

**ESTUDIO DE ALGUNAS REPRESENTACIONES DE EXPRESIONES EN UN
PLANO AL QUE SE LE ASIGNA UNA ESCALA ALTERNATIVA A LA USUAL**

SERGIO DANIEL MUÑOZ GUALDRÓN

**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ. D. C.**

2020

**ESTUDIO DE ALGUNAS REPRESENTACIONES DE EXPRESIONES EN UN
PLANO AL QUE SE LE ASIGNA UNA ESCALA ALTERNATIVA A LA USUAL**

**Trabajo de grado presentado para optar al título de
Licenciado en Matemáticas**

SERGIO DANIEL MUÑOZ GUALDRÓN
Código:2016240050

ASESOR:
ÓSCAR JAVIER MOLINA JAIME

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ. D. C.

2020

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Presentados y aprobados el documento escrito y la sustentación del Trabajo de Grado titulado **“ESTUDIO DE ALGUNAS REPRESENTACIONES DE EXPRESIONES EN UN PLANO AL QUE SE LE ASIGNA UNA ESCALA ALTERNATIVA A LA USUAL”**, elaborado por el estudiante **SERGIO DANIEL MUÑOZ GUALDRÓN**, identificado con el Código **2016240050** y Cédula **1023932689**, el equipo evaluador, abajo firmante, asigna como calificación **cuarenta y cuatro (44) puntos**.

El mismo equipo evaluador recomienda la siguiente sugerencia de distinción:

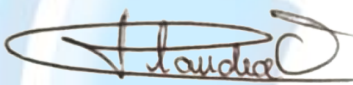
Ninguna ☒ Meritoria ☐ Laureada ☐

El Trabajo de Grado, presentado como monografía, constituye un requisito parcial para optar al título de **Licenciado en Matemáticas**.

En constancia se firma a los quince (15) días del mes de octubre de 2020.



Dr. ÓSCAR JAVIER MOLINA JAIME
Asesor del Trabajo de grado



Mg. CLAUDIA MARCELA VARGAS GUERRERO
Jurado del Trabajo de grado



Dr. CARLOS ROBERTO PÉREZ MEDINA
Jurado del Trabajo de grado

Índice general

1. Planteamiento del Problema	5
1.1. Justificación	5
1.2. Objetivos	7
2. Conceptos preliminares	8
2.1. Sistema coordenado	8
2.2. Sistema coordenado en un plano	10
2.3. Escalas distintas a la usual	12
2.4. Ejemplos de escalas distintas a la usual	13
2.5. Representación gráfica de curvas en escalas distintas a la usual	16
3. Escala semiradical	19
3.1. Escala Radical	19
3.2. Escala semiradical	21
3.3. Distancia entre puntos en la escala semiradical	25
4. Curvas en la escala semiradical	28
4.1. Rectas en la escala semiradical	28
4.1.1. Rectas	29
4.1.2. Ángulo entre rectas	38
4.1.3. Rectas perpendiculares	40

4.1.4.	Distancia de un punto a una recta	48
4.1.5.	Rectas paralelas	50
4.2.	Triángulos	53
4.3.	Curvas cónicas	57
4.3.1.	Circunferencia	58
4.3.2.	Parábola	63
4.3.3.	Elipse	68
4.3.4.	Hipérbola	73
5.	Conclusiones	78
5.1.	Resultados teóricos	78
5.2.	Principales dificultades	80
5.3.	Sugerencias preliminares para incursionar en clases de geometría analítica	81
5.4.	Aportes a mi formación profesional	82

Resumen

El presente trabajo expone un estudio de objetos geométricos cuando se usa un plano al cual se le asigna un sistema coordenado diferente al sistema cartesiano usual. Específicamente, el sistema alternativo consiste en hacer un cambio en la escala del Eje Y (dejando el Eje X igual al sistema usual), con la intención de que la representación gráfica de la expresión $h(x) = \sqrt{x}$ se visualice como una recta; denominamos a tal sistema alternativo "sistema de escala semiradical". Naturalmente, este sistema coordenado alternativo genera cambios en la representación de otros objetos. Con el estudio nos abocamos a determinar variaciones que se perciben al usar la escala semiradical, de objetos como: la distancia euclidiana usual, rectas definidas a partir de la representación algebraica usual (rectas analíticas), ángulos entre rectas analíticas, perpendicularidad entre rectas analíticas, triángulos, y representación gráfica de curvas cónicas.

Palabras Clave

Sistema coordenado usual, escalas de ejes coordenados, sistema coordenado alternativo, sistema coordenado semiradical.

Abstract

This project presents a study of geometric objects when it is joined to a plane to which a different coordinate system is assigned than the usual Cartesian system. Specifically, the alternative system consists of doing a change in the scale of the Y axis (leaving the X axis equal to the usual system); we called such alternative system "semi-radical scale"; this was proposed with the intention that the graphic representation of the expression $h(x) = \sqrt{x}$ is visualized as a straight line. Naturally, this alternative coordinate system generates changes in the representation of other objects. Our purpose with this study was determining variations that are perceived using the semi-radical scale of objects such as: the usual Euclidean distance, straight lines defined from the usual algebraic representation (analytical straight lines), angles between analytical straight lines, perpendicularity between analytical straight lines, triangles, and graphical representation of conical curves.

Key words

Usual coordinate system, coordinate axes scale, alternative coordinate system, semiradical coordinate system.

Introducción

Durante el desarrollo de una sesión del curso de geometría analítica que tuve la oportunidad de tomar en mi formación como Licenciado en Matemáticas, mientras se daba la introducción al concepto de planos cartesianos alternativos, el profesor aludió a una idea que quedó grabada en mi mente, y que parafraseo de la siguiente manera:

Si se toma un plano cartesiano alternativo en que la escala de uno de sus ejes cambie a una logarítmica, estaríamos viendo “el mundo como lo ve la función logaritmo”.

Una pregunta que me surgió durante el transcurso de esa clase fue: ¿Qué condiciones debe tener el sistema coordenado para que la representación gráfica de esa función logaritmo se pueda “ver” como una recta?

Durante el desarrollo del curso una respuesta a la pregunta fue dada. Esta se fundamenta en el uso de un sistema coordenado alternativo, usualmente conocido como escala semilogarítmica (Manzur, 2009).

El contexto descrito en los anteriores párrafos fue la génesis de un proceso de exploración, que culmina parcialmente, con este documento de trabajo de grado. Mi interés se concentraba en hacer un estudio análogo, pero para la función $y = \sqrt{x}$. Me concentré en hacer una exploración de la situación, acompañado siempre del Entorno de geometría dinámica Geogebra. Dentro de los varios métodos que exploré, uno que vislumbraba resultados promisorios fue usar una escala alternativa para el eje Y usual; el sistema coordenado alternativo surgido se denomina sistema semiradical. En este trabajo, se presenta una descripción de dicho sistema alternativo y se expone el comportamiento de ciertas curvas en él. Para ello, el documento fue estructurado de la siguiente manera:

Para iniciar, en el primer capítulo se presenta una contextualización que da origen al problema del estudio y a la pregunta que lo orientó. Así mismo, se presentan los objetivos del trabajo.

En el segundo capítulo se presenta una contextualización de algunos conceptos que están inmersos en el proceso de definición de escalas. Para ello se define "sistema coordenado usual" y "escala usual" en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$; luego se propone un procedimiento para definir escalas distintas a la

usual. Seguidamente, se presentan ejemplos de escalas distintas a la usual, y por último, se realiza una breve comparación de dichos ejemplos con la escala usual.

El tercer capítulo inicia con la definición de escala semiradical y se prueba que permite asociar la representación gráfica de la expresión $y = \sqrt{x}$ con una recta; en ese contexto, se expone el procedimiento para transformar coordenadas del sistema usual al alternativo y viceversa.

En el cuarto capítulo se realiza una caracterización de las representaciones gráficas de rectas analíticas en el plano semiradical; a partir de ello, se define ángulos entre rectas y con ello se estudia el comportamiento de las rectas perpendiculares y paralelas. Así mismo, se define distancia de un punto a una recta. Por otro lado, se estudia el comportamiento de triángulos y de las cónicas analíticas. Vale aclarar que en este texto usamos el término rectas o cónicas analíticas para indicar la representación algebraica (o analítica) que usualmente se les otorga a dichos objetos en $\mathbb{R}^2$ con la métrica euclidiana usual. Cuando sea menester aclarar una representación diferente (la gráfica, por ejemplo), se hará la respectiva referencia.

Finalmente, en el quinto capítulo se exponen las conclusiones obtenidas durante el desarrollo del trabajo, las cuales se organizan de la siguiente manera: resultados teóricos, dificultades que se presentaron durante el desarrollo del trabajo, sugerencias para incursionar en clases de geometría analítica, aportes a mi formación personal y sugerencias para complementar el estudio realizado.

Capítulo 1

Planteamiento del Problema

Esta sección consta de dos apartados específicos. En primera instancia, presentamos la justificación del estudio y con ello, posibles utilidades del mismo desde un punto de vista educativo. En seguida, presentamos tanto el objetivo general como los objetivos específicos a los que se les apunta con el trabajo.

1.1. Justificación

En el programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional ha habido un interés por estudiar el comportamiento de objetos geométricos desde un punto de vista analítico (Medigaño, 2016), haciendo cambios sobre ciertas condiciones. De manera específica, dichos cambios se han concentrado en tres asuntos:

- (i) El estudio de curvas empleando diferentes métricas; por ejemplo, la métrica del taxista, del máximo, del mínimo, discreta, etc.
- (ii) El estudio de curvas cambiando condiciones en las definiciones de objetos o propiedades de los mismos.
- (iii) El estudio de curvas empleando planos cartesianos diferentes al convencional.

El plano cartesiano usual establece un sistema de ejes coordenados conformado por un par de rectas que se intersecan de forma perpendicular. De manera alternativa, también se puede establecer un sistema de ejes donde el ángulo que forman los ejes no es necesariamente recto. Es claro que, para establecer las componentes de las coordenadas de un punto en cualquier sistema coordenado, es necesario precisar la manera en que se establece el respectivo componente relativo a cada eje. Medigaño (2016) presenta un estudio a partir de sistemas alternativos los cuales se caracterizan por la manera en que se establecen las coordenadas del punto, particularmente cuando los ejes del sistema no determinan un ángulo recto.

Sin embargo, no se ha profundizado en otra posibilidad de cambio consistente en una modificación en la escala del eje Y del plano coordenado, análoga a la que sugiere la escala logarítmica. En este estudio hemos tomado la expresión $y = \sqrt{x}$ para determinar la escala alternativa. Usando como artefacto de exploración y conjeturación el software de geometría dinámica Geogebra, pretendemos estudiar el comportamiento de las representaciones gráficas de rectas y cónicas analíticas en el sistema alternativo (denominado sistema o plano semiradical) y determinar algunas propiedades relativas a la relación de paralelismo, perpendicularidad y amplitud de ángulos.

Consideramos que un estudio como este no solo contribuye a la extensión del estudio de curvas desde un punto de vista analítico, según condiciones alternativas a las usuales (para este caso, usando una escala alternativa a la usual para el eje Y); también, se constituye en un punto de partida para que, en un futuro cercano, se diseñen secuencias de tareas aplicables en los cursos Geometría Analítica o Geometría Dinámica del programa de Licenciatura en Matemáticas, o en cursos de matemáticas escolares interesados en temáticas alternativas a las usuales. Esto, con el fin de lograr dos propósitos: (i) poner en uso conocimientos de la geometría analítica convencional (en el marco del sistema usual) para lograr resultados en el sistema alternativo e interpretarlos; y (ii) promover el desarrollo de procesos de la actividad matemática tales como la visualización, representación, conjeturación y argumentación, particularmente, en el contexto de la Geometría Analítica.

1.2. Objetivos

Objetivo general

Estudiar algunas propiedades de curvas en un plano coordenado al que se le asigna la escala semiradical.

Objetivos Específicos

- Analizar el comportamiento de las rectas analíticas en el plano semiradical, estudiando propiedades relativas a ángulos entre rectas y relación de paralelismo.
- Analizar el comportamiento de curvas cónicas en el plano semiradical.
- Proveer sugerencias iniciales respecto a cómo el trabajo realizado puede ser base para idear secuencias que pueden ser implementadas en cursos que aborden temas de geometría analítica.

Capítulo 2

Conceptos preliminares

Esta sección presenta la referencia conceptual necesaria que permite contextualizar el estudio que se pretende realizar. En este sentido, se provee una caracterización para $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ de escala en el sistema coordenado (y con ello la definición de distancia), las maneras de definir una escala y algunos ejemplos de escalas diferentes a la usual.

2.1. Sistema coordenado

Dado el conjunto de números reales ($\mathbb{R}$) y una recta L , se define una función f uno a uno de la siguiente forma:

$$f_u : L \rightarrow \mathbb{R}$$

$$P \mapsto x$$

Esta función indica que se puede generar una relación de correspondencia tal que a cada punto P de L le corresponde un único número x real y a cada número x real le corresponde un único punto P de L . A esta correspondencia se le nombra como *sistema coordenado (SC)* o *escala* en una recta L .

En un SC de una recta L , dado un punto P perteneciente a L y un número x real tal que $f_u(P) = x$, se dice que x es la *coordenada* de P .

Al punto O con coordenada igual a 0 se le nombra *origen*.

En una recta a la que se le asigna un SC, se define distancia usual o Euclidiana entre dos puntos P y Q como:

$$d(P, Q) = |f_u(P) - f_u(Q)|$$

Si $f_u(P) = x_1$ y $f_u(Q) = x_2$ entonces:

$$d(P, Q) = |x_1 - x_2|$$

La distancia del origen a un punto P con coordenada x es:

$$d(O, P) = |f_u(O) - f_u(P)|$$

$$d(O, P) = |0 - x|$$

$$d(O, P) = |x|$$

Esto quiere decir que la distancia del origen a un punto de una recta va a ser igual al valor absoluto la coordenada asignada a dicho punto. Se puede apreciar que de esta forma, la distancia entre dos puntos de una recta a la que se le asigna un SC, depende de la coordenada correspondiente de cada punto. Ahora bien, otro asunto que se debe considerar es que la ubicación de los puntos en una recta depende del orden en $\mathbb{R}$. Esto es consecuencia de la definición de interestancia y de las propiedades que relacionan coordenadas de puntos con relación de interestancia entre puntos:

D. Interestancia: Dados tres puntos A, B, C de una recta a la que se le asigna un SC. Si $d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$ se dice que B está entre A y C y se notará como $A - B - C$.

T. Orden - interestancia: Si se tiene que $f_u(A) < f_u(B) < f_u(C)$ entonces $A - B - C$; de forma recíproca si $A - B - C$ entonces $f_u(A) < f_u(B) < f_u(C)$.

Teniendo en cuenta estos hechos, tomando el punto O como el origen, se justifica el hecho de que a una recta a la que se le asigna un SC está compuesta por un punto considerado el origen (de coordenada 0), los puntos cuya coordenada es negativa (que se suelen ubicar a la izquierda

del origen) y los puntos cuya coordenada es positiva (que se suelen ubicar a la derecha del origen tomando en consideración que la recta se ubica horizontalmente).

En la Figura 2.1 se muestra un ejemplo SC asignado a una recta.

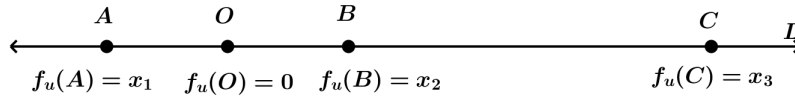


Figura 2.1: Ejemplo de recta a la que se le asigna un SC.

Aunque no se han definido los valores de x_1 , x_2 y x_3 , la intuición indica que $d(A, O)$ es diferente a $d(B, C)$; esto se debe a que existe un convenio que relaciona la distancia de dos puntos y la representación gráfica de esta. Este convenio menciona que cuando la distancia entre una pareja de puntos es igual a la distancia entre otra pareja de puntos -por ejemplo $d(A, B) = d(C, D)$ -, entonces la representación gráfica que ilustra tales distancias también es igual; esto es, si se superponen la representaciones de tales parejas puntos $-(A, B)$ con (C, D) -, estas coinciden - A con B y C con D - (Moise, 1990). En este trabajo se nombra como *convenio de distancias iguales*; por ejemplo, si se tienen los puntos: $f_u(P) = 1$, $f_u(Q) = 2$, $f_u(R) = 8$ y $f_u(S) = 9$. entonces $d(P, Q) = d(R, S)$; esta igualdad entre distancias se debe percibir en la representación gráfica de dichos puntos, como se muestra en la Figura 2.2.

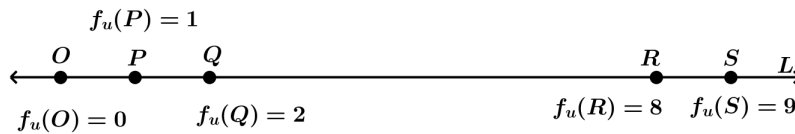


Figura 2.2: Ejemplo de convenio de distancias iguales.

2.2. Sistema coordenado en un plano

En un plano α es posible configurar un sistema coordenado de la siguiente forma: Primero se definen dos rectas X y Y perpendiculares entre sí a las cuales se le asigna un SC tal que el punto de intersección entre ellas corresponde al origen de las dos rectas. Dado un punto P perteneciente al

plano α , se traza una recta perpendicular a X por P nombrando M el punto de intersección con X ; la coordenada x de M en X se llama *coordenada x* o *abscisa* de P . De forma análoga se traza una recta perpendicular a Y por P nombrando N el punto de intersección con Y ; la coordenada y de N en Y se llama *coordenada y* u *ordenada* de P . De esta forma, a cada punto P de α le corresponde el par ordenado (x, y) de números reales, es decir, un elemento del producto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (Moise, 1990); las rectas X y Y mencionadas anteriormente se nombran como *ejes* de un SC en un plano. La Figura 2.3, ilustra la representación gráfica de un punto P en un plano teniendo como referencia un sistema coordenado como el descrito previamente.

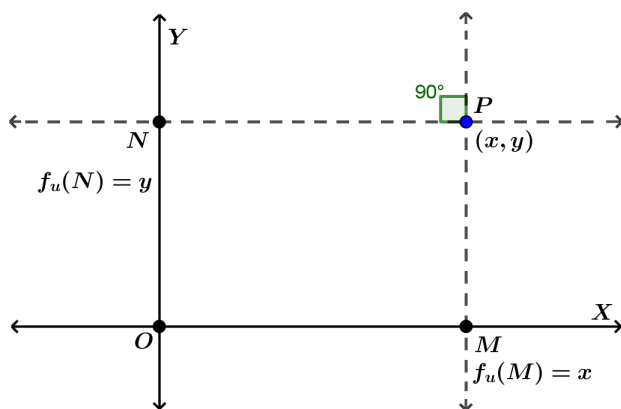


Figura 2.3: Representación gráfica de P en un plano coordenado.

Ahora bien, en este contexto se define la distancia usual o Euclidiana de la siguiente manera:

Definición de distancia usual en $\mathbb{R}^2$: Sean los puntos P y Q con coordenadas $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$; la distancia entre P y Q en un plano al que se le asigna un SC en $\mathbb{R}^2$ es (Moise, 1990):

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad (2.1)$$

Esto quiere decir que la distancia usual entre dos puntos de un plano al que se le asigna un SC en $\mathbb{R}^2$, también depende de las coordenadas que se le asignan a dichos puntos; además, en un plano al que se le configura un SC también se mantiene el convenio de distancias iguales. Por supuesto, tanto la definición de distancia euclidiana en una recta a la que se le asigna un SC como la definición de distancia euclidiana en un plano al que se le configura un SC define una métrica

en $\mathbb{R}^2$, esto es una una función tal que:

1. $d(P, Q) \geq 0$
2. $d(P, Q) = 0$ si y solo si $P = Q$
3. $d(P, Q) = d(Q, P)$

Se puede apreciar que un SC en el plano se define a partir de dos rectas a las que se les asigna, respectivamente, un sistema coordenado. ahora bien, solo se ha mencionado una forma de configurar una escala en cada recta. A esta manera de asignación de SC en cada recta se le denomina *sistema coordenado usual* o *escala usual*.

2.3. Escalas distintas a la usual

A una recta a la que se le asignó una escala usual, es posible asignarle una escala diferente; para ello basta con definir una función uno a uno de la siguiente manera:

A una recta E se le asigna una escala usual mediante una función f_u . Sea f_E una función biyectiva tal que:

$$\begin{aligned} f_E : \quad \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ f_u(P) &\mapsto f_E(f_u(P)) \end{aligned} \tag{2.2}$$

donde P es un punto de la recta E y $f_u(P)$ su coordenada en la escala usual. Entonces la función f_E define una nueva escala para E , donde a cada coordenada $f_u(P)$ que se le asigna a un punto P de E , le corresponderá una nueva coordenada $f_E(f_u(P))$. En este orden de ideas, la distancia euclidiana entre dos puntos P, Q de una recta E a la que se le asigna una escala f_E es:

$$d(P, Q) = |f_E(f_u(P)) - f_E(f_u(Q))|$$

Teniendo en cuenta esto, para configurar una escala alternativa en un plano al que se le asignó una escala usual basta con definir escalas alternativas a sus ejes. Esto, ya que el par ordenado

asignado a un punto en un plano en $\mathbb{R}^2$ depende de las coordenadas inducidas por los ejes y estas coordenadas se definen por medio de las escalas de dichos ejes.

Convenio de notación: En este trabajo se se mencionarán constantemente puntos que pueden pertenecer a rectas o planos a los que se les asigna escalas usuales o distintas a la usual; para facilitar la lectura de un punto en alguna escala se propone lo siguiente:

En $\mathbb{R}$, para nombrar la coordenada x de un punto A perteneciente a una recta con escala usual se usará la notación $C_u(A) = x$; si A pertenece a una recta con escala distinta a la usual, se usará una letra distinta en el subíndice, esta dependerá del nombre de dicha escala.

Para $\mathbb{R}^2$ se debe tener en cuenta lo siguiente: ya que una escala en un plano depende de las escalas que se definan en sus ejes, se usarán dos subíndices; el primero hace referencia a la escala del eje X y el segundo a la escala del eje Y . Por ejemplo, si el punto A con coordenadas (x, y) pertenece a un plano que tiene escala usual en ambos ejes, será denotado $C_{uu}(A) = (x, y)$; si A pertenece a un plano cuyo eje X tiene una escala usual y el eje Y tiene una escala alternativa, entonces la segunda letra del subíndice será distinta; si A pertenece a un plano que tiene escala alternativa en ambos ejes, ambas letras del subíndice serán distintas.

Cuando a una recta Y se le asigna una escala distinta a la usual, esta será notada con un subíndice; si la recta es nombrada sin subíndice se asume que a esta se le asigno la escala usual.

2.4. Ejemplos de escalas distintas a la usual

En la anterior sección se puede apreciar que basta con usar funciones biyectivas de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ para asignar escalas distintas a la usual. A manera de ejemplo, se describen en seguida una escala en $\mathbb{R}$ y otra en $\mathbb{R}^2$ alternativas a la usual.

Ejemplo 1. Sistema coordenado lineal logarítmico: En una recta Y a la que se le asigna una escala usual se define una escala $f_l(y) = \log(y)$; esto significa que a cada y correspondiente a un punto de la recta Y se le reasigna el valor $\log(y)$. Con esta nueva asignación, la recta Y tendrá una escala alternativa denominada *escala logarítmica*. Cuando a una recta Y se le asigna una escala

diferente a la usual, esta será notada con Y y un subíndice; para este caso, por ejemplo, se puede escribir Y_l donde l indica que la escala de Y se asigna tal como se indicó antes. Por tanto la notación de la coordenada x de un punto A de dicha recta es $C_l(A) = x$.

La Figura 2.4, ilustra la asignación según la escala logarítmica.

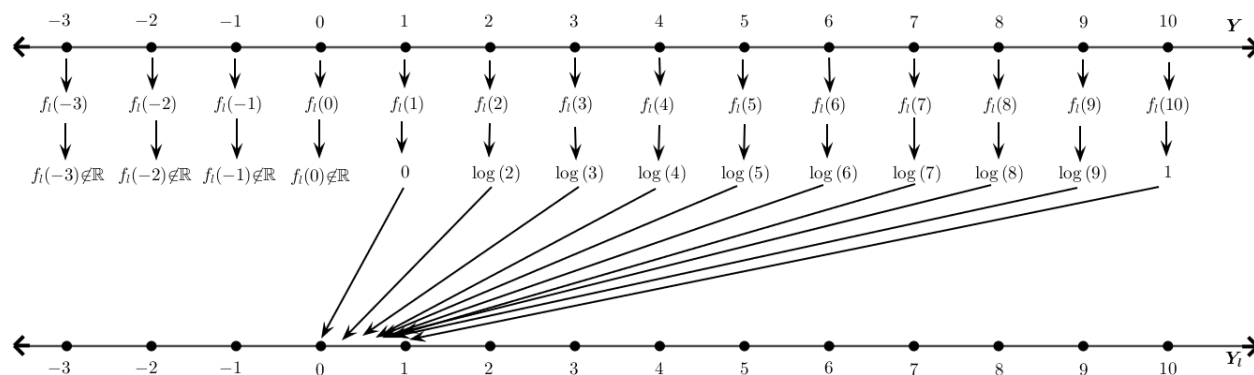


Figura 2.4: Definición de escala logarítmica.

En la Figura 2.4 se puede apreciar que al momento de definir la escala logarítmica se cambian las coordenadas correspondientes a los puntos en la escala usual aplicando la función f_l y una vez re asignadas las coordenadas estas se van a ubicar como lo indica la escala usual. Por ejemplo, si un punto A en la recta Y tiene $C_u(A) = 100$, al definir la escala logarítmica su coordenada se redefine como $C_l(A) = \log(100) = 2$ y esta se ubica de la misma forma que se ubican coordenadas en la escala usual. Esto quiere decir que al definir una nueva escala las coordenadas de los puntos tienen una transformación que es inducida por la función con la que se definió la nueva escala, para este caso $f_l(y) = \log(y)$. Ahora bien, si se tiene un punto en una recta con escala logarítmica y se desea saber cuál es su coordenada en una recta con escala usual, se debe aplicar la función inversa que es $f_l^{-1}(y) = 10^y$; por ejemplo, el punto P con $C_l(P) = 3$ tiene $C_u(P) = 1000$ ya que $10^3 = 1000$.

En la Figura 2.4 se puede apreciar que a las coordenadas usuales que tienen un valor negativo no se les puede reasignar una coordenada en la escala logarítmica, debido a que el dominio que define la escala logarítmica es el conjunto de los reales positivos. Sin embargo, esto no implica que

la escala logarítmica no contenga puntos cuyas coordenadas tengan un valor negativo, ya que el rango de la función que define la escala logarítmica son los Reales.

En la Figura 2.5 se representa en una recta Y con escala usual y en una recta Y_l algunos puntos a los que se le aplica la escala logarítmica.

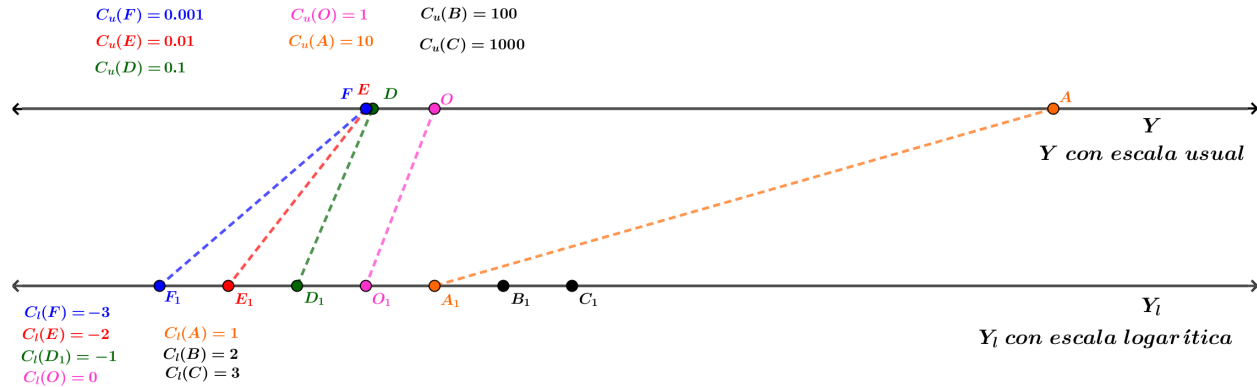


Figura 2.5: Comparación de escala usual con escala logarítmica.

En la Figura 2.5 se puede apreciar que una de las ventajas de definir escalas diferentes a la usual es que cuando se tienen puntos que están muy acumulados o muy dispersos en la escala usual, estos se pueden ubicar de una manera más conveniente para su estudio. La escala logarítmica es un ejemplo de ello; en contextos relativos al estudio de modelos económicos, dicha escala es usada para realizar análisis de números "grandes", por ejemplo.

Ejemplo 2. Escala semilogarítmica: En $\mathbb{R}^2$ un ejemplo de plano al que se le asigna una escala diferente a la usual es el conocido como *escala semilogarítmica* en el plano. Este se caracteriza porque los ejes X y Y tienen escalas $f_u(x) = x$ y $f_l(f_u(y)) = \log y$; para nombrar un punto A de un plano con esta escala semilogarítmica cuya abscisa es x y ordenada es y se usará la notación $C_{ul}(A) = (x, y)$.

En el Cuadro 2.1 se presentan puntos en $\mathbb{R}^2$ para los cuales se pueden comparar sus coordenadas usuales con la transformación de estas al definir un plano con escala semilogarítmica.

Punto	Coordenada Usual	Transformación de la coordenada	Coordenada semilogarítmica
O	$C_{uu}(O) = (0, 1)$	$(0, \log 1)$	$C_{ul}(O) = (0, 0)$
A	$C_{uu}(A) = (1, 10)$	$(1, \log 10)$	$C_{ul}(A) = (1, 1)$
B	$C_{uu}(B) = (2, 10)$	$(2, \log 100)$	$C_{ul}(B) = (2, 2)$
C	$C_{uu}(C) = (3, 100)$	$(3, \log 1000)$	$C_{ul}(C) = (3, 3)$
D	$C_{uu}(D) = (-1, 0.1)$	$(-1, \log 0.1)$	$C_{ul}(D) = (-1, -1)$
E	$C_{uu}(E) = (-2, 0.01)$	$(-2, \log 0.01)$	$C_{ul}(E) = (-2, -2)$
F	$C_{uu}(F) = (-3, 0.001)$	$(-3, \log 0.001)$	$C_{ul}(F) = (-3, -3)$

Cuadro 2.1: Transformación de coordenadas usuales a coordenadas semilogarítmicas.

Con base en lo anterior, las representaciones gráficas asociadas en los puntos del Cuadro 2.1 en un plano con escala semilogarítmica se pueden apreciar en la Figura 2.6.

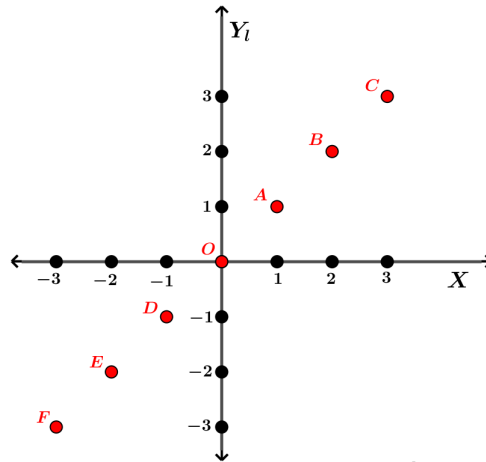


Figura 2.6: Representación gráfica Puntos del Cuadro 2.1 en sistema con escala semilogarítmica.

2.5. Representación gráfica de curvas en escalas distintas a la usual

Cuando se tiene una curva que se puede representar mediante una expresión $h(x)$, la representación en plano a el que se le asigna una escala corresponde a los puntos con coordenadas $(x, h(x))$. En este sentido, dicha representación puede tener cambios si las escalas relativas a los ejes del sistema coordinado cambian. A manera de ejemplo, se presentará gráficamente la curva asociada

a la expresión $h(x) = 10^x$, usando el plano con escala usual (Figura 2.7) y usando el plano con escala semilogarítmica (Figura 2.8).

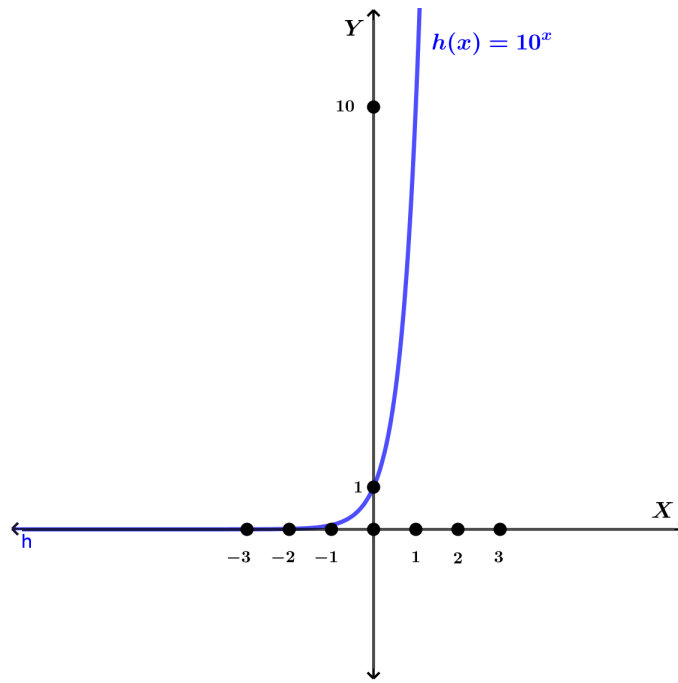


Figura 2.7: Representación gráfica de la expresión $h(x) = 10^x$ en el plano usual

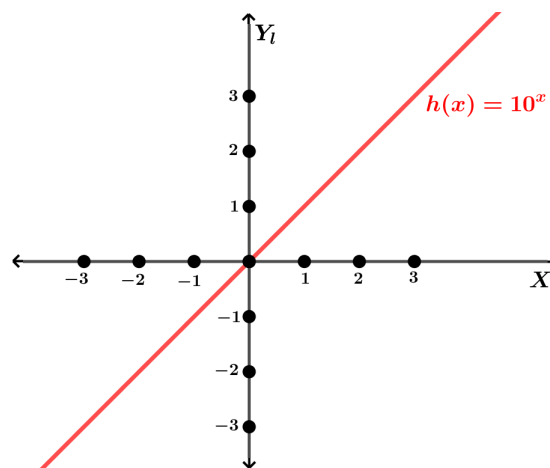


Figura 2.8: Representación gráfica de la expresión $h(x) = 10^x$ en el plano semilogarítmico

Nótese que al realizar la representación gráfica de $h(x) = 10^x$ en el plano con escala semilogarítmica, la curva asociada es una recta, diferente a lo sucedido cuando se utiliza la escala usual.

Lo presentado en el ejemplo 2 de la sección anterior, plantea una situación análoga a la que

se quiere abordar con el presente estudio. El cambio de escala para el eje Y mediante la función $f_y(y) = \log(y)$, condujo a que la representación gráfica de la curva $h(x) = 10^x$ en la escala semilogarítmica fuera una recta. Con este panorama, es plausible plantear un sistema coordenado alternativo basado en una escala no usual para el eje Y de forma tal que para cualquier función $h(x)$ en el sistema usual, su representación se transforme en una recta. Para el estudio que acá se presenta, el interés se focaliza en la expresión $h(x) = \sqrt{x}$.

El presente trabajo de grado pretende hacer un estudio tal, basado en una escala en la cual la curva asociada a la expresión $h(x) = \sqrt{x}$ se represente gráficamente como una recta. Preguntas como: ¿cómo se comportan las rectas?, ¿cómo se comportan las cónicas?, ¿cuáles definiciones o hechos geométricos sufren transformaciones? son asuntos que se pretenden abordar en los capítulos siguientes.

Capítulo 3

Escala semiradical

En el presente trabajo se desea proponer una escala que permita que la representación gráfica de la expresión $h(x) = \sqrt{x}$ se asocie con una curva recta, este capítulo presenta la definición de esta. Para ello, primero se presentará la escala alternativa a la usual en $\mathbb{R}$, y luego, haciendo uso de ella, se presentará la escala alternativa en $\mathbb{R}^2$ que permita dicho efecto.

3.1. Escala Radical

De acuerdo con en el anterior capítulo se puede deducir que la función de la escala está relacionada a la expresión $h(y) = \sqrt{y}$; sin embargo, esta tiene una restricción. Al igual que la escala semilogarítmica, esta expresión tiene como rango los reales positivos, y esto tiene la limitación de no permitir ubicar puntos cuyas ordenadas tengan un valor menor a 0. Para solucionar este inconveniente, la función que se usa para asignar la escala está definida a trozos de la siguiente forma:

$$f_r(y) = \begin{cases} \sqrt{y} & \text{Si } y \geq 0 \\ -\sqrt{-y} & \text{Si } y < 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

La notación de la coordenada x de un punto A perteneciente a una recta con esta escala se nota $C_r(A) = x$. Las Figuras 3.1 y 3.2 ilustran la asignación según la escala radical.

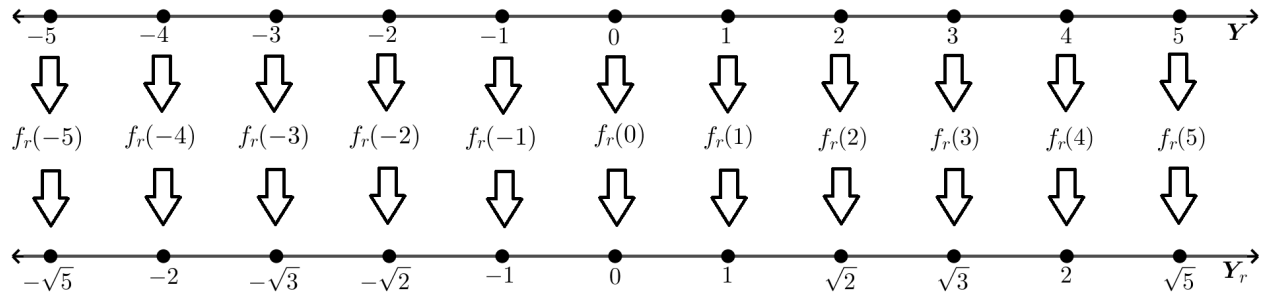
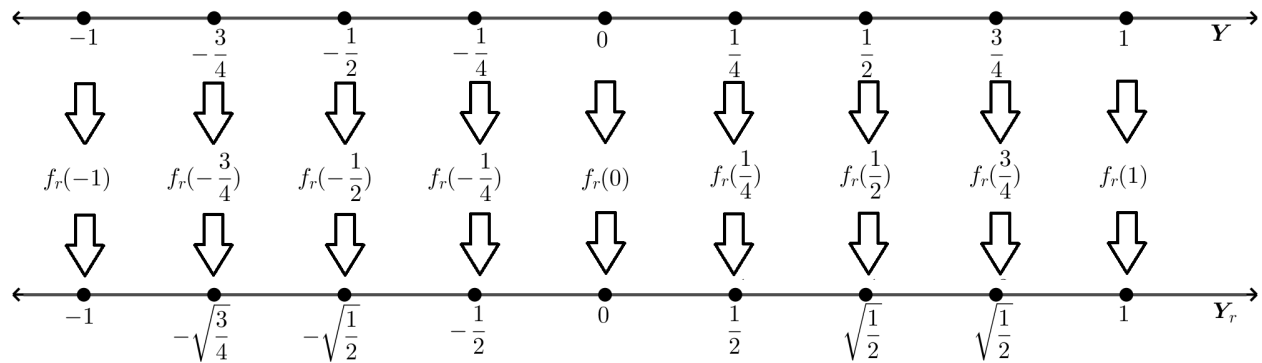


Figura 3.1: Definición de escala radical.

Figura 3.2: Definición de escala radical para algunos elementos del intervalo $[-1, 1]$.

A diferencia de como se define la escala logarítmica, en la escala radical, una vez se reasigna la coordenada aplicando f_r , estas coordenadas no se ubican como lo indica la escala usual. En cambio, estas se usan para generar una nueva escala de tal forma que las coordenadas mantengan su ubicación inicial. Por ejemplo, al aplicar la expresión que define la escala radical f_r al punto A con $C_u(A) = 2$ se tiene que $C_r(A) = \sqrt{2}$; sin embargo, la coordenada $\sqrt{2}$ no se ubica como indica la escala usual, sino que va a mantener la ubicación que tenía antes de que se le aplicara la función f_r . La Figura 3.1 y 3.2 ilustra esta situación.

Si se tiene un punto en una recta con escala radical y se desea saber cuál es su coordenada en

una recta con escala usual, se debe aplicar la expresión:

$$f_r^{-1}(y) = \begin{cases} y^2 & \text{Si } y \geq 0 \\ -y^2 & \text{Si } y < 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Por ejemplo, el punto P con $C_r(P) = -\frac{1}{2}$ tiene $C_u(P) = -\frac{1}{4}$, ya que $f_r^{-1}(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$. Este ejemplo se puede corroborar observando la Figura 3.2.

3.2. Escala semiradical

La definición de la escala semiradical es el producto de aplicar la escala radical al eje Y del sistema coordenado en el plano.

Escala semiradical: Un sistema coordenado en el plano tiene una escala semiradical si su eje X tiene una escala usual y su eje Y tiene una escala radical.

Para nombrar un punto A de un plano con escala semiradical cuya abscisa es x y ordenada es y se usará la notación $C_{ur}(A) = (x, y)$. La intención de definir esta escala es lograr que la representación gráfica de la expresión $h(x) = \sqrt{x}$ se perciba como una línea recta. Para realizar esta representación, en el Cuadro 3.1 se mencionan algunos puntos pertenecientes a dicha expresión y en la Figura 3.3 se representan en el plano semiradical dichos puntos.

Punto	Preimagen	Imagen	Coordenada
O	0	0	$C_{ur}(O) = (0, 0)$
A	1	1	$C_{ur}(A) = (1, 1)$
B	2	$\sqrt{2}$	$C_{ur}(B) = (2, \sqrt{2})$
C	3	$\sqrt{3}$	$C_{ur}(C) = (3, \sqrt{3})$
D	4	2	$C_{ur}(D) = (4, 2)$
E	5	$\sqrt{5}$	$C_{ur}(E) = (5, \sqrt{5})$
F	6	$\sqrt{6}$	$C_{ur}(F) = (6, \sqrt{6})$
G	7	$\sqrt{7}$	$C_{ur}(G) = (7, \sqrt{7})$
H	8	$\sqrt{8}$	$C_{ur}(H) = (8, \sqrt{8})$
I	9	3	$C_{ur}(I) = (9, 3)$

Cuadro 3.1: Algunos puntos que pertenecen a la función $h(x) = \sqrt{x}$.

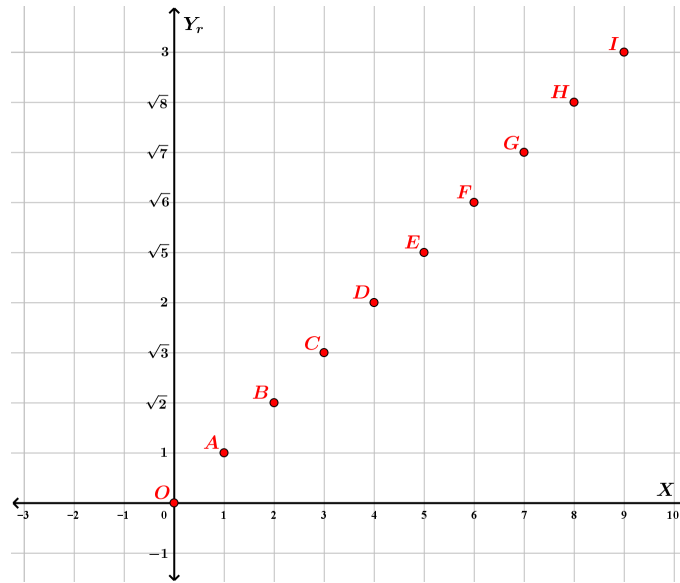


Figura 3.3: Representación en el plano semiradical de los puntos nombrados en el Cuadro 3.1

En la Figura 3.3 se puede ver que los puntos pertenecientes a la expresión $h(x) = \sqrt{x}$ pertenecen a una línea recta. Esto sucede debido a que la escala radical sugiere que al reasignar las coordenadas estas mantengan su ubicación inicial; como la función que se aplicó en el eje Y_r es igual a la expresión $h(x)$, se está indicando entonces que las ordenadas de los puntos que pertenecen a $h(x)$ mantienen la posición inicial de la escala usual, generando así una línea recta similar al de una parte de la recta identidad en el plano usual. Dicho esto, la representación de la expresión $h(x) = \sqrt{x}$ en el plano semiradical es como se presenta en la Figura 3.4.

Nota: El cambio de escalas es arbitrario. La intención que motivó el estudio fue idear una escala en el eje Y de forma tal que la curva $y = \sqrt{x}$ se representara gráficamente como una recta (i.e. se “viera” como una “recta usual”). Esto implicó considerar la idea usada para generar la escala semilogarítmica, aunque fuera parcialmente. Si bien para el eje Y se usó la expresión $y = \sqrt{x}$ para “cambiar” la escala (de manera análoga a cómo se usó la expresión $y = \log x$ para determinar la escala semilogarítmica), fue necesario indicar una ubicación especial para los puntos cuyas coordenadas son $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots$, de forma tal que estos equidistaran (diferente a lo que sucede en la escala semilogarítmica). Estos dos recursos, sustentables desde las matemáticas, permitió lograr el objetivo inicial (graficar la curva $y = \sqrt{x}$ como una recta).

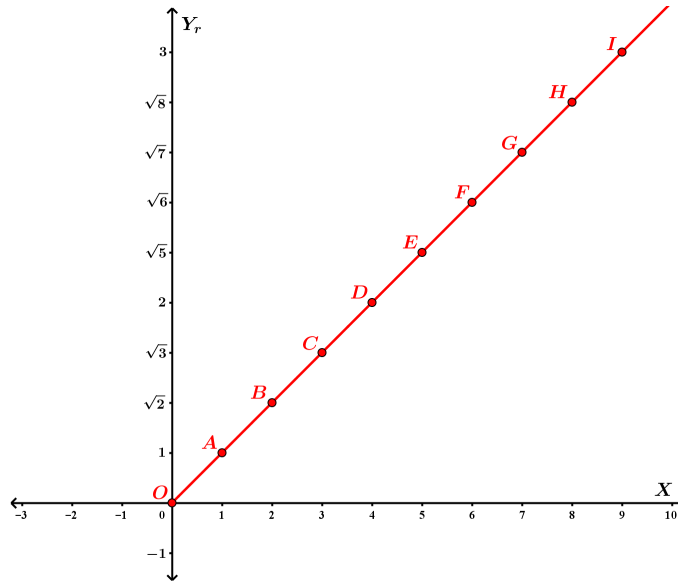


Figura 3.4: Representación gráfica de $h(x) = \sqrt{x}$ en el plano semiradical.

De este modo, se estaría logrando el propósito que se había planteado al momento de definir la escala semiradical; pero más aún, le damos un completo sentido a la manera mediante la cual se definió la escala radical en $\mathbb{R}$ (que la representación gráfica de la expresión $y = \sqrt{x}$ se transforma en una recta). En el Cuadro 3.2 se presentan puntos en $\mathbb{R}^2$ para los cuales se pueden comparar sus coordenadas usuales con la transformación a coordenadas semiradicales que surgen al definir un plano con escala semiradical. Las representaciones gráficas asociadas a los puntos de este cuadro se pueden observar en la Figura 3.5.

Punto	Coordenada Usual	Transformación de la coordenada	Coordenada semiradical
O	$C_{uu}(O) = (0, 0)$	$(0, \sqrt{0})$	$C_{ur}(O) = (0, 0)$
A	$C_{uu}(A) = (2, 1)$	$(2, \sqrt{1})$	$C_{ur}(A) = (2, 1)$
B	$C_{uu}(B) = (3, 4)$	$(3, \sqrt{4})$	$C_{ur}(B) = (3, 2)$
C	$C_{uu}(C) = (-1, 2)$	$(-1, \sqrt{2})$	$C_{ur}(C) = (-1, \sqrt{2})$
D	$C_{uu}(D) = (-3, -3)$	$(-3, -\sqrt{-(-3)})$	$C_{ur}(D) = (-3, -\sqrt{3})$
E	$C_{uu}(E) = (3, -4)$	$(3, -\sqrt{-(-4)})$	$C_{ur}(E) = (3, -2)$
F	$C_{uu}(F) = (2, -\frac{64}{81})$	$(2, -\sqrt{-(-\frac{64}{81})})$	$C_{ur}(F) = (2, -\frac{8}{9})$

Cuadro 3.2: Transformación de coordenadas usuales a coordenadas semiradicales.

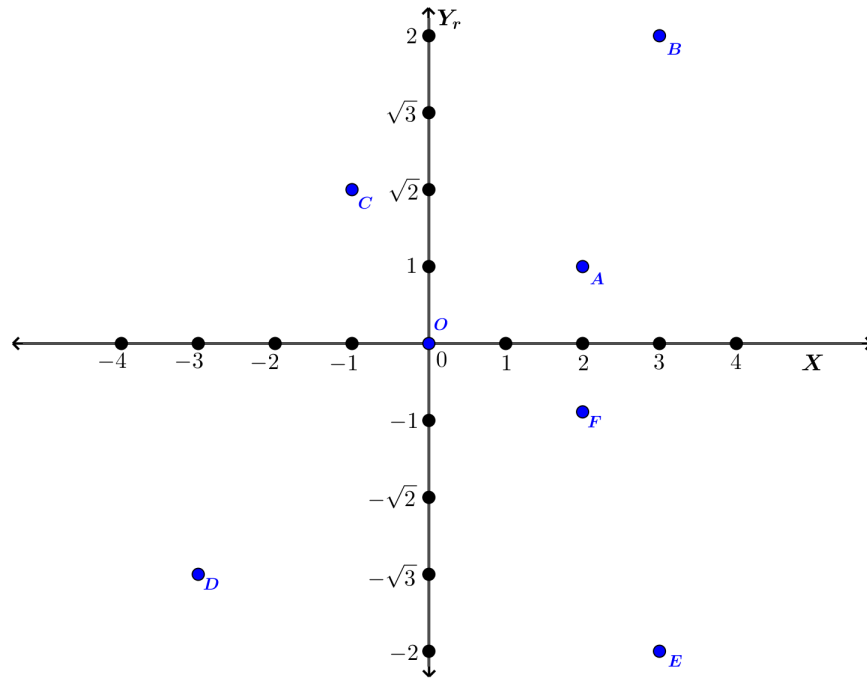


Figura 3.5: Representación gráfica Puntos del Cuadro 3.2 en sistema con escala semiradical.

Es importante mencionar que las representaciones de los puntos mostrados en el Cuadro 3.2 es la misma para la escalas usual y semiradical en lo que respecta a la ubicación en el plano.

El ejercicio de ubicar un punto dada su coordenada semiradical en un plano con escala semiradical, puede generar dificultades ya que la localización de coordenadas en esta escala no es inmediata como en la escala usual. Por esta, razón un procedimiento válido para este ejercicio es transformar la coordenada semiradical del punto a coordenada usual, ubicar el punto en el plano con escala usual y luego usar la misma ubicación en el plano con escala semiradical. Por ejemplo, si se desea ubicar el punto A con $C_{ur}(A) = (2, \frac{9}{2})$ en un plano con escala semiradical, se puede usar la Expresión 3.2 para obtener $C_{uu}(A) = (2, \frac{81}{4})$; de esta forma se sabe que la ubicación de $C_{ur}(A) = (2, \frac{9}{2})$ en el plano con escala semiradical es la misma que la ubicación de $C_{uu}(A) = (2, \frac{81}{4})$ en el plano con escala usual.

3.3. Distancia entre puntos en la escala semiradical

En la sección 2 del capítulo 1 se hizo mención de la definición de distancia usual entre dos puntos en $\mathbb{R}^2$ siendo esta definida por la Expresión 2.1. Manteniendo esta definición de distancia para puntos pertenecientes a un plano con escala semiradical se obtienen resultados diferentes en lo que respecta al convenio de distancias iguales. Por ejemplo, en la Figura 3.6 se pueden observar, en un plano con escala semiradical, los puntos A, B, C y D tales que $C_{ur}(A) = (1, \sqrt{5})$, $C_{ur}(B) = (3, \sqrt{2})$, $C_{ur}(C) = (1, 1)$ y $C_{ur}(D) = (3, 2)$; además, se percibe que si se superponen las representaciones de las parejas de puntos (A, B) con (C, D) , entonces los puntos A con B y C con D coinciden; desde esta perspectiva, si se aplicara algo similar al convenio de distancias iguales que se describió previamente se tiene que $d(A, B) = d(C, D)$.

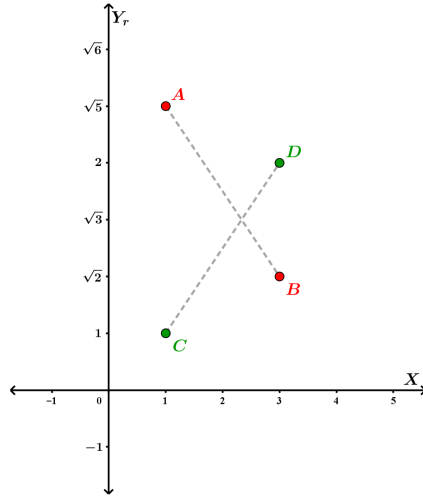


Figura 3.6: Representación gráfica de distancia euclidiana ente puntos en un plano semiradical.

Sin embargo, al aplicar la definición de distancia usual se obtiene que $d(A, B) = \sqrt{4 + (\sqrt{5} - \sqrt{2})^2}$ y $d(C, D) = \sqrt{5}$ lo que implica que $d(A, B) \neq d(C, D)$. Dicho esto, en ocasiones la representación gráfica que ilustra dos distancias diferentes se pueden percibir cómo iguales, lo que permite concluir que la distancia usual entre puntos que pertenecen a un plano con escala semiradical, no cumple con el convenio de distancias iguales. Por otro lado, si usamos los puntos P, Q y R tales que $C_{ur}(P) = (1, 2)$, $C_{ur}(Q) = (1, 1)$ y $C_{ur}(R) = (2, 1)$ se tendría que, al aplicar la definición de distancia usual, $d(P, Q) = 1$ y $d(Q, R) = 1$, por lo tanto $d(P, Q) = d(Q, R)$.

Sin embargo, en la Figura 3.7 se puede observar que la representación gráfica que ilustran tales distancias no es igual.

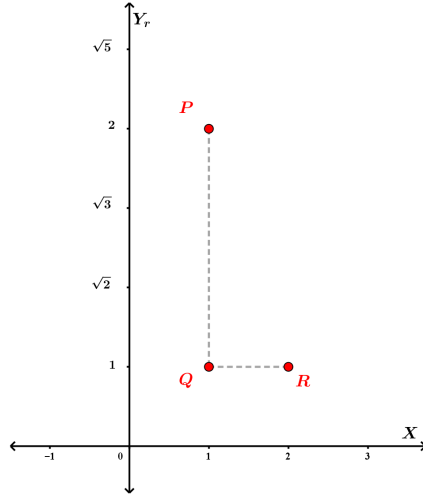


Figura 3.7: Representación gráfica de distancia euclidiana ente puntos en un plano semiradical.

Con base en los últimos ejemplos expuestos, valdría la pena pensar en una definición de distancia alternativa, a partir de la cual se cumpla el convenio de distancias iguales que se describió en la Sección 1.1.

Definición de distancia alternativa en $\mathbb{R}^2$: Sean los puntos P y Q con coordenadas $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$; la distancia entre P y Q en un plano al que se le asigna un SC en $\mathbb{R}^2$ es:

$$d_a(P, Q) = \begin{cases} \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + \left((y_1)^2 - (y_2)^2\right)^2} & \text{Si } y_1 y_2 \geq 0 \\ \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + \left((y_1)^2 + (y_2)^2\right)^2} & \text{Si } y_1 y_2 < 0 \end{cases}$$

Esta distancia define una métrica en $\mathbb{R}^2$. Al aplicar esta definición de distancia a los puntos mostrados en la Figura 3.6, se tiene que $d_a(A, B) = \sqrt{13}$ y $d_a(C, D) = \sqrt{13}$, con lo cual $d_a(A, B) = d_a(C, D)$. Así mismo, al superponer las parejas de puntos (A, B) con (C, D) coinciden A con B y C con D ; de esta forma, el convenio de igual de distancias se cumple. De forma análoga, aplicando la definición de distancia alternativa en los puntos mostrados en la Figura 3.7 se tiene que $d_a(P, Q) \neq d_a(Q, R)$, con lo cual, el convenio de distancias iguales se ratifica.

La consideración de estas dos distancias (distancia usual y distancia alternativa), permite que

el estudio del comportamiento de diferentes tipos de curvas en planos a los que se les asigna una escala semiradical pueda tomar dos perspectivas, una por cada definición de distancia. Por cuestiones de espacio y tiempo, en este trabajo se aborda el estudio para el caso de la definición de distancia "usual". En un futuro, alguien interesado, puede hacer el estudio para el caso de la segunda definición.

Capítulo 4

Curvas en la escala semiradical usando la definición de distancia usual

En este capítulo se presenta un estudio del comportamiento de las curvas manteniendo la definición de distancia usual en un plano al que se le asigna una escala semiradical. Para ello, primero se presenta el estudio del comportamiento de rectas y luego el estudio del comportamiento de las curvas cónicas.

4.1. Rectas en un plano con escala semiradical usando la definición de distancia usual

En el plano con escala usual existen las ecuaciones analíticas que permiten modelar curvas definidas a partir de la distancia usual. Dado que ya se tiene una forma de modelar curvas que cumplen con la definición de distancia usual, el trabajo de explorar curvas en un plano con escala semiradical manteniendo la definición de distancia usual se reduce a modelar gráficamente las ecuaciones analíticas de dichas curvas en el plano semiradical.

4.1.1. Rectas

Se tiene que la ecuación de una recta en la escala semiradical se puede escribir de la siguiente forma:

$$h(x) = mx + b \quad (4.1)$$

donde m es la pendiente de la recta y b es el punto de corte de la recta con el eje Y .

Para explorar el comportamiento en el plano semiradical de las rectas cuya expresión analítica tiene la forma que se presenta en la Expresión 4.1, enseguida se presentan ejemplos específicos de estas rectas. Luego se realiza una tabulación y se gráficán los puntos obtenidos en un plano con escala semiradical.

Ejemplo 1 de recta: $h(x) = x$.

Punto	Preimagen	Imagen	Coordenada semiradical
O	0	0	$C_{ur}(O) = (0, 0)$
A	1	1	$C_{ur}(A) = (1, 1)$
B	2	2	$C_{ur}(B) = (3, 2)$
C	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$C_{ur}(C) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$
D	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$C_{ur}(D) = (\sqrt{3}, \sqrt{3})$
E	-1	-1	$C_{ur}(E) = (-1, -1)$
F	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$C_{ur}(F) = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$
G	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$C_{ur}(G) = (-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$
H	-2	-2	$C_{ur}(H) = (-2, -2)$
I	0.5	0.5	$C_{ur}(I) = (0.5, 0.5)$
J	-0.5	-0.5	$C_{ur}(J) = (-0.5, -0.5)$

Cuadro 4.1: Algunos puntos que pertenecen a la recta analítica $h(x) = x$.

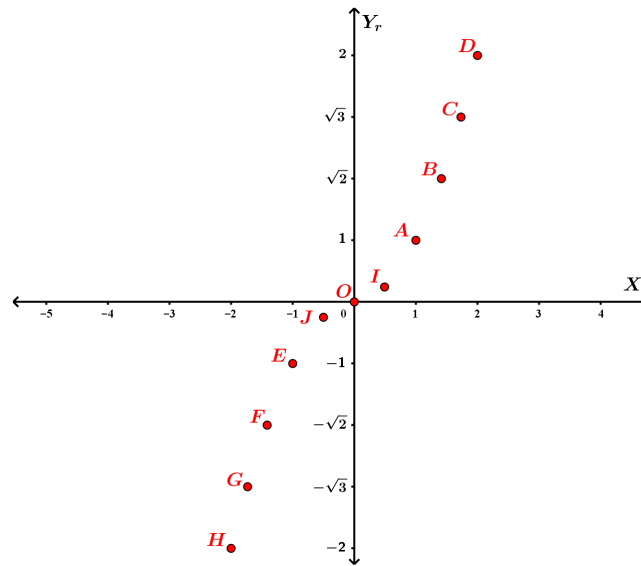


Figura 4.1: Representación gráfica de los puntos mostrados en el Cuadro 4.1

En la Figura 4.1 se puede apreciar que en el plano semiradical la representación gráfica de los puntos que pertenecen a la recta $h(x) = x$ se percibe como una curva no recta. Una forma de saber qué tipo de curva se genera es identificar cuál sería su expresión algebraica si se transforma considerando el sistema usual. Para ello se puede aplicar la Expresión 3.2 a las ordenadas de las coordenadas de dichos puntos, el resultado de ello se muestra en el cuadro 4.2.

Punto	Coordenada semiradical	Coordenada usual
O	$C_{ur}(O) = (0,0)$	$C_{uu}(O) = (0,0)$
A	$C_{ur}(A) = (1,1)$	$C_{uu}(A) = (1,1)$
B	$C_{ur}(B) = (3,2)$	$C_{uu}(B) = (3,4)$
C	$C_{ur}(C) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$	$C_{uu}(C) = (\sqrt{2}, 2)$
D	$C_{ur}(D) = (\sqrt{3}, \sqrt{3})$	$C_{uu}(D) = (\sqrt{3}, 3)$
E	$C_{ur}(E) = (-1, -1)$	$C_{uu}(E) = (-1, -1)$
F	$C_{ur}(F) = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$	$C_{uu}(F) = (-\sqrt{2}, -2)$
G	$C_{ur}(G) = (-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$	$C_{uu}(G) = (-\sqrt{3}, -3)$
H	$C_{ur}(H) = (-2, -2)$	$C_{uu}(H) = (-2, -4)$
I	$C_{ur}(I) = (0.5, 0.5)$	$C_{uu}(I) = (0.5, 0.25)$
J	$C_{ur}(J) = (-0.5, -0.5)$	$C_{uu}(J) = (-0.5, -0.25)$

Cuadro 4.2: Representación en el plano usual de los puntos mostrados en la Figura 4.1

Dado el resultado obtenido en el Cuadro 4.2 se puede deducir que la expresión de la curva que

representa la recta $h(x) = x$ en el plano semiradical, se representa en la escala usual como:

$$h(x) = \begin{cases} (x)^2 & \text{Si } x \geq 0 \\ -(x)^2 & \text{Si } x < 0 \end{cases}$$

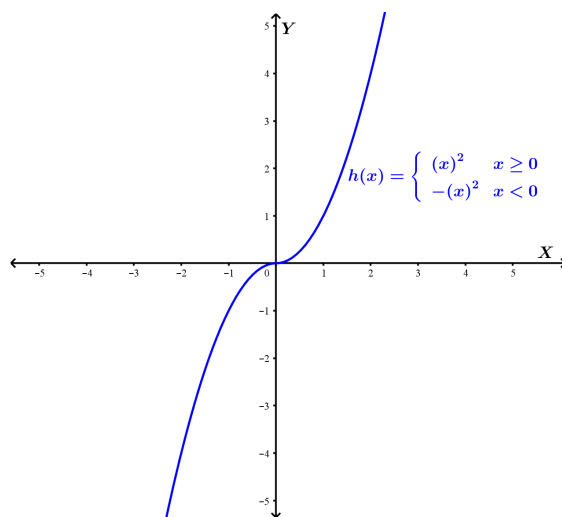


Figura 4.2: Representación gráfica de $h(x) = x$ en el plano usual.

En la Figura 4.3 se puede ver la representación de la expresión $h(x) = x$ incluyendo los puntos representados en la Figura 4.1.

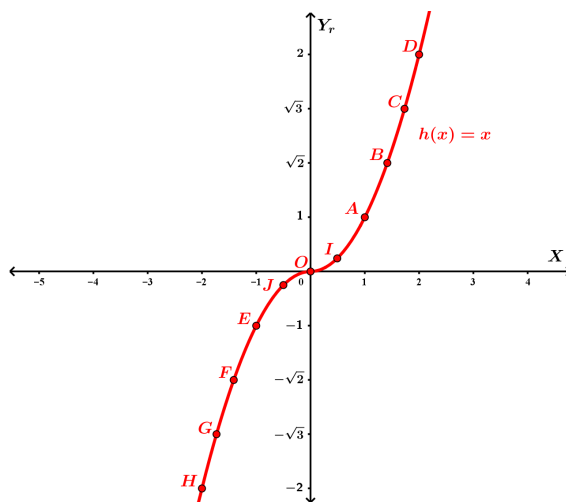


Figura 4.3: Representación gráfica de la recta $h(x) = x$ en la escala semiradical

Ejemplo 2 de recta: $h(x) = \frac{1}{4}x$. En el Cuadro 4.3 se puede observar algunos puntos que pertenecen a esta recta, siguiendo el procedimiento realizado en el ejemplo anterior.

Punto	Preimagen	Imagen	Coordenada semiradical	Coordenada usual
O	0	0	$C_{ur}(O) = (0, 0)$	$C_{uu}(O) = (0, 0)$
A	1	0.25	$C_{ur}(A) = (1, 0.25)$	$C_{uu}(A) = (1, 0.0625)$
B	2	0.5	$C_{ur}(B) = (2, 0.5)$	$C_{uu}(B) = (2, 0.25)$
C	3	0.75	$C_{ur}(C) = (3, 0.75)$	$C_{uu}(C) = (3, 0.5625)$
D	4	1	$C_{ur}(D) = (4, 1)$	$C_{uu}(D) = (4, 1)$
E	5	1.25	$C_{ur}(E) = (5, 1.25)$	$C_{uu}(E) = (5, 1.5625)$
F	6	1.5	$C_{ur}(F) = (6, 1.5)$	$C_{uu}(F) = (6, 2.25)$
G	-1	-0.25	$C_{ur}(G) = (-1, -0.25)$	$C_{uu}(G) = (-1, -0.0625)$
H	-2	-0.5	$C_{ur}(H) = (-2, -0.5)$	$C_{uu}(H) = (-2, -0.25)$
I	-3	-0.75	$C_{ur}(I) = (-3, -0.75)$	$C_{uu}(I) = (-3, -0.5625)$
J	-4	-1	$C_{ur}(J) = (-4, -1)$	$C_{uu}(J) = (-4, -1)$
K	-5	-1.25	$C_{ur}(K) = (-5, -1.25)$	$C_{uu}(K) = (-5, -1.5625)$
L	-6	-1.5	$C_{ur}(L) = (-6, -1.5)$	$C_{uu}(L) = (-6, -2.25)$

Cuadro 4.3: Algunos puntos que pertenecen a la recta analítica $h(x) = \frac{1}{4}x$.

Las gráficas en el plano semiradical y usual de los puntos obtenidos en el Cuadro 4.3 se pueden apreciar en la siguiente imagen.

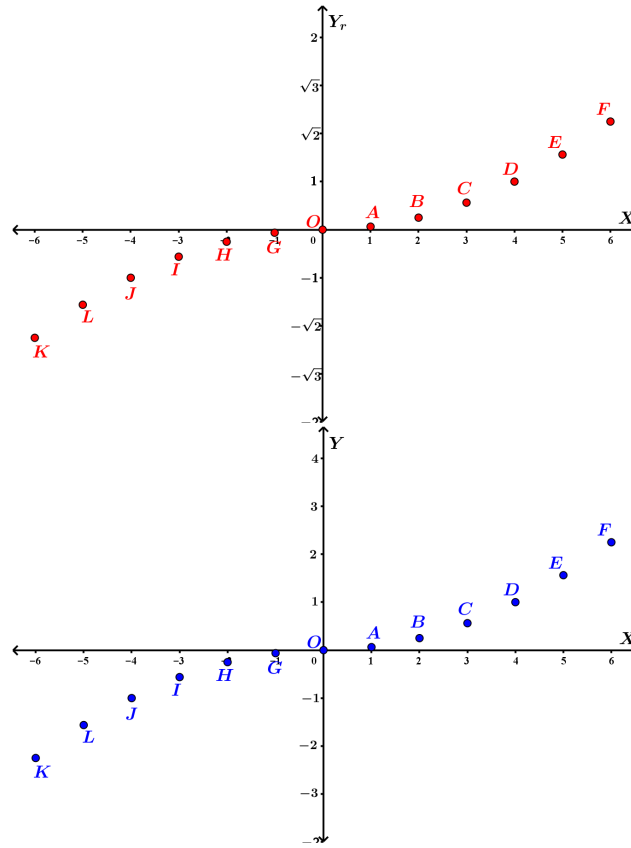


Figura 4.4: Representación gráfica de los puntos mostrados en el Cuadro 4.3

Esto implica que la representación de la recta $h(x) = \frac{1}{4}x$ en el plano semiradical es igual a la representación en el plano usual de la curva:

$$h(x) = \begin{cases} (\frac{1}{4}x)^2 & \text{Si } x \geq 0 \\ -(\frac{1}{4}x)^2 & \text{Si } x < 0 \end{cases}$$

En la Figura 4.5 se puede ver la representación de la expresión $h(x) = \frac{1}{4}x$ incluyendo los puntos representados en la Figura 4.4.

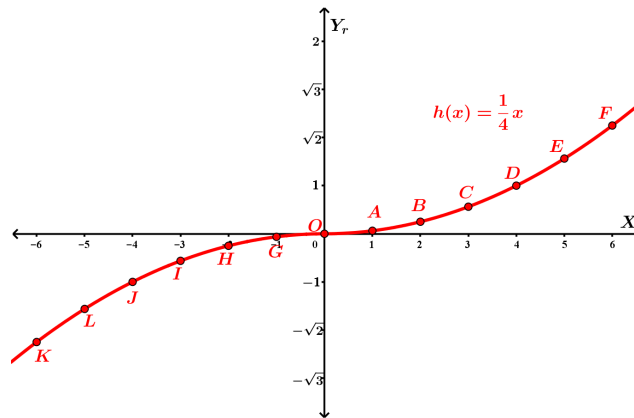


Figura 4.5: Representación gráfica de $h(x) = \frac{1}{4}x$ en el plano semiradical.

Ejemplo 3 de recta: $h(x) = -\frac{1}{2}x + 2$. De forma análoga al ejemplo anterior, en el Cuadro 4.4 se puede observar algunos puntos pertenecientes a esta recta tanto con su representación en el plano semiradical como con su representación en el plano usual.

Punto	Preimagen	Imagen	Coordenada semiradical	Coordenada usual
O	0	2	$C_{ur}(O) = (0, 2)$	$C_{uu}(O) = (0, 4)$
A	1	1.5	$C_{ur}(A) = (1, 1.5)$	$C_{uu}(A) = (1, 2.25)$
B	2	1	$C_{ur}(B) = (2, 1)$	$C_{uu}(B) = (2, 1)$
C	3	0.5	$C_{ur}(C) = (3, 0.5)$	$C_{uu}(C) = (3, 0.25)$
D	4	0	$C_{ur}(D) = (4, 0)$	$C_{uu}(D) = (4, 0)$
E	5	-0.5	$C_{ur}(E) = (5, -0.5)$	$C_{uu}(E) = (5, -0.25)$
F	6	-1	$C_{ur}(F) = (6, -1)$	$C_{uu}(F) = (6, -1)$
G	7	-1.5	$C_{ur}(G) = (7, -1.5)$	$C_{uu}(G) = (7, -2.25)$
H	8	-2	$C_{ur}(H) = (8, -2)$	$C_{uu}(H) = (8, -4)$
I	-1	2.5	$C_{ur}(I) = (-1, 2.5)$	$C_{uu}(I) = (-1, 6.25)$
J	-2	3	$C_{ur}(J) = (-2, 3)$	$C_{uu}(J) = (-2, 9)$

Cuadro 4.4: Algunos puntos que pertenecen a la recta analítica $h(x) = -\frac{1}{2}x + 2$.

De forma análoga al ejemplo anterior, se puede deducir que la representación gráfica de la recta $h(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ en el plano semiradical es igual a la representación gráfica en el plano usual de la curva:

$$h(x) = \begin{cases} (-\frac{1}{2}x + 2)^2 & \text{Si } x < 4 \\ -(-\frac{1}{2}x + 2)^2 & \text{Si } x \geq 4 \end{cases}$$

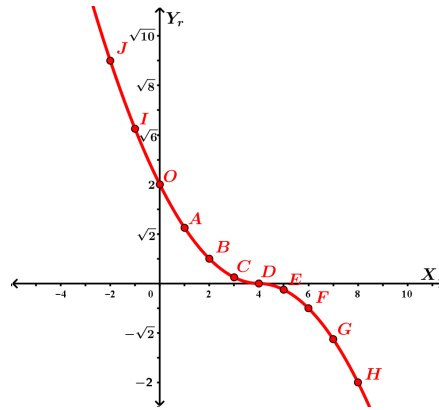


Figura 4.6: Representación gráfica de $h(x) = \frac{1}{4}x$ en el plano semiradical.

De los ejemplos expuestos anteriormente, se induce que la representación gráfica de las rectas analíticas $h(x) = mx + b$ en el plano semiradical, es igual a la representación en el plano usual de la curva:

$$h(x) = \begin{cases} (mx + b)^2 & \text{Si } mx + b \geq 0 \\ -(mx + b)^2 & \text{Si } mx + b < 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

De la Expresión 4.2 se puede apreciar que la representación gráfica de una recta analítica está compuesta por la unión de dos semiparábolas de la forma $(mx + b)^2$ y $-(mx + b)^2$ acotadas respectivamente por los intervalos $[\frac{-b}{m}, \infty)$ y $(-\infty, \frac{-b}{m}]$ cuando m es positivo; si m es negativo, las semiparábolas son acotadas respectivamente por los intervalos $(-\infty, \frac{-b}{m}]$ y $(\frac{-b}{m}, \infty)$. Empleando la forma canónica de la ecuación de una parábola, las expresiones anteriores se pueden escribir de la siguiente forma:

$$h(x) = \begin{cases} \begin{cases} (x + \frac{b}{m})^2 = 4 \left(\frac{1}{4m^2} \right) (y - 0) & \text{Si } x \geq \frac{-b}{m} \\ (x + \frac{b}{m})^2 = 4 \left(\frac{-1}{4m^2} \right) (y - 0) & \text{Si } x < \frac{-b}{m} \end{cases} & \text{Si } m \geq 0 \\ \begin{cases} (x + \frac{b}{m})^2 = 4 \left(\frac{1}{4m^2} \right) (y - 0) & \text{Si } x \leq \frac{-b}{m} \\ (x + \frac{b}{m})^2 = 4 \left(\frac{-1}{4m^2} \right) (y - 0) & \text{Si } x > \frac{-b}{m} \end{cases} & \text{Si } m < 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

A partir de la Expresión 4.3 se puede describir el comportamiento de las representaciones grá-

ficas de las rectas analíticas en el plano semiradical con base en las semiparábolas ya mencionadas en el marco del sistema usual. En síntesis, cada recta en el sistema semiradical se puede describir como sigue considerando el sistema usual:

Si m es positivo, es la unión de la semiparábola de foco $\left(\frac{-b}{m}, \frac{1}{4m^2}\right)$, directriz $y = \frac{-1}{4m^2}$, vértice $\left(\frac{-b}{m}, 0\right)$ y de intervalo $\left[\frac{-b}{m}, \infty\right)$; con la semiparábola con foco $\left(\frac{-b}{m}, \frac{-1}{4m^2}\right)$, directriz $y = \frac{1}{4m^2}$, vértice $\left(\frac{-b}{m}, 0\right)$ y de intervalo $\left(-\infty, \frac{-b}{m}\right]$. Si m es negativo, es la unión de la semiparábola de foco $\left(\frac{-b}{m}, \frac{1}{4m^2}\right)$, directriz $y = \frac{-1}{4m^2}$, vértice $\left(\frac{-b}{m}, 0\right)$ y de intervalo $\left(-\infty, \frac{-b}{m}\right]$; con la semiparábola con foco $\left(\frac{-b}{m}, \frac{-1}{4m^2}\right)$, directriz $y = \frac{1}{4m^2}$, vértice $\left(\frac{-b}{m}, 0\right)$ y de intervalo $\left[\frac{-b}{m}, \infty\right)$.

Explorando la expresión 4.2 puede afirmar que las semiparábolas que forman las rectas analíticas en el plano semiradical cumplen las siguientes características: El punto de intersección de las semiparábolas será igual al vértice de estas, que a su vez son igual al punto de corte de la recta analítica con el eje X ; este corresponde a las coordenadas $\left(\frac{-b}{m}, 0\right)$. La magnitud de la concavidad depende de la pendiente de la recta analítica (Expresión 4.1); sin embargo, las direcciones de la concavidad de las semiparábolas van a ser opuestas. Si la pendiente de la recta analítica es positiva, las semiparábolas que representan la curva son extraídas del intervalo creciente de dos parábolas; si la pendiente de la recta analítica es negativa, las semiparábolas que representan la curva son extraídas del intervalo decreciente de dos parábolas. Esto indica que la recta analítica en el plano semiradical siempre será creciente o decreciente dependiendo de la pendiente de esta.

Para dar una mayor variedad de ejemplos, a continuación se presenta la representación gráfica en el plano semiradical de algunas familias de rectas analíticas concurrentes.

Ejemplo 1 de rectas concurrentes: Las rectas analíticas que concurren en el punto A con $C_{uu}(A) = (0, 10)$, son las que sus expresiones analíticas tienen la forma $h(x) = m(x - 10)$. Al aplicar la Expresión 4.2, se tiene que dichas rectas se representan en el plano semiradical como en el

$$\text{plano usual se representa las expresiones curvas: } h(x) = \begin{cases} (m(x - 10))^2 & \text{Si } x \geq 10 \\ -(m(x - 10))^2 & \text{Si } x < 10 \end{cases}$$

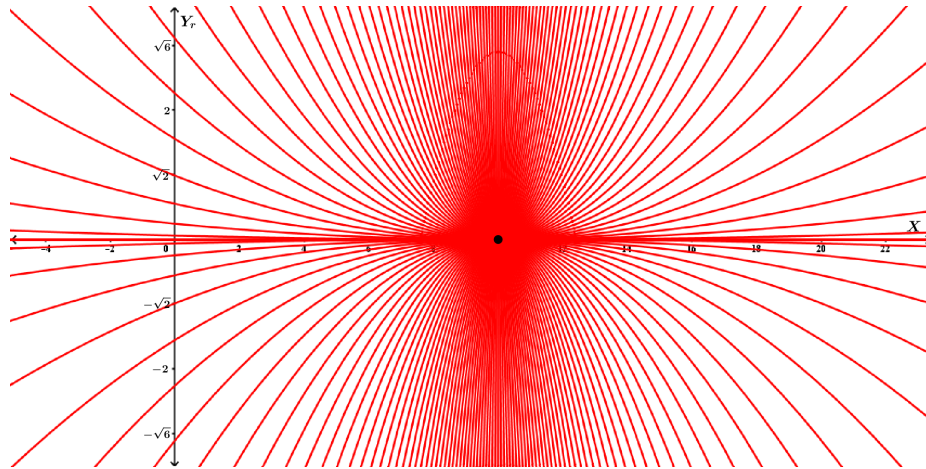


Figura 4.7: Rectas en el plano semiradical que concurren al punto con coordenada semiradical $(0, 10)$

Ejemplo 2 de rectas concurrentes: De forma análoga al ejemplo anterior las rectas analíticas que concurren en el punto A con $C_{uu}(A) = (2, 2)$ son las que sus expresiones analíticas tienen la forma $h(x) = (x - 2) + 2$, que en el plano semiradical se representan como en el plano usual se representan las expresiones curvas:

$$h(x) = \begin{cases} (m(x - 2) + 2)^2 & \text{Si } x \geq \frac{-2}{m} + 2 \\ -(m(x - 2) + 2)^2 & \text{Si } x < \frac{-2}{m} + 2 \end{cases}$$

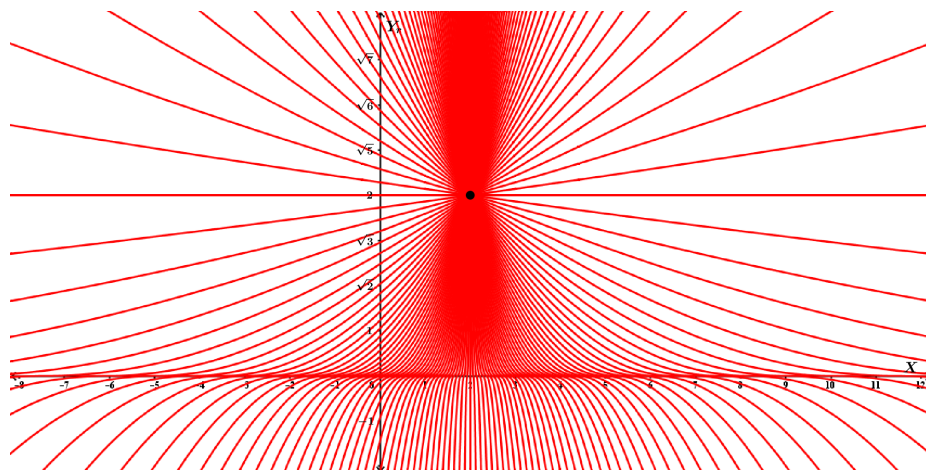


Figura 4.8: Rectas en el plano semiradical que concurren al punto con coordenada semiradical $(2, 2)$

Otro tipo de rectas en el plano usual son las que se generan a partir de expresiones constantes ya sean de la forma $h(x) = c$ o $c = x$. Para estos casos, la representación gráfica en el plano semiradical no cambió con respecto al plano usual. A manera de ejemplo, se presenta la representación gráfica de las curvas $h(x) = 2$ y $3 = x$ 4.9.

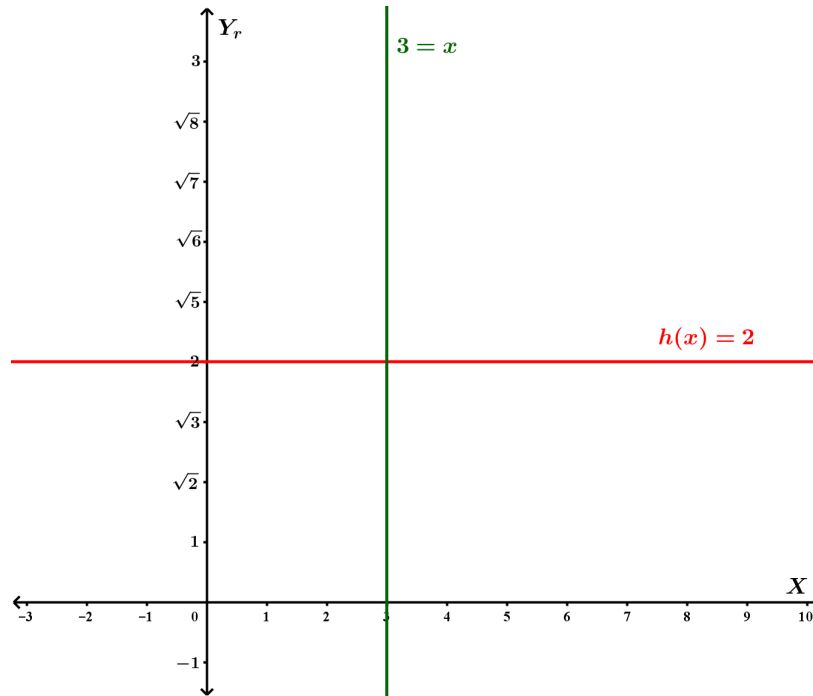


Figura 4.9: Representación de las funciones $h(x) = 2$ y $3 = x$ en el plano semiradical

4.1.2. Ángulo entre rectas

Dadas dos curvas secantes, la medida del ángulo entre ellas es igual al ángulo formado por las rectas tangentes a estas en el punto donde se intersecan. Debido a que la representación gráfica de las rectas analíticas en el plano semiradical se percibe como unión de semiparábolas, resulta plausible utilizar este procedimiento para definir la medida del ángulo determinado por las rectas analíticas en el sistema semiradical. Dicho esto, para hallar la medida del ángulo en el plano semiradical entre dos rectas analíticas de la forma $g(x) = m_1x + b_1$ y $h(x) = m_2x + b_2$, se lleva a cabo el siguiente procedimiento:

1. Usando la Expresión 4.2, se escriben las expresiones de las curvas cuyas representaciones

en el plano usual es igual a las representaciones de las rectas en el plano semiradical

$$g(x) = \begin{cases} (m_1x + b_1)^2 & \text{Si } m_1x + b_1 \geq 0 \\ -(m_1x + b_1)^2 & \text{Si } m_1x + b_1 < 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

$$h(x) = \begin{cases} (m_2x + b_2)^2 & \text{Si } m_2x + b_2 \geq 0 \\ -(m_2x + b_2)^2 & \text{Si } m_2x + b_2 < 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

2. Se halla el punto P de intersecciones entre las expresiones obtenidas en el anterior paso; este punto tendrá $C_{ur}(P) = (a, b)$ con:

$$a = \frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2}$$

$$b = \begin{cases} \left(m_1 \left(\frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2} \right) + b_1 \right)^2 & \text{Si } m_1 \left(\frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2} \right) + b_1 \geq 0 \\ - \left(m_1 \left(\frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2} \right) + b_1 \right)^2 & \text{Si } m_1 \left(\frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2} \right) + b_1 < 0 \end{cases}$$

Para facilitar la notación se definen las sustituciones $u = b_2 - b_1$ y $v = m_1 - m_2$.

3. Se obtienen las pendientes de las tangentes a las curvas obtenidas de las Expresiones 4.4 y 4.5 en el Punto P .

$$m_{g(x)} = \frac{2(m_1)^2 u + 2m_1 b_1 v}{v} \quad (4.6)$$

$$m_{h(x)} = \frac{2(m_2)^2 u + 2m_2 b_2 v}{v} \quad (4.7)$$

4. Se calcula el ángulo entre las pendientes obtenidas en el paso anterior.

$$\tan^{-1} \left(\frac{2(m_2)^2 uv + 2m_2 b_2 v^2 - 2(m_1)^2 uv + 2m_1 b_1 v^2}{v^2 + (2(m_2)^2 u + 2m_2 b_2 v)(2(m_1)^2 u + 2m_1 b_1 v)} \right) \quad (4.8)$$

$$\text{con } u = b_2 - b_1 \text{ y } v = m_1 - m_2$$

A manera de ejemplo, se presenta la representación gráfica del ángulo formado por las rectas

analíticas $g(x) = 3x + 2$ y $f(x) = 0.5x - 1$ en el plano semiradical.

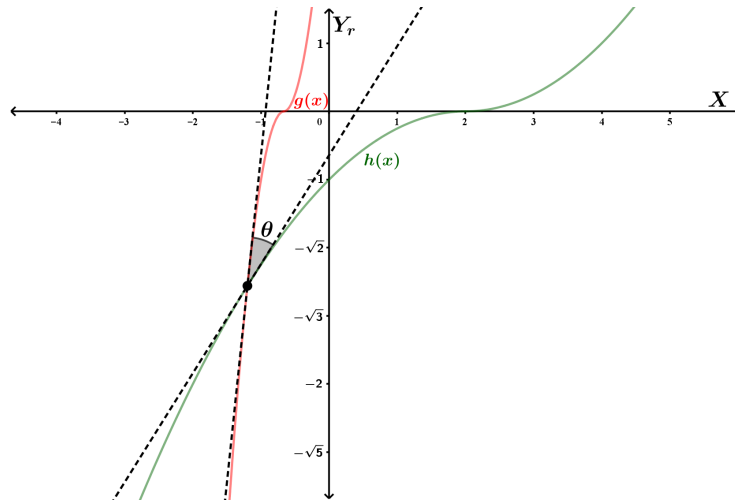


Figura 4.10: Ángulo entre rectas analíticas en el plano semiradical

Aplicando la Expresión 4.8 se tiene que la medida del ángulo θ mostrado en la Figura 4.10 es aproximadamente 26.059. En la Expresión 4.8 se evidencia que la medida del ángulo formado por dos rectas analíticas no dependen únicamente de la pendiente de estas.

4.1.3. Rectas perpendiculares

Analíticamente, dos rectas $h(x) = m_1x + b_1$, $g(x) = m_2x + b_2$ son perpendiculares en el plano usual si $m_1m_2 = -1$. Dicho esto, a continuación se presentan algunas representaciones gráficas de rectas analíticas perpendiculares en un plano con escala semiradical. Como ya es reiterativo, usaremos la Expresión 4.2 para transformar tales expresiones analíticas en sus equivalentes para el sistema usual.

Ejemplo 1 de rectas analíticas perpendiculares en el plano usual: $h(x) = x$, $g(x) = -x$; la representación gráfica de estas rectas analíticas en el plano semiradical es igual a la representación gráfica en el plano usual de:

$$h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{Si } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{Si } x < 0 \end{cases}; \quad g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{Si } x \leq 0 \\ -x^2 & \text{Si } x > 0 \end{cases}$$

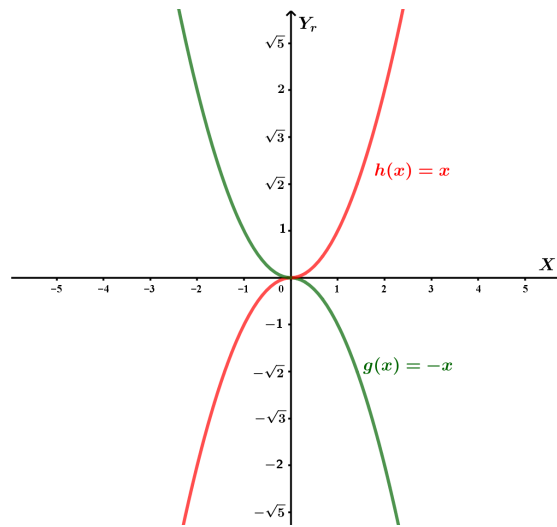


Figura 4.11: Representación gráfica de $h(x) = x$, $g(x) = -x$ en el plano semiradical.

Ejemplo 2 de rectas analíticas perpendiculares en el plano usual: $h(x) = x - 5$, $g(x) = -x - 5$; la representación gráfica de estas rectas analíticas en el plano semiradical es igual a la representación gráfica en el plano usual de:

$$h(x) = \begin{cases} (x-5)^2 & \text{Si } x \geq 5 \\ -(x-5)^2 & \text{Si } x < 5 \end{cases}; \quad g(x) = \begin{cases} (-x-5)^2 & \text{Si } x \leq 5 \\ -(-x-5)^2 & \text{Si } x > 5 \end{cases}$$

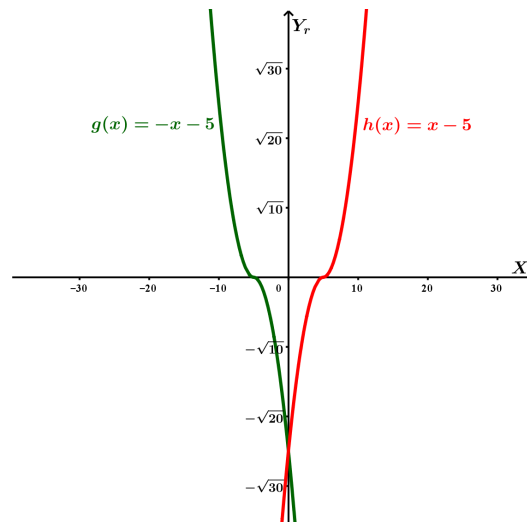


Figura 4.12: Representación gráfica de $h(x) = x - 5$, $g(x) = -x - 5$ en el plano semiradical.

Ejemplo 3 de rectas analíticas perpendiculares en el plano usual: $h(x) = \frac{1}{2}x - 2$, $g(x) = -2x + 2$; la representación gráfica de estas rectas analíticas en el plano semiradical es igual a la representación gráfica en el plano usual de:

$$h(x) = \begin{cases} (\frac{1}{2}x - 2)^2 & \text{Si } x \geq 4 \\ -(\frac{1}{2}x - 2)^2 & \text{Si } x < 4 \end{cases}; \quad g(x) = \begin{cases} (-2x + 2)^2 & \text{Si } x \leq 1 \\ -(-2x + 2)^2 & \text{Si } x > 1 \end{cases}$$

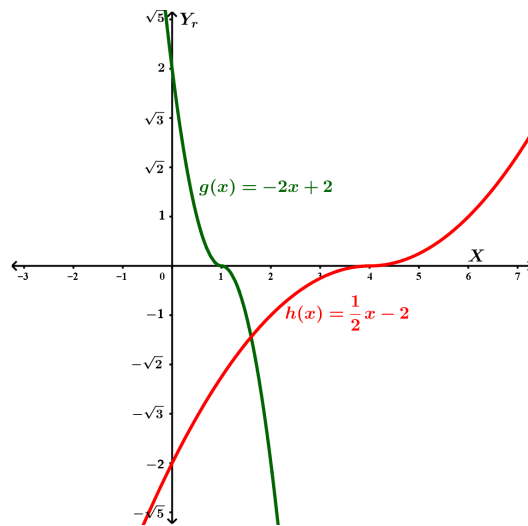


Figura 4.13: Representación gráfica de $h(x) = \frac{1}{2}x - 2$, $g(x) = -2x + 2$ en el plano semiradical.

Al aplicar la Expresión 4.8 en las rectas analíticas nombradas en los ejemplos 1, 2 y 3, se obtiene que los ángulos formados por las representaciones gráficas dichas rectas en el plano semiradical tienen medidas aproximadas de 0, 11.42 y 51.57, respectivamente. Esto implica que, a pesar que las rectas desde la definición analítica son perpendiculares (en el plano usual), no significa que sus representaciones en el plano semiradical formen ángulos rectos; así mismo, no todas las rectas analíticas perpendiculares forman ángulos con las mismas medidas. Dado que las pendientes de dos rectas analíticas perpendiculares en el plano usual cumplen con la condición $m_1 m_2 = -1$, entonces $m_2 = \frac{-1}{m_1}$. En consecuencia, el ángulo entre dos rectas analíticas perpendiculares, se puede

establecer mediante la siguiente expresión si se toma como referencia el sistema semiradical:

$$\tan^{-1} \left[\frac{2uw + 2b_2w^2 - 2(m_1)^4uw - 2(m_1)^2b_1w^2}{m_1w^2 + (2u + 2b_2w)(2(m_1)^3u + 2m_1b_1w)} \right]$$

$$\text{con } u = b_2 - b_1 \text{ y } w = (m_1)^2 + 1$$

En el plano semiradical la condición para que las rectas analíticas sean perpendiculares es:

$$m_{g(x)}m_{h(x)} = -(m_1 - m_2)^2 \quad (4.9)$$

siendo $m_{g(x)}$ y $m_{h(x)}$ las expresiones 4.6 y 4.7. A continuación, se presentan ejemplos de rectas analíticas en el sistema semiradical que son perpendiculares en él.

Ejemplo 1 de rectas analíticas perpendiculares en el plano semiradical: $h(x) = \frac{1}{2}x + 1$, $g(x) = -\frac{1}{2}x + 1$; la representación gráfica de estas rectas analíticas en el sistema semiradical es igual a la representación gráfica en el sistema usual de:

$$h(x) = \begin{cases} (\frac{1}{2}x + 1)^2 & \text{Si } x \geq -2 \\ -(\frac{1}{2}x + 1)^2 & \text{Si } x < -2 \end{cases}; \quad g(x) = \begin{cases} (-\frac{1}{2}x + 1)^2 & \text{Si } x \leq 2 \\ -(-\frac{1}{2}x + 1)^2 & \text{Si } x > 2 \end{cases}$$

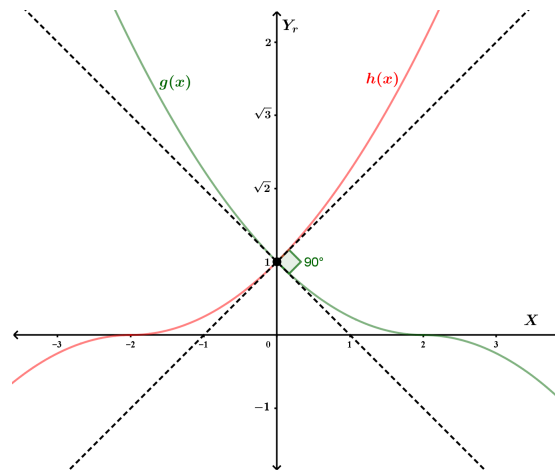


Figura 4.14: Representación gráfica de ángulo entre $h(x) = \frac{1}{2}x + 1$ y $g(x) = -\frac{1}{2}x + 1$ en el plano semiradical.

Ejemplo 2 de rectas analíticas perpendiculares en el plano semiradical: $h(x) = 2x + \frac{1}{4}$, $g(x) = -2x + \frac{1}{4}$; la representación gráfica de estas rectas analíticas en el sistema semiradical es igual a la representación gráfica en el sistema usual de:

$$h(x) = \begin{cases} (2x + \frac{1}{4})^2 & \text{Si } x \geq -\frac{1}{8} \\ -(2x + \frac{1}{4})^2 & \text{Si } x < -\frac{1}{8} \end{cases}; \quad g(x) = \begin{cases} (-2x + \frac{1}{4})^2 & \text{Si } x \leq \frac{1}{8} \\ -(-2x + \frac{1}{4})^2 & \text{Si } x > \frac{1}{8} \end{cases}$$

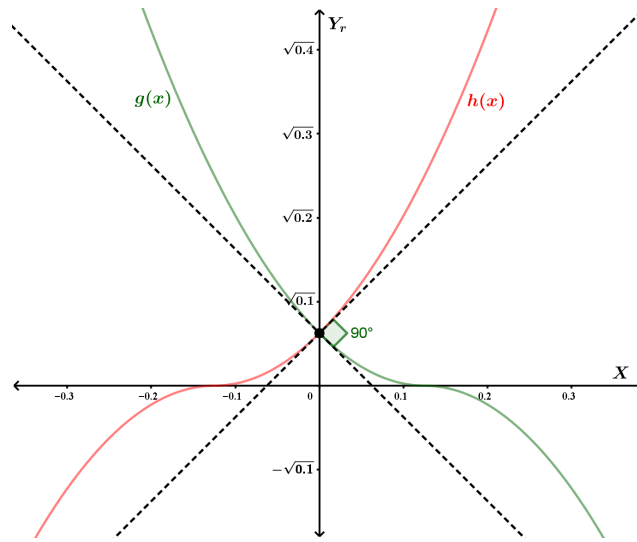


Figura 4.15: Representación gráfica de ángulo entre $h(x) = 2x + \frac{1}{4}$ y $g(x) = -2x + \frac{1}{4}$ en el plano semiradical.

Ejemplo 3 de rectas analíticas perpendiculares en el plano semiradical: $h(x) = 3x$, $g(x) = -3x + \frac{1}{3}$; la representación gráfica de estas rectas analíticas en el sistema semiradical es igual a la representación gráfica en el sistema usual de:

$$h(x) = \begin{cases} (3x)^2 & \text{Si } x \geq 0 \\ -(3x)^2 & \text{Si } x < 0 \end{cases}; \quad g(x) = \begin{cases} (-3x + \frac{1}{3})^2 & \text{Si } x \leq \frac{1}{9} \\ -(-3x + \frac{1}{3})^2 & \text{Si } x > \frac{1}{9} \end{cases}$$

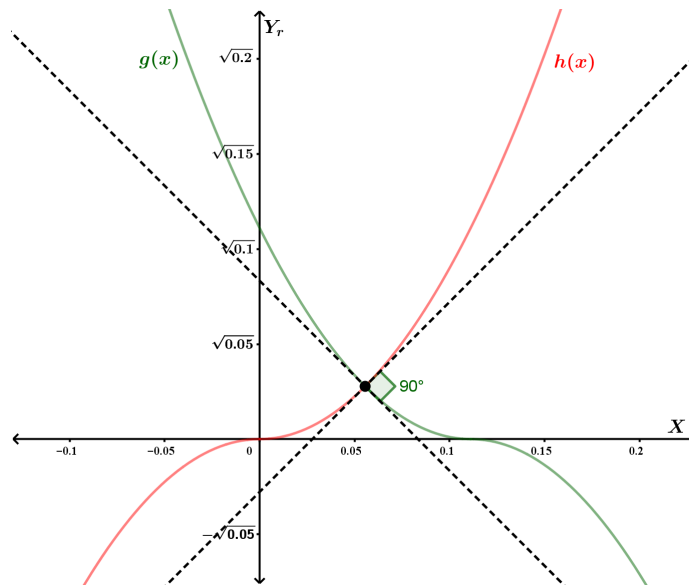


Figura 4.16: Representación gráfica de ángulo entre $h(x) = 3x$ y $g(x) = -3x + \frac{1}{3}$ en el plano semiradical.

Con base en los ejemplo 1 y 2 de rectas analíticas perpendiculares en el plano semiradical, es posible formular el siguiente teorema:

Teorema semiradical perpendicular 1: Si $m_1 + m_2 = 0$ entonces las rectas analíticas $h(x) = m_1x + \frac{1}{2m_1}$ y $g(x) = m_2x - \frac{1}{2m_2}$ son perpendiculares.

Con base en el ejemplo 3 de este tipo de rectas, se puede formular el teorema:

Teorema semiradical perpendicular 2: Si $m_1 + m_2 = 0$ entonces las rectas analíticas $h(x) = m_1x$ y $g(x) = m_2x - \frac{2}{2m_2}$ son perpendiculares.

Una diferencia entre estos teoremas es que en el Teorema semiradical perpendicular 1 se describe rectas analíticas cuyo punto de intersección está sobre el eje Y_r . En el Teorema semiradical perpendicular 2, esta condición no es necesaria.

Ejemplo 4 de rectas analíticas perpendiculares en el plano semiradical: $h(x) = 2x + \frac{1}{2}$, $g(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$; la representación gráfica de estas rectas analíticas en el sistema semiradical es

igual a la representación gráfica en el sistema usual de:

$$h(x) = \begin{cases} (2x + \frac{1}{2})^2 & \text{Si } x \geq -\frac{1}{4} \\ -(2x + \frac{1}{2})^2 & \text{Si } x < -\frac{1}{4} \end{cases}; \quad g(x) = \begin{cases} (-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2})^2 & \text{Si } x \leq 1 \\ -(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2})^2 & \text{Si } x > 1 \end{cases}$$

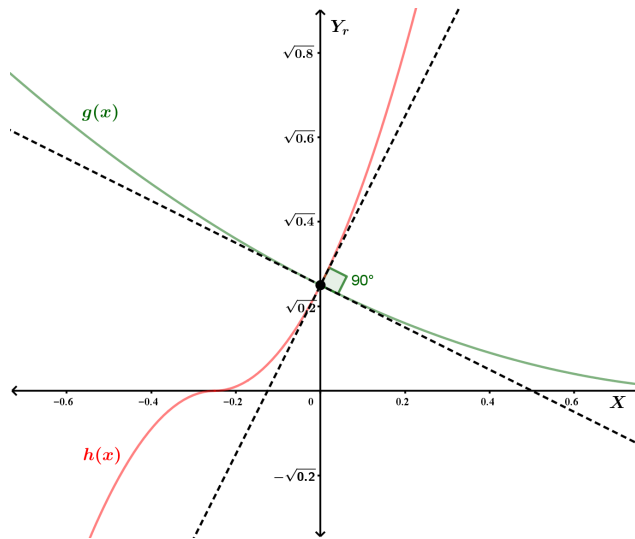


Figura 4.17: Representación gráfica de ángulo entre $h(x) = 2x + \frac{1}{2}$ y $g(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ en el plano semiradical.

Ejemplo 5 de rectas analíticas perpendiculares en el plano semiradical: $h(x) = 3x + \frac{1}{2}$, $g(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}$; la representación gráfica de estas rectas analíticas en el sistema semiradical es igual a la representación gráfica en el sistema usual de:

$$h(x) = \begin{cases} (3x + \frac{1}{6})^2 & \text{Si } x \geq -\frac{1}{8} \\ -(3x + \frac{1}{6})^2 & \text{Si } x < -\frac{1}{8} \end{cases}; \quad g(x) = \begin{cases} (-\frac{1}{3}x + \frac{1}{2})^2 & \text{Si } x \leq \frac{3}{2} \\ -(-\frac{1}{3}x + \frac{1}{2})^2 & \text{Si } x > \frac{3}{2} \end{cases}$$

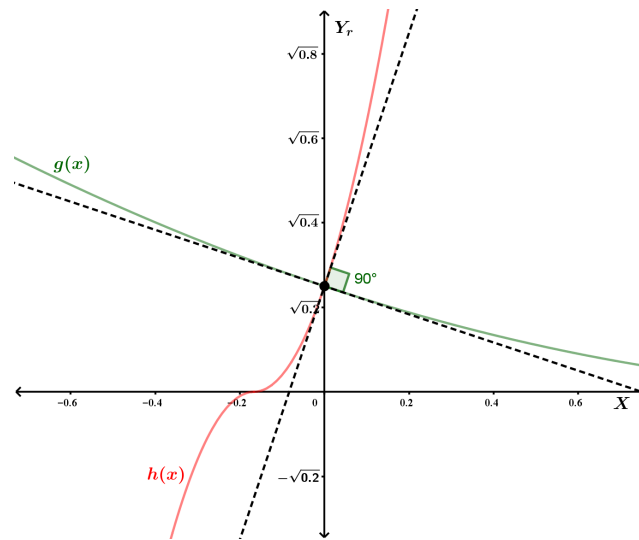


Figura 4.18: Representación gráfica de ángulo entre $h(x) = 3x + \frac{1}{2}$ y $g(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}$ en el plano semiradical.

Con base en los ejemplo 4 y 5 de rectas analíticas perpendiculares en el plano semiradical, se puede formular el siguiente teorema:

Si $m_1 m_2 = -1$ entonces las rectas analíticas $h(x) = m_1 x + \frac{1}{2}$ y $g(x) = m_2 x + \frac{1}{2}$ son perpendiculares en el plano semiradical.

Este teorema permite afirmar que dos rectas perpendiculares en el sistema usual son perpendiculares en el sistema semiradical si se intersectan en el punto $(0.5, 0)$. Enseguida se muestra un ejemplo de rectas analíticas perpendiculares en el plano semiradical que únicamente cumplen con la Expresión 4.9.

Ejemplo 6 de rectas analíticas perpendiculares en el plano semiradical: $h(x) = 2x + \frac{1}{2}$, $g(x) = -3x - \frac{18-5\sqrt{6}}{24}$; la representación gráfica de estas rectas analíticas en el sistema semiradical es igual a la representación gráfica en el sistema usual de:

$$h(x) = \begin{cases} (2x + \frac{1}{2})^2 & \text{Si } x \geq -\frac{1}{4} \\ -(2x + \frac{1}{2})^2 & \text{Si } x < -\frac{1}{4} \end{cases} ; \quad g(x) = \begin{cases} (-3x - \frac{18-5\sqrt{6}}{24})^2 & \text{Si } x \leq -\frac{18-5\sqrt{6}}{72} \\ -(-3x - \frac{18-5\sqrt{6}}{24})^2 & \text{Si } x > -\frac{18-5\sqrt{6}}{72} \end{cases}$$

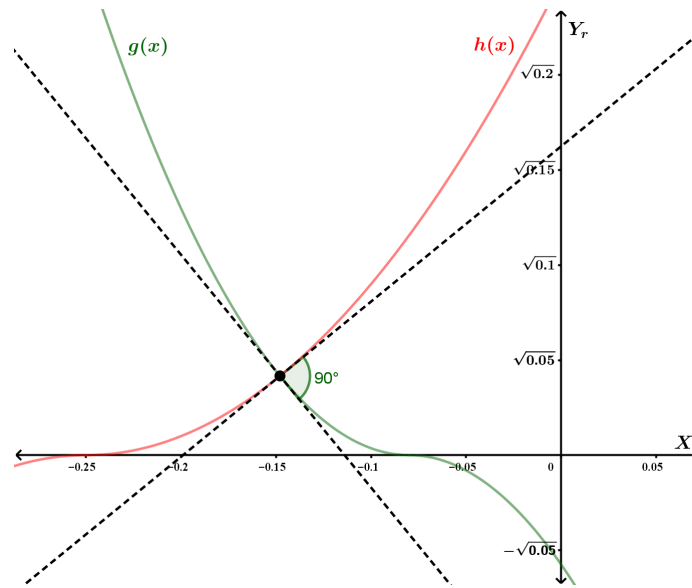


Figura 4.19: Representación gráfica de ángulo entre $h(x) = 3x + \frac{1}{2}$ y $g(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}$ en el plano semiradical.

4.1.4. Distancia de un punto a una recta

Con los ejemplos presentados en la sección anterior, cabe pensar cómo se definiría la distancia de un punto a una recta. Dado un punto A con coordenadas (p, q) y una recta analítica con ecuación $g(x) = mx + b$, habría dos posibilidades para determinar la distancia:

- Aludir a la definición de rectas analíticas perpendiculares en el sistema usual; en esta posibilidad, para hallar dicha distancia se lleva a cabo el siguiente procedimiento:

1. Se halla la recta $h(x)$ que contenga a A y sea perpendicular a $g(x)$, esta sería:

$$h(x) = \frac{-x}{m} + \frac{p}{m} + q$$

2. Se encuentra el punto de intersección B entre $g(x)$ y $h(x)$; este punto tiene coordenadas:

$$\left(\frac{p + q - b}{m^2 + 1}, \frac{pm + qm^2 + b}{m^2 + 1} \right)$$

3. Se calcula la distancia entre A y B , esta será igual a la distancia entre A y $g(x)$. De esta

forma se obtiene que:

$$d(g(x), A) = \sqrt{\left(\frac{-pm^2 + qm - bm}{m^2 + 1}\right)^2 + \left(\frac{pm - q + b}{m^2 + 1}\right)^2} \quad (4.10)$$

- Aludir a la definición de rectas analíticas perpendiculares en el sistema semiradical. En este caso, se lleva acabo un procedimiento análogo al anterior; sin embargo, ya que la condición para que dos rectas analíticas sean perpendiculares en el sistema semiradical está dada por la Expresión 4.9, es mas complicado expresar de forma general dicha distancia.

A manera de ejemplo se muestra la distancia de un punto A con $C_{ur}(A) = (\frac{1}{9}, 0)$ a una recta $g(x) = 3x$, usando las dos posibilidades descritas anteriormente. En la primera posibilidad, la recta analítica que contienen al punto A y es perpendicular a $g(x)$ en el sistema usual es $h(x) = \frac{-x}{3} + \frac{1}{27}$. El punto de intersección B entre estas rectas analíticas tiene coordenadas $(\frac{1}{90}, \frac{1}{30})$. Por último $d(g(x), A) = \frac{\sqrt{10}}{30}$.

En la segunda posibilidad, la recta analítica que contiene al punto A y es perpendicular a $g(x)$ en el sistema semiradical es $i(x) = -3x + \frac{1}{3}$. El punto de intersección C entre estas rectas analíticas tiene coordenadas $(\frac{1}{18}, \frac{1}{6})$. Por último $d(i(x), A) = \frac{\sqrt{10}}{18}$. En la Figura 4.20 se puede apreciar la representación gráfica de este ejemplo.

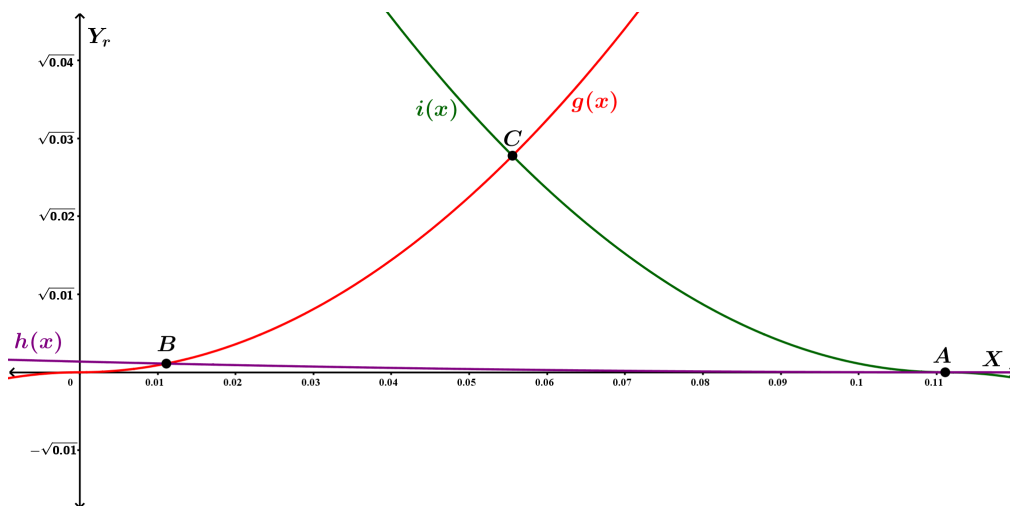


Figura 4.20: Ejemplo distancia de punto a recta en el plano semiradical.

4.1.5. Rectas paralelas

Analíticamente, en el sistema usual dos rectas $h(x) = m_1x + b_1$, $g(x) = m_2x + b_2$ son paralelas si $m_1 = m_2$ y $b_1 \neq b_2$. Dicho esto, a continuación se presenta algunas representaciones gráficas de rectas analíticas paralelas en un plano con escala semiradical.

Ejemplo 1 de rectas paralelas: $h(x) = x - 1$, $g(x) = x + 1$; la representación gráfica de estas rectas analíticas en el sistema semiradical es igual a la representación gráfica en el sistema usual de:

$$h(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{Si } x \geq 1 \\ -(x-1)^2 & \text{Si } x < 1 \end{cases}; \quad g(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{Si } x \leq -1 \\ -(x+1)^2 & \text{Si } x > -1 \end{cases}$$

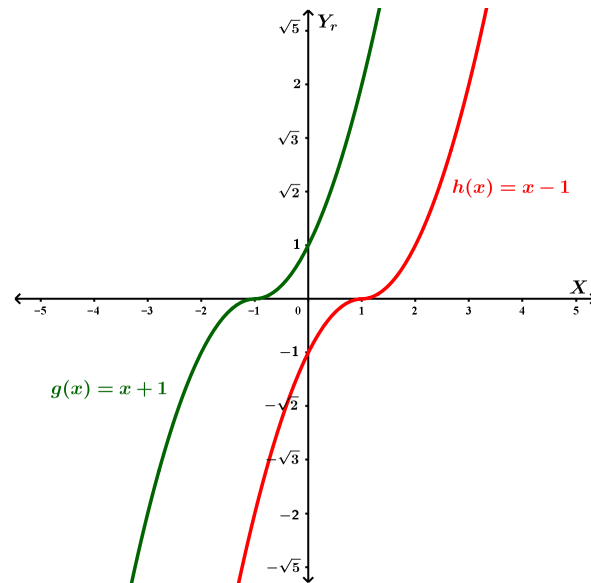


Figura 4.21: Representación gráfica de $h(x) = x - 1$, $g(x) = x + 1$ en el plano semicuadrado.

Ejemplo 2 de rectas paralelas: $h(x) = \frac{-1}{5}x$, $g(x) = \frac{-1}{5}x + 2$; la representación gráfica de estas rectas analíticas en el sistema semiradical es igual a la representación gráfica en el sistema usual de:

$$h(x) = \begin{cases} (\frac{-1}{5}x)^2 & \text{Si } x \leq 0 \\ -(\frac{-1}{5}x)^2 & \text{Si } x > 0 \end{cases}; \quad g(x) = \begin{cases} (\frac{-1}{5}x + 2)^2 & \text{Si } x \leq 10 \\ -(\frac{-1}{5}x + 2)^2 & \text{Si } x > 10 \end{cases}$$

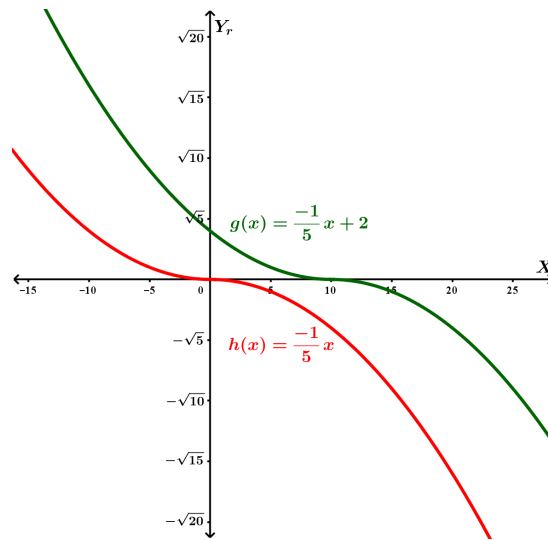


Figura 4.22: Representación gráfica de $h(x) = -\frac{1}{5}x$, $g(x) = -\frac{1}{5}x + 2$ en el plano semicuatado.

Ejemplo 3 de rectas paralelas: $h(x) = \frac{1}{2}x - 5$, $g(x) = \frac{1}{2}x + 5$; la representación gráfica de estas rectas analíticas en el sistema semiradical es igual a la representación gráfica en el sistema usual de:

$$h(x) = \begin{cases} (\frac{1}{2}x - 5)^2 & \text{Si } x \geq 10 \\ -(\frac{1}{2}x - 5)^2 & \text{Si } x < 10 \end{cases}; \quad g(x) = \begin{cases} (\frac{1}{2}x + 5)^2 & \text{Si } x \geq -10 \\ -(\frac{1}{2}x + 5)^2 & \text{Si } x < -10 \end{cases}$$

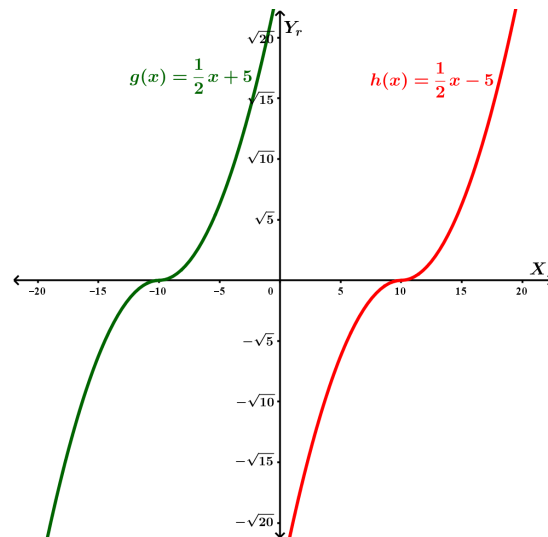


Figura 4.23: Representación gráfica de $h(x) = \frac{1}{2}x - 5$, $g(x) = \frac{1}{2}x + 5$ en el plano semicuatado.

Observación 1: Como era de esperarse, si tomamos como referencia rectas paralelas en el sistema usual, las rectas analíticas estudiadas en el sistema semiradical tampoco se intersecan. Ahora, cabría preguntarse si al tomar dos puntos A y B en una de tales rectas, las distancias de tales puntos a la otra es la misma. Enseguida, presentamos un ejemplo para corroborar o no dicha propiedad:

Dadas las rectas analíticas paralelas $h(x) = \frac{-1}{5}x$, $g(x) = \frac{-1}{5}x + 2$ y los puntos $A = (\frac{125}{26}, \frac{-25}{26})$, $B = (\frac{250}{13}, \frac{-50}{13})$ en la recta $h(x)$. usando la Expresión 4.10, se tiene que $d(A, g(x)) = d(B, g(x))$ siendo estas aproximadas a 1.96. La representación gráfica de esta situación se puede ver en la Figura 4.24.

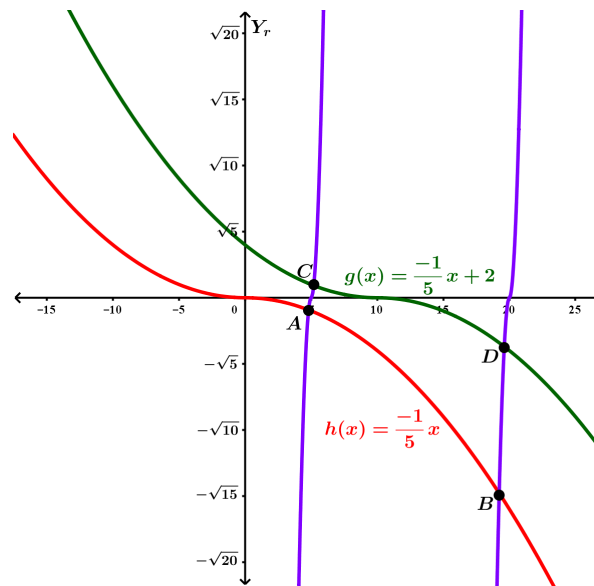


Figura 4.24: Distancia entre una recta y puntos de una recta paralela a ella.

En la Figura 4.24. $d(A, g(x)) = d(A, C)$ y $d(B, g(x)) = d(B, D)$ por lo tanto $d(A, C) = d(B, D)$. Este ejemplo permite apreciar las variaciones entre representaciones de distancias iguales que surgen debido a que la distancia usual no cumple con el convenio de distancias iguales.

Observación 2: Otro asunto que valdría la pena cuestionar es si los teoremas de ángulos entre paralelas se cumplen o no. Para corroborarlo, usaremos de referencia el Teorema de ángulos alternos internos. Tomemos como ejemplo las rectas paralelas usadas para el ejemplo 1 de rectas paralelas y la recta analítica $i(x) = -x + 1$ secante a las dos (ver Figura 4.25). Usamos ahora la expresión 4.8 para establecer la medida de los ángulos alternos internos. Esto da cómo resulta-

do: medida del ángulo formado por $g(x)$ e $i(x)$ es aproximadamente 53.13 y medida del ángulo formado por $h(x)$ e $i(x)$ es igual a 0.

Como se puede inferir de lo anterior, vemos que tal teorema no se cumple para el caso de rectas representadas en el sistema semiradical.

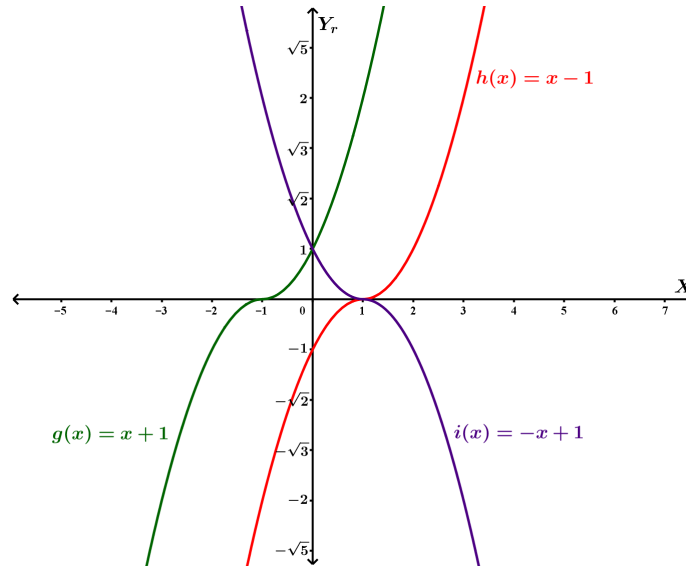


Figura 4.25: Recta secante a dos rectas paralelas.

4.2. Triángulos

Un triángulo es la unión de tres segmentos tales que sus extremos son tres puntos no colineales. en ese sentido, un triángulo se puede ver como la unión de subconjuntos de rectas (segmentos) acotados por intervalos definidos por la intersección de dichas rectas. Por ejemplo, en el sistema usual las rectas $h(x) = 0$, $g(x) = x + 1$ y $i(x) = -x + 1$ se intersecan en los puntos $C_{uu}(A) = (-1, 0)$, $C_{uu}(B) = (0, 1)$ y $C_{uu}(C) = (1, 0)$ -ver Figura 4.26- Estos puntos determinan $\triangle ABC$.

Por ejemplo, en el plano usual, las rectas analíticas $g(x) = x + 1$, $h(x) = -x + 1$ y $i(x) = 0$ se intersecan en los puntos $C_{uu}(A) = (-1, 0)$, $C_{uu}(B) = (0, 1)$ y $C_{uu}(C) = (1, 0)$. Estos puntos definen el $\triangle ABC$ donde el $\overline{AB}$ está contenido en la recta $g(x)$, el $\overline{BC}$ está contenido en la recta $i(x)$ y el $\overline{CB}$ está contenido en la recta $h(x)$ tal como se muestra en la Figura 4.26

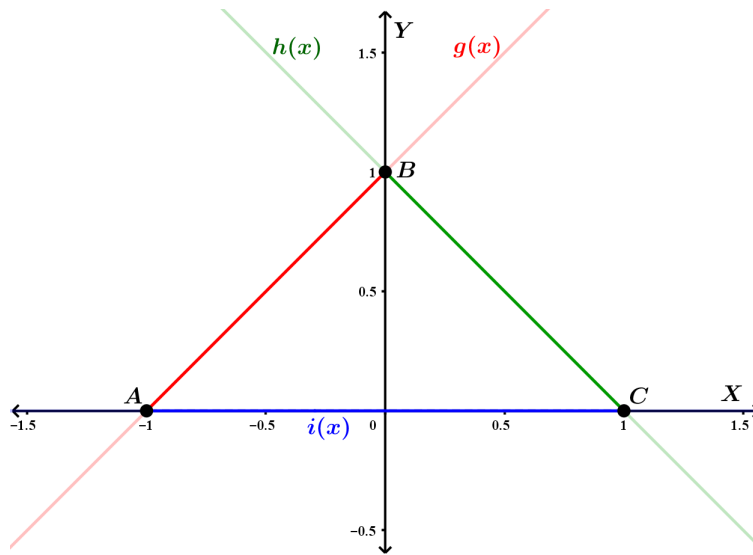


Figura 4.26: Triángulo con vértices $(-1, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 0)$ en el plano usual.

Se puede replicar este procedimiento para definir triángulos en el plano semiradical usando rectas analíticas como la unión de las rectas $h(x) = m_1x + b_1$ con $x \in \left[\frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2}, \frac{b_3 - b_1}{m_1 - m_3} \right]$, $g(x) = m_2x + b_2$ con $x \in \left[\frac{b_1 - b_2}{m_2 - m_1}, \frac{b_3 - b_2}{m_2 - m_3} \right]$ y $i(x) = m_3x + b_3$ con $x \in \left[\frac{b_1 - b_3}{m_3 - m_1}, \frac{b_2 - b_3}{m_3 - m_2} \right]$. En la Figura 4.27 se visualiza el mismo triángulo de la Figura 4.26 pero representado en el plano semiradical.

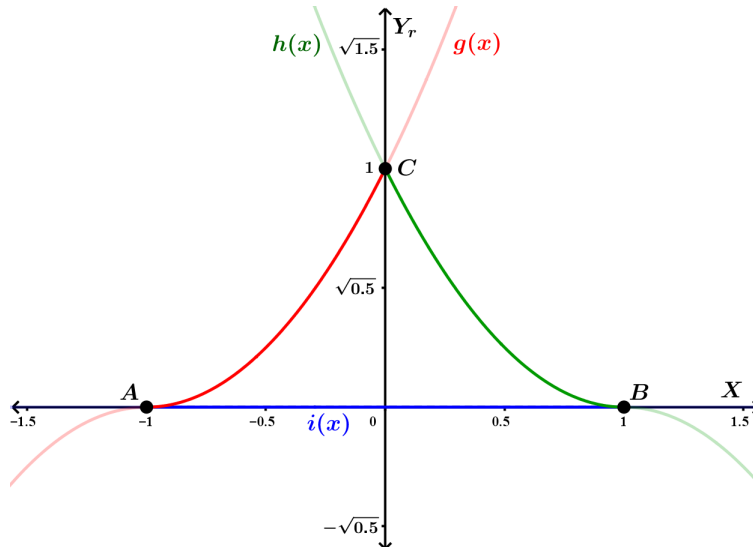


Figura 4.27: Triángulo con vértices $(-1, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 0)$ en el plano semiradical.

La primera observación que se puede hacer es que en el $\triangle ABC$, la $m\angle ABC$ es 53.13, mientras que $m\angle BAC$ y $m\angle ACB$ son 0; esto al aplicar la expresión 4.8. Esto muestra que el teorema que

alude a que la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es 180, no necesariamente se cumple en un triángulo representado en el sistema semiradical.

Ejemplo 1 de triángulo en el plano semiradical. Definido por $g(x) = -1$, $x = 1$ y $i(x) = -x + 1$.

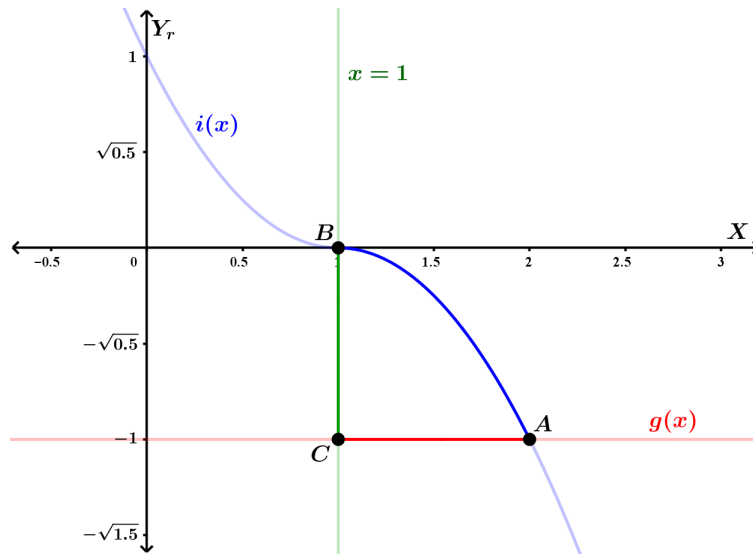


Figura 4.28: Triángulo con vértices $(1, 0)$, $(1, -1)$ y $(2, -1)$ en el plano semiradical.

Al aplicar la expresión 4.8 en este ejemplo, la medida del $\angle BAC$ es 63.43, mientras que las medidas de los $\angle ABC$ y $\angle ACB$ son 90. La segunda observación que se puede hacer es que la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo representado en el plano semiradical también puede ser mayor a 180.

Ejemplo 2 de triángulo en el plano semiradical. Tómese un triángulo definido por $g(x) = 1$, $h(x) = x - 1$ y

$i(x) = -x + 1$. En este ejemplo la $m\angle ABC$ es 0, y la medida de los ángulos $\angle BAC$ y $\angle BCA$ es de 63.43.

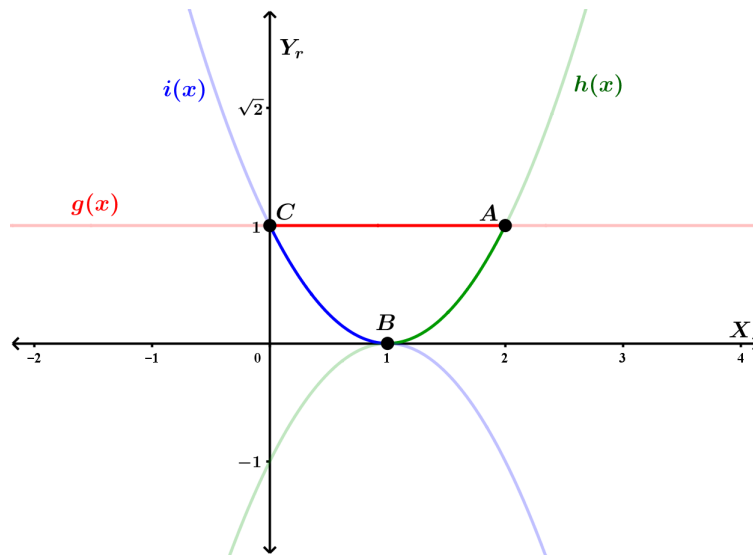


Figura 4.29: Triángulo con vértices $(1,0)$, $(0,1)$ y $(2,1)$ en el plano semiradical.

Ejemplo 3 de triángulo en el plano semiradical. Tómesse un triángulo definido por $g(x) = x - 1$, $h(x) = \frac{-3}{2}x + 4$ y $i(x) = \frac{-1}{4}x - 1$. En este ejemplo la $m\angle ABC$ es 45, la $m\angle BCA$ es 90 y la $m\angle BAC$ es 35.54.

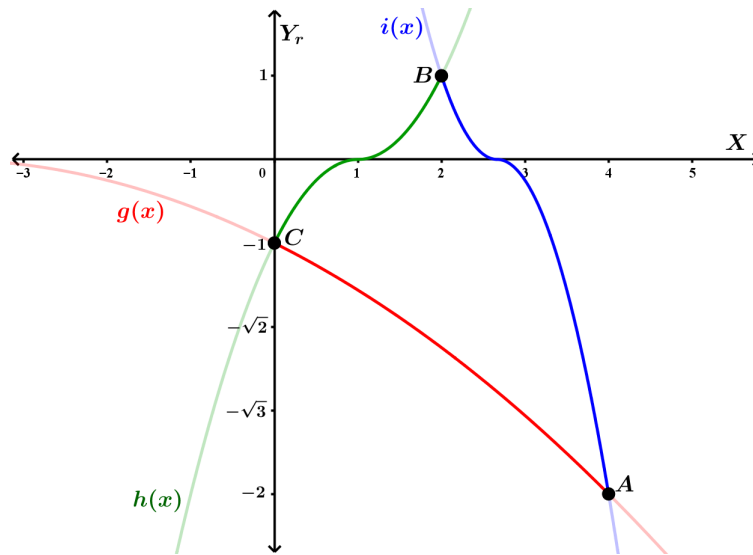


Figura 4.30: Triángulo con vértices $(-1,0)$, $(0,1)$ y $(1,0)$ en el plano semiradical.

Ejemplo 4 de triángulo en el plano semiradical. definido por $g(x) = \frac{-\sqrt{2}-2}{6}x + 2$, $h(x) = \frac{-\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3}x + 2$ y $i(x) = \frac{2-\sqrt{3}}{3}x + 2$. En este ejemplo la $m\angle ABC$ es 123.19, la $m\angle BCA$ es 46.48 y la $m\angle BAC$ es 10.32.

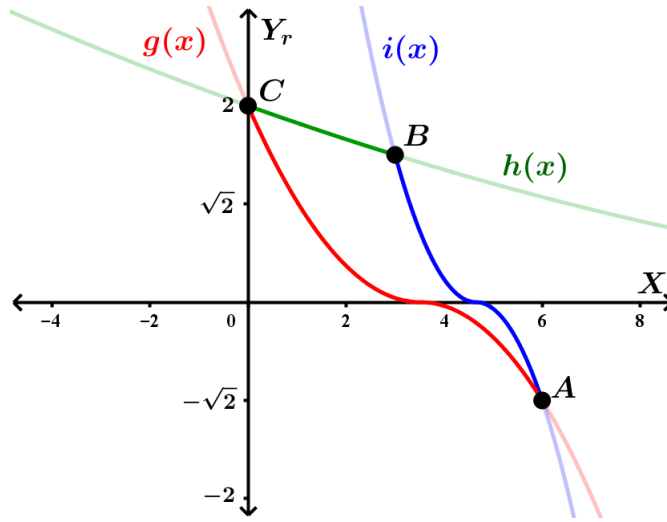


Figura 4.31: Triángulo con vértices $(0, 2)$, $(3, \sqrt{3})$ y $(6, -\sqrt{2})$ en el plano semiradical.

4.3. Curvas cónicas

En esta sección se presentará la exploración de las curvas cónicas en el plano semiradical manteniendo la definición de distancia usual. Al igual que en la anterior sección, este ejercicio se reduce a modelar las representaciones gráficas de las ecuaciones analíticas en el plano semiradical.

Teniendo en cuenta que la expresión general $Ay^2 + Bx^2 + Cyx + Dy + Ex + F = 0$, se usa para representar las distintas cónicas que cumplen con la definición de distancia usual. Resulta plausible hacer uso de la expresión 3.2 para explorar la representación gráfica de las cónicas en el plano semiradical. Dada la forma de la expresión 3.2 es conveniente expresarla de la forma:

$$y = \frac{-Cx - D \pm \sqrt{(Cx + D)^2 - 4A(Bx^2 + EX + F)}}{2A}$$

De esta forma al aplicar la expresión 3.2, se obtiene:

$$f_r^{-1}(y) = \begin{cases} \left(\frac{-Cx - D \pm \sqrt{(Cx + D)^2 - 4A(Bx^2 + EX + F)}}{2A} \right)^2 & \text{Si } \frac{-Cx - D \pm \sqrt{(Cx + D)^2 - 4A(Bx^2 + EX + F)}}{2A} \geq 0 \\ - \left(\frac{-Cx - D \pm \sqrt{(Cx + D)^2 - 4A(Bx^2 + EX + F)}}{2A} \right)^2 & \text{Si } \frac{-Cx - D \pm \sqrt{(Cx + D)^2 - 4A(Bx^2 + EX + F)}}{2A} < 0 \end{cases}$$

Esto es igual a:

$$f_r^{-1}(y) = \begin{cases} \left(\frac{-Cx-D+\sqrt{(Cx+D)^2-4A(Bx^2+EX+F)}}{2A} \right)^2 & Si \quad \frac{-Cx-D+\sqrt{(Cx+D)^2-4A(Bx^2+EX+F)}}{2A} \geq 0 \\ \left(\frac{-Cx-D-\sqrt{(Cx+D)^2-4A(Bx^2+EX+F)}}{2A} \right)^2 & Si \quad \frac{-Cx-D-\sqrt{(Cx+D)^2-4A(Bx^2+EX+F)}}{2A} \geq 0 \\ -\left(\frac{-Cx-D+\sqrt{(Cx+D)^2-4A(Bx^2+EX+F)}}{2A} \right)^2 & Si \quad \frac{-Cx-D+\sqrt{(Cx+D)^2-4A(Bx^2+EX+F)}}{2A} < 0 \\ -\left(\frac{-Cx-D-\sqrt{(Cx+D)^2-4A(Bx^2+EX+F)}}{2A} \right)^2 & Si \quad \frac{-Cx-D-\sqrt{(Cx+D)^2-4A(Bx^2+EX+F)}}{2A} < 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

Esto indica las cónicas que cumplen con la definición de distancia usual se representan en el plano semiradical de la misma forma en la que se representa en el plano usual la expresión 4.11.

4.3.1. Circunferencia

La ecuación analítica de una circunferencia con centro en (h, k) y radio r es $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$. Debido al procedimiento que se está realizando para representar gráficamente curvas, es conveniente escribir la expresión de la forma $y = \pm\sqrt{r^2 - (x-h)^2} + k$. Con ello, las coordenadas semiradicales de los puntos que representan la circunferencia analítica en el plano semiradical son (x, y) . Siguiendo la idea que ya hemos expresado de manera reiterada, esta coordenada se puede transformar en $(x, f_c^{-1}(y))$ si se quiere representar en el sistema usual. Así, una circunferencia en el sistema radical se puede estudiar a partir de la siguiente expresión, ya transformada al sistema usual:

$$f_r^{-1}(y) = \begin{cases} \left(\pm\sqrt{r^2 - (x-h)^2} + k \right)^2 & Si \quad \pm\sqrt{r^2 - (x-h)^2} + k \geq 0 \\ -\left(\pm\sqrt{r^2 - (x-h)^2} + k \right)^2 & Si \quad \pm\sqrt{r^2 - (x-h)^2} + k < 0 \end{cases}$$

esto es igual a:

$$f_r^{-1}(y) = \begin{cases} \left(\sqrt{r^2 - (x-h)^2} + k \right)^2 & Si \quad \sqrt{r^2 - (x-h)^2} + k \geq 0 \\ \left(-\sqrt{r^2 - (x-h)^2} + k \right)^2 & Si \quad -\sqrt{r^2 - (x-h)^2} + k \geq 0 \\ -\left(\sqrt{r^2 - (x-h)^2} + k \right)^2 & Si \quad \sqrt{r^2 - (x-h)^2} + k < 0 \\ -\left(-\sqrt{r^2 - (x-h)^2} + k \right)^2 & Si \quad -\sqrt{r^2 - (x-h)^2} + k < 0 \end{cases}$$

Enseguida se presentan algunas representaciones de circunferencias analíticas dados su centro y radio, en el plano semiradical.

Ejemplo 1 de circunferencia: Circunferencia con centro en $(0,0)$ y radio 1.

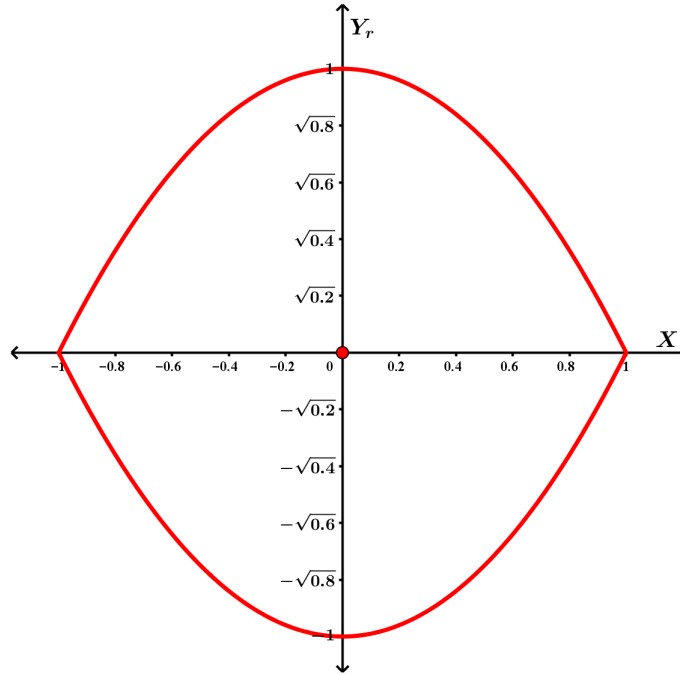


Figura 4.32: Representación gráfica de circunferencia con centro en $(0,0)$ y radio 1 en el plano semiradical.

Ejemplo 2 de circunferencia: Circunferencia con centro en $(0,0)$ y radio 0.5.

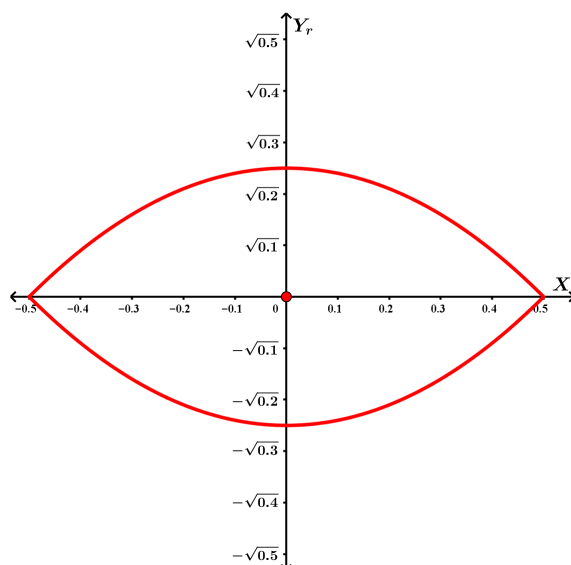


Figura 4.33: Representación gráfica de circunferencia con centro en $(0,0)$ y radio 0.5 en el plano semiradical.

Ejemplo 3 de circunferencia: Circunferencia con centro en $(0,0)$ y radio 5.

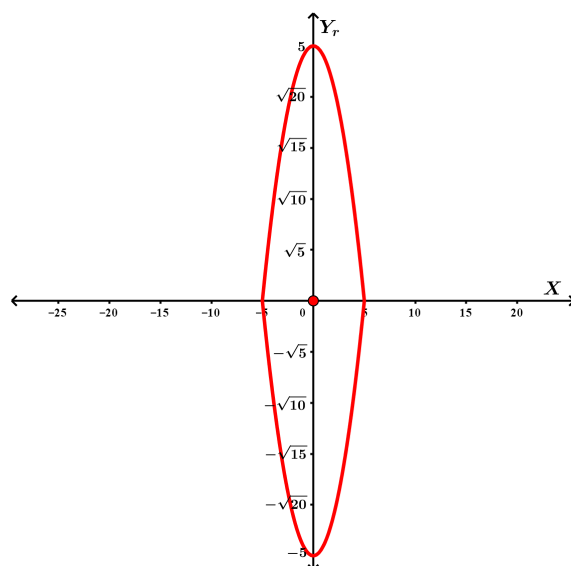


Figura 4.34: Representación gráfica de circunferencia con centro en $(0,0)$ y radio 5 en el plano semiradical.

Ejemplo 4 de circunferencia: Circunferencia con centro en $(1, 1)$ y radio 1.

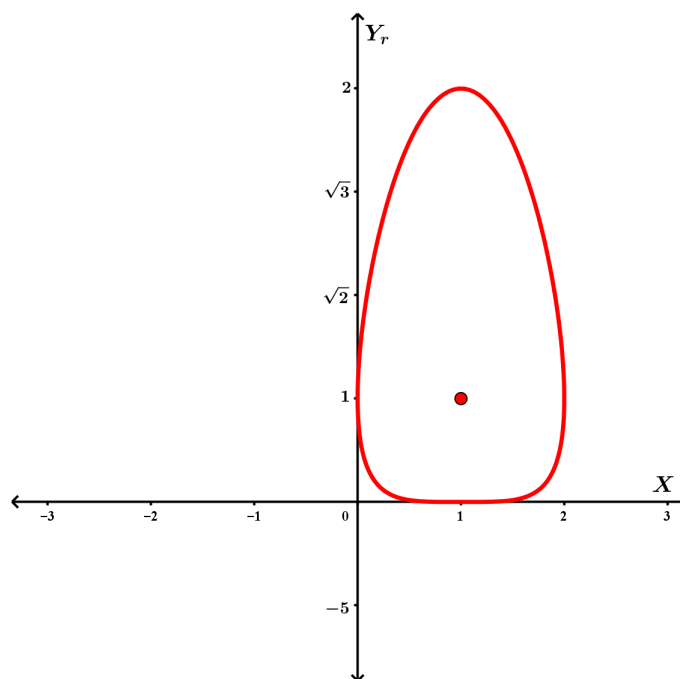


Figura 4.35: Representación gráfica de circunferencia con centro en $(1, 1)$ y radio 1 en el plano semiradical.

Ejemplo 5 de circunferencia: Circunferencia con centro en $(0.4, 0.25)$ y radio 0.3.

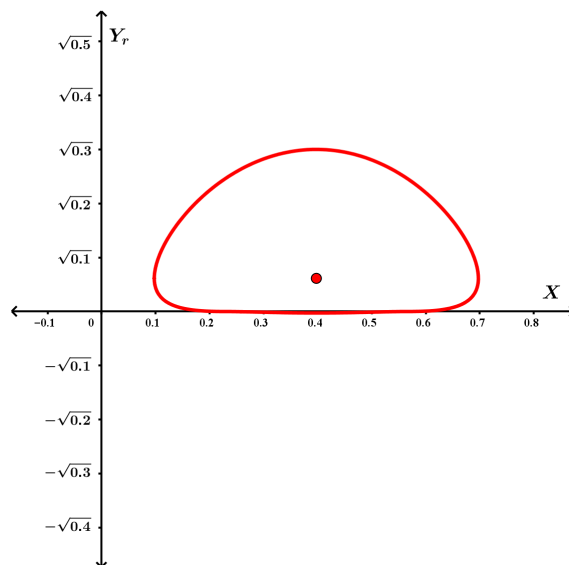


Figura 4.36: Representación gráfica de circunferencia con centro en $(0.4, 0.25)$ y radio 0.3 en el plano semiradical.

Ejemplo 6 de circunferencia: Circunferencia con centro en $(0.25, 4)$ y radio 1.

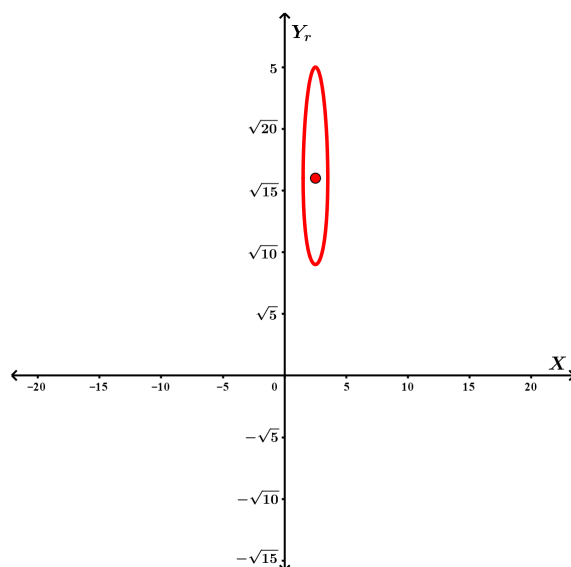


Figura 4.37: Representación gráfica de circunferencia con centro en $(0.4, 0.25)$ y radio 0.3 en el plano semiradical.

Ejemplo 7 de circunferencia: Circunferencia con centro en $(0.6, 0.4)$ y radio 1.

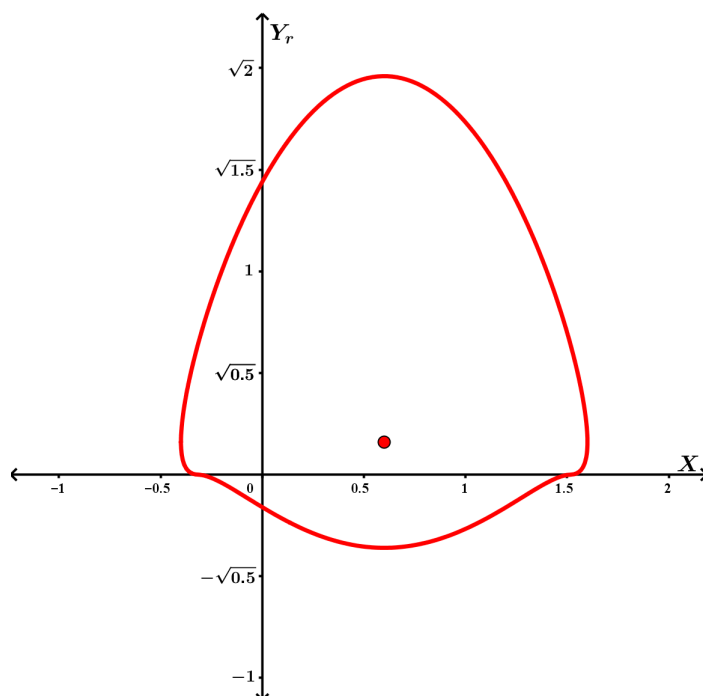


Figura 4.38: Representación gráfica de circunferencia con centro en $(0.6, 0.4)$ y radio 1 en el plano semiradical.

4.3.2. Parábola

Dada una parábola con foco F y vértice V , si $C_{uu}(V) = (h, k)$ y $d(F, V) = p$, entonces la ecuación canónica de dicha parábola es: $(x - h)^2 = 4p(y - k)$ si su directriz (recta analítica) es paralela al eje X . Dicha ecuación se puede expresar de la forma:

$$y = \frac{(x - h)^2}{4p} + k$$

De esta forma, luego de aplicar la expresión 3.2. se tiene como resultado que este tipo de parábolas se representan en el plano semiradical de igual manera a como se representa en el plano usual la expresión:

$$f_r^{-1}(y) = \begin{cases} \left(\frac{(x-h)^2}{4p} + k \right)^2 & \text{Si } \frac{(x-h)^2}{4p} + k \geq 0 \\ - \left(\frac{(x-h)^2}{4p} + k \right)^2 & \text{Si } \frac{(x-h)^2}{4p} + k < 0 \end{cases}$$

En seguida se muestran algunos ejemplos de este tipo de parábolas.

Ejemplo 1: Parábola con foco $(0, 1)$ y directriz $h(x) = -1$.

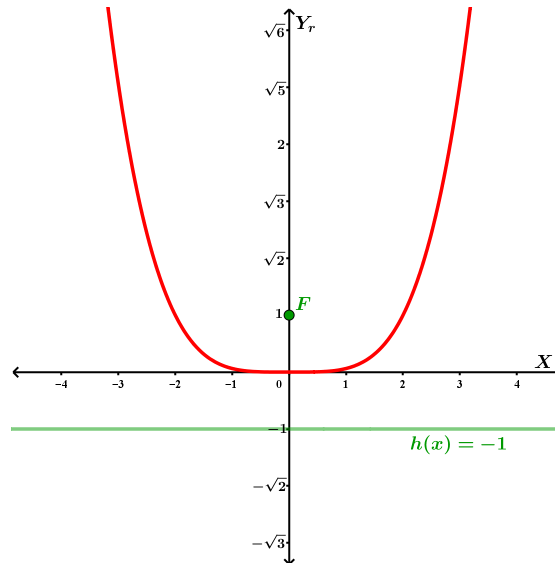


Figura 4.39: Representación gráfica de parábola con foco en $(0, 1)$ y directriz $h(x) = 1$ en el plano semiradical.

Ejemplo 2: Parábola con foco $(5, 1)$ y directriz $h(x) = 4$.

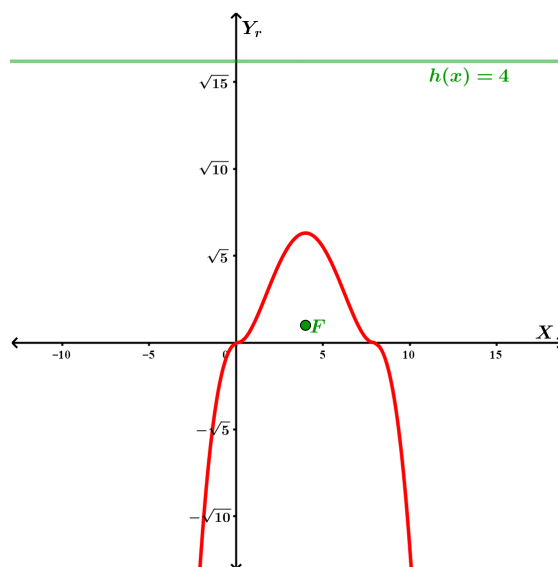


Figura 4.40: Representación gráfica de parábola con foco en $(5, 1)$ y directriz $h(x) = 4$ en el plano semiradical.

Ejemplo 3: Parábola con foco $(0, 1)$ y directriz $h(x) = -2$.

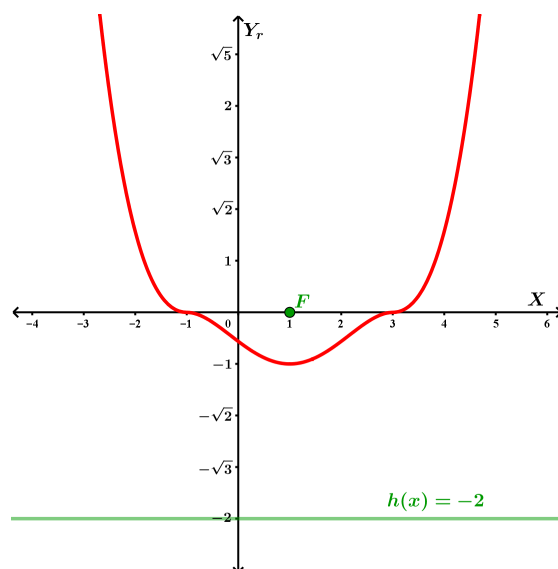


Figura 4.41: Representación gráfica de parábola con foco en $(0, 1)$ y directriz $h(x) = -2$ en el plano semiradical.

Si la directriz de la parábola es paralela al eje Y , la ecuación canónica de la parábola es $(y - k)^2 = 4p(x - h)$, también se puede expresar de la forma:

$$y = \pm \sqrt{4p(x - h)} + k \quad (4.12)$$

Luego de aplicar la expresión 3.2. se tiene cómo resultado que este tipo de parábolas se representan en el plano semiradical de igual manera a como se representa en el plano usual la expresión:

$$f_r^{-1}(y) = \begin{cases} \left(\pm \sqrt{4p(x - h)} + k \right)^2 & \text{Si } \pm \sqrt{4p(x - h)} + k \geq 0 \\ - \left(\pm \sqrt{4p(x - h)} + k \right)^2 & \text{Si } \pm \sqrt{4p(x - h)} + k < 0 \end{cases}$$

Enseguida se muestran algunos ejemplos de este tipo de parábolas.

Ejemplo 4: Parábola con foco $(1, 0)$ y directriz $x = -1$

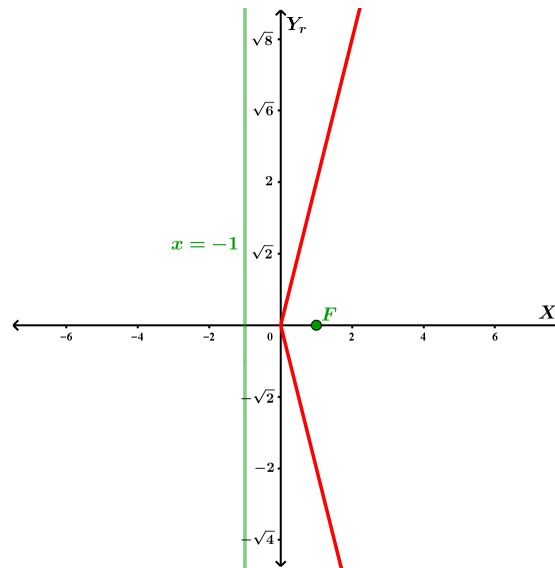


Figura 4.42: Representación gráfica de parábola con foco en $(1, 0)$ y directriz $x = -1$ en el plano semiradical.

En este ejemplo se puede percibir la representación gráfica de la parábola como la unión de dos curvas rectas, esto sucede porque el vértice de la parábola es igual a $(0, 0)$ y $d(F, V) = 1$

Al reemplazar estos valores en la expresión 4.12. da como resultado: $y = \pm \sqrt{4x}$ y esta tiene

mucha similitud con la expresión que se desea representar como una recta al momento de definir la escala semiradical. Esta característica la tendrán todas las parábolas con directrices paralelas al eje Y y con el foco perteneciente al eje X .

Ejemplo 6: Parábola con foco $(\frac{7}{4}, -1)$ y directriz $x = 2$.

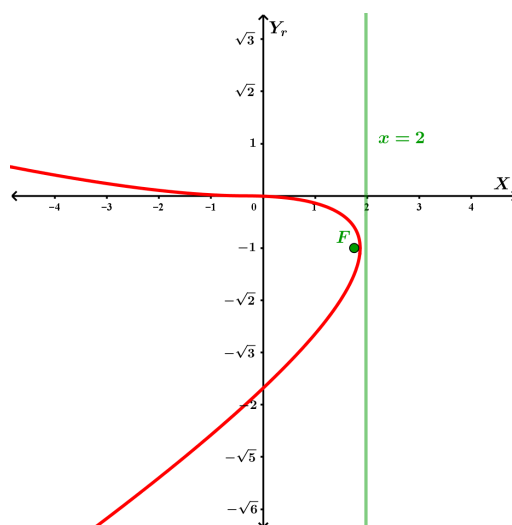


Figura 4.43: Representación gráfica de parábola con foco en $(\frac{7}{4}, -1)$ y directriz $x = 2$ en el plano semiradical.

En el plano usual para estudiar una parábola cuya directriz no es paralela a los ejes, se rotan los ejes a tal punto uno de estos sea paralelos a la directriz, seguidamente se realiza una transformación de coordenadas tomando como referencia dicha rotación. Siguiendo este procedimiento, si se desea representar gráficamente en el plano semiradical la parábola con directriz $h(x) = x + 1$ y foco $(-1, 1)$ se tendría el siguiente resultado:

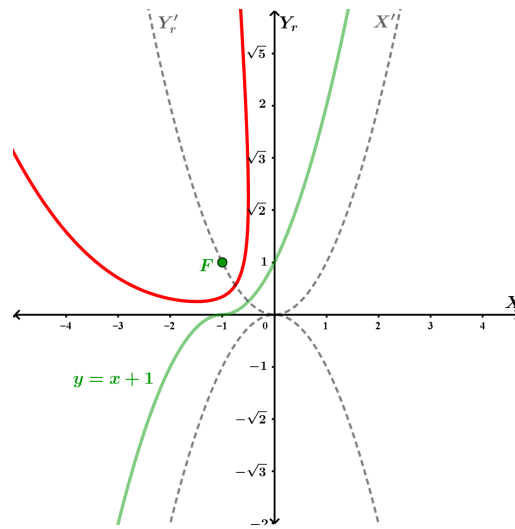


Figura 4.44: Representación gráfica de parábola con foco en $(-1, 1)$ y directriz $h(x) = x + 1$ en el plano semiradical.

Por otra parte, la expresión general de esta parábola es $y^2 + x^2 + 2xy - 2y + 2x + 3 = 0$, en cuanto a la representación de esta parábola en el plano semiradical se puede realizar el procedimiento descrito al inicio de la sección, esto da un resultado similar al que se presenta en la expresión 4.11. Se considera que este procedimiento es más cómodo para representar parábolas con directrices inclinadas, ya que al rotar los ejes en el plano cartesiano estos ya no se perciben como curvas rectas, por esta razón hace complicado el ubicar las coordenadas de los puntos en dichos ejes rotados. Enseguida se muestra otro ejemplo de parábola con directrices inclinadas dadas su expresión general.

Ejemplo 7: Parábola con foco $(1, -1)$ y directriz $h(x) = x - 4$.

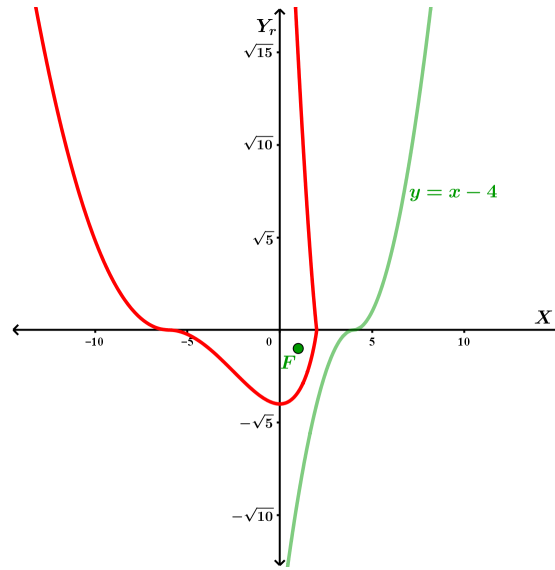


Figura 4.45: Representación gráfica de parábola con foco en $(1, -1)$ y directriz $h(x) = x - 4$ en el plano semiradical.

4.3.3. Elipse

La expresión canónica de una elipse cuyo eje mayor es paralelo al eje coordenado X es igual a $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$, donde el centro de la elipse es (h, k) , el semieje mayor es a y el semieje menor es b . Realizando un procedimiento análogo al realizado en las anteriores cónicas, esta expresión se puede replantear de la forma:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - (x-h)^2} + k$$

Al aplicar la expresión 3.2 se obtiene:

$$f_r^{-1}(y) = \begin{cases} \left(\pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - (x-h)^2} + k \right)^2 & \text{Si } \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - (x-h)^2} + k \geq 0 \\ - \left(\pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - (x-h)^2} + k \right)^2 & \text{Si } \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - (x-h)^2} + k < 0 \end{cases}$$

Finalmente la representación gráfica de esta expresión en el plano usual será igual a la representación gráfica de la elipse en el plano semiradical. Enseguida se muestran algunos ejemplos de este tipo de elipses representadas gráficamente en el plano semiradical.

Ejemplo 1: El punto $(0, 1)$ pertenece a la elipse con focos $(-1, 0)$, $(1, 0)$.

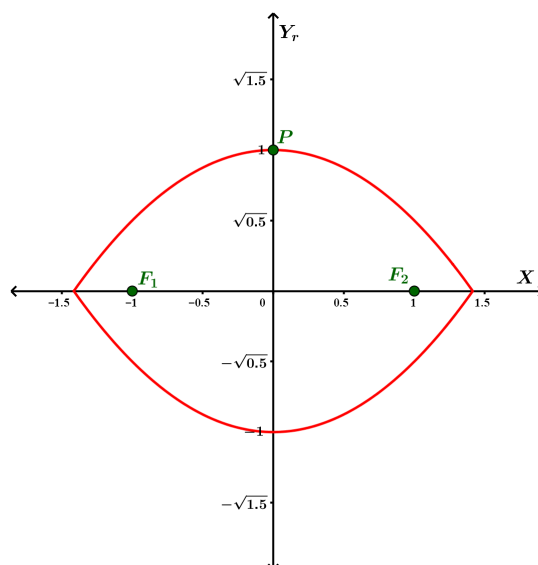


Figura 4.46: Representación gráfica en el plano semiradical de elipse con focos $(-1, 0)$, $(1, 0)$; y $(0, 1)$ pertenece a ella.

Ejemplo 2: El punto $(0, \sqrt{7})$ pertenece a la elipse con focos $(-2, 2)$, $(2, 2)$.

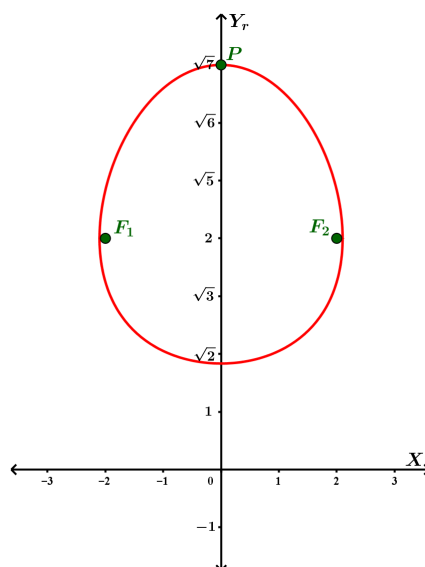


Figura 4.47: Representación gráfica en el plano semiradical de elipse con focos $(-2, 2)$, $(2, 2)$; y $(0, \sqrt{7})$ pertenece a ella.

Ejemplo 3: El punto $(0, 2)$ pertenece a la elipse con focos $(-2, -\sqrt{0.5})$, $(2, \sqrt{0.5})$.

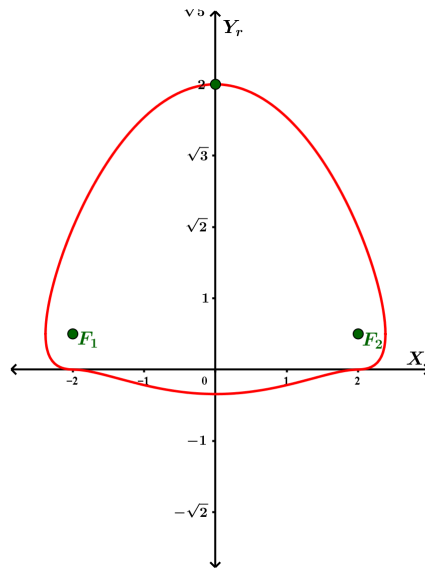


Figura 4.48: Representación gráfica en el plano semiradical de elipse con focos $(-2, -\sqrt{0.5})$, $(2, \sqrt{0.5})$; y $(0, 2)$ pertenece a ella.

Si el eje mayor de la elipse es paralelo al eje coordenado Y , la expresión canónica de esta es $\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$, donde el centro de la elipse es (h, k) , el semieje mayor es a y el semieje menor es b . Siguiendo el procedimiento análogo al desarrollado anteriormente, esta expresión se replantea de la forma:

$$y = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - (x-h)^2} + k$$

Al aplicar la expresión 3.2 se obtiene que la representación gráfica de este tipo de elipse en el plano semiradical, es igual a la representación gráfica en el plano usual de la expresión:

$$f_r^{-1}(y) = \begin{cases} \left(\pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - (x-h)^2} + k \right)^2 & \text{Si } \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - (x-h)^2} + k \geq 0 \\ - \left(\pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - (x-h)^2} + k \right)^2 & \text{Si } \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - (x-h)^2} + k < 0 \end{cases}$$

Enseguida se muestran ejemplos de este tipo de elipse.

Ejemplo 4: El punto $(1, 0)$ pertenece a la elipse con focos $(0, 1)$, $(0, -1)$.

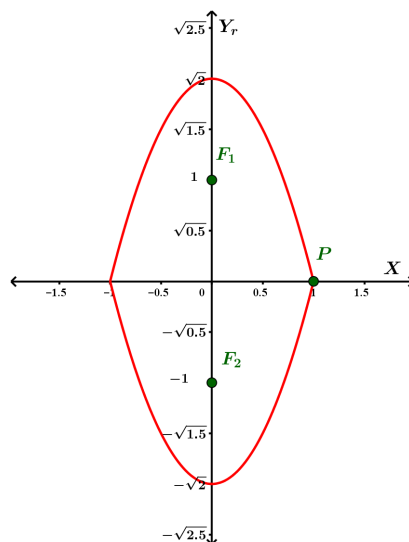


Figura 4.49: Representación gráfica en el plano semiradical de elipse con focos $(0, 1)$, $(0, -1)$; y $(1, 0)$ pertenece a ella.

Ejemplo 5: El punto $(0, \sqrt{7})$ pertenece a la elipse con focos $(2, 2)$, $(2, -2)$.

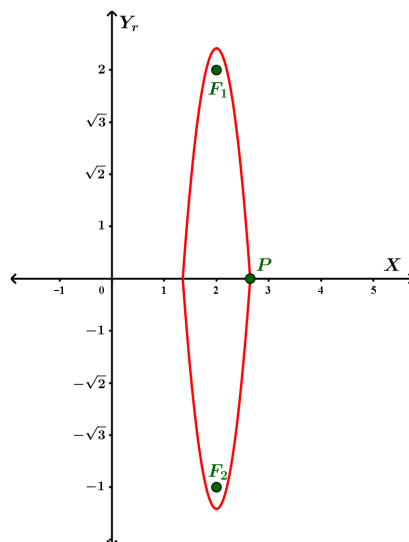


Figura 4.50: Representación gráfica en el plano semiradical de elipse con focos $(2, 2)$, $(2, -2)$; y $(0, \sqrt{7})$ pertenece a ella.

En el plano usual para representar las elipses cuyo eje mayor no es paralelo a uno de los ejes coordenados, se realiza un procedimiento análogo al descrito en las parábolas con directriz inclinada, por esta razón es conveniente representar gráficamente este tipo de elipses teniendo

en cuenta la expresión general. Por ejemplo, La expresión $3y^2 + 3x^2 - 2xy - 8 = 0$, representa la elipse que contiene el punto $(1, -1)$ y tiene con focos $(-1, -1)$, $(1, 1)$, su representación gráfica en el plano cartesiano es:

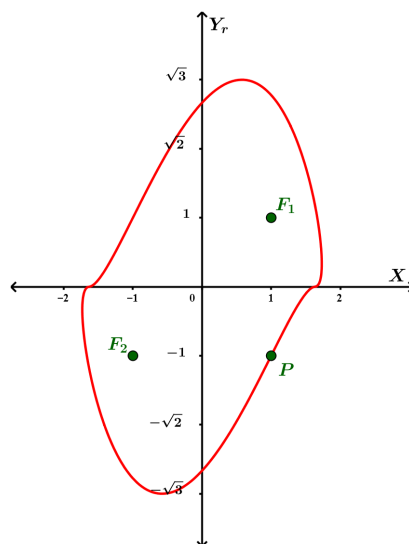


Figura 4.51: Representación gráfica en el plano semiradial de elipse con focos $(-1, -1)$, $(1, 1)$; y $(1, -1)$ pertenece a ella.

Otro ejemplo de elipse con eje mayor inclinado es el siguiente:

Ejemplo 6: El punto $(0, 2)$ pertenece a la elipse con focos $(-4, 4)$, $(2, -2)$.

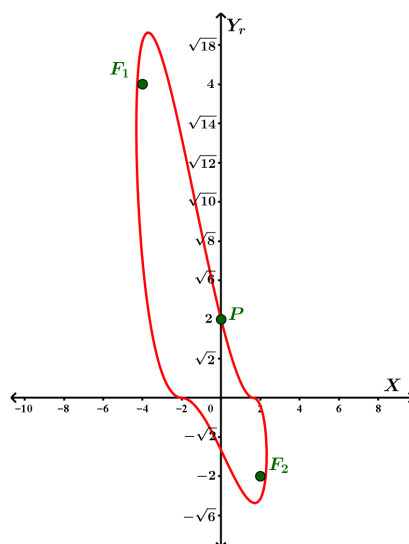


Figura 4.52: Representación gráfica en el plano semiradial de elipse con focos $(-4, 4)$, $(2, -2)$; y $(0, 2)$ pertenece a ella.

4.3.4. Hipérbola

La expresión canónica $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$, representa en el plano usual una hipérbola cuyo eje focal es paralelo al eje coordenado X donde el centro es (h,k) , el semieje transverso es a y el semieje conjugado es b . Reorganizando la esta expresión para realizar un procedimiento análogo al realizado en las anteriores expresiones cónicas anteriores, se tiene:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{(x-h)^2 - a^2} + k$$

Luego de aplicar la expresión 3.2. se tiene como resultado que este tipo de hipérbola se representan en el plano semiradical de igual manera a como se representa en el plano usual la expresión:

$$f_r^{-1}(y) = \begin{cases} \left(\pm \frac{b}{a} \sqrt{(x-h)^2 - a^2} + k \right)^2 & \text{Si } \pm \frac{b}{a} \sqrt{(x-h)^2 - a^2} + k \\ - \left(\pm \frac{b}{a} \sqrt{(x-h)^2 - a^2} + k \right)^2 & \text{Si } \pm \frac{b}{a} \sqrt{(x-h)^2 - a^2} + k \end{cases}$$

En seguida se muestran algunos ejemplos de este tipo de hipérbolas.

Ejemplo 1: El punto $(2, 1)$ pertenece a la hipérbolas con focos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.

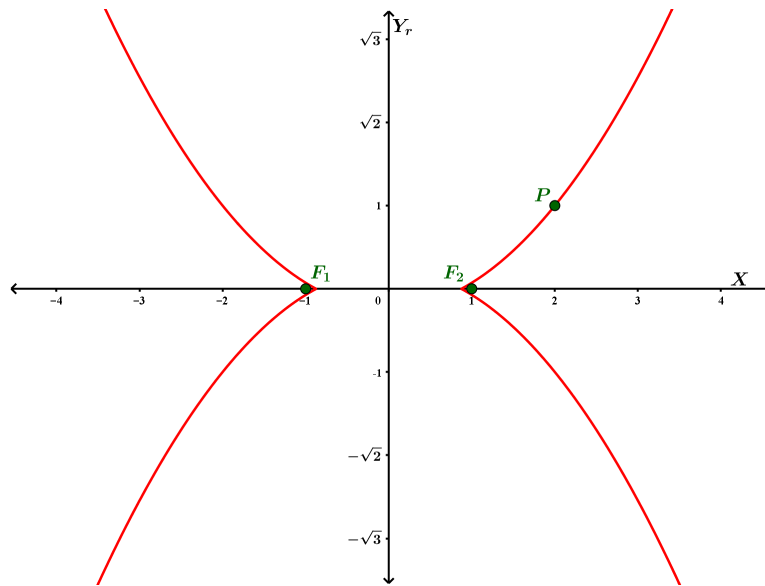


Figura 4.53: Representación gráfica en el plano semiradical de hipérbola con focos $(-1, 0)$, $(1, 0)$; y $(2, 1)$ pertenece a ella.

Ejemplo 2: El punto $(-2, 2)$ pertenece a la hipérbolas con focos $(-1, 1)$ y $(1, 1)$.

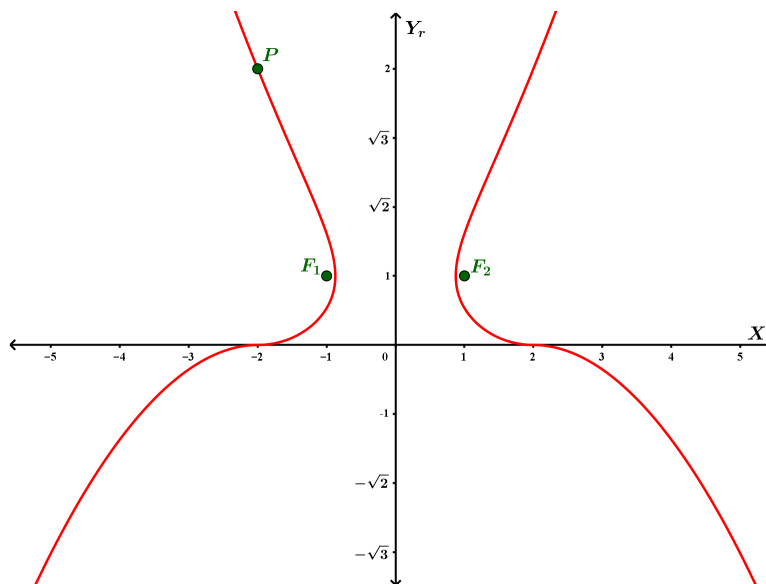


Figura 4.54: Representación gráfica en el plano semiradical de hipérbola con focos $(-1, 1)$, $(1, 1)$; y $(-2, 2)$ pertenece a ella.

Ejemplo 3: El punto $(-2, -2)$ pertenece a la hipérbolas con focos $(-4, -2)$ y $(4, -2)$.

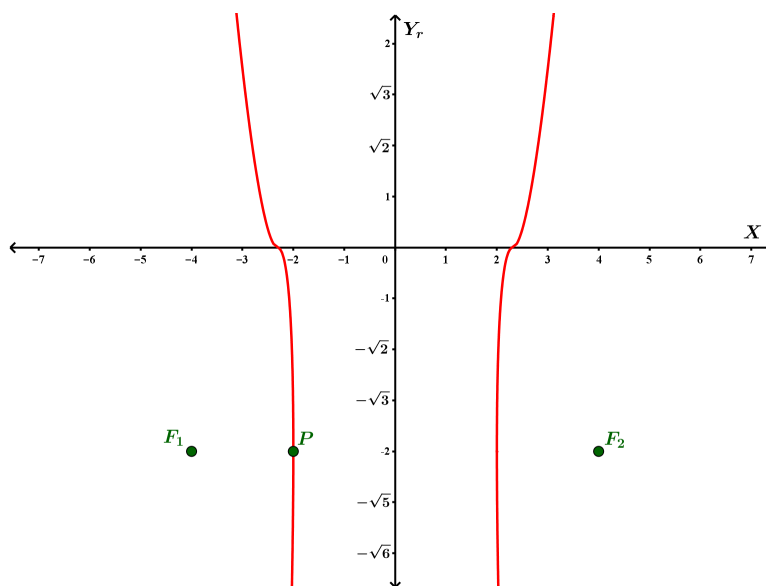


Figura 4.55: Representación gráfica en el plano semiradical de hipérbola con focos $(-4, -2)$, $(4, -2)$; y $(-2, -2)$ pertenece a ella.

Si el eje focal es paralelo al eje coordenado Y , entonces la expresión canónica de la hipérbola es $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$, donde el centro es (h, k) , el semieje transversal es a y el semieje conjugado

es b . Esta expresión es igual a la siguiente:

$$y = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 + (x-h)^2} + k$$

Al aplicar la expresión 3.2, se obtiene:

$$f_r^{-1}(y) = \begin{cases} \left(\pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 + (x-h)^2} + k \right)^2 & \text{Si } \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 + (x-h)^2} + k \\ - \left(\pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 + (x-h)^2} + k \right)^2 & \text{Si } \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 + (x-h)^2} + k \end{cases}$$

La representación gráfica de esta expresión en el plano usual será igual a la representación gráfica de este tipo de parábolas en el plano semiradical. Enseguida se muestran algunos ejemplos de este tipo de hipérbolas.

Ejemplo 4: El punto $(1, 2)$ pertenece a la hipérbolas con focos $(0, 1)$ y $(0, -1)$.

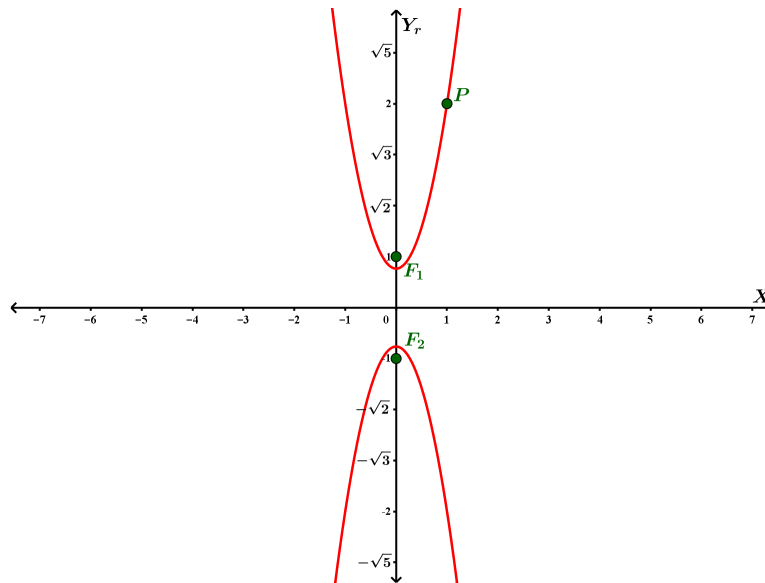


Figura 4.56: Representación gráfica en el plano semiradical de hipérbola con focos $(0, 1)$, $(0, -1)$; y $(1, 2)$ pertenece a ella.

Ejemplo 5: El punto $(2, 0)$ pertenece a la hipérbolas con focos $(2, 3)$ y $(2, -1)$.

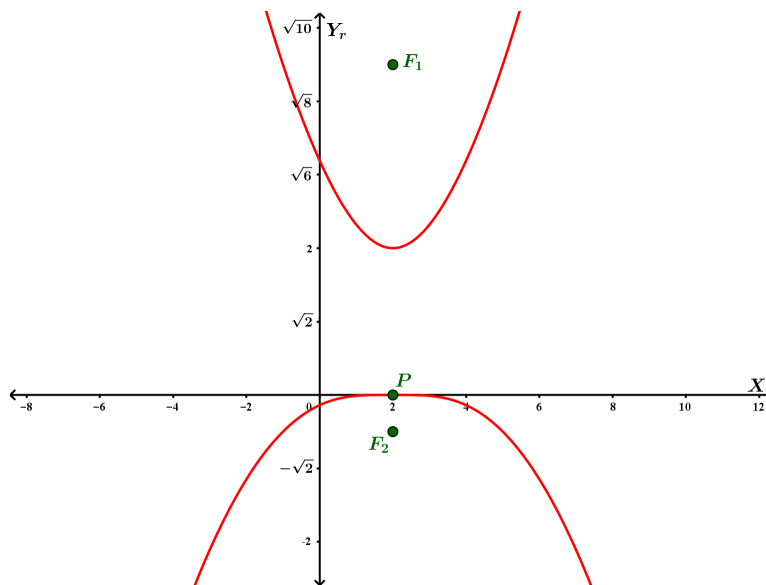


Figura 4.57: Representación gráfica en el plano semiradical de hipérbola con focos $(2, 3)$, $(2, -1)$; y $(2, 0)$ pertenece a ella.

Ejemplo 6: El punto $(2, -2)$ pertenece a la hipérbolas con focos $(2, 0)$ y $(2, -9)$.

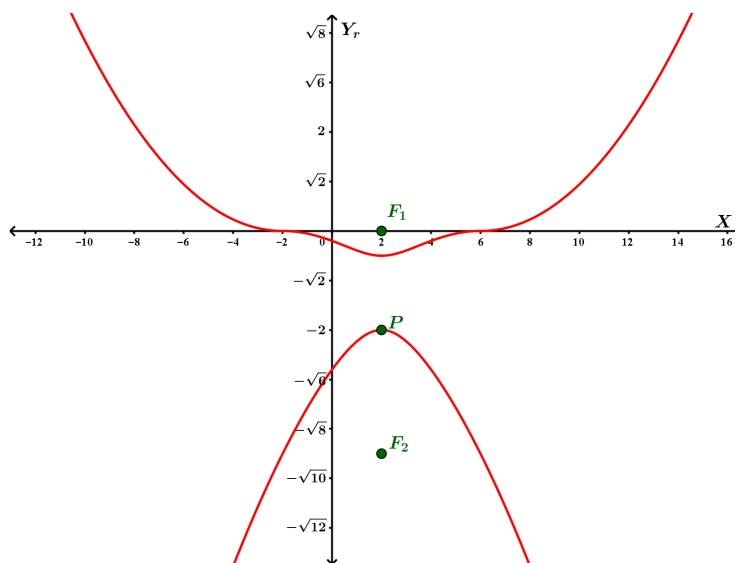


Figura 4.58: Representación gráfica en el plano semiradical de hipérbola con focos $(2, 0)$, $(2, -9)$; y $(2, -2)$ pertenece a ella.

En el plano usual para representar las hipérbolas cuyo eje focal no es paralelo a uno de los ejes coordenados, se realiza un procedimiento análogo al descrito en las parábolas con directriz

inclinada o las elipses con ejes inclinados, por esta razón es conveniente representar gráficamente este tipo de elipses teniendo en cuenta la expresión general. Por ejemplo, la expresión $-32y^2 - 32x^2 - 128xy - 192 = 0$, representa la hipérbola que contiene el punto $(1, 1)$ y tiene con focos $(-2, -2)$, $(2, 2)$, su representación gráfica en el plano cartesiano es:

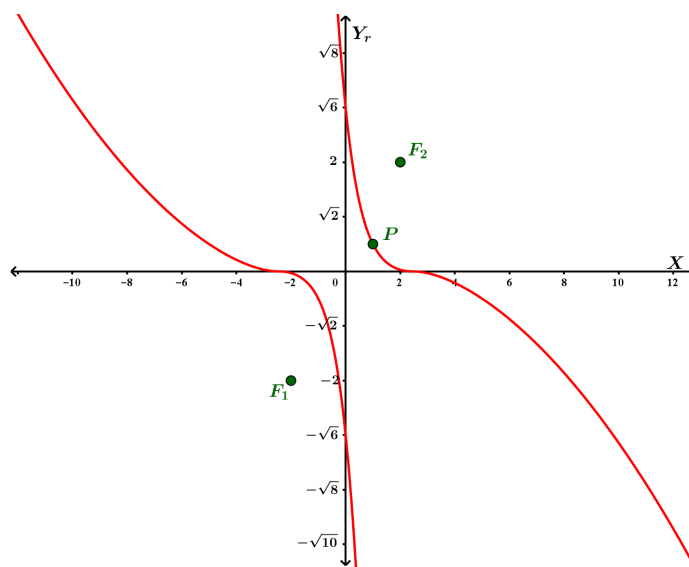


Figura 4.59: Representación gráfica en el plano semiradical de hipérbola con focos $(-2, -2)$, $(2, 2)$; y $(1, 1)$ pertenece a ella.

Ejemplo 8: El punto $(5, -2)$ pertenece a la hipérbolas con focos $(-2, 1)$ y $(2, -1)$.

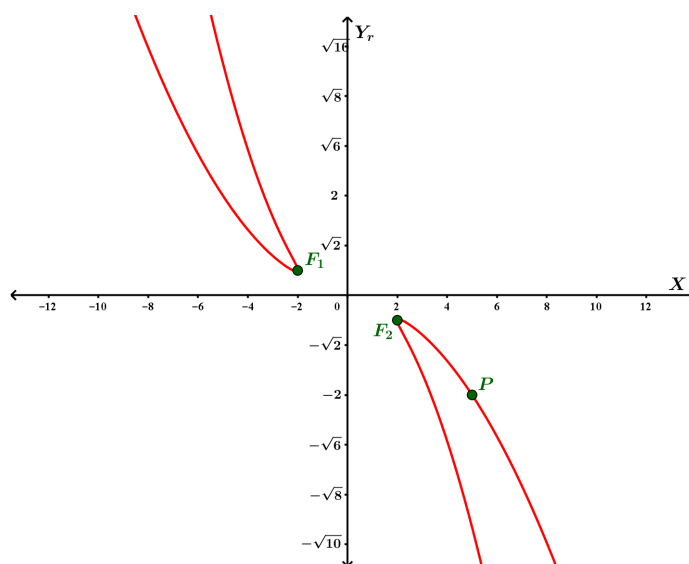


Figura 4.60: Representación gráfica en el plano semiradical de hipérbola con focos $(-2, 1)$, $(2, -1)$; y $(5, -2)$ pertenece a ella.

Capítulo 5

Conclusiones

En este capítulo se presentan algunas conclusiones que se obtuvieron durante el desarrollo del trabajo. Vale indicar que todos los objetivos planteados en el mismo fueron logrados en mayor o menor grado. En lo que sigue, una descripción al respecto es presentada, estructurando las conclusiones a la luz de los siguientes aspectos: principales resultados teóricos, dificultades que se presentaron durante el estudio, sugerencias para incursionar en clases de geometría analítica, aportes del estudio en mi formación como futuro profesor y sugerencias para continuar con el trabajo.

5.1. Resultados teóricos

- Para definir escalas alternativas a la usual, se aplica una función biyectiva de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ tal que el primer conjunto son las coordenadas de la escala usual y el segundo son las coordenadas reasignadas por la función. En este punto hay dos alternativas: (i) ubicar las coordenadas como lo indica la escala usual; o (ii) ubicar las coordenadas manteniendo su posición inicial. La escala radical se definió usando la segunda alternativa. Para $\mathbb{R}^2$ la escala alternativa que se basa en la escala radical puede ser definida cambiando la escala en alguno de los ejes o en ambos; para este estudio optamos por cambiarla en eje Y (a la que denominamos escala o sistema semiradical).

- En un plano al que se le asigna una escala semiradical, la distancia Euclidiana usual no cumple con el convenio de distancias iguales, sin embargo, es posible definir una distancia alternativa a la Euclidiana que cumpla con dicho convenio.
- La representación gráfica en un plano con escala semiradical de una curva cuya expresión es $h(x)$, es igual a la representación gráfica de la expresión $f_r^{-1}(h(x))$ en un plano con escala usual, por ejemplo. si $h(x) = x^3$ su representación gráfica en un plano con escala semiradical es igual a la representación gráfica en el plano usual de la expresión

$$f_r^{-1}(x^3) = \begin{cases} (x^3)^2 & \text{Si } x^3 \geq 0 \\ -(x^3)^2 & \text{Si } x^3 < 0 \end{cases}$$

- En un plano con escala semiradical, la representación gráfica de una recta analítica es igual a la representación gráfica en el plano usual de dos semiparábolas que tienen el mismo vértice, con concavidad opuesta y sus focos simétricos con respecto al eje X .
- En un plano con escala semiradical, el ángulo formado por dos rectas analíticas, cuyas expresiones son $g(x) = m_1x + b$, $h(x) = m_2x + b_2$ es igual a:

$$\tan^{-1} \left(\frac{2(m_2)^2 uv + 2m_2 b_2 v^2 - 2(m_1)^2 uv + 2m_1 b_1 v^2}{v^2 + (2(m_2)^2 u + 2m_2 b_2 v)(2(m_1)^2 u + 2m_1 b_1 v)} \right)$$

$$\text{con } u = b_2 - b_1 \text{ y } v = m_1 - m_2$$

$h(x)$ y $g(x)$ son perpendiculares si $m_{g(x)} m_{h(x)} = -(m_1 - m_2)^2$; con: $m_{g(x)} = \frac{2(m_1)^2 u + 2m_1 b_1 v}{v}$,
 $m_{h(x)} = \frac{2(m_2)^2 u + 2m_2 b_2 v}{v}$.

- En un plano con escala semiradical, las rectas analíticas paralelas no cumplen con el teorema que alude a la congruencia entre ángulos alternos internos o correspondientes.
- En un plano con escala semiradical, los triángulos no cumplen con el teorema que alude a

que la suma de la medida de los ángulos de un triángulo es 180. Esta suma también puede ser mayor o menor a 180.

5.2. Principales dificultades

- Al momento de desarrollar el trabajo, una de las primeras dificultades consistió en no encontrar documentos que hayan realizado un estudio relacionado con el tema, la información cercana al respecto se concentraba en la escala logarítmica y semilogarítmica. Sin embargo, esta no fue de mucha ayuda pues las aplicaciones que de este sistema se encuentran no aluden a un estudio geométrico como el pretendido. Con este panorama, fue muy común encontrarse con la necesidad de tomar decisiones sin tener muchas referencias de las cuales tener luces para determinar caminos pertinentes.
- El que algo tan intuitivo como el convenio de distancias usuales no se perciba en la representación gráfica, permite que sea común cometer errores relacionados con la visualización. Esto hizo que fuera recurrente el plantear conjeturas incorrectas, lo cual llevó a que el avance del estudio fuera lento y agotador.
- Al constituirse esta experiencia en mi primer acercamiento autónomo al tema trabajado, considero que pudo ser más afortunado para iniciar haber elegido una función más sencilla para definir la escala alternativa a la usual. Realizar el estudio a partir de una función con radical implicó algunos asuntos que suscitaron dificultades (por citar ejemplos, definir las curvas a trozos y trabajar con radicales).
- Si bien fueron interesantes los resultados establecidos para la recta analítica (como se ilustró en las conclusiones de orden teórico), fue frustrante no haber obtenido resultados interesantes para las cónicas (quizá hizo falta tiempo para explorar propiedades específicas en ellas – ángulos, tangencias, etc.–). A pesar cumplimos nuestros objetivos de estudiar rectas, curvas cónicas y precisar el comportamiento de propiedades de la geometría clásica en el sistema

semiradical, tenemos un sinsabor con los resultados establecidos para las cónicas.

5.3. Sugerencias preliminares para incursionar en clases de geometría analítica

El tema abordado en este trabajo no se toma en cuenta en los planes de estudio de matemáticas de la educación básica y media, ni en el programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. Consideramos que el estudio realizado se convierte en un insumo para que estos temas se puedan considerar, aunque sea de manera tangencial, en los currículos implementados de geometría analítica. Esto, a la luz de exponer las bases conceptuales relativas al sistema semiradical, las representaciones gráficas de las rectas y cónicas analíticas en dicho sistema, y algunas propiedades sobre ángulos entre rectas.

Un profesor que quiera incursionar en el estudio de estos asuntos, puede tomar como referencia los resultados acá expuestos para diseñar secuencias de tareas que, por ejemplo, apunten a: (i) la descripción del sistema semiradical y las intenciones de su creación, y (ii) la descripción de la representación gráfica de rectas analíticas en dicho sistema.

Abordar el primer asunto, implicaría un escenario a partir del cual los estudiantes puedan ganar conciencia de las implicaciones de base que impone un sistema coordinado determinado (e.g., la correspondencia entre puntos y coordenadas puede ser arbitraria y conveniente según intereses específicos; el convenio de distancias iguales no necesariamente se cumple -hecho que contrasta con el interés natural de que los objetos se vean como se conciben-; la definición de distancia entre puntos debe cambiar según intereses específicos). Abordar el segundo asunto, implicaría un contexto mediante el cual los conocimientos de la geometría analítica con el sistema usual, adquieren un sentido instrumental para dar cuenta y razón de las curvas que emergen cuando se representan rectas analíticas en el sistema semiradical.

Involucrar deliberadamente cualquiera de estos asuntos en planes de estudios implementados, implicaría, como se intentó ilustrar a lo largo del texto, una actividad matemática compuesta de

procesos como la visualización, la representación (gráfica o analítica), la conjeturación y la argumentación (Álvarez, Ángel, Carranza y Soler, 2013). Al favorecer la producción de resultados genuinos por parte de los estudiantes, su faceta afectiva se podría afectar positivamente (D'Amore, Font & Godino, 2007).

De ninguna manera, este trabajo tuvo la pretensión de presentar secuencias de tareas que involucraran los temas estudiados, pero sí procuró ilustrar un trabajo de indagación genuino y autónomo que podría ser reproducido por estudiantes, con orientaciones deliberadas por parte del profesor.

5.4. Aportes a mi formación profesional

- La elaboración de este trabajo de grado me permitió un alto desarrollo de habilidades investigativas en lo que concierne a la práctica matemática. El vivenciar cómo surge una idea y cómo esta se puede desarrollar, me hizo reflexionar sobre lo que puede experimentar un estudiante cuando se le propone problemas de indagación y conjeturación. Considero que pude ganar conciencia de la actividad matemática que un estudio como el realizado se puede favorecer, en el sentido explicado en la sección 4.3.
- La elaboración de este trabajo me permitió reconocer mis falencias escriturales, por esta razón debo seguir mejorando las habilidades que son indispensables para un desempeño idóneo como docente: redacción de documentos, interpretación y comunicación de ideas.
- El desarrollo de este trabajo me permitió plantear la posibilidad de un escenario como el descrito en la sección anterior, en el que se consideren los temas mencionados para ser trabajados en clases de secundaria.

Sugerencia para continuar el trabajo

A continuación se presentan algunas recomendaciones para las personas que deseen dar continuidad al trabajo realizado:

- Estudiar el comportamiento de diferentes tipos de curvas considerando una distancia alternativa a la Euclidiana (e.g., la definida en la Sección 2.3 que cumple con el convenio de distancias iguales).
- Estudiar de manera más profunda lo relativo a las cónicas (e.g., explorar propiedades de ángulos o tangencias).
- Estudiar otras escalas alternativas a la usual diferentes a la abordada en este trabajo (la cual se fundamenta en la función $y = \sqrt{x}$). Una de las escalas que puede ser de interés es aquella que se define mediante la función $f_a(y) = \frac{1}{y}$, ya que intercambiaría las coordenadas de mayor magnitud con las de menor magnitud.
- Aplicar escalas distintas a la usual en ambos ejes de un plano coordenado. en este trabajo sólo uno de los ejes fue alternativo (eje Y).
- Diseñar una secuencia didáctica que tome como insumo los resultados teóricos logrados con este estudio, u otros que tomen como referencia otras escalas alternativas a la usual. Eventualmente, implementar y evaluar la implementación de tal secuencia.
- Realizar los mismos estudios en $\mathbb{R}^3$ para superficies cuadráticas, por ejemplo, ya sea asignando escalas distintas a la usual en uno, dos o los tres ejes del espacio coordenado.

Bibliografía

- Alvarez, I. Angel, L. Carranza, E. & Soler, M. (2013) *Actividades matemáticas: Conjeturar y Argumentar*. Universidad pedagógica nacional. Colombia: Números.
- D'Amore, B., Font, V., & Godino, J. (2007). *La Dimensión Metadidáctica de los Procesos de Enseñanza y Aprendizaje de la Matemática*. Paradigma, 28(2), 49-70.
- Lehmann, C. (1989) *Geometría analítica*. Mexico D.F: Editorial Limusa.
- Manzur, A (2009) *Análisis gráfico. Parte I. Escalas lineales y logarítmicas*. Universidad autónoma metropolitana. Mexico D.F.
- Medigaño, V (2016) *Distancia usual entre dos puntos en diferentes sistemas coordenados del plano y el espacio*. Universidad pedagógica nacional. Colombia.
- Moise, E. (1990) *Elementary geometry from an advanced standpoint. Third edition*. United States of America: Addison-Wesley Publishing Company.