

## Memes asociados a la aritmética y el álgebra

Luis Fernando Bohórquez Lesmes

Universidad Pedagógica Nacional

### Nota del Autor

Luis Bohórquez, Departamento de Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional – Bogotá.

Este trabajo fue realizado con asesoría de la profesora Lyda Constanza Mora Mendieta del departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Cualquier mensaje con respecto a este trabajo debe ser enviado al departamento de matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

[E-mail: lbohorquezl@upn.edu.co](mailto:lbohorquezl@upn.edu.co)

## TABLA DE CONTENIDOS

<b>1.</b>	<b>RESUMEN .....</b>	<b>6</b>
<b>2.</b>	<b>INTRODUCCIÓN .....</b>	<b>7</b>
<b>3.</b>	<b>OBJETIVOS .....</b>	<b>9</b>
<b>3.1</b>	<b>Objetivo general .....</b>	<b>9</b>
<b>3.2</b>	<b>Objetivos específicos .....</b>	<b>9</b>
<b>4.</b>	<b>JUSTIFICACIÓN.....</b>	<b>10</b>
<b>5.</b>	<b>ANTECEDENTES DEL USO DE LOS MEMES EN MATEMÁTICAS .....</b>	<b>13</b>
<b>6.</b>	<b>MARCO REFERENCIAL.....</b>	<b>19</b>
<b>6.1</b>	<b>El meme.....</b>	<b>19</b>
<b>6.1.1</b>	<i><b>Génesis.....</b></i>	<b>19</b>
<b>6.1.2</b>	<i><b>Definición .....</b></i>	<b>20</b>
<b>6.1.3</b>	<i><b>Características.....</b></i>	<b>22</b>
<b>6.1.4</b>	<i><b>Tipología según características .....</b></i>	<b>22</b>
<b>6.1.5</b>	<i><b>Tipología según diseño .....</b></i>	<b>24</b>
<b>6.1.6</b>	<i><b>Elementos por considerar para la creación de memes .....</b></i>	<b>27</b>
<b>6.2</b>	<b>Errores.....</b>	<b>30</b>
<b>6.2.1</b>	<i><b>Tipos de errores .....</b></i>	<b>33</b>
<b>6.2.2</b>	<i><b>Tipificación de errores en aritmética y álgebra .....</b></i>	<b>36</b>
<b>6.3</b>	<b>Objetos aritméticos y algebraicos en secundaria y media .....</b>	<b>43</b>
<b>6.4</b>	<b>Relación entre errores en aritmética y álgebra con los objetos matemáticos enseñados en secundaria y media .....</b>	<b>44</b>
<b>6.4.1</b>	<i><b>Sistema de números racionales .....</b></i>	<b>45</b>
<b>6.4.2</b>	<i><b>Sistemas de números enteros.....</b></i>	<b>59</b>
<b>6.4.3</b>	<i><b>Proporcionalidad directa o inversa .....</b></i>	<b>66</b>
<b>6.4.4</b>	<i><b>Variación (relación de diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas) ..</b></i>	<b>69</b>
<b>7.</b>	<b>METODOLOGÍA.....</b>	<b>78</b>
<b>7.1</b>	<b>Fase I. Investigación de memes (elaboración, características) y errores en aritmética y álgebra .....</b>	<b>79</b>
<b>7.2</b>	<b>Fase II. Acopio de objetos en aritmética y álgebra para la educación secundaria en Colombia .....</b>	<b>80</b>

7.3	Fase III. Exploración de errores frecuentes relacionado con los objetos matemáticos seleccionados .....	80
7.4	Fase IV. Selección de errores para elaboración de los memes .....	86
7.5	Fase V. Selección de plantilla para elaboración de los memes .....	86
7.6	Fase VI. Versión definitiva de los memes .....	89
8.	LOS MEMES DISEÑADOS .....	90
9.	CONCLUSIONES .....	120
10.	REFERENCIAS .....	124
11.	ANEXOS .....	136

## FIGURAS

Figura 1	Meme para clase de matemáticas .....	15
Figura 2	Imagen ilustrativa de lo que no es un meme .....	21
Figura 3	Meme ilustrativo de tipo imagen .....	24
Figura 4	Meme ilustrativo de tipo ilustración .....	24
Figura 5	Meme ilustrativo de tipo caras .....	25
Figura 6	Meme ilustrativo de tipo GIF .....	25
Figura 7	Meme ilustrativo de tipo video .....	26
Figura 8	Imagen ilustrativa de un meme con sus características .....	27
Figura 9	Plantilla Drake .....	28
Figura 10	Plantilla meme te he fallado .....	29
Figura 11	Diagrama origen de errores .....	36
Figura 12	Diagrama origen de errores segunda versión .....	43
Figura 13	Ejemplo de error en representación gráfica de fracciones .....	46
Figura 14	Ejemplo de error en recta numérica de números racionales .....	46
Figura 15	Ejemplo de error en recta numérica de números racionales (fraccionarios como enteros) .....	47
Figura 16	Error de representación de porcentaje .....	49
Figura 17	Error de relación de orden en decimales .....	54
Figura 18	Error de relación de orden de fracciones .....	54
Figura 19	Ejercicio de represenación en la recta de números negativos .....	65
Figura 20	Respuesta de ejercicio propuesto en la figura 19 .....	65

<b>Figura 21 Solución errónea de ejemplo 1 proporción .....</b>	<b>67</b>
<b>Figura 22 Solución errónea de ejemplo 2 proporción .....</b>	<b>67</b>
<b>Figura 23 Solución errónea 1 de ejemplo 3 proporción .....</b>	<b>68</b>
<b>Figura 24 Solución errónea 2 de ejemplo 3 proporción .....</b>	<b>68</b>
<b>Figura 25 Gráfica de ítem b .....</b>	<b>70</b>
<b>Figura 26 Plantilla descartada 1 .....</b>	<b>87</b>
<b>Figura 27 Plantilla descartada 2 .....</b>	<b>87</b>
<b>Figura 28 Plantilla seleccionada 1 .....</b>	<b>88</b>
<b>Figura 29 Plantilla seleccionada 2 .....</b>	<b>88</b>
<b>Figura 30 Meme 1. Aproximación de números racionales .....</b>	<b>90</b>
<b>Figura 31 Meme 2. Comparación de números decimales .....</b>	<b>91</b>
<b>Figura 32 Meme 3. Porcentaje mal calculado .....</b>	<b>91</b>
<b>Figura 33 Meme 4. Operaciones de fracciones incorrectas.....</b>	<b>92</b>
<b>Figura 34 Meme 5. Lenguaje inapropiado con números decimales .....</b>	<b>93</b>
<b>Figura 35 Meme 6. Comparación de números decimales .....</b>	<b>93</b>
<b>Figura 36 Meme 7. Equivalencia de fracciones.....</b>	<b>94</b>
<b>Figura 37 Meme 8. Orden en los números racionales .....</b>	<b>95</b>
<b>Figura 38 Meme 9. Simplificación de fracciones.....</b>	<b>96</b>
<b>Figura 39 Meme 10. Propiedad conmutativa en resta con números decimales .....</b>	<b>96</b>
<b>Figura 40 Meme 11. Despeje de un número negativo .....</b>	<b>97</b>
<b>Figura 41 Meme 12. Distribución en ecuaciones con fracciones .....</b>	<b>98</b>
<b>Figura 42 Meme 13. Exponentes negativos en representaciones polinomiales .....</b>	<b>99</b>
<b>Figura 43 Meme 14. Comparación de números enteros.....</b>	<b>100</b>
<b>Figura 44 Meme 15. Exponentes negativos.....</b>	<b>101</b>
<b>Figura 45 Meme 16. Incógnita con variables diferentes.....</b>	<b>102</b>
<b>Figura 46 Meme 17. Representación de centésimas.....</b>	<b>102</b>
<b>Figura 47 Meme 18. Combinación de algoritmos en operaciones con fracciones.....</b>	<b>103</b>
<b>Figura 48 Meme 19. Existencia de un número entre números decimales.....</b>	<b>104</b>
<b>Figura 49 Meme 20. Exponentes negativos en el sistema de números racionales.....</b>	<b>105</b>
<b>Figura 50 Meme 21. Aplicación de la ley de los signos .....</b>	<b>105</b>
<b>Figura 51 Meme 22. Aplicación de regla de tres directa .....</b>	<b>106</b>

<b>Figura 52 Meme 23. Representación gráfica de <math>\frac{2}{4}</math> .....</b>	<b>107</b>
<b>Figura 53 Meme 24. Despeje de ecuaciones.....</b>	<b>108</b>
<b>Figura 54 Meme 25. Representación gráfica sin variación .....</b>	<b>108</b>

## **TABLAS**

<b>Tabla 1 Clasificación de los memes según su taxonomía .....</b>	<b>22</b>
<b>Tabla 2 Ejemplo de errores generados por obstáculos .....</b>	<b>38</b>
<b>Tabla 3 Errores originados por ausencia de sentido .....</b>	<b>40</b>
<b>Tabla 4 Errores con origen en las actitudes afectivas y emocionales .....</b>	<b>42</b>
<b>Tabla 5 Objetos matemáticos de álgebra y aritmética.....</b>	<b>43</b>
<b>Tabla 6 Errores en operaciones con fracciones .....</b>	<b>51</b>
<b>Tabla 7 Errores comunes en la solución de ecuaciones lineales.....</b>	<b>75</b>
<b>Tabla 8 Recopilación de errores.....</b>	<b>81</b>
<b>Tabla 9 Recopilación de memes con su respectivo error .....</b>	<b>109</b>

## 1. RESUMEN

Este trabajo tiene como objetivo diseñar memes educativos para las áreas de álgebra y aritmética enfocados a grados sexto y séptimo en Colombia, con el fin de ayudar a identificar, prevenir y corregir errores comunes en estas asignaturas. Para ello, se realizó una revisión bibliográfica sobre los memes y su uso en el aula de clase y los tipos de errores matemáticos propuestos por Socas (1997), seguida de un análisis de los lineamientos curriculares colombianos para identificar los objetos aritméticos y algebraicos en los grados mencionados. A partir de esto se consultaron numerosas investigaciones relacionadas con errores referidos a estos objetos. Los resultados evidencian los errores más frecuentes en operaciones básicas y resolución de ecuaciones, clasificándolos según su origen conceptual, epistemológico, didáctico, procedimental o actitudinal. A partir de esto, se crearon memes, los cuales están enfocados en situaciones cotidianas de aprendizaje, para facilitar la discusión de errores en el aula. La principal contribución de este trabajo es ofrecer un recurso innovador, para los docentes de matemáticas, que combina la cultura digital con estrategias pedagógicas, permitiendo a los profesores abordar dificultades matemáticas de manera dinámica y cercana a los intereses de los estudiantes. Este trabajo resalta el potencial de los memes como herramientas educativas, especialmente para promover la participación y el aprendizaje de las matemáticas.

*Palabras clave:* meme, errores, álgebra, aritmética.

## 2. INTRODUCCIÓN

La enseñanza de las matemáticas enfrenta desafíos pedagógicos significativos en la educación secundaria, particularmente en el abordaje de errores conceptuales y procedimentales que persisten en estudiantes. En Colombia, esta problemática se agudiza por el desinterés que genera la asignatura en el aula y la falta de estrategias didácticas innovadoras que conecten con las dinámicas digitales de los jóvenes (Balda, 2019). Ante este escenario, se propone la creación de memes como herramienta didáctica para identificar, reflexionar y prevenir errores comunes en álgebra y aritmética, aprovechando su potencial lúdico, crítico y cercano al lenguaje visual de las nuevas generaciones.

Desde el enfoque metodológico, se empleó un análisis de contenido de fuentes académicas (artículos de investigación, informes y trabajos de grado) para identificar los errores recurrentes en los objetos matemáticos de los grados escolares mencionados correspondientes a la aritmética y el álgebra, seguido del diseño de memes que integran dichas problemáticas.

Los memes están dirigidos a estudiantes de sexto y séptimo grado en Colombia y a docentes de matemáticas, quienes podrían evaluar su pertinencia como recurso didáctico adaptable a las fases preinstruccional (activación de conocimientos previos), posinstruccional (ejemplificación de conceptos) y evaluativa de la enseñanza (Balda, 2021). Los hallazgos preliminares sugieren que esta estrategia no solo mitiga el rechazo hacia la asignatura, sino que también fomenta la identificación crítica de errores, alineándose con los objetivos de la educación matemática que prioriza la comprensión profunda sobre la repetición mecánica.

Este documento se estructura en cuatro capítulos centrales. En primer lugar, se presentan los antecedentes, en los que se observan las investigaciones previas y los usos de los memes

como estrategia pedagógica en el aula de clase. En segundo lugar, se desarrolla el marco referencial, en el cual se definen los memes y sus características, se explican los errores en matemáticas y su clasificación, y se introducen los objetos matemáticos, también, se enlistan los errores cometidos por los estudiantes según el contenido curricular de los grados sexto y séptimo. En tercer lugar, se describe la metodología, en la que se detalla el paso a paso para la construcción de los memes. Finalmente, se ofrecen las conclusiones y proyecciones derivadas de este trabajo.

A través de este recorrido, se busca contribuir a la discusión sobre innovación educativa en matemáticas, demostrando que los recursos digitales, como los memes, pueden ser puentes efectivos entre el rigor académico y las prácticas culturales de los estudiantes.

### 3. OBJETIVOS

#### 3.1 Objetivo general

Diseñar memes alusivos a los errores en álgebra y la aritmética para estudiantes del primer ciclo de la educación secundaria con el fin de que puedan ser utilizados en la enseñanza y el aprendizaje de estas dos ramas de las matemáticas mediante una herramienta didáctica visual.

#### 3.2 Objetivos específicos

- 3.2.1 Estudiar algunos resultados de la implementación de estrategias basadas en memes para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, para comprender su impacto en el aula, mediante la revisión de artículos académicos, trabajos de investigación y otras fuentes de información especializadas.
- 3.2.2 Identificar errores comunes en aritmética y álgebra, para fundamentar la creación de memes didácticos, mediante la investigación documental y la recopilación de ejemplos que ilustren dichos errores.
- 3.2.3 Elegir plantillas de memes apropiadas, con el fin de representar visualmente los errores matemáticos de manera efectiva, mediante la correlación entre las características del error identificado y las particularidades comunicativas de cada plantilla.

#### 4. JUSTIFICACIÓN

Las herramientas de comunicación y la globalización han permitido que los seres humanos creen alternativas para estar siempre conectados en torno a una comunidad virtual, las redes sociales; dicha herramienta comunicativa comparte y dirige miles de gráficos y mensajes instantáneamente; algunos de ellos llamados «memes».

Actualmente, los memes se utilizan como fuentes de entretenimiento, pero si tuviéramos la posibilidad de educar por medio de ellos ¿lo podríamos hacer? Muy poco se ha hablado del meme en el aula, debido a que, como lo menciona Ramos (2020), este es un medio que tiene como intención el humor, mas no la educación, esto sesga el uso que se le puede dar a esta herramienta; sin embargo, Alzate (2018) afirma que países como Estados Unidos, Brasil, México, Colombia y Chile han realizado estudios relacionados con el meme como estrategia didáctica. El trabajo de Jacqueline Bustamante, realizado en el contexto de una tarea de literatura y reseñado por BBC News Mundo (2016), referente al meme y la evaluación, en el cual el uso de los memes tuvo como finalidad representar varios hechos relevantes de una de las obras más importantes escrita por Gabriel García Márquez, Cien años de soledad.

Esta herramienta, los memes, puede brindar un aprendizaje significativo<sup>1</sup> en el aula, debido a que son los jóvenes quienes tienen más contacto con las redes sociales, son ellos quienes distinguen cada característica del meme, entienden su contexto y disfrutan el contenido de este, entonces ¿por qué no usar este medio en clases como Aritmética o Álgebra? O ¿podrían usarse

---

<sup>1</sup> Ausubel (como se citó en Cañaveral, Nieto & Vaca, 2020) describe el aprendizaje significativo de la siguiente manera:

La esencia del proceso del aprendizaje significativo es que nuevas ideas expresadas de forma simbólica (la tarea de aprendizaje) se relacionan de manera no arbitraria y no literal con aquello que ya sabe el estudiante (su estructura cognitiva en relación con un campo particular) y que el producto de esta interacción activa e integradora es la aparición de un nuevo significado que refleja la naturaleza sustancial y denotativa de este proceso interactivo. (p. 19).

los memes para incentivar a los estudiantes en el proceso de aprendizaje de la Aritmética o Álgebra? O ¿podrían servir los memes para poner en evidencia o corregir errores típicos de los estudiantes<sup>2</sup>? Estas preguntas no podrán ser respondidas si no se cuenta con los memes que se refieran a las matemáticas que se pretenden enseñar, por esta razón lo primero que se requiere son los memes que puedan ser usados para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Debido al nivel en el que se desarrollará este trabajo de grado lo pertinente será acotar las matemáticas que estarán plasmadas en las imágenes, de tal manera que los memes se centren en objetos propios de la Aritmética y el Álgebra, específicamente en errores que hayan sido identificados en investigaciones previas, o conceptos y generalidades que se puedan mostrar mediante el uso de esta herramienta para dichas asignaturas.

Guadarrama et al. (2017), en su artículo *El uso de los memes como estrategia didáctica aplicada en las matemáticas*, hacen una reflexión y comentan sus experiencias en cuanto al uso de los memes junto con la Geometría Analítica, los resultados son bastante gratos ya que afirman que la idea de implementar este tipo de herramientas hace que los estudiantes se motiven en la clase, que sean partícipes en la misma y que algunas características de los conceptos sean más claras. Otro caso es el presentado por Balda (2019) quien, en las conclusiones de un trabajo de investigación, afirma que los estudiantes a quienes presentó este medio para transmitir sus conocimientos de Trigonometría y Geometría mostraron un interés por dichas actividades y comprendieron conceptos al tiempo que desarrollaban procesos comunicativos en el aula.

Son los resultados de dichos proyectos los que me motivan a la realización de este trabajo de grado, diseñar una herramienta, que para muchos es sinónimo de entretenimiento y ocio, la

---

<sup>2</sup> Tales como:  $(a + b)^2 = a^2 + b^2$  o  $-4 - 3 = 7$  o  $a^0 = 0$ , por mencionar algunos.

cual incentive a los estudiantes en el aprendizaje, y que el meme sea un instrumento visual que ayude a evidenciar y corregir errores en cuanto al Álgebra y la Aritmética. Es importante dejar de lado los prejuicios que se tienen ante el meme, como lo pueden ser el que este medio simplemente está diseñado para divertir a su lector y que por ende no podría ser de utilidad en un contexto educativo, más bien, vale pensar en este medio como una estrategia para la educación, para incentivar a los estudiantes, que haciendo uso del meme se logre comunicar información nueva o poner en evidencia errores que cometen los estudiantes y así, generar conciencia de dichos errores, tal como lo afirma Balda (2019): "... la experiencia ha permitido resignificar el uso de recursos tecnológicos al darle un uso pedagógico a medios comunicativos que en muchas ocasiones se trivializan y se desconocen como herramientas didácticas potentes" (p. 40).

Sumado a lo anterior, pocos proyectos se han realizado en la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia con este enfoque. El trabajo de Montero (2021) es el único que asocia memes y matemáticas, en el cual se enfatiza en el análisis de los memes para indagar sobre el pensamiento crítico en estudiantes de pregrado. Por lo mencionado, se decide realizar este trabajo de grado haciendo uso de este medio visual, los memes, como posible herramienta para el desarrollo de las clases de matemáticas, en esta ocasión, dirigidos a estudiantes de secundaria y abordando específicamente asuntos de aritmética y álgebra, basados en contenido producto de la investigación en Educación Matemática, buscando que sean llamativos y que posean las características propias del meme sin dejar de lado el rigor matemático y lingüístico.

## 5. ANTECEDENTES DEL USO DE LOS MEMES EN MATEMÁTICAS

Se han creado numerosos recursos para el aula con el objetivo de captar la atención de los estudiantes, fomentar su conexión con las clases y despertar su interés por el aprendizaje. Uno de esos recursos es el meme. Los memes están implantados en la cultura actual ya que inundan las redes sociales; su jocosidad, contexto y simpleza los convierten en una herramienta perfecta para enseñar de una manera diferente, enseñar con humor.

Como lo menciona Zúñiga (2021), en las memorias del XII Festival Internacional de Matemáticas y el XXII Congreso Nacional de Ciencia, Tecnología y Sociedad, “La educación es un proceso que no concluye, invita a los participantes a estar en una constante renovación de conocimiento” (p. 38). En otras palabras, el proceso de educar debe incitar a los docentes, y todo aquel que esté comprometido con enseñar, a innovar cómo se enseña, a incentivar la motivación, a buscar otros métodos para enseñar, buscando o generando herramientas (como lo puede ser el meme) en pro de estos objetivos. El autor afirma que el uso de memes en el aula puede tener beneficios en la enseñanza y el aprendizaje, esto es gracias a las características propias del meme, según Zúñiga (2021):

El humor como medio de comunicación permite generar conexiones neuronales fuertes y realizar, en forma implícita, procesos de cuestionamiento de conocimiento al entender o no entender el meme, es este recurso una de las formas más atractivas para llegar a la metacognición. (p. 41)

Una de las referentes en cuanto al uso de memes en el aula para la enseñanza es la doctora Paola Balda, quien ha sido pionera en hacer uso de este medio en la educación matemática en Colombia. En un artículo publicado en la Revista de Didáctica de las Matemáticas, en 2019,

Balda presenta su experiencia como profesora al trabajar con estos medios visuales en los grados décimo y undécimo en una institución pública. Los resultados promueven el uso de los memes en el aula, según Balda (2019), “Dada la facilidad de transmisión de estos recursos, éstos han ingresado a las aulas de clase convirtiéndose en estrategias pedagógicas que favorecen el aprendizaje” (p. 33). El uso de este medio despertó el interés por la clase de matemáticas en los jóvenes, pues el hecho de enseñar con humor generó gran expectativa entre ellos, esto se evidencia en uno de los comentarios de un estudiante, expuesto en el documento: “me gusta hacer las caricaturas porque me gusta dibujar y pues así le enseño lo que aprendo de forma chistosa a mis amigos” (Balda, 2019, p. 40). A su vez, en el escrito se comenta que gracias a que los mismos estudiantes crearon los memes desarrollaron habilidades comunicativas “estos recursos visuales y digitales al ser un medio jocoso de información han sido un recurso que permite para extender la educación a escenarios más allá del aula” (Balda, 2019, p. 34).

En otro artículo publicado por la Revista Investigación e Innovación en Matemática Educativa en el año 2021, la profesora Balda, a raíz de su experiencia con la creación de memes en el aula, declara que el humor y las matemáticas van de la mano, tal como lo menciona Flores (2003, como se cita en Balda, 2021):

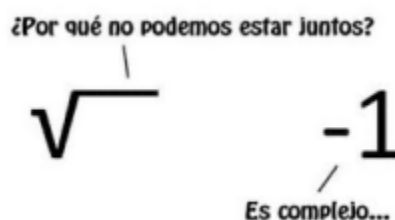
1. El humor manifiesta la sociedad
2. En la sociedad existen matemáticas
3. Las matemáticas aparecen en el humor
4. Podemos reírnos con las matemáticas
5. Podemos hacer matemáticas riendo

6. La enseñanza es una actividad social (pp. 3-4).

También Balda (2021) llama la atención no solo sobre el humor en la clase de matemáticas posibilitado por los memes, sino que también fomenta la comunicación sobre las matemáticas. La profesora expone un caso en el que se genera la discusión a partir de una de las imágenes tomadas para la sesión. La imagen es la siguiente:

### Figura 1

*Meme para clase de matemáticas*



*Nota.* La imagen es un ejemplo de los memes usados por la profesora Balda en su clase. Fuente: Revista Investigación e Innovación en Matemática Educativa en el año (2021).

### Anexo A

*Plantillas con su respectivo significado*

Algunas preguntas que se dan en torno a esta imagen son: “¿Por qué crees que el  $-1$  no puede estar junto a la raíz?” o, “si ingresa a la calculadora la expresión mostrada en la imagen, ¿qué aparece?”, la maestra indica que las respuestas de los estudiantes ante tal situación fomentan la discusión en el aula.

A su vez, Balda (2021) afirma que este medio de divulgación puede ser tan eficaz y potente en el aula ya sea para iniciar un tema (preinstruccional), para reforzar un tema ya visto (posinstruccional) o como herramienta evaluativa. Esto último lo ratifica Zúñiga (2021), pues él asegura que el meme puede tomarse como un recurso evaluativo, pudiendo ser usado en tres rutas

de evaluación: el meme como evaluador diagnóstico, como evaluador sumativo y como evaluador formativo.

Otra razón de hacer uso de los memes en el aula está plasmada en el proyecto de Giulia & Ornella (2019) titulado *Meanings in Mathematics: using Internet Memes and Augmented Reality to promote mathematical discourse* del año 2019, en el cual se buscó fomentar el uso de los memes en el aula. Los autores hacen alusión a cómo una imagen fomenta el discurso matemático, esto es gracias a que el enfoque de estos memes no solo es transmitir la información, sino también que dicha información sea el foco central de discusión en la que los estudiantes argumenten por qué el meme tiene sentido, matemáticamente hablando. Los autores concluyen que el meme como herramienta de clase puede ser muy significativo ya que puede potenciar la metaconciencia<sup>3</sup> cognitiva del estudiante, ser usado como método de evaluación de conceptos previamente trabajados y porque tiene el potencial de expansión, atraviesa el entorno escolar y difundirse por la web, convirtiéndose en un “meme viral” (Giulia & Ornella, 2019).

Por último, en un artículo publicado por Guadarrama, Mendoza et al. (2021) en la revista *Cultura Digital y Desarrollo Humano*, llamado: *El uso de los memes como estrategia didáctica aplicada en las matemáticas*, los autores reivindican el uso de los memes en el aula como un medio novedoso e ingenioso de enseñar matemáticas. Manifiestan que debido a que el meme no necesita una explicación profunda, pues detrás de este hay un contexto en el cual; la mayoría de los estudiantes; están inmersos, se puede aprender o reforzar conocimientos. Es por ello que deciden enseñar Geometría Analítica haciendo uso de este medio. Este artículo expresa cuáles fueron las dificultades, los resultados y ejemplifica algunos de los memes usados en la clase. Los resultados

---

<sup>3</sup> Como lo expresa Igoa (2003), “La metaconciencia es la instancia que hace efectiva la toma de conciencia y la organización deliberada de la experiencia y, por tanto, el candidato idóneo para tomar a su cargo las tareas de control del sistema cognitivo”

de dicho experimento son alentadores, uno de ellos fue cambiar el enfoque del uso de las redes sociales a uno más didáctico y educativo que puede despertar interés en el aprendizaje de los estudiantes, a su vez, que la comunicación entre profesor y alumnos es más amena. Guadarrama, Mendoza et al. (2021) exponen algunas de las respuestas obtenidas por los estudiantes reflejando el gusto que generó trabajar con los memes. Algunos de los comentarios referenciados son:

1. ... gracias a la combinación de estas dos [los memes y la geometría analítica] siento una gran conexión porque le encuentro un sentido peculiar a las ciencias exactas y aunque parezca erróneo lo hago porque de cierta manera es una buena forma de desarrollarme en esta materia. (Guadarrama, Mendoza et al., 2021, p. 24)
2. “... mis compañeros y algunos de mis amigos los vemos [los memes] y hasta dan risa porque a veces no entendemos y entre nosotros nos explicamos” (p. 24).

Cada uno de los proyectos mencionados muestran que el uso del meme en el aula aporta beneficios en cuanto al aprendizaje por parte de los estudiantes. En aspectos generales, el meme es una herramienta que ha mostrado el aporte en:

1. La motivación a los estudiantes a querer aprender matemáticas
2. El fortalecimiento del vínculo profesor-estudiante
3. Potenciar la comunicación acerca de las matemáticas, es decir, el fomento de la discusión en el aula

Es evidente que experiencias como las expuestas, conclusiones y comentarios por parte de los docentes y estudiantes reafirman una vez más que los memes pueden contribuir al aprendizaje de las matemáticas en el aula, debido a que son un medio de difusión simple y divertido, que

despierta el interés en los estudiantes, quienes obtienen una respuesta positiva ante esta herramienta. A su vez, fomentan la discusión y su uso en aula se puede dar en uno o varios momentos de la clase.

## 6. MARCO REFERENCIAL

En este marco referencial se abordarán algunos aspectos claves: el meme, se estudiarán sus orígenes, su clasificación y tipología; los errores más comunes en aritmética y álgebra; y los objetos matemáticos tratados en aritmética y álgebra en la educación básica secundaria y media en el contexto educativo de Colombia. A través de este marco referencial, se busca brindar una base teórica para llevar a cabo el propósito de este trabajo.

### 6.1 El meme

#### 6.1.1 Génesis

Los memes se han convertido en una herramienta de divulgación, en las cuales se suele hacer mofa a diferentes aspectos cotidianos, a cuestiones políticas, deportivas, educativas, y de las mismas ciencias, entre ellas, las matemáticas.

La palabra meme tiene su origen en el libro *The Selfish Gene*, en este, se define la palabra meme como “la unidad mínima de información que se transmite, siendo un medio de divulgación eficaz, el cual, después de múltiples procesos se reconoce fácilmente” (Dawkins, 1976, p. 210). Esta palabra tiene su origen en el griego “mímeme” que se asocia con la imitación, pero es el mismo Dawkins quien recorta la palabra dejándola solo en meme, relacionándola con la palabra francesa *même*, que significa memoria. Dawkins (1976) dice que, al momento de plantar un meme en la mente de una persona, esta se convierte en un vehículo de propagación del meme gracias a que salta de un cerebro a otro por medio de la imitación, tal como pasa con los genes debido a que Dawkins se arraiga a la idea del meme como un gen, debido a que, para el autor, los genes se propagan de cuerpo a cuerpo mediante espermias u óvulos. Para esta primera postura, el autor considera como meme a cualquier idea que se pueda transmitir o imitar, no solo para los

humanos, también para los animales; Dawkins menciona que los memes pueden ser: una tonada o sonos, ideas, consignas, modas, forma de hacer algunos procesos o accesorios, etc.

Si bien esta palabra tiene un origen bastante singular, es lícito preguntarse sobre ¿Cuál es la relación del meme mencionado por Dawkins y el meme actual? Como se dijo antes, para Dawkins los memes son la información cultural que se transmite, lo que se llama cultura se toma como información o ideas que establecen el comportamiento. De esta manera la idea de meme en la actualidad se sigue caracterizando por centrarse en la trasmisión de una idea o información en la que las propiedades del meme son similares a las de los genes. Para Muñoz (2014) lo que consideramos meme es una subdivisión de lo que Dawkins alguna vez llamó meme, llamándolo meme-contenido o meme de internet. Esta subcategoría de meme se asocia con la adoptada con Dawkins “ya que se encuentra comprendido en la idea de replicación de rasgos culturales a través de información, ideas o conductas que definen nuestro comportamiento” (Muñoz, 2014, p. 18)

### **6.1.2 Definición**

Muñoz (2014) define el meme como una herramienta potente de comunicación capaz de transmitir información de todo tipo con una imagen la cual puede tener poco o nada de texto. Otra definición presentada por Pérez, Guillermo y Aguilar (2014), “... aquello que es llamado meme en internet constituye un objeto expresivo que es ampliamente reconocido (y usado) en comunidades que se construyen en torno a sitios en línea como 4chan, 9GAG y YouTube, entre muchos otros” (p. 84). La Real Academia de Lengua Española (RAE) define al meme como “Imagen, video o texto, por lo general distorsionado con fines caricaturescos, que se difunde principalmente a través de internet” (Real Academia Española, s.f., definición 2). Esta idea de

meme pone de relieve las formas de expresión de un meme (imagen, video o texto), su objetivo (caricaturizar) y su canal de difusión (la red de internet).

No obstante, en esta idea de la RAE no es mencionado un elemento fundamental del meme, y este es el contexto, un lugar común del cual varios internautas tengan conocimiento, una situación en la que algunas personas se puedan identificar o también, conectar con alguna experiencia ya sea personal o no. Si el contexto no existe, el meme se convierte en simplemente una imagen viral.

En la Figura 2 se muestran algunas viñetas que fueron bastante virales cuando el meme empezó a tener acogida; sin embargo, son imágenes carentes de sentido, son solo diferentes rostros que no transmiten una idea, no hacen mofa de alguna situación y no contienen contexto alguno.

## Figura 2

*Imagen ilustrativa de lo que no es un meme*



*Nota.* La figura muestra las primeras imágenes usadas para crear memes. Fuente: <https://www.senalcolombia.tv/series-de-ficcion/el-origen-del-humor-de-los-memes-y-su-evolucion-en-la-red>

Aunque cada uno de los retratos en la Figura 2 hayan sido virales no se puede afirmar que por sí solas son un meme, ninguna contiene algún mensaje a transmitir, por ende, son solo imágenes.

### **6.1.3 Características**

Para comprender la naturaleza de un meme, es crucial conocer sus elementos distintivos. Un meme debe cumplir ciertos requisitos, siendo fundamental la transmisión de una idea que puede o no generar debate. Esta capacidad de comunicar un concepto es inherente a lo que diferencia una imagen catalogada como meme de un simple contenido viral. Los atributos que definen una imagen como meme son detallados por Camas, Valero y Vendrell (2018) y son los siguientes:

1. Fidelidad, para que pueda ser reconocido a pesar de sus cambios y sus procesos de transformación.
2. Fecundidad o que tenga mucha potencia de ser transmitido.
3. Longevidad para que se mantenga en el tiempo.
4. Humor como un elemento integrador entre el contexto, la imagen y cada una de las características mencionadas anteriormente (p. 952).

### **6.1.4 Tipología según características**

Tres de las anteriores características, más otra, el alcance, llevan a una taxonomía de los memes, esto se evidencia en la siguiente tabla, creada por Pérez, Aguilar y Guillermo (2014) basada en Recuero (2007):

**Tabla 1**

*Clasificación de los memes según su taxonomía*

<b>1. Fidelidad</b>
1.1 Replicadores: presentan una reducida variación y una alta fidelidad con respecto al original. Los vínculos compartidos de igual forma en diversos blogs.
1.2 Metafóricos: son memes con altos índices de mutación y recombinación a partir de los procesos de reinterpretación por los que pasan
<b>2. Longevidad</b>
2.1 Persistentes: aquellos que son replicados durante un tiempo considerable
2.2 Volátiles: se trata de memes que tienen poco periodo de propagación.
<b>3. Fecundidad</b>
3.1 Epidémicos: se expanden de manera muy amplia y veloz
3.2 Fecundos: memes con una menor propagación que los epidémicos, presentes de manera bien marginal, en grupos limitados
<b>4. Alcance</b>
4.1 Globales: ampliamente dispersos
4.2 Locales: presentes en un conjunto próximo de nodos.

*Nota.* Este cuadro es una recopilación de la taxonomía de los memes expuesta por Recuero en su artículo titulado: Memes en weblogs: propuesta de una taxonomía. Fuente: Pérez, Aguilar y Guillermo (2014)

Como se puede observar en la tabla anterior, Recuero (2007) no tiene en cuenta la característica “humor” mencionado por Camas, Valero y Vendrell (2018); sin embargo, las otras características se mantienen y se incluye una nueva.

En conclusión, las características del meme son:

1. Fidelidad
2. Fecundidad
3. Longevidad
4. Alcance
5. Humor

### 6.1.5 Tipología según diseño

El meme puede presentarse en varios diseños, esto es gracias a que al ser una herramienta que ya hace parte de la cotidianidad en la red se ha logrado clasificar según su contenido o forma, según Canuto y De la Vara (2021) existen algunos tipos de memes los cuales son:

1. Meme fotografía: fotos o fotogramas con texto. Un ejemplo se muestra en la figura 3.

#### Figura 3

*Meme ilustrativo de tipo imagen*



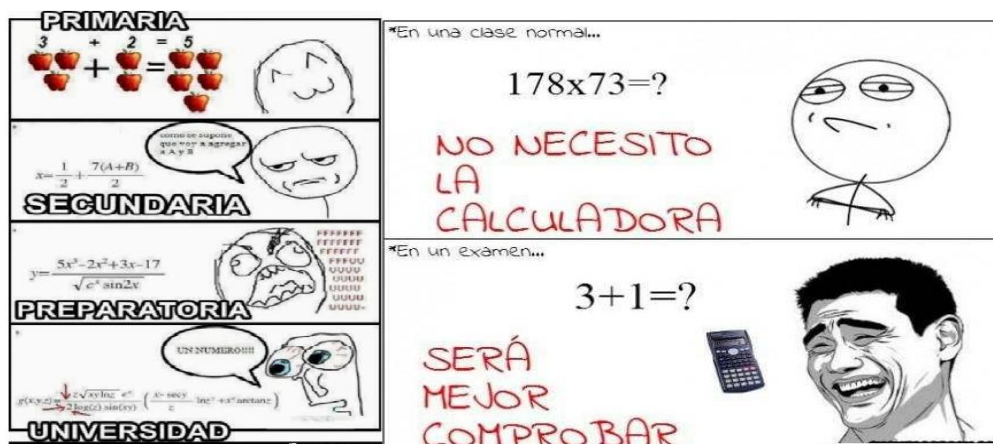
*Nota.* Ambos memes describen lo que es un meme de tipo fotografía, con imagen y texto.

2. Meme ilustración: imágenes creadas con herramientas de dibujo, destaca por ser sencillo.

En la figura 4 se ve un ejemplo.

#### Figura 4

*Meme ilustrativo de tipo ilustración*



3. Meme caras: imágenes de algún rostro expresivo junto a un texto. En la figura 5 hay una muestra.

### Figura 5

Meme ilustrativo de tipo caras



4. Meme GIF: secuencia de imágenes o parte de un video. En la figura 6 se presenta un ejemplo.

### Figura 6

Meme ilustrativo de tipo GIF



*Nota:* Debido a que este documento es estático no es posible ver el *gif*, por lo cual se sugiere dar clic en el enlace citado en la fuente. Fuente: <https://i.chzbgr.com/full/9094509824/hC2061B5F>

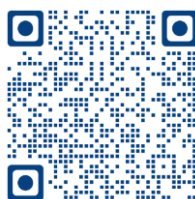
5. Meme video: videos sacados de contexto con textos añadidos. (p. 952). Este se diferencia del meme *gif* por su duración. En la figura 7 se muestra un ejemplo.

### Figura 7

*Meme ilustrativo de tipo video*



*Nota:* Debido a que este documento es estático no es posible ver el video, por lo cual se sugiere dar clic en el enlace citado en la fuente. Fuente.

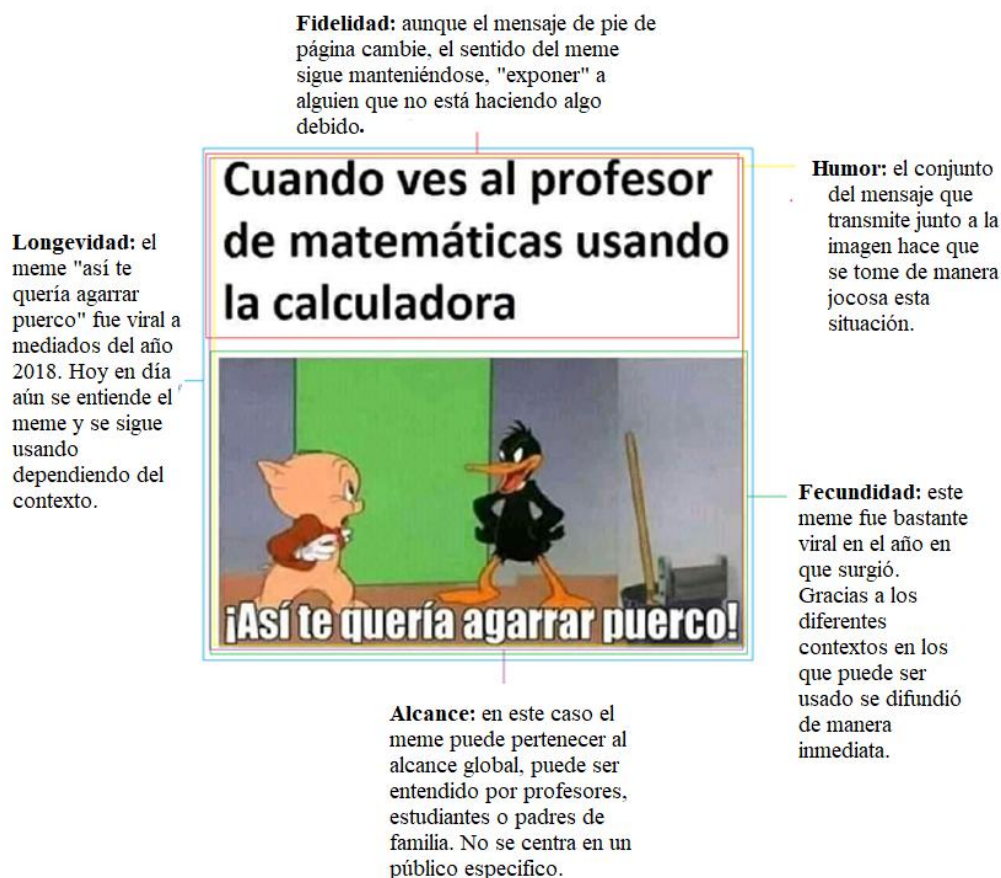


A manera de síntesis, en la siguiente figura se muestra un meme fotografía en el que se identifican cada uno de los elementos que caracterizan dicha imagen como meme, cabe resaltar

que esta imagen ya cuenta con un contexto (situación en la que un estudiante sorprende a su profesor llevando a cabo una actividad que le es prohibida):

## Figura 8

*Imagen ilustrativa de un meme con sus características*



*Nota.* La imagen hace alusión a cada una de las características mencionadas anteriormente. Se seleccionan por color en la imagen para diferenciar cada una de las características del meme.

### 6.1.6 Elementos por considerar para la creación de memes

Por último, existen algunas recomendaciones mínimas mencionadas por Beltrán (2016) para la creación de memes, esto junto a las características mencionadas anteriormente, hace que una imagen logre ser un meme.

Beltrán (2016) sugiere que para crear un meme se deben tener en cuenta los siguientes parámetros:

1. Tener una idea de lo que se quiere transmitir.
2. Elegir una imagen acorde con esa idea.
3. Escribir el texto. Cuanto más corto y directo, mejor.
4. Integrar texto e imagen, cosa que hacen automáticamente las dos herramientas que hemos mencionado antes.
5. Publicar o enviar dicha imagen. (p.130).

Es importante resaltar que para crear un meme se debe tener en cuenta principalmente la idea que se desea comunicar y elegir una imagen acorde a dicha idea. Para ello se usan *plantillas* de memes, las cuales son imágenes que carecen de texto, estas plantillas son muy útiles gracias a que ahorran tiempo en la creación de memes. Hay varias páginas en la red de internet en las cuales se encuentran plantillas gratuitas, como en:

- <https://www.buzzfeed.com/mx/mireyagonzalez/plantillas-memes-en-blanco-templates>
- <https://wepik.com/es/plantillas/memes>
- <https://www.pinterest.cl/SheIsLunatic/plantillas-para-memes/>

Algunos ejemplos de plantillas son:

## **Figura 9**

*Plantilla Drake*



Fuente: <https://www.buzzfeed.com/mx/mireyagonzalez/plantillas-memes-en-blanco-templates>

### Figura 10

*Plantilla meme te he fallado*



Fuente: <https://www.buzzfeed.com/mx/mireyagonzalez/plantillas-memes-en-blanco-templates>

Las ideas expuestas anteriormente resultan valiosas para la creación de los memes producto de este trabajo. Se han mencionado las características y el tipo de meme que se busca crear, para lo cual se utilizarán plantillas que destaquen el mensaje que se pretende transmitir. Una vez elegido el mensaje a comunicar y la plantilla que sea más acorde al mismo, se seguirá la propuesta de Beltrán (2016) para llevar a cabo la creación de los memes.

En el anexo A se presenta la clasificación de algunas plantillas, esta clasificación se basa en el contenido de la plantilla, en la idea que pretende comunicar (ver anexo A).

## 6.2 Errores

Error se define como “concepto equivocado o juicio falso” (Real Academia Española, s.f., definición 1) o como “acción desacertada o equivocada” (Real Academia Española, s.f., definición 2). En ambas definiciones se puede aclarar que es un sinónimo de algo que no está bien, o que no se debería hacer respecto de algo valorado como correcto o adecuado institucionalmente, para ello se requiere un marco del “debe ser”.

Es evidente que en el proceso de aprendizaje se cometan errores, se dé una interpretación equivocada o se realice un análisis desacertado; en el caso del aprendizaje de las matemáticas, que se haga una interpretación inadecuada a algún problema o se aplique mal un concepto o procedimiento, por citar algunos casos.

Aunque el error pueda interpretarse como una acción que no se debe cometer, hay varios autores que consideran que el error es una herramienta para el aprendizaje de las matemáticas, lo que podría resumirse en una frase: “aprender a partir de los errores”.

El error en el aula, para González, Gómez y Restrepo (2015), se puede interpretar de dos maneras según la teoría en la que se sustente. Los conductistas toman el error como la carencia de conocimiento que se debe corregir por parte del docente. Para la teoría constructivista el error es el resultado equivoco de un conocimiento que está en un contexto que no corresponde. Gracias a estas teorías varios investigadores han decidido tomar el error como parte de su metodología para ser usado en la enseñanza, y así trabajar a partir de errores en los cuales esos desaciertos puedan ser de ayuda potencial en el aula.

González, Gómez y Restrepo (2015) mencionan a algunos investigadores como Borasi (1994) y Prediger (2010), indicando que estos personajes tienen una concepción del error en el aula de clase similar a la suya. Borasi (1994, como se cita en González, Gómez y Restrepo, 2015) sugiere que los errores se pueden usar como trampolines para la indagación y muestra que esta estrategia tiene efectos positivos en el aprendizaje de los escolares. A su vez, Prediger (2010, como se cita en González, Gómez y Restrepo, 2015) propone que los errores se usen como catalizadores para el aprendizaje. Ambos autores hacen uso del error para aprender a partir de este, dejando de lado el paradigma que no se deberían cometer errores en el aula, por el contrario, como afirman autores como los enunciados, este tipo de situaciones pueden llegar a ser muy relevantes en el aula de clase.

Otro autor que aborda el error como parte del conocimiento es Lakatos, según lo menciona Rico (1998): “Lakatos ofrece una metodología basada en los principios de la falsabilidad para la construcción del conocimiento matemático” (p. 75). Para Lakatos el conocimiento no debería partir solamente de una verdad, como muchas veces se refleja en el aula, sino que se podría transmitir conocimientos mediante una falsedad la cual ponga en juego la deducción de los estudiantes.

A su vez, Rico (1998) hace un aporte en cuanto al error en el aprendizaje, concluyendo lo siguiente:

1. Los errores pueden contribuir positivamente al proceso de aprendizaje.
2. Los errores no aparecen por azar, sino que surgen en un marco conceptual consistente, basado sobre conocimientos adquiridos previamente.

3. No condenar a los errores culpando a los estudiantes de los mismos, preferiblemente, se debe cambiar por la previsión de errores y su consideración en el proceso de aprendizaje.
4. Todo proceso de instrucción es potencialmente un generador de errores. (pp. 75-76)

Se puede observar que los errores no deben ser juzgados, por el contrario, se deberían usar en el aula como una catapulta generadora de debate, mediante el cual los estudiantes logren identificar qué parte del proceso o del análisis se hizo de manera incorrecta y que este sea un ejemplo a seguir de que es lo que no se debe hacer en cierta situación. Es importante aclarar que los errores pueden surgir de diferentes fuentes, "... los errores también son función de otras variables del proceso educativo: el profesor, el currículo, el entorno social en el que se enmarca la escuela, el medio cultural y sus relaciones, así como las posibles interacciones entre estas variables" (Rico, 1998, p. 83). Esto demuestra que no se debe cuestionar solamente al estudiante, se debería examinar cuál o cuáles de estos factores son los causales para que el error se esté presentando en el aula.

Para Mulhern (1989) los errores comparten algunas características; destaca cuatro las cuales considera generales en cuanto a los errores cometidos por los estudiantes y son las siguientes:

1. Los errores son sorprendentes, estando ocultos para el profesor
2. Los errores son persistentes, son resistentes al cambio por lo que se debe reorganizar el conocimiento de los estudiantes
3. Los errores pueden ser sistemáticos o por azar

4. Los errores ignoran el significado, los estudiantes no se cuestionan por la respuesta, por más evidente que esta sea carente de sentido

En síntesis, los errores surgen cuando se enfrenta a los alumnos con un nuevo conocimiento, esto los lleva a reorganizar o reestructurar sus conocimientos previos, dichos errores son intentos razonables, pero no exitosos. Estos errores pueden proceder de diferentes maneras, aunque siempre será considerado como un esquema cognitivo inadecuado (Ruano et al., 2008). A su vez, debemos entender que los errores son parte del aprendizaje en el aula, no se pueden obviar ni castigar, por el contrario, hay que prestarles atención para que logren contribuir a apropiarse los saberes. Hacer un uso adecuado de estos errores es trabajo del profesor, quien tiene un rol bastante importante en el desarrollo de este tipo de reflexiones.

### ***6.2.1 Tipos de errores***

De acuerdo con lo anterior, algunos autores como Radatz (1979), Astolfi (1999) y Movshovitz-Hadar (1987) han clasificado los errores cometidos por los estudiantes de matemáticas, esto teniendo en cuenta el origen de cada error y sus respectivas características. En este contexto, resulta relevante mostrar los tipos de errores expuestos por algunos de estos personajes de la Educación Matemática, sus tipificaciones se muestran enseguida:

Radatz (1979) plasma, en su artículo *Error Analysis in the Mathematics Education*, que los errores se seccionan debido a su procesamiento de información, concluyendo cinco categorías generales:

1. *Errores debido a dificultades de lenguaje*, los cuales son causados por la dificultad que tienen los estudiantes asociados a conceptos, símbolos y vocabulario, el cual es nuevo para ellos.

2. *Errores debidos a dificultades para obtener información espacial*, las cuales se presentan al momento en el que los estudiantes deben pensar a través de imágenes espaciales o visuales.
3. *Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos*, esto es evidente cuando el alumno no tiene las suficientes bases matemáticas para abordar un problema, incluye las deficiencias de conocimiento en contenidos y procesos.
4. *Errores debidos a asociaciones o a rigidez del pensamiento*, en estos el estudiante no asimila una nueva instrucción o la modificación del enunciado, se queda con la idea de realizar un proceso de la misma manera, aunque sea consciente de que las indicaciones no son las mismas. Este tipo de error presenta algunas subcategorías las cuales son:
  1. *Errores por perseveración*
  2. *Errores de asociación*
  3. *Errores de interferencia*
  4. *Errores de asimilación*
  5. *Errores de transferencia negativa a partir de tareas previas*
5. *Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes*, allí los alumnos usan reglas o estrategias en áreas de contenidos diferentes.

Por otra parte, Movshovitz-Hadar (1987) clasifica los errores de la siguiente manera:

1. *Errores debidos a datos mal utilizados.*
2. *Errores debidos a una interpretación incorrecta del lenguaje.*

3. *Errores debidos a inferencias no válidas lógicamente. -Errores debidos al uso de teoremas o definiciones deformados.*
4. *Errores debidos a la falta de verificación en la solución.*
5. *Errores técnicos: errores de cálculo, de procedimiento en algoritmos básicos.*

Otra tipificación de los errores es presentada por Astolfi (1999), clasificándolos de la siguiente manera:

1. *Errores debido a la comprensión de las instrucciones de trabajo dadas.*
2. *Errores que provienen de los hábitos escolares o de una mala interpretación de las expectativas.*
3. *Errores como resultado de las concepciones alternativas de los alumnos.*
4. *Errores ligados a las operaciones intelectuales implicadas.*
5. *Errores debidos a los procesos adaptados.*
6. *Errores debido a la sobrecarga cognitiva en la actualidad.*
7. *Errores que tienen su origen en otra disciplina.*
8. *Errores causados por la complejidad del contenido.*

Así como ha habido autores que se centran en la tipificación de los errores de manera global, los cuales tienen algunos tipos de errores en común, ejemplo de esto son los asociados a dificultades en el lenguaje o errores de procedimiento, existen investigadores que clasifican los errores según una rama específica de las matemáticas, los cuales son específicos para cada autor, estos pueden ser originados en otra disciplina o a falta de verificación de solución. Autores como

Franchi y Hernández (2004) tipifican los errores cometidos en el aprendizaje de geometría plana, otros autores que tipifican los errores en el aprendizaje de la geometría son Bocco y Canter (2010). Socas (2011), por su parte, propone una tipificación de los errores en álgebra y aritmética, que resulta fundamental para el desarrollo de este trabajo, por ello se centra la atención en la realizada por este último autor.

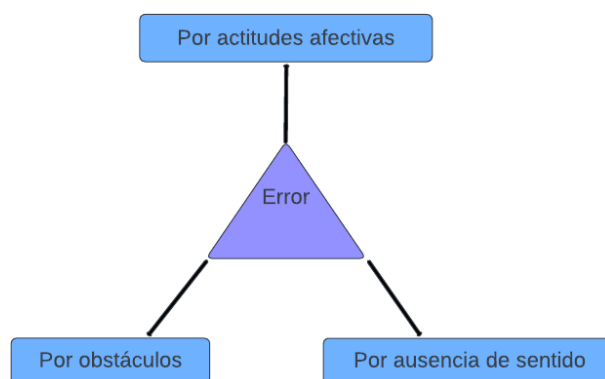
### ***6.2.2 Tipificación de errores en aritmética y álgebra***

Entre los errores más comunes, tanto en aritmética como en álgebra, se encuentran errores con los signos, errores procedimentales de las operaciones (adición, sustracción, multiplicación y división), errores al simplificar fracciones, errores al operar con ecuaciones, entre otros. Cada uno de estos errores se puede clasificar de distintas maneras según propuestas de algunos autores. (Socas, Brousseau, Kieran)

Para este trabajo se asumirá la tipificación presentada por Socas (2011), quien dice que existen tres causas que dan origen a los errores: por obstáculo, por ausencia de sentido o por actitudes afectivas (ver Figura 11).

### **Figura 11**

*Diagrama origen de errores*



*Nota:* imagen realizada por el autor tomando como referencia el texto de Socas (2011)

*Errores por obstáculo:* Ruano et al. (2008) afirman que este tipo de errores está presente cuando un conocimiento adquirido es sacado del contexto en el que fue enseñado, lo cual genera respuestas inadecuadas en este nuevo contexto haciendo que para el estudiante sea difícil replicar dicho conocimiento. Estos autores presentan tres tipos de obstáculos; el cognitivo, el epistemológico y el didáctico.

El *obstáculo cognitivo* está ligado a lo presentado anteriormente por Ruano et al. (2008), los conocimientos son satisfactorios para la solución de algunos problemas; sin embargo, dichos conocimientos carecen de sentido al ser presentados en otros problemas.

Bachelard (como se citó en Peña, 2024) introduce el concepto de *obstáculo epistemológico*, definiéndolo como la aparición inevitable de errores en el campo de las ciencias.

D'Amore y Pinilla (2002) aseveran que el obstáculo epistemológico es causado por las matemáticas mismas, es generado por el concepto matemático que es objeto de aprendizaje, afirmando que estos errores aparecen cuando los estudiantes se enfrentan a una situación nueva que no encaja con las experiencias previas. También están los *obstáculos didácticos*, estos obstáculos son los que provienen de la enseñanza. Escobar (2011) plantea que estos errores

pueden evitar que se superen los obstáculos epistemológicos. La autora afirma que estos obstáculos pueden provenir de dificultades originadas en la enseñanza por errores didácticos como: metodológicos, curriculares o conceptuales. En la se Tabla 2 ejemplifica este tipo de error, tanto en aritmética como en álgebra.

**Tabla 2**

*Ejemplo de errores generados por obstáculos*

Error aritmético	Error algebraico
$-53 + 12 = 41$ $-30 - 12 = 42$	$13 + 3b = 16b$
<p>Errores como los anteriores son muy comunes en el aula. Para los estudiantes el paso de la operación con números naturales a la operación con números enteros presenta múltiples dificultades. Muchas veces el concepto de número negativo es incomprensible para los estudiantes debido a que siempre se les aseguró que un número mayor no podía restar a un número menor; por ello, realizar operaciones en las que a un número menor se le reste un número mayor genera errores debido a <i>obstáculos</i>, que en este caso podrían ser <i>cognitivos</i>, <i>didácticos</i> o incluso <i>epistemológicos</i> (la comprensión del sistema de los números enteros llevó muchos años en el desarrollo evolutivo de las matemáticas).</p>	<p>En aritmética se busca dar un resultado concreto, uno que arroje un número. Este pensamiento es traído al álgebra, el estudiante, a veces, no concibe la idea de que un resultado puede quedar expresado así: <math>13 + 3b</math>. El estudiante siente que está incompleto. Por ello recurre a realizar operaciones hasta llegar a un resultado más corto, pero erróneo. A este error que es por <i>obstáculo</i> (que podría ser <i>cognitivo</i>), Socas lo particulariza como error por falta de clausura.</p>

Además de los errores *por falta de clausura* (incluidos en los errores por obstáculo), Socas (2011) afirma que los errores por obstáculo también pueden ser *por concatenación*. En estos, el estudiante hace una sustitución errónea de una variable, pueden ocurrir cuando se unen dos o más elementos en una sola cadena. Un ejemplo que ilustra este tipo de error es cuando un estudiante, al tener que hallar  $a$  para que se satisfaga  $3a = 32$ , responde  $a = 2$ . Otro error asociado a la concatenación de origen epistemológico es el presentado por Rojas (2010) quien dice que

cuando se asume el álgebra como una formulación de leyes generales de los números, es posible que los estudiantes asocien el álgebra escolar con estructuras numéricas fruto de sus experiencias previas. Por ejemplo, cuando el estudiante interpreta  $2a = 2 + a$ , tal vez asociando este significado con el aprendizaje de “números mixtos”, en los que  $3\frac{2}{3} = 3 + \frac{2}{3}$  (Rojas, 2010).

*Errores originados por ausencia del sentido:* este error tiene origen en los diferentes estadios del desarrollo presentes en los sistemas de representación cognitivos; el semiótico, el estructural y el autónomo. Estos estadios están asociados a la naturaleza abstracta de los conceptos matemáticos, la cual, en este caso, está más ligada a los signos matemáticos (Socas, 1997). A continuación, desglosaremos cada uno de estos estadios:

1. *En el estadio semiótico*, “el alumno aprende y usa signos nuevos con los significados que le suministran los signos antiguos ya conocidos y usados por él” (Socas, 2007, p. 13).
2. *En el estadio estructural*, el sistema antiguo organiza la estructura del sistema nuevo. Para Socas (2007), es en este estadio en el que se presentan algunos problemas, ya que se originan dificultades cognitivas, que, de no ser explicados por el sistema antiguo, se recurre a generar regularidades para darle sentido.
3. *En el estadio autónomo*, los signos que no tienen significado, incluso después de haberles dado un patrón o regularidad, actúan con significado propio, independiente del sistema anterior (Socas, 2007).

Estos estadios están presentes en los sistemas de representación asociados al álgebra, es por ello que en los errores relacionados con la ausencia de sentido se pueden diferenciar tres posibles causas:

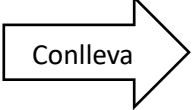
1. *Errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética.* Este error se vincula con errores que nunca se corrigieron en aritmética. Esto es porque los conceptos, procedimientos, operaciones que se realizan requieren ser asimiladas con un enfoque aritmético.
2. *Errores de procedimiento.* Este error se presenta al momento en el que los estudiantes usan de manera errónea fórmulas o reglas, las usan tal cual las conocen o adaptándola a una situación nueva, pero de forma incorrecta; por consiguiente, se crea un vacío entre reglas conocidas y problemas no familiares.
3. *Errores del álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico.* Este error es propio del álgebra (específicamente del lenguaje algebraico) ya que no tiene conexión alguna con la aritmética.

En la siguiente tabla se presentan algunos ejemplos mostrados por Socas et al. (1997), junto a otros que son de autoría propia, estos errores que se presentan se han evidenciado en algunas prácticas educativas desarrolladas con estudiantes de grado séptimo y octavo.

**Tabla 3**

*Errores originados por ausencia de sentido.*

<b>Errores originados por ausencia de sentido</b>			
	<b>Error aritmético</b>	<b>Error algebraico</b>	

<b>Errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética</b>	$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{4}{6}$  $\frac{1}{x} + \frac{3}{y} = \frac{4}{x+y}$	Cometer errores al resolver operaciones entre números fraccionarios utilizando fracciones en el terreno de la aritmética hará que estos se repitan al momento de operar con fracciones algebraicas.
<b>Errores de procedimiento.</b>	<b>Error aritmético</b>	<b>Error algebraico</b>
	Como: $3(4 + 5) = 3 \times 4 + 3 \times 5$ Se cree por ende que: $3(4 \times 5) = 3 \times 4 \times 3 \times 5$	Si $\frac{a \times b + c \times d}{a + c}$ Se tiene como resultado: $b + d$
	En este ejemplo se observa cómo un conocimiento previo es mal ejecutado con uno nuevo. Al momento de hacer uso de la «propiedad distributiva (de la multiplicación respecto a la adición)» se tiende a pensar que se puede extrapolar a la multiplicación, lo que es erróneo.	Este error es bastante común. Se evidencia el mal procedimiento al momento de simplificar una expresión. Se tiende a eliminar factores si están en el numerador y el denominador, sin tener en cuenta las operaciones involucradas, sus propiedades y su sintaxis.
<b>Errores del álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico.</b>	<b>Error algebraico</b>	
	Considerar que la expresión $4x - 3 = 2x + 7$ es válida para todo $x \in \mathbb{R}$ .	Como este error es netamente algebraico, solo se hace referencia al álgebra (no se presenta ejemplo para aritmética). Socas (1997) menciona que en este error es generado gracias a que el estudiante considera el signo “=” como una equivalencia; por ende, tiende a pensar que las expresiones de cada uno de los miembros de la igualdad son iguales indistintamente de qué valor sea el que represente $x$

Los errores del álgebra por características propias del lenguaje algebraico también pueden ser *originados por sustitución formal*. Un ejemplo de este es cuando se usa alguna propiedad o fórmula matemática sin comprender las características propias de esa fórmula. Un ejemplo de esto es descrito por Ruano, Socas y Paralea (2008):

Si  $a = b + 3$  ¿en qué se transforma  $5a + 3$ ?. El error más común cometido por los estudiantes es:  $5b + 3 + 3$ . Ruano, Socas y Paralea (2008) manifiestan que este error surge por no usar adecuadamente los paréntesis, clasificándolo como un error por ausencia de sentido o por obstáculo.

*Errores con origen en las actitudes afectivas y emocionales.* Para Socas (1997)

este tipo de error se origina por diferentes razones. Ya sea falta de concentración, olvidos, bloqueos entre otros. McLeod y Adams (1989 como se citó en Socas, 2007) indican que los sentimientos de miedo y tensión están relacionados con este error. También, afirman que muchas de las actitudes negativas están asociadas al miedo y la ansiedad, lo que desemboca en bloqueos afectivos hacia las matemáticas. El siguiente es un ejemplo de una experiencia en el aula, correspondiente a este tipo de error.

**Tabla 4**

*Errores con origen en las actitudes afectivas y emocionales*

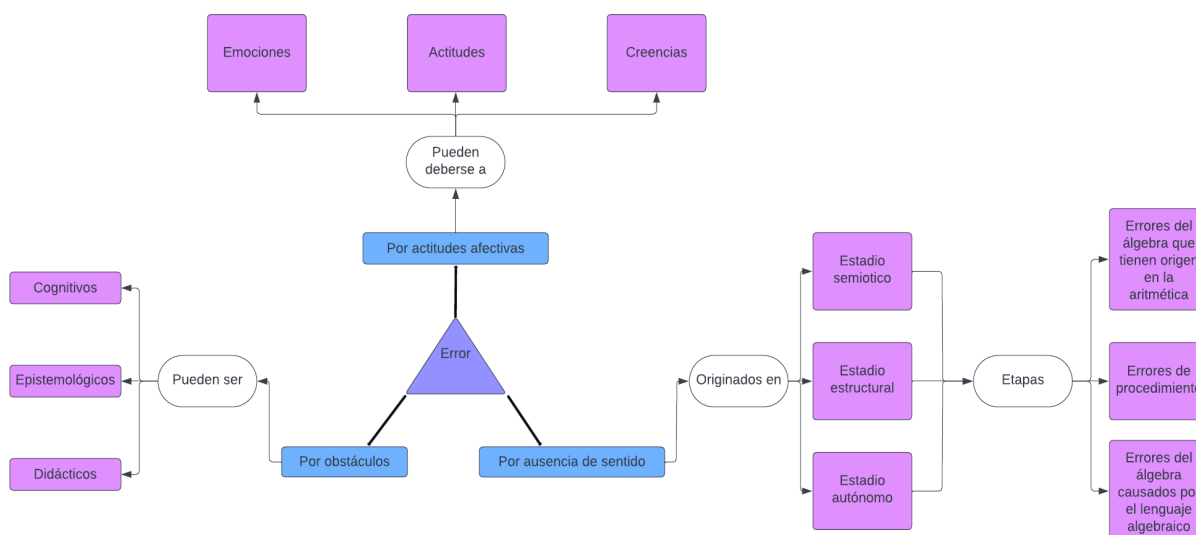
<b>Error algebraico</b>
$4x - 3 = 2x + 7$ $4x - 2x = 7 + 3$ $2x = 10$ $x = 10$
<p>El exceso de confianza es uno de los errores presentes en este tipo; por ejemplo, en la operación se olvida el coeficiente que acompaña la <math>x</math>, error que simplemente puede llevar a una respuesta equivocada, además de no corroborar si esa respuesta es la correcta o no.</p>

Otro ejemplo de este tipo de error es presentado por Pérez et al. (2019) tras aplicar un cuestionario a 266 estudiantes de 13 a 16 años, los autores identificaron que los errores frecuentes en operaciones básicas se debían al *olvido de los signos numéricos*. Determinaron que este error tiene un origen **afectivo-emocional**: los estudiantes sabían realizar las operaciones correctamente y reconocían su fallo, pero el temor o la ansiedad durante la resolución del cuestionario provocaba que omitieran los signos.

A modo de síntesis, se presenta la Figura 12

**Figura 12**

Diagrama origen de errores



### 6.3 Objetos aritméticos y algebraicos en secundaria y media

En este apartado se mostrarán los objetos tanto aritméticos como algebraicos que deben abordarse, como mínimo, en la educación secundaria y media en Colombia, de acuerdo con los referentes de calidad nacionales. Se enlistarán a continuación los objetos matemáticos que se mencionan en dos de los referentes de calidad colombianos, Derechos básicos de aprendizaje (DBA) (Ministerio de Educación Nacional –MEN-, 2016) y Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006). Estos objetos fueron seleccionados teniendo en cuenta los pensamientos numéricos y sistemas numéricos y variacional y sistemas algebraicos y analíticos, en razón al contenido de este trabajo de grado. En la Tabla 5 se listan los objetos identificados.

**Tabla 5**

*Objetos matemáticos de álgebra y aritmética*

Grados	Objeto algebraico o aritmético (DBA, EBCM)
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Sistema de los números racionales:               <ul style="list-style-type: none"> <li>○ Representación en fracciones, razones, decimales o porcentaje</li> <li>○ Operaciones</li> </ul> </li> </ul>

Grados	Objeto algebraico o aritmético (DBA, EBCM)
<b>I</b> <b>Grados</b> <b>Sexto y Séptimo</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>○ Potenciación y radicación</li> <li>○ Relación de orden y equivalencia</li> <li>○ Propiedades de las relaciones entre números racionales y sus operaciones</li> <li>○ Representación polinomial de números racionales</li> <li>● Sistema de los números enteros: <ul style="list-style-type: none"> <li>○ Propiedades básicas de teoría de números (desigualdad, propiedades de adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación)</li> <li>○ Relación de orden y equivalencia</li> </ul> </li> <li>● Proporcionalidad directa o inversa</li> <li>● Variación (relación de diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas)</li> <li>● Ecuaciones lineales en el sistema de números racionales y sistema de números enteros</li> </ul>
<b>II</b> <b>Grados</b> <b>Octavo y Noveno</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Números irracionales: <ul style="list-style-type: none"> <li>○ Representación decimal y no decimal</li> <li>○ Propiedades</li> </ul> </li> <li>● Números reales: <ul style="list-style-type: none"> <li>○ Representaciones, propiedades y relaciones, operaciones</li> <li>○ Potenciación, radicación y logaritmación</li> <li>○ Expresiones algebraicas (relación de equivalencia)</li> <li>○ Funciones polinómicas</li> </ul> </li> <li>● Notación científica</li> <li>● Ecuaciones lineales en diferentes conjuntos numéricos</li> <li>● Funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas (Representación gráfica)</li> </ul>
<b>III</b> <b>Grados</b> <b>Décimo y Undécimo</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Números reales: <ul style="list-style-type: none"> <li>○ Representaciones decimales (identificación de racional e irracional)</li> <li>○ Diferentes tipos de notación, propiedades algebraicas de equivalencia y de orden</li> </ul> </li> <li>● Números racionales: <ul style="list-style-type: none"> <li>○ Densidad e incompletitud</li> </ul> </li> <li>● Propiedades, relaciones y operaciones de los sistemas numéricos (números naturales, números enteros, números racionales y números reales)</li> </ul>

*Nota.* Este cuadro recopila los objetos aritméticos y algebraicos que establece el Ministerio de Educación en Colombia. Su contenido está basado en los Derechos Básicos de Aprendizaje y los Estándares Básicos de competencias matemáticas.

A partir de los objetos dispuestos en la tabla anterior, en la siguiente sección se exponen algunos errores asociados a estos. Dichos errores se clasifican según lo establecido por Socas (2011), esto con el fin de relacionar los objetos de enseñanza en la educación básica secundaria y media en Colombia dispuestos por los referentes de calidad colombianos y los tipos de errores mencionados anteriormente para así seleccionar los objetos que se usarán para la creación de los memes.

#### 6.4 Relación entre errores en aritmética y álgebra con los objetos matemáticos enseñados en secundaria y media

Los errores que se reportan enseguida se organizan por objetos de estudio generales. Esto por cuanto hay objetos que se encuentran en diferentes grados –como los números racionales y los números enteros– (ver Tabla 5). Además, hay contenidos relacionados con ciertos objetos, que, al ser demasiado específicos, no se halló información suficiente sobre errores asociados que provengan de fuentes de investigación, como, por ejemplo, los referidos a: representación polinomial de números o variación.

#### 6.4.1 *Sistema de números racionales*

- Representación de números racionales como fracciones En lo que respecta a esta representación se pueden identificar varios ejemplos de errores que surgen en relación con el objeto fracción. Entre ellos, destacan los siguientes:

Butto (2014) afirma que cuando los estudiantes trabajan con fracciones indican que prefieren tratar el denominador y el numerador como entidades separadas (este error se llama sesgo de número natural o sesgo de número entero). Este error se manifiesta claramente cuando los estudiantes realizan diferentes tipos de operaciones con números racionales, ya que tienden a interpretar la fracción como dos números independientes. Esto es, por ejemplo, al realizar la adición con fracciones lo hacen como se ve enseguida:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} =$$



Este es un error surgido por obstáculo cognitivo, el cual puede estar originado por una comprensión incorrecta del concepto de fracción como entidad única.

- Al representar los números racionales de forma gráfica con círculos o

rectángulos, un error común es dividir estas figuras en partes desiguales (Ivars, Fernández y Llinares 2020). Un ejemplo se observa en la Figura 13.

### Figura 13

*Ejemplo de error en representación gráfica de fracciones*

Tipo de actividad	Actividad	Respuesta alumno	Característica
Representar fracciones	Representa $1/3$ de la siguiente figura 	Divido la pizza en tres partes y cojo una 	No reconocen que las partes en las que se divide el todo deben ser iguales en área

Fuente: Ivars, Fernández y Llinares 2020

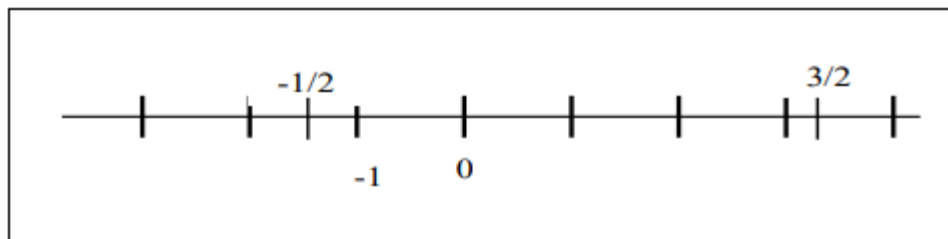
Este error podría clasificarse en dos tipos de errores; el primero como un error por obstáculo cognitivo asociado a la comprensión de la equidad. Es un error que refleja falta de comprensión en cuanto a la esencia misma de las fracciones en su significado como parte-todo, para las cuales la unidad se debe partir en partes iguales. El segundo como un error generado por obstáculo didáctico. Puede surgir si los docentes no especifican que, al dividir la figura, las subdivisiones deben tener la misma área.

- En el modelo de la recta numérica, Bruno y Cabrera (2003) realizaron un

cuestionario en el cual se pidió a los estudiantes representar diferentes números en la recta, los errores observados en este cuestionaron fueron los que se presentan en las Figura 14 y Figura 15.

### Figura 14

*Ejemplo de error en recta numérica de números racionales representados como fracción*



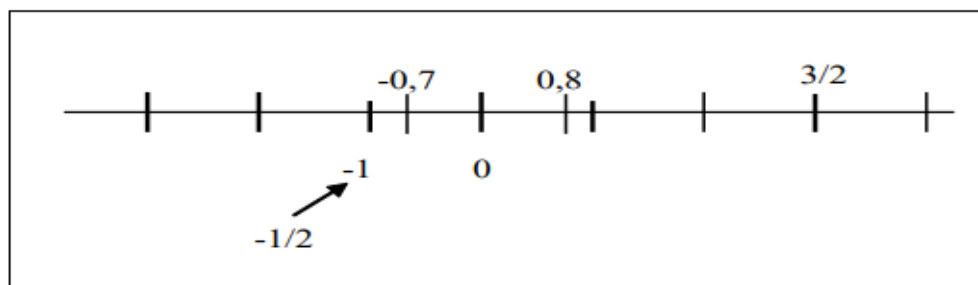
Fuente: Bruno y Cabrera (2003)

En este ejemplo el error es debido a que los estudiantes transforman incorrectamente el número fraccionario en decimal, considerando  $\frac{3}{2}$  como 3,2 y  $-\frac{1}{2}$  como  $-1,2$  (Bruno y Cabrera 2003).

En esta situación, se hace evidente un error por obstáculo cognitivo debido a que el estudiante no transforma correctamente los números fraccionarios como expresiones decimales.

### Figura 15

*Ejemplo de error en recta numérica de números racionales representados como fracción (fraccionarios como enteros)*



Fuente: Bruno y Cabrera (2003)

Bruno y Cabrera (2003) afirman que este error se genera debido a que los estudiantes consideran la fracción como un número entero, tomando en la mayoría de los casos el numerador como el número a ubicar en la recta. De este modo, los estudiantes deciden ubicar  $\frac{3}{2}$  como 3 y  $-\frac{1}{2}$  como  $-1$ .

Las autoras atribuyen a que este error es generado en gran parte por trabajar solamente con números enteros al abordar números negativos. Así, cuando al estudiante se le presenta un número negativo en una fracción no lo concibe como tal y toma el numerador para ubicarlo en la recta. Este error por ende podría clasificarse como un error por obstáculo cognitivo.

- Por otra parte, debido a que los números racionales también se pueden representar como decimales. Centeno (1997) menciona:

Errores relacionados con la lectura y escritura de los números. Uno de los ejemplos mostrados por Centeno (1997) es cuando se le pide al estudiante representar 37 milésimas, a lo que la mayoría de los estudiantes responde 37000. En relación con este error, la autora explica que los estudiantes suelen interpretar las centésimas o las milésimas como equivalente a centenas o unidades de mil, respectivamente; así, al haber milésimas debe haber tres ceros. Un ejemplo similar que expone la autora se da cuando se le pide al estudiante representar 3 centésimas, obteniendo respuestas como: 0,300; 3,00; 3,0; 3,100; 00,3; 0,3.

Según la clasificación de Socas (2011), este error puede atribuirse a un obstáculo cognitivo, posiblemente debido a una confusión en la estructura del sistema de numeración decimal para los números naturales, en contraste con la misma para los números decimales.

Otros errores están relacionados con el cero. Centeno (1997) da los siguientes ejemplos:

1. Pensar que 0,036 es igual a 36, viendo el número como entero (“el cero no vale”).
2. Pensar que 1,27 es diferente de 1,270; esto se asocia con que el estudiante considera que 27 es menor que 270.

Lo cual se trasfiere a errores asociados al orden de los números decimales, un par de ejemplos son:  $3,2 < 3,135$  y  $0,1814 > 0,3$ .

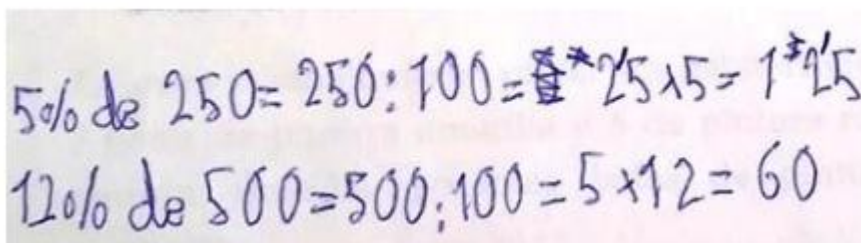
En este error, los estudiantes tienden a enfocarse exclusivamente en los dígitos que aparecen después de la coma decimal, considerando estas partes como entidades separadas. Para muchos jóvenes, la longitud de la parte decimal es vista como un indicador de magnitud, llevándolos a la creencia errónea de que un número con más dígitos decimales es necesariamente mayor. Este equívoco puede ser atribuido a la naturaleza abstracta de las matemáticas y la comprensión de los números decimales.

Estos errores pueden clasificarse dentro de la categoría general de errores por obstáculo, directamente en la subcategoría de obstáculo cognitivo. En este caso, se interpretan los números decimales a partir de un esquema de pensamiento basado en los números enteros, aplicando conocimientos que son válidos en un contexto, pero que resultan inadecuados en el sistema de los números decimales.

- Refiriéndose a la representación de los números racionales en forma de porcentaje, Burgos y Godino (2019) realizaron una investigación con 21 estudiantes, en relación los conflictos que presentan los alumnos en la resolución de una tarea de porcentaje, en esta investigación los autores identifican el error que se muestra en la Figura 16

### Figura 16

*Error de representación de porcentaje*



Handwritten calculations showing errors in percentage representation:

$$5\% \text{ de } 250 = 250 : 100 = \cancel{25} * 25 \times 5 = 1^{\cancel{2}} 25$$

$$12\% \text{ de } 500 = 500 : 100 = 5 \times 12 = 60$$

Fuente: Burgos y Godino (2019)

Es un error de carácter representacional, en el que se observa que el estudiante omite el signo igual en la proporción, además de usar el signo igual para expresar de manera errónea conexión entre dos magnitudes (Burgos y Godino, 2019). Este error se puede considerar como proveniente de un obstáculo cognitivo, esto es reflejo de una comprensión limitada del signo igual como herramienta relacional, reduciéndolo a un mero operador procedimental.

Por otra parte, Loyola y Sandoval (2021) reportaron los resultados de un estudio realizado a 28 estudiantes de primer grado de secundaria, en el cual se les pidió resolver diferentes problemas de porcentaje en diversos contextos. Una de las tareas a resolver es la siguiente: “Alicia tiene un total de \$500, y gastó en comida el 30%. ¿Cuánto dinero gastó?” (Loyola y Sandoval, 2021, p. 7). Algunos de las respuestas erróneas son:

Respuesta 1: \$16,666 porque:

$$\frac{500}{30} = 16,666$$

Respuesta 2: \$6 porque:

$$\frac{30 \times 100}{500} = 6$$

Respuesta 3: \$166,66 porque

$$\frac{500}{30} \times 10 = 166,66$$

Estos errores podrían considerarse como errores por ausencia de sentido, específicamente errores de procedimiento.

- En relación con las operaciones con números racionales, en la Tabla 6 se recopilan

los errores más comunes.

**Tabla 6**

*Errores en operaciones con fracciones*

<b>Adición</b>	$\frac{2}{6} + \frac{2}{3} = \frac{4}{18}$ $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1+2}{6} = \frac{3}{6}$	<p>González (2015) y Rueda (2018) mencionan este tipo de error. Este error es producto de mezclar el algoritmo de suma con el algoritmo de multiplicación (González, 2015). Se puede decir que este tipo de error ocurre cuando los estudiantes aplican fórmulas o reglas sin comprender su significado. Este error puede ser generado por un obstáculo didáctico, debido a que el profesor se centra en enseñar el algoritmo y su memorización, dejando de lado si los estudiantes comprenden o no dicho algoritmo</p>
<b>Sustracción</b>	$\frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$ $\frac{4}{5} - \frac{3}{4} = \frac{4}{20} - \frac{3}{20} = \frac{1}{20}$	<p>Este error es mencionado por Llinares y Sánchez (1997). Estos errores reflejan que los estudiantes tienen una comprensión parcial de cómo operar con fracciones, ya que entienden la importancia de encontrar un denominador común para realizar operaciones entre fracciones; sin embargo, no amplifican el numerador de cada una de las fracciones correspondientes. Esta omisión resulta en una respuesta incorrecta.</p>
<b>Multiplicación</b>	$\frac{1}{3} \times \frac{2}{9} = \frac{3}{9} \times \frac{2}{9} = \frac{6}{9}$	<p>En este ejemplo se puede evidenciar que el estudiante confunde el algoritmo de la multiplicación con el de adición o sustracción entre números racionales (González, 2015).</p>
<b>División</b>	$\frac{1}{2} \div \frac{7}{12} = \frac{14}{12}$	<p>En este error se puede ver que el estudiante multiplica en diagonal dejando el resultado de multiplicar <math>7 \times 2</math> en el numerador y el resultado de multiplicar <math>1 \times 12</math> en el denominador. Se evidencia que el estudiante trata la división como una multiplicación directa de numeradores y denominadores, similar a la suma de fracciones con mismo denominador, pero sin ajustar el algoritmo correcto.</p>

Cada uno de los errores mencionados en la Tabla 6 son errores por ausencia de sentido; en particular, errores de procedimiento.

Un error frecuente, documentado por Ríos y Asprilla (2022), se asocia al sesgo de número natural. Este fenómeno se manifiesta cuando los estudiantes operan el numerador y el denominador de manera independiente, ignorando que una fracción representa una relación parte-todo, algunos ejemplos son:

$$\frac{2}{5} + \frac{2}{3} = \frac{4}{8}$$

$$\frac{3}{5} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$$

Al ser un error de sesgo de número natural puede considerarse como un error surgido por obstáculo cognitivo.

- Otros errores asociados a los números racionales corresponden a las operaciones entre estos, pero notados con expresiones decimales. Centeno (1997) propone varios ejemplos de errores con respecto a las expresiones decimales de números decimales, entre ellos:

$$0,70 + 0,40 + 0,20 = 0,130$$

$$17,3 + 21,8 = 38,11$$

$$3,15 \times 10 = 30,150$$

$$2,3 \times 2,3 = 4,9$$

En cada uno de estos casos los estudiantes toman los números decimales como dos números naturales unidos por una coma que se interpretan de manera independiente. Este error se clasifica como uno por obstáculo cognitivo, debido a que son los conocimientos con las operaciones con los números naturales los que extrapolan los estudiantes a otros números que no se coinciden

con estos. También se puede considerar como un error por obstáculo didáctico, debido a que muchos docentes usan la frase: «las expresiones decimales tienen dos partes, una parte entera y una decimal», algo que después puede recaer en un error de sesgo de número natural.

- En relación con la potenciación y radicación en los números racionales, en la Agencia de calidad de la educación (2018) se exponen algunos errores asociados a la potenciación y radicación en los números racionales. En la potenciación, el error expuesto es interpretar que el signo que acompaña al exponente se debe aplicar al resultado de la potenciación, un ejemplo es el siguiente:

$$\left(\frac{2}{9}\right)^{-2} = -\frac{4}{81}$$

Según los autores, también puede presentarse el siguiente error:

$$\left(\frac{2}{9}\right)^{-2} = -\frac{4}{18}$$

En este último no solo es evidente el problema con el signo que acompaña el exponente, sino que también se cree que la potencia se encuentra multiplicando al numerador y denominador por el exponente.

En ambos casos, el error se debe a un obstáculo cognitivo. En el primer caso, la presencia del exponente negativo altera el resultado de la potenciación; el estudiante seguramente comprende cómo manejar exponentes positivos, pero no los negativos. En el segundo ejemplo, se muestra que el concepto de potenciación no está bien entendido por el alumno.

- Sobre las relaciones de orden y equivalencia entre los números racionales se han realizado algunas investigaciones que se hallan en la literatura especializada en Educación Matemática. Godino et al. (2004) mencionan que muchos de los errores evidenciado por parte de los

estudiantes están presentes en el nivel de secundaria. Un ejemplo de estos errores se da cuando al estudiante se le presenta la siguiente situación:

$$\frac{1}{2} \text{ es mayor o menor que } \frac{1}{3}?$$

Los autores afirman que los estudiantes, equívocamente, afirman que la fracción  $\frac{1}{2}$  es menor que  $\frac{1}{3}$ , basándose en que 2 es menor que 3.

En las Figura 17 y Figura 18, se encuentran errores mencionados por González y Fernández (2024) de acuerdo con un estudio realizado con estudiantes que cursan desde grado quinto de primaria hasta grado cuarto de secundaria.

### Figura 17

*Error de relación de orden en decimales*

**Rodea el número mayor**

- 0.37
- 0.5

¿Cómo lo has sabido?

Porque el 37 es más mayor que el 5.

Fuente: González y Fernández (2024)

### Figura 18

*Error de relación de orden en fracciones*

**Rodea la fracción mayor**

- $\frac{5}{3}$
- $\frac{9}{7}$

¿Por qué crees que la fracción que has elegido es la mayor?

porque el denominador y numerador es mayor

Fuente: González y Fernández (2024)

Los errores presentados por Godino et al. (2004) y González y Fernández (2024)

se considera un error por obstáculo cognitivo debido a que es un sesgo de número natural.

Llinares y Sánchez (1997) ejemplifican algunos errores comunes cometidos por los estudiantes, estos a menudo asumen que pueden sumar o restar el mismo valor al numerador y al denominador de una fracción sin perder su equivalencia. Por ejemplo, creen que al agregar 6 tanto al numerador como al denominador se mantendrá la equivalencia; así:

$$\frac{2}{5} = \frac{8}{11} = \frac{14}{17}$$

Este tipo de error podría clasificarse como un error por ausencia de sentido, específicamente un error procedimental ya que el estudiante parece aplicar incorrectamente el concepto de equivalencia entre fracciones.

Con la simplificación de fracciones también se han hallado algunos errores, por ejemplo:

Cuando se les pide simplificar fracciones, los estudiantes pueden cometer errores, como:

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{o} \quad \frac{4}{9} = \frac{2}{3}$$

En estos casos, Llinares y Sánchez observaron un patrón en el que los estudiantes intentan reducir el numerador a un número más pequeño, sin una comprensión adecuada de las operaciones subyacentes.

Por otra parte, Escobar y Escobar (2015) mencionan el siguiente error en cuanto a relación de equivalencia:

Se pide simplificar la expresión  $\frac{4}{15}$  y una de las respuestas fue:

$$\frac{4}{15} = \frac{2}{3}$$

Los estudiantes simplificaron el numerador sacando mitad y el denominador sacando quinta. Este error podría clasificarse por un error por ausencia de sentido, específicamente un error de procedimiento.

- En lo correspondiente a propiedades de las relaciones entre números racionales y sus operaciones, González (2015) destaca uno de los errores más recurrentes relacionados con el uso inadecuado de la propiedad conmutativa en el contexto de números racionales. Según el autor, los estudiantes tienden a aplicar esta propiedad de manera incorrecta al realizar operaciones de sustracción y división con fracciones. González (2015) sugiere que este problema surge de la falta de comprensión sobre cuándo y dónde emplear adecuadamente esta propiedad.

Un ejemplo ilustrativo es el siguiente:

Al resolver  $\frac{1}{2} \div \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right)$ , el estudiante hace primero:

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{12}$$

Y luego escribe:

$$\frac{1}{2} \div \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{12} \div \frac{1}{2} = \frac{14}{12}$$

A pesar de que el estudiante realiza correctamente las operaciones de adición y división de fracciones independientes, no aplica la propiedad conmutativa de manera adecuada. Esto se debe a la creencia errónea de que esta propiedad se mantiene válida incluso en la división.

Otro ejemplo del mismo origen es presentado por Godino et al. (2004):

$$6,32 - 5,45 = 5,45 - 6,32$$

Godino (2004) menciona el error con la conmutatividad de las operaciones, específicamente al aplicar equívocamente la propiedad conmutativa en la sustracción.

Según la clasificación de Socas (2011), ambos casos corresponden a errores por obstáculo (cognitivo o didáctico). En el primer ejemplo, el estudiante transfiere incorrectamente la propiedad conmutativa a la división, mientras que en el segundo la aplica a la sustracción. Estos errores reflejan un obstáculo cognitivo, al asumir que todas las operaciones comparten propiedades estructurales. A su vez, podría tratarse de un obstáculo didáctico si, durante la enseñanza, no se precisó que la conmutatividad solo aplica a ciertas operaciones, generando generalizaciones indebidas.

- En cuanto a la densidad e incompletitud, Widjaja, Stacey y Steinle (2008) mencionan tres errores que comenten los estudiantes relacionados al concepto de densidad de los números racionales. Los errores son los siguientes:

Asociación de dígitos decimales con números enteros. Los estudiantes tienen la concepción de que entre dos números decimales dados no hay números decimales, tal como no hay un número entero entre dos números enteros, un ejemplo de este error es creer que no hay números entre 3,14 y 3,15 porque se consideran números consecutivos, pensando de manera análoga cuando se tienen los números 14 y 15.

Este tipo de error se puede catalogar en la categoría de errores por obstáculo, particularmente en la subcategoría de obstáculo cognitivo, ya que el estudiante aplica un esquema de pensamiento propio de los números enteros al conjunto de los números decimales y esto le impide comprender el concepto de densidad.

Otro error es la comparación de fracciones o números decimales de la misma clase. Widjaja, Stacey y Steinle (2008) afirman que una dificultad de los estudiantes para encontrar decimales intermedios entre dos dados tiene que ver con la conversión de la expresión al decimal a

fracción ya que al solo usar fracciones equivalentes con el mismo denominador como las del siguiente caso, los estudiantes decían que no había otro número entre ellos. Ejemplo:

$$3,14 = \frac{314}{100} \text{ y } 3,15 = \frac{315}{100}$$

Esta situación se puede situar dentro de la subcategoría de obstáculo cognitivo, ya que el error radica en que los estudiantes utilizan un esquema de comparación basado en fracciones con el mismo denominador sin considerar otras representaciones posibles y también debido al sesgo de número natural.

Por último, el uso de las reglas de redondeo. El estudiante asume que entre los números 0,799 y 0,80 no existe ningún otro número porque 0,80 es el redondeo de 0,799 (Widjaja, Stacey y Steinle 2008).

Este ejemplo se clasifica como un error por ausencia de sentido porque refleja una dificultad fundamental en la comprensión de las propiedades de los números racionales y del redondeo. Esta falta de comprensión impide que el estudiante reconozca la densidad de la recta numérica.

- Los siguientes tipos de errores están relacionados con la representación polinomial de números racionales. Escolano (2019) asegura que en la representación polinómica decimal de números racionales los estudiantes pueden estar asociado a que “El número decimal es un ente abstracto que surge de relaciones numéricas definidas entre números naturales y entre números de origen desconocido” (Escolano, 2019, p. 102). Un ejemplo de esto puede ser el siguiente: si se le pide al estudiante representar 3.4 manzanas, puede no entender que al tener 3 manzanas enteras y una parte de otra está hablando de una cantidad real y tangible. En este mismo sentido,

“El número decimal se asocia a potencias de 10 de exponente negativo, que son objetos matemáticos inexistentes para el alumno” (Escolano, 2019, p. 102). Por ejemplo, para el número

0.03, un estudiante que analiza este número puede recordar que se representa como  $3 \times \frac{1}{10^2}$  pero al enfrentarse al problema de contar monedas, no puede relacionarlo con la realidad. Si se le pregunta cuánto dinero representa, puede responder incorrectamente que son 3 décimos de dólar. Este error ocurre porque no visualiza que 0.03 significa 3 centésimas, conduciendo a la confusión sobre el valor real de las cifras.

El tercer y último error que enuncia el autor es:

El paso de la representación polinómica del número decimal a la representación decimal se hace de forma ostensiva. En estas condiciones, se limita la comprensión de los alumnos porque asocian la parte no entera a las potencias negativas de 10, pero no pueden interpretar el valor posicional de las cifras colocadas a la derecha de la coma decimal. (Escolano, 2019, p. 102).

Un ejemplo de este es cuando al alumno se le presenta la expresión  $4 \times 10^1 + 2 \times 10^0 + 6 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2}$ , al intentar escribir esto en su forma decimal, muchos estudiantes tendrían el resultado 4265. Esto ocurre porque para los estudiantes es difícil el reconocer  $6 \times 10^{-1} = 0.6$  y  $5 \times 10^{-2} = 0.05$

#### **6.4.2 *Sistemas de números enteros***

La existencia y aceptación de los números negativos plantea una de las principales dificultades en el proceso de aprendizaje de los números enteros. Comprender los números enteros implica desafiar concepciones arraigadas en la aritmética convencional (Iriarte, Jimeno y Vargas-Machuca, 1991). Entre los errores comunes que surgen en este contexto se destaca la falta de representaciones concretas en situaciones cotidianas que involucren números negativos, lo que dificulta la comprensión de estos conceptos. De acuerdo con Iriarte, Jimeno y Vargas-Machuca (1991), estos obstáculos se manifiestan en errores tanto en las operaciones como en la interpretación del orden de los números.

Los siguientes ejemplos, tomados de González et al. (1999), ilustran la creencia de muchos estudiantes de que la suma de cantidades negativas es confusa. Intuitivamente, piensan que, al sumar dos números, el resultado debe ser mayor que los números originales. Esto se evidencia cuando se les pregunta si existe un número que, al sumarse a 5, dé como resultado 2; para ellos, este ejercicio carece de sentido. Otro ejemplo se presenta cuando se pide encontrar un número tal que restado de 7, el resultado sea 10. En este caso, los estudiantes a menudo realizan la siguiente operación:  $17 - 7 = 10$  ya que interpretan que la pregunta es ¿qué número al restarle 7 da 10? Este error pone de manifiesto la tendencia de los estudiantes a centrarse en la disminución de una cantidad positiva al realizar operaciones de resta.

Esta situación se puede ubicar dentro de dos categorías de error; errores por ausencia de sentido, en la subcategoría de errores del álgebra con origen en la aritmética y errores por obstáculo epistemológico. Se clasifica por ausencia de sentido porque el error evidencia una comprensión arraigada en las propiedades de los números naturales, donde el estudiante no internaliza que la operación puede resultar en un valor positivo mediante el uso de números enteros. Por otra parte, plantea ecuaciones de forma inadecuada al interpretar la relación entre cantidades. Y en cuanto a la clasificación como un error por obstáculo epistemológico es debido a la naturaleza misma de los números negativos. (Socas, 2011).

Estos errores reflejan una barrera en el proceso de aprendizaje, en el cual los estudiantes enfrentan dificultades para adaptarse a la noción de números enteros y continúan operando como si estuvieran considerados exclusivamente números naturales.

Otro error relacionado con este tema consiste en pasar por alto el signo del número entero. Los autores ilustran este error con el siguiente ejemplo: Teniendo  $-7$  grados en Moscú

y  $-3$  en Budapest, cuando se pregunta si alguien que viajara de Moscú a Budapest notaría un aumento o disminución de la temperatura, varios estudiantes responden que notaría una disminución. Esta respuesta puede darse debido a que los estudiantes omiten el signo menos de cada uno de los números ( $-7$  y  $-3$ ) y lo que hacen es comparar los números  $7$  y  $3$ , y como  $3$  es menor que  $7$  afirman que la temperatura disminuye

Finalmente, otro error común está relacionado con la interpretación incorrecta de los símbolos literales. Un ejemplo de esta situación se presenta cuando se le pide al estudiante evaluar la veracidad de la siguiente expresión: «si  $a$  es positivo y  $b$  es negativo,  $a - b$  es un número positivo». Algunas respuestas incorrectas incluyen afirmar que  $a$  no puede ser negativo, ya que debería ser representado como  $-a$ . Otra respuesta errónea consiste en afirmar que  $a - b$  sería negativo, dependiendo de los valores específicos de  $a$  y  $b$ . En este caso, el estudiante sigue asociando los valores de  $a$  y  $b$  como positivos, lo que demuestra una comprensión limitada de la notación simbólica. Este error puede concebirse un error generado por obstáculo cognitivo y epistemológico

- Propiedades básicas de teorías de números (desigualdad, propiedades de adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación entre números enteros).

Abrate et al. (2006) identificaron que uno de los errores más comunes en los números enteros está asociado con la «ley de los signos»<sup>4</sup>. Estos autores comentan que los estudiantes aplican la ley de los signos cuando realizaban una adición o sustracción de números enteros y no de multiplicaciones. Para Abrate et al. (2006) el hecho de hacer memorizar a los jóvenes esta ley,

---

<sup>4</sup> Aunque este término no es el oficial, recurrimos a él porque puede ser el más usado en el aula de clase, la discusión de si este término es bien usado no se abarca en este trabajo.

repercute en que la preocupación sea recordarla y aplicarla sin que se distinga las operaciones involucradas. Un ejemplo de este error es:

$$-9 - 5 = 14$$

A su vez, Martínez (2018) enlista los siguientes errores obtenidos de una investigación realizada con estudiantes de segundo año de secundaria:

$$-9 + 6 = 3$$

$$-2 - 1 = 3$$

$$-2 + 2 = 4$$

Los estudiantes comúnmente creen que la ley de los signos se aplica a operaciones como adición y sustracción. Este error se puede considerar de dos tipos, didáctico o por ausencia de sentido. Se considera didáctico porque se puede asociar a la dinámica escolar orientada a memorización, haciendo que el estudiante se queda con la ley, con la nemotecnia sin sentido, no con la operación en la cual se debe aplicara la que se refiere. Por otra parte, si se toma como un error por ausencia de sentido procedimental es porque la incapacidad para realizar correctamente estas operaciones sugiere que el estudiante no ha interiorizado las reglas básicas del manejo de números negativos, lo que causa confusión.

También Martínez (2018) menciona el siguiente error:

$$(-2)(-5) \times 3 = -30$$

$$10 \div -2 = 5$$

Este tipo de error se asocia principalmente a la aplicación incorrecta de la ley de los signos en la multiplicación y división de números enteros. Su origen podría atribuirse a un obstáculo cognitivo, dado que, en ambos casos, las dificultades surgen de una comprensión insufi-

ciente de los conceptos fundamentales vinculados al manejo de los signos en operaciones aritméticas. Asimismo, podría tratarse de un error de origen didáctico, tal como se ilustra en el ejemplo mencionado anteriormente (en el que predomina una memorización mecánica carente de sentido). Por último, también cabe clasificarlo como un obstáculo epistemológico, debido a la naturaleza de los números enteros, que demanda un salto conceptual respecto a operaciones con números naturales.

Otro ejemplo, en cuanto a los números enteros, es este:

$$-(-2) + (-4) = -6$$

Este error lo describe Fory (como se citó en Martínez, 2018) como doble significado del signo menos. En este caso se evidencia que el estudiante omite el signo negativo que antecede al  $(-2)$  por lo que opera  $-2 - 4 = -6$ . Este error puede asociarse con errores por ausencia de sentido, específicamente por error de procedimiento, ya que el estudiante combina una aplicación incorrecta de reglas operativas entre números enteros.

Por otra parte, Bejarano (2022) identifica algunos errores asociados a las operaciones con potenciación y radicación en el conjunto de los números enteros. Algunos errores en cuanto a la potenciación son:

$$7^{-2} = 7 \times 7 = -14$$

$$(-4)^5 = -4 \times 5$$

$$7^{-2} = -7 \times -7 = -49$$

$$5^0 = 5 \times 0 = 5$$

Estos tipos de errores se pueden clasificar como errores por obstáculo cognitivo. El estudiante muestra una comprensión incorrecta del significado del exponente negativo, interpretándolo como una operación de multiplicación directa seguida de un cambio de signo. Este error

puede tener su origen en una generalización errónea de algunas reglas memorizadas previamente. Además, el estudiante no solo comete errores aritméticos específicos, sino que también demuestra una concepción incorrecta de las propiedades y definiciones matemáticas.

Para la radicación, algunos de los errores que Bejarano (2022) identificó son:

$$\sqrt[3]{-64} = -64 \times -64 \times -64 = 192$$

$$\sqrt[3]{-64} = 4, \text{ porque } 4 \times 4 \times 4 = 64$$

$$\sqrt{-64} = -8$$

Todos estos ejemplos son considerados errores de obstáculos cognitivos porque representan malentendidos significativos sobre las propiedades matemáticas involucradas. Asimismo, pueden considerarse como errores por obstáculo epistemológico, debido a que los estudiantes no aceptan los números negativos, omitiendo el signo menos (ejemplo 2). Cada uno refleja la falta de una conceptualización clara y adecuada de cómo funcionan las operaciones con números negativos y raíces, lo que limita la capacidad del estudiante para resolver problemas relacionados de manera efectiva.

- Relación de orden y equivalencia en sistema de números enteros

Según Cid (2022):

Los números negativos representan cantidades que tienen alguna característica desfavorable, cuya existencia se marca con el signo menos. Debido a esta connotación negativa la relación de orden en estos números se invierte respecto a los naturales: una cantidad negativa es menor cuanto mayor es su valor absoluto porque representa una situación “peor”. (p. 40)

Teniendo en cuenta lo anterior, la autora da el siguiente ejemplo:

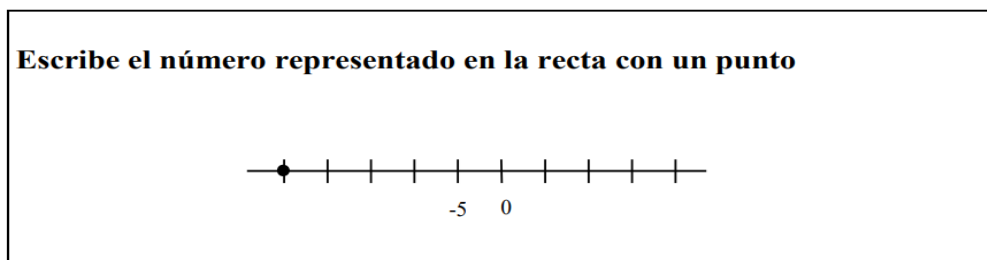
“¿Cuál es el número mayor en una unidad a  $-3$ ?” (Cid, 2022, p. 39)

Respuesta del estudiante:  $-4$ "

- En cuanto ubicación de números negativos en la recta numérica, Bruno y Cabrera (2003) proponen el ejercicio que se dispone en la Figura 19.

### Figura 19

*Ejercicio de representación en la recta numérica de números negativos*

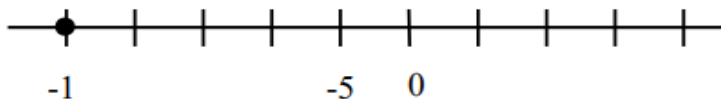


Fuente. Bruno y Cabrera (2003)

La respuesta de algunos estudiantes se refleja en la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia..**

### Figura 20

*Respuesta de ejercicio propuesto en la Figura 19*



Fuente: Bruno y Cabrera (2003)

Este error es considerado un error de reversibilidad, el cual consiste en colocar los números negativos en orden contrario en la recta (Bruno y Cabrera, 2003). La incorrecta ubicación de los números negativos indica que el estudiante no ha logrado construir una representación mental adecuada de la recta numérica, en la que los números negativos deben estar a la izquierda del cero. Por ende, este error es generada por obstáculo cognitivo, este error evidencia que el estudiante no ha establecido conexiones significativas con las propiedades de los números negativos.

### 6.4.3 *Proporcionalidad directa o inversa*

Rivas (2012) propone que los errores relacionados con la proporcionalidad se pueden observar en dos casos: el primer caso es en el uso incorrecto de las estrategias apropiadas y el segundo caso en el uso de una estrategia inapropiada. Las estrategias erróneas más comunes son: ignorar parte de los datos, esta estrategia se da cuando los estudiantes responden basándose únicamente en la comparación de solo los antecedentes de dos razones o los consecuentes (Rivas, 2012). Otra estrategia errónea es realizar operaciones al azar con parte de los datos, este error se presenta cuando el estudiante solo se enfoca en presentar una respuesta al problema planteado, realiza operaciones con parte de los datos para hallar un número desconocido, el cual es presentado como solución. El último error presentado por el autor es la estrategia aditiva errónea, según Rivas (2012), “se manifiesta cuando la relación entre las razones es calculada a través de la sustracción entre sus términos y luego la diferencia es aplicada para obtener la segunda razón” (p. 57).

Por otra parte, Aroza (2016) identifica errores recurrentes en estudiantes al resolver problemas de proporcionalidad directa e inversa. El primero consiste en no distinguir cuándo dos magnitudes guardan una relación directa o inversa. Para ejemplificar esto, el autor propone un ejercicio donde se solicita clasificar pares de magnitudes según su tipo de proporcionalidad. Entre los casos analizados se encuentran:

- "c) la velocidad de un tren y el tiempo que tarda en ir de Córdoba a Badajoz.
- d) El caudal de una fuente y el tiempo que tarda en llenar un cántaro" (Aroza, 2016, p. 19).

En ambos casos la mayoría de los alumnos afirman que son directamente proporcionales. Este error también se evidencia en los siguientes ejemplos:

“Un autobús de línea, a 80 km/h, tarda 25 minutos en cubrir la distancia entre dos pueblos. ¿Cuánto tardaría si fuera a 100 km/h?” (Aroza, 2016, p. 21).

A lo cual la respuesta de algunos estudiantes es plasmada en la Figura 21

### Figura 21

*Solución errónea de ejemplo 1 proporción*

$$\begin{array}{rcl}
 \textit{Velocidad (km/h).} & & \textit{Tiempo (minutos).} \\
 80 & \rightarrow & 25 \\
 100 & \rightarrow & x \\
 \\ 
 \frac{80}{100} & = & \frac{25}{x} \\
 \\ 
 80x & = & 100 \cdot 25 \\
 \\ 
 x & = & 31,25 \textit{ minutos.}
 \end{array}$$

Fuente: Aroza (2016)

El segundo ejemplo al es: “un grifo, con un caudal de 12 litros por minuto ha tardado tres cuartos de hora en llenar un depósito. ¿Cuál deberá ser el caudal para llenar el mismo depósito en 20 minutos?” (Aroza, 2016, p. 23). La respuesta de los algunos estudiantes está en la Figura 22

### Figura 22

*Solución errónea de ejemplo 2 proporción*

$$\begin{array}{rcl}
 \textit{Caudal (l/m).} & & \textit{Tiempo (horas).} \\
 12 & \rightarrow & 0,75 \\
 x & \rightarrow & 0,20 \\
 \\ 
 \frac{12}{x} & = & \frac{0,75}{0,20} \\
 \\ 
 12 \cdot 0,20 & = & x \cdot 0,75 \\
 \\ 
 x & = & 3,2 \textit{ l/m.}
 \end{array}$$

Fuente: Aroza (2016)

En ambos casos el autor evidencia que la mayoría de los estudiantes resuelven el problema haciendo uso de la regla de tres directa. Este error puede atribuirse a un obstáculo cognitivo debido a la falta de comprensión de los conceptos. Otros errores observados por Aroza (2016) se presentan en la siguiente situación: “Un besugo de un kilo y doscientos gramos ha costado 14,40 euros. ¿Cuánto costará otro besugo de ochocientos gramos?” (Aroza, 2016, p. 20).

### Figura 23

*Solución errónea 1 de ejemplo 3 proporción*

<i>Besugos.</i>	→	<i>Precio (€/kg).</i>
1	→	14,40
2	→	<i>x</i>

Fuente. Aroza (2016)

### Figura 24

*Solución errónea 2 de ejemplo 3 proporción*

<i>kg de besugo.</i>	→	<i>Precio (€).</i>
1,20	→	14,40
0,80	→	<i>x</i>
$\frac{1,20}{0,80} = \frac{x}{14,40}$		

Fuente. Aroza (2016)

Según el autor, en el error presentado en la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** los estudiantes no distinguen las magnitudes que son directamente proporcionales (Aroza, 2016). En cuanto a la Figura 24 se evidencia que el estudiante plantea de manera adecuada la regla de tres directa pero las fracciones equivalentes que propone no son las correctas.

#### 6.4.4 Variación (relación de diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas)

Los errores descritos en esta sección son fruto del trabajo realizado por Andrade (1998), dicha investigación se centró en identificar cuáles eran las dificultades y errores de los estudiantes al momento de aprender la noción de variación. Los errores que describe la autora son dos:

El primer error es “Los estudiantes escriben una fórmula que no corresponde al enunciado o recurren al ejemplo numérico para justificar su respuesta” (Andrade, 1998, p. 12).

Para ejemplificar este error, la autora analizó las respuestas del siguiente problema:

“En un colegio hay seis veces más estudiantes que profesores. Si E representa la cantidad de estudiantes y P la cantidad de profesores escriba la fórmula que relaciona E y P. Explique su respuesta” (Andrade, 1998, p. 10). Algunos estudiantes respondieron:

+E, -P porque esto simbolizaba más cantidad de estudiantes que de profesores, otros estudiantes afirmaron que la respuesta era  $E+P$  justificando que si E es mayor que P entonces  $P = 6$  y  $E = 12$ . Por último, algunos estudiantes simplemente justificaban la respuesta con un valor numérico  $60 = 6P$  o  $P \cdot 6 = 36$ . (Andrade, 1998, p. 10)

Este error puede clasificarse como error por ausencia de sentido, ya que evidencia una transición incompleta del pensamiento aritmético al algebraico; además, por la dificultad de abstraer patrones.

El segundo error mencionado por la autora es “Falta relación entre la representación de una misma situación de variación en gráficas, tablas o fórmulas” (Andrade, 1998, p. 12). Este error tiene origen en las respuestas obtenidas por parte de los estudiantes al siguiente problema:

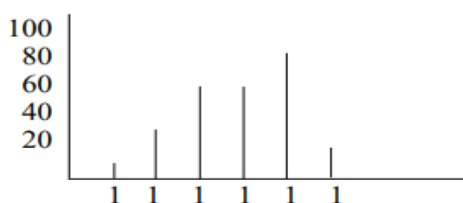
Un automóvil consume 1 galón de gasolina por cada 20 kilómetros recorridos. a)  
Hacer una tabla para mostrar el consumo de gasolina y de kilometraje recorrido

durante un trayecto de 120 kilómetros. b) Hacer una gráfica que muestre el resultado de la tabla. c) Determinar cuántos kilómetros se recorrieron con un consumo de 8.5 galones. (Andrade, 1998, p. 10)

La respuesta del ítem a refleja que algunos estudiantes no comprendieron el concepto de variación, dado que, a pesar de que los kilómetros aumentaban progresivamente en intervalos de 20 hasta alcanzar 120, el valor asignado al consumo de gasolina permaneció constante en 1 en todos los casos. Para el ítem b los errores que describió la autora son no graficar correctamente, realizar la recta en el plano cartesiano, pero en vez de partir desde el origen lo hacían desde 1,20. También, como se refleja en la Figura 25, según Andrade (1998) “Los que no varían sino una sola variable en la tabla, tampoco la varían en la gráfica” (p. 10). El siguiente es un ejemplo de lo mencionado por la autora:

### Figura 25

*Gráfica de ítem b*



Fuente: Andrade (1998)

Para la autora, en esta respuesta “Interpretan la letra en ecuaciones algebraicas con un único valor; o falta concordancia entre la respuesta y su justificación” (Andrade, 1998, p. 10). Por último, para el ítem c la respuesta errónea que se evidenció fue: “recorrió 165 kilómetros porque si gasté un galón entonces 8.5 galones es 165 kilómetros” (Andrade, 1998, p. 11).

Este error puede clasificarse como un error por obstáculo epistemológico, esto es debido a la incapacidad para traducir entre sistemas de representación (simbólico, gráfico, numérico) y

coordinar sus significados, esto también se puede atribuir a una enseñanza tradicional que prioriza un solo registro sin fomentar la flexibilidad cognitiva, lo que recae en un error por obstáculo didáctico.

#### 6.4.5 *Ecuaciones lineales en el sistema de números racionales y sistema de números enteros*

- Existen errores de los números racionales que se evidencian al resolverse

ecuaciones lineales; por ejemplo, Pérez et al. (2019) categorizan los errores en cuanto a las ecuaciones lineales en tres. Los errores aritméticos, los errores algebraicos y los errores mixtos aritmético-algebraicos. Para el primer tipo de error, los autores identifican los errores en operaciones con fracciones, mencionando el siguiente ejemplo:

$$3x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{1}{2} \div 3 \rightarrow x = \frac{3}{2}$$

En este ejemplo, el estudiante demuestra comprensión sobre el comportamiento de las ecuaciones y las propiedades de la multiplicación. Sin embargo, al momento de dividir opera de manera errónea.

Este error se puede clasificar dentro de la categoría de errores por ausencia de sentido, un error de procedimiento debido a que el estudiante realiza de manera errónea la operación.

Por otra parte, en su tesis de doctorado, Egodawatte (2011) denomina los errores por distributiva incompleta, lo cual sucede cuando los estudiantes multiplican el número que deben distribuir solo por el término más cercano, por ejemplo:

$$3 \left( \frac{x}{7} + \frac{1}{2} \right) = 20 \rightarrow \frac{3x}{7} + \frac{1}{2} = 20$$

Este error se puede clasificar dentro de la categoría de errores por ausencia de sentido, específicamente error del álgebra que tiene origen en la aritmética ya que evidencia una comprensión incompleta de la propiedad distributiva.

En cuanto a los errores algebraicos Pérez et al. (2019) identifican dos subcategorías: errores de concepto y errores de procedimiento propios de las ecuaciones. En el error por concepto los autores identifican dos tipos de errores. El primero, mencionado previamente por Socas (2007), corresponde al error por falta de clausura. Este ocurre cuando el estudiante no logra distinguir entre términos algebraicos con incógnita y términos independientes, operando incorrectamente entre ellos. Un ejemplo de esto es el siguiente:

$$\frac{5x}{3} + 3 = 6 \rightarrow \frac{8x}{3} = 6$$

Este error Socas (2011) lo relaciona directamente con un error por obstáculo.

Otro error de este tipo es el error en el coeficiente, el cual se da cuando los estudiantes transponen al otro miembro de la incógnita como si se trata de una suma en vez de una multiplicación Pérez et al. (2019) ejemplo de este error es:

$$\frac{3x}{4} + 12 = 0 \rightarrow x = -12 - \frac{3}{4}$$

Este error podría ser catalogado como un error por ausencia de sentido, específicamente un error por procedimiento. Este tipo de error ocurre cuando un estudiante comete una equivocación en los pasos algebraicos necesarios para resolver la ecuación. En este caso, el error específicamente radica en la manipulación algebraica.

En la segunda subcategoría, denominada errores de procedimiento propios de las ecuaciones, están los errores directamente relacionados con el método utilizado por los estudiantes para

resolver las ecuaciones (Kieran y Filloy, 1989). El método de la balanza, que se utiliza para enseñar la resolución de ecuaciones, puede llevar a los estudiantes a cometer el error de operar solo en uno de los lados de la igualdad. Según Pérez et al. (2019), un ejemplo de este error es el siguiente:

$$\frac{2}{3}x + 5 = 10 \rightarrow \frac{2}{3}x + 5 - 5 = 10$$

Este error en una primera instancia, como sugieren los autores podría situarse dentro de la categoría errores por ausencia de sentido, en la subcategoría de errores de procedimiento, ya que el estudiante sigue un algoritmo de resolución, pero lo aplica de manera incompleta o incorrecta.

Por otra parte, los autores observaron que al momento de resolver las ecuaciones usando el método de las reglas «del pasa a» los estudiantes comenten el siguiente error:

$$-\frac{6x}{5} = 2 \rightarrow x = \frac{6}{5} + 2$$

Este error se puede situar en la categoría de errores de procedimiento, ya que el estudiante, sigue mal las reglas de despeje de una incógnita en una ecuación lineal debido a que realiza una operación mecánica sin comprender el significado algebraico de la operación.

Otro error en este tipo de resolución es mencionado Pérez et al. (2019) el cual consiste en mezclar dos reglas del procedimiento de la regla «del pasa a», creando una nueva e incorrecta regla. El error consiste en pasar lo que está multiplicando a dividir, pero con el signo contrario:

$$-3y = -\frac{1}{2} \rightarrow y = -\frac{1}{6}$$

Este tipo de errores se puede clasificar como errores de procedimiento debido a la aplicación incorrecta de las reglas de los signos.

Por último, los autores reconocen los errores mixtos aritmético-algebraico, en los cuales mencionan los siguientes ejemplos:

$$\frac{5x}{3} + 2 = 3 \rightarrow 5x + 2 = 9$$

No queda claro si los estudiantes aplican incorrectamente la regla del pasa a, error algebraico, o si pasan el término que está dividiendo al otro miembro para evitar sumar un número y una fracción, error aritmético (Pérez et al., 2019, p. 90).

De acuerdo con la clasificación de Socas (2011) se podría ubicar este error en la categoría de errores por ausencia de sentido específicamente en errores del álgebra con origen en la aritmética, ya que evidencia una deficiencia en la comprensión de las operaciones con fracciones.

- En cuanto a las ecuaciones lineales en el sistema de números enteros, Pérez et al. (2019) evidencian varios errores por parte de los estudiantes en un estudio realizado a 266 estudiantes entre los 13 y 16 años en la enseñanza de ecuaciones lineales de una incógnita. Uno de los errores allí mencionados es el que ellos llaman *Errores algebraicos propios de las ecuaciones*, en el que exponen el siguiente error:

$$\text{Si } 3x + 1 = 0 \text{ entonces } x = -1 - 3$$

El error está cuando se toma el coeficiente que acompaña la incógnita como si estuviera sumando, despejando de manera equívoca. Este podría ser un error por obstáculo, el estudiante no comprende las operaciones inversas que están implícitas para lograr despejar una incógnita correctamente.

Por otra parte, Vlassis (2008 como se citó en Chamchougia, 2024) muestra cuáles son los problemas de los estudiantes con respecto al símbolo negativo en ecuaciones. El primer problema es que los estudiantes intentan adivinar el número que satisfaga la ecuación  $4 - x = 5$ , sin embargo no consideran valores negativos. Se puede clasificar como un error por obstáculo epistemológico, debido a que este error se debe a que los estudiantes no comprenden que, para que la ecuación se cumpla, el valor de la incógnita debe ser un número negativo. La incapacidad de

pensar en los números negativos refleja una falta de entendimiento de la naturaleza de las ecuaciones y de cómo se relacionan los números entre sí.

El segundo problema se evidencia cuando al tener la solución del problema el estudiante no comprende el concepto de signos de resta consecutivos.

$$4 - (-1) = 5$$

Este error puede ser por obstáculo cognitivo. La confusión de los estudiantes al interpretar los signos de resta consecutivos denota un obstáculo cognitivo, ya que tienen dificultades para aplicar la regla que establece que restar un número negativo equivale a sumar su valor absoluto. Este malentendido se relaciona con la propiedad de los números negativos y su manipulación.

El tercer problema es omitir los signos negativos, simplificando ecuaciones como:

$$-x = 1 \rightarrow x = 1$$

$$-6x = 24 \rightarrow 6x = 24 \rightarrow x = 4$$

Este error es por obstáculo epistemológico. Cuando los estudiantes omiten los signos negativos y simplifican incorrectamente las ecuaciones, demuestran una falta de comprensión sobre la importancia de los signos en las operaciones algebraicas.

Cifuentes, Dimaté, et al. (2016) en la cartilla Ecuaciones lineales con una incógnita, un trabajo realizado por la Universidad de los Andes muestra una unidad didáctica con la cual se busca favorecer al aprendizaje de la solución de ecuaciones lineales de una incógnita. Esta cartilla, además de presentar el paso a paso de cada unidad y de las actividades que se podrían trabajar, muestra un cuadro el cual resume los errores que se pueden presentar al momento de resolver este tipo de problemas:

### **Tabla 7**

*Errores comunes en la solución de ecuaciones lineales.*

<b>Error</b>	<b>Descripción</b>
<b>D1 Dificultad para dar uso y significado algebraico a las letras</b>	
E1	No identificar una variable a menos que se represente por $x$
E2	Utilizar la misma letra para representar varias cantidades
E3	Confundir la variable $x$ con la notación del producto
<b>D2 Dificultad para pasar del lenguaje verbal al algebraico y viceversa</b>	
E4	Representar en forma incorrecta la traducción de una expresión verbal al lenguaje simbólico
E5	No reconocer las palabras del lenguaje cotidiano que se relacionan con las operaciones
E6	Hacer uso inadecuado del paréntesis, para expresar cantidades
E7	Falta de comprensión en el enunciado de un problema debido a dificultades de lenguaje
<b>D3 Obstáculos ocasionados por falta de aprendizaje de conceptos Básicos del tema</b>	
E8	Aplicar de manera incorrecta la ley de los signos
<b>D4 Dificultad para transformar ecuaciones equivalentes</b>	
E9	Igualar dos expresiones que no representan la misma cantidad
E10	Transponer en forma inadecuada los términos al aplicar el algoritmo de la solución de una ecuación
E11	Confundir la reducción de términos semejantes de las expresiones algebraicas con la aplicación de las propiedades de la potenciación
E12	Asignar datos a variables que no corresponden
E13	Realizar la sustitución numérica en forma incorrecta al probar los resultados obtenidos
<b>D6 Dificultad al remplazar un valor en una fórmula</b>	
E14	Asignar un valor dado a una variable que no corresponde en una fórmula
<b>D7 Dificultad para interpretar el enunciado y determinar las cantidades que hay que considerar para resolver el problema y establecer relaciones entre las cantidades</b>	

E15	No relacionar los resultados obtenidos con el enunciado durante el proceso de solución de una tarea
-----	---

*Nota.* Adaptado de Cifuentes, Dimaté, et al. (2016)

## 7. METODOLOGÍA

En este capítulo se expone el proceso creativo de los memes educativos, fundamentado en el marco de referencia que integra: la identificación y clasificación de tipos de errores matemáticos con base en algunos estudios previos de Didáctica de las Matemáticas; la caracterización de los objetos matemáticos asociados a los contenidos curriculares de cada ciclo de secundaria y la revisión de fuentes académicas (artículos científicos, trabajos de grado e investigaciones) que documentan errores y dificultades recurrentes en el aprendizaje de dichos objetos. Asimismo, se mencionan los criterios de selección de los memes generados, los cuales están dirigidos a estudiantes de grados sexto y séptimo. Esta sección busca, además, establecer una conexión entre el diseño de los memes, los referentes teóricos y los objetivos educativos planteados en el trabajo.

El proceso para la elaboración de estos memes ha estado ligado a lo presentado por autores como Balda (2019) y Zúñiga (2020) fundamentalmente, quienes han usado los memes como recurso en el aula de clase.

De acuerdo con lo anterior, las fases de este trabajo fueron las siguientes:

Fase I. Consolidación de un marco de referencia alrededor de los memes (elaboración, características) y errores en aritmética y álgebra

Fase II. Acopio de objetos en aritmética y álgebra para la educación secundaria en Colombia

Fase III. Exploración de errores frecuentes relacionado con los objetos matemáticos seleccionados

Fase IV. Selección de errores para elaboración de los memes

Fase V. Selección de plantillas para elaboración de los memes

Fase VI. Versión definitiva de los memes

A continuación, se describirá cada una de estas fases.

### **7.1 Fase I. Investigación de memes (elaboración, características) y errores en aritmética y álgebra**

El punto de partida de este trabajo fue profundizar en el mundo de los memes. Aunque el autor ha estado al día con las tendencias virales en redes sociales (cómo surgen y qué temas abordan), nunca había participado en la creación de alguno. Por eso, antes de avanzar, fue necesario indagar sobre: ¿qué rasgos definen a un meme?, ¿cómo se elabora?, ¿existen reglas para que algo sea considerado meme? Esto ayudó a entender que, más allá del humor o las imágenes, un meme debe ser replicable, reconocible por una comunidad y transmitir un mensaje claro, incluso si se adapta a distintos contextos.

Con esa base clara, lo siguiente fue indagar sobre algunos errores comunes en álgebra y aritmética. Aquí, el objetivo era identificar los errores comunes que cometen los estudiantes. Para ello, primero fue necesario diferenciar entre un error y una dificultad. Luego, concentrarse en analizar no solo cómo surgen esos errores, sino también por qué persisten: ¿se deben a fallas en la enseñanza?, ¿a confusiones conceptuales?, ¿a hábitos adquiridos?

La conexión entre ambas partes (memes y errores matemáticos) se estableció al plantear que los memes podrían ser una herramienta útil para visibilizar y corregir esos errores, aprovechando su capacidad para *viralizar* ideas de forma sencilla y atractiva.

## **7.2 Fase II. Acopio de objetos en aritmética y álgebra para la educación secundaria en Colombia**


Con una base sólida sobre los memes y los errores matemáticos, el siguiente paso fue definir cuáles contenidos de aritmética y álgebra se abordan en los grados sexto y séptimo de secundaria en Colombia. Para esto, se analizaron documentos oficiales colombianos, especialmente los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) y los Estándares Básicos de Competencias. Estos escritos permitieron elaborar un listado de temas claves (operaciones con números enteros, resolución de ecuaciones simples o manejo de números fraccionarios, entre otros), los cuales orientaron el trabajo hacia un objetivo concreto: identificar algunos errores comunes que los estudiantes cometen al abordar/estudiar estos objetos. Así, la relación entre los memes y las matemáticas empezó a tomar forma, centrándose en cómo estos recursos visuales podrían ayudar a corregir fallos específicos en el aula.

## **7.3 Fase III. Exploración de errores frecuentes relacionado con los objetos matemáticos seleccionados**

Esta fase fue la más intensa de todo el trabajo. Una vez identificados los temas clave de álgebra y aritmética, el reto fue encontrar los errores más frecuentes que cometen los estudiantes sobre cada uno de tales contenidos, para lo que fue necesario hacer un estudio de tipo documental. Algunos, como los errores en operaciones con fracciones o ecuaciones lineales, eran fáciles de reconocer; sin embargo, otros, como los relacionados con la representación polinomial de números racionales o al realizar operaciones como radicación y potenciación, resultaron mucho más complejos, no había muchas investigaciones al respecto.

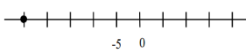
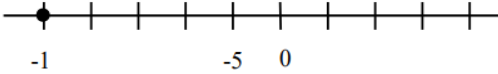
Para esta fase, se revisaron más de 30 fuentes: artículos académicos, tesis de grado e investigaciones de otras universidades. La mayor dificultad fue que muchos documentos explicaban los errores de forma teórica, pero pocos mostraban casos reales o ejercicios mal resueltos por estudiantes. Tras semanas de análisis, se logró recopilar suficientes ejemplos concretos, los cuales se resumen en la Tabla 8 que se presenta más adelante. Otra dificultad en esta fase fue determinar a qué tipo de error correspondía cada uno de los errores hallados de acuerdo con el marco de referencia asumido, pues en algunos ejemplos no era tan evidente. Este proceso no solo confirmó qué errores eran los más persistentes, sino que también reveló cuales objetos matemáticos carecen de estudio en cuanto a identificación de errores o dificultades.

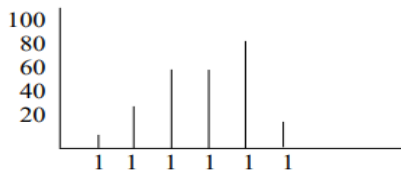
**Tabla 8***Recopilación de errores*

	Contenido	Error (ejemplo específico)	Tipo de error
1	Representación de números racionales como fracciones	Sesgo de número natural	Error generado por obstáculo cognitivo
2	Representación de números racionales de forma gráfica	<p style="text-align: center;">-----  <b>Respuesta alumno</b>            -----  <i>Divido la pizza en tres partes y cojo una</i></p> 	Error generado por obstáculo cognitivo o error generado por obstáculo didáctico
3	Representación de números racionales en la recta numérica	Considerar $\frac{3}{2}$ como 3,2 y $-\frac{1}{2}$ como $-1,2$ y ubicar $\frac{3}{2}$ como 3 y $-\frac{1}{2}$ como $-1$ .	Error generado por obstáculo cognitivo
4	Representación de números racionales como decimales	Representar 37 milésimas como 37000 o 3 centésimas como 300	Error generado por obstáculo cognitivo
		Pensar que 0,036 es igual a 36, viendo el número como entero y pensar que 0,27 es diferente de 0,270, esto se asocia con que el estudiante considera que 27 es menor que 270.	Error generado por obstáculo cognitivo
5	Representación de números racionales como porcentaje	Hallar erróneamente el 30% de 500 $\frac{500}{30} = 16,666$ $\frac{30 \times 100}{500} = 6$	Error por ausencia de sentido, error procedimental

		$\frac{500}{30} \times 10 = 166,66$		
6	Operaciones con números racionales expresados como fracción	Adición	$\frac{2}{6} + \frac{2}{3} = \frac{4}{18}$ $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1+2}{6} = \frac{3}{6}$ Sesgo de número natural $\frac{2}{5} + \frac{2}{3} = \frac{4}{8}$	Error generado por obstáculo cognitivo o error generado por obstáculo didáctico
		Sustracción	$\frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$ $\frac{4}{5} - \frac{3}{4} = \frac{4}{20} - \frac{3}{20} = \frac{1}{20}$ Sesgo de número natural $\frac{3}{5} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$	Error generado por obstáculo cognitivo
		Multiplicación	$\frac{1}{3} \times \frac{2}{9} = \frac{3}{9} \times \frac{2}{9} = \frac{6}{9}$	Error generado por obstáculo cognitivo
		División	$\frac{1}{2} \div \frac{7}{12} = \frac{14}{12}$	Error generado por obstáculo cognitivo
7	Operaciones con números racionales expresados como decimales	$0,70 + 0,40 + 0,20 = 0,130$ $17,3 + 21,8 = 38,11$ $3,15 \times 10 = 30,150$ $2,3 \times 2,3 = 4,9$		Error generado por obstáculo cognitivo o error generado por obstáculo didáctico
8	Potenciación y radicación en los números racionales	$\left(\frac{2}{9}\right)^{-2} = -\frac{4}{81}$ $\left(\frac{2}{9}\right)^{-2} = -\frac{4}{18}$		Error generado por obstáculo cognitivo

9	Relación de orden y equivalencia	<p>La fracción <math>\frac{1}{2}</math> es menor que <math>\frac{1}{3}</math>, basándose en que 2 es menor que 3.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p><b>Rodea el número mayor</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <input checked="" type="radio"/> 0,37</li> <li>• 0,5</li> </ul> <p>¿Cómo lo has sabido?</p> <p><i>Porque el 37 es más mayor que el 5.</i></p> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 5px;"> <p><b>Rodea la fracción mayor</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\frac{5}{3}</math></li> <li>• <input checked="" type="radio"/> <math>\frac{9}{7}</math></li> </ul> <p>¿Por qué crees que la fracción que has elegido es la mayor?</p> <p><i>porque el denominador y numerador es mayor</i></p> </div>	Error generado por obstáculo cognitivo, sesgo de número natural	
		$\frac{2}{5} = \frac{8}{11} = \frac{14}{17}$	Error por ausencia de sentido, error procedimental	
10	Simplificación de fracciones	$\frac{3}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{o} \quad \frac{4}{9} = \frac{2}{3}$ $\frac{4}{15} = \frac{2}{3}$	Error por ausencia de sentido, error de procedimiento	
11	Propiedades de las relaciones entre números racionales y sus operaciones	$\frac{1}{2} \div \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \right) = \frac{7}{12} \div \frac{1}{2} = \frac{14}{12}$ $6,32 - 5,45 = 5,45 - 6,32$	Error generado por obstáculo cognitivo	
12	Asociación de dígitos decimales con números enteros		No hay números entre 3,14 y 3,15	Error generado por obstáculo cognitivo
	Comparación de fracciones o números decimales de la misma clase		$3,14 = \frac{314}{100}$ y $3,15 = \frac{315}{100}$	Error generado por obstáculo cognitivo
	Reglas de redondeo		0,799 y 0,80 no existe ningún otro número porque 0,80 es el redondeo de 0,799	Error por ausencia de sentido
13	Representación polinomial de números racionales	$4 \times 10^1 + 2 \times 10^0 + 6 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2} = 4265$	Error por ausencia de sentido	

14	Naturaleza de número entero	<p>Se pide encontrar un número tal que restado de 7, el resultado sea 10. Respuesta de estudiantes: <math>17 - 7 = 10</math>.</p> <p>Teniendo <math>-7</math> grados en Moscú y <math>-3</math> en Budapest, cuando se pregunta si alguien que viajara de Moscú a Budapest notaría un aumento o disminución de la temperatura, varios estudiantes responden que notaría una disminución</p> <p>«si <math>a</math> es positivo y <math>b</math> es negativo, <math>a - b</math> es un número positivo». Algunas respuestas incorrectas incluyen afirmar que <math>a</math> no puede ser negativo, ya que debería ser representado como <math>-a</math>. Otra respuesta errónea consiste en afirmar que <math>a - b</math> sería negativo, dependiendo de los valores específicos de <math>a</math> y <math>b</math></p>	<p>Errores por ausencia de sentido, errores del álgebra con origen en la aritmética</p> <p>Error generado por obstáculo cognitivo y epistemológico</p>
15	Propiedades básicas de teorías de números (desigualdad, propiedades de adición sustracción, multiplicación, división y potencia entre números enteros)	$\begin{aligned} -9 - 5 &= 14 \\ -9 + 6 &= 3 \\ -2 - 1 &= 3 \\ -2 + 2 &= 4 \\ (-2)(-5) \times 3 &= -30 \\ 10 \div -2 &= 5 \\ -(-2) + (-4) &= -6 \end{aligned}$ $\begin{aligned} 7^{-2} &= 7 \times 7 = -14 \\ (-4)^5 &= -4 \times 5 \\ 7^{-2} &= -7 \times -7 = -49 \\ 5^0 &= 5 \times 0 = 5 \end{aligned}$ $\begin{aligned} \sqrt[3]{-64} &= -64 \times -64 \times -64 = 192 \\ \sqrt[3]{-64} &= 4, \text{ porque } 4 \times 4 \times 4 = 64 \\ \sqrt{-64} &= -8 \end{aligned}$	<p>Error generado por obstáculo didáctico y error por ausencia de sentido</p> <p>Error generado por obstáculo cognitivo y epistemológico</p> <p>Error generado por obstáculo cognitivo</p>
16	Relación de orden y equivalencia en sistema de números enteros	<p>“¿Cuál es el número mayor en una unidad a <math>-3</math>?”.</p> <p>Respuesta del estudiante: <math>-4</math>”</p> $-8 > -1$ <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>Escribe el número representado en la recta con un punto</p>  </div> <p>Respuesta:</p> 	Error generado por obstáculo cognitivo y epistemológico

17	Proporcionalidad directa o inversa	<p>“un grifo, con un caudal de 12 litros por minuto ha tardado tres cuartos de hora en llenar un depósito. ¿Cuál deberá ser el caudal para llenar el mismo depósito en 20 minutos?”</p> <p style="text-align: center;"><i>Caudal (l/m).      Tiempo (horas).</i></p> $\begin{array}{ccc} 12 & \rightarrow & 0,75 \\ x & \rightarrow & 0,20 \end{array}$ $\frac{12}{x} = \frac{0,75}{0,20}$ $12 \cdot 0,20 = x \cdot 0,75$ $x = 3,2 \text{ l/m.}$	Error generado por obstáculo cognitivo
18	Variación (relación de diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas)	<p>Los estudiantes que solo varían una variable en la tabla tampoco la varían en la gráfica.</p> 	Error por obstáculo epistemológico
19	Ecuaciones lineales en el sistema de números racionales y sistema de números enteros	$3x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{1}{2} \div 3 \rightarrow x = \frac{3}{2}$ $\frac{3x}{4} + 12 = 0 \rightarrow x = -12 - \frac{3}{4}$ $\frac{2}{3}x + 5 = 10 \rightarrow \frac{2}{3}x + 5 - 5 = 10 - 5$ $-\frac{6x}{5} = 2 \rightarrow x = \frac{6}{5} + 2$ $-3y = -\frac{1}{2} \rightarrow y = -\frac{1}{6}$	Error por ausencia de sentido, error de procedimiento
		$3\left(\frac{x}{7} + \frac{1}{2}\right) = 20 \rightarrow \frac{3x}{7} + \frac{1}{2} = 20$ $\frac{5x}{3} + 2 = 3 \rightarrow 5x + 2 = 9$	Error por ausencia de sentido, error del álgebra que tiene origen en la aritmética
		$\frac{5x}{3} + 3 = 6 \rightarrow \frac{8x}{3} = 6$	Error generado por obstáculo cognitivo
		<p>Si <math>3x + 1 = 0</math> entonces <math>x = -1 - 3</math>  No considerar valores negativos para la ecuación  <math>4 - x = 5</math>  <math>-x = 1 \rightarrow x = 1</math>  <math>-6x = 24 \rightarrow 6x = 24 \rightarrow x = 4</math>  Errores mencionados en Tabla 7</p>	Error generado por obstáculo cognitivo

#### **7.4 Fase IV. Selección de errores para elaboración de los memes**

Después de identificar y organizar los errores seleccionados, llegó el momento de decidir cuáles serían convertidos en memes. Aquí, el desafío fue doble ya que, por un lado, cada tema matemático (y sus subtemas) debía tener al menos un meme; por otro, la elección no podía ser aleatoria. Para esto, la base fueron dos principios: la experiencia del autor como docente (tomando errores que se observan repetirse en el aula, como confusiones al simplificar fracciones o errores de signos en operaciones con números enteros) y la viabilidad de adaptar esos errores a un formato visual y humorístico.

Aunque en parte la selección final dependió un poco del criterio personal del autor, siempre se buscó equilibrar los asuntos de tipo pedagógico con «lo viral». El objetivo principal fue que cada meme no solo identificara un error matemático común, sino que también promoviera una reflexión activa y dinámica sobre su naturaleza y origen.

#### **7.5 Fase V. Selección de plantilla para elaboración de los memes**

La elección de la plantilla ideal para cada meme fue un paso crucial. Las preguntas claves que direccionaron la creación fueron: ¿La imagen o el GIF transmitirían claramente el mensaje matemático?, ¿lograrían captar la atención de los estudiantes sin perder el humor?, y, sobre todo ¿los harían reflexionar sobre el error? Algunas plantillas parecían divertidas al principio, pero no dejaban clara la enseñanza, otras eran demasiado abstractas. Así que se probaron combinaciones, se cambiaron textos y ajustaron los memes. En el proceso de selección, algunas plantillas fueron descartadas por no transmitir un mensaje concreto o por no adecuarse al error matemático específico que se buscaba ilustrar. Un ejemplo de esto fue la plantilla mostrada en la Figura 26, la cual

se descartó para el ejemplo considerado debido a que su mensaje «técnicamente no hay nada de malo», contradecía la existencia de un error real cometido por el estudiante.

### Figura 26

#### *Plantilla descartada 1*



Fuente: <https://www.youtube.com/watch?app=desktop&v=-4a3Qko88dY>

De manera similar, la plantilla presentada en la Figura 27 también fue descartada debido a la falta de claridad en el mensaje que transmitía. Se consideró que su ambigüedad impediría comunicar eficazmente la idea para el ejemplo matemático específico, lo que motivó su exclusión del conjunto final de plantillas seleccionadas.

### Figura 27

#### *Plantilla descartada 2*



Fuente: <https://www.google.com/url?sa=i&url=https%3A%2F%2Fwww.wattpad.com%2FAE>

En contraposición, se escogieron plantillas que permitieran señalar el error de manera clara y, simultáneamente, promover la reflexión sobre su origen o sus implicaciones. Por ejemplo, la plantilla ilustrada en la Figura 28 se seleccionó por su capacidad para representar cómo el lenguaje utilizado en el aula por los docentes puede intensificar la confusión en los estudiantes. Asimismo, la plantilla de la Figura 29 se empleó para evidenciar situaciones en las que los estudiantes, al enfrentarse a dos opciones incorrectas, experimentan incertidumbre al no poder decidir cuál elegir. Se consideró que ambas plantillas eran eficaces para comunicar el mensaje del error de forma concisa y estimular una comprensión más profunda del concepto matemático presente.

## Figura 28

*Plantilla seleccionada 1*



Fuente. <https://imgflip.com/memegenerator/168453057/High-five-drown>

## Figura 29

*Plantilla seleccionada 2*



Fuente. <https://imgflip.com/memegenerator/Two-Buttons>

### 7.6 Fase VI. Versión definitiva de los memes

Teniendo en cuenta el objeto matemático, el error correspondiente, su tipo y las plantillas de memes seleccionadas, se procedió a la creación de los memes siguiendo las pautas y directrices descritas por Beltrán (2016). Este proceso culminó en la generación de los memes los cuales se presentan en el capítulo siguiente.

## 8. LOS MEMES DISEÑADOS

En este capítulo se exponen los memes, resultado principal de este trabajo. Diseñados para ser usados como una estrategia didáctica que permita identificar y reflexionar sobre errores comunes en el aprendizaje de las matemáticas en estudiantes de sexto y séptimo grado. Estos errores son tomados de investigaciones realizadas por diversos autores alrededor de la aritmética y el álgebra (expuestos en el capítulo 6 de este trabajo). A lo largo de esta investigación, se utilizaron un total de 25 plantillas de memes diferentes, a partir de las cuales se diseñaron 25 memes específicos. El análisis de los errores identificados a través de estos memes reveló que los más prevalentes fueron los asociados a operaciones con números racionales y a los signos en el sistema de números enteros. A continuación, se presenta cada uno de los memes diseñados, organizados de manera individual para su detallada observación y análisis en relación con el error matemático que buscan abordar.

### Figura 30

*Meme 1. Aproximación de números racionales*



El contenido asociado a este meme es la representación de los números racionales en la recta puesto que la aproximación de estos es el paso número uno para proceder a su ubicación,

por lo que este meme podría utilizarse como introducción a este contenido. El error es generado por obstáculo cognitivo. El tipo de meme es imagen.

### Figura 31

*Meme 2. Comparación de números decimales*



El contenido de este meme ilustra la representación de los números racionales como decimales. Esta ilustración puede ser preinstruccional, porque se puede presentar este meme al inicio de una clase sobre comparación de decimales podría impulsar el conocimiento previo de los estudiantes sobre números enteros o evaluativo, utilizando el meme en una actividad de evaluación podría ayudar a identificar rápidamente si los estudiantes aún tienen esta confusión conceptual. El error es generado por obstáculo cognitivo. El tipo de meme es imagen.

### Figura 32

*Meme 3. Porcentaje mal calculado*



En cuanto a este meme, aborda la representación de números racionales como porcentaje, trata de ilustrar algunos de los errores que pueden cometer los estudiantes al momento de calcular el porcentaje a un valor. Este meme puede utilizarse de forma postinstruccional. El tipo de meme es gif.

### Figura 33

*Meme 4. Operaciones de fracciones incorrectas*



El contenido del meme 4 representa las operaciones con números racionales expresados como fracción. Este meme es útil en la fase preinstruccional para anticipar errores comunes al sumar fracciones con el método de la carita feliz de manera humorística. También puede usarse en la fase evaluativa para identificar la comprensión del método y el reconocimiento de errores. Representa un error generado por obstáculo cognitivo o error generado por obstáculo didáctico y es un meme de tipo imagen.

### Figura 34

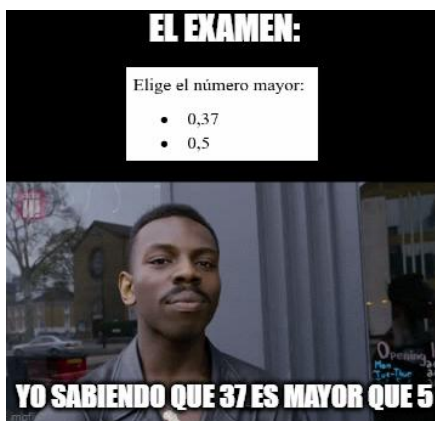
*Meme 5. Lenguaje inapropiado con números decimales*



Este meme ilustra un error cometido por los estudiantes en cuanto a las operaciones con números racionales expresados como decimales, lo curioso de este meme es que también está pensado para una reflexión docente, debido a que el lenguaje o las palabras que usan pueden afectar la comprensión de los estudiantes. Es un error generado por obstáculo cognitivo o error generado por obstáculo didáctico y el meme es tipo imagen.

### Figura 35

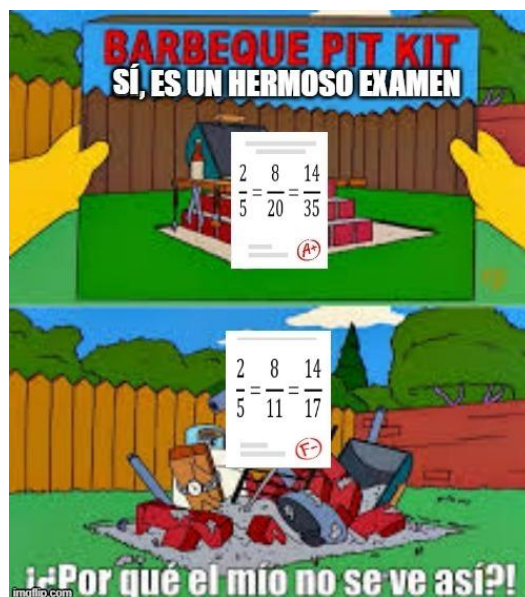
*Meme 6. Comparación de números decimales*



El meme ilustrado en la Figura 35 aborda la comprensión de la relación de orden y equivalencia en el sistema de números racionales. Dada la tendencia a cometer errores al comparar cantidades decimales, este recurso puede emplearse de manera posinstruccional para identificar los tipos de errores que persisten en los estudiantes y fomentar una discusión reflexiva sobre ellos en el aula. Meme tipo gif.

### Figura 36

*Meme 7. Equivalencia de fracciones*



El contenido de este meme es de relación de orden y equivalencia en el sistema de números racionales. se presta bien para la fase posinstruccional porque, una vez que los estudiantes han aprendido cómo determinar la equivalencia entre fracciones, el error presentado en el meme se vuelve fácilmente identificable. Este es un error por ausencia de sentido, error procedimental, es un meme de tipo imagen.

### Figura 37

*Meme 8. Orden en los números racionales*



Al igual que la imagen Figura 36, esta también aborda la relación de orden y equivalencia en el sistema de números racionales. Se puede usar para iniciar una discusión sobre por qué la lógica de los números naturales no se aplica directamente a los denominadores de los números racionales al comparar fracciones. También el meme puede usarse como una pregunta en una evaluación para ver si los estudiantes pueden identificar y explicar el error. Este es un error generado por obstáculo cognitivo, sesgo de número natural y el meme es de tipo imagen.

**Figura 38**

*Meme 9. Simplificación de fracciones*



El contenido de este meme está relacionado con la simplificación de fracciones, puede usarse de manera posinstruccional debido a que puede servir para reforzar la comprensión al mostrar un error típico de procedimiento. Se puede usar para ejemplificar un método incorrecto y cómo se debe simplificar correctamente. Es un error por ausencia de sentido, error de procedimiento. El meme es de tipo gif.

**Figura 39**

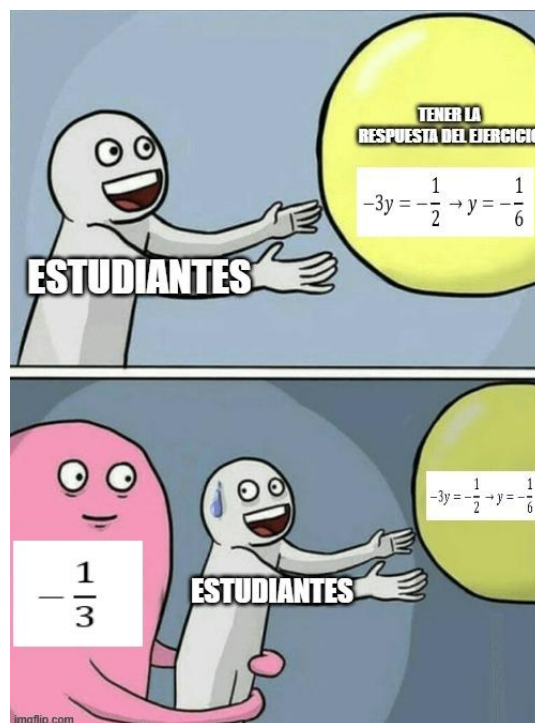
*Meme 10. Propiedad conmutativa en resta con números decimales.*



El objeto que representa este meme son las propiedades de las relaciones entre números racionales y sus operaciones este puede servir para reforzar la comprensión al mostrar un error común. Se puede usar para el diálogo, en el cual los estudiantes determinen por qué la resta no es conmutativa y cómo se diferencia de la suma o la multiplicación en este aspecto. Es un error generado por obstáculo cognitivo. Este meme es de tipo imagen.

#### **Figura 40**

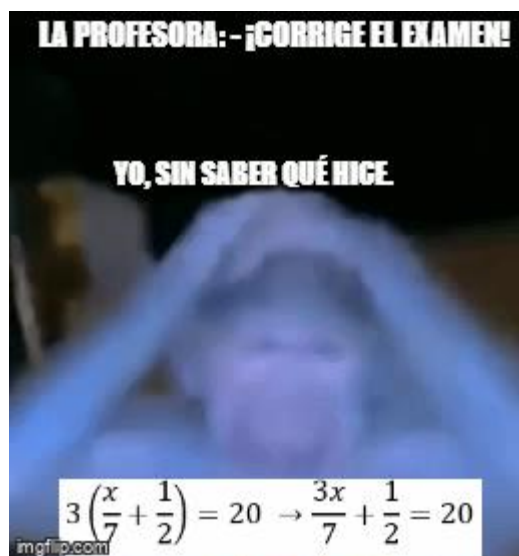
*Meme 11. Despeje de un número negativo.*



El meme ilustra el objeto de ecuaciones lineales en el sistema de números racionales. Es un error común al resolver ecuaciones lineales con fracciones, el cual es olvidar aplicar la misma operación a ambos lados de la igualdad para mantener la igualdad. Puede usarse de manera evaluativa al pedirles a los estudiantes que expliquen por qué el paso mostrado en el meme es incorrecto y que muestren la forma correcta de resolver la ecuación. Este es un error generado por ausencia de sentido, error de procedimiento y el tipo de meme usado es imagen.

#### Figura 41

*Meme 12. Distribución en ecuaciones con fracciones*



Este meme ilustra las ecuaciones lineales en el sistema de números racionales, puede usarse de manera postinstruccional al momento de enseñar las propiedades en este tipo de ecuaciones, este meme ayuda a los estudiantes a identificar errores comunes en su aplicación mediante el análisis de este, reforzando así su comprensión del método correcto. Es un error generado por ausencia de sentido, error del álgebra que tiene origen en la aritmética y es un meme de tipo gif.

#### **Figura 42**

*Meme 13. Exponentes negativos en representaciones polinomiales.*



Los elementos que componen esta imagen aluden a la representación polinomial de números racionales, puede usarse de manera preinstruccional ya que este meme puede activar el recuerdo de los exponentes negativos y generar interés en revisarlos al mostrar un error común. También ofrece una evaluación diagnóstica informal de la comprensión de este objeto. Es un error asociado a ausencia de sentido. Este es un meme de tipo imagen.

### Figura 43

*Meme 14. Comparación de números enteros*

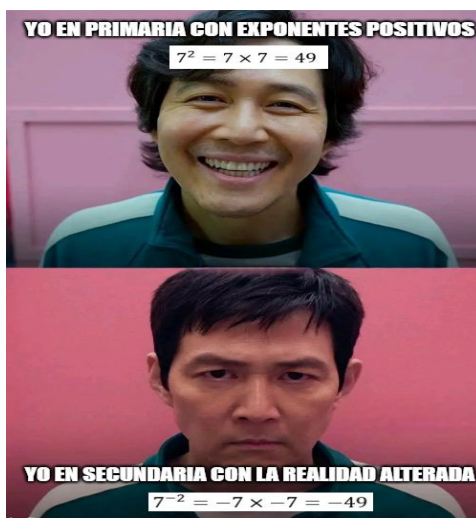
**COMO ALGUNOS ESTUDIANTES  
PERCIBEN LOS NÚMEROS NEGATIVOS**



La composición de este meme aborda la naturaleza de número entero. Al presentar una afirmación intuitivamente incorrecta, puede fomentar un análisis crítico y una reafirmación de la comprensión de la recta numérica y el orden de los números enteros. Este es un error generado por ausencia de sentido, errores del álgebra con origen en la aritmética. El tipo de meme para este es imagen.

**Figura 44**

*Meme 15. Exponentes negativos.*



El meme de la Figura 44 ilustra las propiedades básicas de teorías de números (desigualdad, propiedades de adición sustracción, multiplicación, división y potenciación entre números enteros). Este meme puede usarse después de la instrucción sobre exponentes negativos para conectar el nuevo conocimiento con la comprensión previa de los exponentes positivos. Este meme representa un error generado por obstáculo cognitivo y epistemológico, es de tipo imagen.

### Figura 45

*Meme 16. Incógnita con variables diferentes*



El contenido de este meme representa las ecuaciones lineales en el sistema de números enteros. Al inicio de la enseñanza de ecuaciones lineales, este meme puede usarse para introducir la idea de que cualquier letra puede representar una incógnita. Este es un error generado por obstáculo cognitivo y el meme es de tipo imagen.

### Figura 46

*Meme 17. Representación de centésimas*



El contenido de este meme toma como objeto Representación de números racionales como decimales. Puede ser posinstruccional ya que, al presentar múltiples respuestas incorrectas a una pregunta sencilla de conversión, puede usarse después de la enseñanza para que los estudiantes identifiquen patrones de errores comunes. Analizar por qué cada respuesta es incorrecta puede ayudarles a interiorizar mejor el concepto. Este es un error fundado en un obstáculo cognitivo. El meme es de tipo caras

### **Figura 47**

*Meme 18. Combinación de algoritmos en operación con fraccionarios.*

## YO CADA VEZ QUE OPERO FRACCIONES



El contenido de este meme aborda las operaciones con números racionales expresados como fracción. Al ver la representación humorística de la confusión, se puede invitar a los estudiantes a reflexionar sobre sus propios procesos de pensamiento al resolver problemas con fracciones y a identificar posibles momentos en los que podrían cometer errores similares. Este es un error generado por obstáculo cognitivo o error generado por obstáculo didáctico. El meme es tipo imagen.

### Figura 48

*Meme 19. Existencia de un número entre números decimales.*

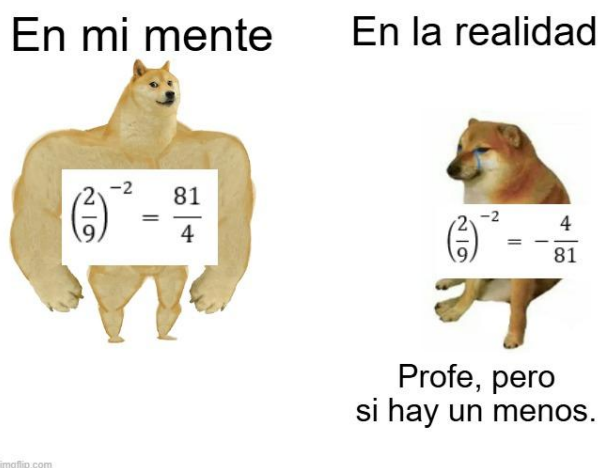
¿CUÁNTOS NÚMEROS HAY ENTRE 3,14 Y 3,15?



Este meme ilustra el tema de densidad e incompletitud. Asociación de dígitos decimales con números enteros, este es efectivo después de la instrucción para consolidar el aprendizaje y abordar la concepción errónea de que no hay números entre dos decimales cercanos, resaltando la propiedad de densidad. El error que se comete es generado por obstáculo cognitivo. Este meme es de tipo imagen.

### Figura 49

*Meme 20. Exponentes negativos en el sistema de números racionales.*



Este meme ilustra el objeto potenciación y radicación en los números racionales. Con una introducción previa a exponentes negativos, este meme puede usarse para anticipar las dificultades específicas que podrían surgir al combinarlos con fracciones. Este error es generado por obstáculo cognitivo y para este meme se usó el tipo imagen.

### Figura 50

*Meme 21. Aplicación de la ley de los signos.*



Este meme aborda el objeto: Propiedades básicas de teorías de números (desigualdad, propiedades de adición sustracción, multiplicación, división y potenciación entre números enteros). El uso de esta imagen en el aula de clase podría ayudar a ejemplificar la confusión que surge al aplicar la ley de los signos de la multiplicación y división en operaciones como adición o sustracción. El error representado en el meme es uno generado por obstáculo didáctico y error por ausencia de sentido. El meme es de tipo imagen.

### Figura 51

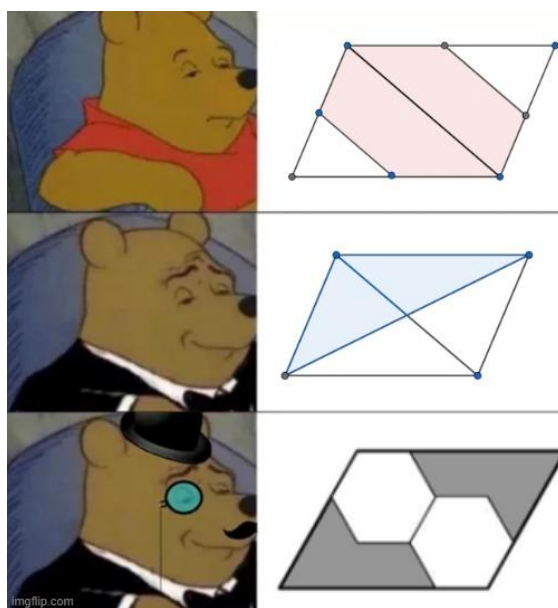
*Meme 22. Aplicación de regla de tres directa.*



El contenido de este meme está asociado con la proporcionalidad directa o inversa. Este meme ayuda a reforzar la necesidad de analizar la naturaleza de la relación entre las cantidades en un problema. Al siempre aplicar automáticamente la regla de tres directa, se puede generar una discusión sobre cómo identificar si la relación es directa o inversa. Este es un error generado por un obstáculo cognitivo. El meme es de tipo imagen.

## Figura 52

Meme 23. Representación gráfica de  $\frac{2}{4}$



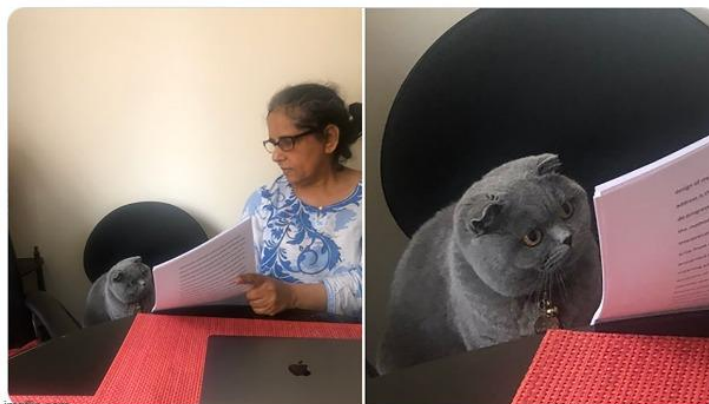
El contenido de este meme alude a la representación de números racionales de forma gráfica este meme puede servir como una herramienta visual para reforzar la comprensión de la representación correcta, evidenciar errores comunes o representaciones incompletas, y fomentar el pensamiento creativo al mostrar representaciones no convencionales de un concepto geométrico. Este error es generado por obstáculo cognitivo o error generado por obstáculo didáctico. Es un meme de tipo imagen.

### Figura 53

*Meme 24. Despeje de ecuaciones.*

+ ¿CUÁL ES LA OPERACIÓN INVERSA DE LA MULTIPLICACIÓN?  
- LA DIVISIÓN  
+ ¿Y POR QUÉ PUSISTE?

Como  $3x = 0$  entonces  $x = -3$



El contenido de este meme se asocia al objeto: ecuaciones lineales en el sistema de números enteros Este meme es útil para evaluar si los estudiantes realmente aplican el concepto de operaciones inversas al resolver ecuaciones lineales. Este es un error se origina por un obstáculo cognitivo, el meme que lo representa es de tipo imagen.

### Figura 54

*Meme 25. Representación gráfica sin variación.*





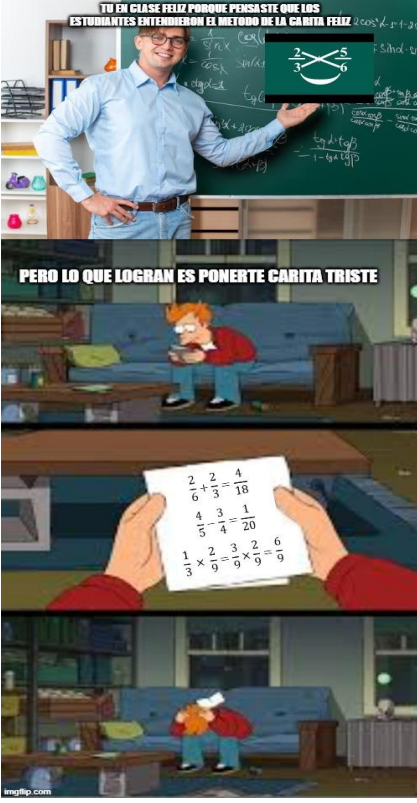
El contenido de este meme representa el objeto de variación. Es útil en la fase posinstruccional mostrando a la clase el tipo de errores que se deben evitar al trabajar con este tipo de gráficas. Este es un error por obstáculo epistemológico. El meme es de tipo gif.

A continuación, en la Tabla 9 se presenta un resumen de los memes creados para este trabajo de grado.

**Tabla 9**

*Recopilación de memes con su respectivo error*

Contenido	Tipo de error	Error seleccionado	Tipo de meme	Meme
Representación de números racionales en la recta numérica	Error generado por obstáculo cognitivo	Considerar $\frac{3}{2}$ como 3,2 y ubicar $\frac{3}{2}$ como 3 en la recta numérica	Imagen	<p><b>ESTUDIANTES CUANDO SE LES PIDE APROXIMAR</b></p> <p>The meme consists of two panels. The top panel shows a hand pointing to a button labeled '3' on a control panel, while another button labeled '3,2' is visible. Above the buttons is the fraction <math>\frac{3}{2}</math>. The bottom panel shows a student looking stressed with his hand on his forehead.</p>

<p>Representación de números racionales como decimales</p>	<p>Error generado por obstáculo cognitivo</p>	<p>Considerar que 0,27 es diferente de 0,270, esto se asocia con que el estudiante considera que 27 es menor que 270.</p>	<p>Imagen</p>	<p>Me dijiste que 270 era mayor que 27 Pero estamos hablando de 0,270 y 0,27</p> 
<p>Representación de números racionales como porcentaje</p>	<p>Error generado por ausencia de sentido de tipo procedimental</p>	<p>Hallar erróneamente el 30% de 500</p> $\frac{500}{30} = 16,666$ $\frac{30 \times 100}{500} = 6$ $\frac{500}{30} \times 10 = 166,66$	<p>Gif</p>	
<p>Operaciones con números racionales expresados como fracción</p>	<p>Error generado por obstáculo cognitivo o error generado por obstáculo didáctico</p>	<p>Sesgo de número natural</p> $\frac{2}{5} + \frac{2}{3} = \frac{4}{8}$ $\frac{4}{5} - \frac{3}{4} = \frac{4}{20} - \frac{3}{20} = \frac{1}{20}$ $\frac{1}{3} \times \frac{2}{9} = \frac{3}{9} \times \frac{2}{9} = \frac{6}{9}$	<p>Imagen</p>	<p>TU EN CLASE FELIZ PORQUE PENSASTE QUE LOS ESTUDIANTES ENTENDIERON EL METODO DE LA CARITA FELIZ</p> 


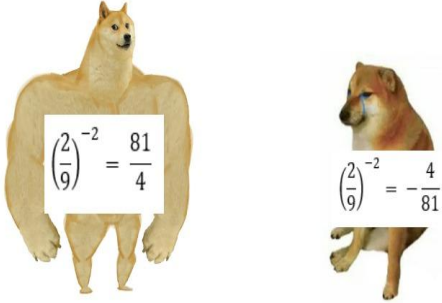
<p>Operaciones con números racionales expresados como decimales</p>	<p>Error generado por obstáculo cognitivo o error generado por obstáculo didáctico</p>	$17,3 + 21,8 = 38,11$	<p>Imagen</p>
<p>Relación de orden y equivalencia en el sistema de números racionales.</p>	<p>Error por ausencia de sentido, error procedimental</p>	<p>Elige el número mayor</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• 0,37</li> <li>• 0,5</li> </ul> <p>¿Cómo lo has sabido?</p> <p>Responde: el 37 es más mayor que el 5...</p>	<p>Gif</p>
<p>Relación de orden y equivalencia en el sistema de números racionales.</p>	<p>Error por ausencia de sentido, error procedimental</p>	$\frac{2}{5} = \frac{8}{11} = \frac{14}{17}$	<p>Imagen</p>

<p>Relación de orden y equivalencia en el sistema de números racionales.</p>	<p>Error generado por obstáculo cognitivo, sesgo de número natural</p>	<p>                     Rota la fracción mayor                      • 5/3                      6/97                      ¿Por qué crees que la fracción que has elegido es la mayor?  <i>porque el denominador y numerador es mayor</i> </p>	<p>Imagen</p>	
<p>Simplificación de fracciones</p>	<p>Error por ausencia de sentido, error de procedimiento</p>	<p>Tener la expresión <math>\frac{15}{12}</math> y simplificarla a <math>\frac{1}{6}</math></p>	<p>Gif</p>	
<p>Propiedades de las relaciones entre números racionales y sus operaciones</p>	<p>Error generado por obstáculo cognitivo</p>	<p><math>6,32 - 5,45 = 5,45 - 6,32</math></p>	<p>Imagen</p>	


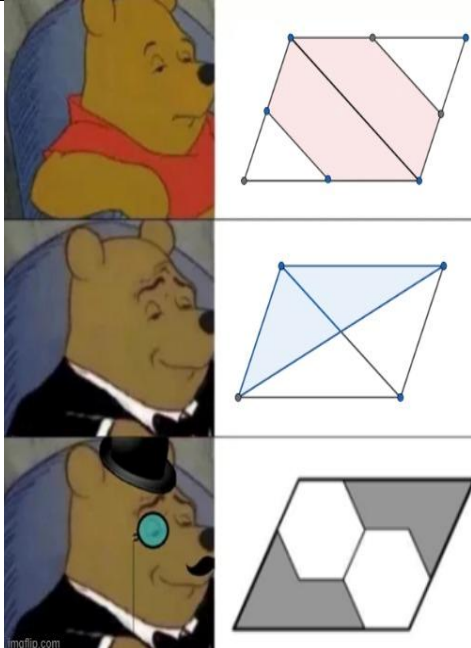
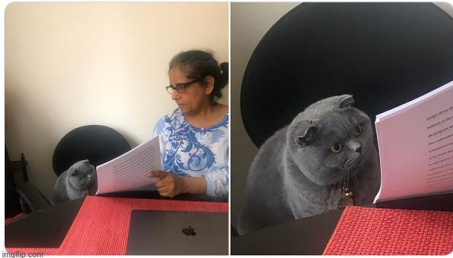
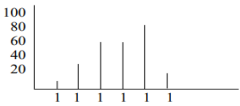

Ecuaciones lineales en el sistema de números racionales	Error por ausencia de sentido, error de procedimiento	$-3y = -\frac{1}{2} \rightarrow y = -\frac{1}{6}$	Imagen	
Ecuaciones lineales en el sistema de números racionales	Error por ausencia de sentido, error del álgebra que tiene origen en la aritmética	$3\left(\frac{x}{7} + \frac{1}{2}\right) = 20 \rightarrow \frac{3x}{7} + \frac{1}{2} = 20$	Gif	
Representación polinomial de números racionales	Error por ausencia de sentido	$4 \times 10^1 + 2 \times 10^0 + 6 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2} = 4265$	Imagen	

<p>Naturaleza de número entero</p>	<p>Errores por ausencia de sentido, errores del álgebra con origen en la aritmética</p>	<p>Teniendo <math>-7</math> grados en Moscú y <math>-1</math> en Budapest, cuando se pregunta si alguien que viajara de Moscú a Budapest notaría un aumento o disminución de la temperatura, varios estudiantes responden que notaría una disminución</p>	<p>Imagen</p> <p><b>COMO ALGUNOS ESTUDIANTES PERCIBEN LOS NÚMEROS NEGATIVOS</b></p> <p><b>-1 grado</b></p> <p><b>-7 grados</b></p>
<p>Propiedades básicas de teorías de números (desigualdad, propiedades de adición sustracción, multiplicación, división y potenciación entre números enteros).</p>	<p>Error generado por obstáculo cognitivo y epistemológico</p>	<p><math>7^{-2} = -7 \times -7 = -49</math></p>	<p>Imagen</p> <p><b>YO EN PRIMARIA CON EXPONENTES POSITIVOS</b></p> <p><math>7^2 = 7 \times 7 = 49</math></p> <p><b>YO EN SECUNDARIA CON LA REALIDAD ALTERADA</b></p> <p><math>7^{-2} = -7 \times -7 = -49</math></p>

<p>Ecuaciones lineales en el sistema de números enteros</p>	<p>Error generado por obstáculo cognitivo</p>	<p>No identificar una variable a menos que se represente por <math>x</math></p>	<p>Imagen</p>	
<p>Representación de números racionales como decimales</p>	<p>Error generado por obstáculo cognitivo</p>	<p>Representar 37 milésimas como 37000 o 3 centésimas como 300</p>	<p>Caras</p>	
<p>Operaciones con números racionales expresados como fracción</p>	<p>Error generado por obstáculo cognitivo o error generado por obstáculo didáctico</p>	$\frac{2}{6} + \frac{2}{3} = \frac{4}{18}$	<p>Imagen</p>	<p><b>YO CADA VEZ QUE OPERO FRACCIONES</b></p>

<p>Densidad e incompletitud. Asociación de dígitos decimales con números enteros</p>	<p>Error generado por obstáculo cognitivo</p>	<p>No hay números entre 3,14 y 3,15</p>	<p>Imagen</p>	<p>¿CUÁNTOS NÚMEROS HAY ENTRE 3,14 Y 3,15?</p> <p>ESTUDIANTES</p>  <p>Nada, no hay, no existe</p>
<p>Potenciación y radicación en los números racionales.</p>	<p>Error generado por obstáculo cognitivo</p>	$\left(\frac{2}{9}\right)^{-2} = -\frac{4}{81}$	<p>Imagen</p>	<p>En mi mente      En la realidad</p>  <p>Profe, pero si hay un menos.</p>

<p>Propiedades básicas de teorías de números (desigualdad, propiedades de adición sustracción, multiplicación, división y potenciación entre números enteros).</p>	<p>Error generado por obstáculo didáctico y error por ausencia de sentido</p>	$-9 - 5 = 14$ $-2 - 1 = 3$	<p>Imagen</p>							
<p>Proporcionalidad directa o inversa</p>	<p>Error generado por obstáculo cognitivo</p>	<p>“un grifo, con un caudal de 12 litros por minuto ha tardado tres cuartos de hora en llenar un depósito. ¿Cuál deberá ser el caudal para llenar el mismo depósito en 20 minutos?”</p> <p>Caudal (l/m).      Tiempo (horas).</p> <table style="margin-left: 40px;"> <tr> <td>12</td> <td>→</td> <td>0,75</td> </tr> <tr> <td>x</td> <td>→</td> <td>0,20</td> </tr> </table> $\frac{12}{x} = \frac{0,75}{0,20}$ $12 \cdot 0,20 = x \cdot 0,75$ $x = 3,2 \text{ l/m.}$	12	→	0,75	x	→	0,20	<p>Imagen</p>	
12	→	0,75								
x	→	0,20								

<p>Representación de números racionales de forma gráfica</p>	<p>Error generado por obstáculo cognitivo o error generado por obstáculo didáctico</p>	<p><b>Respuesta alumno</b></p> <p>Divido la pizza en tres partes y cojo una</p> 	<p>Imagen</p>	
<p>Ecuaciones lineales en el sistema de números enteros</p>	<p>Error generado por obstáculo cognitivo</p>	<p>Si <math>3x + 1 = 0</math> entonces <math>x = -1 - 3</math></p>	<p>Imagen</p>	<p>¿CUAL ES LA OPERACION INVERSA DE LA MULTIPLICACION? -LA DIVISION ¿Y POR QUE PUSISTE?</p> <p>Como <math>3x = 0</math> entonces <math>x = -3</math></p> 
<p>Variación</p>	<p>Error por obstáculo epistemológico</p>	<p>Los estudiantes que solo varían una variable en la tabla tampoco la varían en la gráfica.</p> 	<p>Gif</p>	

A lo largo del proceso de elaboración de los memes, se presentaron diversas versiones de estos, los cuales fueron objeto de revisión y retroalimentación por parte de la asesora. Este proceso de corrección se centró en varios aspectos clave, entre ellos la claridad, la redacción, la efectividad de la comunicación entre la información respecto a la plantilla utilizada y el tipo de error. La retroalimentación de la asesora fue fundamental para optimizar los memes, mejorando tanto su presentación visual como textual y asegurando una comunicación más clara.

## 9. CONCLUSIONES

Las conclusiones están organizadas en tres partes; primero, se hace referencia al cumplimiento de los objetivos; segundo, se mencionan las cuestiones a considerarse respecto a los memes diseñados y tercero, se da cuenta del aporte formativo de esta experiencia.

En cuanto al nivel de cumplimiento de los objetivos, se tiene que el primer objetivo (estudiar los resultados de la implementación de estrategias basadas en memes para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, para comprender su impacto en el aula, mediante la revisión de artículos académicos, trabajos de investigación y otras fuentes de información especializadas) se cumplió, gracias al análisis de investigaciones previas que fueron presentada en la sección de antecedentes. En este proceso, se encontró el trabajo pionero de la profesora Paola Balda, sus estudios sobre recursos digitales en el aula (específicamente sobre memes y su impacto en la motivación estudiantil) sirvieron como base para este estudio. Su investigación no solo orientó la selección de documentos relevantes, sino que inspiró algunos de los memes que son el resultado de este trabajo.

En cuanto al segundo objetivo (identificar errores comunes en aritmética y álgebra, para fundamentar la creación de memes didácticos, mediante la investigación documental y la recopilación de ejemplos que ilustren dichos errores), este también se cumplió. Fue la fase más demandante de este trabajo. Este proceso requirió gran esfuerzo en el cual fue necesaria la revisión de cerca de 50 documentos académicos y escolares, muchos de los cuales fueron descartados por no incluir ejemplos claros de errores o por abordarlos de forma superficial. Tras semanas de análisis, se logró seleccionar y acopiar los errores más recurrentes en los objetos propuestos. Como resultado, hoy se cuenta con un repertorio de errores documentados y ejemplificados, que no solo sirven como base para los memes creados, sino que revelan patrones útiles para diseñar estrategias

pedagógicas y que puede ser fuente de consulta para el diseño de clases o de unidades didácticas. El resultado de este objetivo se encuentra en la sección «Relación entre errores en aritmética y álgebra con los objetos matemáticos enseñados en secundaria y media» del marco de referencia.

Por último, el tercer objetivo (elegir plantillas de memes apropiadas, con el fin de representar visualmente algunos de los errores matemáticos de manera efectiva, mediante la correlación entre las características del error identificado y las particularidades comunicativas de cada plantilla), también se cumplió exitosamente gracias a la construcción del anexo A, el cual ayudó a identificar cómo se entendían algunas plantillas de los memes, esto junto a la experiencia previa del autor como consumidor de memes, lo que facilitó reconocer formatos virales adaptables a contextos educativos. Sin embargo, el mayor reto fue traducir conceptos abstractos (como el despeje de ecuaciones o las propiedades de las operaciones) a un lenguaje visual sencillo y humorístico. Este proceso no solo consolidó los memes terminales, sino que demostró que, con creatividad, temas complejos pueden abordarse de forma amena sin perder rigor académico.

En cuanto a las cuestiones que deben considerarse respecto a los resultados obtenidos, una es la necesidad de profundizar en estudios futuros sobre los errores asociados a objetos matemáticos específicos, ya que su comprensión es clave para diseñar intervenciones pedagógicas más precisas. Entre dichas investigaciones está estudiar con profundidad el error de concatenación porque si bien está basado en un obstáculo epistemológico (atribuido al lenguaje propio de las matemáticas, al argot matemático y a su(s) significado(s)), también podría estar basado en un obstáculo didáctico; porque, por ejemplo, si se ubica un número racional escrito como fracción al lado de otro similar, esto también significa multiplicación como en el caso de los símbolos algebraicos, no implica adición. Por lo tanto, sería interesante indagar al respecto, sobre todo en las interpretaciones que hacen los estudiantes al respecto.

Así mismo, al saber que los memes creados demuestran potencial como herramienta didáctica innovadora, su impacto real en el aula requiere ser evaluado mediante la práctica, observando variables como la motivación estudiantil, la reducción de errores o la percepción del docente respecto a estos memes como recurso de enseñanza. Se espera que estos memes, al integrar humor y crítica, no solo faciliten el aprendizaje de algunos conceptos, sino que promuevan un ambiente educativo más participativo. Sin embargo, es fundamental reconocer que su efectividad dependerá de factores como la adaptación contextual, la capacitación docente y la validación del meme. Por ello, se propone que futuras investigaciones continúen con este trabajo buscando analizar cómo los memes influyen en la detección y corrección de errores en escenarios reales.

Por último, esta experiencia logró ayudar en mi formación docente en varios aspectos, fortaleció mis competencias académicas, como la redacción y ortografía (áreas en las que mejoré significativamente), sino que también transformó mi visión sobre la enseñanza. Ahora entiendo que herramientas innovadoras, como los memes, son más que recursos divertidos: son puentes para conectar con los intereses de los estudiantes, promover su participación y romper la monotonía en clases. Algo que me impresionó fue la profundidad de este proceso el cual superó mis expectativas iniciales, ya que la creación de memes efectivos no se limita a la mera ingeniosidad, sino que requiere una fundamentación rigurosa a través de la investigación. Además, el estudio profundo de los tipos de errores, tal como los describe Socas (2011), me proporciona una mirada más analítica. Ahora puedo identificar las posibles fuentes de una equivocación y, con ello, diseñar correcciones específicas y estrategias para prevenir su recurrencia. Esta combinación de rigor en el diagnóstico y creatividad en la solución define el tipo de docente que deseo ser: uno que no solo enseña contenidos, sino que entiende y responde a las necesidades de sus estudiantes.

Esta experiencia también amplió significativamente mi conocimiento sobre la densidad y complejidad de los objetos aritméticos y algebraicos que se abordan en los cursos sexto y séptimo. Inicialmente, no anticipaba la profundidad de estos conceptos fundamentales. Comprender las particularidades de cada uno de los objetos matemáticos mencionados en este trabajo de grado me ha proporcionado otra visión más de las dificultades que afrontan los estudiantes en los primeros años de la educación secundaria en matemáticas. Esta nueva perspectiva nutre mi enfoque pedagógico, motivándome a explorar estrategias de enseñanza más visuales y directamente vinculadas a sus posibles errores conceptuales.

## 10. REFERENCIAS

- Abrate, S., Pochulu, D. y Vargas, M. (2006). *Errores y dificultades en matemática. Análisis de causas y sugerencias de trabajo*. Buenos aires. Revista de la Universidad Nacional de Villa María [http://biblio.unvm.edu.ar/opac\\_css/index.php?lvl=cmspage&pageid=9&id\\_notice=11025](http://biblio.unvm.edu.ar/opac_css/index.php?lvl=cmspage&pageid=9&id_notice=11025)
- Agencia de calidad de la educación. (2018). Descripción de errores, *Aprendiendo de los Errores Un análisis de los errores frecuentes de los estudiantes de II medio en las pruebas Simce y sus implicancias pedagógicas* (14-41). [https://archivos.agenciaeducacion.cl/Aprendiendo\\_de\\_los\\_errores\\_Web\\_24may.pdf](https://archivos.agenciaeducacion.cl/Aprendiendo_de_los_errores_Web_24may.pdf)
- Alzate Marín, G. (2018). *La Utilización Del Meme Como Estrategia Educativa Y Comunicativa Para El Desarrollo Del Aprendizaje Significativo De Los Estudiantes Del Grado 11° De La Institución Educativa “Escuela De La Palabra”* [Tesis de pregrado, Universidad Tecnológica De Pereira] UTP. <https://hdl.handle.net/11059/9663>
- Andrade, C (1998). Dificultades en el aprendizaje de la noción de variación. *Revista EMA*, 3 (3), 241-253. <https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/dificultades-en-el-aprendizaje-de-la-nocion-de-variacion/>
- Aroza, C. (2016). *Evaluación de la idoneidad didáctica de una experiencia de enseñanza sobre proporcionalidad y porcentajes en primero de la e.s.o.* [Tesis de maestría, Universidad de Granada]. Digibug. [https://www.ugr.es/~jgodino/Tesis\\_master/TFM\\_Aroza.pdf](https://www.ugr.es/~jgodino/Tesis_master/TFM_Aroza.pdf)
- Astolfi, J. (1999). *El Error, Un Medio Para Enseñar*. Sevilla: Diada

- Bachelard, G. (1971). *Epistemología* (1989 Ed.). (P. D. Creu, Ed., & E. Posa, Trad.) París: Anagrama.
- Balda, P. (2019). La Caricatura Y Los Memes Como Herramienta De Divulgación Matemática. Una Experiencia En El Aula. *Números*, 102, 29-41. <https://core.ac.uk/download/pdf/287746258.pdf>
- Balda, P. (2021). Uso De Memes Y Caricaturas Como Recursos Humorísticos Visuales En El Aula De Matemáticas, *Investigación E Innovación En Matemática Educativa*, 6 <https://portal.amelica.org/ameli/journal/302/3024857004/3024857004.pdf>
- BBC News Mundo. (2016). ["Cien Años De Soledad" En Memes: Las Creativas Estrategias De La Profesora Que Conquistó A Las Redes Con Una Tarea De Literatura]. *BBC News Mundo*. <https://www.bbc.com/mundo/noticias-america-latina-36500294>
- Bejarano, S. (2022). *Identificación de errores en la realización de las operaciones potenciación y radicación en  $\mathbb{Z}$*  [Tesis de pregrado, Universidad Pedagógica Nacional, Colombia]. Repositorio Institucional UPN. <http://hdl.handle.net/20.500.12209/17695>
- Beltrán, P. (2016). Utilizando Memes Con Tus Alumnos. *Números*, 91, 129-134.
- Bocco, M. Y Canter, C. (2010). Errores En Geometría: Clasificación E Incidencia En Un Curso Preuniversitario. *Revista Iberoamericana De Educación*, 53(2), 1-13. <https://doi.org/10.35362/rie5321742>
- Borasi, R. (1994). Capitalizing On Errors As «Springboards For Inquiry»: A Teaching Experiment. *Journal For Research In Mathematics Education*, 25(2), 166-208.

- Bruno, A. y Cabrera, N. (2003). Un estudio de errores sobre la representación en la recta de números negativos. *Formación del Profesorado e investigación en Educación Matemática* (5), pp. 47-60. Recuperado de <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/9517601.pdf>
- Burgos, M. y Godino, J. (2019). Conflictos semióticos de alumnos de primaria en la resolución de una tarea de porcentajes. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 223-232). Valladolid: SEIEM
- Butto Zarzar, C. (2014). El aprendizaje de fracciones en educación primaria: una propuesta de enseñanza en dos ambientes. *Horizontes pedagógicos*, 15(1). <https://horizontespedagogicos.iberro.edu.co/article/view/403>
- Camas, L., Valero, A. Y Vendrell, M. (2018). “Hackeando Memes”: Cultura Democrática, Redes Sociales Y Educación | “Hacking Memes”: Democratic Culture, Social Media And Education, *Espiral, Cuadernos Del Profesorado* 11(23), <https://doi.org/10.25115/Ecp.V12i23.2017>
- Canuto, T. Y De La Vara, J. (2021) Los Memes: La Revolución Educativa. En B. Olga y R. Carmen. (Eds.). *Metodologías activas con tic en la educación del siglo XXI* (pp. 944-970). Dykinson S.L [https://dialnet.unirioja.es/servlet/libro?codigo=853801&orden=0&info=open\\_link\\_libro](https://dialnet.unirioja.es/servlet/libro?codigo=853801&orden=0&info=open_link_libro)
- Cañaveral, L. Nieto, A. y Vaca, J. (2021). *El Aprendizaje Significativo En Las Principales Obras De David Ausubel: Lectura Desde La Pedagogía* [Tesis de pregrado, Universidad Pedagógica Nacional de Colombia]. Repositorio Institucional UPN. <http://repository.pedago>

[gogica.edu.co/bitstream/handle/20.500.12209/12251/El\\_aprendizaje\\_significativo\\_en\\_las\\_principales\\_obras\\_de\\_David\\_Ausubel\\_lectura\\_desde\\_la\\_pedagogia.pdf?sequence=5&isAllowed=y](http://gogica.edu.co/bitstream/handle/20.500.12209/12251/El_aprendizaje_significativo_en_las_principales_obras_de_David_Ausubel_lectura_desde_la_pedagogia.pdf?sequence=5&isAllowed=y)

Centeno, J. (1997). Dificultades, errores, conflictos y obstáculos. En L. Rico, J. Fortuny, L. Puig (Eds.). *Números decimales ¿Por qué? ¿para qué?* (pp. 135-148). Editorial Síntesis

Chamchougia, A. (2024). *Dificultades en la enseñanza de ecuaciones lineales a estudiantes sin y con dificultades específicas del aprendizaje: la perspectiva del profesorado* [Tesis doctoral, Universidad de Córdoba]. Helvia. <http://hdl.handle.net/10396/28870>

Cid, E. (2022). *Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos* [Tesis doctoral, Universidad de Zaragoza]. Zagan. <https://zagan.unizar.es/record/112529/files/TESIS-2022-085.pdf>

Cifuentes, A. Dimaté, L. et al. (2016). Antes de implementar la cartilla. *Ecuaciones lineales con una incógnita* (pp. 5-10) <https://repositorio.uniandes.edu.co/bitstreams/03d999f5-e36d-4115-b500-4f63aa6ca07a/download>

D' Amore, B. y Fandiño, M. (2002). Un acercamiento analítico al "triángulo de la didáctica". *Educación matemática* 14(1), 48-61

Dawkins, R. (1976). Organización Jerárquica: Un Principio Candidato Para La Etología. En P. P. G. Bateson Y R. A. Hinde (Eds.), *Puntos De Crecimiento En Etología*. Cambridge University Press.

Egodawatte, G. (2011). *Secondary school students' misconceptions in algebra* [Tesis doctoral, Universidad de Toronto].

- Escobar, A. y Escobar, B. (2015). *El error en el uso de los números racionales e irracionales, como evidencia de obstáculo epistemológico, en estudiantes de grado noveno* [Tesis de maestría, Universidad de Medellín]. Repositorio Funes. <https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/el-error-en-el-uso-de-los-numeros-racionales-e-irracionales-como-evidencia-de-obstaculo-epistemologico-en-estudiantes-del-grado-noveno/>
- Escobar, C. (2011). Obstáculos didácticos en el aprendizaje de la matemática y la formación de docentes. *Acta Latinoamericana De Matemática Educativa Vol. 24*, 999–1001.
- Escolano, R. (2019). *Enseñanza del número racional positivo en Educación Primaria: un estudio desde modelos de medida y cociente* [Tesis doctoral, Universidad de Zaragoza]. Zagan. <https://zaguan.unizar.es/record/84666/files/TESIS-2019-167.pdf?version=1>
- Flores, P. (2003). *Humor Gráfico En El Aula De Matemáticas*. Granada: Arial.
- Fory, O. (2010). *Obstáculos didácticos en la adición de números enteros en textos escolares*. [Tesis de pregrado, Universidad del Valle]
- Franchi, L., & Hernández de Rincón, Ai (2004). Tipología De Errores En El Área De La Geometría Plana. *Educere*, 8 (24), 63-71.
- Giulia, B. Y Ornella, R (2019). Meanings In Mathematics: Using Internet Memes And Augmented Reality To Promote Mathematical Discourse [congreso]. *Eleventh Congress Of The European Society For Research In Mathematics Education*, Utrecht, Países Bajos. <https://Hal.Science/Hal-02422152V1>

- Godino et al. (2004). II Sistemas numéricos. En J. Godino (Ed.). *Didáctica de las Matemáticas para Maestros* (pp. 155-270). [https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/9\\_didactica\\_maestros.pdf](https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/9_didactica_maestros.pdf)
- González, D. (2015). *Errores comunes en el aprendizaje de las fracciones: Un estudio con alumnos de 12/13 años en Cantabria* [Tesis de maestría, Universidad de Cantabria]. Repositorio de la universidad de Cantabria. <https://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/6903/GonzalezdelOlmoDario.pdf?sequence=1>
- González, J. y Fernández, C. (2024). Razonamientos de estudiantes en tareas de comparación, ordenación y representación de fracciones y números decimales. *PNA*, 18(2), 131- 160. <https://doi.org/10.30827/pna.v18i2.27218>
- González, L. Ortiz, A. Sanz, E. y Ortiz, A. (1999). Obstáculos y concepciones en la enseñanza-aprendizaje de los números enteros. En J. González (Ed.). *Números enteros* (123-166). Editorial Síntesis
- González, M., Gómez, P Y Restrepo, Á. (2015). Usos Del Error En La Enseñanza De Las Matemáticas. *Revista de educación*, (370), 71-95. [Http://Hdl.Handle.Net/1992/32300](http://Hdl.Handle.Net/1992/32300)
- Guadarrama A., Mendoza C., Diaz J. Y Bercelli F. (2017). El uso de los memes como estrategia didáctica aplicada en las matemáticas. en virtual educa. *Memorias de los encuentros virtual educa bahía 2018*. Virtual Educa. <https://Encuentros.Virtualeduca.Red/Storage/Ponencias/Bahia2018/97n75ad7wfpeabqfhrdnpdfowuawse5ddvjgodth.Pdf>
- Guadarrama A., Mendoza C., Diaz J. Y Bercelli F. (2021). El uso de los memes como estrategia didáctica aplicada en las matemáticas. En I. Méndez. (Ed.). *Cultura digital y desarrollo*

- humano* (18-26) [https://Drpabloglezcasanova.Uaemex.Mx/Culturadigitalydesarrollo/Docs/A1/Pdf/Libro\\_2020.Pdf](https://Drpabloglezcasanova.Uaemex.Mx/Culturadigitalydesarrollo/Docs/A1/Pdf/Libro_2020.Pdf)
- Igoa, J. (2003). El Mundo En La Mente: Metaconciencia, Lenguaje Y Control En La Psicología Cognitiva. *Anuario De Psicología*, 34(4), 449-503 <File:///C:/Users/Pc/Downloads/Ub,+Article01.Pdf>
- Iriarte, M. Jimeno, M. y Vargas-Machuca, I (1991). Obstáculos en el aprendizaje de los números enteros. *Suma*, 7, (13-18). <https://revistasuma.fespm.es/sites/revistasuma.fespm.es/IMG/pdf/7/013-018.pdf>
- Ivars, P., Fernández, C. y Llinares, S. (2020). Uso de una trayectoria hipotética de aprendizaje para proponer actividades de instrucción. *Enseñanza de las Ciencias*, 38(3), 105-124 <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2947>
- Kieran, C. y Filloy, Y (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las ciencias* 7(3), 229-240. <https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/el-aprendizaje-del-algebra-escolar-desde-una-perspectiva-psicologica/>
- Llinares, S. y Sánchez, M. (1997). Errores y estimación. En L. Rico, J. Fortuny, L. Puig (Eds), *Fracciones* (pp. 155-164). Editorial Síntesis.
- Loyola, A. y Sandoval, I. (2021). Resolución de problemas de porcentajes con estudiantes de primero de secundaria. Logros y errores. [Conferencia]. *XVI Congreso Nacional de Investigación Educativa*, Puebla, México

- Martínez, Y. (2018). *Errores y dificultades que presentan los alumnos de 2do año de secundaria en la resolución de actividades con números enteros* [Tesis de pregrado, Universidad Tecnológica Nacional]. SNRD. [https://repositoriosdigitales.mincyt.gov.ar/vufind/Record/RI-AUTN\\_f5c19d1f25d5628a775c44d8a9a7ced2](https://repositoriosdigitales.mincyt.gov.ar/vufind/Record/RI-AUTN_f5c19d1f25d5628a775c44d8a9a7ced2)
- McLeod, D. y Adams, V. (1989). *Affect and Mathematical Problem Solving: A new perspective*. New Cork: Springer-Verlag.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas* (Primera ed.).
- Ministerio de Educación Nacional. (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje: Matemáticas* (Vol. II).
- Montero, R. L. (2021). *UIC-memes y construcción de ciudadanía desde la educación Matemática* [Tesis de maestría, Universidad Pedagógica Nacional de Colombia] Repositorio Institucional UPN [.Http://Hdl.Handle.Net/20.500.12209/13293](http://hdl.handle.net/20.500.12209/13293).
- Movshovitz-Hadar, N. (1987). An Empirical Classification Mode L For Errors In High School Mathematics. *Journal For Research In Mathematics Education*, 18 (1) 3-14
- Mulhern, G. (1989). Between The Ears: Makin Interferences About Internal Processes. En B. Greer Y G. Mulhern (Eds.). *New Directions In Mathematics Education*.
- Muñoz, C. (2014). El Meme Como Evolución De Los Medios De Expresión Social. [https://Repositorio.Uchile.Cl/Bitstream/Handle/2250/129749/EI%20MEME%20COMO%20EVO-LUCI%C3%B3n%20DE%20LOS%20MEDIOS%20DE%20EX-PRESI%C3%B3n%20SOCIAL.Pdf?Sequence=1&Isallowed=Y](https://repositorio.uchile.cl/bitstream/handle/2250/129749/EI%20MEME%20COMO%20EVO-LUCI%C3%B3n%20DE%20LOS%20MEDIOS%20DE%20EX-PRESI%C3%B3n%20SOCIAL.Pdf?Sequence=1&Isallowed=Y)

- Peña, D. (2024). *Los obstáculos epistemológicos en bachelard, el concepto de campo y la reproducción social en bourdieu, transferencia a la esfera de la praxis educativa* [Tesis De Maestría, Universidad Pedagógica Nacional]. Repositorio Institucional UPN. [Http://Repository.Pedagogica.Edu.Co/Bitstream/Handle/20.500.12209/20119/Los%20OBSTACU-LOS%20EPISTEMOL%C3%B3gicos%20EN%20BACHELARD%20.Pdf?Sequence=1&Isallowed=Y](http://Repository.Pedagogica.Edu.Co/Bitstream/Handle/20.500.12209/20119/Los%20OBSTACU-LOS%20EPISTEMOL%C3%B3gicos%20EN%20BACHELARD%20.Pdf?Sequence=1&Isallowed=Y)
- Pérez, G., Guillermo, M. Y Aguilar, A. (2014) El Meme En Internet. Usos Sociales, Reinterpretación Y Significados, A Partir De Harlem Shake, *Argumentos (Méx.)* 27(75). [Https://Www.Scielo.Org.Mx/SciELO.Php?Script=Sci\\_Arttext&Pid=S0187-57952014000200005](https://Www.Scielo.Org.Mx/SciELO.Php?Script=Sci_Arttext&Pid=S0187-57952014000200005)
- Pérez, M., et al. (2019). Causas de los errores en la resolución de ecuaciones lineales con una incógnita. *PNA* 13(2), 84-103. <https://digibug.ugr.es/bitstream/handle/10481/56442/Perez2019PNA13%282%29Causas.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Prediger, S. (2010). How To Develop Mathematics-For-Teaching And For Understanding: The Case Of Meanings Of The Equal Sign. *Journal Of Mathematics Teacher Education*, 13(1), 73-93.
- Radatz, H. (1979). Análisis De Errores En La Educación Matemática. *Revista De Investigación En Educación Matemática*, 10 (3), 163–172. [Https://Doi.Org/10.5951/Jresematheduc.10.3.0163](https://Doi.Org/10.5951/Jresematheduc.10.3.0163)
- Ramos, L. (2020). *Los memes como ayuda didáctica en el aula de clase* [Tesis de maestría, Universidad Pontificia Bolivariana]. UPB. [Http://Hdl.Handle.Net/20.500.11912/8255](http://Hdl.Handle.Net/20.500.11912/8255).

- Real Academia Española. (2023). *Error*. En *Diccionario De La Lengua Española* (Versión En Línea). Recuperado De <https://dle.rae.es/Error?M=Form>
- Real Academia Española. (2023). *Meme*. En *Diccionario De La Lengua Española* (Versión En Línea). Recuperado De <https://dle.rae.es/Meme>
- Recuero, R. (2007). Memes Em Weblogs: Proposta De Uma Taxonomía, *Revista Famecos*, 32, 23-31. <https://www.redalyc.org/Pdf/4955/495550188006.Pdf>
- Rico, L. (1998). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico. (Eds.). *Errores y dificultades de los estudiantes resolución de problemas evaluación historia, Educación Matemática* (pp. 69-104).  
<https://hdl.handle.net/1992/40582>
- Rios, W. y Asprilla, O. (2022). Errores asociados a operaciones aditivas con fracciones: un estudio exploratorio con estudiantes de secundaria. *Revista Boletín Redipe*, 11(11).  
<https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/9993768.pdf>
- Rivas, M. (2012). *Análisis epistémico y cognitivo de tareas de proporcionalidad en la formación de profesores de educación primaria* [Tesis doctoral, Universidad de Granada]. Digibug.  
[https://www.ugr.es/~jgodino/Tesis\\_doctorales/Mauro\\_Rivas\\_tesis.pdf](https://www.ugr.es/~jgodino/Tesis_doctorales/Mauro_Rivas_tesis.pdf)
- Rojas, P. (2010). *Iniciación al Álgebra Escolar: Elementos para el Trabajo en el Aula*. Memoria 11° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Recuperado de <https://funes.unian-des.edu.co/funes-documentos/iniciacion-al-algebra-escolar-elementos-para-el-trabajo-en-el-aula/>

Ruano, R. M., Socas, M. M. y Palarea, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA* 2(2), 61-74.

<https://digibug.ugr.es/bitstream/handle/10481/4441/Ruano2008Analisis.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

Rueda, N. (2018). *Algunas dificultades que presentan los estudiantes de séptimo para sumar y restar fracciones. Una mirada desde la modelación Matemática*. [Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia]. Repositorio Institucional UNAL. <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/64081>

Socas, M. (1997). Dificultades, Obstáculos Y Errores En El Aprendizaje De Las Matemáticas En La Educación Secundaria. En L. Rico (Coord.), *La Educación Matemática En La Enseñanza Secundaria* (Pp. 125-154). Barcelona, España: Ice - Horsori.

Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (eds.), *Investigación en educación matemática XI* (pp. 19-52). Recuperado de <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/2696955.pdf>

Socas, M. (2011). La Enseñanza Del Álgebra En La Educación Obligatoria. Aportaciones De La Investigación. *Revista Números*, 77, 5-34 <https://Funes.Uniandes.Edu.Co/Funes-Documents/La-Ensenanza-Del-Algebra-En-La-Educacion-Obligatoria-Aportaciones-De-La-Investigacion/>

Vlassis, J. (2008). The role of mathematical symbols in the development of number conceptualization: The case of the minus sign. *Philosophical Psychology*, 21(4), 555-570.



Widjaja, W. Stacey, K. y Steinle, V. (2008). Misconceptions about density of decimals: Insights from pre-service teachers' work [conferencia]. *Presented at Konferensi Nasional Matematika*, Palembang, Indonesia. [https://minerva-access.unimelb.edu.au/bitstream/handle/11343/34987/73875\\_WidjajaStaceySteinleKNM08.pdf?sequence=1](https://minerva-access.unimelb.edu.au/bitstream/handle/11343/34987/73875_WidjajaStaceySteinleKNM08.pdf?sequence=1)

Zúñiga, A. (2021). El Uso Del Meme Como Recurso Pedagógico Y Evaluativo. [Conferencia]. *XII Festival Internacional De Matemáticas – XXII Congreso Nacional De Ciencias, Tecnología Y Sociedad*, San José, Costa Rica

## 11. ANEXOS

## Anexo A

*Plantillas con su respectivo significado*



Plantilla	Uso
	<p>Es una herramienta, acción que se considera como segura o confiable. Nunca falla.</p>
	<p>Plantilla que pone en juego la toma de decisiones. Cada una represente la indecisión de no saber que opción tomar</p>

	<p>Una propuesta y tú decides sobre su elección.</p>						
	<p>Una técnica o información con algo oculto que es negativo</p>						
<p><b>MY HEART</b></p> <table border="1" data-bbox="204 989 716 1245"> <tr> <td data-bbox="204 989 467 1073"></td> <td data-bbox="467 989 716 1073">  </td> </tr> <tr> <td data-bbox="204 1073 467 1157"></td> <td data-bbox="467 1073 716 1157">  </td> </tr> <tr> <td data-bbox="204 1157 467 1245"></td> <td data-bbox="467 1157 716 1245">  </td> </tr> </table> 							<p>Este tipo de plantillas se usan para evidenciar la evolución de un evento, una decisión, un acto realizado por una persona. Aunque cada plantilla</p>
							
							
							

	<p>mues- tre una evolu- ción dife- rente en esencia com- parten la idea que a medida que se avanza au- menta el fac- tor fuerza, sor- presa, inteli- gencia, etc.</p>
	<p>Este tipo de planti- llas es usado para ejem- plificar dos mo- men- tos. El pri- mero nos ge- nera</p>
	<p>Este tipo de planti- llas es usado para ejem- plificar dos mo- men- tos. El pri- mero nos ge- nera</p>

	<p>una felicidad momentánea, el segundo es una tristeza o sorpresa desagradable. Es ver la contraparte de dos momentos, como una pequeña acción puede traer consigo desgracia.</p>
	<p>Toma de decisiones, estas tres plantillas representan una situación, tener</p>

	<p>dos opciones y tomar la decisión de tomar una de ellas. Tal vez cada una se presente en diferentes contextos, sin embargo, su esencia es la misma.</p>
	<p>Sorpresa inesperada. Ya sea por algo visto o por algo que le dijeron al personaje, ambas plantillas demuestran la</p>

	<p>sor- presa que ge- nera ambas situa- ciones.</p>
	<p>Ambas planti- llas ejem- plifi- can la misma situa- ción; obser- var algo que de- cep- ciona.</p>
	<p>Estas dos planti- llas re- presen- tan, por el</p>

	<p>contra-rio de la ante-rior, el obser-var algo que nos mo-tiva, nos llena de ale-gría, nos hace sonreír de solo verlo.</p>
	<p>Estas planti-llas son usadas cuando haces un mo-vi-miento único, cuando la ju-gada, estrate-gia, movi-miento que se realizó y se cree que sa-lió con éxito.</p>



Momento antes de la tragedia. Son dos plantillas que ejemplifican la calma antes de la tormenta, una tormenta (o choque) que son inevitables.