostumbran hacer un bosquejo inicial que marca los elementos esenciales de la imagen, para luego hacer los detalles y las líneas definitivas del dibujo. Se debe partir de dos líneas guía, una vertical y otra horizontal, que marcan el centro de la hoja, esto con el fin de lograr la simetría, si por ejemplo se dibuja un objeto con esta característica. Estas dos líneas también sirven para establecer que tan grande puede ser el dibujo en relación a la zona de trabajo, es decir ayudan a elegir la escala adecuada de reproducción de la figura a dibujar³⁰.

Esta técnica de dibujo usa implícitamente los criterios de semejanza de triángulos LAL o LLL, para justificar la construcción de una reproducción proporcional a la imagen copiada.

²⁸ Imagen tomada y modificada de <https://www.wikihow.com/Measure-the-Height-of-a-Tree>

²⁹ Ver * en la ilustración 27

³⁰ Recomendaciones para dibujar tomadas del Blog Valero, Dibujos y Pinturas en <http://valero7.webnode.es/tecnicas/a13-encuadre-encaje-y-proporcion/>

Claramente, como se ha insistido en otros apartados de este escrito, no nos interesa en esta técnica la captura de la medida de cantidad de longitud (el número), sino la captura de la longitud de segmentos en virtud de su cantidad de magnitud.

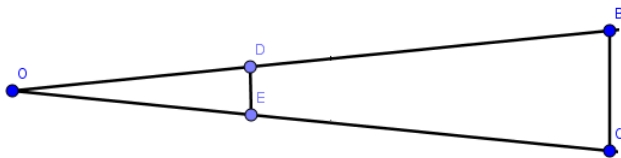


Ilustración 28: Los criterios de semejanza de triángulos usados en la técnica de captura de magnitudes

En la anterior ilustración, el punto O representa la posición del ojo del dibujante, el segmento \overline{BC} la magnitud sobre el dibujo que se quiere capturar y el segmento \overline{DE} la magnitud sobre el lápiz al proyectarse sobre el objeto a dibujar. De esta forma se forman las siguientes proporciones: \overline{OD} es a \overline{OB} como \overline{DE} es a \overline{BC} , \overline{OE} es a \overline{OC} como \overline{DE} es a \overline{BC} , entre otras. En este caso, la proporcionalidad geométrica de los segmentos \overline{DE} y \overline{BC} , mostrados en la ilustración 20, garantiza que la imagen a copiar y su dibujo, al usar esta técnica, guarden la misma relación de aspecto, es decir permite dibujar proporcionalmente.

3.4.1 Taller 2: Vamos a dibujar “con el lápiz”

Inicialmente para este taller se pondrá en el tablero la imagen de la fachada de una casa y esta no dispondrá de una cuadrícula de referencia; se busca que el estudiante encuentre o establezca estrategias para poder dibujar en su cuaderno un modelo semejante al presentado.

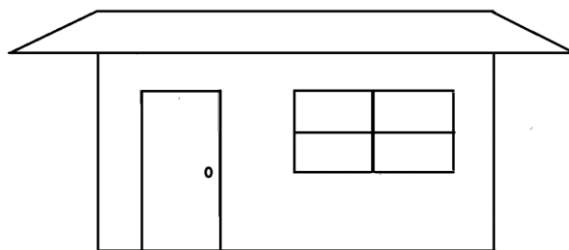


Ilustración 29: Imagen y ejercicio tomado y adaptado de Dibujar Bien.com en canal de www.youtube.com

Luego el estudiante intentará aplicar la misma técnica de dibujo para reproducir el logo de Nike de la figura 3, usando el lápiz como referencia de medida.

El siguiente es el paso a paso del desarrollo de la tarea propuesta:

1. Primero se sugiere a la clase la técnica usada por los dibujantes artísticos, para reproducir proporcionalmente los modelos a dibujar.
2. Con el uso de la técnica del dibujante artístico para capturar longitudes, se pide a la clase que dibujen el tablero del salón en su cuaderno.
3. Luego de 5 minutos se solicita que comparen el rectángulo dibujado en el cuaderno y el rectángulo del tablero del salón (los tableros del colegio tienen una relación de aspecto 2:1, el ancho es dos veces el alto), para establecer si existe semejanza o congruencia entre estas figuras. En caso de dudas al comparar, los estudiantes deben preguntar a su compañero, si hay o no similitud. De ser necesario, a modo de argumentación ante las dudas, él compañero puede usar la escala que él eligió en su dibujo para comparar la del compañero.
4. Luego de formar grupos de a tres personas se ubica en el tablero la imagen de la ilustración 29, para que los estudiantes de la clase la reproduzcan en sus cuadernos, a la par de discutir con los compañeros de grupo las preguntas orientadoras.
5. Pasados 20 minutos, se pide a los estudiantes que determinen la precisión de sus dibujos, estableciendo entre ellos cuales son los dibujos más semejantes a lo mostrado en el tablero.
6. A continuación, se pega nuevamente el logo de Nike para reproducirlo o dibujarlo en el cuaderno usando esta nueva técnica.
7. Finalmente, mediante las preguntas orientadoras³¹, luego de 10 minutos, se pide a la clase la puesta en común de sus ideas al respecto de lo trabajado en los dos modelos. Cada grupo de la misma forma que en el taller 1, debe nombrar un relator que recoja las inquietudes y desarrollos alcanzados por el grupo durante la tarea 2, para participar en la discusión frente a los otros relatores de la clase.
8. El profesor cierra la actividad de la clase, preguntando a los estudiantes sobre comparaciones entre modelos semejantes y no semejantes, que expone para todos en el tablero.

A continuación, se detallan los mismos aspectos tenidos en cuenta en el Taller 1, para diseñar el Taller 2: Vamos a dibujar “con el lápiz”.

3.4.2 El objetivo del Taller 2: Vamos a dibujar “con el lápiz”

Teniendo en cuenta lo anterior, la intención del Taller 2 es *usar las representaciones visuales construidas al dibujar a partir de la semejanza de figuras planas para establecer*

³¹ Aquellas preguntas que debe hacer el docente para guiar la discusión, propiciando la participación de clase, usando por ejemplo algunas cosas observadas durante el desarrollo de la actividad o tomando aquellas que han sido previstas como soluciones ante las tareas.

cuando hay o no dicha propiedad. En este taller el estudiante podría tener claro o no cuando dos figuras son semejantes, para que pueda usar dicha noción en la verificación o validación de sus dibujos. Por otra parte, el uso apropiado de la técnica referida debe permitir una mejor construcción en sus dibujos.

3.4.3 La pertinencia de las tareas y su secuencialidad.

El primer taller consistió en reproducir una figura, a partir de una cuadrícula que servía de guía o referenciación para la ubicación de puntos. En este segundo taller se suprime la cuadrícula para obligar a establecer una comparación tipo razón, entre el objeto medido y su representación o entre las partes del dibujo y el todo. Cuando se logra establecer dicha razón entre cada par de segmentos, el segmento medido y su representación, y entre las medidas de un objeto y las relaciones que tiene este con toda la composición del dibujo, se establece la proporcionalidad entre las medidas del modelo y el dibujo del estudiante. Es así como la técnica de dibujar, usando el lápiz como herramienta de captura, se perfecciona a partir de la conmensurabilidad que se establece, con la medida implementada por la escala del lápiz (*).

3.4.4 Las posibles soluciones previstas de los estudiantes ante las tareas y los conceptos/procedimientos matemáticos asociados a ella

Las posibles estrategias para solucionar la tarea son:

- El uso de la escala referida por el lápiz, una regla graduada en centímetros, el borrador, las falanges del pulgar, o cualquier objeto que cumpla el mismo propósito del lápiz.
- El uso de las medidas propias de una regla, los centímetros, al proyectarla de la misma forma que el lápiz hacía el tablero.
- El uso de borradores u objetos más pequeños como unidades de medida.
- El uso de las falanges del pulgar en su mano en lugar del lápiz.
- El uso de una hoja que se proyecte hacía el tablero y trate de capturar las particularidades de cada figura.
- El uso de una técnica propia del estudiante, sin tener en cuenta las instrucciones del profesor, muestra que con su agudeza visual razona proporcionalmente y no necesita el lápiz para capturar los atributos de los objetos a dibujar.

3.4.5 Los errores previstos en las soluciones dadas por los estudiantes.

Los siguientes son los errores previstos ante la tarea propuesta, acciones que conducen a errores por una técnica inadecuada:

- El brazo no se estira de la misma manera en cada captura de los segmentos de las figuras.
- Los estudiantes se levantan de su puesto a capturar magnitudes desde diferentes posiciones.
- Los estudiantes se ubican muy al costado del tablero y la perspectiva de la imagen en el tablero no permite observar de mejor forma sus atributos.
- El uso de una unidad de medida (*) no adecuada para la captura del rasgo de la longitud de un segmento.
- El no establecer una relación de proporcionalidad entre un objeto que constituye el dibujo y el todo, en cuanto a ubicación y medida.
- La distancia que hay entre el tablero y el pupitre del estudiante hace que la estrategia de dibujar “con el lápiz” no sea adecuada. El tablero mide 120 cm de alto por 240 cm de ancho, lo cual no garantiza una adecuada captura de longitudes para los estudiantes que este ubicados más lejos; también aquellos que están más cerca pueden experimentar dificultades con el uso de la técnica; suponemos que hay una distancia optima entre el objeto y el dibujante, para poder capturar adecuadamente sus medidas.

3.5 EL PANTÓGRAFO

Según varias fuentes consultadas³², el pantógrafo fue ideado por el sacerdote jesuita germano Christopher Scheider, en el año 1603, y dado a conocer en la obra sobre los paralelogramos, Principios de Descartes. Esta herramienta de dibujo está basada en las propiedades de los paralelogramos y consta de varias piezas articuladas que se mueven en forma conjunta, con respecto a un punto fijo llamado pivote.

El pantógrafo físico que construimos usado en nuestra experiencia, permite copiar imágenes a diferentes escalas de ampliación o reducción, dependiendo de cómo se dispongan la guía y el lápiz sobre el papel (ver Ilustración 30). Entendemos que esta herramienta se mueve sobre un mismo plano o superficie, sin embargo, existen otros pantógrafos 3D usados para construir figuras sólidas, para tallar piezas en madera o acrílico.

³² Entre otros trabajos destacamos la tesis de los estudiantes González, J. y Maestre W (2012) ¿Pantógrafo o Cabri? Artefactos para la conceptualización.

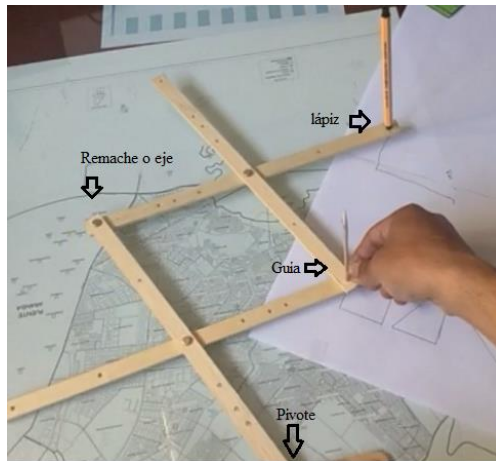


Ilustración 30: Partes del Pantógrafo

Llama la atención en el pantógrafo, el paralelismo dos a dos entre las varillas o piezas de madera, propiedad fundamental de los paralelogramos. Es decir, en un paralelogramo los lados opuestos nunca se cortan y estos son de igual magnitud, de la misma forma tenemos que los ángulos opuestos son congruentes.

Veamos porqué el pantógrafo construye figuras semejantes y cómo se produce la ampliación de tamaño de figuras a diferentes razones de semejanza. Para ello consideraremos dos casos de trazo, segmentos rectos y segmentos curvilíneos.

Para el primer caso, *el trazo de un segmento de recta*, como el que se ve en la siguiente ilustración, se representa para nosotros un análisis matemático interesante desde la proporcionalidad. La guía recorre de A hacia B y el lápiz traza el segmento $\overline{A'B'}$, denotando de esta forma dos triángulos claramente semejantes $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'D$, este hecho garantiza la proporcionalidad geométrica entre los segmentos referidos, si se establece la congruencia entre los ángulos correspondientes.

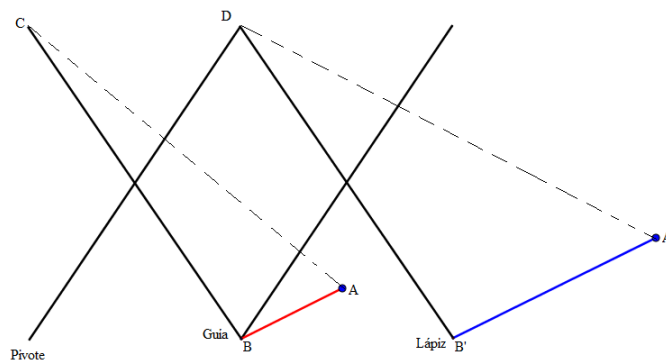


Ilustración 31: El trazado de un segmento de recta con el pantógrafo

Otro asunto importante de anotar, es porque se da la ampliación de figuras al doble, según la configuración de la herramienta mostrada en la Ilustración 31. Para ello recurriremos a mostrar otros triángulos implicados en la construcción o trazo del segmento $\overline{A'B'}$ (ver Ilustración 32).

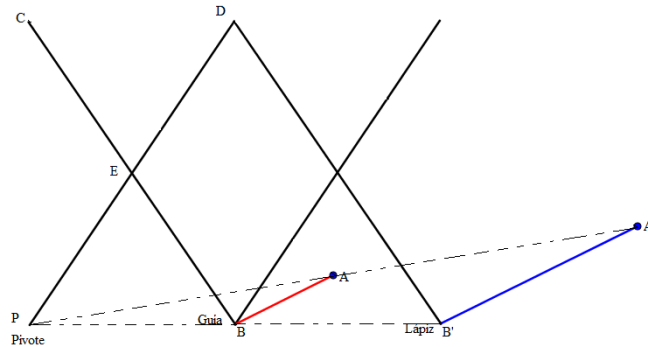


Ilustración 32: Configuración del pantógrafo para ampliar figuras al doble de tamaño

Claramente se puede apreciar que si el segmento \overline{PE} es la mitad del segmento \overline{PD} , los triángulos $\triangle PAB$ y $\triangle PA'B'$ son semejantes y sus lados proporcionales por el criterio de semejanza LLL. De esta forma la razón entre \overline{PD} y \overline{PE} es 2 (“ser el doble de”) que coincide con la razón de semejanza entre los triángulos referidos en la explicación.

Para manejar el pantógrafo con otras escalas de ampliación, basta con cambiar los remaches o ejes centrales a otras posiciones sobre el segmento \overline{PD} . A continuación, se muestra un pantógrafo con configuración de ampliación a tres veces el tamaño de dibujo. Nuevamente basta con observar que el segmento \overline{PE} es la tercera parte del segmento \overline{PD} , lo que produce una ampliación del segmento \overline{AB} en $\overline{A'B'}$, en tres veces su tamaño, por lo explicado anteriormente de los triángulos $\triangle PAB$ y $\triangle PA'B'$.

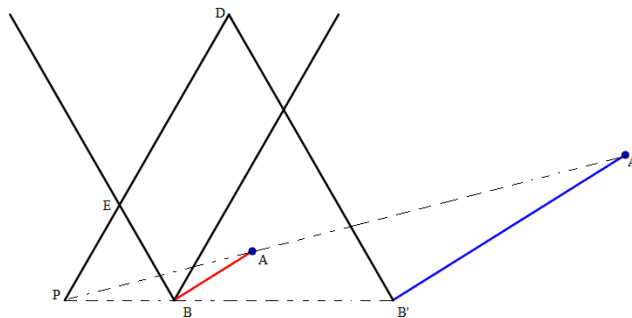


Ilustración 33: Configuración del pantógrafo para ampliar figuras al triple de tamaño

Para el segundo caso, *el trazo de un segmento curvo de línea*, consideraremos un análisis similar al hecho en el apartado 3.3 (El uso de la cuadrícula para dibujar) con respecto a la

forma de las curvas y los vectores asociados que marcan la dirección y suavidad de la misma.

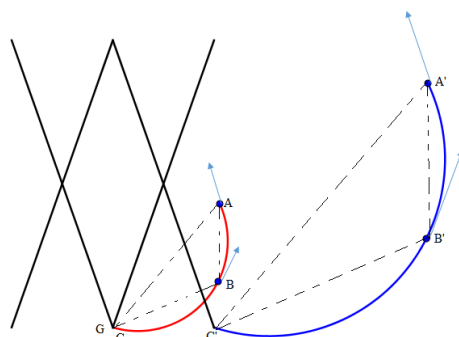


Ilustración 34: Pantógrafo dibujando segmentos curvos al doble de tamaño

Claramente se puede apreciar en la ilustración anterior que la razón de semejanza entre los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ es 2, y de la misma forma los vectores tangentes en A y B tienen una razón de proporcionalidad con los vectores tangentes en A' y B' , en relación con las normas o magnitudes de ellos. Es necesario anotar que los puntos A , B y C , pueden representar cualesquiera tres puntos sobre la curva, y tendrán tres puntos correspondientes al dibujar otra curva semejante con dicha herramienta.

Para las tareas propuestas, se plantea el uso de un pantógrafo que construimos en madera (ver Ilustración 30); con él se puede aumentar el tamaño de los dibujos en proporciones: 2 a 1, 3 a 1, 4 a 1 y 5 a 1; también se puede reducir su tamaño en proporciones 1 a 2, 1 a 3, 1 a 4 y 1 a 5. Ya de por sí, consideramos que dicha construcción representa un reto de comprensión sobre el tema de la proporcionalidad geométrica y la semejanza de figuras y debe tenerse en cuenta para la enseñanza.

El pantógrafo es un instrumento que sirve para reproducir dibujos, aumentando o disminuyendo su tamaño, según se ubique el lápiz en la herramienta. Luego de lo anterior cabe preguntar al lector sobre la manera de configurar o disponer el pantógrafo, para lograr hacer reducciones de figuras a copiar, es decir hacer con la herramienta dibujos más pequeños que el modelo ubicado en la guía.

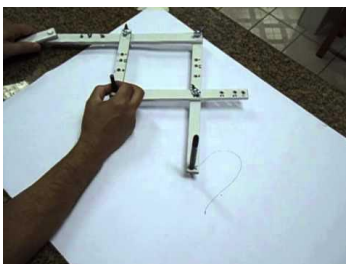


Ilustración 35: Pantógrafo, imagen tomada de <https://es.pinterest.com/pin/545568942340289351/?lp=true>

3.5.1 Taller 3: Dibujando con el pantógrafo

Con el pantógrafo utilizado en este taller, un problema interesante para el estudiante será plantearle cómo reproducir dibujos en escala 1 a 1 usando la herramienta; este aspecto se abordará más adelante.

El siguiente es el paso a paso del desarrollo de la actividad propuesta:

1. Se explica de forma muy general como se usa pantógrafo, en relación a sus partes, la manera de centrar la hoja de trabajo y la hoja a reproducir, entre otros aspectos. El docente explica a tres estudiantes que participarán de la actividad propuesta en esta tarea.
2. Luego el docente reproduce un dibujo de muestra (el logo de Nike de la tarea 1) a escala 2 a 1.
3. A partir del dibujo hecho, el docente pregunta a los estudiantes aspectos relacionados con el logo realizado con el pantógrafo, para reafirmar lo que hace la herramienta al reproducir dibujos.
4. A continuación, los estudiantes realizan la reproducción del mismo logo hecho por el docente, pero a escala 3 a 1.
5. Acto seguido el docente pregunta a los estudiantes, sobre los dos dibujos realizados, aspectos de comparación entre ellos y la forma como se construyeron.
6. Después los estudiantes usan el pantógrafo para resolver los ejercicios planteados por el docente.
7. Finalmente, el docente pregunta a los estudiantes la forma como razonaron para desarrollar los ejercicios del punto anterior y sus impresiones acerca del trabajo realizado con el pantógrafo. Se busca explorar las potencialidades y limitaciones de la herramienta.

3.5.2 El objetivo del Taller 3: Dibujando con el pantógrafo

Teniendo en cuenta lo anterior, el propósito del Taller 3 es *usar el criterio de semejanza de triángulos LAL en la reproducción de dibujos a diferentes escalas, mediante las*

propiedades de la proporción implicada. En particular la tarea de entender cómo funciona y cómo se construye la herramienta puede ayudar a asociar los criterios de semejanza de triángulos con el funcionamiento de la misma, así como ayudar a evidenciar las condiciones del Teorema de Thales, paralelismo y proporcionalidad entre segmentos análogos.

3.5.3 La pertinencia de las tareas y su secuencialidad.

Luego que el estudiante en los talleres anteriores determine cuándo dos figuras son semejantes y use ese hecho para construir reproducciones de figuras, usando cuadrículas y el lápiz como referencia para escalar objetos a dibujar, ahora usará una herramienta más precisa para trazar proporcionalmente, el pantógrafo. Sin embargo, creemos que no es necesaria la secuencialidad en el uso de la herramienta en relación a las anteriores técnicas, porque no son necesarias para el uso del pantógrafo. En esencia no se trata de sólo dibujar con la herramienta y hacer reproducciones más precisas, sino de razonar sobre el funcionamiento de la herramienta.

3.5.4 Las posibles soluciones previstas de los estudiantes ante la tarea y los conceptos/procedimientos matemáticos asociados a ella

Las posibles estrategias para solucionar las tareas son:

- Los estudiantes usan el pantógrafo para medir los puntos “destacados” de las figuras, como vértices, empalmes de líneas curvas y rectas, etc., para luego completar las otras partes de los dibujos.
- Los estudiantes dibujan las figuras pedidas de forma completa con la herramienta proporcionada.
- Los estudiantes realizan el dibujo de forma parcial y luego lo completan sin usar el pantógrafo.

3.5.5 Los errores previstos en las soluciones dadas por los estudiantes.

Los siguientes son los errores previstos ante la tarea propuesta:

- No centrar de manera adecuada la zona de dibujo en relación al dibujo a reproducir.
- No considerar la escala adecuada para la reproducción.
- En los primeros dibujos no usar adecuadamente la herramienta por la falta de experticia al usarla.
- Desplazar el punto fijo del pantógrafo, descentrando las otras referencias de trabajo como la guía y el lápiz.

- No establecer las relaciones de proporcionalidad entre las magnitudes del dibujo y su reproducción, es decir dibujar sin comprender las relaciones matemáticas en su actividad.

3.6 EL DIVISOR DE PROPORCIONES

El divisor de proporciones, también llamado trazador de escalas o compás de reducción, es una herramienta que permite ajustar las proporciones de una figura a su reproducción o dibujo. En la siguiente ilustración se muestra como el divisor de proporciones, es usado para capturar la longitud de un segmento sobre una fotografía (extremo superior), y esta magnitud se ve reflejada en su dibujo (extremo inferior), pero ampliando la referencia dada.



Ilustración 36: Divisor de proporciones, imagen tomada de <https://totenart.com/compas-de-reduccion-de-escala-derwent>

A continuación, veremos cómo funciona el divisor de proporciones y su relación con la técnica del encaje para dibujar. Estos dos aspectos los consideramos fundamentales para el siguiente taller de este grupo de tareas. Es decir, queremos combinar el uso de la herramienta con la técnica de usar formas geométricas para esbozar las formas al dibujar, muy adecuada para trazos curvos en los dibujos.

El siguiente esquema (ver Ilustración 37) muestra la justificación de las aberturas, asociada a las relaciones “ser el doble de” o ”ser la mitad de”, dependiendo de donde se tome la herramienta. Se puede apreciar que el segmento \overline{HG} cabe dos veces entre el segmento \overline{GI} , además hay dos triángulos $\triangle AGE$ y $\triangle FGD$ y los ángulos opuestos por el vértice de dichos triángulos en G son congruentes. Dado lo anterior, podemos ver la semejanza entre otros dos triángulos del esquema $\triangle AGH$ y $\triangle FGI$, cuyas alturas y bases correspondientes son proporcionales; si la altura \overline{HG} es la mitad de \overline{GI} , entonces la base \overline{AH} es la mitad de la base \overline{FI} , lo que se puede transferir a la otra mitad del esquema, demostrando lo que se quería mostrar.

Se puede usar el mismo razonamiento para mostrar otras relaciones como “ser el triple de”, “ser el sesquiáltero de”, etc. Bastaría con justificar cómo dividir el segmento central en partes iguales a partir de la longitud de \overline{HG} , para ello se puede trasladar dicha magnitud y ubicarla sobre el segmento \overline{GI} , tres veces, una y media veces, etc. Otra manera de justificar el anterior procedimiento de dividir un segmento en partes iguales se infiere directamente del Teorema de Tales, al reubicar el triángulo $\triangle AGH$ sobre el triángulo $\triangle FGI$, debido a el paralelismo entre las bases de los triángulos.

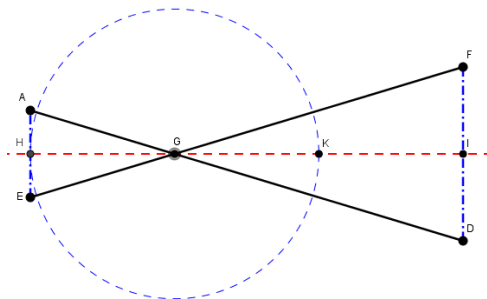


Ilustración 37: Esquema geométrico del divisor de proporciones, con la relación: "ser el doble de"

Con respecto a la *técnica del encaje* de formas al dibujar, retomaremos el asunto de la forma en la semejanza de figuras. Se entiende por encajar al dibujar, la acción de asignar una forma geométrica básica como los rectángulos, para hacer la captura de segmentos curvos al dibujar. Nos interesa de esta técnica de dibujo el asunto de las dimensiones de dicho rectángulo y la proporcionalidad que se infiere entre la figura a copiar y su reproducción (ver a continuación).

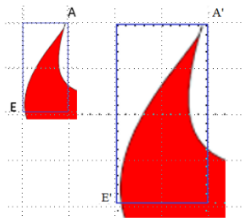


Ilustración 38: Técnica del encaje de segmentos curvos

El segmento curvo \widehat{AE} de la figura se puede dibujar como el segmento $\widehat{A'E'}$, convirtiendo las dimensiones del rectángulo que lo encaja al doble de tamaño. Claramente se puede apreciar la proporcionalidad entre dichas longitudes, el largo y el ancho de los rectángulos, lo demás consiste en trazar sobre el segundo rectángulo (en la zona de dibujo), la forma de la curva a copiar. Enlazando esta técnica del encaje con la técnica de la cuadrícula, podemos decir que la referenciación de puntos del segmento curvo, usando la segunda

técnica, complementa la precisión del dibujo, pero ahora estamos seguros de tener en proporción las dimensiones de la zona donde se dibuja el segmento curvo.

La herramienta que construimos para experimentar las tareas propuestas permite elaborar comparaciones de longitudes de segmentos para establecer relaciones 1 a 1, 1 a 1.5, 1 a 2, 1 a 2.5, 1 a 3 y 1 a 4, lo que lleva al estudiante a prescindir de la regla para medir y hacer cálculos para sacar estas mismas condiciones de proporcionalidad. Además, el divisor de proporciones centra la atención en la longitud de los segmentos como propiedad y no como medida de cantidad (número).

3.6.1 Taller 4: Dibujando con el divisor de proporciones

El siguiente es el paso a paso del desarrollo de la actividad propuesta:

1. El docente orienta a tres estudiantes que participarán de las tareas propuestas:

Se explica de forma muy general cómo se usa el divisor de proporciones, mediante sencillas comprobaciones con pedazos de madera que simulan segmentos de recta. El estudiante debe explorar cada posición de graduación de la herramienta, por eso se aconseja facilitar una que no tenga números que orienten la referencia de algún tipo de relación: “ser el doble de”, “ser el triple de”, etc.; podría proponerse a los niños la tarea de marcar dicha graduación del divisor luego de las comprobaciones.

2. El profesor orienta la solución del punto 1 (ver anexo 4) sobre cómo se pueden capturar las formas de una figura con rectángulos que guíen su dibujo y como estos rectángulos deben ser proporcionales a la figura a dibujar. Convenientemente, para tener diferentes referencias de comparación de tamaños, se puede pedir a uno de los estudiantes usar la relación 1 a 1 para dibujar para luego contrastar los dibujos.
3. Pasados 10 minutos, se pregunta a los estudiantes sobre sus dibujos y la relación de aspecto que estos guardan con el modelo original. Además, es importante que ellos comparen entre ellos los dibujos realizados para encontrar aquellas características que los hacen semejantes.
4. Luego de este diálogo sobre los dibujos realizados los estudiantes proceden a resolver el punto 2, para ello el docente pone frente a ellos una cartelera de $100\text{ cm} \times 70\text{ cm}$ con el logo de Nike para aplicar la técnica de dibujo usando el divisor, para ello cuentan con 10 minutos. La intención es que los estudiantes logren una reducción del logo en una hoja tamaño carta.
5. Nuevamente se dialoga con los estudiantes sobre el trabajo realizado para establecer quién ha logrado el *dibujo más semejante* entre ellos y cuál es la similitud entre los dibujos.

6. Se plantea ahora la solución del punto 3 del taller, proponiendo diferentes distancias del punto de origen o fuga, con diferentes inclinaciones de la semirrecta OA (45° , 135° y 270°) para cada estudiante.
7. Finalmente, el docente pregunta a los estudiantes la forma como razonaron para desarrollar los ejercicios del punto anterior y sus impresiones acerca del trabajo realizado con el divisor de proporciones durante el taller. Se busca explorar las potencialidades y limitaciones de la herramienta.

3.6.2 El objetivo de la tarea 4: Dibujando con el divisor de proporciones

Teniendo en cuenta lo anterior, el propósito presupuestado del taller 4 es *usar el criterio de semejanza de triángulos LAL en la captura de proporciones, al comparar las reproducciones de dibujos a diferentes escalas, mediante las propiedades de la proporción implicada.*

3.6.3 La pertinencia de las tareas y su secuencialidad.

El divisor de proporciones es una herramienta muy útil y precisa para establecer proporciones, lo que permite capturar la esencia de la proporcionalidad, la equivalencia de razones. Pero es muy importante introducir la herramienta a partir de la comprensión de su uso y construcción (ver apartado, otras tareas con el divisor de proporciones), porque interesa la forma de razonar en la implementación de la misma. Es claro también que esta herramienta es imprescindible como elemento verificador de proporciones en los otros talleres, este hecho rompe la secuencialidad de las técnicas, porque esto implicaría introducir la herramienta mucho antes de este taller.

3.6.4 Las posibles soluciones previstas de los estudiantes ante la tarea y los conceptos/procedimientos matemáticos asociados a ella

Las posibles estrategias para solucionar las tareas son:

- Los estudiantes usan la herramienta para capturar las longitudes de segmentos, pero luego miden con la regla con la intención de precisar la medida.
- Los estudiantes establecen una correspondencia de las relaciones: 1:1, 1:2, etc. entre el modelo y su dibujo, levantando la herramienta del papel y transportando dicha longitud.
- Los estudiantes establecen una correspondencia de las relaciones: 1:1, 1:2, etc. pero sin levantar la herramienta del papel.

3.6.5 Los errores previstos en las soluciones dadas por los estudiantes.

Los siguientes son los errores previstos ante las tareas propuestas:

- No centrar de manera adecuada la zona de dibujo en relación al dibujo a reproducir.
- No considerar la escala adecuada para la reproducción.
- En los primeros dibujos no usar adecuadamente la herramienta por la falta de experticia al usarla. Por ejemplo, no capturar la longitud desde el extremo del divisor, generando imprecisiones.
- No establecer las relaciones de proporcionalidad entre las magnitudes del dibujo y su reproducción, es decir dibujar sin comprender las relaciones matemáticas en su actividad. Por ejemplo, para unas longitudes usar una razón y para otras otra comparación diferente dentro del mismo dibujo.

4 ANÁLISIS DE LAS TAREAS EXPERIMENTADAS

Este capítulo muestra nuestro análisis sobre las tareas experimentadas, para ello usamos los conceptos referidos en el capítulo 2, porque consideramos que las perspectivas teóricas sobre las RPP y nuestra noción de razonamiento proporcional son un referente en nuestro estudio. De las cuatro perspectivas teóricas enunciadas en el capítulo dos, del abanico de posibilidades para analizar la información obtenida, nos hemos decantado principalmente por la obra de Euclides, vigente aún luego de 2300 años. *Elementos* recoge la esencia de lo que para nosotros debe ser el enfoque de las RPP, como relaciones de comparación. Las otras perspectivas tal vez no capturan dicha esencia, no obstante, pueden servir en algún momento para el análisis, pero el foco de atención son los libros V, VI y VII de *Elementos*

El análisis se divide en cuatro partes, relacionadas con las técnicas e instrumentos de dibujo asociados a la proporcionalidad geométrica, presentadas en el capítulo anterior. Para cada técnica o instrumento se diseñó un taller, pero a lo largo de la experimentación vimos el surgimiento de nuevas tareas para la enseñanza.

4.1 EL USO DE LA CUADRÍCULA PARA DIBUJAR

Para este apartado tenemos dos momentos de experimentación, el momento del pilotaje del taller 1 y la aplicación del mismo. Luego del análisis de lo trabajado inicialmente en el pilotaje se procedió a hacer algunas precisiones y adecuaciones, lo que condujo posteriormente a la aplicación del taller.

Como se dijo anteriormente, con respecto a la forma en las figuras semejantes, en la sección 3.3, es muy importante explorar en el pensamiento de los estudiantes su noción de semejanza en relación a la apariencia de las figuras. Por tal razón, se retomarán esos aspectos para precisar sobre la forma de las figuras semejantes en el desarrollo de las tareas.

4.1.1 Pilotaje del Taller 1

Para el pilotaje del taller 1 se experimentó solamente con tres niñas, a quienes se les facilita el material del anexo 1. Inicialmente, el profesor explica los aspectos básicos de las tareas a realizar en el taller y recomienda reiteradamente que no se puede usar la regla para medir, solo para hacer trazos de líneas. A continuación, las niñas trabajan de forma individual la solución del taller, pero llama la atención como ellas reiteradamente dudan en la

elaboración de sus dibujos y miran las hojas de sus compañeras, como forma de verificación de lo desarrollado, según lo manifiestan ellas posteriormente.

En una primera parte, usando el modelo mostrado en el Anexo 1, las estudiantes debían reproducir inicialmente el logo en otra cuadrícula, que aunque más grande, contenía la misma relación de aspecto que la primera, 11×7 cuadros. En segunda instancia las estudiantes debían dibujar el logo de Nike, pero reproduciendo la figura “al doble” del tamaño original, utilizando la cuadrícula dada para ello, esta nueva cuadrícula tiene un tamaño de 20×16 cuadros.

4.1.1.1 Actividad exitosa de las estudiantes

Cuando las dos cuadrículas poseen la misma relación de aspecto (11×7 cuadros), las tres estudiantes logran hacer la reproducción con cierta precisión. Manifiestan usar el conteo de cuadros para referenciar los objetos destacados de la figura: los puntos extremos, los puntos que forman empalmes entre lo curvo y lo recto del logo, etc. (ver Ilustración 39); sin embargo ellas concuerdan en experimentar cierta dificultad al dibujar la región curva de la figura, aludiendo lo complejo que puede ser el referenciar dicha línea, sin que ella coincida con los cruces de las líneas de la cuadrícula.

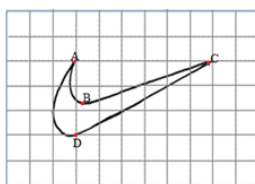


Ilustración 39: Lugares de referencia: puntos más extremos y puntos de empalme

4.1.1.2 Actividad no exitosa de las estudiantes

Al desarrollar la reproducción “al doble” del tamaño original, las estudiantes pierden el sistema de referenciación dado por el “tamaño del espacio de trabajo” anterior (11×7 cuadros), y el conteo de cuadros para ubicar los puntos destacados, ya no resulta tan eficiente en esta nueva zona de trabajo (20×16 cuadros). María José por ejemplo, cuenta por la derecha el mismo número de cuadros para ubicar el punto extremo del diseño original, no así por los otros extremos, por la izquierda o desde arriba, el dibujo resultante se observa desproporcionado (por su forma o apariencia, ver Ilustración 40). Susan por su parte, cuenta los cuadros para ubicar los puntos superiores, los dispone adecuadamente al establecer una relación proporcional entre estas ubicaciones, es decir los dos puntos y el entorno; la estudiante aprecia una relación proporcional entre los puntos superiores y su entorno (ver Ilustración 40). Vemos así una relación de proporcionalidad del objeto con el entorno.

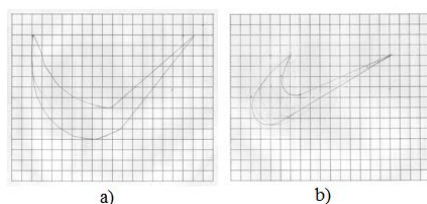


Ilustración 40: a) Dibujo de María José. b) Dibujo de Susan

La actividad exitosa de las estudiantes se logra a partir de la referenciación de los puntos A , B , C y D con la cuadrícula, es decir las relaciones que pueda tener la figura con el entorno. Si tenemos presente nuestra noción de razonamiento proporcional dada en la sección 2.2.1, no se observa en el desarrollo de estas tareas, el sentido de covariación que pueda tener el ancho y el alto de la figura con el ancho y el alto de su reproducción. Se esperaría también por ejemplo, que en el desarrollo de la tarea se apreciara la proporción \overline{BC} es a \overline{CD} como $\overline{B'C'}$ es a $\overline{C'D'}$ (segmentos en la reproducción) y la congruencia de los ángulos de la figuras en los puntos C y C' ³³.

Es importante señalar que en una entrevista posterior a la realización del dibujo, las estudiantes advierten que sus diseños no son correctos, por el aspecto que estos tienen en relación al logo original y perciben un problema interesante para ellas que surge al mirar sus dibujos: La distancia entre los puntos extremos superiores no corresponde a una ampliación 2:1. Lo anterior lleva a las estudiantes a pensar en el objeto mismo (el logo) y no en el entorno del objeto, por ello creemos que a partir de este punto, las estudiantes razonan de manera más adecuada y podrían lograr un mejor dibujo.

4.1.2 Aplicación del Taller 1

Luego del pilotaje del primer taller, se pensó en aplicar la misma actividad, pero para un grupo mucho más grande, para un curso completo, el grado 702. Fueron varias las razones para esta decisión: a) mejoraron nuestras comprensiones acerca de la forma de razonar proporcionalmente, al dibujar usando la cuadrícula, b) profundizamos mucho más acerca de la forma de las figuras y las condiciones de semejanza de ellas cuando tienen segmentos curvos, y c) durante el pilotaje no fue posible abordar el asunto de la deducción de los criterios de semejanza, por parte de las estudiantes, debido a lo reducido del grupo.

Así, inicialmente los niños trabajan solos en su guía o fotocopia (anexo 1) y al cabo de 20 minutos se les pidió que compartieran sus respuestas en duplas. Luego de 15 minutos se les

³³ Siempre y cuando se descomponga la figura del logo en dos partes, la región curva y el triángulo $\triangle BCD$.

pidió que ahora se integraran en grupos de a cuatro estudiantes. Finalmente, el profesor en el tablero, con ayuda de una cartelera hace la puesta en común de las ideas.

El profesor estuvo durante todo el tiempo observando el trabajo de los estudiantes e intervino para aclarar dudas presentadas y para cuestionar los dibujos que él consideraba mal elaborados. Los estudiantes se mostraron muy activos durante la primera parte, dibujaron y contestaron las preguntas de la guía; luego durante el trabajo colaborativo no se vio mucha interacción entre los estudiantes. El profesor intentó entablar un diálogo grupal, pero los estudiantes consideraban que ya estaba terminada la tarea y por ello no participaban en la discusión.



Ilustración 41: Trabajo de los estudiantes de 702 durante la aplicación del Taller 1

Nuevamente, al igual que sucedió durante el pilotaje, los estudiantes mostraron relativo éxito al dibujar la primera reproducción, con áreas de trabajo de la misma relación de aspecto (11×7 cuadrados), no así con la segunda reproducción sobre un área de trabajo “desproporcionada” en relación a la primera. Las explicaciones que dan los estudiantes sobre la forma de razonar son muy similares a las dadas durante el pilotaje, la ubicación de los puntos A , B , C y D , se hace en relación al entorno y no a las magnitudes que componen el logo, los segmentos.

Sin embargo, llama la atención la construcción que logra un estudiante del grupo referido (ver Ilustración 41), porque traza nuevamente sobre la cuadrícula de 20×16 , las líneas necesarias para ubicar el logo, una nueva cuadrícula de 7×3 . Se debe recordar que la razón entre las dimensiones del logo es de 7 a 3 cuadrados. Dado el razonamiento del estudiante, podríamos decir que razona proporcionalmente y para ello usa la estrategia³⁴ del *factor de*

³⁴ Esta estrategia la vemos fundamentada en la Proposición 15: $x : y :: nx : ny$, del Libro V en Elementos de Euclides, donde n es el valor que amplía el antecedente y el consecuente de la primera razón y conduce a la segunda razón, formando así una proporción.

cambio o factor escalar, referida en la sección 2.2.3., porque reproduce la zona del rectángulo imaginario que contiene el logo y forma la proporción 7 es a 14 como 3 es a 6.

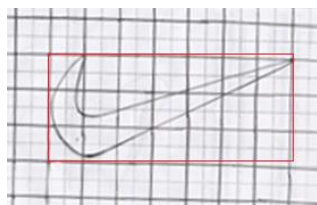


Ilustración 42: Reproducción a escala 2 a 1 de un estudiante de 702

Finalmente, podemos decir en términos generales que aunque hay una identificación de figuras semejantes por parte de los estudiantes, al comparar la figura del logo y su reproducción, no hay precisión al explicar la proporcionalidad entre segmentos o al menos en virtud del espacio que ocupa el logo (11×7 cuadros). Los estudiantes pueden reconocer cuándo un logo dibujado no se parece a la imagen original, pero esta percepción podría obedecer a cuestiones intuitivas, o a cierto nivel de razonamiento proporcional basado en la estimación. Por lo anterior se recomienda practicar mucho más la técnica de la cuadrícula y explorar otras tareas que exploren el cambio de escalas, así como el uso eficiente del área de trabajo para dibujar. Además, se deben explorar otras propiedades de las desproporciones, referidas al dibujar con la cuadrícula, usando por ejemplo las desigualdades planteadas por las proposiciones 8, 13 y 14 del Libro V de Euclides.

4.2 EL USO DE LA PROYECCIÓN DEL LÁPIZ SOBRE LA IMAGEN PARA CAPTURAR LONGITUDES Y ÁNGULOS

Este apartado da cuenta y razón de la experimentación hecha durante el pilotaje del Taller 2, con tres niñas que colaboran junto al docente, discutiendo y resolviendo las tareas propuestas. En dicho ejercicio, de la misma forma que lo presentado en la sección anterior, surgen desde nuestra reflexión, nuevas tareas que sugerimos más adelante, basadas en esta técnica de captura de longitudes de segmentos y amplitudes de ángulos.

Inicialmente se presenta la técnica a las estudiantes; el profesor explica la forma en que se debe tomar el lápiz y proyectarlo sobre la figura a dibujar, además aclara que esta técnica es usada por los dibujantes artísticos para hacer reproducciones proporcionales a un modelo dado; para lo anterior habla de las proporciones y la figura del cuerpo humano; por ejemplo, la cabeza cabe 7 u 8 veces en el alto del cuerpo, el alto de la nariz cabe tres veces en el alto de la cara y ancho del ojo ocupa cuatro veces la línea horizontal eje de los ojos. Luego él aplica la técnica referida al capturar el alto y el ancho de una botella, usando las recomendaciones dadas en el anterior capítulo de este escrito

A continuación, el profesor les pide a las estudiantes fijarse en una de las tres carteleras ubicadas en las paredes del lugar. En ella hay un rectángulo con relación de aspecto 2 a 1 (dos veces el alto corresponde al ancho), y propone que capturen dicha figura con la técnica recién presentada.

La realización de esta tarea no ofrece mucha complicación a las estudiantes y logran dibujar sus rectángulos semejantes al modelo de la cartelera. Ellas capturan a partir del alto del rectángulo su ancho y luego trasladan dicha razón sobre su dibujo, es decir, forman la proporción, a es $2a$ como a' es $2a'$. Sin embargo, un asunto importante emerge de la situación de tener tres rectángulos semejantes ¿por qué éstas son figuras rectilíneas semejantes entre sí?

Ante esto el profesor pregunta sobre la semejanza de las tres figuras, a ello los estudiantes aseguran que sí la hay, en virtud a que el ancho de sus rectángulos es el doble del alto y no importa cuánto midan realmente. Esto está justificado por la Proposición 21 del Libro VI de *Elementos* de Euclides (ver sección 2.1.2.2): “Las figuras semejantes a una misma figura rectilínea son también semejantes entre sí”. Desde el lenguaje común se puede decir que si A es semejante a B y B es semejante a C , entonces A es semejante a C ; es sus palabras los estudiantes dicen que eso es “asunto de pura lógica”.

Después de lo anterior el profesor pide a las estudiantes capturar los atributos de la imagen que representa la fachada de una casa, en la segunda cartelera pegada en la pared. Propone a las estudiantes analizar detenidamente dichas relaciones entre las partes de la figura y el todo. Al cabo de cinco minutos el profesor empieza la discusión sobre los atributos de la figura.

Luna Alejandra escoge el alto de la ventana para medir los demás objetos de la fachada y afirma que esta longitud cabe dos veces desde la ventana hacia abajo y cinco veces en el ancho de la casa (ver Ilustración 43). En cambio, Susan prefiere usar el ancho de la ventana y afirma que con esta longitud también puede hacer comparaciones. A continuación, el profesor pregunta por la relación que pueda haber entre la ventana y la puerta, a ello Luna Alejandra afirma que la puerta es una ventana y media; el profesor pone en duda lo dicho y vuelve a preguntar y Luna Alejandra replantea lo dicho y dice que la puerta es de alta como dos altos de ventana.



Ilustración 43: Captura de longitudes de segmentos por parte de Luna Alejandra

Acto seguido el profesor fija la atención en los bordes de la fachada y pregunta a las estudiantes sobre la forma de capturar la amplitud de ángulo de dichas partes. Luna Alejandra afirma que bastaría con dibujar las dos líneas del techo y luego completar con la línea inclinada³⁵. En cambio, Susan afirma que desde la izquierda hacia el centro de la fachada hay media ventana, dice que puede dibujar esa parte y luego completar el borde del techo.

Interesa la discusión sobre la captura de la amplitud del ángulo porque la congruencia de estas medidas es una de las condiciones de la Definición 1 en el Libro VI para la semejanza de figuras rectilíneas. Como se vio en el análisis de la técnica de la cuadrícula para dibujar, la amplitud del ángulo está condicionada por la referenciación de los segmentos que conforman los lados del ángulo. Sería interesante explorar la captura de dicho atributo por esta técnica, por ejemplo, usando dos lápices en cruz y proyectarlos sobre el ángulo a capturar y analizar la precisión de dicho método.

Además de la captura de amplitudes de ángulo, es interesante observar todas las razones que se pueden obtener, al relacionar un objeto o parte de la figura y el todo de ella. Es así como vemos esta forma de razonar en dos sentidos: la razón del objeto en virtud de su alto y ancho, y la razón que resulta de comparar las dimensiones del objeto con el todo (ver Ilustración 44).

Un ejemplo de lo anterior son las siguientes razones matemáticas, a es a $2a$ (alto y ancho de la ventana) y a es a $5a$ (ancho de media ventana y ancho de la casa) en el modelo de la cartelera. Estas razones referidas forman una proporción con las razones a' es a $2a'$ y a' es a $5a'$, en el dibujo de dichas longitudes. De la misma forma podría hacerse el mismo razonamiento con las razones recíprocas, y sus imágenes en el dibujo, conservando así la misma relación de comparación.

³⁵ Usando el criterio de semejanza de triángulos LLL y así los ángulos quedan capturados

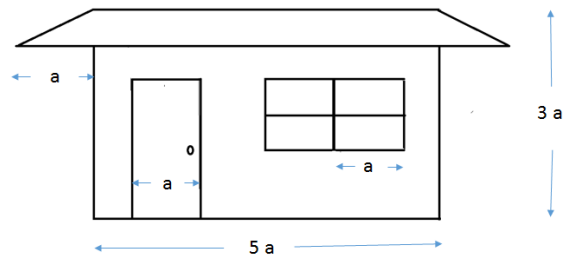


Ilustración 44: Resumen de la captura de medidas en virtud del alto de la ventana o de medio ancho de ella (a)

Estas razones discutidas anteriormente se pueden justificar desde las definiciones formales de razón y proporción, en *Elementos*, libro V (Definiciones 3 y 6, ver sección 2.1.2.1). Lo anterior en virtud que para nosotros, la razón es la comparación de dos magnitudes y la proporción la relación de esas comparaciones.

Durante el desarrollo de la tarea el profesor insistió varias veces sobre conservar el mismo sitio para realizar la captura de longitudes. Luna Alejandra estuvo un momento de pie y luego se sentó, por tal razón tuvo que volver a hacer la captura de longitudes desde la silla donde dibujaba, cuando el profesor le hizo notar ese detalle. Susan en cambio permaneció en todo momento durante la captura sentada y tomando registro de lo que analizaba.

A continuación de la captura de razones ya comentada, las niñas pasan al papel el análisis de las magnitudes de los segmentos y logran hacer una figura muy parecida al modelo de la cartelera. Luego de este trabajo de las estudiantes, el profesor trata de precisar la forma adecuada del uso de la técnica trabajada.

A propósito de los dibujos logrados por las estudiantes, desde distintas posiciones frente a la cartelera, el profesor señala a las niñas la incidencia de este factor en la realización de los dibujos. Efectivamente, el ángulo formado entre el plano de la cartelera y la línea imaginaria que une el centro de la figura y el ojo del dibujante, induce una captura de segmentos relativamente diferentes. El profesor afirma que entre más alejados de esa línea perpendicular ideal, en un ángulo diferente a 90^0 , peor será el desempeño de la técnica. Acto seguido las niñas buscan otras posiciones alejadas de la línea perpendicular al plano de la cartelera, pero no ven algún inconveniente con lo que el profesor refiere en su explicación. Consideramos que por lo reducido del lugar no fue posible experimentar dicha circunstancia, pero este detalle sí fue percibido por nosotros, en la simulación de taller hecha en una tutoría de trabajo de grado, en un momento anterior.

En lo que refiere a la distancia óptima desde el observador a la imagen es algo que debe seguirse experimentando, porque en ambos momentos de la tutoría, el espacio no permitía alejarse demasiado. Sería interesante analizar qué sucede con dos grupos de observadores

ubicados a diferentes distancias hacia el objeto a dibujar, para comparar sus dibujos y analizar las razones matemáticas establecidas y su implicación en el éxito de la tarea. Suponemos que no debe haber mucha complicación con este aspecto, dado que, en una clase de artes, de dibujo, los estudiantes están distribuidos por el lugar y deben poder hacer dicha captura de atributos de las figuras a dibujar. Creemos que es más importante la toma de medidas desde un mismo punto y el dibujo resultante será el producto de lo que se pueda visualizar desde dicha posición.

Sobre la última tarea, el dibujo del logo de Nike, dispuesto en la tercera cartelera, no podemos anotar mucho, debido a que nuestro modelo tenía cuadrícula y esto orientó el dibujo de las estudiantes. Lo anterior debido a la referenciación de los puntos destacados de la figura que orientan la posición, entonces a las estudiantes les bastó dibujar nuevamente la cuadrícula de la cartelera, para lograr la reproducción. Sin embargo, surgió una consideración no tenida en cuenta en el Taller 1 para ellas, la relación ancho y alto al capturar dichos atributos con el lápiz.

El profesor le pide a las estudiantes, para esta tarea, ver qué relación hay entre el alto y el ancho del logo, usando la captura de longitudes con el lápiz. Luna Alejandra afirma que “hay en el ancho dos y un poquito veces el alto”; Susan afirma que son exactamente tres veces. Luego de esto el profesor cuestiona dichas apreciaciones al no coincidir entre las estudiantes, ni tampoco hay una correspondencia en relación al número de cuadrados en la cuadrícula (3x7 cuadrados). Luego las niñas centran su atención en dicho número de cuadros del alto y el ancho y llegan a un acuerdo, la relación de aspecto es 7 a 3 (en términos de la captura “dos y un tercio veces”).

Finalmente se deben anotar dos cosas referidas al uso de la técnica y a la aparición de las cantidades inconmensurables en el ejercicio de captura. Con respecto a lo primero, diremos que durante el desarrollo del Taller 2 fue recurrente señalar a las estudiantes aspectos referidos al uso correcto de la técnica, así como la importancia de confirmar las apreciaciones con segundas y terceras mediciones. Lo anterior nos lleva a pensar que se debe practicar más la técnica para perfeccionarse y además ponerse a prueba en variadas figuras, con formas y tamaños diversos. Con respecto a lo segundo, consideramos que no todas las cantidades de longitudes se pueden expresar en términos de otras, y este tipo de tareas no solo debe ser abordado en la enseñanza de esta técnica, sino en el abordaje de cuestiones referidas a la introducción de la noción del número racional, en este mismo nivel educativo.

4.3 EL PANTÓGRAFO

Durante nuestra propia exploración usando la herramienta, vimos que fue necesario entender cómo funcionaba y cómo debíamos mejorar el nivel de precisión de la misma. Construimos nuestra primera versión del pantógrafo siguiendo indicaciones en un videotutorial en YouTube³⁶, pero este no lograba reproducir dibujos al doble del tamaño como nos fue sugerido. También observamos que los materiales empleados (palos de paleta) no posibilitaban una correcta articulación de la herramienta al configurar otras escalas de ampliación.

Dado lo anterior, fue necesario razonar sobre dónde era la correcta ubicación de los orificios, al construir la herramienta, que permiten la adecuada articulación de las barras del pantógrafo. Paralelamente construíamos el divisor de proporciones y este hecho fue clave para nosotros para entender dónde debíamos ubicar los orificios en la herramienta; este hecho, el de las diferentes configuraciones del pantógrafo y su explicación matemática, ya fue presentado en el capítulo anterior.

Por esta razón decidimos que en los talleres 3 y 4, debíamos instruir primero a los estudiantes sobre el uso de las herramientas, antes de empezar la experimentación. Por otro lado, vimos en nuestro propio proceso de comprensión sobre el manejo de las herramientas, el potencial de la construcción de ellas, como una tarea interesante para los estudiantes.

4.3.1 Experimentación con el pantógrafo físico

La experimentación referida a continuación se ha hecho con tres estudiantes que participan en el pilotaje de este Taller 3. Básicamente el profesor muestra el funcionamiento y uso de la herramienta y luego permite que las estudiantes experimenten con ella; durante toda la sesión el profesor pregunta sobre los dibujos realizados y las posibilidades de la herramienta.

Inicialmente, el profesor presenta el pantógrafo hablando sobre qué es lo que permite hacer, cómo se debe disponer el área de trabajo y cuáles son las partes de la herramienta. Acto seguido el profesor copia un rectángulo usando la herramienta que acaba de presentar a las estudiantes. Él manifiesta que no se preocupa mucho por la calidad del trazo, sino por el tamaño de la figura dibujada y las relaciones que se pueden establecer con la figura copiada.

³⁶ Ver vídeo en <https://www.youtube.com/watch?v=W4vzVzxdII0>

El profesor pregunta a las estudiantes qué relación hay entre la imagen y su reproducción; Luna Alejandra responde que el dibujo está “al doble del tamaño” del modelo copiado; las razones que da la estudiante las fundamenta en su apreciación de comparación entre los largos y anchos respectivos de las dos figuras, el modelo y su dibujo. Por su parte María José con ayuda de Susan usa el divisor de proporciones³⁷ y verifica que el alto del dibujo es efectivamente el doble del alto en la figura copiada, lo mismo hace con las longitudes de los anchos.

Lo anterior nos permite establecer el potencial del divisor de proporciones en todas las técnicas y tareas que impliquen hacer reproducciones de ampliación, reducción o copia exacta de los tamaños; la herramienta es un verificador de relaciones y tamaños, es un validador de trabajo. Este no es un hecho menor en nuestro trabajo, porque permite al estudiante tener la certeza de dibujar a la escala pedida y posibilita centrar la atención no en la medida de la cantidad de longitud (magnitud como número), sino en la cantidad de longitud (magnitud como cantidad) y la transformación de ella: ampliación, reducción o copia exacta.

A continuación las estudiantes manipulan la herramienta y aparece una nueva estrategia para usar el pantógrafo, no prevista por nosotros al diseñar el taller, las estudiantes manipulan simultáneamente la regla y el pantógrafo³⁸ como se ve en la Ilustración 45. Este hecho es importante para nosotros al razonar sobre la herramienta y su funcionamiento, porque centra la atención del estudiante en el paralelismo entre líneas, entre el segmento de la imagen y el segmento copiado al dibujar. Esto ha sido explicado en el capítulo anterior (ver sección 3.5), en los aspectos matemáticos involucrados en el funcionamiento del pantógrafo.

³⁷ Debemos decir que al momento de experimentar con el pantógrafo, ya habíamos tenido una sesión con el divisor de proporciones, herramienta usada en el Taller 4.

³⁸ El divisor de proporciones debía aparecer para las estudiantes en el cuarto grupo de tareas, pero para la experimentación con las técnicas e instrumentos de dibujo, no se siguió un orden específico, fue algo asincrónica la implementación.

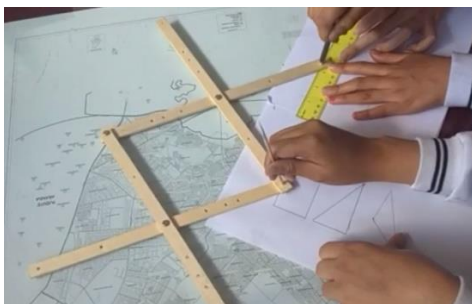


Ilustración 45: Uso del pantógrafo y la regla al dibujar

A continuación, se les pide a las estudiantes dibujar el logo de Nike con el pantógrafo. Ellas trabajan colaborativamente manipulando la herramienta y razonando sobre lo que hacen; Luna Alejandra mueve la guía sobre la figura, mientras Susan hace la marca con el lápiz sobre la zona de dibujo de los puntos destacados del logo, empalmes y puntos extremos; Susan pregunta por el tamaño y María José afirma que es el “doble del tamaño”.

Luego el profesor pregunta por el tamaño del dibujo realizado y las tres estudiantes afirman que el dibujo está al doble de dimensiones. Argumentan en relación a la forma como la herramienta está configurada y porque vieron antes que esta hizo una ampliación al doble del tamaño con un rectángulo. A continuación, se centra la atención en el vértice del logo y a la forma de comprobar la amplitud de dichos ángulos; ante la imposibilidad de usar un transportador de ángulos el profesor sugiere usar dos reglas para capturar la abertura entre las líneas, pero esto no es tan evidente para las estudiantes.

Lo anterior, nos indica que no es tan sencillo el análisis de la forma y la semejanza de figuras. La observación del logo se torna compleja porque este no tiene una forma geométrica usual, se hace necesario un análisis más detallado de la figura, como composición de otras formas por ejemplo (ver sección 3.3), Este aspecto es muy complicado para los estudiantes, abstraer formas geométricas dentro de otras, este asunto se abordará en el análisis del Taller 4.

Luego de descomponer el logo en formas más simples, quedan planteados para las niñas dos triángulos semejantes (ver Ilustración 46). El profesor pregunta sobre la manera de establecer la semejanza entre ellos, la proporcionalidad que pueda haber entre sus lados y la congruencia entre sus ángulos, como aquellas características que los “hacen parecidos”. Las estudiantes establecen una correspondencia de proporcionalidad entre los tres lados de los triángulos valiéndose del divisor de proporciones para resolver la pregunta, esto se puede sustentar en las Proposiciones 4 y 5 del Libro VI en Elementos de Euclides, si se considera la congruencia de los ángulos, además de la Definición 1 (Ver sección 2.1.2.2).



Ilustración 46: Semejanza de triángulos al descomponer el logo de Nike

Finalmente, en esta sesión de trabajo el profesor pone frente a las niñas tres figuras aparentemente semejantes al logo de Nike (ver Ilustración 47) y pregunta por cuál de ellas pudo haber sido dibujada con el pantógrafo. Luego de la discusión entre ellas por la elección, dos aspectos guían la argumentación dada, el uso del divisor de proporciones y las cuadrículas de referencia de dibujos e imagen. Luego de un rato concluyen que la primera imagen de la lista es la semejante, en virtud de ser una ampliación a una y media veces sus dimensiones.

Para esta tarea las estudiantes logran establecer, con ayuda del divisor de proporciones, la relación de comparación (razón) entre el alto y el ancho de las figuras, observando que la primera figura tiene las mismas razones que el logo original, por estar a escala 1 a 1,5. Al comparar la segunda figura, platean que el alto es el doble, pero que su ancho es más grande y por ende no son semejantes. Para la tercera figura saben que no son iguales por su forma, pero no explicitan las comparaciones del alto y ancho, aunque sí refieren a que el alto es muy grande.



Ilustración 47: Figuras semejantes al logo de Nike

4.3.2 Experimentación con el pantógrafo digital

Luego de la manipulación con el pantógrafo físico que se construyó para la experimentación, surgieron ciertas inquietudes sobre las posibilidades de la herramienta en cuanto al dibujo y su manipulación. Nos dimos cuenta por ejemplo, que la herramienta

posee un rango de trabajo³⁹ y esto limita de alguna forma las tareas propuestas. Por otro lado, manipular las diferentes configuraciones para ampliar a diferentes escalas es algo complejo al empezar a trabajar con la herramienta.

Fue por ello que diseñamos en Geogebra varias versiones del pantógrafo: ampliador, reductor y copiador. Este último pantógrafo no es posible de configurar con la herramienta física, porque coincidirían la guía y el lápiz en la misma posición, y no se podría dibujar.

La sesión comienza con la explicación del pantógrafo configurado para ampliar a tres veces las dimensiones (ver Ilustración 48). El profesor pregunta a las estudiantes por qué la configuración de la herramienta permite hacer dicha ampliación y qué relación puede haber entre la posición de los agujeros y el factor de escala. Luna Alejandra nota que la distancia entre el pivote y el primer agujero cabe tres veces sobre esa varilla en la herramienta, al igual que el agujero central marca desde el pivote dos veces esa distancia. Ese hecho, para ella, determina que pueda la herramienta hacer ampliaciones al doble o al triple de ampliación (ver aspectos matemáticos del pantógrafo en sección 3.5).



Ilustración 48: Pantógrafo físico configurado al triple de ampliación

A continuación el profesor presenta, de la misma forma que lo hizo con el pantógrafo físico, la versión diseñada en Geogebra, el pantógrafo digital (ver Ilustración 49). Luego de dibujar varias figuras y verificar el tamaño de sus dimensiones, ahora pregunta a las estudiantes por la relación de los puntos E y T , con los factores de ampliación y el funcionamiento de la herramienta.

³⁹ Posibilidades de la herramienta para dibujar, en cuanto al tamaño de figuras que puede reproducir.

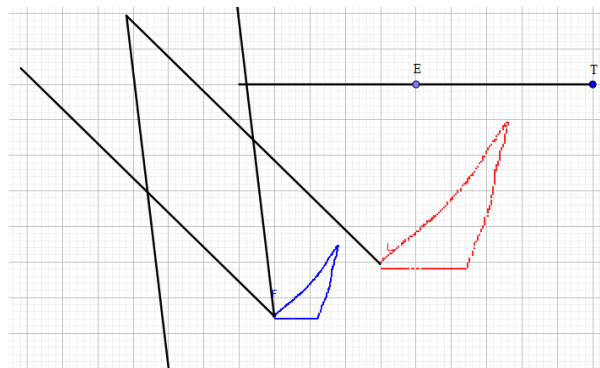


Ilustración 49: Pantógrafo digital en Geogebra

Luego de fijar la atención en los puntos E y T el profesor permite que las estudiantes experimenten con la herramienta, pero ellas no perciben la relación de la ubicación de E en relación a la escala de ampliación. Parece ser que la precisión del trazo no ayuda a la discusión, por tal razón el profesor recurre a otro pantógrafo cuyo guía (F) sigue una figura previamente trazada en la izquierda (cuadrado de una unidad de ancho y alto) y la recorre, mientras que en la derecha dibuja el rastro de esa misma figura (L) pero ampliada (ver a continuación).

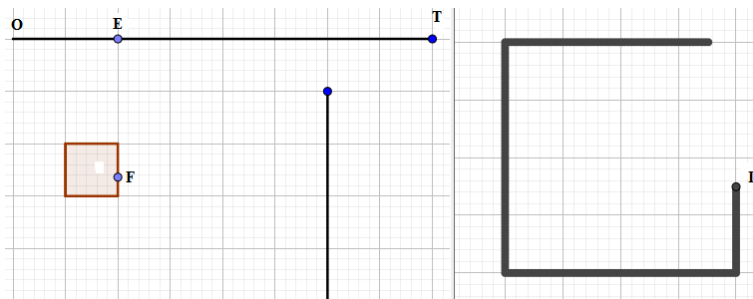


Ilustración 50: Pantógrafo digital ampliador a escala 4 a 1

Este nuevo pantógrafo, con trazos más precisos dinamiza mucho más la discusión y permite a las estudiantes de manera más precisa referirse a los tamaños de las figuras. El profesor ubica el punto E sobre diferentes posiciones en el deslizador y pregunta por la relación existente entre los segmentos \overline{OE} y \overline{OT} , y los factores de ampliación de figuras que se observan. Esta tarea se sustenta en la razón que puede plantearse entre dos segmentos de longitudes en el deslizador y su correspondencia con otro par de segmentos en la figura modelo y en la figura dibujada (ver Proposición 15, $x : y :: nx : ny$, del Libro V en *Elementos* de Euclides). Luego de lo anterior el profesor hace una asociación entre la escala del Divisor de proporciones y la escala del deslizador en el pantógrafo digital.

A continuación, el profesor copia el logo de Nike usando el pantógrafo digital, con una escala de ampliación 2 a 1. Este nuevo escenario de aprendizaje enfoca la discusión en las dimensiones del logo y no en la forma, porque se venía hablando del tamaño de los objetos copiados en relación a las diferentes posiciones del deslizador sobre el segmento \overline{OT} .

Acto seguido el profesor introduce el pantógrafo digital en la discusión de las diferentes posiciones de E sobre el deslizador, y permite que las niñas experimenten con este aspecto (ver Ilustración 50 e Ilustración 51). El profesor pregunta sobre el tamaño de las figuras dibujadas en la derecha y su relación con las posiciones de E sobre el segmento OT . Las estudiantes observan la variación combinada entre estos tamaños y las diferentes posiciones sobre el deslizador, para nosotros esto es un indicio de razonamiento proporcional en las estudiantes, en relación a nuestra noción referida en la sección 2.2.1. Efectivamente hay una covariación entre las dos magnitudes referidas (posiciones de E sobre el deslizador y tamaños de los dibujos) que marcan diferentes situaciones.

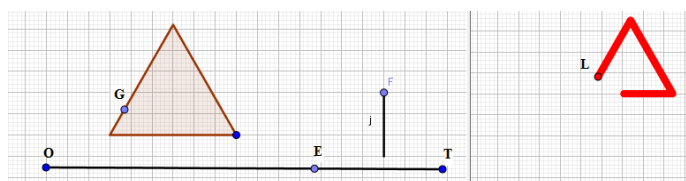


Ilustración 51: Pantógrafo digital reductor

Para finalizar este apartado, nos referiremos al potencial de este tipo de construcciones en Geogebra, para el desarrollo de nuestro propósito. Es bastante claro que es muy difícil dotar a todos los estudiantes de una clase de 40 estudiantes, con los materiales de trabajo necesarios para el manejo de este instrumento (pantógrafo físico), pero en cambio es muy práctico facilitar los archivos digitales necesarios para trabajar en el computador, ya sea en su casa o en la sala de sistemas y permitir la experimentación con la herramienta. Pensamos además que las herramientas tecnológicas son necesarias, cuando estas permiten realizar tareas que otras de tipo físico no lo permiten, de lo contrario estas nuevas tecnologías en el aula serían innecesarias.

4.4 EL DIVISOR DE PROPORCIONES

Las experimentaciones con el divisor de proporciones en este apartado, se dividen en dos momentos, instrucción y construcción de la herramienta y pilotaje del Taller 4. Para lo primero, se recurrió a regletas de madera, cortadas en diferentes tamaños que representaban segmentos de recta y tenían cierta relación multiplicativa entre ellos, para comprobar las diferentes posiciones del divisor de proporciones. Para lo segundo, se usó la herramienta

construida por nosotros, para implementar la técnica del encaje de formas, a partir de rectángulos que capturan la forma.

4.4.1 Cómo funciona y cómo se construye un divisor de proporciones

Con todas las regletas de madera (segmentos), el profesor pregunta a las tres estudiantes sobre la relación existente entre ellos, en relación a sus longitudes. Las estudiantes tratan de completar las longitudes de los segmentos mayores con otros de menor longitud, pero se aprecia un razonamiento aditivo en ellas; por ejemplo, el segmento que llamaremos $4a$, lo completan a partir de la suma entre $3a$ con a ⁴⁰. Luego, el profesor toma los segmentos a y $2a$ y pregunta por la relación existente entre ellos, de esta forma las estudiantes notan que el pequeño es al grande como “la mitad de” y el grande al pequeño como “el doble de”, en virtud a sus longitudes comparadas.

Después de lo anterior el profesor pide que asocien la longitud del segmento a en relación a todos los demás sobre la mesa. Luego de las preguntas del profesor se establecen las relaciones multiplicativas entre los segmentos, surgen en la conversación las relaciones: “ser el triple de”, “ser el cuádruple de”, “ser la tercera parte de” y “ser la cuarta parte de”, entre los segmentos referidos en la experimentación.

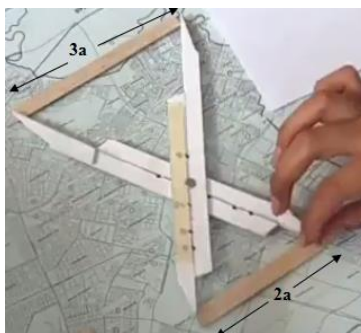


Ilustración 52: Divisor de proporciones midiendo la relación 1,5 veces a 1

Luego el profesor coloca sobre la mesa el divisor de proporciones y dice que la herramienta permite hacer el mismo razonamiento anterior, pero sin necesidad de contar. Para el profesor aún no es tan clara la relación multiplicativa entre los segmentos, que comentan las estudiantes, y quiere enseñar a usar la herramienta. Después de precisar cómo se deben ubicar las longitudes con el divisor, el profesor coloca en los extremos de la herramienta, los segmentos $2a$ y $3a$, y pregunta por la relación entre las longitudes, como se observa en la Ilustración 52.

⁴⁰ Existe entre ellos una relación en virtud de las longitudes, el más pequeño tiene longitud a , los demás tienen longitudes $2a$, $3a$ y $4a$. También se debe decir que hay tres o cuatro regletas de cada tipo.

Las estudiantes a partir de la disposición de los segmentos que se comparan no ven alguna relación aparente, necesitan del segmento a , para establecer que $3a$ es el sesquiáltero de $2a$. Este hecho facilita en las estudiantes la apreciación de tener configurada la herramienta en la relación referida anteriormente. Si estuviésemos hablando de la medida de la cantidad de longitud de los segmentos (números) podríamos interpretar las tres relaciones matemáticas referidas en la proposición 4 del Libro VII en *Elementos* de Euclides (ver sección 2.1.2.6) “Todo número es parte o partes de todo número, el menor del mayor”, bastaría con asignar a la longitud a un valor específico de longitud. En este sentido, vemos una ruta expedita para abordar la proporcionalidad entre números con este tipo de materiales para la enseñanza, en virtud de las relaciones multiplicativas entre cantidades.

Luego las estudiantes comprueban las diferentes relaciones matemáticas entre las longitudes de los segmentos sobre la mesa, usando el divisor de proporciones. Ellas relacionan las diferentes configuraciones de la herramienta, posiciones del remache o eje, con las relaciones entre longitudes que establecen sus extremos. Nuevamente observamos en las estudiantes una forma de razonamiento proporcional, según lo planteado en la sección 2.2.1, ellas observan la variación entre las diferentes posiciones del divisor de proporciones (distancias desde los extremos a los agujeros), y las relaciones matemáticas que se marcan en los extremos. Efectivamente es una comparación de segundo nivel, de relación entre relaciones (ver aspectos matemáticos del divisor de proporciones en sección 3.6).

A petición del profesor, las estudiantes dibujan rectángulos usando el divisor de proporciones, con la configuración a es a $2a$ de la herramienta. Llama la atención de esta construcción que los rectángulos quedan sobre la misma línea horizontal y se asocia de nuevo el paralelismo entre pares de lados de la figura a dibujar y de su reproducción; tal vez sea por el uso que le han dado a la herramienta en la misma sesión de trabajo, convendría para complejizar las tareas y el razonamiento asociado a ellas, usar posiciones diferentes entre la figura y su dibujo (ver Ilustración 53). Finalmente, en esta parte, el profesor pide a las estudiantes que describan el procedimiento para dibujar rectángulos con longitudes de lados al triple de su tamaño, ellas lo hacen consistentemente.

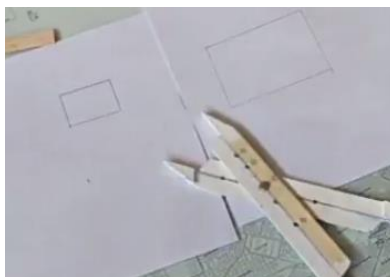


Ilustración 53: Rectángulo construido con el divisor de proporciones

Para enseñar a construir la herramienta, el profesor ha llevado para la sesión los dos brazos en cartón listos para ser perforados y terminar la herramienta. Consideramos que entender este aspecto, la ubicación de los orificios a lo largo de los brazos, es clave para entender cómo funciona la herramienta, por tal razón se propone como tarea.

Luna Alejandra determina, con ayuda de la regla, que si el primer orificio se encuentra en la mitad del divisor de proporciones nuestro (la mitad de 24 cm, 12 cm) ella puede marcar la mitad del nuevo divisor en 15 cm, porque su largo es 30 cm. Para el siguiente orificio ella nota que esta distancia cabe tres veces en el largo del divisor (en 24 cm) y piensa que puede hacer una correspondencia sobre la nueva herramienta. Para marcar el agujero de razones 2 a 1, ella con ayuda del profesor recurre al algoritmo de la regla de tres y establece la siguiente proporción, 24 cm es a 8 cm como 30 cm es a **X**; obtiene así la distancia buscada de 10 cm, para ubicar el segundo orificio en el nuevo divisor en construcción. A continuación Luna Alejandra entiende que este procedimiento lo puede replicar para las otras posiciones que necesita en la construcción de la herramienta (ver Ilustración 54).



Ilustración 54: Proceso de perforación del divisor de proporciones

Lo anterior, es bastante significativo en nuestra experimentación, porque la estrategia de solución de situaciones de proporcionalidad directa (ver sección 2.2.3), “El algoritmo del producto cruzado o regla de tres simple” por fin tiene sentido. La estudiante, como se mostró anteriormente, estableció las proporciones necesarias para cumplir con la tarea asignada, en lugar de multiplicar mecánicamente sin entender qué hacía. Es claro para nosotros, que la cuarta proporcional se puede hallar no solo entre las medidas de cantidades de longitud (números), sino también entre magnitudes de segmentos de recta, como se

observa en la siguiente ilustración (esto, basados en la Proposición 12, del Libro VI en *Elementos* de Euclides).

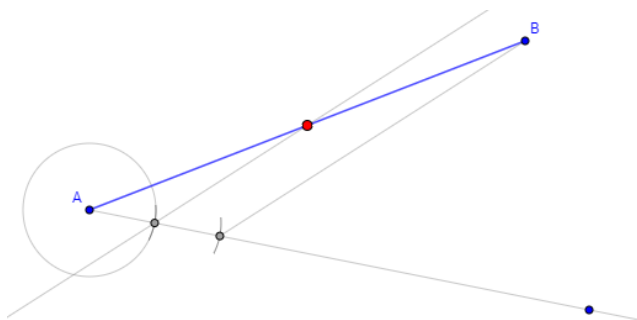


Ilustración 55: División de un segmento en dos partes iguales. Tomado de <https://www.geogebra.org/m/YQzwSbW7>

4.4.2 Pilotaje del Taller 4

Continuado con el trabajo de la sesión anterior, el profesor introduce la técnica del encaje de figuras, usada en el dibujo artístico. Él explica los principios básicos, ya referidos en la sección 3.6 y sugiere que para buscar precisión se debe usar el divisor de proporciones.

En el desarrollo del punto 1 del taller (ver Anexo 4) el profesor pregunta a las estudiantes sobre qué tan grande pueden hacer el dibujo en su hoja, pero las estudiantes no ven tan relevante ese aspecto, porque ellas no han escogido la escala adecuada de ampliación. Cuando es considerada el área de trabajo para realizar la tarea, Luna establece, con ayuda del divisor de proporciones que el ancho de la figura a dibujar cabe cinco veces en su hoja de trabajo. Luego Susan determina que dada las limitaciones de la herramienta, se debe dibujar a escala 4 a 1.

El anterior razonamiento de las estudiantes fue hecho a partir del ancho de la figura solamente, desconociendo la otra dimensión, el alto. Dada la forma de la imagen, casi un cuadrado para el encaje de las formas, tal vez no sea relevante para ellas la consideración del alto de la caricatura. Sin embargo, el razonamiento proporcional se debe entender como la percepción de la covariación de dos dimensiones, en el uso de esta y cualquier técnica desarrollada. También es adecuado señalar el uso de otras razones de semejanza consideradas para resolver la pregunta, como la escala 5,5 a 1; se debe insistir que dichas razones asociadas también pueden ser no enteras.

A continuación, ellas durante 10 minutos dibujan la figura pedida (como se ve en la siguiente ilustración); con la ayuda del profesor se logran dibujar las zonas curvas de las figuras, las estudiantes ya habían dibujado los rectángulos semejantes al modelo base.



Ilustración 56: Susan y Luna Alejandra resolviendo el punto 1 del taller 4

Para el segundo punto del taller (ver Anexo 4), el profesor explica que se puede usar el divisor de proporciones para ampliar o reducir la figura de la copa mostrada. Lo anterior es importante de señalar, porque las estudiantes habían visto en el primer punto del taller, el uso de la herramienta para ampliaciones, ahora harán las dos cosas.

Las estudiantes marcan sobre las líneas guía, al igual que lo hicieron en la técnica de la cuadrícula, los puntos destacados del modelo. Estas referencias establecen los extremos de los segmentos de recta que ellas quieren dibujar, con la ayuda del divisor de proporciones trabajan haciendo una ampliación 2 a 1 y una reducción 1 a 2, sobre las mismas líneas de proyección (ver Ilustración 57).

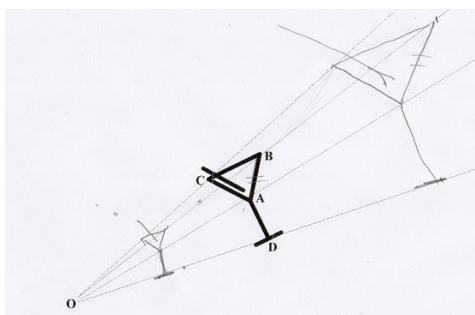


Ilustración 57: Dibujo logrado en el segundo punto del Taller 4

Finalmente, queremos señalar cómo a lo largo del trabajo previo, se han introducido en las tareas propuestas, mediante el apoyo de las diferentes técnicas e instrumentos para dibujar, los elementos conceptuales necesarios para construir una homotecia. Las tareas de proporcionalidad geométrica no métrica, en los contextos prácticos de dibujar, han permitido un abordaje diferente de los contextos de enseñanza de este objeto matemático.

4.5 OTRAS TAREAS QUE SURGEN AL MOMENTO DE EXPERIMENTAR

En este apartado mostramos otras tareas que consideramos durante la experimentación de los talleres propuestos, pero que no fueron experimentadas, sin embargo, reportamos nuestra reflexión al respecto.

- a) Como se dijo anteriormente, en la técnica del *uso de la cuadrícula para dibujar*, el área de trabajo es una variable didáctica a considerar, por ello se usaron áreas de trabajo, con la misma y diferente relación de aspecto. Sería interesante dibujar la cuadrícula sobre algún dibujo y luego pedirles a los estudiantes que hagan reducciones o ampliaciones del mismo; podrían por ejemplo usar cuadros más grandes o más pequeños según convenga, para establecer una proporcionalidad entre las cuadrículas, no dada por la cantidad de cuadros, sino por el tamaño de ellos.
- b) Usando la técnica de la *captura de longitudes con el lápiz*, se sugiere afinar el uso de ella con diferentes tipos de figuras geométricas básicas: rectángulos, triángulos, etc. y además estas formas deben tener diferentes relaciones de aspecto entre el ancho y el alto, no sólo razones 2 a 1, también razones no enteras. Es importante señalar que dado que una proporción se puede expresar como la clase de equivalencia de razones iguales (ver sección 2.1.4.2), sería importante usar figuras que posean razones equivalentes, ejemplo: 3 es a 2, 6 es a 4, 9 es a 6, etc. en dichas capturas de longitudes, para buscar proporcionalidad entre dichas figuras.
- c) Otras tareas que surgen de aplicar la técnica de la *captura de longitudes con el lápiz*, involucran las propiedades de las proporciones del Libro V de la obra *Elementos* de Euclides, de la sección 2.1.2.1.3. Por ejemplo, se podría agregar o quitar cierta porción de longitud (el alto) a la base de dos rectángulos y analizar las nuevas razones resultantes entre el alto y el ancho (Proposiciones 17 y 18).
- d) Se recomienda, luego de trabajar la semejanza de figuras con el *pantógrafo*, utilizar en la discusión de dicha propiedad con los estudiantes, el uso de variadas formas geométricas, y en especial, aquellas que impliquen analizarlas como composición de otras figuras más simples.
- e) Se recomienda desde el uso de cualquiera de las técnicas e instrumentos para dibujar, constantemente mostrar a los estudiantes figuras semejantes y no semejantes, para establecer las condiciones de dicha propiedad.
- f) En cuanto al uso de instrumentos, ya sea con *el pantógrafo físico o con el divisor de proporciones*, se recomienda completar dibujos y comparaciones de segmentos con herramientas de distintos tamaños y hacer razonar a los estudiantes sobre ese hecho. Por ejemplo, empezar la copia de un dibujo con un pantógrafo de brazos (varillas) cortos y luego proporcionar una herramienta de brazos largos, con la misma configuración de ampliación o reducción, para concluir la copia; ¿se conservarán invariantes las condiciones de semejanza, entre la figura a copiar y su reproducción?
- g) Dado lo presentado en la sección 4.3.2, uso del pantógrafo digital conviene cuestionar nuestras propias prácticas docentes acerca del manejo que le damos a la

geometría en nuestras aulas. Por tal razón, debemos proponer ambientes de aprendizaje de la geometría más dinámicos, donde el movimiento sea una variable didáctica a considerar, y es allí donde el pantógrafo digital permite experimentar tanto a los estudiantes, nuevas tareas y retos de aprendizaje. Por ejemplo, podrían proponerse a los estudiantes asuntos referidos a las construcciones geométricas en Geogebra y la relación de las propiedades de dichas figuras, con sus ampliaciones y reducciones, es decir qué propiedades son invariantes o cuáles no en las figuras.

- h) Usando los segmentos o pedazos de madera que los representan, como los empleados para introducir la herramienta del *divisor de proporciones* a los estudiantes, se podría plantear a los estudiantes el *método de la antanairesis* (ver sección 2.1.1) para calcular una razón entre segmentos o la proporción entre dos o más razones. Es importante mostrar a los estudiantes métodos alternos de razonar, no solo proporcionalmente, sino en el contexto de las magnitudes conmensurables y no conmensurables. Lo anterior, es un aspecto destacado en la construcción del concepto de número racional, cuestión que también se aborda en el grado séptimo de la Educación Básica y está íntimamente relacionada con las RPP.
- i) Usando el mismo material didáctico del numeral anterior también se pueden explorar aspectos contemplados en el Libro VII, *la proporcionalidad desde las cantidades* (ver sección 2.1.2.3). Bastaría con tomar un segmento más pequeño que los demás y compararlo con otros, para determinar la relación “ser parte de” (definición 3); o tomar un segmento más grande y compararlo con los demás y mostrar así la relación “ser partes de” (definición 4); o mostrar que un segmento puede expresarse cierto número de veces a partir de otro, con la relación “ser múltiplo de” (definición 5). Lo anterior basado en las medidas de cantidad de longitud (números concretos), si se quiere podría nombrarse uno de los segmentos como unidad de medida. Para nosotros es claro desde nuestra experiencia docente que el estudiante muestra muchas dificultades al abordar relaciones como: ser el doble de, ser el triple de, ser la mitad de, etc. y este tipo de ejercicios de razonamiento multiplicativo, también apoyan el desarrollo del pensamiento proporcional.
- j) Según lo discutido en la sección anterior, 4.4.2, convendría a partir de figuras rectilíneas, pedir a los estudiantes completar reproducciones o dibujos a escala. Esto con el fin de plantear tareas que requieran el razonamiento proporcional al hallar la cuarta proporcional teniendo tres magnitudes dadas. Insistimos en cuestionar el algoritmo de la regla de tres realizado sobre cantidades, hecho de manera mecánica por los estudiantes.

5 CONCLUSIONES Y DISCUSIÓN

Este capítulo recoge los principales resultados de lo desarrollado durante los anteriores apartados. A continuación, se mostrarán dichas conclusiones, producto de nuestro proceso reflexivo sobre la experiencia de diseño de un grupo de tareas, en relación con las diversas facetas del conocimiento del profesor de matemáticas involucradas en tal acción.

En primer lugar, retomaremos el propósito de este trabajo de grado en el ámbito de nuestras expectativas al desarrollar dicha idea. Para ello, destacamos los momentos de trabajo establecidos al diseñar y experimentar el conjunto de tareas propuesto: Revisión de las perspectivas teóricas sobre las RPP, identificación y diseño preliminar de tareas, experimentación o pilotaje, reestructuración del primer diseño y nuevo momento de experimentación. Este método de trabajo nos ha permitido cualificar nuestro conocimiento sobre las RPP, y en el contexto planteado, hemos aprendido asuntos referidos sobre el diseño de tareas, no considerados en nuestra aproximación inicial.

Lo anterior, nos brindó elementos de confianza en lo diseñado, porque a partir de la experimentación y reelaboración de tareas, fuimos comprendiendo la importancia de robustecer nuestro conocimiento sobre: las RPP, el razonamiento proporcional, el diseño de tareas, y las técnicas e instrumentos de dibujo. Por tal razón, fuimos replicando el método de experimentar y reelaborar las situaciones propuestas, porque aprendíamos sobre la marcha, y esto cualificaba las diferentes facetas de nuestro conocimiento.

Así mismo al diseñar y experimentar el conjunto de tareas, pudimos ver un amplio saber que abarca darle sentido al conocimiento matemático, cuando se vincula con otros contextos de enseñanza, fuera de las matemáticas mismas. Vimos por ejemplo, que saber matemáticas implica también relacionar dicho conocimiento con otros saberes, como las técnicas e instrumentos usados para dibujar proporcionalmente. Nuestro propio abordaje de este aspecto (dibujar), amplió nuestra perspectiva hacia la enseñanza; nosotros mismos tuvimos que aprender sobre dichos elementos y relacionarlos con nuestro saber matemático. Vimos por ejemplo, muchos escenarios de aprendizaje, sobre diversos aspectos ya señalados; aprendizajes nuestros y de los estudiantes con quienes experimentábamos.

En segundo lugar, diremos que la indagación planteada sobre cuál es la relación entre el diseño de tareas, que procuran el desarrollo del razonamiento proporcional en estudiantes

de grado séptimo, y el conocimiento del profesor (objetivo general), encierra variados aspectos referidos al conocimiento de las matemáticas para la enseñanza. Pero, principalmente vemos una relación dialéctica entre el diseño de tareas y el conocimiento del profesor de matemáticas.

Esta relación vincula las acciones que se emprendan al diseñar las tareas y el conocimiento necesario para que estas desarrollen un fin determinado, en nuestro caso, promover el razonamiento proporcional en un grupo de estudiantes. Es decir, hay una correspondencia recíproca entre las dos dimensiones, entre el diseño y el conocimiento, porque a la vez que se robustece el saber, el conjunto de tareas cobra pertinencia.

En lo que respecta a los objetivos secundarios, planteados para desarrollar en el trabajo de grado, como se vio en la Ilustración 3, diremos que cada objetivo específico fue abordado en un determinado capítulo de este escrito. Es por ello que el Capítulo 2 muestra una revisión de las perspectivas teóricas sobre las RPP en concordancia con el primer objetivo específico; asimismo, el Capítulo 3 describe el conocimiento del profesor al diseñar el conjunto de tareas propuesto; y sobre el Capítulo 4 se muestra el análisis de la experimentación con el grupo de tareas, desde el conocimiento del profesor.

A continuación, queremos mostrar al lector, desde el ámbito de la EPM, unos aspectos que consideramos relevantes en el conocimiento del educador. Como ya se dijo antes, no basta con saber de matemáticas (conocimiento disciplinar) para poder enseñar significativamente, porque este conocimiento para la enseñanza es mucho más amplio y complejo.

5.1 EL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS SOBRE LAS RPP

Dado lo anterior queremos presentar al lector cómo se fortaleció nuestro conocimiento para la enseñanza del tema de las RPP, la semejanza de figuras y la proporcionalidad geométrica. Para ello introducimos un modelo de la EPM que organizará nuestros resultados sobre el tema, pero primero haremos una contextualización sobre el conocimiento del profesor de matemáticas en este campo de investigación, antes de mostrar nuestras apreciaciones.

Desde la aparición de los aportes de Shulman (1986) se ha dado una revolución en la educación del profesor, sobretodo en qué tipo de conocimiento se necesita para la enseñanza. Se concluye desde estas nuevas miradas la importancia de considerar un nuevo conocimiento, diferente al disciplinar, que responda a las inquietudes de la práctica

docente. En efecto, surgen múltiples perspectivas⁴¹ para estos desarrollos conceptuales, respondiendo a lo que cada grupo de investigadores considera pertinente para mejorar el conocimiento del docente.

Hemos escogido el modelo de EPM de Ball, Thames y Phelps (2008) para organizar el conocimiento necesario para la enseñanza de la proporcionalidad geométrica en el marco de este trabajo de grado. Esta perspectiva permite establecer el conocimiento del profesor de matemáticas necesario para la enseñanza, al diseñar material didáctico.

5.1.1 El Modelo de Ball, Thames y Phelps

Estos autores consideran un conocimiento más especializado en la enseñanza de las matemáticas el MKT⁴², el conocimiento matemático para la enseñanza. Ball, Thames, y Phelps (2008) lo definen “como el conocimiento matemático que usa el profesor en el aula para producir instrucción y crecimiento en el alumno” (p. 374). Como resultado de esta clasificación surgen para ellos dos nuevas clasificaciones del conocimiento del profesor: el SMK (conocimiento del contenido) y el PCK (conocimiento pedagógico del contenido). A continuación, se muestra una ilustración de los diferentes dominios del conocimiento del profesor de matemáticas; además, cada uno de estos tiene otras subdivisiones.

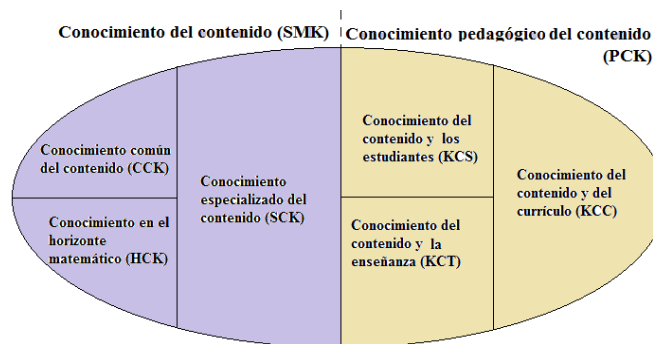


Ilustración 58: Dominios del CME, adaptación de la figura en Ball, Thames, & Phelps (2008)

5.1.1.1 El conocimiento del contenido (SMK)

Este aspecto contempla el saber matemático que posee el docente, aquellos componentes propios de su quehacer profesional. Este conocimiento se especializa en:

- a) *Conocimiento común del contenido (CCK)*: Este conocimiento se refiere a lo que debe saber de manera básica, toda persona con nivel educativo escolar en

⁴¹ Por ejemplo, el Modelo de Rowland, el de Stacey, el de Godino, el de Schoenfeld y Kilpatrick, entre otros.

⁴² Por sus siglas en inglés “Mathematical Knowledge for Teaching”.

matemáticas. Es decir, los conocimientos básicos matemáticos que todos adquirimos a nivel escolar.

- b) *Conocimiento en el horizonte matemático (HCK)*: Este conocimiento involucra cómo cierto contenido se relaciona con otros a lo largo del currículo.
- c) *Conocimiento especializado del contenido (SCK)*: este conocimiento matemático es mayor al que debe tener cualquier persona con formación escolar. Este saber involucra no solo el saber hacer del conocimiento común anterior, sino la procedencia de dichos contenidos, así como las justificaciones de este saber hacer en la resolución de un problema en matemáticas, por ejemplo.

5.1.1.2 El conocimiento pedagógico del contenido (PCK)

Este saber refiere a los errores que los estudiantes cometen con frecuencia y a las estrategias de solución empleadas en los problemas, a la relación entre el contenido matemático y su enseñanza, y a como se relacionan los contenidos dentro del currículo. Este conocimiento a su vez se especializa en:

- a) *Conocimiento del contenido y los estudiantes (KCS)*: Este conocimiento del profesor combina los saberes acerca de los estudiantes y los saberes acerca de las matemáticas, refiere a los errores que los estudiantes cometen con frecuencia, a las estrategias de solución empleadas y a las maneras de razonar al solucionar problemas en matemáticas.
- b) *Conocimiento del contenido y la enseñanza (KCT)*: Este tipo de conocimiento trata acerca de la enseñanza y su relación con el conocimiento sobre las matemáticas. Se refiere a las decisiones que toma el docente sobre una determinada secuencia de tareas, aspectos como la secuencialidad y la dependencia entre contenidos se refieren en este subdominio.
- c) *Conocimiento del contenido y del currículo (KCC)*: Es el conocimiento que el profesor debe tener sobre: el conjunto de programas que se diseñan para la enseñanza de temas específicos y temas a un nivel determinado; los diferentes recursos o materiales educativos en relación a los programas; y el grupo de características que sirven de guía para usar el plan de estudios.

5.1.2 Uso del Modelo de Ball, Thames, & Phelps (2008)

Dado lo anterior, hemos tomado este modelo de Ball, Thames, y Phelps (2008) del conocimiento del profesor de matemáticas, como un organizador en nuestro trabajo de grado, de nuestro propio conocimiento para la enseñanza, construido sobre la proporcionalidad geométrica y la semejanza de figuras. A lo largo del escrito el lector ha

visto reflejados estos dominios del conocimiento sobre el tema, por tal razón vamos a precisar a continuación cómo se organizan en nuestro estudio.

Existe un CCK de la proporcionalidad geométrica que todo estudiante de nivel escolar debe manejar, al finalizar sus estudios secundarios, este lo encontramos en la sección 3.1 “Los conceptos y procedimientos asociados a la proporcionalidad geométrica y la semejanza de figuras planas”. En este apartado, hemos asumido la proporcionalidad entre magnitudes y no entre números, cómo es la forma usual de mostrarse a nivel escolar.

Así como hay un conocimiento básico sobre el objeto matemático en nuestro estudio, también hay un SCK; el lector lo puede ubicar en las secciones 2.1 y 2.2, pero específicamente referido a la proporcionalidad geométrica y la semejanza de figuras, en la sección 2.1.2.2. Es importante comentar, que en el marco de referencia se centra la atención en diferentes perspectivas de las RPP, como relaciones de comparación y en nuestra noción de razonamiento proporcional, con el propósito de usar estos referentes para justificar las tareas propuestas. Es decir, las tareas no sólo se centran en la semejanza de figuras y la proporcionalidad geométrica, sino que el contexto de trabajo elegido es un pretexto para nosotros para poner en práctica todo lo estudiado sobre las RPP.

Este conocimiento especializado del contenido matemático, señalado en el marco de referencia del trabajo de grado y construido durante nuestros estudios en el segundo y tercer semestre de la MDM, ha sido presentado como ponencia a el II CEMACYC⁴³, “Perspectivas teóricas de la razón, la proporción y la proporcionalidad como relaciones de comparación” (Moreno et al., 2017). Para nosotros esta participación es un asunto fundamental en nuestro proceso de cualificación y profesionalización docente; hemos entrado a la Maestría con la firme intención de mejorar nuestras prácticas de enseñanza, pero hemos logrado algo mejor, nuestro primer reconocimiento como docentes investigadores.

Para completar el SMK en nuestro estudio tenemos el HCK. El lector lo puede encontrar en las secciones 1.2 “Justificación del problema de estudio” y 3.2 “El objetivo de las tareas propuestas en términos de la comprensión de los objetos matemáticos implicados”. Es claro que conocer los contenidos matemáticos no es suficiente para enseñar; de ahí surge la necesidad del HCK (Torres, 2015, p. 13). Señala la misma autora que se deben hacer conexiones intraconceptuales, conexiones interconceptuales y conexiones temporales en el Conocimiento del Horizonte Matemático (p.31).

⁴³ Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe realizado en Cali. Ver en http://ciaem-redumate.org/cemacyc/index.php/ii_cemacyc/iicemacyc/paper/view/420

Por tal razón en nuestro trabajo de grado, en el proceso de reflexión sobre el conocimiento necesario para la enseñanza, entendemos este tipo de conexiones como los niveles de comprensión sobre el conocimiento del contenido vistos en el HCK. Es decir, cómo se relaciona el contenido de la proporcionalidad geométrica y la semejanza de figuras, con otros conceptos, dentro y fuera de las matemáticas (en este caso el dibujo de figuras proporcionales), y con los conocimientos previos y futuros que se deben tener en cuenta. Por ejemplo, esto lo vimos a partir de la implementación de las propiedades de las proporciones (referidas desde el libro V de *Elementos*), en la justificación de las formas de razonar proporcionalmente cuando se dibuja.

Así mismo, el lector puede ubicar el KCS en los diseños que se hacen de cada uno de los cuatro talleres. Para referirnos a las posibles estrategias y soluciones de los estudiantes ante las tareas propuestas, ver secciones 3.3.4, 3.4.4, 3.5.4 y 3.6.4, Para ubicar los posibles errores de los estudiantes ante las tareas, ver secciones 3.3.5, 3.4.5, 3.5.5 y 3.6.5. Por ejemplo, cuando se consideraba con anticipación al diseñar las tareas, en cada técnica o instrumento de dibujo, aquellas formas de resolver las situaciones empleadas por los estudiantes. Consideramos que este conocimiento es muy importante para el profesor porque permite prever en su diseño de tareas, la posible actividad de los estudiantes, trazar una ruta de aprendizaje y así mejorar su diseño de tareas.

Para el KCT el lector puede consultar las secciones: 3.3.1, 3.3.3, 3.4.1, 3.4.3, 3.5.1, 3.5.3, 3.6.1 y 3.6.3, en cada una de las técnicas e instrumentos para dibujar proporcionalmente. Este aspecto refiere al conocimiento de las RPP, en el contexto de la proporcionalidad geométrica, en relación a la posible secuencialidad de las tareas, su pertinencia y la manera como se estructura cada taller en relación al objetivo de enseñanza de la sesión. Cada taller, aunque refería a diferentes instrumentos o técnicas de dibujo, se implementaba desde sus propias particularidades; por ejemplo, la cuadrícula y el pantógrafo se enfocaban en la forma de las figuras, mientras que el divisor y la captura de magnitudes con el lápiz se centraba en el tamaño.

En cuanto al KCC podemos referirnos nuevamente al asunto mostrado en la sección 1.2, al interior del currículo de matemáticas, pero agregaremos la relación que puedan tener las RPP con otros campos del conocimiento, como las ciencias sociales, naturales, etc., como lo señala Reyes-Gasperini (2013). Desde nuestras concepciones de las matemáticas, las conexiones de las RPP se dan hacía otros conocimientos dentro del currículo general de la escuela, de ahí la importancia de nuestro estudio, se pretende vincular el dibujo artístico y las matemáticas. El poder hacer de nuestra parte una argumentación matemática de cómo funcionan las diferentes técnicas e instrumentos para dibujar proporcionalmente, muestra

indudablemente esas conexiones referidas, ilustra nuestra comprensión sobre dicho conocimiento (ver el capítulo 3, secciones 3.3, 3.4, 3.5 y 3.6).

5.2 RESULTADOS DE LA EXPERIMENTACIÓN DE TAREAS Y DISCUSIÓN

A continuación, extraemos algunos de los resultados más importantes que surgen de nuestro análisis de las tareas experimentadas. Nos hemos enfocado en el conocimiento del profesor; si se comentó en algún momento del escrito las acciones de los estudiantes al resolver las tareas, era con la firme intención de medir la eficacia de nuestros diseños y potencializar lo propuesto.

En el uso de la *técnica de la cuadrícula* hemos encontrado, a nuestro juicio, tanto en el pilotaje como en la aplicación del taller 1, una forma equivocada de razonar proporcionalmente en los estudiantes. Cómo ya se explicó en la sección 4.1 los estudiantes usan la referenciación de los puntos destacados de la figura, para reproducir esas mismas relaciones de posición de dichos puntos en la zona de dibujo; el tener una zona de trabajo desproporcionada en relación a la zona o cuadrícula donde está el modelo a dibujar, denota lo señalado. Lo anterior no se había hecho evidente, según el análisis de tareas de proporcionalidad geométrica en libros de texto, desarrollado por Quintero y Molavoque (2012) y desde nuestra propia experiencia, tradicionalmente, las cuadrículas de la figura y la zona de dibujo se plantean proporcionales.

En cuanto al uso de la *técnica de captura de longitudes de segmentos y amplitudes de ángulos con el lápiz*, vemos la importancia de este tipo de ejercicios para el desarrollo del razonamiento proporcional, porque permite establecer relaciones directas con los objetos que queremos dibujar. Hemos dicho que el razonamiento proporcional es una forma de pensamiento de segundo orden, la proporción es una relación (equivalencia) de relaciones (razones); por tal razón, es a partir de este tipo de tareas que encontramos potencialidad en el desarrollo de esta destreza.

En consecuencia, de lo anterior, debemos pensar en la enseñanza en tareas que permitan este tipo de comparaciones múltiples. Por ejemplo, podríamos plantear una actividad de enseñanza que implique medir las sombras de varias personas y compararlas con los tamaños de los cuerpos que las originan; o establecer diferentes tipos de razones entre las sombras de varios cuerpos y las razones asociadas a los tamaños de los cuerpos.

Adicional a lo anterior, esta técnica permite establecer dos tipos de relaciones proporcionales; entre las dimensiones de los objetos que conforman una figura y sus correspondientes reproducciones, y entre las dimensiones de los objetos en relación a las dimensiones globales de la figura, junto con sus correspondientes reproducciones; en otras

palabras, al dibujar se deben tener en cuenta dos tipos de proporcionalidad: la proporcionalidad local y la proporcionalidad global.

En lo que refiere al uso del *pantógrafo* para dibujar proporcionalmente, rescatamos el potencial de la tarea de comprender el funcionamiento y construcción de la herramienta, para entender cómo se dibuja en ampliaciones o reducciones del tamaño de las figuras. Es también importante la versatilidad encontrada en el *pantógrafo digital* para atender asuntos referidos a las múltiples configuraciones de la herramienta, para ampliar, reducir o copiar a escala 1 a 1 todo tipo de figuras. Estos aspectos son básicos para darle sentido y pertinencia a la enseñanza del tema de la proporcionalidad geométrica y la semejanza de figuras.

El divisor de proporciones se convirtió principalmente en una herramienta verificadora de las relaciones de longitud entre los segmentos comparados, los de las imágenes y los de sus dibujos. Esta herramienta nos liberó del uso de la regla y su escala de medición de la cantidad de longitudes, para comprobar los razonamientos hechos, ante las tareas propuestas. Como segundo aspecto destacado, vemos en la herramienta un enorme potencial para la enseñanza de la proporcionalidad, no sólo de magnitudes, sino también de números⁴⁴. Generalmente, la aritmetización de la razón induce a mostrarla como un simple cociente en la enseñanza, desconociendo el potencial que encierra como un índice de comparación entre dos objetos.

En términos generales, en lo referido al manejo de las diferentes técnicas de dibujo, debemos decir que existen otros asuntos asociados al área de trabajo que deben ser abordados en las tareas propuestas en este contexto. Por ejemplo, cómo hacer para “proporcionar” (adecuar a otra área) un tamaño de papel inadecuado para dibujar cierto modelo o figura; cómo centrar el dibujo en el área de trabajo y usar los principios de la simetría combinados con la proporcionalidad geométrica; cómo adecuar el dibujo al espacio de trabajo y optimizar al máximo dicha área, entre otros asuntos.

Por último, queremos anotar dos consideraciones finales. En primer lugar, creemos que la propuesta de trabajo planteado no termina con este informe, por tal razón se abrirá una página web para compartir la experiencia con otros profesores de matemáticas. Es así como queremos poner a disposición de otras personas todo el material; consideramos que la propuesta puede nutrirse con otras técnicas o instrumentos, o con la perspectiva de otros docentes que ya hayan trabajado sobre el tema. En segundo lugar, creemos que se ha cualificado nuestro saber, porque hemos visto cómo ganamos un estatus de profesionales en la Educación Matemática, aspecto no contemplado antes de ingresar al programa de la

⁴⁴ Este asunto ya fue explicado en la sección 4.5, otras tareas que surgen de la experimentación, numeral i).

Maestría. Lo anterior denotado en la mejora sustancial de nuestros procesos de lectura, escritura y análisis de documentos, abordados desde cada uno de los seminarios recibidos, y en poseer ahora una mirada más profunda y menos ingenua de la Educación Matemática.

6 REFERENCIAS

- Agudelo-Valderrama, C. (2007). La creciente brecha entre las disposiciones educativas colombianas, las proclamaciones oficiales y las realidades del aula de clase: las concepciones de profesores y profesoras de Matemáticas sobre el álgebra escolar y el propósito de su enseñanza. *Revista Electrónica Iberoamericana sobre calidad, eficacia y cambio en educación*, 5(1), 43–62. Recuperado en <http://www.rinace.net/arts/vol5num1/art3.pdf>
- Agudelo-Valderrama, C., & Martínez, D. (2015). En busca de una manera conectada de saber: el caso de una profesora de matemáticas. *Revista Electrónica Iberoamericana sobre calidad, eficacia y cambio en educación*, 13(3), 121–141. Recuperado en <https://goo.gl/UVzPnN>
- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Beta, G. (1990). *Proporcionalidad geométrica y semejanza*. Madrid: Editorial Síntesis.
- Fernández, C., & Llinares, S. (2012). Características del desarrollo del razonamiento proporcional en la educación primaria y secundaria. *Enseñanza de las ciencias*, 30(1), 129–141. Recuperado en <http://enciencias.uab.es/article/view/596>
- Fiol, M. L., & Fortuny, J. M. (1990). *Proporcionalidad directa: la forma y el número*. Madrid: Editorial Síntesis, S. A.
- García, G., Castiblanco, M., & Vergel, R. (2005). *Prácticas de evaluación en las clases de matemáticas en la Educación Básica*. Bogotá: ARFO Editores e Impresores Ltda.
- Godino, J. D., & Batanero, C. (2002). Proporcionalidad y su didáctica para maestros. Granada: Proyecto de Investigación y Desarrollo del Ministerio de Ciencia y Tecnología. Recuperado en http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/3_Proporcionalidad.pdf

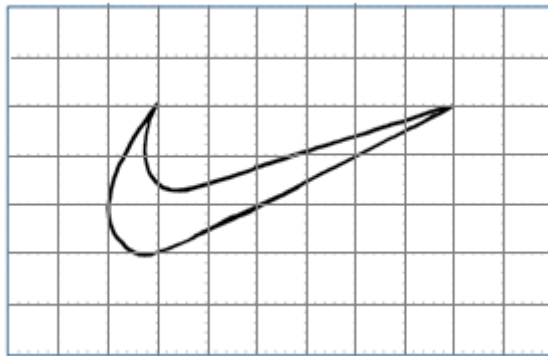
- Guacaneme, E. A. (2001). *Estudio didáctico de la proporción y la proporcionalidad: Una aproximación a los aspectos matemáticos formales y a los textos escolares de matemáticas (tesis de maestría)*. Universidad del Valle, Cali.
- Guacaneme, E. A. (2002). Una mirada al tratamiento de la proporcionalidad en textos escolares de matemáticas. *Revista EMA*, 7(1), 3-42. Recuperado en http://funes.uniandes.edu.co/1146/1/80_Guacaneme2002Una_RevEMA.pdf
- Guacaneme, E. A. (2012). Significados de los conceptos de razón y proporción en el Libro V de los Elementos. En *Pensamientos, epistemología y lenguaje matemático* (pp. 99–135). Cali, Colombia: Doctorado Interinstitucional en Educación.
- Guacaneme, E. A. (2015). ¿Versiones históricas no multiplicativas de la proporcionalidad? En *XIV CIAEM-IACME*, Chiapas.
- Guacaneme, E. A., & Mora, L. C. (2012). La educación del profesor de Matemáticas como campo de investigación. En *Primer Simposio Internacional de Educación en competencias docentes, Bogotá, D.C.*
- Lamon, S. J. (1993). Ratio and proportion: Connecting content and children's thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(1), 41–61. <https://doi.org/10.2307/749385>
- Lamon, S. J. (2012). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. New York: Routledge.
- Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional Reasoning. En *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (pp. 93–118). Reston, VA: Lawrence Erlbaum & National Council of Teachers of Mathematics. Recuperado en http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject/88_10.html#top
- MEN. (1994). Ley 115 febrero 8 de 1994. Congreso de La República de Colombia.
- MEN. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas, 46–95.
- Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., & Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las ciencias*, 29(1), 75–88.
- Moreno, R., Mayorga, R., & Guacaneme, E. (2017). Perspectivas teóricas de la razón, la proporción y la proporcionalidad como relaciones de comparación. En *II Congreso de*

- Educación Matemática de América Central y de El Caribe*. Conferencia llevada a cabo en Cali, Colombia.
- Obando, G., Vasco, C. E., & Arboleda, L. C. (2009). *Praxeologías matemáticas en torno al número racional, las razones, las proporciones y la proporcionalidad*. Universidad del Valle, Cali.
- Obando, G., Vasco, C. E., & Arboleda, L. C. (2014). Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17(1), 59–81. <https://doi.org/10.12802/relime.13.1713>
- Oller Marcén, A. M., & Gairín Sallan, J. M. (2013). La génesis histórica de los conceptos de razón y proporción y su posterior aritmetización. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 16(3), 317–338. <https://doi.org/10.12802/relime.13.1632>
- Perry, P., Guacaneme, E., Andrade, L., & Fernández, F. (2003). *Transformar la enseñanza de la proporcionalidad en la escuela: un hueso duro de roer*. Bogotá: una empresa docente.
- Puertas, M. L. (1994). *Euclides. Elementos. Libros V-IX*. Madrid: Editorial Gredos.
- Quintero Poveda, A. L., & Molavoque Medina, M. J. (2012). *Análisis de las tareas asociadas a la proporcionalidad geométrica y la semejanza, presentes en libros de texto de matemáticas (tesis de maestría)*. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá. Recuperado en <http://repository.pedagogica.edu.co/xmlui/handle/123456789/92>
- Reyes-Gasperini, D. (2013). *La transversalidad de la proporcionalidad*. México, Distrito Federal: Subsecretaría de Educación Media Superior.
- Ruiz, E., & Valdemoros, M. (2006). Vínculo entre el pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo: el caso de Paulina. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(2), 299-324.
- Sánchez Ordoñez, E. (2013). Razones, proporciones y proporcionalidad en términos de variación y correlación entre magnitudes. *Revista SIGMA*, 11(1), 10–25. Recuperado en <http://revistas.udenar.edu.co/index.php/rsigma/article/view/437>
- Shulman, L. (1986). Those who understand: knowdge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

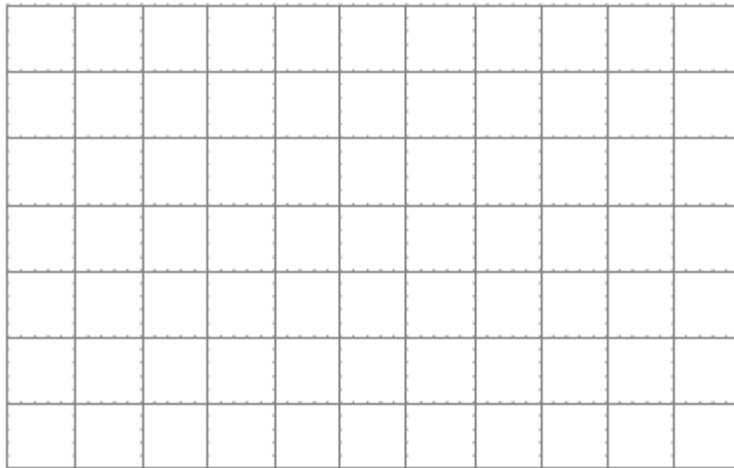
- Silvestre, A., & Da-Ponte, J. (2011). Una experiencia de enseñanza dirigida al desarrollo del razonamiento proporcional. *Revista Educación y Pedagogía*, 23(59), 137–158.
- Singh, P. (2000). Understanding the Concepts of Proportion and Ratio Constructed by Two Grade Six Students. *Educational Studies in Mathematics*, 43(3), 271–292. <https://doi.org/10.1017/CBO9781107415324.004>
- Torres, E. (2015). *El conocimiento del profesor de matemáticas en la práctica: enseñanza de la proporcionalidad (tesis doctoral)*. Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona. Recuperado en <https://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=100095>

ANEXOS

Anexo 1: Taller 1 Concurso “dibujemos el logo de Nike”

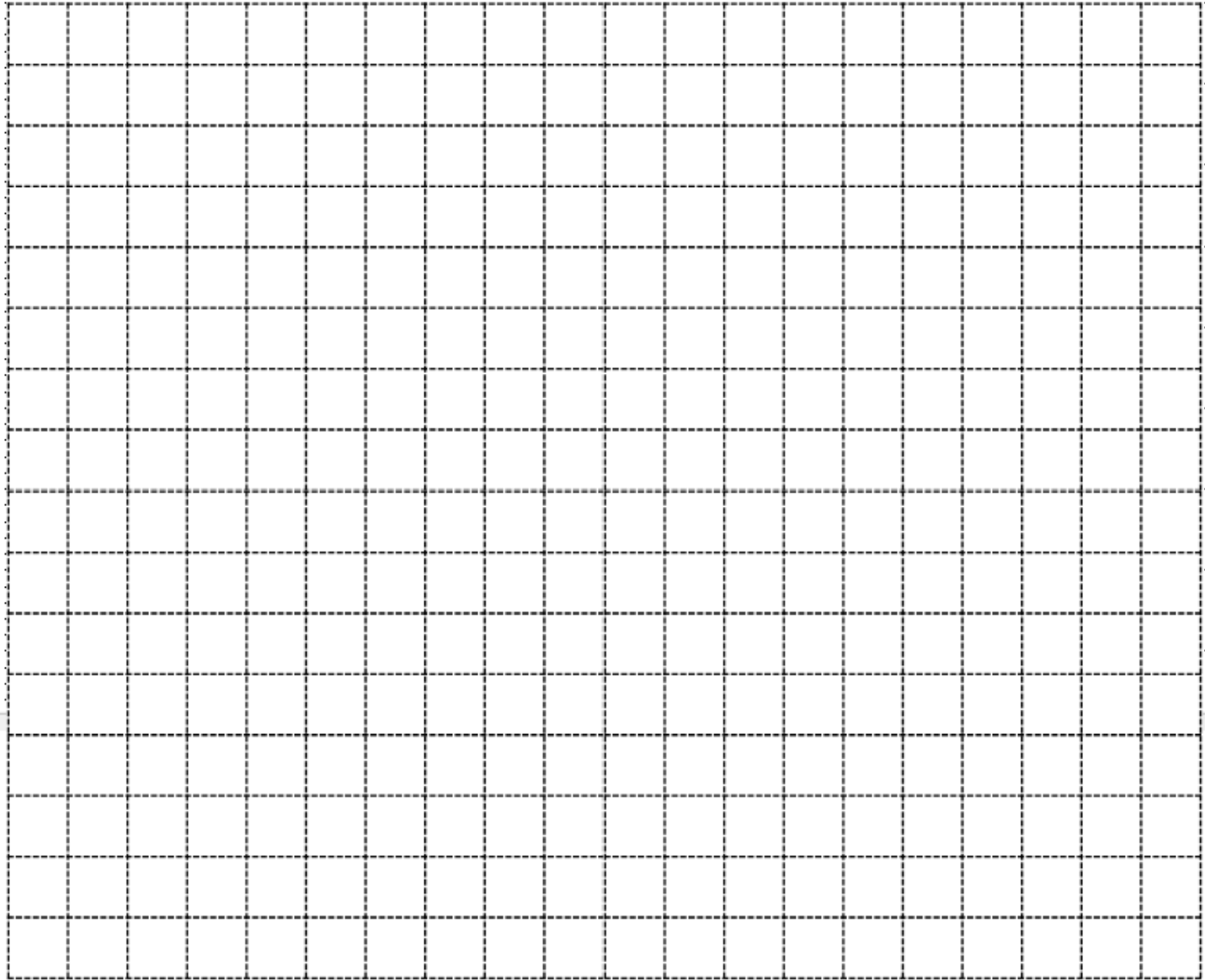


1. Dada la figura anterior, dibújela en la siguiente cuadrícula.



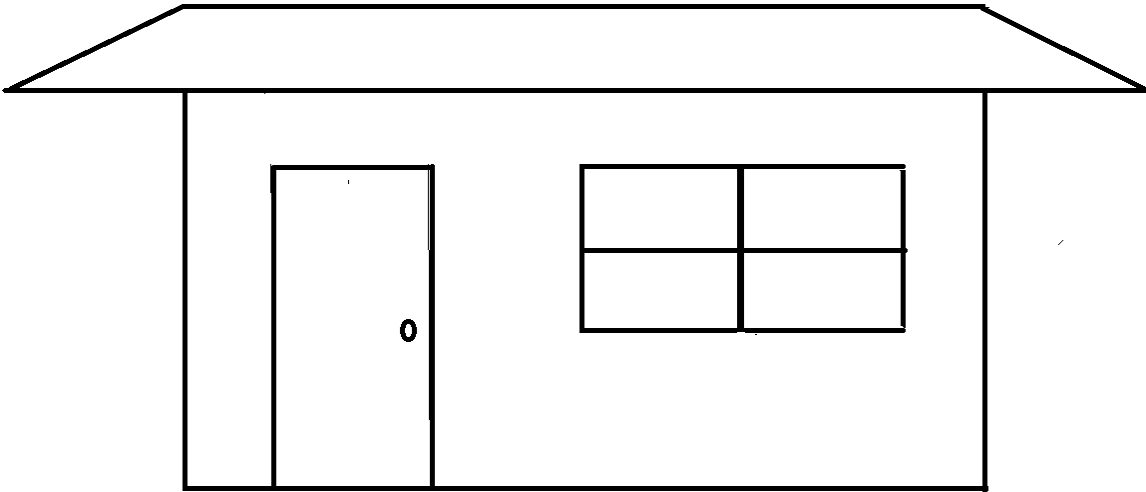
2. Explique qué dificultades tuvo para lograr reproducir la figura planteada.
 - a. Explique ¿cómo logra ubicar las dos líneas rectas que componen el logo sobre la cuadrícula? ¿qué dificultades tuvo para ubicar las líneas rectas del logo?
 - b. Explique ¿qué dificultades tuvo para ubicar y dibujar las dos líneas curvas sobre la cuadrícula?
3. Responda las preguntas comparando la figura original y su dibujo:

- a. ¿Cuál es el tamaño del logo de NIKE? ¿Cuál es el alto de la figura? ¿Cuál es el ancho?
4. En la siguiente página, dibuje el logo de NIKE, pero reproduciendo la figura al doble del tamaño original, utilizando las cuadrículas para ello (no use la regla para medir, sino para trazar).



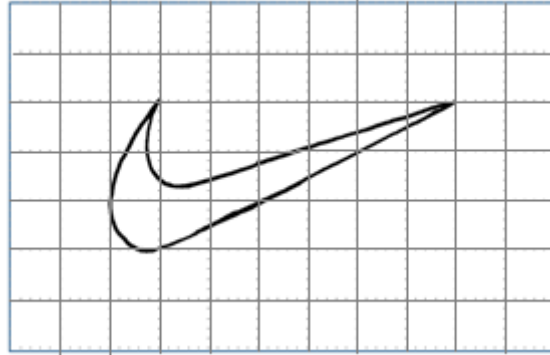
Anexo 2: Taller 2, Vamos a dibujar “con el lápiz”

1. Usando la técnica del dibujante artístico reproduzca la fachada de la figura que está mostrada en el tablero.

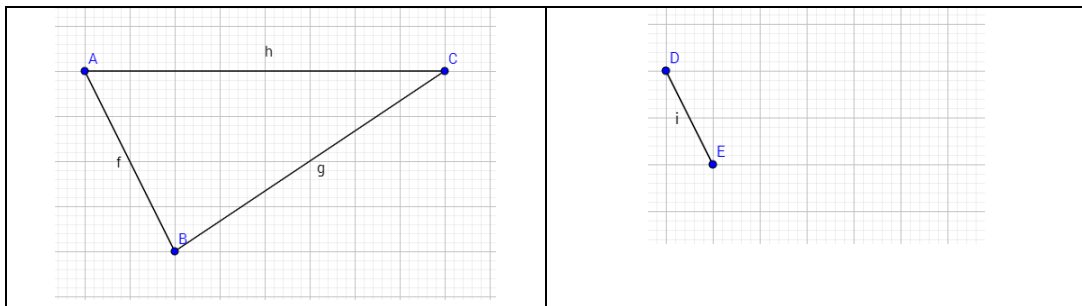


- a. ¿Qué relación guardan las dimensiones de la ventana y la puerta? C
 - b. ¿Qué relación hay entre el tamaño de la ventana y los demás objetos de la fachada?
 - c. ¿Qué relación hay entre el tamaño de la puerta y los demás objetos de la fachada?
 - d. ¿Cómo se puede ubicar o referenciar correctamente el espacio entre los objetos?
 - e. ¿Cómo se captura el borde del tejado (el ángulo o bisel) para poderlo dibujar?
2. Aplique la técnica de captura de medidas con el lápiz para dibujar ahora el logo de Nike.
 3. Explique ¿Por qué funciona la técnica de capturar medidas con el lápiz al dibujar? ¿Qué sucede al capturar inadecuadamente las medidas de los dibujos, cómo se ven estos en relación al original?

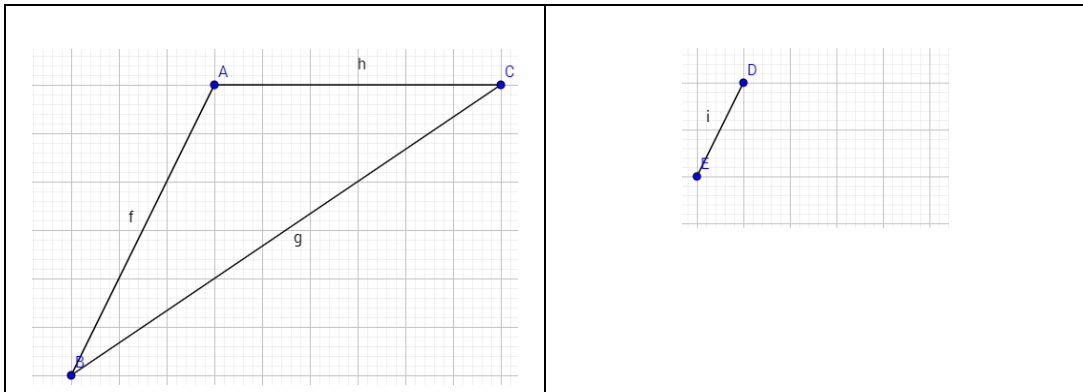
Anexo 3: Taller 3, Dibujando con el pantógrafo



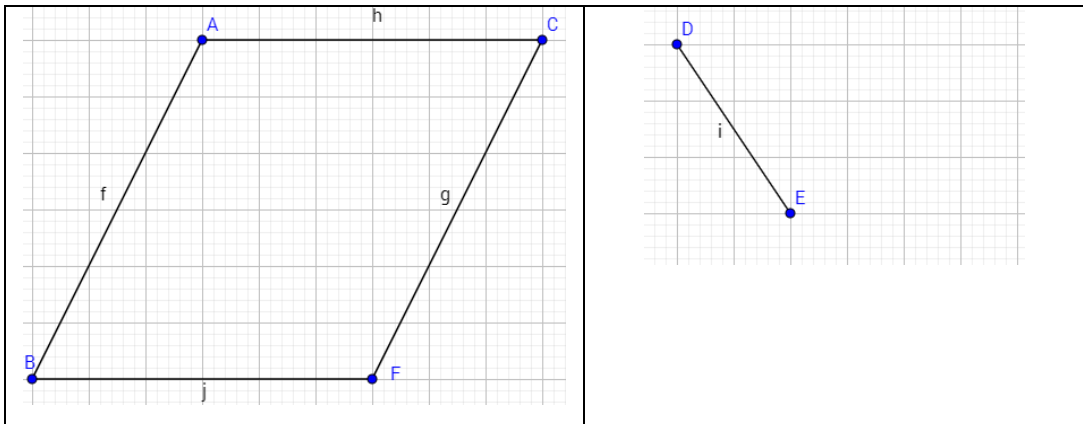
1. Usando el pantógrafo, Dibuje a escala 3 a 1 el logo de Nike en la cuadrícula proporcionada.
 - a) ¿Cuál es el alto y el ancho del dibujo realizado?
 - b) ¿Qué relación hay entre este número de cuadros y el modelo original?
 - c) ¿Cómo podría hacer una reducción del dibujo realizado a escala 1 a 3? Explique la forma de usar el pantógrafo para tal fin.
 - d) ¿Cómo podría copiar el logo de Nike sin aumentar o reducir su tamaño usando el pantógrafo?
2. Usando el pantógrafo complete en la derecha las figuras dadas, según el modelo original de la izquierda y termine su reproducción.



- a) ¿Qué relación guardan los segmentos i y f ? ¿Cuántas veces cabe el segmento i en f ?
- b) ¿En la derecha que tamaño debería tener la imagen del segmento h ?
- c) ¿Qué relación guarda el segmento g y su imagen? ¿Cuántas veces cabe la imagen de g en g ?



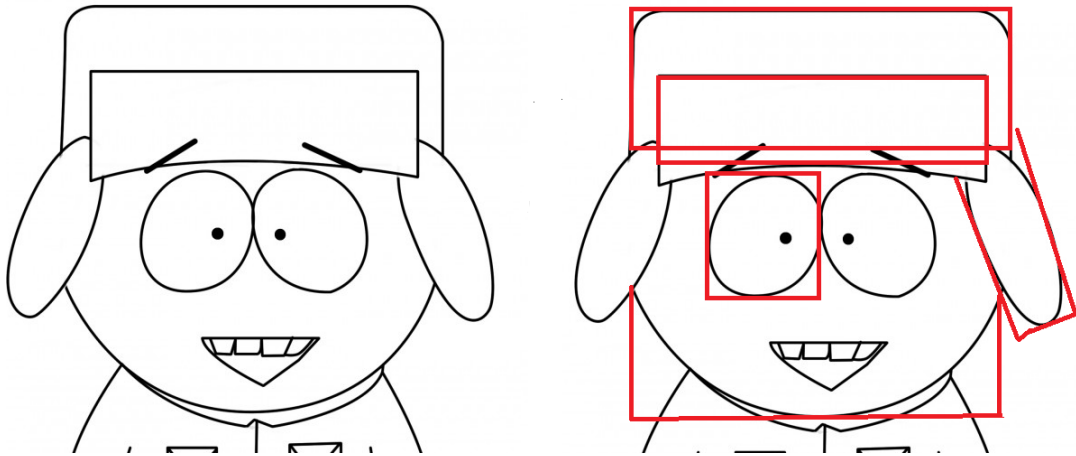
- d) ¿En la anterior figura qué relación guardan los segmentos i y f ? ¿Cuántas veces cabe el segmento i en f ?
- e) ¿En la derecha que tamaño debería tener la imagen del segmento h ?
- f) ¿Qué relación guarda el segmento g y su imagen? ¿Cuántas veces cabe la imagen de g en g ?



- g) ¿Qué tamaño tiene la imagen de la izquierda en relación con la figura de la derecha?
- h) ¿Los dos paralelogramos son semejantes? Explique su respuesta

Anexo 4: Tarea 4, Dibujando con el divisor de proporciones

1. Trate de usar formas básicas (rectángulos o triángulos) para capturar las formas del modelo planteado para dibujar y realice un esquema o bosquejo. Este esquema debe ser proporcional al modelo planteado. Escoja la escala apropiada para cubrir toda su hoja o zona para dibujar.



2. Use la misma técnica anterior para dibujar el logo de Nike que se muestra en la cartelera.
3. Usando el divisor de proporciones, dada la siguiente figura proyecte líneas punteadas desde el punto O hasta los puntos A, B, C y D de la copa y sobre esas mismas líneas guía, dibuje una copa semejante al doble del tamaño de sus segmentos de recta. Luego repita el ejercicio a la mitad del tamaño.

