

# Diseño de una simulación en Vpython: un sistema de dos partículas con espines $1/2$ para la descripción de la paradoja EPR

*German David Camargo Castro*

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

LINEA DE PROFUNDIZACIÓN: LA ENSEÑANZA DE LA FÍSICA Y LA RELACIÓN  
FÍSICA-MATEMÁTICA

30 de noviembre de 2018

# Diseño de una simulación en Vpython: un sistema de dos partículas con espines $1/2$ para la descripción de la paradoja EPR

*German David Camargo Castro*

asesor:

*Ignacio Alberto Monroy*

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL


FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

LÍNEA DE PROFUNDIZACIÓN: LA ENSEÑANZA DE LA FÍSICA Y LA RELACIÓN  
FÍSICA-MATEMÁTICA

*30 de noviembre de 2018*

*Agradezco a mis padres German y Felisa  
a todos los profesores que hicieron posible este trabajo  
especialmente al profesor Alberto Monroy  
y por ultimo pero no menos importante a la persona que apoyo  
el desarrollo final de la tesis Paula Bernal*

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <i>Advancing the frontiers of knowledge</i>	<b>FORMATO</b>	
	<b>RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE</b>	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 1 de 4	

<b>1. Información General</b>	
<b>Tipo de documento</b>	Trabajo de grado
<b>Acceso al documento</b>	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
<b>Título del documento</b>	Diseño de una simulación en Vpython: un sistema de dos partículas con espines 1/2 para la descripción de la paradoja EPR
<b>Autor(es)</b>	Camargo Casto , German David
<b>Director</b>	Monroy Cañon, Ignacio Alberto
<b>Publicación</b>	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2018, 70 p.
<b>Unidad Patrocinante</b>	Universidad Pedagógica Nacional
<b>Palabras Claves</b>	MECÁNICA CUÁNTICA, PARDOJA EPR, SIMULACIÓN, PROPUESTA DE ENSEÑANZA, CORRELACIÓN, INTERPRETACIÓN, ESPÍN.

<b>2. Descripción</b>
<p>Este documento pretende mostrar una investigación del diseño y desarrollo de una herramienta computacional para la descripción de la correlación de espines de dos partículas que son el producto del decaimiento de una molécula de espín neutro, todo esto contextualizado en la paradoja EPR. Primero se desarrolla un marco teórico base para la creación de la simulación en el programa Vpython, se parte desde un contexto histórico de los experimentos que desencadenó el artículo "Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?" hasta llegar a la modificación que realizó el científico David Bohm, luego el documento habla sobre los conceptos más relevantes en la discusión entre científicos que apoyan la mecánica cuántica y los científicos que están en desacuerdo de su interpretación. En una tercera parte se muestra el desarrollo de la simulación del experimento EPR-Bohm y los análisis con la interpretación de los datos para la descripción de los conceptos involucrados. El trabajo desarrollado es una propuesta para que futuras investigaciones perfeccionen su vínculo con la enseñanza de la física cuántica.</p>

<b>3. Fuentes</b>
<p>Abal, G. (2007). Paradoja EPR y desigualdades de Bell: pruebas experimentales, estado actual del conocimiento. Instituto de Física. <i>Universidad de la República. Montevideo, Uruguay.</i></p>

Alcaine, G. G. (2005). Einstein y la mecánica cuántica. *Monografías de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas, Químicas y Naturales de Zaragoza*, (27):107-118.

Basdevant, J.-L. and Dalibard, J. (2005). *The quantum mechanics solver: how to apply quantum theory to modern physics*. Springer Science & Business Media.

Bell, J., S. (1964). On the Einstein Podolsky Rosen paradox. *University Wisconsin: Physics*, 1.

Bohm, D. (2008). *La totalidad y el orden implicado*. Editorial Kairós.

Dagnino, J. (2014). Coeficiente de correlación lineal de Pearson. *Chil Anest*, 43:150-153.

Delgado, M., Arrieta, X., and Riveros, V. (2009). Uso de las TIC's en educación, una propuesta para su optimización. *Omnía*, 15(3).

Einstein, A., Podolsky, B., and Rosen, N. (1935). *Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?* *Physical review*, 47(10):777.

Finkelstein, N. D., Adams, W. K., Keller, C., Kohl, P. B., Perkins, K. K., Podolsky, N. S., Reid, S., and LeMaster, R. (2005). When learning about the real world is better done virtually: A study of substituting computer simulations for laboratory equipment. *Physical Review Special Topics- Physics Education Research*, 1(1):010103.

Franky, G. A. (2009). Potencialidades pedagógicas de los entornos de simulación, desde la perspectiva de la cognición situada. *TED: Tecné, Episteme y Didaxis*, (25).

Hernandez Sampieri, R., Fernandez Collado, C., and Baptista Lucio, P. (2014). Metodología de la investigación. sexta edición. editorial Mc Graw Hill. México. 2014. Hernández, R. *Metodología de la Investigación. 6a Edición, Mc Graw Hill, México*.

Kumar, M. (2012). *Quántum: Einstein, Bohr y el gran debate sobre la naturaleza de la realidad*. Editorial Kairós.

Morones Ibarra, J. R. (2005). Los misterios del mundo cuántico. *Ingenierías*, 7(26):12-21.

Organista, O., Gómez, V., Jaimes, D., and Rodríguez, J. (2007). Una idea profunda en la comprensión del mundo físico: el principio de superposición de estados. *Latin American Journal of Physics Education*, 1:83-88.

Rincón, R. S. (2012). Una propuesta para la enseñanza de la interpretación ortodoxa de la mecánica cuántica versus la realista, considerando estados enredados de espines de dos partículas por medio de un algoritmo de Montecarlo.

Rodríguez Palmero, M. L., Marrero Acosta, J., and Moreira, M. A. (2001). La teoría de los modelos mentales de Johnson-Laird y sus principios: una aplicación con modelos

mentales de célula en estudiantes del curso de orientación universitaria. Investigaciones em ensino de ciencias. *Porto Alegre. Vol. 6, n. 3 (set./dez. 2001), p. 243-268.*

Ruiz, O. A. (2014). Diseño de una herramienta computacional basada en el experimento de Stern-Gerlach para la enseñanza de la preparación de estados y la naturaleza probabilística de la mecánica cuántica.

Torre, A. C. d. I. (2011). *Física cuántica para filo-sofos*. Fondo de Cultura Económica.

Vpython, p. o. (2005). introducción a Vpython.\_le:///C:/Python27/Lib/site packages/visual/docs/VPythonIntro.pdf:

#### 4. Contenidos

El objetivo general: Realizar una simulación en Vpython de un sistema de dos partículas con espines para la explicación del enredamiento en mecánica cuántica contextualizado en la paradoja EPR.

Los objetivos específicos:

- Realizar una descripción de la paradoja EPR y sus derivaciones experimentales.
- Generar una conceptualización explícita de los sucesos fenomenológicos que se desarrollaron en la paradoja EPR.
- Desarrollar la herramienta computacional del enredamiento de espines para diferentes casos del experimento propuesto por David Bohm.

Introducción, problemática, metodología.

Capítulo 1: Paradoja EPR

- Versión original
- Versión de David Bohm
- Versión de Bell

Capítulo 2: Conceptualización dentro de la paradoja EPR

- Principio de incertidumbre
- Correlación ortodoxa
- Correlación realista

Capítulo 3: Simulación

- Análisis de los detectores
- Simulación del experimento EPR-Bohm
- Análisis de la simulación

#### 5. Metodología

El documento busca la descripción de un fenómeno cuántico a partir de un experimento simulado en un programa computacional, por ende se basa en una metodología Experimental-Descriptiva la cual busca un foco teórico para delimitar el alcance de la descripción que se busca en el arreglo experimental. La descontextualización que genera un experimento cuántico por distintos motivos como el acceso limitado y la dificultad de reproducirlo en cualquier lugar, induce a pensar que una metodología de estas características se acopla para la explicación de un sistema

cuántico contextualizado en un limitante como la paradoja EPR.

## 6. Conclusiones

La comparación entre las interpretaciones de la correlación evidencia una manera efectiva de llegar a una descripción de un fenómeno a partir de la confrontación de conceptos, la interpretación ortodoxa asume una correlación entre las partículas en términos de probabilidades, es decir su realidad física se presenta solo cuando se realiza la medición directa, mientras que la interpretación realista asume estados bien definidos de ambas partículas antes de pasar por los detectores, esto sugiere una realidad física determinada por nociones de predicción determinista que no se acoplan a este experimento simulado.

Esta profunda contradicción entre teoría y experimento, que se generó en la discusión del artículo EPR, indica que la construcción de una teoría aplicable a los fenómenos atómicos, exige un cambio esencial en las leyes y nociones fundamentales de teorías clásicas. Los interrogantes para los científicos realistas a cerca de los resultados de la mecánica cuántica parece no afectar los resultados de sus experimentos, por el contrario el experimento EPR-Bohm modificado por J. Bell ratifica la mecánica cuántica como acertada en su explicación al fenómeno.

En el proceso del diseño de la simulación en Vpython se evidenciaron varios factores que aportaron al desarrollo conceptual y metacognitivo de la descripción de la paradoja EPR:

Permite tener una imagen mental más clara del experimento, donde se evidencia un sistema cuántico en las dimensiones que cognitivamente afianza nuestra percepción y nuestras nociones clásicas, lo cual permite una explicación en términos clásicos de un experimento cuántico. También la simulación permite establecer una distinción entre las dos interpretaciones de la mecánica cuántica a partir de los procesos fenomenológicos que conlleva cada explicación. Estos conceptos involucrados en la discusión de la paradoja EPR son la condición inicial para la construcción y diseño de la herramienta computacional, por ende este proceso metacognitivo es una propuesta para el aprendizaje de sistemas cuánticos que claramente puede ser utilizado en futuras investigaciones. Esta simulación puede ser utilizada para la enseñanza de sistemas enredados de espines vista desde dos interpretaciones, siendo la confrontación de conceptos el factor clave para la explicación del fenómeno.

En cuanto a las dificultades para el proceso de validación de la herramienta computacional esta la falta de tiempo para realizar una prueba piloto en un grupo pequeño de pares académicos que permitiera ajustar algunos detalles de la simulación, sin embargo la simulación permitió hacer una descripción tolerable de la paradoja EPR asumiendo el marco teórico de los dos primeros capítulos como base fundamental para la explicación del sistema enredado de espines.

<b>Elaborado por:</b>	Camargo Castro, German David
<b>Revisado por:</b>	Monroy Cañon, Ignacio Alberto

<b>Fecha de elaboración del Resumen:</b>	02	10	2018
--	----	----	------

# INTRODUCCIÓN

La mecánica cuántica surge de los desarrollos experimentales y una ampliación teórica en el siglo XX, ésta se desenvuelve bajo postulados de distintos autores que convergen en algo esencial: la interpretación cuántica se establece mediante características probabilistas, además de ser indeterminista. Grandes científicos del siglo pasado pusieron en duda las características de la mecano-cuántica “colapso de la función de onda” juzgando la falta de realidad física y la falta de completitud en la descripción de sus sistemas físicos.

En el siglo XX se genera una controversia entre los científicos más importantes de la época, se publicó en 1935 un artículo hecho por Albert Einstein, Nathan Rosen y Boris Podolsky, donde argumentan mediante un experimento mental que la interpretación de la mecánica cuántica es incompleta, utilizan formalismo matemático con funciones de onda para poner en duda la interpretación cuántica. Esto se convirtió en la gran discusión del momento y los científicos se pusieron la tarea de resolver la disyunción entre las interpretaciones, por un lado, los científicos realistas quienes apoyan el artículo EPR y por otro los científicos ortodoxos argumentando los aciertos experimentales de la mecánica cuántica.

El experimento original consiste en el enredamiento de dos partículas alejándose unidimensionalmente, pero la dificultad de realizar experimentos cuánticos para medir variables dinámicas conlleva a la transformación del sistema a un enredamiento de espines generado por el decaimiento de un átomo. Todo con el fin de cambiar el

arreglo experimental pero manteniendo la naturaleza dual del fenómeno.

Dentro de los conceptos que se discuten en la paradoja EPR están la medición de sistemas cuánticos y la correlación de las partículas en el experimento. La mecánica cuántica establece que los resultados de los sistemas microscópicos están sujetos a probabilidades y que la medición simultánea de algunas variables está restringida por el principio de incertidumbre de Heisenberg, concepciones que científicos realistas no asentían. El enredamiento de espines es interpretada por las dos posturas bajo consideraciones conceptuales y matemáticas distintas, estableciendo un eje central de comparación para determinar definitivamente qué interpretación es la más acertada para el experimento.

La realización del experimento no es posible en cualquier lugar, requiere artefactos tecnológicos avanzados para reproducir los componentes teóricos a la realidad operacional. El desarrollo de un experimento físico cuántico simulado en un computador es una propuesta en la enseñanza de la física moderna bajo el abordaje del aprendizaje metacognitivo, como un desarrollo de conocimientos teóricos construidos en el mismo progreso de la investigación, los cuales son llevados a una operación virtual de variables controladas. La simulación del experimento EPR-Bohm es el objetivo principal del trabajo, un sistema enredado de espines alejándose unidimensionalmente al tal punto que no existe una interacción directa. Vpython es un lenguaje de programación que permite la interacción en tiempo real con objetos que se pueden visualizar en tres dimensiones. La iteración de muchos experimentos simulados en este lenguaje de programación es una ventaja en el tratamiento de datos estadísticos por que los resultados se aproximan al ideal teórico. Por esto la realización de múltiples experimentos de la paradoja EPR en la versión de David Bohm brinda un punto de partida para la comparación de dos interpretaciones filosóficas a cerca de la mecánica cuántica.

# PROBLEMÁTICA

Una de las mayores dificultades en el proceso del aprendizaje en física moderna, más específicamente en la mecánica cuántica, son las imágenes mentales que las personas generalmente crean cuando realizan un contraste entre la conceptualización de fenómenos y la realidad física, ya que la mecánica cuántica se basa sobre postulados contra-intuitivos que dificulta su comprensión. Entre muchos de los factores que impiden la correcta interpretación de la teoría se encuentran el grado de abstracción que ésta requiere, ya que se pierden las imágenes directas que permiten hacer una correcta conceptualización de los fenómenos físicos a nivel microscópico [Organista et al., 2007].

En la teoría cognitiva de Johnson-Laird plantea que la mente humana trabaja con representaciones mentales proposicionales de situaciones reales o imaginarias, lo que significa que la mente está compuesta de representaciones simbólicas que son utilizadas por los procesos cognitivos como el lenguaje, el pensamiento, la percepción, etc...[Rodríguez Palmero et al., 2001] Por esta razón la creación y uso de imágenes resulta ser un recurso cognitivo para la construcción de conocimiento en la mente humana, y la carencia de éstas dificultan la apropiación de una idea y por tanto su comprensión.

Como propuesta para la correcta utilización de las representaciones mentales, que en el estudio de la mecánica cuántica se dificultan, son las herramientas computacio-

nales. El diseño de una herramienta basada en una simulación donde se evidencie el estado entrelazado de espines de dos partículas que contengan parámetros físicos que puedan ser confrontados con las imágenes mentales que tienen los individuos acerca de la realidad física. En particular uno de los ejes centrales de la mecánica cuántica, históricamente hablando, es la paradoja EPR la cual generó una controversia muy importante en el siglo XX y la comprensión de los conceptos involucrados resulta compleja. El artículo original se basa en el estudio de variables continuas que presentan un nivel matemático avanzado, pero luego con el trabajo de David Bohm el problema se reorientó al sistema de dos partículas con espines. Los experimentos de este tipo de sistemas no se encuentran de manera simple y son de acceso limitado. Las herramientas computacionales logran suplir las carencias de estos experimentos generando una apropiación visual de los sistemas cuánticos y mejorando así mismo su comprensión. Circundando con las ideas anteriores, se establece una pregunta problema: ¿Cómo una simulación del enredamiento de espines de dos partículas a partir de una herramienta computacional puede servir para la explicación de la paradoja EPR y los conceptos relacionados?

# OBJETIVOS

## OBJETIVO GENERAL

Realizar una simulación en Vpython de un sistema de dos partículas con espines  $1/2$  para la explicación del enredamiento en mecánica cuántica contextualizado en la paradoja EPR.

## OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Realizar una descripción de la paradoja EPR y sus derivaciones experimentales.
- Generar una conceptualización explícita de los sucesos fenomenológicos que se desarrollaron en la paradoja EPR.
- Desarrollar la herramienta computacional del enredamiento de espines para diferentes casos del experimento propuesto por David Bohm.

# METODOLOGÍA

En el entorno académico de la física moderna se produce una descontextualización de eventos reales, cuando no se tienen claros los experimentos que son objeto de estudio. Una simulación es una teoría la cual sustituye situaciones reales por otras creadas virtualmente [Franky, 2009], en el caso específico de un experimento cuántico es una estrategia para la descripción misma del fenómeno. Ahora hablando del *contexto situacional* los experimentos cuánticos son difícilmente reproducidos en cualquier lugar, por ende una simulación computarizada permite divisar una herramienta para la explicación de la paradoja EPR describiendo los experimentos que se desencadenaron en la discusión.

El trabajo se basa en la recopilación de un marco teórico que fundamente la construcción de una simulación computarizada que permita realizar una descripción acertada de la paradoja EPR y sus repercusiones epistemológicas en la mecánica cuántica, para cumplir este objetivo se enmarca una metodología experimental-descriptiva siguiendo las fases iniciales sugeridas por la obra *Metodologías de la investigación* [Hernández Sampieri et al., 2014] como muestra la Figura 1.

La metodología descriptiva es un proceso secuencial que busca un foco en el marco teórico, es decir delimita su campo de estudio y traza una línea para la investigación. La metodología cuasi-experimental se utiliza como herramienta para brindar solución a la descontextualización [Franky, 2009] emergente en arreglos experimentales

en la mecánica cuántica donde se pretende el mayor control posible sobre el sistema objeto de estudio.

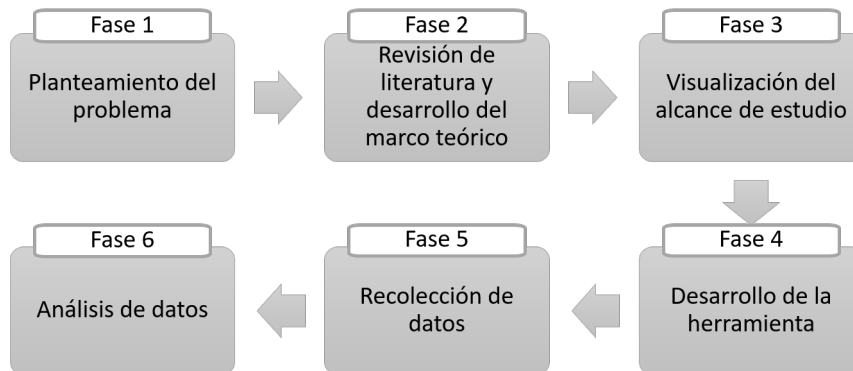


Figura 1: *Modificación del libro [Hernández Sampieri et al., 2014] :fases de la metodología experimental-descriptiva*

Los experimentos en la mecánica cuántica son descritos de manera abstracta, porque sus fundamentos epistemológicos van en contra de nuestras nociones cotidianas o clásicas, es decir, estos experimentos son ajenos a nuestra percepción sensorial. Por lo anterior el problema de esta investigación radica en buscar una solución a la descripción de un fenómeno cuántico específico.

La recopilación de un marco teórico contextualizado en la paradoja EPR permite fundamentar la herramienta computacional, la cual se pretende utilizar para la descripción de un experimento de enredamiento de espines, sin embargo visualizar el alcance de la investigación es relevante para delimitar el trabajo a un eje central o un foco, en este caso la descripción de la paradoja EPR.

El desarrollo de la herramienta computacional esta basada en una metodología cuasi-experimental la cual garantiza el mayor control posible sobre algunas variables como: número de experimentos, características físicas en los objetos, dependencias entre los objetos, iteraciones entre otras variables. Los resultados se obtienen de procedimientos estadísticos internos en el programa que al gráficar generan controversia entre las interpretaciones de la mecánica cuántica.

# Índice general

<b>1. Paradoja EPR</b>	<b>1</b>
1.0.1. Primera sección . . . . .	1
1.0.2. Segunda sección . . . . .	3
1.1. Versión de David Bohm . . . . .	5
1.2. Versión de Bell . . . . .	6
<b>2. Conceptualización dentro de la paradoja EPR</b>	<b>9</b>
2.1. Principio de incertidumbre . . . . .	10
2.2. Correlación . . . . .	11
2.3. Correlación realista . . . . .	13
2.3.1. Valor esperado del positrón y electrón . . . . .	14
2.3.2. Valor esperado al cuadrado del positrón y electrón . . . . .	14
2.3.3. Interpretación realista . . . . .	15
2.4. Correlación ortodoxa . . . . .	16
2.4.1. Valor esperado del positrón y electrón . . . . .	16
2.4.2. Valor esperado al cuadrado del positrón y electrón . . . . .	17
2.4.3. Valor esperado entre el producto de los espín del positrón y el electrón . . . . .	19
2.4.4. Interpretación ortodoxa . . . . .	20

<b>3. Simulación</b>	<b>21</b>
3.1. Análisis de los detectores . . . . .	22
3.2. Simulación Experimento EPR-Bohm . . . . .	24
3.2.1. Simulación Realista . . . . .	27
3.2.2. Simulación Ortodoxa . . . . .	28
3.3. Análisis de la simulación . . . . .	30

# Capítulo 1

## Paradoja EPR

El 15 de mayo de 1935 la revista norteamericana *Physical Review* publicó un artículo de cuatro páginas hecho por Einstein, Podolsky y Rosen (EPR) llamado “Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?”; con la finalidad de poner en duda la descripción de la realidad de los fenómenos microscópicos a partir de las ideas probabilísticas de la mecánica cuántica, en particular la originada en la escuela de Copenhague. El artículo se divide en dos secciones: la primera destaca los aspectos filosóficos y la interpretación del pensamiento ortodoxo, es decir de la mecánica cuántica con su postura probabilística. La segunda establece un experimento mental con las mediciones de magnitudes de dos observables de un sistema físico, bajo condiciones meramente teóricas.

### 1.0.1. Primera sección

EPR comienzan su postura en el artículo planteándose dos preguntas que desencadenan su argumentación. “*En el intento de juzgar el éxito de una teoría física, podemos preguntarnos dos cuestiones: (1) ¿es la teoría correcta? y (2) ¿es la descripción dada por la teoría completa?*” [Einstein et al., 1935, Trad., ].

Para responder a la primera cuestión sugieren que una teoría correcta se mide entre la congruencia de la argumentación en las conclusiones y la experiencia, que está ligada directamente con la medición. La segunda cuestión la responden proponiendo una condición de completitud: “cada elemento de la *realidad física*<sup>1</sup> debe tener una contra parte en la teoría física” [Einstein et al., 1935, Trad., ]. Ahora en consecución con las afirmaciones anteriores solo bastara con definir dichos elementos de realidad física para poder establecer una teoría completa, la siguiente es una definición de la realidad física suficiente para la pretensiones de los autores en su artículo:

*“Si, sin perturbar de modo alguno un sistema, podemos predecir con certeza (con probabilidad igual a uno) el valor de una magnitud física, entonces existe un elemento de realidad física asociado a una cantidad física” [Einstein et al., 1935, Trad., ].*

La realidad física está ligada directamente con las acciones experimentales de observación y medición que se realicen sobre un sistema físico. Las cantidades físicas se refieren a las predicciones o formalizaciones que se establecen con criterios en una teoría, es decir, una teoría completa es aquella en la cual la realidad física pueda ser contrastada con certeza con las predicciones que se logran después de una medición. Según lo anterior, si se midiera en un sistema cuántico un operador físico  $A$  obtenemos:

$$\psi' = A\psi = a\psi \tag{1.1}$$

Si se midiera el operador  $\mathbf{A}$  sobre la función de onda  $\psi$  el resultado sería un valor propio característico de una cantidad física derivada del observable, en este caso  $\mathbf{a}$ . Ahora si se quisiera medir otro operador  $\mathbf{B}$  con la misma función de onda, la mecánica cuántica restringe su predicción a una probabilidad, es decir la cantidad

---

<sup>1</sup>Concepto creado en el artículo: “Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?”

física del operador  $B$  no es predecible con certeza, tendría que ser establecido por medición directa, sin embargo se perturbaría el sistema y la medición del observable  $A$  no será la misma. Esta última idea hace referencia al principio de incertidumbre de Heisenberg con respecto a la relación de la conmutación de operadores.

## 1.0.2. Segunda sección

En una segunda instancia los autores generaron un experimento mental para determinar la falta de completitud de la teoría cuántica. EPR utiliza el ejemplo de observables conjugados de dos partículas que interactúan en un tiempo  $t = 0$  y después se separan una de la otra lo suficiente para no interactuar directamente (principio de localidad), se puede decir que cada partícula representa un sistema 1 y 2.

En esencia sugieren medir la posición  $X$  y la cantidad de movimiento  $P$  de las dos partículas en una distancia sin interacción directa. Midiendo la posición y momentum simultáneamente de una de las partículas y conociendo el estado inicial del sistema cuántico se puede deducir las dos variables de la otra partícula. En el caso del artículo demuestra que la relación de conmutación es cero " $PX - XP = 0$ ". Poniendo la simultaneidad en la medición de las cantidades físicas de las partículas como pilar de la discusión y manifestando el desacuerdo teórico con el principio de incertidumbre de Heisenberg.

En el libro de [Torre, 2011] se especifica un criterio base para la explicación de la paradoja EPR, la separabilidad que a su vez esta ligado al principio de localidad establece que si las dos partículas que se alejan una de la otra, como muestra la Figura 1.1 , son separables si la medición de las magnitudes de una partícula NO afecta la medición de las magnitudes de la otra.

En resumen con respecto a la medición de las variables de momentum y posición

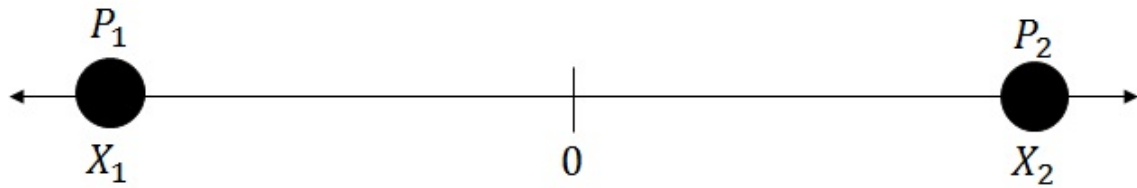


Figura 1.1: *Modificación del documento [Rincon, 2012]: observables conjugados de dos partículas en una dimensión*

de los sistemas de la paradoja EPR podemos decir que:

- i. Si midiéramos la posición y el momento de la partícula **1** ( $X_1, P_1$ ) podríamos predecir concretamente la posición y el momento de la partícula **2** ( $X_2, P_2$ ) mediante las expresiones [Rincon, 2012]:

$$X_2 = X - X_1 \tag{1.2}$$

$$P_2 = P - P_1 \tag{1.3}$$

- ii. La mecánica cuántica establece que al realizar una medición de la partícula **1** no se puede tener conocimiento de la partícula **2** sin una medición directa, por que siendo un sistema enredado sus variables están sujetas a la descripción de una superposición des sus posibles estados.

Una contradicción entre las dos posturas: por un lado, científicos realistas no pueden aceptar que un sistema cuántico no tenga propiedades deterministas antes ni después de su medición y por otro, lado científicos ortodoxos de la mecánica cuántica defendiendo los resultados probabilísticos como producto de la naturaleza misma del mundo cuántico.

## 1.1. Versión de David Bohm

Bohm ofrece una explicación análoga del experimento planteado por EPR. Propone una molécula de espín total cero equilibrada por dos átomos: un electrón (**A**) y un positrón (**B**), cada uno con espín  $\frac{1}{2}$ . La molécula se desintegra por algún método experimental que no altere de ninguna manera el espín total [Bohm, 2008]. Los átomos se separan en una dimensión de tal manera que no exista ninguna interacción entre si como muestra la Figura 1.2. Los espines de las partículas son medidos por dos detectores que producen un campo magnético en la dirección del eje  $z$ , es decir los espines pueden tomar orientaciones negativas o positivas en este eje.

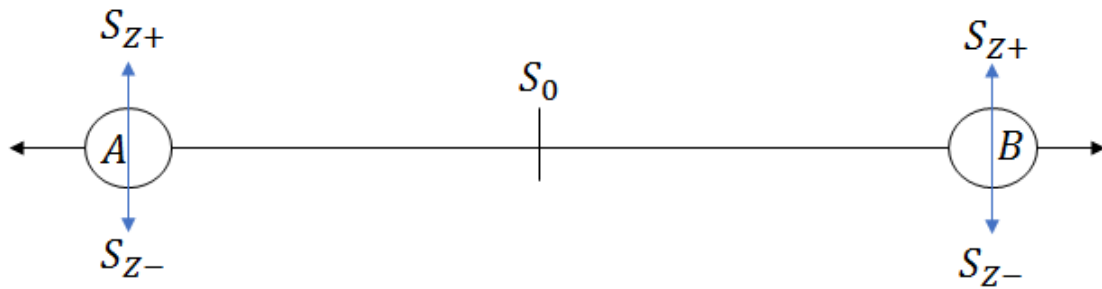


Figura 1.2: *Modificación del documento [Rincon, 2012]: dos átomos alejándose uno de la otro, cada una con dos posibles componentes de espín en el eje  $z$*

Este experimento conlleva unas consideraciones:

- i. Desde el punto de vista realista clásico<sup>2</sup>, si midiéramos el espín del átomo **A**, ya que el espín total es cero y por motivos de conservación del momento angular, se podría concluir que el espín del átomo **B** es opuesto. Es decir, si el espín del átomo **A** es  $(S_z+)$  el espín del átomo **B** tendría que ser  $(S_z-)$ .
- ii. La teoría cuántica solo permite definir concretamente el espín del átomo **A**, ya sea  $(S_z+, S_z-)$ , mientras las componentes del átomo **B** fluctúan al azar,

---

<sup>2</sup>Postura filosófica en la interpretación de la mecánica clásica tomada por científicos deterministas

es decir, no existe un elemento de la realidad física que se pueda utilizar para determinar la propiedad del espín del átomo **B** .

La interpretación de la indeterminación que presenta la mecánica cuántica sobre el experimento de Bohm no puede ser argumentada entre la interacción del instrumento de medida y el sistema físico, porque ¿Cómo sabe el átomo B que el átomo A está siendo medido si no tiene interacción alguna con el aparato de medida? [Bohm, 2008]. Este no es un problema de experimentación real, es más un problema de comprensión del comportamiento del mundo cuántico. Bohm utiliza la teoría de variables ocultas para interpretar su experimento. Las variables ocultas es una teoría reconocida en el siglo XX por los científicos que no aceptaban la indeterminación presentada en probabilidades de la mecánica cuántica, establece la existencia de variables ajenas y más profundas de la física cuántica que podrían explicar, cuando se descubrieran, el indeterminismo y la incertidumbre.

## 1.2. Versión de Bell

Según J. Bell los resultados de la teoría cuántica fluctúan al azar por ende es una teoría incompleta y requiere unas variables para formular una respuesta al indeterminismo de la mecánica cuántica, variables que D. Bohm denomino variables ocultas. Uno de los objetivos de Bell era demostrar que un sistema de partículas correlacionadas no debería ser afectado después del distanciamiento ni después de variar el ángulo de los detectores [Bell, 1964]. Él realiza una formulación matemática derivada del experimento EPR-Bohm (decaimiento de una partícula con espín unitario en dos partículas con espín  $\frac{1}{2}$  de signos contrarios) que está ligada a la posición en términos de ángulos de los detectores.

Para la formalización utilizaremos la letra griega  $\lambda$  para describir las variables ocultas

presentes en la descripción de la mecánica cuántica, según D. Bohm, que son variables desconocidas e incontrolables. Tenemos dos detectores, uno para cada partícula, el electrón pasara por el detector **A** y el positrón pasara por el detector **B**. A cada detector se le asocia una variable vectorial derivada directamente de la posición de los detectores, para el electrón se le asocia la variable **a** y para el positrón la variable **b**.

Obteniendo los valores de los espines de las partículas después del decaimiento y siendo las posiciones de los detectores secuenciales pero arbitrarios con respecto a sus ángulos, la mecánica cuántica calcula el promedio entre el producto de los espines [Bell, 1964].

$$P(a, b) = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad (1.4)$$

Realizando el producto interno entre dos variables vectoriales se resume:

$$P(a, b) = -\cos\beta \quad (1.5)$$

La determinación de un conjunto de variables, o funciones discretas que pudieran describir la falta de completitud que demandan los científicos realistas sobre la mecánica cuántica se denomina con la variable densidad de probabilidad ( $\rho\lambda$ ). Bell introduce una nueva variable para hacer que cada medición de cada detector pueda determinarse clásicamente; esta variable nueva se interpreta como un detector adicional que forma un ángulo con los dos originales [Bell, 1964], a partir de este concepto Bell formaliza una desigualdad (Ecuación 1.6) que establece un nuevo paradigma entre dos resultados:

$$[P(a, b) - P(a, c)] < 1 + P(b, c) \quad (1.6)$$

Si se pueden encontrar evidencias que confirmen la desigualdad, la teoría cuántica ortodoxa es una teoría mal fundamentada. Por otro lado, si **no** se encuentran evidencia experimentales que cumplan la desigualdad, la teoría cuántica confirma sus fundamentos como nociones estipuladas por la naturaleza misma. La implicación de rotar los detectores que miden las dos partículas como se muestra en el Anexo A, genera una distinción entre las interpretaciones de las correlaciones. J. Bell encontró la manera de convertir el experimento EPR-Bohm en un arreglo controversial en medio de los científicos ortodoxos y los científicos realistas.

## Capítulo 2

# Conceptualización dentro de la paradoja EPR

Dentro de la discusión en el artículo EPR se describen implícitamente algunos conceptos fundamentales de la mecánica cuántica. En este capítulo se pretende especificar los más relevantes para el trabajo. Los sistemas cuánticos pueden expresarse con una función de onda, generalmente  $\psi$ , que solucione una ecuación lineal. En el formalismo que utilizan los autores de la paradoja EPR utilizan funciones de onda para expresar los cambios de su sistema cuántico, es necesario especificar nociones conceptuales que son sobrepasadas, por consecuencia de la matemática, en el formalismo mismo de su explicación.

El concepto de estado es un referente en el estudio de los fenómenos físicos, su representación en la mecánica cuántica es a través de una función de onda la cual contiene una información estadística. Los operadores son herramientas matemáticas que representan propiedades físicas que pueden medirse. Las características de estos operadores permiten describir el estado de un sistema [Torre, 2011]. Otro concepto, descrito en la paradoja, es el principio de localidad el cual estipula que ninguna

partícula puede comunicarse a lo largo del espacio cuando se consideran un estado separable, es decir, cuando se ha alejado a una distancia tal que no tienen interacción directa. La medición de las dos partículas en un sistema correlacionado descrito en la paradoja EPR-Bohm, visto desde ambas interpretaciones, es un concepto que vale la pena describirlo con más detalle.

## 2.1. Principio de incertidumbre

La precisión de las variables de un sistema desde el punto de vista clásico debe ser *determinista*, lo que significa que conociendo las condiciones iniciales del sistema y las leyes contenidas en la teoría se puede conocer el estado de sistema en cualquier tiempo [Morones Ibarra, 2005]. Las observaciones clásicas son ajenas de ser perturbadas en el experimento, sin embargo, en el mundo cuántico no sucede lo mismo, la medición es una de las discusiones filosóficas más grandes que se generan alrededor del contexto de la paradoja EPR. Cuanto mayor sea el conocimiento de una de las variables de la partícula, menor será el conocimiento de la otra variable, a esto se le conoce como principio de incertidumbre. Para entender mejor este principio se toma un ejemplo del libro de Clemente de la torre [Torre, 2011]:

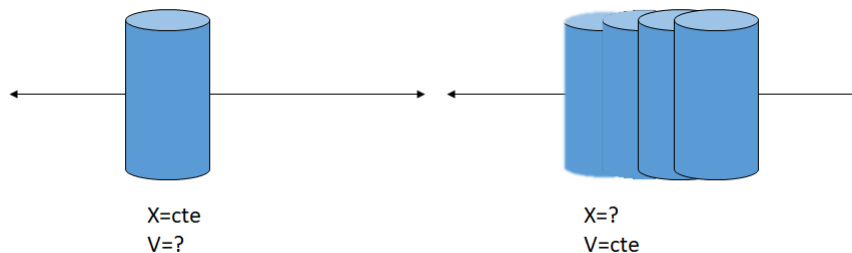


Figura 2.1: *Modificación de la imagen de Clemente De La Torre: principio de incertidumbre*

Tenemos una cámara fotográfica para analizar el movimiento de un objeto que se mueve en línea recta y dos opciones para tomar la fotografías: (1) un lente ultra fino

que permite capturar fotografías en un tiempo muy corto en el orden de  $1/1000s$ , lo que permite determinar la posición exacta del objeto cuando se mueve en el espacio.

(2) un lente recurrente que toma una fotografía cada segundo, ésta no es muy nítida pero permite tener una secuencia de movimiento en un segundo transcurrido para así obtener la velocidad del objeto como muestra la Figura (2.1). Solo se puede usar un lente a la vez por cuestiones de tecnología, lo que restringe el conocimiento de una de las dos variables. Si se toma la fotografía con el lente ultra fino se conoce la posición exacta del objeto, pero si se toma la fotografía con el lente recurrente solo se conoce la velocidad final del objeto. Cada lente mide una variable específica entre la velocidad y la posición del objeto dejando una incertidumbre en la variable enajenada por la falta de aplicación tecnológica en los lentes. Analogía para la explicación del principio de incertidumbre en la medición de las variables dinámicas en un sistema cuántico.

## 2.2. Correlación

La correlación se entiende como la medida de la dependencia entre dos variables dentro de un sistema, en el caso de la versión de la paradoja EPR-Bohm sus variables son espines fraccionados. Una conexión que en distancias grandes permanece lo cual se conoce como principio de no localidad de la mecánica cuántica. La relación entre las partículas subyace cuando al medir el observable de una de las partículas, el mismo observable de la otra partícula queda exactamente determinada. Por ejemplo en la versión de David Bohm de la paradoja EPR; si se midiera el espín del positrón hacia arriba, el espín del electrón se encontraría instantáneamente hacia abajo por conservación del momento angular y porque existe una correlación entre ambas partículas.

Matemáticamente [Dagnino, 2014] el coeficiente de correlación está determinado por la expresión:

$$E(\alpha, \beta) = \frac{\langle \hat{S}_{(e^+, \alpha)} \otimes \hat{S}_{(e^-, \beta)} \rangle - \langle \hat{S}_{(e^+, \alpha)} \rangle \langle \hat{S}_{(e^-, \beta)} \rangle}{\sqrt{\langle \hat{S}_{(e^+, \alpha)} \rangle^2 \langle \hat{S}_{(e^-, \beta)} \rangle^2}} \quad (2.1)$$

El Cuadro 2.1 contiene cada componente de la ecuación de correlación estadística ligada directamente con los ángulos de los detectores.

Componente	Definición
$\langle \hat{S}_{(e^+, \alpha)} \otimes \hat{S}_{(e^-, \beta)} \rangle$	Valor esperado entre el producto de los espines del positrón y el electrón.
$\langle \hat{S}_{(e^+, \alpha)} \rangle$	Valor esperado del positrón.
$\langle \hat{S}_{(e^-, \beta)} \rangle$	Valor esperado del electrón.
$\langle \hat{S}_{(e^+, \alpha)} \rangle^2$	Valor esperado al cuadrado del positrón.
$\langle \hat{S}_{(e^-, \beta)} \rangle^2$	Valor esperado al cuadrado del electrón.
$\alpha$	Observable del detector <b>a</b> .
$\beta$	Observable del detector <b>b</b> .

Cuadro 2.1: *Variables dentro del coeficiente de correlación*

En el fenómeno de correlación de espines de dos partículas se establece la pregunta ¿Cómo es posible que la información de una partícula se pueda recibir instantáneamente sin importar la distancia? Acción que *posiblemente* viola el principio de constancia de la velocidad de la luz, más conocido como principio de causalidad. Bohm establece una consideración de la correlación desde dos perspectivas:

“Si se tratase de un sistema clásico, no habría dificultad alguna de interpretación, porque cada componente del spin de cada átomo estaría siempre bien definido y permanecería siempre opuesto en valor al mismo componente del espín del átomo opuesto. Así, ambos espines estarían correlacionados, y esto nos permitiría conocer el espín del átomo B cuando midiéramos el de A.” [Bohm, 2008].

Es necesario para el trabajo hacer la distinción entre la correlación *realista* (corre-

lación aceptada por científicos deterministas) y la correlación *ortodoxa* (correspondiente a la escuela de Copenhague).

### 2.3. Correlación realista

La ecuación de correlación realista está determinada por la ecu. (2.2) la cual establece una clara definición de los estados de los espines del positrón y el electrón, es decir se conoce con certeza la dirección de los espines durante la medición [Abal, 2007]. Esto en el contexto de la postura EPR significa el elemento de realidad física en los resultados de cada detector. El estado del sistema es determinado por:

$$|\psi\rangle = |e^- \uparrow\rangle \otimes |e^+ \downarrow\rangle \quad (2.2)$$

Para determinar la correlación realista utilizaremos la representación matricial para el operador espín 1/2 en términos de las matrices de Pauli:

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \hat{u}_x \quad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \hat{u}_y \quad \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \hat{u}_z \quad (2.3)$$

Considerando el vector unitario:  $\hat{u}_\alpha = \cos \alpha \hat{u}_z + \sin \alpha \hat{u}_x$  para el positrón y el vector unitario:  $\hat{u}_\beta = \cos \beta \hat{u}_z + \sin \beta \hat{u}_x$  para el electrón los cuales son proyecciones en el plano  $(\mathbf{z}, \mathbf{x})$  [Basdevant and Dalibard, 2005] se realiza el producto punto entre cada vector unitario y las matrices de Pauli, resultando una matriz para el espín del electrón y una matriz para el espín del positrón respectivamente, que físicamente representan el direccionamiento de los espines en el espacio de cada partícula:

$$\hat{S}_{(e^-, \beta)} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

$$\hat{S}_{(e^+, \alpha)} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Esta parte del trabajo se realizará la demostración del valor de coeficiente de correlación desde una interpretación realista, encontrando las componentes de la ecuación estipuladas en el Cuadro 2.1.

### 2.3.1. Valor esperado del positrón y electrón

El valor esperado del positrón está determinado por la ecuación:

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}_{(e^+, \alpha)} \rangle &= \langle \psi | \hat{S}_{(e^+, \alpha)} | \psi \rangle \\ \langle \hat{S}_{(e^+, \alpha)} \rangle &= (\langle e^- \uparrow | \otimes \langle e^+ \downarrow |) \hat{S}_{(e^+, \alpha)} (|e^- \uparrow \rangle \otimes |e^+ \downarrow \rangle) \\ \langle \hat{S}_{(e^+, \alpha)} \rangle &= \langle e^- \uparrow | e^- \uparrow \rangle \langle e^+ \downarrow | \hat{S}_{(e^+, \alpha)} | e^+ \downarrow \rangle \\ \langle \hat{S}_{(e^+, \alpha)} \rangle &= \langle e^+ \downarrow | \hat{S}_{(e^+, \alpha)} | e^+ \downarrow \rangle \end{aligned}$$

Reescribiendo en representación matricial:

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}_{(e^+, \alpha)} \rangle &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \langle \hat{S}_{(e^+, \alpha)} \rangle &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \end{pmatrix} \\ \langle \hat{S}_{(e^+, \alpha)} \rangle &= -\frac{\hbar}{2} \cos \alpha \end{aligned} \quad (2.6)$$

Haciendo un procedimiento similar para el valor esperado del electrón obtenemos:

$$\langle \hat{S}_{(e^-, \beta)} \rangle = \frac{\hbar}{2} \cos \beta \quad (2.7)$$

### 2.3.2. Valor esperado al cuadrado del positrón y electrón

El valor esperado al cuadrado del positrón esta determinado por la ecuación:

$$\begin{aligned}
\langle \hat{S}_{(e^+, \alpha)}^2 \rangle &= \langle \psi | \hat{S}_{(e^+, \alpha)}^2 | \psi \rangle \\
\langle \hat{S}_{(e^+, \alpha)}^2 \rangle &= (\langle e^- \uparrow | \otimes \langle e^+ \downarrow |) \hat{S}_{(e^+, \alpha)}^2 (|e^- \uparrow \rangle \otimes |e^+ \downarrow \rangle) \\
\langle \hat{S}_{(e^+, \alpha)}^2 \rangle &= \langle e^- \uparrow | e^- \uparrow \rangle \langle e^+ \downarrow | \hat{S}_{(e^+, \alpha)}^2 | e^+ \downarrow \rangle \\
\langle \hat{S}_{(e^+, \alpha)}^2 \rangle &= \langle e^+ \downarrow | \hat{S}_{(e^+, \alpha)}^2 | e^+ \downarrow \rangle
\end{aligned}$$

Reemplazando en representación matricial:

$$\begin{aligned}
\langle \hat{S}_{(e^+, \alpha)}^2 \rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\langle \hat{S}_{(e^+, \alpha)}^2 \rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\langle \hat{S}_{(e^+, \alpha)}^2 \rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\langle \hat{S}_{(e^+, \alpha)}^2 \rangle &= \frac{\hbar^2}{4} \tag{2.8}
\end{aligned}$$

Haciendo un procedimiento similar para el valor esperado al cuadrado del electrón obtenemos:

$$\langle \hat{S}_{(e^-, \beta)}^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{4} \tag{2.9}$$

### 2.3.3. Interpretación realista

Substituyendo las ecuaciones encontradas anteriormente en la ecuación de correlación estadística (2.1) obtenemos la correlación según la interrelación realista:

$$\begin{aligned}
E(\alpha, \beta) &= \frac{(-\frac{\hbar^2}{4} \cos \beta \cos \alpha) - [\frac{\hbar}{2} \cos \alpha][-\frac{\hbar}{2} \cos \beta]}{\sqrt{(\frac{\hbar^2}{4})(\frac{\hbar^2}{4})}} \\
E(\alpha, \beta) &= \frac{(-\frac{\hbar^2}{4} \cos \beta \cos \alpha) + [\frac{\hbar^2}{4} \cos \alpha \cos \beta]}{\sqrt{(\frac{\hbar^2}{4})(\frac{\hbar^2}{4})}} \\
E(\alpha, \beta) &= 0 \tag{2.10}
\end{aligned}$$

Este resultado impone la condición de que no existe ninguna dependencia entre los espines del electrón y el positrón, es decir no existe una correlación física entre las dos partículas del experimento EPR-Bohm.

## 2.4. Correlación ortodoxa

El sistema de enredamiento de espines para la mecánica cuántica está determinado por la ecuación:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e^- \uparrow\rangle \otimes |e^+ \downarrow\rangle - |e^- \downarrow\rangle \otimes |e^+ \uparrow\rangle) \quad (2.11)$$

La ecuación establece una superposición de posibles estados en que los espines de las partículas se pueden encontrar. Los espines del electrón y el positrón no son estados bien definidos y necesariamente requieren ser medidos para conocer su estado mas probable, lo cual indica una dependencia entre ambas partículas. A continuación se determinarán las componentes de la ecuación de correlación entendidas en el Cuadro 2.1

### 2.4.1. Valor esperado del positrón y electrón

El valor esperado del positrón está determinado por la ecuación:

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}_{(e^+, \alpha)} \rangle &= \langle \psi | \hat{S}_{(e^+, \alpha)} | \psi \rangle \\ \langle \hat{S}_{(e^+, \alpha)} \rangle &= \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle e^- \uparrow | \otimes \langle e^+ \downarrow | - \langle e^- \downarrow | \otimes \langle e^+ \uparrow |) \right] \hat{S}_{(e^+, \alpha)} \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} [(|e^- \uparrow\rangle \otimes |e^+ \downarrow\rangle - |e^- \downarrow\rangle \otimes |e^+ \uparrow\rangle)] \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \hat{S}_{(e^+, \alpha)} \rangle &= \frac{1}{2} \left[ \langle e^- \uparrow | e^- \uparrow \rangle \otimes \langle e^+ \downarrow | \hat{S}_{(e^+, \alpha)} | e^+ \downarrow \rangle - \langle e^- \downarrow | e^- \uparrow \rangle \otimes \langle e^+ \uparrow | \hat{S}_{(e^+, \alpha)} | e^+ \downarrow \rangle \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[ \langle e^- \downarrow | e^- \uparrow \rangle \otimes \langle e^+ \downarrow | \hat{S}_{(e^+, \alpha)} | e^+ \uparrow \rangle + \langle e^- \downarrow | e^- \downarrow \rangle \otimes \langle e^+ \uparrow | \hat{S}_{(e^+, \alpha)} | e^+ \uparrow \rangle \right]\end{aligned}$$

$$\langle \hat{S}_{(e^+, \alpha)} \rangle = \frac{1}{2} \left[ \langle e^+ \downarrow | \hat{S}_{(e^+, \alpha)} | e^+ \downarrow \rangle + \langle e^+ \uparrow | \hat{S}_{(e^+, \alpha)} | e^+ \uparrow \rangle \right]$$

Reescribiendo en representación matricial:

$$\langle \hat{S}_{(e^+, \alpha)} \rangle = \frac{1}{2} \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$\langle \hat{S}_{(e^+, \alpha)} \rangle = \frac{1}{2} \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \right]$$

$$\langle \hat{S}_{(e^+, \alpha)} \rangle = \frac{1}{2} \left[ -\frac{\hbar}{2} \cos \alpha + \frac{\hbar}{2} \cos \alpha \right]$$

$$\langle \hat{S}_{(e^+, \alpha)} \rangle = 0 \quad (2.12)$$

Haciendo un procedimiento similar para el valor esperado del electrón obtenemos:

$$\langle \hat{S}_{(e^-, \beta)} \rangle = 0 \quad (2.13)$$

### 2.4.2. Valor esperado al cuadrado del positrón y electrón

El valor esperado al cuadrado del positrón está determinado por la ecuación:

$$\langle \hat{S}_{(e^+, \alpha)}^2 \rangle = \langle \psi | \hat{S}_{(e^+, \alpha)}^2 | \psi \rangle$$

$$\begin{aligned}\langle \hat{S}_{(e^+, \alpha)}^2 \rangle &= \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle e^- \uparrow | \otimes \langle e^+ \downarrow | - \langle e^- \downarrow | \otimes \langle e^+ \uparrow |) \right] \hat{S}_{(e^+, \alpha)}^2 \\ &\quad \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} (|e^- \uparrow \rangle \otimes |e^+ \downarrow \rangle - |e^- \downarrow \rangle \otimes |e^+ \uparrow \rangle) \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}_{(e^+, \alpha)}^2 \rangle &= \frac{1}{2} \left[ \langle e^- \uparrow | e^- \uparrow \rangle \otimes \langle e^+ \downarrow | \hat{S}_{(e^+, \alpha)}^2 | e^+ \downarrow \rangle - \langle e^- \downarrow | e^- \uparrow \rangle \otimes \langle e^+ \uparrow | \hat{S}_{(e^+, \alpha)}^2 | e^+ \downarrow \rangle \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[ \langle e^- \downarrow | e^- \uparrow \rangle \otimes \langle e^+ \downarrow | \hat{S}_{(e^+, \alpha)}^2 | e^+ \uparrow \rangle + \langle e^- \downarrow | e^- \downarrow \rangle \otimes \langle e^+ \uparrow | \hat{S}_{(e^+, \alpha)}^2 | e^+ \uparrow \rangle \right] \end{aligned}$$

$$\langle \hat{S}_{(e^+, \alpha)}^2 \rangle = \frac{1}{2} \left[ \langle e^+ \downarrow | \hat{S}_{(e^+, \alpha)}^2 | e^+ \downarrow \rangle + \langle e^+ \uparrow | \hat{S}_{(e^+, \alpha)}^2 | e^+ \uparrow \rangle \right]$$

Reescribiendo en representación matricial:

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}_{(e^+, \alpha)}^2 \rangle &= \frac{1}{2} \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

$$\langle \hat{S}_{(e^+, \alpha)}^2 \rangle = \frac{1}{2} \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$\langle \hat{S}_{(e^+, \alpha)}^2 \rangle = \frac{1}{2} \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$\langle \hat{S}_{(e^+, \alpha)}^2 \rangle = \frac{1}{2} \left[ \frac{\hbar^2}{4} + \frac{\hbar^2}{4} \right]$$

$$\langle \hat{S}_{(e^+, \alpha)}^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{4} \tag{2.14}$$

Haciendo un procedimiento similar para el valor esperado al cuadrado del electrón obtenemos:

$$\langle \hat{S}_{(e^-, \beta)}^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{4} \tag{2.15}$$

### 2.4.3. Valor esperado entre el producto de los espín del positrón y el electrón

El producto entre los estados del espín del electrón y el positrón está determinado por la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}_{(e^+, \alpha)} \otimes \hat{S}_{(e^-, \beta)} \rangle &= \langle \psi | \hat{S}_{(e^+, \alpha)} \otimes \hat{S}_{(e^-, \beta)} | \psi \rangle \\ \langle \hat{S}_{(e^+, \alpha)} \otimes \hat{S}_{(e^-, \beta)} \rangle &= \frac{1}{2} \left[ \langle e^+ \uparrow | \hat{S}_{(e^+, \alpha)} | e^+ \uparrow \rangle \otimes \langle e^- \downarrow | \hat{S}_{(e^-, \beta)} | e^- \downarrow \rangle \right] - \\ &\quad \frac{1}{2} \left[ \langle e^+ \downarrow | \hat{S}_{(e^+, \alpha)} | e^+ \uparrow \rangle \otimes \langle e^- \uparrow | \hat{S}_{(e^-, \beta)} | e^- \downarrow \rangle \right] - \\ &\quad \frac{1}{2} \left[ \langle e^+ \uparrow | \hat{S}_{(e^+, \alpha)} | e^+ \downarrow \rangle \otimes \langle e^- \downarrow | \hat{S}_{(e^-, \beta)} | e^- \uparrow \rangle \right] + \\ &\quad \frac{1}{2} \left[ \langle e^+ \downarrow | \hat{S}_{(e^+, \alpha)} | e^+ \downarrow \rangle \otimes \langle e^- \uparrow | \hat{S}_{(e^-, \beta)} | e^- \uparrow \rangle \right] \end{aligned}$$

Reemplazando en representación matricial:

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}_{(e^+, \alpha)} \otimes \hat{S}_{(e^-, \beta)} \rangle &= \\ \frac{1}{2} &\left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] - \\ \frac{1}{2} &\left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] - \\ \frac{1}{2} &\left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + \\ \frac{1}{2} &\left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \hat{S}_{(e^+, \alpha)} \otimes \hat{S}_{(e^-, \beta)} \rangle &= \frac{\hbar^2}{4} \frac{1}{2} \left[ \begin{aligned} &\left( \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \cos \beta \\ \sin \beta \end{array} \right) \otimes \left( \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \end{array} \right) \\ &\left( \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \cos \beta \\ \sin \beta \end{array} \right) \otimes \left( \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \end{array} \right) \\ &\left( \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \sin \beta \\ -\cos \beta \end{array} \right) \otimes \left( \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{array} \right) \\ &\left( \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \sin \beta \\ -\cos \beta \end{array} \right) \otimes \left( \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{array} \right) \end{aligned} \right] - \\
&\frac{\hbar^2}{4} \frac{1}{2} \left[ \begin{aligned} &\left( \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \cos \beta \\ \sin \beta \end{array} \right) \otimes \left( \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \end{array} \right) \\ &\left( \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \sin \beta \\ -\cos \beta \end{array} \right) \otimes \left( \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{array} \right) \\ &\left( \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \sin \beta \\ -\cos \beta \end{array} \right) \otimes \left( \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{array} \right) \\ &\left( \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \sin \beta \\ -\cos \beta \end{array} \right) \otimes \left( \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{array} \right) \end{aligned} \right] + \\
&\frac{\hbar^2}{4} \frac{1}{2} \left[ \begin{aligned} &\left( \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \sin \beta \\ -\cos \beta \end{array} \right) \otimes \left( \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{array} \right) \\ &\left( \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \sin \beta \\ -\cos \beta \end{array} \right) \otimes \left( \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{array} \right) \end{aligned} \right]
\end{aligned}$$

$$\langle \hat{S}_{(e^+, \alpha)} \otimes \hat{S}_{(e^-, \beta)} \rangle = \frac{\hbar^2}{4} \frac{1}{2} [-\cos \beta \cos \alpha - \sin \beta \sin \alpha - \sin \beta \sin \alpha - \cos \beta \cos \alpha]$$

$$\langle \hat{S}_{(e^+, \alpha)} \otimes \hat{S}_{(e^-, \beta)} \rangle = -\frac{\hbar^2}{4} [\cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha]$$

$$\langle \hat{S}_{(e^+, \alpha)} \otimes \hat{S}_{(e^-, \beta)} \rangle = -\frac{\hbar^2}{4} [\cos(\beta - \alpha)] \tag{2.16}$$

#### 2.4.4. Interpretación ortodoxa

Substituyendo las ecuaciones encontradas anteriormente en la ecuación de correlación estadística (2.1) obtenemos la correlación según la interpretación ortodoxa:

$$\begin{aligned}
E(\alpha, \beta) &= \frac{\left( -\frac{\hbar^2}{4} \cos(\beta - \alpha) \right) - [0][0]}{\sqrt{\left( \frac{\hbar^2}{4} \right) \left( \frac{\hbar^2}{4} \right)}} \\
E(\alpha, \beta) &= -\cos(\beta - \alpha) \tag{2.17}
\end{aligned}$$

La ecuación de la correlación ortodoxa muestra una dependencia explicita entre los ángulos de los detectores, lo que implica una correlación entre los espines de ambas partículas.

# Capítulo 3

## Simulación

La paradoja EPR es una discusión que aborda los fundamentos de la mecánica cuántica, pero dicha discusión se basa en formalismos matemáticos complejos [Organista et al., 2007] y en experimentos de difícil acceso. Por esto una herramienta computacional es una manera opcional de mejorar la comprensión de los conceptos que se abordan en la paradoja, ya que presenta mayor facilidad de comprender fenómenos cuánticos que no se hacen tan evidentes en la cotidianidad, además las prácticas de laboratorios en clases de física cuántica muchas veces son análogas del mundo macrofísico y no permiten esclarecer de una manera satisfactoria los conceptos que realmente se pretenden explicar; es por ello que el uso de una herramienta computacional puede complementar los experimentos análogos y mentales que se presentan en física cuántica, desarrollando una motivación necesaria en el estudio de cualquier campo en la rama de la física [Finkelstein et al., 2005]. Incluso el uso de herramientas computacionales facilita la comprensión de conceptos físicos en comparación con las experiencias en el laboratorio, las cuales pueden estipularse muy complejas y no siempre se evidencia de manera clara los conceptos que se analizan. La utilización de las TIC requiere una nueva metodología distinta a la tradicional, donde interactúan con nuevos criterios dentro de la comprensión de nuevos temas,

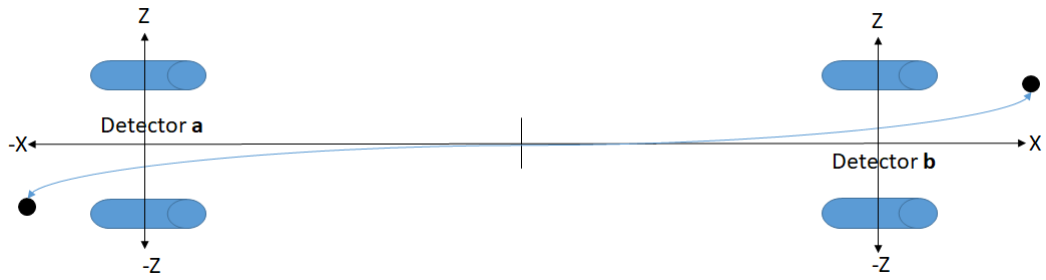
incrementa la motivación, habilidades y aptitudes que permiten a la persona generar sus propias ideas [Delgado et al., 2009].

El objetivo del trabajo es realizar la simulación de la versión de David Bohm del experimento EPR en Vpython el cual es un lenguaje de programación de fácil acceso a objetos 3D que permite una interacción activa entre el usuario y el programa en tiempo real. Python es un programa inventado en 1990 por el informático holandés Guido Van Rossem y el módulo 3D por el informático David Scherer en el año 2000 [Vpython, 2005]. Esta combinación en el lenguaje de programación permite establecer una dinámica a los objetos para visualizar sus movimientos en tres dimensiones.

### 3.1. Análisis de los detectores

El sistema enredado de espines es medido por dos detectores, para el positrón el detector **a** y para el electrón el detector **b**. Si la posición de los detectores es la misma, es decir están alineados en el mismo eje la correlación sería máxima negativa, por ejemplo cuando el detector **a** indica que el espín del positrón es negativo ( $\hat{S}_z-$ ) el detector **b** indicaría que el espín de electrón es positivo ( $\hat{S}_z+$ ) como muestra la Figura 3.1. Sin embargo con los detectores alineados perfectamente no podremos encontrar una diferencia entre la interpretación ortodoxa y la interpretación realista, aunque difieran en sus fundamentos epistemológicos, la correlación negativa de los espines está presente en ambas interpretaciones.

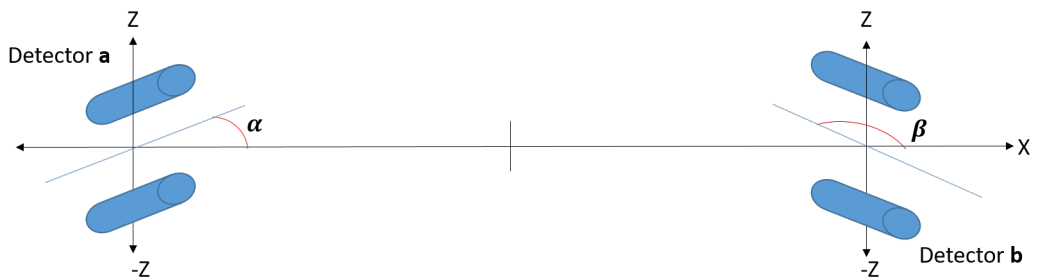
Al generar una rotación de los ángulos de los detectores (Figura 3.2) como sugiere J. Bell, permite hacer un cálculo de las correlaciones de los espines más acertada experimentalmente, como la dirección los espines de la partículas cuando salen del decaimiento son al azar, la probabilidad de alinear el campo magnético del detector



1.png

Figura 3.1: *Propia: correlación del electrón y positrón cuando los detectores están alineados en el mismo eje.*

con el espín es mayor si sus detectores rotan en un patrón establecido. [Kumar, 2012] afirma que: “Si movemos ligeramente uno de los detectores dejarán de estar perfectamente alineados, cuando en tal caso medimos los espín de muchos pares de electrones entrelazados, si A es hacia arriba en algunas ocasiones B también será hacia arriba” [p.449], entonces existe una relación inversa entre la correlación de los espines de las partículas y la variación entre los ángulos de los detectores. Esta rotación genera un ángulo relativo entre los detectores ( $\alpha - \beta$ ) permitiendo hacer una clara distinción entre la interpretación ortodoxa y la interpretación realista que contemplaremos más adelante.



2.png

Figura 3.2: *Propia: rotación de los detectores: para el positrón el ángulo  $\alpha$  y para electrón el ángulo  $\beta$*

## 3.2. Simulación Experimento EPR-Bohm

La simulación del experimento de Bohm consiste en el decaimiento de un átomo de espín neutro en dos partículas nuevas, un positrón y un electrón los cuales se alejan unidimensionalmente una de la otra. Las nuevas partículas se componen de un espín  $1/2$  que varían su dirección en todas las componentes como muestra la Figura 3.3. Cuando las partículas se alejan lo suficiente para no tener una interacción directa son detectadas por aparatos de *Stern-Gerlach*<sup>1</sup> los cuales alinean un campo magnético no uniforme con la dirección de los espines de cada partícula. Los espines divergen en dos posibles estados ( $\pm\hbar/2$ ) orientados en un sistema de referencia tomado arbitrariamente en el eje x con respecto al eje z.

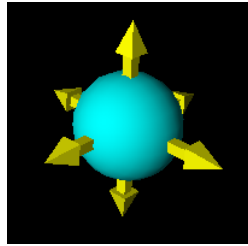


Figura 3.3: *Variación en la dirección del espín de la partícula antes de pasar por el detector de Stern-Gerlach*

Este experimento se desarrolló en el lenguaje de Vpython donde la partícula con espín neutro realiza el decaimiento en una fuente de color verde, las dos nuevas partículas se alejan, el positrón representado por el color rojo se aleja a la izquierda y el electrón representado por el color azul se aleja a la derecha. Cada partícula tiene una dualidad de espín, representado por las flechas amarillas, los cuales hasta el momento de la medición son indeterminados. Los aparatos de Stern-Gerlach están representados por imanes blancos, quienes generan un campo magnético no homogéneo [Ruiz, 2014] que reorienta los espines de las partículas según la dirección

---

<sup>1</sup>Experimento que utilizaron los dos científicos Otto Stern y Walter Gerlach para comprobar la cuantización del momento angular de los electrones de un átomo [Ruiz, 2014]

misma del espín; notesé en la Figura 3.4.

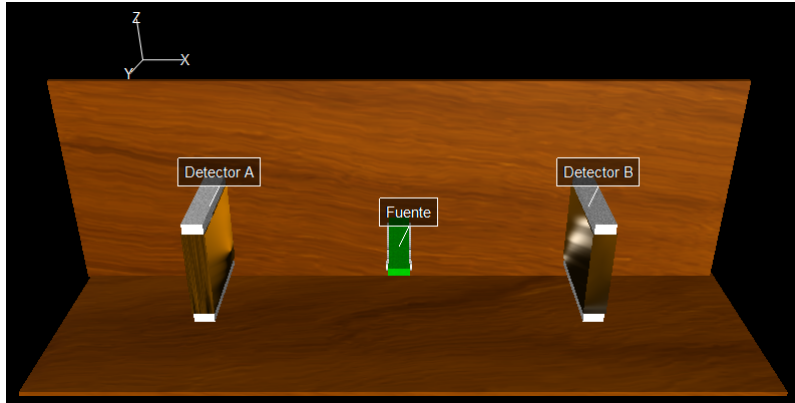


Figura 3.4: *Simulación de cinco experimentos EPR-Bohm en Vpython*

Cuando ambas partículas comienzan su recorrido y llegan a los detectores correspondientes sufren una desviación en el eje  $z$  como vimos en la sección 1.3, dicha desviación depende de la dirección del espín que está ligada en la simulación a un número aleatorio que toma valores de  $[0$  a  $1]$ . Si el valor del número aleatorio es mayor a  $0,5$  el espín del electrón será  $(\hat{S}_z + \uparrow)$  y el espín del positrón sera  $(\hat{S}_z - \downarrow)$ , pero si el valor del número aleatorio es menor a  $0,5$  pasará lo contrario. A esto se le conoce como correlación negativa y podrá comprobarse solo cuando las direcciones de ambos detectores coincidan [Alcaine, 2005].

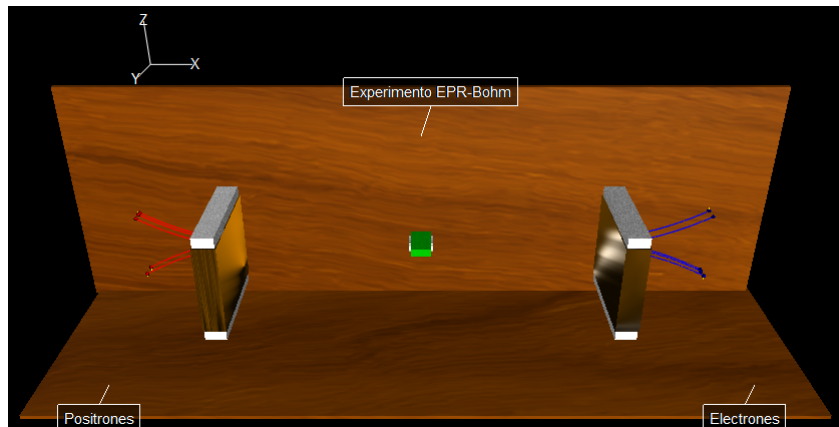


Figura 3.5: *Simulación de cinco experimentos EPR-Bohm y lista de números aleatorios en Vpython: desviación de las partículas*

En la Figura 3.5 se evidencia una lista de números aleatorios con cinco componentes, tres términos inferiores a 0,5 y dos términos superiores a 0,5. Las desviaciones de los espines son dependientes de los números aleatorios como muestra el Cuadro 3.1; la cantidad de espines reorientados de cualquiera de las dos partículas depende exclusivamente del número aleatorio.

Número aleatorio	Electrón		Positrón	
	$\hat{S} \uparrow$	$\hat{S} \downarrow$	$\hat{S} \uparrow$	$\hat{S} \downarrow$
0,1474		•	•	
0,3391		•	•	
0,8513	•			•
0,6567	•			•
0,0541		•	•	

Cuadro 3.1: Dependencia de la correlación con respecto los números aleatorios

Este mismo experimento para los campos magnéticos de los detectores en ángulos distintos resulta una correlación no lineal, como se mostrará más adelante. Ahora por efectos del lenguaje Python para el cálculo de la correlación se utilizan las sumatorias de los promedios representado en el Cuadro 3.2.

Componente	Términos en la simulación
$\langle \hat{S}_{(e^+, \alpha)} \otimes \hat{S}_{(e^-, \beta)} \rangle$	$\sum \frac{S_e \times S_p}{N}$
$\langle \hat{S}_{(e^+, \alpha)} \rangle$	$\sum \frac{S_p}{N}$
$\langle \hat{S}_{(e^-, \beta)} \rangle$	$\sum \frac{S_e}{N}$
$\langle \hat{S}_{(e^+, \alpha)}^2 \rangle$	$\sum \frac{S_p^2}{N}$
$\langle \hat{S}_{(e^-, \beta)}^2 \rangle$	$\sum \frac{S_e^2}{N}$

Cuadro 3.2: modificación de [Rincon, 2012]: Variables dentro del coeficiente de correlación

### 3.2.1. Simulación Realista

Para la simulación de la interpretación realista se tuvieron en cuenta algunas consideraciones como se demostró en la formalización de la sección 2.3.:

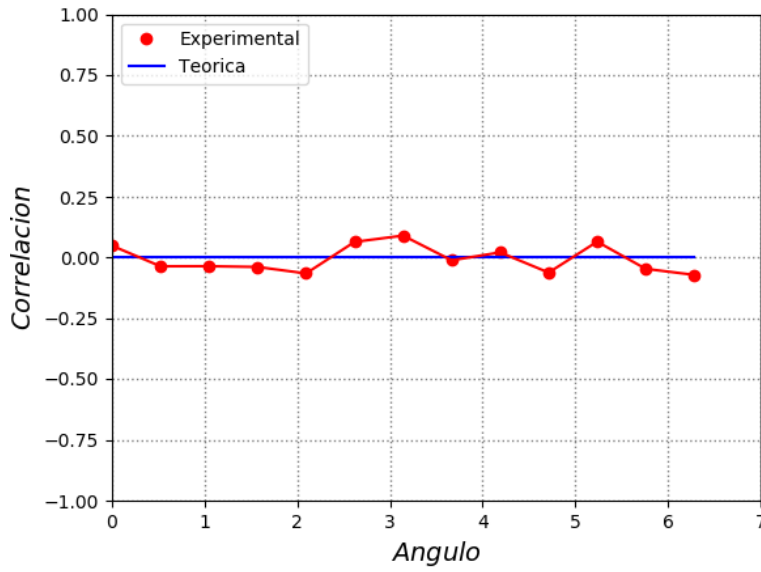
- Esta interpretación no establece una dependencia de variables entre los detectores. Entonces se tomaron dos números aleatorios  $[a, b]$ , uno para cada detector.
- Si los números aleatorios  $a$  y  $b$  son menores a 0.5 entonces el espín del electrón y el el espín del positrón serán respectivamente:

$$S_e = \sin \alpha \quad \wedge \quad S_p = \cos \beta$$

- Si los números aleatorios  $a$  y  $b$  son mayores a 0.5 entonces el espín del electrón y el el espín del positrón serán respectivamente:

$$S_e = \cos \alpha \quad \wedge \quad S_p = \sin \beta$$

En la simulación se realizaron 100 experimentos para cada ángulo, el programa muestra una lista de correlaciones contra una lista de ángulos relativos con un paso de 30 grados hasta completar el ciclo de 360 grados. La gráfica resultante es aproximada a la interpretación realista vista en el marco teórico del trabajo como muestra la Figura 3.6.



(a) Gráfica

Angulo	Correlacion
0	0.0490921
0.523599	-0.0358917
1.0472	-0.0355515
1.5708	-0.0386572
2.0944	-0.0654053
2.61799	0.0649499
3.14159	0.0909137
3.66519	-0.0111294
4.18879	0.0215123
4.71239	-0.0619556
5.23599	0.0657596
5.75959	-0.0463721
6.28319	-0.0714352

(b) Lista

Figura 3.6: (a). Gráfica de la correlación en el contexto de la interpretación realista (b). lista de correlaciones realistas en el programa Vpython

### 3.2.2. Simulación Ortodoxa

Para la simulación de la interpretación ortodoxa se tuvieron en cuenta algunas consideraciones como se demostró en la formalización de la sección 2.4.:

- Esta interpretación establece una dependencia de variables entre los detectores. Entonces solo un numero aleatorio  $[a]$  involucra a las dos partículas.
- Si el número aleatorio  $a$  es menor a 0,5 entonces el espín del electrón y el espín del positrón son respectivamente:

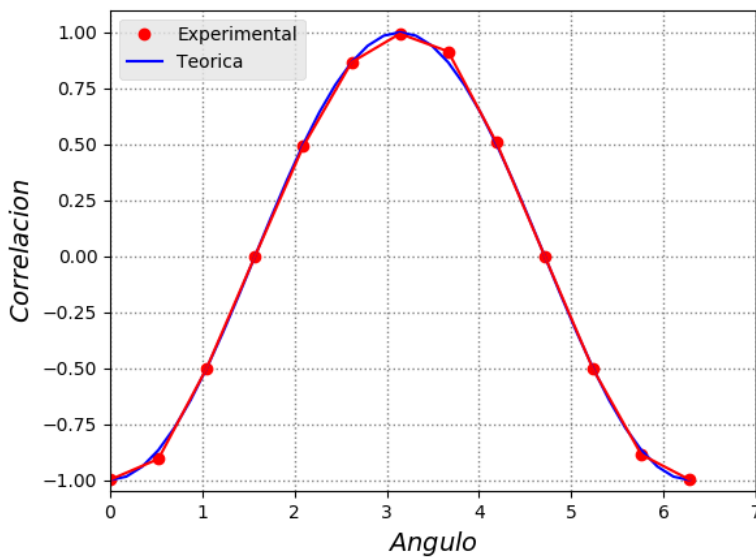
$$S_e = -\cos \alpha + \sin \alpha \quad \wedge \quad S_p = \cos \beta + \sin \beta$$

- Si el número aleatorio  $a$  es mayor a 0,5 entonces el espín del electrón y el espín

del positrón son respectivamente:

$$S_e = \cos \alpha + \sin \alpha \quad \wedge \quad S_p = -\cos \beta + \sin \beta$$

En la simulación se realizaron 100 experimentos para cada ángulo, el programa muestra una lista de correlaciones contra una lista de ángulos relativos con un paso de 30 grados hasta completar el ciclo de 360 grados. La gráfica resultante es aproximada a la interpretación ortodoxa vista en el marco teórico del trabajo como muestra la Figura 3.7.



(a) Gráfica

Angulo	Correlacion
0	-0.9984
0.523599	-0.905732
1.0472	-0.5
1.5708	1.91239e-10
2.0944	0.490772
2.61799	0.866025
3.14159	0.9936
3.66519	0.91433
4.18879	0.508078
4.71239	-5.90698e-10
5.23599	-0.504185
5.75959	-0.88624
6.28319	-0.9984

(b) Lista

Figura 3.7: (a). Gráfica de la correlación en el contexto de la interpretación ortodoxa (b). lista de correlaciones ortodoxas en el programa Vpython

### 3.3. Análisis de la simulación

Este análisis se realiza con el fin de mejorar la comprensión en los cálculos internos que ejecuta el programa para determinar la magnitud de la correlación variando los ángulos entre los detectores ( $\alpha - \beta$ ). Se ejecuta una simulación del decaimiento de 50 moléculas de espín neutro en sus respectivas partículas: electrón y positrón. El ángulo relativo entre los detectores varía a un paso de  $30^\circ$ .

Los términos de la ecuación de correlación se modifican como sugiere el Cuadro 3.2:

$$E(\alpha, \beta) = \frac{\sum \frac{S_e \times S_p}{N} - \sum \frac{S_p}{N} \cdot \sum \frac{S_e}{N}}{\sqrt{\sum \frac{S_p^2}{N} \cdot \sum \frac{S_e^2}{N}}} \quad (3.1)$$

Para el cálculo de cada componente se realiza la sumatoria de cada lista y se operan con el número de decaimientos ( $\mathbf{N}$ ) que en este caso sería 50. Para esclarecer el valor físico a la magnitud de la correlación se establecen unos criterios que facilitan la explicación como muestra el Cuadro 3.3. A continuación se realiza una descripción breve de cada uno de los cinco criterios:

Criterios de correlación		
1.	$1 \geq E > 0,5$	Correlación alta positiva
2.	$0,5 > E > 0$	Correlación baja positiva
3.	$E = 0$	No hay correlación
4.	$0 > E > -0,5$	Correlación baja negativa
5.	$-0,5 > E \geq -1$	Correlación alta negativa

Cuadro 3.3: *Criterios de las magnitudes físicas de la correlación*

1. *Correlación alta positiva:* los espines de las partículas presentan una dependencia máxima y una característica positiva, es decir los espines son medidos en las mismas direcciones, ya sea ambos en dirección  $\hat{S}_{z+}$  ó ambos en  $\hat{S}_{z-}$ .
2. *Correlación baja positiva:* los espines de las partículas presentan una depen-

dencia entre sí con probabilidad del 50 % y una característica positiva, es decir sus espines son medidos en la misma dirección.

3. *No hay correlación:* los espines de las partículas no presentan una dependencia en las mediciones de sus detectores.
4. *Correlación baja negativa:* los espines de las partículas presentan una dependencia entre sí con probabilidad del 50 % y una característica negativa, es decir estos son medidos en direcciones contrarias, cuando el espín de una de las partículas sea  $\hat{S}_{z+}$  el espín de la otra partícula será  $\hat{S}_{z-}$ .
5. *Correlación alta negativa:* los espines de las partículas presentan una dependencia máxima y una característica negativa, es decir los espines de las partículas son medidos en direcciones contrarias en el eje Z.

El resultado de realizar en la simulación un decaimiento de 50 moléculas bajo el contexto de la interpretación ortodoxa de la mecánica cuántica se muestra en el Cuadro 3.4.

Ángulo(°)	$\sum \frac{S_e}{N}$	$\sum \frac{S_p}{N}$	$\sum \frac{S_e^2}{N}$	$\sum \frac{S_p^2}{N}$	$\sum \frac{S_e \times S_p}{N}$	$E_{(\alpha-\beta)}$
0	-0.08	0.08	1.0	1.0	-1.0	-0.9936
30	-0.08	0.5692	1.0	1.0692	-0.9060	-0.8321
60	-0.04	0.8860	1.0	1.0346	-0.5346	-0.4907
90	-0.12	1.0	1.0	1.0	0.12	$2,2 \times 10^{-10}$
120	0.0	0.8660	1.0	1.0	0.5	0.5
150	-0.24	0.2921	1.0	0.7921	0.7460	0.9169
180	0.08	0.0799	1.0	0.9999	0.9999	0.9936
210	-0.04	-0.5346	1.0	1.0346	0.8860	0.85
240	0.0	-0.8660	1.0	1.0	0.4999	0.4999
270	0.08	-1.0	1.0	1.0	-0.08	$-6,1 \times 10^{-10}$
300	-0.16	-0.7860	-1.0	0.8614	-0.3614	-0.5249
330	0.08	-0.5692	1.0	1.069	-0.9060	-0.8321
360	-0.08	0.08	1.0	1.0	-1.0	-0.9935

Cuadro 3.4: *Datos de la correlación ortodoxa según el ángulo*

La explicación de los cambios de la correlación están en los picos, según los criterios de correlación los cambios máximos negativos se encuentran en los ángulos de  $0^\circ$  y  $360^\circ$  donde los detectores están alineados perfectamente. El cambio máximo positivo se encuentra en el ángulo de  $180^\circ$  donde el campo magnético de los detectores están en dirección opuesta a su alineamiento original. Las aproximaciones a ninguna correlación se encuentran en los ángulos de  $90^\circ$  y  $270^\circ$  donde el campo magnético de los detectores está orientado perpendicularmente y la medición de los espines resulta incontrolable.

Igualmente el resultado de realizar en la simulación un decaimiento de 50 moléculas bajo el contexto de la interpretación realista de la mecánica cuántica se muestra en el Cuadro 3.5.

Ángulo( $^\circ$ )	$\sum \frac{S_e}{N}$	$\sum \frac{S_p}{N}$	$\sum \frac{S_e^2}{N}$	$\sum \frac{S_p^2}{N}$	$\sum \frac{S_e \times S_p}{N}$	$E_{(\alpha-\beta)}$
0	0.62	0.5499	0.62	0.55	0.3199	-0.0359
30	0.04	0.5999	0.4	0.51	0.2399	0.0797
60	0.51	0.5099	0.51	0.51	0.2699	0.0194
90	0.5	0.6099	0.5	0.61	0.3199	0.0271
120	0.5	0.4899	0.5	0.49	0.2699	0.0505
150	0.58	0.5099	0.58	0.51	0.2799	0.0290
180	0.5	0.4599	0.5	0.46	0.2499	0.0417
210	0.44	0.5199	0.44	0.52	0.2199	-0.0183
240	0.52	0.5799	0.52	0.58	0.3099	0.0152
270	0.46	0.4399	0.46	0.44	0.2099	0.0168
300	0.48	0.5599	0.48	0.56	0.1999	-0.1327
330	0.64	0.3990	0.64	0.4	0.2599	0.0079
360	0.49	0.3999	0.49	0.4	0.2299	0.0767

Cuadro 3.5: *Datos de la correlación realista según el ángulo*

La aproximación al criterio de *No hay correlación* es evidente independientemente el ángulo, la interpretación realista niega la existencia de una dependencia directa de los espines de las partículas una vez sean medidos a una distancia considerable. La aproximación de la simulación es tolerable una vez se considere está interpretación.

# Conclusiones

La comparación entre las interpretaciones de la correlación evidencia una manera efectiva de llegar a una descripción de un fenómeno a partir de la confrontación de conceptos, la interpretación ortodoxa asume una correlación entre las partículas en términos de probabilidades, es decir, su realidad física se presenta sólo cuando se realiza la medición directa, mientras que la interpretación realista asume estados bien definidos de ambas partículas antes de pasar por los detectores, esto sugiere una realidad física determinada por nociones de predicción determinista que no se acoplan a este experimento simulado.

Esta profunda contradicción entre teoría y experimento, que se generó en la discusión del artículo EPR, indica que la construcción de una teoría aplicable a los fenómenos atómicos, exige un cambio esencial en las nociones fundamentales de teorías clásicas. Los interrogantes para los científicos realistas a cerca de los resultados de la mecánica cuántica parece no afectar los resultados de sus experimentos, por el contrario el experimento EPR-Bohm modificado por J. Bell ratifica la mecánica cuántica como acertada en su explicación al fenómeno.

En el proceso del diseño de la simulación en Vpython se evidenciaron varios factores que aportaron al desarrollo conceptual y metacognitivo de la descripción de la paradoja EPR:

Permite tener una imagen mental más clara del experimento, donde se evidencia un

sistema cuántico en las dimensiones que cognitivamente afianza nuestra percepción y nuestras nociones clásicas, lo cual permite una explicación en términos clásicos de un experimento cuántico. También la simulación permite establecer una distinción entre las dos interpretaciones de la mecánica cuántica a partir de los procesos fenomenológicos que conlleva cada explicación. Estos conceptos involucrados en la discusión de la paradoja EPR son la condición inicial para la construcción y diseño de la herramienta computacional, por ende este proceso metacognitivo es una propuesta para el aprendizaje de sistemas cuánticos que claramente puede ser utilizado en futuras investigaciones. Esta simulación puede ser utilizada para la enseñanza de sistemas enredados de espines vista desde dos interpretaciones, siendo la confrontación de conceptos el factor clave para la explicación del fenómeno.

En cuanto a las dificultades para el proceso de validación de la herramienta computacional está la falta de tiempo para realizar una prueba piloto en un grupo pequeño de pares académicos que permitiera ajustar algunos detalles de la simulación, sin embargo la simulación permitió hacer una descripción tolerable de la paradoja EPR asumiendo el marco teórico de los dos primeros capítulos como base fundamental para la explicación del sistema enredado de espines.

# Índice de figuras

1.	<i>Modificación del libro [Hernández Sampieri et al., 2014] :fases de la metodología experimental-descriptiva . . . . .</i>	11
1.1.	<i>Modificación del documento [Rincon, 2012]: observables conjugados de dos partículas en una dimensión . . . . .</i>	4
1.2.	<i>Modificación del documento [Rincon, 2012]: dos átomos alejándose uno de la otro, cada una con dos posibles componentes de espín en el eje <math>z</math> . . . . .</i>	5
2.1.	<i>Modificación de la imagen de Clemente De La Torre: principio de incertidumbre . . . . .</i>	10
3.1.	<i>Propia: correlación del electrón y positrón cuando los detectores estan alineados en el mismo eje. . . . .</i>	23
3.2.	<i>Propia: rotación de los detectores: para el positrón el ángulo <math>\alpha</math> y para electrón el ángulo <math>\beta</math> . . . . .</i>	23
3.3.	<i>Variación en la dirección del espín de la partícula antes de pasar por el detector de Stern-Gerlach . . . . .</i>	24
3.4.	<i>Simulación de cinco experimentos EPR-Bohm en Vpython . . . . .</i>	25
3.5.	<i>Simulación de cinco experimentos EPR-Bohm y lista de números aleatorios en Vpython: desviación de las partículas . . . . .</i>	25
3.6.	<i>(a).Gráfica de la correlación en el contexto de la interpretación realista (b).lista de correlaciones realistas en el programa Vpython . . . . .</i>	28
3.7.	<i>(a).Gráfica de la correlación en el contexto de la interpretación ortodoxa (b).lista de correlaciones ortodoxas en el programa Vpython . . . . .</i>	29

# Índice de cuadros

2.1. <i>Variables dentro del coeficiente de correlación . . . . .</i>	12
3.1. <i>Dependencia de la correlación con respecto los números aleatorios . .</i>	26
3.2. <i>modificación de [Rincon, 2012]: Variables dentro del coeficiente de correlación . . . . .</i>	26
3.3. <i>Criterios de las magnitudes físicas de la correlación . . . . .</i>	30
3.4. <i>Datos de la correlación ortodoxa según el ángulo . . . . .</i>	31
3.5. <i>Datos de la correlación realista según el ángulo . . . . .</i>	32

# Bibliografía

- [Abal, 2007] Abal, G. (2007). Paradoja epr y desigualdades de bell: pruebas experimentales, estado actual del conocimiento. *Instituto de Física. Universidad de la República. Montevideo, Uruguay.*
- [Alcaine, 2005] Alcaine, G. G. (2005). Einstein y la mecánica cuántica. *Mono-grafías de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas, Químicas y Naturales de Zaragoza*, (27):107–118.
- [Basdevant and Dalibard, 2005] Basdevant, J.-L. and Dalibard, J. (2005). *The quantum mechanics solver: how to apply quantum theory to modern physics*. Springer Science & Business Media.
- [Bell, 1964] Bell, J., S. (1964). On the einstein podolsky rosen paradox. *University Wisconsin: Physics*, 1.
- [Bohm, 2008] Bohm, D. (2008). *La totalidad y el orden implicado*. Editorial Kairós.
- [Campanario, 2009] Campanario, M. (2009). El desarrollo de la metacognición en el aprendizaje de las ciencias: estrategias para el profesor y actividades orientadas al alumno. *Colección Digital Eudoxus*, (8).
- [Dagnino, 2014] Dagnino, J. (2014). Coeficiente de correlacion lineal de pearson. *Chil Anest*, 43:150–153.
- [Delgado et al., 2009] Delgado, M., Arrieta, X., and Riveros, V. (2009). Uso de las tic en educación, una propuesta para su optimización. *Omnia*, 15(3).

- [Einstein et al., 1935] Einstein, A., Podolsky, B., and Rosen, N. (1935). Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Physical review*, 47(10):777, Trad.
- [Finkelstein et al., 2005] Finkelstein, N. D., Adams, W. K., Keller, C., Kohl, P. B., Perkins, K. K., Podolefsky, N. S., Reid, S., and LeMaster, R. (2005). When learning about the real world is better done virtually: A study of substituting computer simulations for laboratory equipment. *Physical Review Special Topics-Physics Education Research*, 1(1):010103.
- [Franky, 2009] Franky, G. A. (2009). Potencialidades pedagógicas de los entornos de simulación, desde la perspectiva de la cognición situada. *TED: Tecné, Episteme y Didaxis*, (25).
- [Hernández Sampieri et al., 2014] Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., and Baptista Lucio, P. (2014). Metodología de la investigación. sexta edición. editorial mc graw hill. méxico. 2014. hernández, r. *Metodología de la Investigación. 6a Edición, Mc Graw Hill, México*.
- [Kofman, 2000] Kofman, H. (2000). Modelos y simulaciones computacionales en la enseñanza de la física. *Revista educación en física*, 6:13–22.
- [Kumar, 2012] Kumar, M. (2012). *Quántum: Einstein, Bohr y el gran debate sobre la naturaleza de la realidad*. Editorial Kairós.
- [Morones Ibarra, 2005] Morones Ibarra, J. R. (2005). Los misterios del mundo cuántico. *Ingenierías*, 7(26):12–21.
- [Organista et al., 2007] Organista, O., Gómez, V., Jaimes, D., and Rodríguez, J. (2007). Una idea profunda en la comprensión del mundo físico: el principio de superposición de estados. *Latin American Journal of Physics Education*, 1:83–88.
- [Rincon, 2012] Rincon, R. S. (2012). una propuesta para la enseñanza de la interpretación ortodoxa de la mecánica cuántica versus la realista, considerando estados enredados de spines de dos partículas por medio de un algoritmo de montecarlo.

- [Rodríguez Palmero et al., 2001] Rodríguez Palmero, M. L., Marrero Acosta, J., and Moreira, M. A. (2001). La teoría de los modelos mentales de johnson-laird y sus principios: una aplicación con modelos mentales de célula en estudiantes del curso de orientación universitaria. *Investigações em ensino de ciências. Porto Alegre. Vol. 6, n. 3 (set./dez. 2001), p. 243-268.*
- [Ruiz, 2014] Ruiz, O. A. (2014). Diseño de una herramienta computacional basada en el experimento de stern-gerlach para la enseñanza de la preparación de estados y la naturaleza probabilística de la mecánica cuántica.
- [Torre, 2011] Torre, A. C. d. l. (2011). *Física cuántica para filo-sofos*. Fondo de Cultura Económica.
- [Trad., ] Trad.
- [Vpython, 2005] Vpython, p. o. (2005). *introduccion a Vpython*.  
file:///C:/Python27/Lib/site-packages/visual/docs/VPython\_intro.pdf.

# Anexos

## Anexo A

### Desigualdad de Bell

La mecánica cuántica calcula el promedio entre el producto de los espines.

$$P(a, b) = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

Realizando el producto interno entre dos variables vectoriales se resume:

$$P(a, b) = -\cos\beta$$

La determinación de un conjunto de variables, o funciones discretas que pudieran describir la falta de completitud que demandan los científicos realistas sobre la mecánica cuántica se denomina con la densidad de probabilidad ( $\rho\lambda$ ).

$$\int d\lambda\rho(\lambda) = 1$$

Es una distribución de probabilidad normalizada, donde  $\lambda$  es nuestro vector unitario asociado a la variable oculta.

$$P(a, b) = - \int \rho(\lambda)A(a, \lambda)A(b, \lambda)d\lambda$$

Es la distribución de probabilidad para el decaimiento de las dos partículas, el positrón (b) y el electrón (a). Ahora se agrega un nuevo vector unitario que representa

un nuevo detector en un ángulo distinto a los originales y se representa con la letra **c**. La distribución de probabilidad se representa como:

$$P(a, b) - P(a, c) = - \int \rho(\lambda)[A(a, \lambda)A(b, \lambda) - A(a, \lambda)A(c, \lambda)]d\lambda$$

Factorizando:

$$P(a, b) - P(a, c) = - \int \rho(\lambda)A(a, \lambda)A(b, \lambda)[A(b, \lambda)A(c, \lambda) - 1]d\lambda$$

La desigualdad para los detectores **A** y **B** con un tercer detector relacionado entre ellos resulta:

$$[P(a, b) - P(a, c)] < \int \rho(\lambda)[1 - A(b, \lambda)A(c, \lambda)]d\lambda$$

Finalmente:

$$[P(a, b) - P(a, c)] < 1 + P(b, c)$$

## Anexo B

### Código: correlación realista

```
from visual import *
from visual.controls import *
from random import random *
from visual.graph import *

scene.height = scene.width = 1000
a=[]
b=[]
Natoms = 100 ####numero de particulas en decaimiento
Atoms1= []
Atoms = []
v = []
v1 = []
v2 = []
v3 = []
for i in range(Natoms):
    imanNa=cylinder(pos=(40,-10,i),axis=(8,0,0),radius=1)
    imanSa=cylinder(pos=(40,-20,i),axis=(8,0,0),radius=1)
    imanNb=cylinder(pos=(-47,-10,i),axis=(8,0,0),radius=1)
    imanSb=cylinder(pos=(-47,-20,i),axis=(8,0,0),radius=1)
    canon1 = box(pos=(0,-15,i),size=(5,2,5),color=color.green)
    canon = cylinder(pos=(-3,-15,i),axis=(6,0,0),radius=1)
    x = 0
    y = -15
    z = i
    v.append(arrow(pos=(x,y,z),axis=(0,-1,0),color=color.yellow,
        make_trail=True,retain=100))
    v1.append(arrow(pos=(x,y,z),axis=(0,1,0),color=color.yellow,
        make_trail=True,retain=100))
    v2.append(arrow(pos=(x,y,z),axis=(0,-1,0),color=color.yellow,
        make_trail=True,retain=100))
    v3.append(arrow(pos=(x,y,z),axis=(0,1,0),color=color.yellow,
        make_trail=True,retain=100))
    Atoms.append(sphere(pos=(x,y,z),radius=0.5,color=color.blue,
        make_trail=True,retain=100))
    Atoms1.append(sphere(pos=(x,y,z),radius=0.5,color=color.red,
        make_trail=True,retain=100))
    Atoms[i].v= vector(28,0,0)
    Atoms1[i].v=vector(-28,0,0)
    a.append(random.rand())
    b.append(random.rand())
dt=0.005
t=0
scene.center = canon1.pos

while t < 15:
    rate(100)
    for i in range(Natoms):
        if a[i] > 0.5:
            Atoms[i].pos = Atoms[i].pos + Atoms[i].v * dt
```

```

v[i].pos = Atoms[i].pos + Atoms[i].v * dt
v1[i].pos = Atoms[i].pos + Atoms[i].v * dt
if Atoms[i].pos.x > 40:
    Atoms[i].pos.x = Atoms[i].pos.x + dt
    Atoms[i].v.y = Atoms[i].v.y + 15 * dt
    v[i].visible = false
if b[i] > 0.5:
    Atoms1[i].pos = Atoms1[i].pos + Atoms1[i].v * dt
    v2[i].pos = Atoms1[i].pos + Atoms1[i].v * dt
    v3[i].pos = Atoms1[i].pos + Atoms1[i].v * dt
    if Atoms[i].pos.x > 40:
        Atoms1[i].pos.x = Atoms1[i].pos.x + dt
        Atoms1[i].v.y = Atoms1[i].v.y - 15 * dt
        v3[i].visible = false
if a[i] < 0.5:
    Atoms[i].pos = Atoms[i].pos + Atoms[i].v * dt
    v[i].pos = Atoms[i].pos + Atoms[i].v * dt
    v1[i].pos = Atoms[i].pos + Atoms[i].v * dt
    if Atoms[i].pos.x > 40:
        Atoms[i].pos.x = Atoms[i].pos.x + dt
        Atoms[i].v.y = Atoms[i].v.y - 15 * dt
        v1[i].visible=false
if b[i] < 0.5:
    Atoms1[i].pos = Atoms1[i].pos + Atoms1[i].v * dt
    v2[i].pos = Atoms1[i].pos + Atoms1[i].v * dt
    v3[i].pos = Atoms1[i].pos + Atoms1[i].v * dt
    if Atoms[i].pos.x > 40:
        Atoms1[i].pos.x = Atoms1[i].pos.x + dt
        Atoms1[i].v.y = Atoms1[i].v.y + 15 * dt
        v2[i].visible=false

if Atoms[i].pos.x > 70:
    Atoms[i].v.y = 0
    Atoms[i].v.x = 0
    Atoms1[i].v.y = 0
    Atoms1[i].v.x = 0

```

t=t+dt

## Anexo C

### Código: correlación ortodoxa

```
from visual import *
from visual.controls import *
from random import random *
from visual.graph import *

scene.height = scene.width = 1000
a=[]
Natoms = 100 ####numero de particulas en decaimiento
Atoms1= []
Atoms = []
v = []
v1 = []
v2 = []
v3 = []

for i in range(Natoms):
    imanNa=cylinder(pos=(40,-10,i),axis=(8,0,0),radius=1)
    imanSa=cylinder(pos=(40,-20,i),axis=(8,0,0),radius=1)
    imanNb=cylinder(pos=(-47,-10,i),axis=(8,0,0),radius=1)
    imanSb=cylinder(pos=(-47,-20,i),axis=(8,0,0),radius=1)
    canon1 = box(pos=(0,-15,i),size=(5,2,5),color=color.green)
    canon = cylinder(pos=(-3,-15,i),axis=(6,0,0),radius=1)
    x = 0
    y = -15
    z = i
    v.append(arrow(pos=(x,y,z),axis=(0,-1,0),color=color.yellow,
        make_trail=True,retain=100))
    v1.append(arrow(pos=(x,y,z),axis=(0,1,0),color=color.yellow,
        make_trail=True,retain=100))
    v2.append(arrow(pos=(x,y,z),axis=(0,-1,0),color=color.yellow,
        make_trail=True,retain=100))
    v3.append(arrow(pos=(x,y,z),axis=(0,1,0),color=color.yellow,
        make_trail=True,retain=100))
    Atoms.append(sphere(pos=(x,y,z),radius=0.5,color=color.blue,
        make_trail=True,retain=100))
    Atoms1.append(sphere(pos=(x,y,z),radius=0.5,color=color.red,
        make_trail=True,retain=100))
    Atoms[i].v= vector(28,0,0)
    Atoms1[i].v=vector(-28,0,0)
    a.append(random.rand())
dt=0.005
t=0
scene.center = canon1.pos

while t < 15:
    rate(100)
    for i in range(Natoms):
        if a[i] > 0.5:
            Atoms[i].pos = Atoms[i].pos + Atoms[i].v * dt
            v[i].pos = Atoms[i].pos + Atoms[i].v * dt
```

```

v1[i].pos = Atoms[i].pos + Atoms[i].v * dt
if Atoms[i].pos.x > 40:
    Atoms[i].pos.x = Atoms[i].pos.x + dt
    Atoms[i].v.y = Atoms[i].v.y + 15 * dt
    v[i].visible = false
if a[i] > 0.5:
    Atoms1[i].pos = Atoms1[i].pos + Atoms1[i].v * dt
    v2[i].pos = Atoms1[i].pos + Atoms1[i].v * dt
    v3[i].pos = Atoms1[i].pos + Atoms1[i].v * dt
    if Atoms[i].pos.x > 40:
        Atoms1[i].pos.x = Atoms1[i].pos.x + dt
        Atoms1[i].v.y = Atoms1[i].v.y - 15 * dt
        v3[i].visible = false
if a[i] < 0.5:
    Atoms[i].pos = Atoms[i].pos + Atoms[i].v * dt
    v[i].pos = Atoms[i].pos + Atoms[i].v * dt
    v1[i].pos = Atoms[i].pos + Atoms[i].v * dt
    if Atoms[i].pos.x > 40:
        Atoms[i].pos.x = Atoms[i].pos.x + dt
        Atoms[i].v.y = Atoms[i].v.y - 15 * dt
        v1[i].visible=false
if a[i] < 0.5:
    Atoms1[i].pos = Atoms1[i].pos + Atoms1[i].v * dt
    v2[i].pos = Atoms1[i].pos + Atoms1[i].v * dt
    v3[i].pos = Atoms1[i].pos + Atoms1[i].v * dt
    if Atoms[i].pos.x > 40:
        Atoms1[i].pos.x = Atoms1[i].pos.x + dt
        Atoms1[i].v.y = Atoms1[i].v.y + 15 * dt
        v2[i].visible=false

if Atoms[i].pos.x > 70:
    Atoms[i].v.y = 0
    Atoms[i].v.x = 0
    Atoms1[i].v.y = 0
    Atoms1[i].v.x = 0

```

t=t+dt

## Anexo D

### Código: listas de la correlación realista

```
from visual import *
from visual.controls import *
from random import random *

Pse=[]
Psp=[]
Pse2=[]
Psp2=[]
Ps=[]
pi= 3.141592654
N = 100
angulo = [0,pi/6,pi/3,pi/2,2*pi/3,5*pi/6,pi,7*pi/6,4*pi/3,
          3*pi/2,5*pi/3,11*pi/6,2*pi]
print angulo
grar = []

alpha = angulo[0]
for i in range(N):
    x = random.rand()
    y = random.rand()
    def electron(beta):
        if x < 0.5:
            return sin(beta)
        else:
            return cos(beta)
    se = electron(0)
    def proton(alpha):
        if y < 0.5:
            return cos(alpha)
        else:
            return sin(alpha)
    sp = proton(alpha)
    def electron2(se):
        return (se*se)
    se2= electron2(se)
    def proton2(sp):
        return (sp*sp)
    sp2= proton2(sp)

    def producto(se,sp):
        return ((se*sp))
    s= producto(se,sp)
    Pse.append(se)
    Psp.append(sp)
    Pse2.append(se2)
    Psp2.append(sp2)
    Ps.append(s)
sse=sum(Pse)
ssp=sum(Psp)
sse2=sum(Pse2)
```

```
ssp2=sum(Psp2)
ss=sum(Ps)
elec = sse/N
prot = ssp/N
prod = ss/N
elec2 = sse2/N
prot2 = ssp2/N
def correlacion(e,p,e2,p2,s):
    return (s - (e*p)) / ((e2*p2)**0.5)
E = correlacion(elec,prot,elec2,prot2,prod)
grar.append(E)
print gra
```

## Anexo E

### Código: listas de la correlación ortodoxa

```
from visual import *
from visual.controls import *
from random import random *
pi= 3.141592654
alp= 2*pi
dalp= pi/6
Pse=[]
Psp=[]
Pse2=[]
Psp2=[]
Ps=[]
N = 100
angulo =[0, pi/6,pi/3,pi/2,2*pi/3,5*pi/6,pi,7*pi/6,4*pi/3,
          3*pi/2,5*pi/3,11*pi/6,2*pi]
print angulo
gra = []

alpha = angulo[0]
for i in range(N):
    x = random.rand()
    def electron(beta):
        if x < 0.5:
            return (-cos (beta) + sin(beta))
        else:
            return (cos (beta) + sin(beta))
    se = electron(0)
    def proton(alpha):
        if x < 0.5:
            return (cos (alpha) + sin(alpha))
        else:
            return (-cos (alpha) + sin(alpha))
    sp = proton(alpha)
    def electron2(se):
        return (se*se)
    se2= electron2(se)
    def proton2(sp):
        return (sp*sp)
    sp2= proton2(sp)
    def producto(se ,sp):
        return ((se*sp))
    s= producto(se ,sp)
    Pse.append(se)
    Psp.append(sp)
    Pse2.append(se2)
    Psp2.append(sp2)
    Ps.append(s)
sse=sum(Pse)
ssp=sum(Psp)
sse2=sum(Pse2)
ssp2=sum(Psp2)
```

```
ss=sum(Ps)
elec = sse/N
prot = ssp/N
prod = ss/N
elec2 = sse2/N
prot2 = ssp2/N
def correlacion(e,p,e2,p2,s):
    return (s - (e*p)) / ((e2*p2)**0.5)
E = correlacion(elec,prot,elec2,prot2,prod)
gra.append(E)
print gra
```

## Anexo F

### Código: Simulación EPR-Bohm

```
from __future__ import division, print_function
from visual import *
from visual.graph import *
import matplotlib.pyplot as plt
from visual.controls import *
import wx
from tabulate import tabulate
from visual.text import *
import visual as vs

L = 500
Hgraph = 100

w = window(width=2*(L+window.dwidth),
           height=L+window.dheight+window.menuheight+Hgraph,
           menus=True, title='Simulación',
           style=wx.SYSTEMMENU | wx.CAPTION | wx.CLOSE_BOX)

d = 20
disp = display(window=w, x=d, y=d, width=L+d*20, height=L,
              forward=-vector(0,1,2))

p = w.panel
def listacorre(evt):
    print(tabulate(Lista1, headers='firstrow', tablefmt='fancy_grid'))
an = angulo
co = lista teorica
]
def grafica(evt):
    plt.plot(angulo, gra, 'ro', an, co, 'b', angulo, gra, 'r')
    plt.style.use('ggplot')
    plt.legend(('Experimental', 'Teorica'), loc = 'upper_left')
    plt.axis([0,7,-1.05,1.1])
    plt.title('CORRELACION_ORTODOXA', fontsize=20)
    plt.xlabel(r"$Angulo$", color = 'black', fontsize = 14)
    plt.ylabel(r"$Correlacion$", color = 'black', fontsize = 14)
    plt.grid(True)
    plt.grid(color = '0.5', linestyle=':', linewidth=1)
    plt.show()

grf = wx.Button(p, label='Gráfica', pos=(630,550))
grf.Bind(wx.EVT_BUTTON, grafica)

gr = wx.Button(p, label='listas', pos=(630,585))
gr.Bind(wx.EVT_BUTTON, listacorre)

clr = vs.color
def axes( frame, colour, sz, posn ):
    directions = [vs.vector(sz,0,0), vs.vector(0,sz,0), vs.vector(0,0,
```

```

        sz)]
texts = ["X", "Z", "Y"]
posn = vs.vector(posn)
for i in range(3):
    vs.curve( frame = frame, color = colour,
              pos= [ posn, posn+directions[i]])
    vs.label( frame = frame, color = colour, text = texts[i],
              pos = posn+ directions[i], opacity = 0, box = False )

axes( None, clr.white, 10, (-60,30,0))

suelo= box(pos=(1,-40,10), size=(180,1,50), color=color.orange,
           material=materials.wood)
tapa= box(pos=(0,-10,-14), size=(180,60,1), color=color.orange,
          material=materials.wood)

imanNa=box(pos=(47,-15,10), size = (5,27,25), material=materials.silver)
imanSa=box(pos=(47,-15,10), size = (5.5,22,25.5), color=color.orange,
           material=materials.blazed)
imanNb=box(pos=(-47,-15,10), size = (5,27,25), material=materials.silver)
imanSb=box(pos=(-47,-15,10), size = (5.5,22,25.5), color=color.orange,
           material=materials.blazed)
m= label( text="Detector B", xoffset=10, yoffset=20, pos=(47,-6,6),
          opacity=0.5)
n= label( text="Fuente", xoffset=10, yoffset=20, pos=(0,-15,10),
          opacity=0.5)
l= label( text="Detector A", xoffset=10, yoffset=20, pos=(-47,-6,6),
          opacity=0.5)
Natoms = 20 #numero de particulas en decaimiento
for i in range(Natoms):
    canon = cylinder(pos=(-3,-15,i), axis=(6,0,0), radius=1)
    canon1 = box(pos=(0,-15,i), size=(5,2,5), color=color.green,
                 material=materials.rough)

def rot0(evt):

    #CODIGO DE LA INTERPRETACIÓN DESEADA

ini = wx.Button(p, label='Inicio 0°', pos=(100,550))
ini.Bind(wx.EVT_BUTTON, rot0)

def rot30(evt):

    #CODIGO DE LA INTERPRETACIÓN DESEADA

rotate = wx.Button(p, label='Rotar 30°', pos=(200,550))
rotate.Bind(wx.EVT_BUTTON, rot30)

def rot60(evt):

    #CODIGO DE LA INTERPRETACIÓN DESEADA

rotate = wx.Button(p, label='Rotar 60°', pos=(200,550))
rotate.Bind(wx.EVT_BUTTON, rot60)

```

```
def rot90(evt):  
    #CODIGO DE LA INTERPRETACIÓN DESEADA  
    rotate = wx.Button(p, label='Rotar 90°', pos=(200,550))  
    rotate.Bind(wx.EVT_BUTTON, rot90)  
  
    def restart_program(evt):  
        exit()  
  
    final = wx.Button(p, label='Salir', pos=(750,585))  
    final.Bind(wx.EVT_BUTTON, restart_program)
```