

**DIDÁCTICA DE LA FÍSICA Y LAS MATEMÁTICAS: ENSEÑANZA DEL
MOVIMIENTO UNIFORMEMENTE ACELERADO Y LA FUNCIÓN CUADRÁTICA**

**Tesis para optar al título de
Maestría en Educación**

Bibiana Piñeros Castañeda

**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
Bogotá, 2018**

**DIDÁCTICA DE LA FÍSICA Y LAS MATEMÁTICAS: ENSEÑANZA DEL
MOVIMIENTO UNIFORMEMENTE ACELERADO Y LA FUNCIÓN CUADRÁTICA**

Tesis para optar al título de

Maestría en Educación

Bibiana Piñeros Castañeda

Robinson Roa Acosta
Director

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE EDUCACIÓN

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

Bogotá, 2018

AGRADECIMIENTOS

A mi asesor, Dr Robinson Roa Acosta, por sus aportes, dedicación y paciencia en la construcción de esta tesis.


A mi compañero y amigo, Cristian Pulido, por sus sugerencias y comentarios en la elaboración de esta investigación.

A mi adorada madre, por su apoyo incondicional, confianza y motivación.

A mi amado esposo, por su confianza y amor.


A mi amado hijo, por su tiempo, quien fue el motor para seguir adelante en la elaboración de esta tesis.

A mis sobrinas y hermanas, por poder contar con ellas cuando más las necesité.

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <i>Formación de Profesores</i>	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 5 de 177	

1. Información General	
Tipo de documento	Tesis de maestría de investigación.
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central.
Título del documento	Didáctica de la física y las matemáticas: enseñanza del movimiento uniformemente acelerado y la función cuadrática.
Autor(es)	Piñeros Castañeda Bibiana
Director	Roa Acosta Robinson
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional. 2018. 110 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional. Maestría en educación.
Palabras Claves	DIDÁCTICA; MOVIMIENTO; FUNCIÓN; PROFESOR; CONOCIMIENTO.

2. Descripción
<p>Tesis de grado en la que la autora analiza a partir de documentos, las relaciones entre la didáctica de la física y la didáctica de las matemáticas en dos objetos de enseñanza, el movimiento uniformemente acelerado y la función cuadrática.</p> <p>El análisis de los documentos arrojan que las dos didácticas convergen en varios puntos, como los medios utilizados en los procesos de enseñanza, como el uso de las TIC y los libros; las actividades de enseñanza siendo la resolución de problemas la relevante para los dos objetos de enseñanza; la importancia del desarrollo de la historia y la epistemología de los objetos en cuestión; el conocimiento de la disciplina tanto la física como las matemáticas; y el reconocimiento de otras disciplinas que aportan a la didáctica como la psicología y sociología.</p>

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Revolución en Educación</small>	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 6 de 177	

3. Fuentes

Adrian, P & Cornejo, J. (2006). La enseñanza de la mecánica en la escuela media: la evolución histórica de los textos (1840-2000). *Revista de enseñanza de la física*, 19 (2), 35-46.

Aduriz-Bravo, A; Izquierdo, M. (2002). Acerca de la didáctica de las ciencias como disciplina autónoma. *Revista electrónica de enseñanza de las ciencias*, 1 (3), 130-140. Recuperado de: http://reec.uvigo.es/volumenes/volumen1/REEC_1_3_1.pdf

Aduriz-Bravo, A & Morales, L (2002). El concepto de modelo en la enseñanza de la física consideraciones epistemológicas, didácticas y retóricas. *Revista caderno catarinense de ensino de física*, 19 (1), 76-89.

Alfaro, C & Chavarría, J. (2012). La transposición didáctica: Un ejemplo en el sistema educativo costarricense. *Uniciencia*, 26, 153-168.

Amaya, T; Pino, L & Medina, A. (2016). Evaluación del conocimiento de futuros profesores de matemáticas sobre las transformaciones de representaciones de una función. *Revista educación matemática*, 28 (3), 111-144.

Aparicio, E. (2007). El cálculo escolar universitario. Un estudio de su problemática en una facultad de ciencias. *Acta latinoamericana de matemática educativa*, 20 (1), 353-358.

Ardila, L. (2006). *Aproximación al concepto de función mediante la modelación de problemas experimentales: Movimiento uniformemente variado*. Tesis de Maestría. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá.

Asprelli, M. (2011). *La didáctica de la formación docente*. Argentina: Ediciones HomoSapiens.

Bachelard, G. (2000). *La formación del espíritu científico*. México: Siglo XXI editores.

Barros, J. (2008). Enseñanza de las ciencias desde una mirada de la didáctica de la escuela francesa. *Revista EIA*, 5 (10), 55-71. Recuperado de: <http://revistas.eia.edu.co/index.php/reveia/article/view/210/206>

Bautista, R. (2006). *Las matemáticas en la segunda mitad del siglo XX*. En: *Bautista et al. La*

formación de conceptos en ciencias y humanidades. México: Siglo XXI editores.

Beléndez, A. (1996). Algunas consideraciones en torno al proceso enseñanza-aprendizaje de la física en la universidad. *Revista interuniversitaria de formación del profesorado*, 27, 189-203.

Bell, E. (2016). *Historia de las matemáticas*. México: Fondo de Cultura Económica. Recuperado de:

https://books.google.com.co/books?id=9PR2DQAAQBAJ&printsec=frontcover&authuser=1&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false

Berrone, L. (2001). Galileo y la génesis de la cinemática del movimiento uniformemente acelerado. *Revista de la sociedad española de historia de las ciencias y de las técnicas*, 24 (51), 629-648.

Bravo, A & Izquierdo, A. (2002). Acerca de la didáctica de las ciencias como disciplina autónoma. *Revista electrónica de enseñanza de las ciencias*, 1 (3), 130-140. Recuperado de: http://reec.uvigo.es/volumenes/volumen1/REEC_1_3_1.pdf

Brousseau, G. (1991). ¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de las matemáticas?. *Revista enseñanza de las ciencias*, 9 (1), 10-21.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Libros de Zorzal.

Camilloni, A. (2008a). De herencias, deudas y legados. Una introducción a las corrientes actuales a la didáctica. En: Camilloni, A; Davini, C; Edelstein, G; Litwin, E ; Souto, M & Barco, S. *Corrientes didácticas contemporáneas*. Buenos Aires: Paidós. pp. 17-39.

Camilloni, A. (2008b). Didáctica general y didácticas específicas. En Camilloni, A; Cols, E & Basabe, L. *El saber didáctico*. Buenos Aires: Paidós. pp. 19-39.

Carnivo, J & Lopes, B. (2003). La investigación en física general en la universidad. Propuestas de investigación. *Revista enseñanza de las ciencias*, 21 (3), 473-482.

Castilblaco, O & Nardi, R. (2014). Una caracterización de la didáctica de la física. *Memorias del Segundo y Tercer Foro de Experiencias Didácticas sobre CSC y Primer Encuentro de grupo alternancias*. pp. 13-21. Recuperado de:

<http://revistas.pedagogica.edu.co/index.php/memorias/article/download/2643/2441>

Chevallard, Y. (2005). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.

Comenio, J. (1998). *Didáctica Magna*. México: Purrúa.

Contreras, F. (2012). La evolución de la didáctica de la metemática. *Revista horizonte de la ciencia*, 2 (2), 20-25.

Cribeiro, J; Madrid, H & Fraga, J. (2013). ¿Relación, función o ecuación? *Revista el cálculo y la enseñanza*, 5 (5), 41-56. Recuperado de:

http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/data/docs/CP6.bbf0a982b7788f.pdf

Dalcín, M. & Olave, M. (2007). Ecuaciones de segundo grado: su historia. *Acta latinoamericana de matemática educativa*, 20 (1), 150-155.

Davini, C. (2008). Conflictos en la evolución de la didáctica. La demarcación entre la didáctica general y las didácticas especiales. En: Camilloni, A; Davini, C; Edelstein, G; Litwin, E; Souto, M & Barco, S. *Corrientes didáctica contemporáneas*. Buenos Aires: Paidós. pp 41-73.

De Ecahndía, G. (1995). *Aristóteles Física*. Madrid: Gredos.

De la Peña, L. (2006). *Algunos comentarios desde la física*. En: Bautista et al. *La formación de conceptos en ciencias y humanidades*. México: Siglo XXI editores. pp 52-64.

Díaz, J. (2013). El Concepto de Función: Ideas pedagógicas a partir de su historia e investigaciones. *Revista el cálculo y su enseñanza*. 4 (5), 13-25. Recuperado de: https://www.researchgate.net/publication/268217474_El_Concepto_de_Funcion_Ideas_pedagogicas_a_partir_de_su_historia_e_investigaciones

Díaz, J; Abril, A; Díaz, L & Bravo, F. (2017). La utilización del aprendizaje basado en proyectos en la enseñanza de la Cinemática. *Revista atlante: cuadernos de educación y desarrollo*. Recuperado de: <http://www.eumed.net/rev/atlante/2017/07/aprendizaje-cinematica.html>

Feldman, D. (1999). *Ayudar a enseñar. Relaciones entre didáctica y enseñanza*. Argentina: Aique.

Fernández, M & Rondero, C. (2004). El inicio histórico de la ciencia del movimiento: implicaciones epistemológicas y didácticas. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 7 (2), 145-156.

Feynman, R. (1969). ¿Qué es ciencia? *Physics Teacher*. Recuperado de: http://cecabogota.pbworks.com/w/file/46139955/art_Que_es_Ciencia_Richard%20Feynman.pdf

Fischl, J. (1984). *Manual de historia de la filosofía*. Barcelona: Herder.

Flores, J; Gaita, C & Carrillo, F (2013). Estudio de las organizaciones matemáticas del objeto función cuadrática en la enseñanza superior. *Actas de VII CIBEM*, 1306-1314.

Gallego, A & Gallego, R. (2006). *Acerca de la didáctica de las ciencias de la naturaleza. Una*

disciplina conceptual y metodológicamente fundamentada. Bogotá: Magisterio.

García, A. (2009). Investigaciones en didáctica de la física: tendencias actuales e incidencia en la formación del profesorado. *Revista latin american journal of physics education*. 3 (2), 369-375.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Revista recherches en didactique des mathématiques*, 18 (52), 7-33.

Gil, D & Guzman, D. (1993). *Enseñanza de las ciencias y la matemática tendencias e innovaciones*. España: Popular.

Gil, D; Carrascosa, J & Martínez, F. (1999). El surgimiento de la didáctica de las ciencias como campo específico de conocimientos. *Revista de educación y pedagogía* , 11 (25), 15-65.

Gil, D; Martínez, J & Senent, F. (1988). El fracaso en la resolución de problemas de física: Una investigación orientada por nuestros supuestos. *Revista enseñanza de las ciencias*, 6 (2) 131-146.

Godino, J. (1991). Hacia una teoría de la didáctica de la matemática. En: Gutierrez, A. *Área de conocimiento: didáctica de la matemática*. Madrid: Síntesis. pp. 105-148.

Godino, J; Bencomo, D; Font, V & Wilhelmi, M. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de la matemáticas. *Revista Paradigma*, 27(2), 221-252.

Gómez, A. (2011). *Enseñanza de los conceptos la Cinemática desde una perspectiva vectorial con los estudiantes de grado décimo del Colegio José Antonio Galán*. Tesis de Maestría. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá.

Gómez, P & Carulla, C. (2001). *Enseñanza constructivista, conocimiento didáctico del profesor y análisis didáctico en matemáticas. El caso de la función cuadrática*. En Tirado, M. L. (Ed.), *Educación en Matemáticas*. Bogotá: IDEP. pp. 337-363. Recuperado de: <http://funes.uniandes.edu.co/365/>

Hernández, E. (2006). Algunos conceptos de la matemática del siglo XX. En: *Bautista et al. La formación de conceptos en ciencias y humanidades*. México: Siglo XXI editores.

Hernández, C & López, J. (2002). *Disciplinas*. Instituto colombiano para el fomento de la educación superior. Las aventuras de un significado. Bogotá.

Hurtado, J. (2010). *Metodología de la investigación. Guía para una comprensión holística de la ciencia*. Bogotá-Caracas: Quirón.

Ibarra, S & Fernández, L. (2007). *La enseñanza de la función cuadrática en el bachillerato. Resultados de un proyecto de desarrollo docente*. México: Universidad de Sonora.

Izquierdo, M; Sanmati, N & Espinet, M. (1999). *Fundamentación y diseño de las prácticas*

escolares de ciencias experimentales. *Revista enseñanza de la ciencias*, 17 (1), 45-59. Recuperado de: <https://ddd.uab.cat/pub/edlc/02124521v17n1/02124521v17n1p45.pdf>

Jiménez, M; Aureli, C; Ana, O & Emilio, P. (2009). *Enseñar ciencias*. España: Grao.

Joshua, S & Dupin, J. (2005). *Introducción a la didáctica de las ciencias y la matemática*. Buenos Aires: Colihue.

Klein, G. (2012). *Didáctica de la física*. Uruguay: n/a.

Kleiner, I. (1989). Evolution of the function concept: A brief survey. *Revista the college mathematics journal*, 20 (4), 282-300. Recuperado de: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.113.6352&rep=rep1&type=pdf>

Laburú, C & de Carvalho, A. (1992). Investigación del desarrollo y aprendizaje de la noción de aceleración en adolescentes. *Revista enseñanza de las ciencias*, 10 (1) , 63-72.

Láscaris, C. (sin fecha). *Parménides: sobre la naturaleza*. Recuperado de: <http://www.inif.ucr.ac.cr/recursos/docs/Revista%20de%20Filosof%C3%ADa%20UCR/Vol.%20XIII/No.%2036/Parm%C3%A9nides.%20Sobre%20la%20Naturaleza.pdf>

Ledesma, L & Pocovi, C. (2013). La progresiva aproximación al cambio conceptual. Una experiencia de docencia a partir del caso de la aceleración. *Polifonías revista de educación*, 2 (3) 131-146.

Litwin, E. (2008). El campo de la didáctica: La búsqueda de una nueva agenda. En: Camilloni, A; Davini, C; Edelstein, G; Litwin, E; Souto, M & Barco, S. *Corrientes didácticas contemporáneas*. Buenos Aires: Paidós. pp 91-115.

Martín, J; Gómez, M & Gutiérrez, S. (2000). *La física y la química en secundaria*. Madrid: Narcea.

Martínez, D; Torres, A; Tellería, A; & Dibut, L. (2007). Estrategia didáctica para flexibilizar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática en la universalización de la educación superior. *Acta latinoamericana de matemática educativa*, 20 (1), 138-143.

Massoni, N & Moreira, M. (2010). Un enfoque epistemológico de la enseñanza de la física: una contribución para el aprendizaje significativo de la física con muchas cuestiones sin respuesta. *Revista electrónica de enseñanza de las ciencias*, 9 (2) 283-308. Recuperado de: <https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/94795/000750348.pdf?sequence=1>

Mellado, V. (2001). ¿Por qué a los profesores de ciencias nos cuesta tanto cambiar nuestras concepciones y modelos didácticos? *Revista interuniversitaria de formación del profesorado*, 40, 17-30.

Pacios, A. (1980). *Introducción a la didáctica*. España: Editorial Cincel-Kapelusz.

Pietrocola, M. (2002). A Matemática como estruturante do Conhecimento físico. *Revista caderno brasileiro de ensino de física*, 19 (1), 89-109.

Pérez, S & Dibar, C. (2012). Primeras apropiaciones de la metamática en la física: Resolviendo problemas de cinemática en el primer año de la universidad. *Revista de enseñanza de la física*, 25 (1-2), 25-33.

Pinto, J & González, M (2008). El conocimiento didáctico del contenido en el profesor de matemáticas: ¿una cuestión olvidada? *Revista educación matemática*, 20 (3), 83-100.

Porlán, R; Rivero, A., & Martín, R. (1997). Conocimiento profesional y epistemología de los profesores I: Teoría, métodos e instrumentos. *Revista enseñanza de las ciencias*, 15 (2) 155-171. Recuperado de: <https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/21488/93522>

Pozo, J & Gómez, M. (1998). *Aprender a enseñar ciencia. Del conocimiento cotidiano al conocimiento científico*. Madrid: Morata.

Ramírez, E.(2007). Tratamiento didáctico de las funciones reales de una variable: proceso de modelación. *Acta latinoamericana de matemática educativa*, 20 (1), 235-240.

Ríos, Y. (2007). Ingeniería didáctica referida al concepto de fracción. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 20 (1), 270-275.

Roa, R. (2016). *Configuración del conocimiento profesional didáctico y pedagógico del profesor de ciencias para la enseñanza de la biotecnología*. Tesis Doctoral. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá.

Rodríguez, R. (2007). La enseñanza de la modelación en clase de física y de matemáticas. *Acta latinoamericana de matemática educativa*, 20 (1), 114-119.

Ruiz, A. (Sin fecha). *Historia y filosofía de las matemáticas*. Costa Rica: n/a.

Ruiz, L. (1994). *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función. Análisis epistemológico didáctico*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada. Granada.

Salazar, B. (2014). *Construcción de una unidad didáctica de cinemática (posición, velocidad, aceleración y caída libre) para potenciar el planteamiento y resolución de problemas en estudiantes de grado 10º*. Tesis de Maestría. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá.

Sampieri, R; Fernández, C & Bautista, M. (2010). *Metodología de la investigación*. México: McGraw Hill.

Sánchez, I. (2017). El uso de la integral y la derivada como método único para resolver problemas

de cinemática. *Revista enseñanza de las ciencias*, (extraordinario), 1909-1915.

Sánchez, I; Moreira, M & Caballero, C. (2009). Implementación de una propuesta de aprendizaje significativo de la cinemática a través de la resolución de problemas. *Revista chilena de ingeniería*, 17 (1), 27-41.

Sandoval, M; García, M; Mora, C & Suárez, C. (2017). Estrategia enseñanza-aprendizaje basada en experimentos (ABE) para mejorar la comprensión de gráficas en Cinemática. *Revista latin american journal of physics education*, 11 (3), 33071-33078. Recuperado de: <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/6364302.pdf>

Sastre, P; Rey, G; & Boubée, C. (2008). El concepto de función a través de la historia. *Revista iberoamericana de educación matemática*, (16), 141-155. Recuperado de: http://www.fisem.org/www/union/revistas/2008/16/Union_016_014.pdf

Scheider, J. (2005). El nacimiento de la ciencias en los presocráticos. Universidad Del Cema. Recuperado de: http://www.ucema.edu.ar/u/jschneider02/Trabajos_de_investigacion/Joel

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*. 15 (2), 4-14.

Soneira, A. (2006). La teoría fundamentada en los datos (Grounded Theory) de Glaser y Strauss. En: *Vasilachis et al. Estrategias de investigación cualitativa*. Barcelona: Gedisa. pp. 153-173.

Farfán, R & Sosa, L. (2007). Formación de profesores. Diversas concepciones que afectan el quehacer docente y competencias iniciales de profesores del nivel medio superior. *Acta latinoamericana de matemática educativa*, 20 (1), 345-352.

Torres, S. (2013). *La enseñanza de la cinemática apoyada en la teoría del aprendizaje significativo, la resolución de problemas y el uso de applets*. Tesis de maestría. Universidad Nacional de Colombia. Medellín. Recuperado de: <http://www.bdigital.unal.edu.co/11602/1/71672894.2014.pdf>

Torretti, R. (2005). Espacio y tiempo en la física de Einstein. En: Estany, A. *Filosofía de las ciencias, sociales y matemáticas*. Madrid: Trotta. pp. 75-104.

Tovar, B & Triviño, J. (2007). *Conocimiento didáctico en la formación inicial del profesor de matemáticas relativo al concepto de función cuadrática*. Tesis de maestría. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá.

Trujillo, M; Castro, N; & César, D. (2010). *El concepto de función y la teoría de situaciones. Bases epistemológicas y didácticas en la enseñanza del concepto de función con la ayuda de*

calculadoras graficadoras. Bogotá: Universidad de la Salle.

Ugalde, W. (2013). Funciones: desarrollo histórico del concepto y actividades de enseñanza aprendizaje. *Revista digital matemática, educación e internet*, 14 (1), 1-48. Recuperado de: <http://www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/>

Uribe, J. (2011). La investigación documental y el estado del arte como estrategia de investigación en ciencias sociales. En: Páramo, P. (compilador). *La investigación en ciencias sociales: estrategias de investigación*. Bogotá, Colombia: Universidad Piloto de Colombia. pp. 195-210.

Vargas, M. (2011). *El concepto de función y sus aplicaciones en situaciones relacionadas con fenómenos físicos, que conducen a un modelo cuadrático, una propuesta para trabajar en el grado noveno*. Tesis de Maestría. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá.

Vasilachis, I. (2006). *Estrategias de investigación cualitativa*. Barcelona, España: Gedisa, S.A.

Vasilashis de Gialdino, I. (1992). *Métodos cualitativos I. Los problemas teórico-epistemológicos*. Buenos Aires: Centro Editor de América Latina.

Vija, O. (2008). ¿Qué es didáctica de la física? *Revista Góndola*, 3 (2), 46-48. Recuperado de: <https://revistas.udistrital.edu.co/ojs/index.php/GDLA/article/view/5287>

Vivanco, J. (1971). *Las matemáticas de Pitágoras a Newton*. México, D.F.: Laia.

Vivas, R. (2010). La función cuadrática. Un estudio a través de los libros de texto de los últimos 40 años en Argentina. *Revista 10tuneada_lula.pmd*, 6 (10), 163-180. Recuperado de: <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3699237>

Zambrano, A. (2005). *Didáctica, Pedagogía y saber*. Bogotá, Colombia: Cooperativa Editorial Magisterio.

4. Contenidos

Objetivo General

Analizar a partir de documentos la relación entre didáctica de la física y las matemáticas en la enseñanza del movimiento uniformemente acelerado y la función cuadrática.

Objetivos Específicos

Seleccionar y examinar documentos sobre las matemáticas, la física y su didáctica para la enseñanza del movimiento uniformemente acelerado y la función cuadrática.

Hacer una aproximación a la historia y epistemología del concepto de función cuadrática y movimiento uniformemente acelerado.

Identificar los puntos de convergencia y/o divergencia entre la didáctica de la física y las matemáticas para enseñar el movimiento uniformemente acelerado y la función cuadrática.

Capítulo I. Contextualización de la investigación: Se hace la presentación el planteamiento del problema; la pregunta problema; la justificación; los objetivos general y específicos, donde se destaca la reflexión frente a la enseñanza del movimiento uniformemente acelerado (MUA) y el concepto de función cuadrática (FC), reconociendo la importancia del actuar del profesor y el conocimiento que posee, no solo de la disciplina a enseñar sino a la didáctica de los dos objetos de estudio; así como las posibles relaciones que se pueden dar entre los dos conocimientos y por consiguiente entre las didácticas para dichos conocimientos.

Capítulo II. Metodología de la investigación: Se presenta la metodología de la investigación, desarrollada para el proceso de recolección de datos y su posterior análisis. Se inicia haciendo una presentación de la perspectiva epistemológica, para posteriormente, realizar una descripción de los fundamentos teóricos sobre teoría fundamentada, investigación documental y la técnica de recolección de datos. Por último, se abordan aspectos relacionados con la sistematización y el procesamiento de datos.

Capítulo III. Movimiento uniformemente acelerado y función cuadrática: una aproximación a la historia: Se presenta una aproximación de la historia sobre las ideas del movimiento en términos de la mecánica clásica, haciendo hincapié en el pensamiento aristotélico; los avances de galileo, en la matematización de la física, el método científico y las diferencias entre estos dos pensadores. Por otro lado, se sigue, con el concepto de función desde las matemáticas, cabe resaltar que sobre el concepto de función, la historia es bastante extensa, sin embargo para esta investigación se toman algunos autores recorriendo brevemente la edad antigua, media y moderna. Para las dos revisiones se termina haciendo una pequeña alusión a los pensamientos de newton, en sus postulados de la dinámica, debido al aporte que hizo al concepto de función y además que esta investigación, se relacionan los temas en cuestión pensando en la enseñanza para la educación media.

Capítulo IV. Didáctica de la física y las matemáticas: Se revisan las teorías que se han dado alrededor de la discusión de la didáctica general, que ha sido pensada como disciplina de conocimiento; ciencia y método. Seguido, se hace la reflexión de las tensiones generadas entre la

didáctica general y las didácticas específicas, debido a la delimitación de sus territorios disciplinares, finalmente se puntualiza de las didácticas específicas, la didáctica de las disciplinas, con el fin de hacer hincapié en la didáctica de la física, enfocado en la historia y los sistemas de enseñanza y en la didáctica de las matemáticas, desde el punto de vista histórico y en términos de los aportes de la escuela francesa.

Capítulo V. Relaciones entre enseñanza del movimiento uniformemente acelerado y la enseñanza de la función cuadrática a la luz del contexto de la física y las matemáticas: Se divide en cuatro momentos, el primer momento trata sobre algunas investigaciones en el marco de la enseñanza de las matemáticas y la enseñanza del concepto función y función cuadrática. Para el segundo momento, se muestra lo propio de las investigaciones realizadas en torno a la enseñanza de la física y la enseñanza del movimiento uniformemente acelerado. El tercer momento, trata de la relación entre la física y las matemáticas, alrededor de la enseñanza de los objetos en cuestión. Para la presentación de las investigaciones se tienen en cuenta los objetivos, metodología (sujetos u objetos de estudio, instrumentos) y conclusiones. El cuarto momento, con el fin de vislumbrar las posibles divergencias y/o convergencias entre la didáctica del MUA y la didáctica de la FC, se presenta un análisis poniendo en juego lo encontrado en las diferentes investigaciones y desde cinco aspectos: objeto didáctico; conocimiento del profesor; medios para la enseñanza; instrumentos para la enseñanza; y metodologías para la enseñanza.

Capítulo VI. Conclusiones y proyecciones: Se dan las conclusiones y proyecciones para esta tesis.

5. Metodología

Se tiene como referente epistemológico la investigación cualitativa, basada bajo dos metodologías que son próximas, una es la teoría fundamentada en los datos, la otra es investigación documental. Se seleccionaron y analizaron treinta y cuatro documentos entre artículos de revista y tesis de maestría, teniendo en cuenta los objetos de estudio –tanto en la física y las matemáticas como en la didáctica-, y su relación con los profesores y estudiante.

6. Conclusiones

Diferentes autores, se han preguntado acerca de la manera cómo enseñar y cómo lograr mejores aprendizajes de las matemáticas y la física, en los que han relacionado esta disciplina con otras disciplinas como: la historia, la epistemología, la psicología cognitiva, la pedagogía y la filosofía.

Los dos procesos de enseñanza están permeados por el conocimiento que posee el profesor y los conocimientos previos que posee el estudiante, que vienen de la lectura que hace de su

interacción con la realidad y de lo aprendido en años escolares anteriores.

El estudio y desarrollo de la didáctica tanto en física como en matemáticas, ha formado un campo de conocimiento epistemológicamente consolidado, en el que su evolución y desarrollo ha sido influenciado por los representantes de los campos de conocimiento tanto en física como en matemáticas, lo cual permite pensar que la didáctica es de naturaleza científica. Sin embargo, es necesario que en este campo de conocimiento se enseñe de manera científica a los futuros profesores, con el fin de que la reconozcan como la disciplina que fundamenta su conocimiento.

La didáctica de la física y de las matemáticas es cercana, esto se debe en parte al desarrollo de los dos campos de conocimiento, los cuales, desde la revisión histórica realizada, muestran que tienen una relación recíproca. Esta relación se ve reflejada en el MUA y el concepto de FC, las cuales se retroalimentan la una a la otra. Por este motivo, cuando se piensa en la enseñanza hay una coexistencia. No obstante, en la enseñanza existe una brecha entre estos desarrollos debido a que se toman las matemáticas como una herramienta para describir los fenómenos físico, más no como un conocimiento transversal de la física. De igual manera, en la enseñanza de las matemáticas, los procesos de modelación de física son escasos, ya que se prefiere enseñar las matemáticas de forma mecánica.

Cabe resaltar, que aunque existan relaciones entre las dos didácticas, cada una tiene sus objetos de estudio, que dependen de la disciplina, la epistemología y la historia propia de cada ciencia.

Para la enseñanza tanto del MUA como de la FC, el medio más común utilizado por los profesores, es la resolución de problemas, que ha sido objeto de estudio por varios investigadores, quienes se han cuestionado por el fracaso que genera la resolución por parte de los estudiantes. El problema surge desde el propio planteamiento del problema, en donde por las características de los enunciados llevan a que los estudiantes se limiten a buscar fórmulas y algoritmos. Se sugiere tratarlos bajo la teoría ABP, que permite hacer entendible a los estudiantes su carácter analítico y problematizador; además entender las relaciones entre la física y las matemáticas.

El aporte de la historia en la enseñanza de los dos objetos es significativo, ya que permite dar a conocer de dónde y el por qué nacen los términos, raciocinios, y expresiones dadas a los diferentes fenómenos, esto es, entender cómo se han dado sus desarrollos teóricos y matemáticos, que dan lugar a reconocer el carácter dinámico de las disciplinas, en las que el conocimiento no tiene verdades absolutas.

En la enseñanza de los objetos en cuestión, se deben construir los conocimientos, acercándose a la manera como se construye el conocimiento científico. Significa, construir las bases y desarrollos académicos, esto es problematizar los hechos y las teorías que no permiten explicar

completamente los hechos y las ideas de los estudiantes basadas muchas veces en el sentido común. Después de problematizar los conocimientos, se deben generar hipótesis, con las que los estudiantes den cuenta y validen los resultados obtenidos.

Algunos factores como el tiempo de las clases; los requerimientos en cumplir la planeación; y la oposición del profesor en cambiar sus prácticas, no permiten seguir adelante con el constructivismo, de esta manera, prevalece una enseñanza tradicional, la cual se lleva a cabo de forma pasiva y repetitiva, fomentando el mecanicismo y poco entendimiento de los dos objetos de estudio.

Sobre las herramientas en la enseñanza, se encontró que aunque los libros de texto han cambiado con el paso de los años y también han incursionado en el constructivismo, si se hace un análisis praxeológico, se observa que tareas como la resolución de problemas y las prácticas experimentales, así como la estructura del libro, continúan manejando el método tradicional y mecánico de la física y las matemáticas.

Elaborado por:	Piñeros Castañeda Bibiana
Revisado por:	Roa Acosta Robinson

Fecha de elaboración del Resumen:	30	11	2018
--	----	----	------

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

CAPÍTULO I: CONTEXTUALIZACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN 11

- 1.1 Planteamiento del problema de investigación 11
- 1.2 Justificación 13
- 1.3 Objetivos..... 16
 - 1.3.1 General..... 16
 - 1.3.2 Específicos..... 16

CAPITULO II: METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN 17

- 2.1 Perspectiva epistemológica..... 17
- 2.2 Investigación documental 18
- 2.3 Teoría fundamentada en los datos 20
- 2.4 Recolección y selección de documentos.....20
 - 2.4.1 Elaboración de matriz de categorías.....21
 - 2.4.2 Recolección y procesamiento de datos.....22

CAPÍTULO III: MOVIMIENTO UNIFORMEMENTE ACELERADO Y FUNCIÓN CUADRÁTICA: UNA APROXIMACIÓN A LA HISTORIA 25

- 3.1 Aproximación a la historia de la física sobre el movimiento 25
- 3.2 Aproximación a la historia de las matemáticas en el concepto de función 33

CAPÍTULO IV: DIDÁCTICA DE LA FÍSICA Y LAS MATEMÁTICAS 40

- 4.1 Una mirada a la didáctica 40
 - 4.1.1 Tensión entre la didáctica general y las didácticas específicas 47
 - 4.1.1.1 Didáctica de las disciplinas.....50
 - 4.1.1.2 Didáctica de la física: prácticas experimentales y resolución de problemas.....52
 - 4.1.1.2.1 Enseñanza de la física.....56
 - 4.1.1.3 Didáctica de las matemáticas: una aproximación a la escuela francesa.....60
 - 4.1.1.3.1 Fundamentos de la didáctica de las matemáticas.....64
 - 4.1.1.3.2 Problemas en la enseñanza de las matemáticas.....69

4.2	Didáctica y conocimiento del profesor	71
CAPÍTULO V: RELACIONES ENTRE ENSEÑANZA DEL MOVIMIENTO UNIFORME ACCELERADO Y LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA A LA LUZ DEL CONTEXTO DE LA FÍSICA Y LAS MATEMÁTICAS		78
5.1	Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.....	78
5.1.1	La enseñanza de función y función cuadrática.....	82
5.2	Enseñanza y aprendizaje de la física	92
5.2.1	Enseñanza del movimiento uniformemente acelerado	96
5.3	Relación matemática y física	107
5.4	Dos objetos de enseñanza e investigación: movimiento iniformemente acelerado y función cuadrática	114
CAPÍTULO VI: CONCLUSIONES Y PROYECCIONES.....		118
BIBLIOGRAFÍA.....		121
ANEXOS.....		129
	Anexo 1: Sistematización de datos sobre enseñanza de las matemáticas	129
	Anexo 2: Sistematización de datos sobre enseñanza del concepto de función y función cuadrática.....	132
	Anexo 3: Sistematización de datos sobre enseñanza de la física	143
	Anexo 4: Sistematización de datos sobre enseñanza del movimiento uniformemente acelerado	148
	Anexo 5: Sistematización de datos sobre relación matemática y física.....	158

Lista de abreviaturas

- MUA:** Movimiento uniformemente acelerado
- FC:** Función cuadrática
- TF:** Teoría fundamentada
- CDC:** Conocimiento didáctico del contenido
- TAD:** Teoría antropológica de los didáctico
- OM:** Objeto matemático
- OD:** Objeto didáctico
- ABP:** Aprendizaje basado en proyectos
- ABE:** Aprendizaje basado en experimentos
- TIC:** Tecnologías de la información y la comunicación
- EA:** Enseñanza y aprendizaje
- AA:** Actividades de aprendizaje

Lista de figuras

- Figura 3.1:** Variación de la velocidad respecto al tiempo. (Tomada de Berrone, 2001). 29
- Figura 3.2:** Área del cuadrado $A+B$ (Tomada de Vivanco, 1971). 34
- Figura 4.1:** Intersección entre las didácticas especiales (Construcción propia a partir de los planteamientos de Godino, 2001). 47

Lista de tablas

- Tabla 2.1:** Procedimientos de las operaciones analíticas, para analizar las fuentes documentales (Tabla elaborada a partir de la lectura de Van Dalen y Meyer, 1991, citados por Hurtado, 2010). 19

Tabla 2.2: Operaciones sintéticas, para analizar las fuentes documentales (Tabla elaborada a partir de la lectura de Van Dalen y Meyer, 1991, citados por Hurtado, 2010).	19
Tabla 2.3: Clasificación de los documentos por objetos de estudio.	20
Tabla 2.4: Conceptualización de las categorías.	21
Tabla 4.1: Dimensiones y componentes del conocimiento profesional (Tomada de Porlán, Rivero & Del Pozo, 1997).	72
Tabla 5.1: Tabla de categorías y preguntas, de los indicadores que determinan la relación entre el concepto de función y el contexto sociocultural. (Tomada de Amaya, <i>et al.</i> 2016).	81
Tabla 5.2: Tabla elaborada a partir de los periodos establecidos por (Ugalde, 2014).	83
Tabla 5.3: Tabla elaborada a partir de las actividades propuestas para la enseñanza de la función cuadrática por (Ugalde, 2014) .	84
Tabla 5.4: Tabla elaborada a partir de los pasos del ABP seguidos por (Díaz, <i>et al.</i> , 2017).	95

INTRODUCCIÓN

La presente tesis tiene como principal tema de estudio la relación que existe entre la didáctica de la física y la didáctica de las matemáticas en dos objetos de enseñanza: el movimiento uniformemente acelerado (MUA) y la función cuadrática (FC). Para encontrar las relaciones se elaboró una revisión teórica acerca de la didáctica general y las didácticas específicas, en donde la didáctica de la física y de las matemáticas era un punto importante para la consecución de los objetivos planteados, se halló que la didáctica ha tenido una evolución teórica. Se reconoce a la didáctica como una disciplina que hace parte del conocimiento que debe poseer el profesor para hacer sus prácticas de enseñanza.

Sobre la enseñanza de los objetos en cuestión hay mucho que decir, se puede abordar el problema de la enseñanza de la física y las matemáticas desde el punto de vista de lo didáctico de las dos disciplinas, en donde sus relaciones como objetos de estudio van más allá de un mera instrumentalización, de esta manera, la enseñanza de la función cuadrática y el movimiento uniformemente acelerado, tienen relaciones más complejas como lo muestran las mismas disciplinas *per se*.

Se tiene como referente epistemológico la investigación cualitativa, basada bajo dos metodologías que son próximas, una es la teoría fundamentada en los datos, la otra es investigación documental. Se seleccionaron y analizaron treinta y cuatro documentos entre artículos de revista y tesis de maestría, teniendo en cuenta los objetos de estudio –tanto en la física y las matemáticas como en la didáctica-, y su relación con los profesores y estudiante.

Las categorías fueron objetivos, metodología y aportes; algunos de estos a nivel escolar y otros a nivel universitario. Para el caso de la física, la mayoría de las investigaciones analizadas estaban encaminadas hacia niveles escolares, mientras que para las matemáticas fueron más de corte universitario.

Se encontró, que las didácticas del MUA y FC, tienen varios puntos de encuentro, se asume que estas relaciones se dan desde los desarrollos históricos de las dos disciplinas, además de que los desarrollos teóricos de la didáctica de las matemáticas se puede aplicar a la didáctica de la física, por ejemplo en el caso de la transposición didáctica de Chevallard que fue pensada para las matemáticas, es utilizada en la enseñanza de saberes físicos. Sin embargo, no se puede

desconocer que cada saber se aleja debido a que cada uno tiene su propio fundamento teórico y práctico. La didáctica de los dos objetos en cuestión, coinciden en la implementación del constructivismo, en donde la resolución de problemas se debe aplicar bajo la corriente de aprendizaje basado en problemas y para la física las prácticas experimentales como aprendizaje basado en proyectos.

Esta tesis se estructura en seis capítulos, el primero, trata de la contextualización de la investigación, en donde se pone de manifiesto el problema, los objetivos y la justificación; en el segundo, se expone la metodología, que consistió en investigación documental y teoría fundamentada en los datos y se expone la forma como se elaboró la recolección de documentos y de datos. En el tercer capítulo, se hizo una aproximación a la historia de los objetos en cuestión MUA y FC. En el cuarto capítulo, se presenta la revisión teórica de la didáctica, se reconocen las tensiones entre la didáctica general y las específicas, para esta última se profundiza en la didáctica de la física y de las matemáticas, se hace una reflexión sobre la didáctica y el conocimiento del profesor. En el quinto capítulo, se desarrolla la revisión y análisis de los documentos, para lo que se tiene en cuenta los objetivos, metodología, conclusiones y algunos desarrollos teóricos relevantes, se hacen análisis parciales de acuerdo a la clasificación previa que se hizo y un análisis total en donde se resaltan las convergencias y divergencias en la didáctica de los dos objetos en cuestión. El sexto capítulo, muestra las conclusiones y proyecciones de la tesis.

CAPÍTULO I: CONTEXTUALIZACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo se hace la presentación el planteamiento del problema; la pregunta problema; la justificación; los objetivos general y específicos, donde se destaca la reflexión frente a la enseñanza del movimiento uniformemente acelerado (MUA) y el concepto de función cuadrática (FC), reconociendo la importancia del actuar del profesor y el conocimiento que posee, no solo de la disciplina a enseñar sino a la didáctica de los dos objetos de estudio; así como las posibles relaciones que se pueden dar entre los dos conocimientos y por consiguiente entre las didácticas para dichos conocimientos.

1.1 Planteamiento del problema de investigación

La didáctica ha tenido diferentes desarrollos teóricos a través del tiempo, se ha pensado como método, como disciplina, como ciencia. Además, se han planteado diferentes tipos de didácticas: general y específicas. Para la segunda, se pueden encontrar por ejemplo, didáctica de la biología, didáctica de la historia, didáctica de la música, etc., (Roa, 2016). Es de particular interés para esta tesis, la didáctica de la física y la didáctica de las matemáticas. Más aun para objetos de enseñanza, que vienen de objetos de saber (nociónes físicas y matemáticas) (Chevallard, 2005), para este caso el movimiento uniformemente acelerado y la función cuadrática.

La didáctica de la física y las matemáticas, se han constituido como disciplinas objetos de investigación y de enseñanza, ya que contribuye a mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje debido a que este hace parte indisoluble del conocimiento del profesor de las áreas antes mencionadas, sin embargo, la didáctica suele ser desconocida como disciplina de conocimiento, debido a que su propio campo no está delimitado, por un lado debido a las tensiones que existen entre la didáctica y otras disciplinas como la sociología, la psicología y hasta las disciplina a enseñar que también se han preguntado sobre los problemas de enseñanza y aprendizaje, por lo cual las intersecciones y límites entre estas no son lo suficientemente claros. Por otro lado, que otros profesionales diferentes al profesor han tratado los temas de la didáctica, como plantea Roa (2016):

... ninguna de las ciencias en la que se ha querido incluir a la didáctica y la pedagogía compagina con sus objetos de investigación, aunque a veces destaquen que el objeto de la didáctica y/o pedagogía es la enseñanza y/o el aprendizaje, por lo que los miembros, no obstante de denominarlos pedagogos o didactas, en verdad son sociólogos, economistas, políticos, etc., que tienen interés por la educación pero no por la esencia de las dos disciplinas en cuestión. (p.113)

Se problematiza la didáctica, frente a las dificultades que presenta la enseñanza y el aprendizaje del MUA y la FC, ya que aunque la mecánica clásica, es parte fundamental en la enseñanza de la física, siendo una de las primeras aproximaciones a la física en la educación básica secundaria; también la influencia en distintas carreras universitarias que contienen física en los contenidos programáticos, continúa siendo un saber difícil de entender y más aún cuando se pone en términos de las matemáticas. De la misma manera, la función cuadrática es relevante porque permite abrir el camino para otros objetos matemáticos y por sus múltiples aplicaciones en la modelización de fenómenos cotidianos, así como el uso en carreras universitarias, también representa dificultad para los estudiantes entender los diferentes tipos de representación.

Además, de la dificultad que se evidencia en el uso de las matemáticas para el aprendizaje de la física y la escasa aplicación de la física en la enseñanza de las matemáticas. La complejidad de la enseñanza de la física con respecto a la utilización de las matemáticas, es que se piensa en las matemáticas como una herramienta para resolver ejercicios a lápiz y papel, en donde, en palabras de Gil Pérez, Martínez & Senent (1988) "... el alumno se ve abocado a buscar aquellas ecuaciones que pongan en relación los datos e incógnitas proporcionados por el enunciado, cayendo así en un puro operativismo." (p.134)

Por el contrario, lo que ocurre es que cuando se está enseñando en física, de manera recíproca se desarrollan los pensamientos propios de las matemáticas (pensamiento espacial, pensamiento numérico, pensamiento métrico, pensamiento aleatorio y pensamiento variacional), que permiten hacer las representaciones de los fenómenos naturales.

A su vez en la enseñanza de las matemáticas, se pueden abordar los temas con problemas de aplicación de los fenómenos naturales propios de la física, por ejemplo para explicar en básica secundaria el concepto de función y en la media el concepto de derivada, ello se puede realizar

por medio de la modelación de fenómenos físicos como el movimiento uniformemente acelerado o movimiento armónico simple.

Desde lo antes mencionado, se refiere la pregunta problema ¿Cuál es la relación de la didáctica de la física y la didáctica de las matemáticas en la enseñanza del movimiento uniformemente acelerado y la función cuadrática?

1.2 Justificación

Para la física, el uso de las matemáticas en su enseñanza, presenta controversias, debido a la complejidad que para los estudiantes significa entender y representar los fenómenos naturales, por medio de una explicación lógico-matemática. Para las matemáticas, a pesar de las diferentes aplicaciones que existen en la cotidianidad, se suele pensar como un saber abstracto, en este caso, el estudiante entiende el objeto de enseñanza de forma distinta a la interpretación del profesor (Chevallard, 2005).

En tal sentido, hay que tener en cuenta que el estudiante está enfrentado a diferentes problemas. Por un lado, entender el fenómeno físico, y por otro lado, entender el concepto matemático, para así entonces extrapolar estas dos disciplinas de conocimiento científico y formalizar el aprendizaje de las mismas.

Para que el estudiante logre dichos aprendizajes, es necesario que el profesor sea quien propicie el espacio de elaboración de nuevos conocimientos tomando herramientas propias de su formación profesional y de sus propias prácticas de enseñanza. Entonces, acerca de su formación profesional, se puede reflexionar sobre qué tipo de conocimiento debe poseer y qué papel tiene frente a la disciplina a enseñar.

Las preguntas anteriores suscitan a pensar en lo trabajado en la línea de investigación Conocimiento Profesional del Profesor de Ciencias CPPC y durante mi formación como maestrante, la importancia de identificar la existencia de un campo propio de la profesión docente, que conforma un conocimiento el cual admite reflexionar, estar en constante cambio,

replantear la práctica docente y como consecuencia permite ser un agente activo en la construcción de conocimientos, con el fin de optimizar el proceso de enseñanza de la física y porqué no de la matemática. Para Porlán, Rivero & Martín (1997) el conocimiento profesional del profesor está vinculado con tres perspectivas teóricas que son: perspectiva constructivista, que indica que el profesor y los estudiantes poseen concepciones y que son herramientas para interpretar la realidad y manejarse en ellas; perspectiva sistemática y compleja, las concepciones de la realidad pueden modificarse y se consideran como sistemas de ideas en evolución, así, las concepciones de los estudiantes y de los profesores, son complejas y están en constante evolución; la perspectiva crítica, está relacionada con la relación entre el interés y el conocimiento, los estudiantes y el profesor atienden a procesos de construcción de significados, los cuales favorecen el liderazgo, la autonomía y el espíritu crítico.

En tal sentido, cabe aclarar que lo que se enseña no es la disciplina propia, en este caso la matemática y/o la física, sino que es un conocimiento transformado, como lo dice Chevallard (2005) hay una transposición del conocimiento, ahora bien, el profesor es el encargado de producir conocimiento, ya que integra otras fuentes de información, que vienen de su contexto, formación e investigación (Martínez, 2009).

Finalmente, al pensar en el docente como profesional, experto e idóneo para celebrar actos de enseñanza, se involucra a la didáctica como el conocimiento disciplinar propio y exclusivo del profesor, como lo menciona Roa (2016) "... la didáctica de las Ciencias Naturales, ya propuesta por algunos autores como disciplina de conocimiento, y concebirla como fundante del conocimiento del profesor de ciencias a la vez que este como fundante de la disciplina."(p.206)

De esta manera, al tener el profesor un conocimiento idóneo, que analiza su práctica docente y la manera cómo por medio de dicha práctica logra hacer entendible un conocimiento, el cual permite que el estudiante llegue a la formalización de esas estructuras de conocimiento. Es importante hacer una aproximación a la palabra didáctica, la cual es fundamental para la profesión docente y sus prácticas de enseñanza.

El presente trabajo se justifica desde el marco del campo específico de la didáctica en la

enseñanza de dos saberes disciplinares, los cuales en la revisión teórica se encontraron evidencias de un estudio sobre la didáctica del movimiento uniformemente acelerado y de la función cuadrática de manera conjunta.

Con respecto a los trabajos encontrados en física, mencionan las matemáticas y su importante aporte para permitir la explicación y formalización de los fenómenos naturales y en consecuencia la importancia de esta en el proceso de enseñanza, para Cravino & Bernardino (2003) “... en la mayor parte de las clases de resolución de ejercicios, se convierte en un «puro operativismo», o sea, en la memorización y aplicación con mayor o menor éxito de algoritmos previamente expuestos por los profesores.”(p.477). La compleja relación, de la física con la matemática, en la formulación propia de la disciplina científica y la importancia de los procesos de enseñanza y aprendizaje, fue analizada por Bachelard (2000), quien menciona que “... el pensamiento matemático constituye la base de la explicación física y que las condiciones del pensamiento abstracto son ya inseparables de las condiciones de la experiencia científica.” (p.273)

Así mismo, Gil, Martínez & Senent (1988) dice que “...la didáctica habitual de resolución de problemas suele impulsar a un operativismo abstracto, carente de significado, que poco puede contribuir a un aprendizaje significativo.” (p.133)

Para encontrar las posibles divergencias y convergencias que puedan existir entre estos campos de conocimiento y las relaciones entre las didácticas, se evidencia la importancia de revisar y analizar documentos en los que se encuentren desarrollos teóricos sobre la enseñanza del movimiento uniformemente acelerado y la enseñanza de la función cuadrática.

Por esta razón, en esta investigación se desarrolla una revisión teórica sobre la didáctica de la física y de las matemáticas, con el fin de tener una visión más clara de las implicaciones de esta en la enseñanza de conocimientos particulares y encontrar la relación que existe entre estas dos disciplinas del conocimiento y su importancia en la enseñanza del MUA y la FC.

1.3 Objetivos

1.3.1 General

Analizar a partir de documentos la relación entre didáctica de la física y las matemáticas en la enseñanza del movimiento uniformemente acelerado y la función cuadrática.

1.3.2 Específicos

Seleccionar y examinar documentos sobre las matemáticas, la física y su didáctica para la enseñanza del movimiento uniformemente acelerado y la función cuadrática.

Hacer una aproximación a la historia y epistemología del concepto de función cuadrática y movimiento uniformemente acelerado.

Identificar los puntos de convergencia y/o divergencia entre la didáctica de la física y las matemáticas para enseñar el movimiento uniformemente acelerado y la función cuadrática.

CAPITULO II: METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

El propósito de este capítulo es presentar la metodología de la investigación, desarrollada para el proceso de recolección de datos y su posterior análisis. Se inicia haciendo una presentación de la perspectiva epistemológica, para posteriormente, realizar una descripción de los fundamentos teóricos sobre teoría fundamentada, investigación documental y la técnica de recolección de datos. Por último, se abordan aspectos relacionados con la sistematización y el procesamiento de datos.

2.1 Perspectiva epistemológica

Esta investigación es de índole cualitativa, pues por ella se entiende que se producen hallazgos a los que no se llegan por medio de procedimientos estadísticos u otros medios de cuantificación. La investigación cualitativa, en términos de metodologías, perspectivas y estrategias es un vocablo comprensivo que se refiere a diferentes enfoques y orientaciones, por lo que entonces son diversas las concepciones acerca de la realidad, cómo conocerla y cuánto de ella puede ser conocida. (Mason, 1996, citado por Vasilashis de Gialdino, 2006).

En esta perspectiva, la recolección de datos y su análisis se dan de forma análoga, siendo el investigador el principal agente para su recolección a través de diferentes técnicas. A partir de la interacción entre los datos recolectados y el análisis constante, el investigador puede interpretar y modificar teorías ya planteadas o formular relaciones entre diferentes acontecimientos sociales. (Sampieri, Fernández, & Baptista, 2010).

Se entiende que la investigación cualitativa permite una adecuación entre métodos y teorías, genera una reflexividad en la investigación. Así también, no es dogmática, se encuentra sujeta a las circunstancias, por lo tanto, el diseño y la recolección de datos, pueden tener modificaciones. Como lo menciona Vasilashis de Gialdino (2006):

...exige estricta formación en esta metodología, rigor, sistematicidad, entrenamiento, creatividad y, especialmente, flexibilidad para, entre otros: a) volver una y otra vez al campo para afinar, ajustar la pregunta de investigación; b) reconsiderar el diseño; c)

recolectar nuevos datos; d) implementar nuevas estrategias de recolección y análisis; y e) revisar y, si fuera necesario, modificar las interpretaciones. (p. 37)

Vasilashis de Gialdino (2006) establece las siguientes características para la investigación cualitativa:

a) las características que se refieren a quién y qué se estudia: la investigación cualitativa se interesa, en especial, por la forma en la que el mundo es comprendido, experimentado, producido; por el contexto y por los procesos; por la perspectiva de los participantes, por sus sentidos, por sus significados, por su experiencia, por su conocimiento, por sus relatos.

b) las características que aluden a las particularidades del método: la investigación cualitativa es interpretativa, inductiva, multimetódica y reflexiva. Emplea métodos de análisis y de explicación, flexibles y sensibles al contexto social en el que los datos son producidos [...].

c) las características que se vinculan con la meta, con la finalidad de la investigación: la investigación cualitativa busca descubrir lo nuevo y desarrollar teorías fundamentadas empíricamente, y es su relación con la teoría, con su creación, con su ampliación, con su modificación y con su superación lo que la hace relevante. Intenta comprender, hacer al caso individual significativo en el contexto de la teoría, provee nuevas perspectivas sobre lo que se conoce, describe, explica, elucida, construye y descubre. (p. 29)

2.2 Investigación documental

En la investigación documental, se recolectan datos a partir de diferentes documentos como investigaciones, libros, artículos, entre otros, se organiza los datos, para elaborar un análisis de lo que otros pares han realizado en relación a un campo específico de conocimiento, llegar a conclusiones y si es posible explicar y encontrar una nueva teoría. Roa (2016) señala que la investigación documental:

...requiere de una vigilancia constante acerca de los conceptos que se presentan y cómo se presentan en contextos y textos particulares junto con la fundamentación respecto a la argumentación y aclaración de la relación del investigador en tanto los tipos de publicación y tipos de documentos con los que va a interactuar. (p.56)

Para Uribe (2011):

“...es en esencia el estudio metódico, sistemático y ordenado con objetivos bien definidos, de datos, documentos escritos, fuentes de información impresas, contenidos y referencias bibliográficas, los cuales una vez recopilados, contextualizados, clasificados, categorizados y analizados, sirven de base para la comprensión del problema, la definición o redefinición de nuevos hechos o situaciones problemáticas, la elaboración de hipótesis o la orientación a nuevas fuentes de investigación en la construcción de conocimiento.” (p.196)

Por su parte, Hurtado (2010) sugiere atender en lo procedimental, entre otras cosas:

- Revisar y validar las fuentes: existen diferentes formas de validar los documentos, se clasifican en operaciones analíticas y operaciones sintéticas.
- Extracción de los datos: el investigador extrae información necesaria y relevante, por medio de instrumentos de recolección de datos, para esta investigación se va a utilizar la matriz análisis.

Es importante que los documentos encontrados sean validados, para esto se utilizan como lo llamó Hurtado (2010) operaciones analíticas y sintéticas. Las operaciones analíticas se dividen en dos procedimientos, como se ve en la tabla 2.1.

Tabla 2.1: Procedimientos de las operaciones analíticas, para analizar las fuentes documentales (Tabla elaborada a partir de la lectura de Van Dalen y Meyer, 1991, citados por Hurtado, 2010).

	Crítica externa		Crítica interna
Crítica de reconstrucción	Reconstruir el material, en caso de que esté deteriorado o fragmentado.	El significado de la información	Si es teórico, identificar el modelo epistemológico y el referente teórico desde el cual se expresa el autor.
Crítica de procedencia	Determinar la fecha, lugar de procedencia.	La sinceridad del autor	Precisar el sentido de lo que el autor quiere expresar.
Clasificación	Determinar si la fuente es primaria	La idoneidad del	Determinar la rigurosidad de los

crítica	o secundaria.	procedimiento	procedimientos utilizados por el autor.
----------------	---------------	----------------------	---

Tabla 2.2: Operaciones sintéticas, para analizar las fuentes documentales (Tabla elaborada a partir de la lectura de Van Dalen y Meyer, 1991, citados por Hurtado, 2010).

Agrupar los hechos en categorías	Detectar lagunas o inconsistencias	Lograr una imagen global de los hechos
Recojer la información, de cada aspecto estudiado y vincular diferentes fuentes.	Revisar los vacíos, contradicciones y manejarlos.	El investigador debe lograr una imagen global del fenómeno estudiado.

2.3 Teoría fundamentada en los datos

Según Soneira (2006) la teoría fundamentada supone la convergencia de dos tradiciones intelectuales y académicas diferentes de la sociología norteamericana: una es la de Barney G. Glaser, proveniente del Departamento de sociología de la Universidad de Columbia, que recoge la influencia de la metodóloga cuantitativa de Paul Lazarsfeld y la propuesta de teorías de alcance medio de Robert K. Merton. La otra es la tradición de Anselm Strauss, del departamento de sociología de la Universidad de Chicago, bajo el liderazgo intelectual de Robert Park, quien a su vez reconoce la influencia de Georg Simmel y del interaccionismo simbólico de Herbert Blumer. Sin embargo, ambas tradiciones coinciden en que la teoría fundamentada en los datos es una metodología general para desarrollar teoría a partir de información sistemáticamente recogida y analizada. La Teoría fundamentada, se basa en dos grandes estrategias: el método de la comparación constante, y el muestreo teórico. A través del método de la comparación constante, el investigador recoge, codifica y analiza datos en forma simultánea, para generar teoría. El muestreo teórico se realiza para descubrir categorías y sus propiedades, y para sugerir las interrelaciones dentro de una teoría (Soneira, 2006). Este método tiene como fin generar una teoría explicativa de la realidad y del desarrollo de fenómenos sociales, para este caso, la enseñanza de la cuadrática y el movimiento uniformemente acelerado, en función de la didáctica de la física y la matemática.

2.4 Recolección y selección de documentos

Para dicha recolección se tuvo en cuenta autores que investigaron sobre didáctica de la física,

didáctica de las matemáticas en artículos e investigaciones que aportaron substancialmente a la construcción del marco teórico y análisis de los objetos en cuestión. La búsqueda y selección de documentos se hizo por medio de fuentes de información, como bases de datos, motores de búsqueda y páginas web prioritariamente tales como: <http://www.eric.ed.gov/>, google académico (utilizando palabras de búsqueda como didáctica, enseñanza/matemáticas enseñanza/física). Los criterios de selección, se hicieron a partir de aspectos como el título, el año, el tipo de investigación y los objetivos. Finalmente, se tuvieron en cuenta investigaciones que se ajustaran a las necesidades de esta tesis, para ello se seleccionaron de acuerdo a su relación con la historia de las dos disciplinas; al manejo en términos de la didáctica; a los modelos de enseñanza que utilizaron en el caso de las implementaciones de estrategias de aula.

El lugar de la literatura: Cumple una función determinante el cual comienza con la recolección de datos, este da un fenómeno central y sus relaciones, a partir de ahí se debe identificar la literatura relevante, la cual no es fácil determinarla. La literatura es un procedimiento que se integra a los procesos de recolección de datos, codificación y redacción (Soneira, 2006).

Después de la selección de los 34 documentos, se hizo una clasificación según los objetos de estudio, logrando hacer una caracterización de cinco tipos, como lo muestra la tabla 2.3.

Tabla 2.3: Clasificación de los documentos por objetos de estudio.

Clasificación de los documentos	Cantidad
Enseñanza y aprendizaje de la física	5
Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas	4
Enseñanza de la función y función cuadrática	10
Enseñanza del movimiento uniformemente acelerado	9
Relación entre la física y las matemáticas	6

2.4.1 Elaboración de matriz de categorías

La delimitación de la teoría: teniendo en cuenta a Soneira (2006):

Los elementos básicos de una teoría son las categorías, las propiedades de las categorías y las hipótesis. La forma propuesta por la TF para ir articulando los componentes de una teoría dentro del método de la comparación constante, es proceder, en un primer paso, a maximizar las similitudes y minimizar las diferencias para, en un paso posterior realizar el proceso inverso, enfatizar las diferencias entre los casos analizados (p.157).

Se tuvieron como categorías las que se presentan en la tabla 2.4.

Tabla 2.4: Conceptualización de las categorías.

Categoría	Conceptualización
Objetivos	Son el fin de la investigación en relación a lo que se desea indagar, para su planteamiento es necesario tener claridad sobre el problema de la investigación, lo que se quiere responder y a lo que se quiere llegar. En cuanto a su redacción, se debe iniciar con un verbo en infinitivo, y su desarrollo no debe confundirse con actividades.
Metodología	Es el tipo de investigación, responde a la manera cómo se va a hacer la investigación o la estrategia planteada para dar respuesta al problema y ejecución de los objetivos. Tiene en cuenta, los objetos y/o sujetos de estudio; la forma de recolección de datos; y su posterior análisis.
Aportes	Hacen referencia a conceptos, desarrollos, y teorías que son relevantes para encontrar las relaciones entre la didáctica de la física y las matemáticas en la enseñanza de los dos objetos de estudio.

Para la teoría fundamentada, la teoría puede ser: sustantiva cuando se refiere a una misma clase de grupos o casos. Formal cuando se refiere a grupos o casos no comparables a nivel sustantivo, pero comparables a un nivel conceptual más amplio (Soneira, 2006).

Citando a Strauss & Corbin (1994), Soneira (2006), destaca que “A diferencia de otras metodologías cualitativas que ponen su énfasis en la descripción, la TF pone énfasis en la generación de teoría. Es decir, privilegia la “densidad conceptual” antes de la “descripción densa”.” (p.171)

2.4.2 Recolección y procesamiento de datos

La codificación: Después de obtener un conjunto de datos a través de los procedimientos antes mencionados, la primera acción que se debe desarrollar radica en comparar los datos obtenidos, con el fin de encontrar en un conjunto de datos, los puntos de convergencia que existan entre

ideas (Soneira, 2006). Esto significa como lo propone Soneira (2006) “Codificar supone leer y releer nuestros datos para descubrir relaciones, y en tal sentido codificar es ya comenzar a interpretar.” (p.156)

El paradigma de codificación: Soneira (2006), teniendo en cuenta a (Strauss & Corbin, 2002) señala que:

Lo que llamamos paradigma es un esquema organizativo de este tipo. En realidad, el paradigma no es más que, una perspectiva sobre los datos, otra posición analítica que ayuda a recolectarlos y a ordenarlos de manera sistemática, de tal modo que la estructura y el proceso se integren. (p.160)

El instrumento de recolección de datos utilizado en esta investigación es una matriz de análisis, siguiendo los pasos descritos por Hurtado (2010) definir el evento a analizar; definir el criterio de análisis; identificar las sinergias que conforman el criterio de análisis; definir categorías; precisar los criterios de pertenencia a las categorías; organizar las categorías; revisar y solicitar asesoría de expertos para revisión de aspectos formales.

Continuando con lo expresado por Soneira (2006):

El conjunto de técnicas y procedimientos de la teoría fundamentada a partir de los distintos tipos de codificación (abierto, selectivo, axial) y la aplicación de los métodos de la comparación constante y el muestreo teórico se conjugan en un esquema o armazón representativo de esta tradición de investigación. (p.160)

Los procedimientos de recogida, codificación, análisis, clasificación e interpretación de los datos se realizan a lo largo de todo el proceso de investigación, y se operativizan mediante la redacción de memos. La redacción de memos y su clasificación a partir de algún criterio (una línea narrativa) permiten elaborar un esquema de redacción. Este esquema y la elaboración de gráficos adelantan la redacción del informe final, y debería permitir al investigador poder presentar los resultados de su investigación a través de la publicación de artículos o libros. (p.162)

Para su formulación, se realizó un trabajo donde a partir del desarrollo del marco teórico y la confrontación entre las fundamentaciones epistemológicas, pedagógicas y curriculares, se infirieron los principales indicadores que corresponderían a una didáctica de las matemáticas y la

física desde la enseñanza de dos objetos (Movimiento uniformemente acelerado y función cuadrática). De acuerdo a la clasificación de la tabla 2.3. Se elaboró la recolección de datos por medio de tablas en las que se evocó a la revisión de los documentos, de los cuales se extrajeron los autores, de forma textual en comillas y con el número de página objetivos, metodología, hallazgos relevantes y otros, ver anexo 1, 2, 3, 4, 5. Posteriormente se realizó el análisis como se puede observar en el capítulo IV.

CAPÍTULO III: MOVIMIENTO UNIFORMEMENTE ACELERADO Y FUNCIÓN CUADRÁTICA: UNA APROXIMACIÓN A LA HISTORIA

En este capítulo, se presenta una aproximación de la historia sobre las ideas del movimiento en términos de la mecánica clásica, haciendo hincapié en el pensamiento Aristotélico; los avances de Galileo, en la matematización de la física, el método científico y las diferencias entre estos dos pensadores. Por otro lado, se sigue, con el concepto de función desde las matemáticas, cabe resaltar que sobre el concepto de función, la historia es bastante extensa, sin embargo para esta investigación se toman algunos autores recorriendo brevemente la edad antigua, media y moderna. Para las dos revisiones se termina haciendo una pequeña alusión a los pensamientos de Newton, en sus postulados de la dinámica, debido al aporte que hizo al concepto de función y además que esta investigación, se relacionan los temas en cuestión pensando en la enseñanza para la educación media.

3.1 Aproximación a la historia de la física sobre el movimiento

El hombre desde sus inicios ha estado en búsqueda de la verdad. Como lo menciona Scheider (2005) "... es con los Presocráticos cuando se produce ese pasaje, ese instante preciso en que el mito se transforma en logos y nace la ciencia." (p.3). De esta manera, el ser humano al querer conocer y describir el mundo, con el fin de mejorar la calidad de vida y prolongarla, muchas han sido las ideas y planteamientos sobre las explicaciones de los fenómenos naturales.

En el campo de la física uno de los temas más trabajados es el de movimiento, el cual se ha abordado desde una perspectiva científica y filosófica. Al respecto, se han desarrollado diferentes teorías, siendo los filósofos griegos quienes con mayor interés abordaron a profundidad del análisis sobre el movimiento.

Basados en ideas sencillas, los filósofos han desarrollado reflexiones que dejan comprender lo que significa el movimiento, por ejemplo, Heráclito de Éfeso (535-475 A.C.) utiliza la siguiente idea "No es posible bañarse dos veces en el mismo río, pues entre tanto ha cambiado el agua y el que se baña" Fischl (1984, p.28), con lo que busca expresar que todo se encuentra en constante cambio junto con el tiempo puesto que todo fluye, siendo este el principal aporte de Heráclito a

la filosofía, debido a ese cambio permanente se puede mencionar que el cambio es una realidad, por consiguiente, el ser (la esencia de las cosas) puede ser y a la vez no ser; entonces el camino a la verdad no es único, existen varios, de esta manera se puede extrapolar la idea y decir que al movimiento se le puede dar el nombre de verdad universal. Al respecto, Fischl (1984) afirma “Todo lo permanente es apariencia que surge, de que transitoriamente, se equilibran fuerzas contrarias.” (p.20)

Entre tanto, Parménides (540-470 A.C.) expresa la idea “el ser, es; y el no-ser, no es”, siendo el ser el *ente* y el no ser *nada*. Así, objetando a Heráclito, el movimiento no existe por lo que tendría que haber vacío y el espacio vacío es nada, por lo tanto no existe (Fischl, 1984). De esta manera se tiene que el ser es finito y que el no-ser no puede llegar al ser, como lo menciona Láscaris (sin fecha):

El único nombre adecuado a todas las cosas será el de ente, mientras que "nacer", "perecer", "estar y no ser", "cambiar de lugar", "mudar de color" son nombres inadecuados, o bien, son adecuados a las apariencias en cuanto apariencias, pero no al ente en cuanto ente. (p.4)

Así da cuenta de que el movimiento es una apariencia de los sentidos por que el ser es perfecto, continuo e inmovible. Por su parte, Zenón (490-430 A.C.) declaró que:

“... no hay movimiento, pues para que algo pudiera moverse de A a B tendría que recorrer antes la mitad de esa distancia, y luego la mitad de la que queda, y así indefinidamente, pero recorrer una infinitud de partes en un tiempo infinito es imposible.”
De Echandía (1995, p. 81)

Para Zenón, el movimiento es en apariencia, debido a que el tiempo es infinito solo por adición; mientras que la longitud es infinita por adición y división. En otras palabras, el movimiento es una ilusión y no una realidad, debido a que las percepciones que se tienen del mundo son también ilusiones, Zenón, explica su concepción del infinito y la no existencia del movimiento, por medio de la paradoja de Aquiles y la tortuga, como lo menciona Hernández (2006) “¿cómo puede el veloz Aquiles alcanzar a la tortuga si antes de alcanzarla debe pasar la mitad del recorrido, después por la mitad de esa mitad, a continuación por la mitad de esa nueva mitad, y

así hasta el infinito?” (p.36). Para Bell (2016) del planteamiento de Zenón afirma “... hay un número infinito de puntos en cualquier línea dada y no puede tocarse un número infinito de puntos, uno por uno en un tiempo finito. Por consiguiente, no se llega nunca al final de este lado de la eternidad...” (p. 79). De esta manera al ser la distancia infinita y el tiempo no, el movimiento es una ilusión.

Con lo mencionado anteriormente, Zenón se encarga de probar la tesis sobre el movimiento elaboradas por Parménides, mostrando así que estos dos filósofos comparten concepciones sobre el movimiento, puede ser debido a que Parménides y Zenón, pertenecieron a la escuela Eleática, siendo Parménides maestro de Zenón, según Láscaris (sin fecha) “... durante esta fiesta llegaron Parménides y Zenón a Atenas, siendo el maestro Parménides y el discípulo Zenón, ambos eleáticos, y no sólo éste, y también siguieron la enseñanza pitagórica, según cuenta Nicómaco” (p.9). Para ambos el movimiento no existe, este es una apariencia de los sentidos; a continuación se presentan las ideas de Aristóteles, quien refuta las teorías de estos dos pensadores.

En contradicción a Zenón, Aristóteles (384-322 A.C.) “padre de la lógica”, afirmó, que el continuo puede ser divisible, así “...tanto dicha distancia como el tiempo en recorrerla son igualmente finitos e infinitos. Son finitos si se los considera según una unidad de medida; son infinitos por ser infinitamente divisibles (no sólo la distancia sino también el tiempo).” De Echandía (1995, p.207). De esta manera, existe una relación entre movimiento y tiempo y una obligatoria dependencia entre estos; si no existe movimiento, no existe el tiempo.

Aristóteles, en su análisis del movimiento en relación acerca del ser y sobre los planteamientos de Parménides dice:

... "El Ser se dice de muchas maneras"; por ejemplo, ser-en-potencia, del que surge el ser-en-acto. Así soluciona las paradojas de Parménides. La *Física* trata del *lugar*, "primer término inmóvil del cuerpo circundante", término del movimiento local; del *tiempo*, que es la medida del movimiento, según lo anterior y lo posterior; del movimiento surge el tiempo, pues sin movimiento no habría tiempo; de las *substancias*, cuyos *principios* son la *materia* y la *forma*, cuya unión da por resultado el *compuesto substancial*, de los *elementos*, de la *generación* y la *corrupción*." De Echandía (1995, p. 6)

Del párrafo anterior, se pueden evidenciar dos desarrollos para hablar del movimiento según Aristóteles:

- **El primero**, Aristóteles explica que el movimiento existe, al ser la distancia y el tiempo continuos divisibles tanto finitos como infinitos. Esto es, la distancia y el tiempo son finitos, en sus extremos, mientras que son infinitos en división, sin embargo, sólo puede haber movimiento con respecto a una distancia finita en un tiempo finito así como también movimiento respecto a una distancia infinita en un tiempo infinito. De esta manera llega a la distinción entre lo potencial y lo actual: desde la perspectiva Aristotélica, las cosas son o un *''esto''* o una cantidad o cualidad, ello debido a que algunas sólo son en acto, otras en potencia que reside en la materia y en acto que reside en la forma, así, se pueden recorrer un número infinito de distancias, pero sólo en potencia más no en acto.

Las cosas que son relativas a algo, según su capacidad de mover o de ser movidas, dependen de lo que puede mover y lo que puede ser movido. Hay que entender, que el movimiento es la actualidad de la potencia, puesto, que distinguimos en cada género lo actual y lo potencial. Una cosa puede estar en potencia o en acto, pero no las dos a la misma vez. Pues hay cosas, que al entrar en potencia, se modifican entre sí, lo cual modifica el acto. “El movimiento es la actualidad de lo potencial, cuando al estar actualizándose opera no en cuanto a lo que es en sí mismo, sino en tanto que es movable.” De Echandía (1995, p. 81).

Al referente, De Echandía (1995), afirma:

Para Aristóteles, el movimiento es un cambio de la potencia al acto, un cambio que emerge de las *dynámeis* de una sustancia compuesta de materia y forma, lo cual supone siempre una dualidad: lo que mueve y lo que es movido. En efecto, es un teorema fundamental de la física aristotélica que «todo lo que está en movimiento es movido por algo» (256a14), donde «por algo» significa «por otro» o «por sí mismo en tanto que otro». (p.45)

- **El segundo desarrollo** de Aristóteles, trata de las propiedades de los cuerpos para analizar el movimiento y el uso de las matemáticas las cuales son de carácter mental, por eso no

contribuían a explicar el mundo, en torno a esto Ruiz (2003) menciona que las matemáticas “Básicamente, refieren a conceptos abstractos derivados de propiedades de los objetos del mundo físico.” (p.63), los números y las formas geométricas son característicos de los objetos reales como lo son la dureza, la anchura, la rojez.

Para Aristóteles, existen dos tipos de movimiento: el movimiento natural, por ejemplo el humo cuyo movimiento natural va dirigido hacia arriba o del río en su cauce; y el movimiento violento que es el que se da por acción de una fuerza (las cuales no eran concebidas a distancia, toda fuerza era por contacto), como la flecha o la piedra que son lanzadas. “Aristóteles enseñaba que los cuerpos livianos, humos y vapores, fuego y llama, encontraban en el empíreo su lugar natural, mientras que los *graves* buscaban *naturalmente* la tierra.” Bachelard (2000, p.67)

Razón por la cual, explicó el movimiento de los cuerpos basado en la dinámica (causas del movimiento), por ejemplo, sobre la caída libre de los cuerpos, dijo que el cuerpo cae dado que tiende a seguir su movimiento natural, además la caída dependía del peso, esto es, a mayor peso menor tiempo de caída, en otras palabras, un cuerpo pesado cae más rápido que un cuerpo liviano.

En la edad moderna, Galileo Galilei (1564-1642) en el siglo XVI un pensador importante, quién sin ser filósofo influyó en un nuevo campo de la filosofía llamado la nueva ciencia de la naturaleza, entre sus logros más relevantes se encuentra, la contraposición al modelo geocéntrico expresado por la corriente aristotélica, aquí es importante mencionar, que para Aristóteles el universo era inmutable y acotado, donde el centro era la tierra y los astros y estrellas eran finitas, siendo la luna una estrella liza y brillante y el sol incorruptible. Galileo, por medio del telescopio que él fabricó, encontró diferentes hallazgos que debilitaban la teoría geocéntrica, como, las cuatro lunas de Júpiter; el gran número de estrellas observadas; las características de la luna; y las manchas del sol, las cuales le permitieron demostrar el movimiento terrestre y fortalecer la teoría heliocéntrica desarrollada inicialmente por Copérnico (Fischl, 1984). De esta manera, la tierra permanecía en movimiento y para explicar por qué no era notorio, hizo una analogía con el movimiento de un barco que en su interior llevaba una pecera y pájaros, su observación era que si el barco se mueve en línea recta y velocidad constante, el movimiento no es percibido por los

objetos y observadores que se encuentran en el interior del barco; de la misma manera que ocurre con el movimiento de la tierra, que no es percibido, por quienes la habitan.

Galileo también refutó los planteamientos de Aristóteles, sobre el movimiento de los cuerpos, como lo menciona Fernández & Rondero (2004), citando a *los Discordi* Galileo "... termina estableciéndose, contra la doctrina aristotélica, que todos los cuerpos caen del mismo modo (salvo diferencias menores) e independientemente de sus pesos..." (p.5), analizó, el movimiento de forma matemática y experimental, sin tener en cuenta las causas (fuerzas). "Galileo no parte de la observación, sino de la formulación de hipótesis sobre la cinemática de los cuerpos en movimiento a partir de la mirada previa suministrada por la matematización del mundo." Gallego & Gallego (2006, p. 50). Continuando con sus planteamientos sobre el movimiento, sobre la caída libre, hizo una aproximación por medio de un plano en el cual podía variar la inclinación y así controlar la fuerza ejercida sobre el cuerpo que caía, de este experimento comprobó que, el peso no influye en la caída de los cuerpos, logrando refutar la teoría de Aristóteles, al respecto Fischl (1984) menciona que:

No hay, según él, "cualidades secundarias" (color, tono, olfato, gusto); son sólo ficciones de los sentidos. Detrás de la física no hay tampoco una metafísica; no hay tampoco, consiguientemente, fines humanos o divinos... Sólo la explicación puramente mecánica del mundo está justificada." (p.238)

Además advirtió que a medida que el cuerpo caía este ganaba velocidad, pero si por el contrario subía perdía velocidad. Explica los fenómenos naturales por medio de la materia y el movimiento, mostrando una imagen mecanicista de los fenómenos (Fischl, 1984)

Así pues, sobre el movimiento de caída libre y uniformemente acelerado, Galileo en el Libro II de los *Discorsi* dice que es "Aquel que partiendo del reposo adquiere, en tiempos iguales, iguales incrementos de rapidez". Para lo cual elaboró una demostración matemática por medio de la geometría abstracta figura 3. 1.

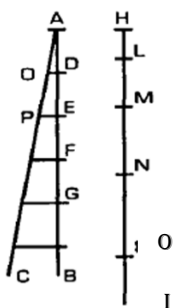


Figura 3.2: Variación de la velocidad respecto al tiempo.
(Tomada de Berrone, 2001)

En la figura 3.1 se observa, la recta vertical AB que representa el tiempo transcurrido; los segmentos horizontales como OD y PE representan las velocidades para cada tiempo transcurrido. Se puede observar entonces que para el tiempo inicial A la velocidad inicial es cero; mientras que para el tiempo AD la velocidad es OD y para AE la velocidad es PE (Fernández & Rondero, 2004).

De esta manera, por medio de los triángulos rectángulos se obtiene una relación de proporción entre las magnitudes velocidad y tiempo así:

$$\frac{PE}{OD} = \frac{AE}{AD}$$

Donde $PE = v_2$; $OD = v_1$; $AE = t_2$; $AD = t_1$, Reescribiendo en términos de v y t se obtiene:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{t_2}{t_1}$$

En cuanto a la recta vertical HI, representa el espacio recorrido en cada intervalo de tiempo, de allí se observa, que por ejemplo para el tiempo OD se recorrió un espacio HL, mientras que para el tiempo AE el espacio recorrido fue HM, donde los valores de los espacios son números impares que parten de 1. Para este caso existe una proporción entre espacio recorrido x y tiempo t que se puede expresar de la siguiente manera (Berrone, 2001):

$$\frac{x((n+1)t) - x(nt)}{x(nt) - x((n-1)t)}$$

En términos actuales lo podemos reescribir como:

$$\frac{x(t_1)}{x(t_2)} = \frac{t_1^2}{t_2^2}$$

Galileo, al utilizar la experimentación como método y complementar las descripciones e hipótesis con procedimientos matemáticos, controlando variables e idealizando los fenómenos, no solo refutó las ideas de Aristóteles, sino que revolucionó el pensamiento científico y cambió la manera de hacer ciencia, siendo uno de los creadores del método científico (De la Peña, 2006):

... Galileo afirma que el libro de la naturaleza está escrito en lenguaje matemático y que se requiere del dominio de este saber para leerlo, puntualiza en que todo proceso de conocimiento parte de lo que ya se sabe y no de una mente vacía Gallego & Gallego (2006, p. 49).

En ese uso de las matemáticas como método, otra diferencia que tiene con el trabajo de Aristóteles, son las magnitudes utilizadas para hacer la descripción del movimiento, Ruiz (1995) afirma que:

Mientras que para los aristotélicos, por ejemplo, términos como fluidez, rigidez, esencias eran los usuales, a partir de Galileo fueron adoptados los conceptos de distancia, tiempo, velocidad, aceleración, fuerza, masa, peso y otros. Estos últimos tenían la característica de poder ser medidos, cuantificados. (p.246)

Retomando las ideas de Galileo, sobre el movimiento de los cuerpos y la aplicación del método científico, Newton hizo un gran aporte, al estudiar las causas de dichos movimientos. Encontró, que para un cuerpo en movimiento, si la fuerza (peso) que actúa sobre el cuerpo es la misma, causaba, un cambio en la velocidad del cuerpo, en cambio, si no existía una fuerza que actuara sobre el cuerpo este seguía en movimiento constante y en línea recta. Para Newton, no existía un reposo absoluto, esto dependía del observador, por ejemplo, en el movimiento de un carro, para

el observador que se encuentra fuera, él no se mueve, pero sí lo hace el carro, junto con los que estén dentro de dicho carro; mientras que para los que están dentro del carro quien se mueve es el que se encuentra fuera del carro. Respecto al tiempo y el espacio tanto Aristóteles como Newton creían en un tiempo y espacio absolutos e invariantes. Sobre el trabajo de Newton, Torretti (2005) expresa que:

Newton señaló su tarea así: «Partiendo de los fenómenos del movimiento, investigar la fuerzas de la naturaleza, y luego, partiendo de esas fuerza, demostrar los demás fenómenos». Se trata por cierto, de investigar las fuerzas existentes, que causan cambios efectivos en el movimiento real –y no sólo aparente– de los cuerpos. Éste consiste, según Newton, en su desplazamiento en el espacio «absoluto, verdadero y matemático» en el curso del tiempo «absoluto, verdadero y matemático». (p.75)

Otros autores, como Neumann, James Thomson y Lange, basados en las leyes de movimiento postuladas por Newton, hablaron de sistemas de referencia inerciales y tiempos inerciales, aportando al análisis ideal, para explicar y entender lo real, sobre el movimiento.

Es importante resaltar, que en el desarrollo de la física no existe un solo método para elaborar los conocimientos científicos, existen físicos teóricos, experimentales, se puede partir de hipótesis o de supuestos matemáticos que pueden ser o no comprobados de forma experimental, también se puede partir de la observación más que de la experiencia. Como lo hace notar De la Peña (2006):

Sería un error creer que el método de los físicos es una aplicación más o menos mecánica y automática del procedimiento experimental tipificado por el viejo proceder galileano, pese a que con frecuencia se le presenta así en los libros de texto. Los físicos emplean normalmente guías muy diversas para construir sus teorías. (p.53)

3.2 Aproximación a la historia de las matemáticas en el concepto de función

El avance de las matemáticas ha venido de la mano con el desarrollo del ser humano, con el fin de contribuir en la explicación de la naturaleza y solucionar problemas cotidianos. Debido al gran número de investigación sobre los temas propios de las matemáticas y su enseñanza, ha logrado posicionarse como una ciencia. Para Bautista (2006):

La matemática nació como abstracción de la realidad. Con su desarrollo adquirió su propia vida y no siempre es fácil ver la conexión entre algunas de sus ramas y el mundo de los hechos. A pesar de esto hay aparentemente algo profundo en la matemática que la hace muy efectiva en algunas proporciones del mundo real por ejemplo en la física.” (p.22)

En ese desarrollo del pensamiento del ser humano y las matemáticas, se encuentran diferentes ramas de las matemáticas como la geometría; la geometría analítica; la aritmética; el álgebra y el cálculo. A la vez tratan conceptos en común, pero con diferentes enfoques y que evolucionan junto con la historia, como es el caso del concepto de función. Retomando a Kleiner (1989) en el análisis que hizo, sobre el desarrollo del concepto de función hecho por (Gardinier, 1982), señala que:

La evolución del concepto de función se puede ver como un tire y afloje entre dos elementos, dos imágenes mentales: el geométrico (expresado en forma de una curva) y el algebraico (expresado como fórmula-primero finito y luego permitiendo infinitamente muchos términos, la llamada "expresión analítica"). (Ver [7, p.256].) Posteriormente, un tercer elemento entra, es decir, la definición "lógica" de función como correspondencia (con una imagen mental de una máquina de entrada-salida). (p. 282)

Diferentes autores como: Kleiner (1989), Ruiz (1994), Ruiz (2003), Sastre, Rey & Bougée (2008), Vargas (2011), Díaz (2013), Bell (2016), han estudiado la historia del concepto de función y coinciden en hacer un análisis por épocas. Para dicho desarrollo, las más mencionadas son: la antigüedad, la edad media y la edad moderna.

La Antigüedad: Según Díaz (2013) los que más contribuyeron en esta época fueron, los babilonios (2000 a.C.-600 a.C.) y los Griegos. Sobre las matemáticas Babilónicas, se han encontrado pruebas consignadas sobre piedras de barro gravadas, que dan cuenta, del uso que le dieron a las matemáticas, en especial a sus intereses por la astronomía, aunque no se puede dejar de lado, que también pensaron, en las matemáticas para la economía, el comercio y la ingeniería, aproximándose al álgebra por medio de la aritmética, por ejemplo: para hacer divisiones tabularon valores así: $\frac{1}{n}$ donde n eran enteros en base 60, que fue el sistema numérico más utilizado, así mismo elaboraron tabulaciones para otras operaciones como la multiplicación; los cuadrados; las raíces cuadradas y las cúbicas. De la misma manera tabularon para resolver

ecuaciones de segundo orden y tercer orden, sin pensar en una comprobación (Bell, 2016). Con la elaboración rigurosa de las tabulaciones para resolver problemas de aritmética y ecuaciones, se observa que los babilonios por un lado eran metódicos para tratar los problemas matemáticos y por otro lado que aportaron de forma significativa en el avance en las matemáticas.

Para Bell (2016) los primeros matemáticos griegos del siglo VI a.C. -- V a.C. tienen influencia de los Babilonios. Los griegos calcularon: longitudes; volúmenes; áreas, pero no lograron considerar el concepto de función, aunque sí el de ecuación. Respecto a la geometría, se puede resaltar que fue aplicada en el análisis de las superficies y perímetros a los cultivos, así mismo para describir y analizar los movimientos, entre otros (Ruiz, 1994).

Entre los principales autores de la época griega en la construcción del concepto de función, se encuentra Euclides (450-380 a.C.), quien perteneció a la escuela de Platón. Fue el encargado de organizar el desarrollo de la geometría elemental griega, reconocido por los trece libros llamados los elementos de Euclides, en los que escribió teoremas sobre: geometría plana; teoría de números y geometría de sólidos. Los avances en las matemáticas de Euclides parten en gran parte de la evolución del número, esto es la existencia de los números reales y también los irracionales, al discretizar los números, estos no pueden dar cuenta de las magnitudes que son continuas. Así, con la geometría de Euclides y la diferencia entre números y magnitudes se abre el camino para pensar en las proporciones. Al respecto Ruiz (1994) indica:

Esta filosofía “estática” fue la razón por la que, a lo largo del tiempo, los matemáticos pensaron y hablaron en términos de incógnitas e indeterminadas más que en términos de variables. Esto condujo a las proporciones y ecuaciones y no a las funciones. (p.151).

Sobre el cuadrado, Euclides realiza un razonamiento netamente geométrico, referido a la superficie. Vale la pena decir que, Vivanco (1971) hizo una consideración sobre la cuarta proposición del libro 2, que habla del cuadrado, el autor, basó su análisis en la pregunta: Dados dos segmentos A y B ¿Cuál es el área del cuadrado que tiene por lado el segmento A+B, en la suma de los dos lados?

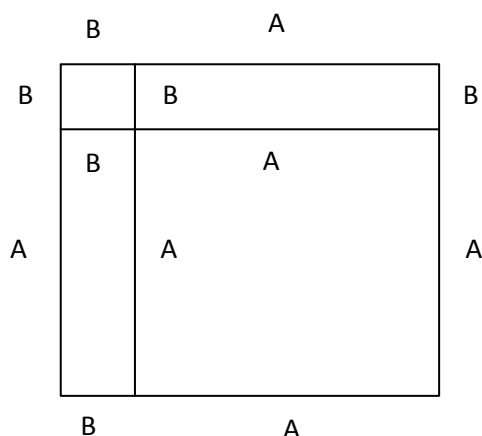


Figura 3.2: Área del cuadrado $A+B$ (Tomada de Vivanco, 1971)

De la figura 3.2 se puede observar que el cuadrado que tiene por lado $A+B$, al dividirlo en las partes correspondientes A y B , queda a la vez dividido en cuatro partes: una es un cuadrado de lado A ; otra es un cuadrado de lado B ; las otras dos son rectángulos iguales, con lados A y B , entonces, el área del cuadrado de lado $A+B$, está determinada por la suma del cuadrado de lado A , más el cuadrado de lado B , más los dos rectángulos de lado A y B (Vivanco, 1971).

Por su parte, Apolonio (262-190 a.C.), se destaca por las secciones cónicas elaboradas a partir de un cono circular, con su trabajo de los 8 libros con 456 proposiciones, da paso a la geometría analítica, que le da solución a nuevos planteamientos matemáticos tales como la duplicación del cubo; y la cuadratura del círculo, sobre el trabajo hecho por Apolonio en el desarrollo del concepto de función, Vargas (2011) reflexiona que:

Dedujo una propiedad de las cónicas que da una condición necesaria y suficiente para que un punto este situado sobre una curva, dicha propiedad es expresada en términos de proporcionalidad de segmentos y puede asociarse con la ecuación de la curva referida a un vértice, en la actualidad.” (p.4)

Como podemos ver, para este primer periodo desde los babilonios se tiene la primera aproximación al concepto de función, aunque no de forma explícita, ya que el nombre función apareció en la época moderna, sí de forma implícita, desde el tratamiento de situaciones de orden cuadrático y el manejo algebraico que le daban a dichas situaciones. Por parte de los griegos, se

continúa el manejo en términos de ecuación, ligado a la geometría con matemáticos como Euclides y Diofanto (fecha incierta, 250 d.C), cabe resaltar que de la vida de Diofanto no se conoce mucho y se presume que fue un matemático griego, trató la ecuación cuadrática pensando en el manejo de incógnitas. Según Bell (2016) “Diofanto dio soluciones esencialmente algebraicas de las ecuaciones especiales de primer grado con dos y tres incógnitas, como $x + y = 100, x - y = 40$. Más importante aún, había empezado a usar símbolos operando con ellos” (p.87). Esta época de pensar en la ecuación termina con las ideas de Apolonio sobre las cónicas, en las que representa el cuadrado (área) como una parábola.

La Edad Media: Siglo XII hasta inicios del siglo XV. Para este periodo, se incluye el pensamiento de la nueva ciencia de la naturaleza, debido a los estudios relacionados sobre la luz; calor; densidad y el movimiento para este caso notaron que las cantidades podían ser dependientes de otras advirtiendo así la relación de la física con las matemáticas, con pensadores como: De Oresme (1323-1382), consideró que las cantidades que variaban eran continuas y las representó gráficamente en un plano como un segmento rectilíneo, unas líneas las dispuso de forma horizontal y las denominó longitudes y otras las dispuso de forma vertical, las cuales denominó latitudes. Para el caso del movimiento, relacionó la velocidad como variación del tiempo y para la representación gráfica, la velocidad la situó en las latitudes y el tiempo en las longitudes (Sastre *et al*, 2008), siendo este un primer acercamiento al plano coordenado que conocemos hoy en día.

Edad Moderna: En el que se distingue a partir de finales siglo XV hasta el siglo XVIII, para la edad antigua y media la geometría se posicionó sobre el álgebra; pero a partir del periodo moderno, se cambió esta visión y tornándose, la geometría supeditada al álgebra.

Sobre las matemáticas, Galileo Galilei (1564-1642), retomó las ideas de De Oresme, haciendo una concreción que fue la introducción de la parte numérica a las representaciones gráficas. De esta manera, para el estudio del movimiento, utilizó variables físicas, estableciendo relaciones entre las magnitudes, números reales y representaciones gráficas, logró acercarse más al concepto de función (Fischl, 1984). Por ejemplo, la correspondencia entre el tiempo y un número real, esto es a cada número real le corresponde sólo un instante de tiempo, de manera que todos

los elementos estaban relacionados unívocamente, condición necesaria para que una variable sea función de otra.

Por su parte, Descartes (1596-1650), al igual que Galileo pensó que para describir la realidad del mundo se debían usar las matemáticas como método, formando así una visión mecanicista del mundo, por medio del método, concluyen tres principios como plantea Ruiz (2003):

...en primer lugar, la aceptación como cierto solamente de aquello que aparezca en la mente como cierto y verdadero; en segundo lugar, que este proceso ofrezca ideas básicas, claras y distintas y, en tercer lugar, finalmente, que a partir de estas ideas y a través de la deducción lógica es posible obtener el conocimiento verdadero. (p.240)

Pensando en la lógica del conocimiento verdadero, Descartes, desarrolló la geometría analítica, por medio del análisis: cuerpo = espacio, cuerpo real = cuerpo matemático, según Fischl (1984) “Todo punto del espacio puede determinarse exactamente por su distancia de las “líneas fundamentales” (sistema de coordenadas). Ahora bien, como los puntos del espacio son a la vez punto corpóreos, toda la natureleza puede calcularse matemáticamente.” (p.259)

Descartes, a las curvas clásicas tales como círculo, elipse y parábola les condicionó una expresión algebraica, en otras palabras, a la expresión x^2 , le condicionó un número por medio de la potencia y no un espacio geométrico y la representó gráficamente por medio de coordenadas oblicuas como la parábola. El espacio era multidireccional, a lo cual lo denominó dimensión, así el espacio se puede representar por coordenadas como (x_1, x_2, x_3) esta dimensión es R^3 (Bautista, 2006). Para el caso de sucesos que ocurren en el tiempo, como el movimiento, se especifica el espacio como (x_1, x_2, x_3) y también se especifica el tiempo así (x_1, x_2, x_3, t) de esta manera, la dimensión es R^4 , en la actualidad se sabe que se puede trabajar en un espacio con R^n dimensiones. Para Sastre, Rey & Bogueé (2008) Descartes “Fue revolucionario al establecer que una curva se construye con solamente ofrecer una ecuación algebraica.” (p.145)

El concepto de función, fue trascendente para la formulación y descripción de los movimientos, desde el pensamiento geométrico de las curvas y áreas, hasta el pensamiento analítico elaborado por Descartes, donde reconoce por un lado dos cantidades variables y por otro considera una

relación de dependencia y Leibniz (1646-1716), quien utilizó por primera vez la palabra función y la definió como una cantidad que varía de un punto a otro a partir de cantidades indeterminadas y constantes, como es el caso de las tangentes de las curvas que también las representó en coordenadas (Ruiz, 2003). El aporte de Leibniz al cálculo fue substancial, quien lo trabajó desde una perspectiva geométrica y algebraica, estableció las leyes del cálculo diferencial o cálculo de tangentes y posteriormente estableció las leyes del cálculo integral esto es, suma infinita de infinitesimales.

Para la misma época, Newton (1642-1727) de forma independiente a Leibniz, hizo adelantos en cálculo haciendo énfasis en la razón de cambio respecto al tiempo, para explicar fenómenos físicos, como es el caso de la velocidad (Sastre, *et al*, 2008). Retomando el caso expuesto por Vivanco (1971) acerca del área del cuadrado $A+B$, para Newton el área del cuadrado es $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Aunque para ambos casos el resultado coincide, se observa el desarrollo en las nociones matemáticas, como la noción de número, la construcción de propiedades y la aparición del cálculo. Newton en su obra Principios matemáticos de la filosofía natural, elaborada sobre la base de la geometría euclidiana, instrumentalizó y matematizó el principio de la casusa y el efecto (Gallego & Gallego, 2006).

Cabe resaltar, que Leibniz y Newton, estaban influenciados por Barrow quién fue un matemático que había elaborado adelantos en el concepto geométrico de derivada e integral. Sin embargo este hecho fue de gran controversia para la época y Leibniz fue demandado por Newton y acusado por plagio (Ruiz, 2003).

CAPÍTULO IV: DIDÁCTICA DE LA FÍSICA Y LAS MATEMÁTICAS

En este capítulo, se revisan las teorías que se han dado alrededor de la discusión de la didáctica general, que ha sido pensada como disciplina de conocimiento; ciencia y método. Seguido, se hace la reflexión de las tensiones generadas entre la didáctica general y las didácticas específicas, debido a la delimitación de sus territorios disciplinares, finalmente se puntualiza de las didácticas específicas, la didáctica de las disciplinas, con el fin de hacer hincapié en la didáctica de la física, enfocado en la historia y los sistemas de enseñanza y en la didáctica de las matemáticas, desde el punto de vista histórico y en términos de los aportes de la escuela francesa.

4.1. Una mirada a la didáctica

Al hablar de la didáctica se pueden abordar algunas preguntas que conduzcan a reconocer su nivel de desarrollo de conocimiento, objetos de estudio, quiénes la abordan y su relación con otras disciplinas, en este sentido emergen las preguntas ¿Qué es la didáctica? ¿Cuál es el o los objeto (s) de la didáctica? ¿Quién o quiénes trabajan la didáctica? ¿Qué relación existe entre didáctica y enseñanza?

Se evidencia que algunos autores en sus escritos (Pacios, 1980; Bravo e Izquierdo, 2002; Zambrano, 2005; Gallego & Gallego, 2006; Roa, 2016) pueden divagar y pensar que el cambio de pensamiento sobre la enseñanza podría dar razón del contexto histórico y las luchas de poder entre las disciplinas. La enseñanza ha estado al orden de diferentes referentes disciplinares, permaneciendo la didáctica en una condición heterónoma.

Por ejemplo en el siglo XX, con las ciencias de la educación y la conformación de la psicología y la sociología como disciplinas de conocimiento, investigaron los fenómenos educativos llegando a establecer la elaboración de los currículos, planes de estudio y la forma de ser enseñados los conocimientos, apoyándose en la tendencia empiro-positivista, posicionando la psicología behaviorista, como la metodología ideal para acumular conocimientos de forma organizada, dependiendo de la complejidad de dicho conocimiento y la edad del estudiante (Gallego & Gallego, 2006). Este es apenas un ejemplo de las interpretaciones que se ha tenido acerca de la

enseñanza y del campo que debe tratar los temas relacionados con la enseñanza y por consiguiente la didáctica.

Para Roa (2016):

La didáctica ha tenido variadas transformaciones que han estado supeditadas a la interpretación hecha a partir de la “*Didáctica magna*”, o de reinterpretaciones que se encuentra en libros o artículos sobre la misma. Es decir, se ha utilizado la fuente primaria y las fuentes secundarias lo cual ha generado tanto en un caso como en el otro, cambios en cuanto a lo que el escrito tiene expresado explícitamente. De todas maneras, las interpretaciones o reinterpretaciones sobre la didáctica han tenido cursos que se han diversificado según el contexto –país, cultura- y momento histórico. (p.111)

Para Pacios (1980) conocer los orígenes de la didáctica no es fácil debido a que por su naturaleza no deja huellas visibles, sin embargo, dice que es una “...actividad instructiva del hombre comienza por la simple práctica y desemboca en una ciencia especulativa...” (p.21). Afirma que, “... La didáctica se ocupa del estudio del proceso instructivo en tanto que instrumento capaz de producir no sólo un aumento del saber del sujeto, sino, sobre todo y principalmente, en cuanto actividad educativa, perfeccionadora del conocimiento.” (p.139).

Por su parte, Zambrano (2005) relaciona que el estudio de la didáctica se debe hacer desde dos dimensiones: 1. Investigaciones en didáctica: El investigador a partir de los saberes, busca dar respuesta a interrogantes sobre el acto de aprender y de enseñar. 2. Investigaciones sobre la didáctica: El investigador trata dar respuesta a preguntas sobre la historia y epistemología de la didáctica. Pueden existir tres subdivisiones para las reflexiones en este campo: uno, es el campo de la comprensión de los objetos de enseñanza y aprendizaje; el segundo, reflexiona sobre la práctica en el aula de clase (praxeológica) y el tercero, se dirige hacia comprender y explicar las situaciones intelectuales de los estudiantes y sus aprendizajes.

Siguiendo con Zambrano (2005), los especialistas en didáctica, evidencian la necesidad de delimitar el campo de la didáctica y precisar su objeto, para lo cual reconocen la importancia de otras disciplinas en el desarrollo disciplinar, como la psicología, con el concepto de representación, que permite explicar la relación del sujeto con el saber; el psicoanálisis, con el

estudio de las relaciones entre aprendizajes y deseo o placer, esto es, el sujeto y su relación con el saber; la sociología, en relación a la enseñanza como proceso social y las relaciones entre el sujeto y el saber que están dadas por los antecedentes generacionales, es decir, esas relaciones son heredadas; la antropología; en la comprensión del saber como un juego que se transmite de un sujeto a otro, en el que las emociones juegan un papel importante y la epistemología, en el reconocimiento de la historia y los fundamentos del saber y la importancia de estos dos en la enseñanza. De esta manera se "... permite identificar una preocupación objetiva de la didáctica, pues no se limita para nada a la utilización de los recursos técnicos; se trata de interrogar el rol docente y su relación con la disciplina." Zambrano (2005, p.44).

De las investigaciones, reflexiones, análisis e interpretaciones que han hecho sobre la didáctica, evidenciados en múltiples publicaciones en libros y artículo, se han acumulado conceptos y teorías, los cuales han permitido que evolucione como disciplina de conocimiento, como ciencia; también, se ha pensado como método, para enseñar cierto conocimiento, siendo esta última, una visión simplista y común entre los docentes.

En cuanto a lo que respecta a **la didáctica como disciplina**, quienes la han pensado como disciplina es la tradición europea y latinoamericana, mientras que para los anglosajones, la didáctica es una aplicación de la psicología de la educación (Davini, 2008).

Cabe resaltar, que se entiende como un conocimiento que es específico, devenido de investigaciones rigurosas sobre problemas con objetos particulares. Además, existe una lucha en el campo, ya que varios investigadores trabajan sobre el mismo tema, aunque en corrientes o posiciones diferentes y esas investigaciones son sustentadas con una tradición escrita formando un capital simbólico (Hernández & López, 2002).

Como lo menciona Bravo e Izquierdo (2002) la didáctica...

...es más bien una disciplina con carácter propio, dotada de una perspectiva teórica autónoma, que está conectada con otras, pero que no se limita a constituir un conglomerado de saberes ni una aplicación de modelos teóricos externos a situaciones de aula particulares. (p.7)

Continuando con los planteamientos de didáctica como disciplina, para Feldman (1999):

...la didáctica es una disciplina volcada de diferentes maneras hacia el campo práctico de la enseñanza (o distintas dimensiones de él), que produce una gama variable de conocimientos y que abarca principios teóricos, modelos comprensivos, reglas prácticas, métodos y estrategias articuladas de distinta índole. (p.25)

Por su parte Zambrano (2005) asegura que, la didáctica tiene grandes desarrollos en la escuela francesa, siendo el resultado de la reflexión entre empíricos, profesores y formadores, quienes señalaban las insuficiencias del discurso didáctico respecto al aprendizaje. Así pues, la didáctica es una disciplina que adquiere una dimensión epistemológica, a través del desarrollo de la investigación en campos relacionados directamente con el acto de aprender, cuya fuente es la circulación y apropiación del saber y sus condiciones de enseñanza y aprendizaje, además es de tipo praxeológico, debido a que se fundamenta en la teoría y en la acción, por este motivo, explica problemas del hecho educativo y deriva soluciones, reuniendo elementos como la representación y los medios intelectuales que utiliza un sujeto para apropiarse del saber, así mismo, aporta el material conceptual y operativo para que se pueda transmitir su saber, interrogando el conocimiento y creando vínculos de proximidad con los saberes de los estudiantes.

Uno de los problemas es que aunque en una disciplina existen varios investigadores que trabajan sobre el tema, cada uno con su punto de vista y/o línea de investigación, en la didáctica el abanico de posibilidades y problemas de investigación es muy amplio, como lo indica Camilloni (2008b) debido a la variedad de temas en didáctica, el marco teórico está muy extendido, así no existe una definición de su propio campo ni se evidencia la frontera con las otras disciplinas. No obstante, lo que definitivamente marca la diferencia entre didáctica y las demás disciplinas que se han preocupado por la enseñanza es que además de que la didáctica se plantea soluciones frente a sus problemas, esta interviene en la enseñanza, quiere decir va a la práctica.

Como lo menciona Camilloni (2008a) “Nuestra disciplina es una *teoría de la enseñanza*, heredada y deudora de muchas otras disciplinas.”(p.27). En Camilloni (2008a) menciona que “El

campo de la didáctica es reconocido y demarcado por los didactas, pero es un campo difícilmente reconocido por otras disciplinas.” (p.22). Sin embargo, esas otras disciplinas también se apoyan de la didáctica, entonces surge una cuestión ¿Por qué la didáctica no es reconocida como una disciplina por parte de las disciplinas en las que la didáctica se apoya? Sin poder dar una respuesta contundente, se puede analizar que al ser la enseñanza el objeto de estudio de la didáctica se hace complejo trazar el límite con las disciplinas que también tratan la enseñanza, aunque estas tienen mucho que aportar, ven a la didáctica como un método de enseñanza.

En relación con **la didáctica como ciencia**, se puede mencionar que es autónoma, que se nutre de otras ciencias, que se dedica a la producción de conocimientos y que atienden a las necesidades de la sociedad (Hernández & López, 2002). Al decir que se nutre de otras ciencias, quiere decir, que allí reposan otras disciplinas, que han permitido llegar a una formalización y desarrollo, como lo son la filosofía, la psicología, el campo de conocimiento a enseñar, la pedagogía y la sociología.

Si bien se nutre de otras ciencias, toma posición frente a las disciplinas de conocimiento como por ejemplo la física, las matemáticas, las ciencias sociales, entre otras, donde los investigadores son precisamente los expertos en educación, esto es, no son físicos, matemáticos y/o sociólogos, sino que es un conocimiento que está dado por la disciplina que se enseña y la didáctica de esa disciplina; acorde con lo afirmado por Roa (2016):

...el paradigma de la didáctica y la pedagogía como ciencias todavía no ha superado el desconocimiento por parte de sus comunidades de investigadores externos a estas, por lo que se sigue pensando que el conocimiento que el profesor enseña es el mismo conocimiento de las disciplinas que toma la didáctica para hacerlo enseñable. (p.116)

Como va dirigida a la práctica, la didáctica tiene que ver con los temas propios de la escuela, en cuanto a su organización; como la elaboración del currículo, donde surge la pregunta de cómo se seleccionan los temas y los conceptos científicos que se deben enseñar; la forma de evaluación, esto es cómo el profesor puede identificar los desempeños de sus estudiantes frente al conocimiento y la manera como los transcribe a un número; la implementación de estrategias que

permitan a los estudiantes reforzar sobre las debilidades que hayan tenido, esto acorde con el Proyecto Educativo Institucional -PEI- de cada colegio, para el caso de Colombia; las metodologías, cómo se lleva a cabo la clase, la posible utilización de preguntas, analogías, ejemplos, aplicaciones, utilización de recursos, entre otros y construcciones de proyectos institucionales, elaborados y pensados en poner el conocimiento científico en el contexto de los estudiantes.

Esta organización y los objetivos que se plantean para la enseñanza, deben estar en armonía con el contexto de la escuela, frente al conocimiento, la ética, la formación integral; acorde con las necesidades del sujeto. De esta manera, la enseñanza es un proceso complejo, en el que juegan diferentes variables, que no sólo dependen del profesor sino de la sociedad, del entorno y de las políticas educativas que muchas veces son establecidas por poderes económicos.

Para Pacios (1980) la didáctica es una ciencia autónoma, que aún no está concluida, debido a que falta sintetizar el verdadero campo de acción frente a los temas relacionados con la enseñanza y el aprendizaje, en particular, en temas como la evaluación, la metodología, el currículo. Al no tener un terreno delimitado, es una ciencia especulativa, que investiga diferentes factores en la actividad instructiva como su naturaleza, condiciones y causas. Así, "... la didáctica habrá de ser la ciencia del proceso instructivo precisamente en cuanto es medio eficaz para lograr en el discente la educación intelectual como perfección, y no solo la instrucción como conjunto de saberes." (p.25). Reconoce que la didáctica se legitima y toma posición frente a las ciencias particulares, debido a que se encarga de los métodos que se deben emplear para la transmisión de los conocimientos científicos, así posee un objeto propio, que la justifica como ciencia autónoma:

...ni necesita invadir el dominio de las demás ciencias particulares ni puede ser sustituida por ninguna de ellas, ni por todas en su conjunto, reside en que distinguiéndose las ciencias entre sí, por su objeto formal, aun en el caso de que la Didáctica reivindique parcial o totalmente como su objeto material los contenidos de esas ciencias, considera una formalidad peculiar y exclusiva de este objeto material, que ninguna ciencia se puede atribuir legítimamente: el valor educativo de la actividad instructiva cualquiera que sea el contenido de esa instrucción y la realidad objetiva a que esos contenidos hagan referencia. (p. 85)

Acerca de **la didáctica como método**, Wolfgang Ratke, 1612 y 1618, propuso que la didáctica estudia la validez para las pautas que rigen los procesos de aprendizaje (Gallego & Gallego, 2006). Ratke, relaciona el *arte de enseñar* basado en la organización de la naturaleza: se debe enseñar de lo más simple a lo más fuerte; de lo más inferior a lo más elevado. Luego, el didacta es un intérprete de la naturaleza y es quien sigue el curso de esa naturaleza para enseñarla y la manera de enseñar es por medio de instrumentos (Sandino, 2006).

Por su parte Comenio (1998) en su obra la *Didáctica magna*, tuvo fundamentos basados en sus creencias religiosas en aseveraciones como: los conocimientos se alcanzan por el mismo hombre ya que todos somos creación de Dios; la existencia de una triple vida: La primera que es la vegetativa, que jamás se manifiesta fuera del cuerpo (útero materno); la segunda la vida animal dirigida a los objetos por las operaciones de los sentidos y movimientos (tierra); la tercera es la vida intelectual o espiritual, el ser alcanza su mayor desarrollo (cielo).

Se basó en el principio de la *pansofia*, que es una enseñanza incluyente; enseñarle todo a todos, sin distinción de edad, ni de sexo, ni clase social. Pensó en que era pertinente la existencia de escuelas en cada pueblo:

Y es de gran interés para toda la República Cristiana, no sólo conservar esta santa costumbre, sino aumentarla de tal manera que en toda reunión bien ordenada de hombres (bien sea ciudad, pueblo o lugar) se abra una escuela como educatorio común de la juventud. (p.20)

Para Comenio (1998), era necesario que la educación empezara a edades tempranas “... puesto que toda la vida depende de la primera edad y de su educación, se habrá perdido si todos los espíritus no fueren aquí preparados para todas las cosas de la vida.” (p.26), también resaltó la importancia de los padres como los primeros educadores, en la formación de los hijos, sin embargo, aseguró que no todos estaban en la disposición de enseñarles debido a cuestiones de tiempo o por falta de conocimientos.

Formalizó a la didáctica como un método universal para enseñar todo a todos, para lo cual creó el texto ilustrado en el que la enseñanza se limitó a seguir instrucciones, siendo los estudiantes el

centro de la escuela. Para Gallego & Gallego (2006) Comenio adhirió el empirismo promulgado por Bacon, sobre el método con las nociones de naturalidad, intuición y auto actividad y los momentos de la enseñanza, Pacios (1980) sostiene que:

Es de notar que la didáctica de Comenio tenía más de metodología y de técnica instructiva que de didáctica propiamente dicha, es decir, de ciencia específicamente dedicada al estudio especulativo del proceso instructivo, precisamente en cuanto a instrumento eficaz para el logro de la formación o educación intelectual. (p.24)

4.1.1 Tensión entre la didáctica general y las didácticas específicas

Considerando que la enseñanza es un proceso social, los actores involucrados en el proceso como el estudiante, el conocimiento a enseñar, y el profesor juegan un papel importante en el desarrollo de la construcción del conocimiento. Así, cuando se enseña algo específico o a alguien con ciertas características, no se puede tomar a la ligera, la forma de cómo enseñar, no todos aprenden de la misma forma, ni todo se puede enseñar igual. No obstante, en ese proceso social, existen generalidades que están inmersas en la escuela como el contexto; las políticas; la cultura y la organización, a causa de lo mencionado, se ha dado pie a que investigadores cuyo objeto es la enseñanza, formalicen y desarrollen los campos de conocimiento de las didácticas específicas y la didáctica general respectivamente, debido a que no se halla una delimitación marcada entre sus campos, entre estas disciplinas existen tensiones, autores como Pacios (1980), Godino (1991), Camilloni (2008b) y Roa (2016) han tomado postura frente al tema de las tensiones generadas en el interior de estas disciplinas.

Antes de continuar con la discusión planteada, cabe mencionar que sobre la especificidad de la didáctica, Pacios (1980) y Godino (1991) hicieron referencia a las didácticas especiales, mientras que Camilloni (2008b) y Roa (2016) las llaman didácticas específicas. Roa (2016), citando a Pacios y Camilloni, sobre estas nominaciones refiere que “Los adjetivos que usan Pacios (1980) y Camilloni (2008), especial o específico, para identificar las didácticas de la didáctica general, en sí no parecen reñir ya que tienen en común a expresar lo particular, único, propio, definido, determinado, individual.” (p.218), así, para esta investigación, los términos especial o específico, se toman como sinónimos.

Continuando con la base de la cuestión Pacios (1980) hace alusión a que las didácticas especiales y la didáctica general no son ciencias distintas, ambas pertenecen a la ciencia didáctica, ya que son poseedoras del mismo objeto, con la diferencia de que las didácticas especiales, atienden a los diferentes factores personales y materiales, que se presentan dentro del proceso instructivo, en cambio, la didáctica general atiende a las generalidades de dicho proceso.

Camilloni (2008b), hace hincapié en que más bien las didácticas se deben relacionar, para lograr el objetivo de la enseñanza:

Las didácticas general y específicas deben coordinarse, en consecuencia, en un esfuerzo teórico y práctico siempre difícil de lograr, porque se trata de una coordinación que encuentra, a la vez, buenos motivos y grandes obstáculos. Los buenos motivos atienden a preservar la unidad del proyecto pedagógico y del sujeto que aprende diferentes disciplinas en un mismo grado o año [...] Los obstáculos surgen de la heterogeneidad teórica de las didácticas, que son construidas por diferentes grupos académicos, con distinta formación y, en consecuencia, desde diversas perspectivas. (p.27)

Por su parte para Roa (2016) no se deben ponderar, ni a las otras ciencias ni entre ellas mismas, su postura es:

... en cuanto a lo de las didácticas y las ciencias que las “pretenden”, considero que no se deberían hacer tales nominaciones jerárquicas de inclusión de unas a otras –generales y específicas- , pensando en que las unas dependan de las teorías de otras para su acción en la práctica de la investigación y/o de la enseñanza, lo que en verdad considero relevante es poder establecer, identificar un territorio académico desde el cual se entienda son partícipes todas las didácticas... (p.224)

Por su parte, Godino (1991) afirma que debido a los intereses de los grupos que investigan sobre didáctica, se puede hacer la diferenciación entre la didáctica general y las didácticas especiales para lo que asegura que la didáctica general no contiene a las didácticas especiales. En cambio, entre las didácticas especiales existe algo en común (intersección) que se llama didáctica general.

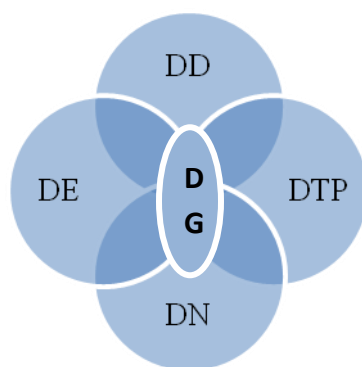


Figura 4.1: Intersección entre las didácticas especiales
(Construcción propia a partir de los planteamientos de Godino, 2001)

En la figura 4.1. Se muestra la relación entre didáctica general - didácticas especiales, y didácticas especiales - didácticas especiales. DG: didáctica general; DD: didáctica de la disciplina a enseñar; DTP: didáctica según el tipo de población; DN: didáctica por nivel; DE: didáctica por edad.

Como la relación que existe entre las didácticas es una intersección, se puede destacar que los hallazgos de las investigaciones en las didácticas especiales se pueden aplicar a otras didácticas especiales y a la didáctica general. De modo que, los problemas en la enseñanza de una disciplina particular, se identifican con los problemas que se revelan para la enseñanza de otras disciplinas. De la misma manera se tiene que, las didácticas especiales se solapan, para contribuir en la formalización de la didáctica general.

Para Camilloni (2008b) "... las didácticas específicas, desarrollan campos sistemáticos del conocimiento didáctico que se caracterizan por partir de una delimitación de regiones particulares del mundo de la enseñanza..." (p.23). La autora destaca ciertas categorías existentes para hablar de las didácticas específicas, según: Los niveles del sistema educativo (inicial, primaria, secundaria, superior y universitaria); las características de los sujetos (minorías culturales, inmigrantes, personas con necesidades especiales [sordos, superdotados, entre otros]); el tipo de institución (educación formal [escuelas rurales o urbanas] y no formal [instituciones recreativas o de capacitación]); las edades de los alumnos (primera infancia, adolescentes, jóvenes, adultos y adultos mayores); las disciplinas (matemáticas, ciencias naturales, arte, lengua, historia, entre otros). Por su parte, Pacios (1980), ya había realizado estas categorías para

referirse a las didácticas especiales, con unas diferencias: él no habló de las características de los sujetos; ni del tipo de institución, sino de capacidades y aptitudes mentales de los alumnos; de la privación de los sentidos de la visión y el oído; y los fines de la instrucción educativa (Profesional y general).

En conclusión, se configura a la didáctica general y a las didácticas específicas, como disciplinas que poseen objetos propios de estudio e investigación como: el comportamiento del profesor frente al conocimiento y su enseñanza; la organización de la escuela frente al contexto y las necesidades de la sociedad y la cultura; la transformación de un saber científico en un saber enseñando; la elaboración del currículo; el proceso de evaluación; el diseño de sistemas, medios y estrategias para la enseñanza Camilloni (2008b).

4.1.1.1 Didáctica de las disciplinas

De las didácticas específicas, las de las disciplinas de conocimiento son de mayor interés para esta investigación, debido a que son las encargadas de la enseñanza de saberes específicos, que propenden propiamente de los objetos de los saberes científicos, Roa (2016) sobre la didáctica de las disciplinas, argumentó que:

... La didáctica tiene pluralidad de opciones para ser pensada según la naturaleza del conocimiento que se aborde para investigar. Es decir, el capital simbólico que se produce tiene variadas características al igual que la manera cómo piensan quienes actúan sobre los objetos de enseñanza, sean estos profesionales y/o de investigadores. (p.209)

Algunas didácticas específicas de las disciplinas son: Didáctica de la biología; didáctica de la expresión musical; didáctica de la física; didáctica de las ciencias naturales y experimentales; didáctica de la química; didáctica de las matemáticas (Roa, 2016).

Camilloni (2008b) expone que por un lado, “Los conocimientos de la enseñanza provienen, de campos disciplinarios organizados que están demarcados de acuerdo con los objetos de conocimiento de que se ocupan, las metodologías de investigación [...] las estructuras de conocimientos que desarrollan.” (p.20). Por otro lado, hace referencia a que, los investigadores de las didácticas específicas de las disciplinas, son los expertos de los campos de conocimiento,

quienes poseen sus propios lenguajes, métodos, valores, y hábitos para explicar los fenómenos de la naturaleza y las adaptan a la didáctica generando tensiones entre las disciplinas mismas.

En este sentido, y continuando con esta última autora los objetos de la didáctica de las disciplinas son coincidentes en varios puntos, existen resistencias, incomprensiones y debates, situaciones que son características en los enfrentamientos entre comunidades académicas, en donde estas condiciones generan tensiones entre los campos de la didáctica. En la opinión de Roa (2016) “...no obstante, como si no fuera suficiente con la presión que ejercen otras ciencias o disciplinas sobre las didácticas, estas experimentan sus propias tensiones...” (p.221). Para la didáctica de las ciencias naturales, en la que se encuentran inmersas la didáctica de la química; la didáctica de la biología y la didáctica de la física, aunque existen puntos de encuentro, cada una se caracteriza en cuanto a los objetos particulares de enseñanza, debido entre otras cosas, a la especificidad del conocimiento.

Al referente Pacios (1980) ya señalaba la trascendencia de las didácticas específicas de las disciplinas para la enseñanza de los conocimientos científicos:

... si queremos llegar al conocimiento científico de la realidad como ella es, debemos estudiar esos distintos procesos instructivos no solo en lo que tienen de común, que eso ya lo hace la didáctica general, sino lo que tienen de peculiar y propio. Y esto es lo que justifica la existencia de las distintas didácticas especiales. (p.139).

Sobre lo peculiar y propio del conocimiento científico en las ciencias naturales, por ejemplo, en las asignaturas de química y física, se enseña el concepto de peso, para la primera su enseñanza está centrada en el peso como medida de cantidad de materia con el fin de determinar la estequiometría de las reacciones químicas y demostrar así la ley de conservación de la materia, mientras que para la segunda, su enseñanza va dirigida hacia el análisis de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo, donde el peso es la fuerza ejercida por la aceleración de la gravedad sobre los cuerpos. Otro ejemplo es, las leyes de los gases ideales, de los cuales se enseña desde la química el comportamiento de las variables de estado y la estequiometría de los gases, mientras que para la física va dirigida a explicar el funcionamiento de los procesos termodinámicos. Por el enfoque

que se le da a cada concepto, a pesar de que es el mismo, las didácticas de la física y de la química toman distancia, con el objetivo de ver lo específico de cada área de conocimiento.

Aunque dentro de las ciencias naturales, no están contenidas las matemáticas, estas beben de las matemáticas, para los casos mencionados (concepto de peso y ley de gases), se logra formalizar el concepto por medio del análisis matemático. Así mismo, las matemáticas realizan procesos de modelación aplicados a las ciencias naturales. A consecuencia de lo indicado, en la enseñanza de los objetos de las ciencias naturales y de las matemáticas, hay una coexistencia necesaria entre las didácticas respectivas.

Sobre la didáctica de las matemáticas y las ciencias naturales, Joshua & Dupin (2005) hacen notar que:

La didáctica de la matemática, en primer lugar, y las didácticas de las otras ciencias, luego, nacieron históricamente de la decisión de no subordinarse a la materia. Se basaron en una alternativa radical que debía distinguirlas progresivamente de los otros enfoques referidos a la enseñanza científica: la voluntad – y al afirmación de la posibilidad – de un abordaje razonado, sistemático, científico y específico de los fenómenos de enseñanza en esos campos, con el objetivo de delimitar teórica y prácticamente los ámbitos de lo posible de aquellos de lo inaccesible.

Si se debe arriesgar una definición, se podría decir que la didáctica de una disciplina es la ciencia que estudia, para un campo particular (en este caso, las ciencias y la matemática), los fenómenos de la enseñanza, las condiciones de transición de la “cultura” propia de una institución (en particular, las instituciones científicas) y las condiciones de la adquisición de conocimientos por parte de un estudiante. (p.6)

4.1.1.2 Didáctica de la física: prácticas experimentales y resolución de problemas

Como ya se mencionó, la didáctica de la física está inmersa dentro de la didáctica de las ciencias naturales, las cuales han tenido un desarrollo histórico marcado, según Aduriz-Bravo e Izquierdo (2002) en cinco etapas: 1. *Etapa adisciplinar*: Siglo XIX hasta mediados de la década del cincuenta del siglo XX, para este momento, las producciones en el campo fueron escasas y diversas generando discrepancias entre sus autores, por estas razones no se evidenciaba la existencia de un campo de problemas delimitado. 2. *Etapa tecnológica*: Década de los

cincuenta y sesenta, se apoya del conocimiento científico generado en áreas disciplinares externas; se enfoca en lo metodológico, genera recomendaciones, recursos y técnicas para intervenir en el aula. 3. *Etapas protodisciplinarias*: Mediados de la década del setenta, esta etapa está enlazada al aprendizaje de contenidos específicos de las ciencias. 4. *Disciplina emergente*: Década de los ochenta, los didactas de las ciencias se preocupan por la relación teórica del conocimiento acumulado, así, se hace necesaria cierta rigurosidad en la elaboración de los marcos conceptuales y metodológicos, correspondientes a la existencia de una problemática. 5. *Disciplina consolidada*: Es la actualidad de la didáctica de las ciencias, existe cierta aprobación para pensarla como disciplina consolidada, Aduriz-Bravo e Izquierdo (2002) citando a (Sanmartí, 1995); (Gil-Pérez, 1996); y (Gil-Pérez *et al.*, 2000), mencionan cuatro indicadores que certifican su conocimiento: 1. Las producciones en el campo han crecido de forma exponencial. 2. La consolidación de grupos de difusión de resultados. 3. El reconocimiento como área de conocimiento y como titulación de postgrado. 4. La complejidad y potencia heurística de varios de los modelos didácticos formulados.

Sobre la evolución de la didáctica de las ciencias naturales planteada por Aduriz-Bravo e Izquierdo (2002), Roa (2016) hizo el siguiente análisis:

...presentan la evolución, presiones y tensiones que se presentaron en la emergencia y consolidación de las didácticas de las ciencias. Dejan de presente que este campo ha tenido varias manifestaciones que datan como sus miembros y producción de conocimiento ha venido de menos a más, superado diferentes obstáculos que han estado relacionados con la dinámica propia del momento histórico y el contexto. (p.236)

Así mismo, Gallego & Gallego (2006) mencionan que, para la mitad del siglo XX, la didáctica de las ciencias es pensada como una ciencia, esto debido al trabajo de investigadores comprometidos a describir los diferentes fenómenos alrededor de los objetos de saber, la comunicación de resultados de las investigaciones en simposios, encuentros, y congresos nacionales e internacionales, logrando de esta manera un gran desarrollo conceptual y metodológico.

Hasta este punto, se ha referido el desarrollo de la didáctica de las ciencias naturales (física, química, y biología), sin embargo, como se mencionó en el apartado anterior, cada una tiene sus

objetos que dependen de las teorías de cada ciencia en particular, sobre los objetos de estudio de las ciencias naturales y las didácticas, Gallego & Gallego (2006) analiza que "... se ha discutido la validez escolar de la pregunta acerca de qué es la biología, la física, la química..." (p.164) para diferenciar los modelos de cada una y el sistema didáctico, que dependen de la historia y la epistemología, no sólo de la disciplina sino también de la didáctica de la disciplina.

A consecuencia de diferenciar los modelos y los objetos de cada una, se tiene que la didáctica de la física es una ciencia que posee un campo de conocimiento único con objetos de enseñanza propios, Klein (2012) al respecto indica que esta "...conjunción entre "enseñanza" y "Física", es la que permite plantear una doble raíz epistemológica autónoma dentro de una didáctica específica." (p.20)

Continuando con Klein (2012) cataloga a la didáctica de la física como ciencia, para lo cual hizo un análisis del desarrollo epistemológico sobre el concepto de ciencia. Empezando por el inductismo neopositivista, al cual alude que:

...se elabora a través de los hechos (objetivos, neutrales y sustentando a la teoría pero independiente a la misma. Se acepta como científicas aquellas proposiciones probadas, en forma directa e indirecta, a través de la experimentación. (p.9)

En la etapa neopositivista, surge el falsacionismo de Popper:

En este la falsedad de uno de sus enunciados no implica el "destierro" del mismo sino que pone en duda la teoría que lo sustentaba (la teoría es falsa). Para superar la vieja teoría, se exige la elaboración que corrija los errores de las anteriores y pueda hacer predicciones hasta que sea falsada nuevamente. (p.9)

El autor avanza su análisis mencionando de forma general el enfoque racionalista-idealista de la década de los sesenta, con autores como Kuhn, Feyerabend, Lakatos, y Toulmin, los cuales "...ponen en tela de juicio a la "realidad" entendida como lo observable por los sentidos y la experimentación como juez de lo correcto." (p.9). Este nuevo enfoque, deja de lado el método científico, cambiando la manera de pensar la ciencia y por consiguiente la enseñanza, en donde se incluyen nuevas disciplinas como las humanidades y las ciencias sociales, además, este enfoque le da valor a la sociedad y la tecnología.

Finalmente el autor hace mención al enfoque empirista-realista, de las investigaciones de carácter cualitativo, en el que las experiencias personales y las relaciones intersubjetivas, marcan el fundamento de las investigaciones llamadas investigación-acción y la etnografía educativa.

De esta manera, haciendo un análisis de la didáctica de la física, se encuentra que, posee varios contextos (interno salón de clases, institucionales, metodológicos, y globales) que no pueden ser pensados por separado sino que deben estar en constante interacción, en donde la práctica y la teoría se ponen en juego para solucionar los problemas circunstanciales de la enseñanza. Así entonces, el campo de la didáctica de la física es tenedora de variables como: epistemológicas (del saber, y del alumno con el saber); didácticas (en relación a la población, al contrato didáctico, y la transposición didáctica); de contexto (del saber, del profesor, y del estudiante) Klein (2012).

Por su parte, Castilblanco & Nardi (2014) mencionan que existen tres dimensiones en el campo de la didáctica de la física, la primera es la dimensión física: está relacionada con el conocimiento de contenidos a ser enseñados (la física y las matemáticas); la segunda, dimensión sociocultural: es relacionada con otras disciplinas (historia, epistemología, educación, filosofía, pedagogía, antropología, sociología, psicología del aprendizaje y lenguaje); la tercera, dimensión técnica: es en relación a los medios o instrumentos para la enseñanza (tecnologías de la información y la comunicación, la bibliografía y la experimentación). Estas dimensiones son necesarias e importantes tanto para la formación de profesores como para los profesores en ejercicio, ya que permite organizar de forma coherente los objetivos y contenidos para la enseñanza de la física, además que contribuye en aumentar la identidad profesional.

Vija (2008) expresa que “la Didáctica de la Física, es una ciencia que se encarga de encontrar formas más convenientes de enseñar la física” aún más “...estudia los lenguajes de esta ciencia, es decir, su objetivo es lograr que un docente encuentre la manera de hacer que el estudiante logre adquirir el proceso de matematización de los fenómenos.” (p.47)

4.1.1.2.1 Enseñanza de la física

De la revisión bibliográfica se encontró que autores como (Gil, Martínez, & Senent, 1988; Pozo & Gómez, 1998; Pietrocola, 2002; Fernández & Rondero, 2004; Gallego & Gallego, 2006; García, 2009; Jiménez, Aureli, Ana & Emilio, 2009) hacen referencia a la enseñanza de la física, en donde se pone en juego el papel del estudiante; el papel del profesor; los objetos de enseñanza; los medios y situaciones para la adquisición del conocimiento.

Anteriormente aprender física se centraba dentro del aprendizaje memorístico y repetitivo, la técnica era, memorizar y repetir al pie de la letra definiciones y algoritmos, como lo menciona Feynman (1969), en la escuela se enseña una pseudociencia, procedimientos mecánicos para resolver problemas sin entender o cuestionarse acerca del por qué o de dónde se generan las relaciones de la física, la matemática y el mundo cotidiano. En la actualidad, el cambio conceptual tiene otro esquema, la propuesta es que el profesor se involucre con el trabajo que propone (Gallego & Gallego, 2006). "...es decir no es desde afuera, como suele suceder cuando el paradigma dominante es el de la transmisión verbal de contenidos curriculares." (p.46). Así, el proceso de enseñanza toma otro camino, en el cual se construyen conocimientos y por consiguiente aprender ciencias deja de ser una instrucción mecánica, para ser una instrucción dinámica.

De esta manera la enseñanza no se remite a la repetición de procedimientos, tales como dar un concepto que debe ser aprendido, las ecuaciones que describen el concepto y la resolución de problemas de manera mecánica, dichos procedimientos se ven reflejados en los libros de texto en cada unidad o capítulo, por ejemplo, en el caso del movimiento uniformemente acelerado se hace una introducción al tema, enseguida se pone en negrilla (el concepto), se explican con palabras las ecuaciones de descripción del movimiento, se expresan matemáticamente y/o gráficamente, se dan dos o tres ejercicios de aplicación y al final del capítulo existe el taller (ejercicios a lápiz y papel) y un experimento explicando paso a paso lo que el estudiante debe hacer (receta de cocina) que hace de las prácticas experimentales una receta de cocina, donde los estudiantes se limitan a repetir procedimientos estipulados, pueden ser de un libro y/o dirigidos por el profesor; donde la finalidad es comprobar la teoría, manejar, solucionar e interpretar los errores.

Convirtiendo las prácticas experimentales en actividades positivistas y objetivas, acentuando la visión clásica de las ciencias experimentales (observación), enfocadas en el método científico.

Este tipo de mecanicismo sólo lleva a un aprendizaje memorístico, que es a corto plazo y no permite llevarlo a un contexto real. Por el contrario, para lograr un verdadero aprendizaje de la física, se debe partir de la experiencia haciendo más próxima la física para los estudiantes, esto con el fin de que se pregunten, indaguen y solucionen problemas cotidianos del objeto de enseñanza, para que lleguen al concepto, sin necesidad de enunciarlo, ni memorizarlo.

Con lo mencionado anteriormente, no se pretende despreciar la importancia de los medios utilizados en la enseñanza de la física como: la enseñanza de conceptos; la resolución de problemas; y las prácticas experimentales, a continuación se presentan algunas críticas y sugerencias sobre estos tres medios.

1. Respecto a la enseñanza de conceptos, por una parte es relevante que en la enseñanza de la física se presente la historia de la física, como lo menciona Klein (2012) "...dejar de lado el aspecto histórico social de la ciencia convierte a la misma en "algo" aséptico que mal utilizado se traduce en una serie acumulativa de "hechos" que deben ser aprendidos." (p.25), por otra parte, el uso de las analogías y la representación de los fenómenos físicos con un modelo matemático; el problema se basa en pensar en las matemáticas como una herramienta que permite formalizar los fenómenos físicos. Por el contrario, como se evidenció en apartados anteriores, las matemáticas juegan un papel activo en la investigación de la física, en otras palabras, la relación entre las matemáticas y la física es compleja, las matemáticas contribuyen en la formalización de la física de manera recíproca, entonces, durante el proceso de enseñanza se debe desarrollar de manera conjunta el pensamiento físico y matemático como ocurre en la elaboración del conocimiento elaborado por los expertos (Pietrocola, 2002).

Por consiguiente, teniendo en cuenta la noción de modelo de Joshua & Dupin (2005) "... es un "producto terminado", o al menos "semiterminado", que puede ser enunciado verbalmente y explicitado, al menos en proporción razonable." (p.20). Los profesores deben crear estrategias de aula que permitan aclarar la importancia de la utilización de modelos matemáticos para explicar

fenómenos físicos, donde a su vez dicho fenómeno físico es un sistema representado por medio de un modelo matemático.

Como menciona Pozo & Gómez (1998) "...el aprendizaje de las ciencias requiere conocer muchos datos y hechos concretos... pero una cosa es tener un dato, conocer algo como un hecho y otra darle sentido o significado." (p. 4). Los estudiantes de sus relaciones cotidianas, pueden tener nociones y formas de entender los fenómenos físicos, pero probablemente no alcanzan a dilucidar explicaciones y descripciones por medio de un objeto y/o representación matemática, por esta razón es que la enseñanza de la física debe hacerse de manera entendible, ya que, cuando un concepto o dato es abstracto y no se puede identificar, ni visualizar en el diario vivir del estudiante, se hace difícil asimilarlo y comprenderlo.

2. Al mencionar la relación entre la física y la matemática, nos lleva a reconocer la importancia de la resolución de problemas para la enseñanza, hecho importante y a la vez preocupante, debido al fracaso que presentan los estudiantes, para resolverlos. Por un lado, se le atañen las representaciones incorrectas a las que llegan los estudiantes debido al poco análisis y la mala lectura. Por otro lado, la falta de claridad en la transversalidad de los conocimientos, los estudiantes no aplican ni asocian lo visto en otros temas de la física, ni lo aprendido en otras disciplinas para este caso las matemáticas. Para Jiménez, Aureli, Ana & Emilio (2009) "Podría decirse que se crean compartimentos estancos de conocimientos (tanto conceptuales como de procedimiento) que no permiten el trasvase mental de unos temas a otros, se le denomina dependencia de campo" (p.87). Finalmente, al mecanicismo desde el planteamiento del problema (enunciado), que es formulado de tal manera que limita al estudiante al uso de algoritmos.

Sobre este último punto Gil, Martínez, & Senent (1988) centraron la mirada hacia la enseñanza y se preguntaron, "¿qué es lo que hacemos para que la mayoría de los alumnos sea incapaz de enfrentarse a un problema en cuanto se aleja mínimamente de los que han resuelto en clase?" (p. 132). Los autores aseguran que esta pregunta es de tipo didáctico, y que para responderla es necesario entrar a discutir sobre otras dos preguntas "¿qué ha de entenderse por problema? y ¿en qué medida lo que se enseña en las clases se aproxima a una auténtica resolución de problemas?". (p. 132)

Del análisis de las preguntas anteriores Gil, *et al* (1988) aseguran que por una parte, la forma como se plantean los problemas permiten que sigan el sesgo de repetir pasos para llegar a respuestas sin necesidad de elaborar un análisis del objeto de enseñanza. Por otra, si los problemas se replantean como situaciones con carácter problematizador, que realmente no tienen una respuesta obvia, el método se acercará más a la realidad de construcción de conocimiento científico.

3. Las prácticas experimentales, son un medio fundamental en la enseñanza de la física, donde lo importante es cómo enfocarlo y cómo el manejo de materiales y variables llevan a la interpretación y desarrollo de las matemáticas. Donde lo realmente importante es analizar y delimitar variables propias del fenómeno.

Según Izquierdo & Sanmati (1999) es importante que en la experiencia se manejen analogías en donde los estudiantes vean la práctica como un modelo que hace parte de la cotidianidad. En esta modelación se debe tener relación entre el fenómeno, la manipulación y el instrumento, con el fin de que los estudiantes reflexionen ante tres ejes referentes al experimento, el primero hace referencia a ¿Qué tengo? ¿Qué hago? ¿Qué pasa? El segundo ¿Cómo pasa? y el tercero ¿Por qué pasa?

Para lograrlo, se deben tener precauciones, por un lado alejarse de la ilustración y la instrucción “del paso a paso”, por el contrario se debe permitir que los estudiantes organicen, investiguen, analicen y comuniquen la información del fenómeno estudiado. Por otro, se debe permitir que diseñen estrategias, interpreten, propongan explicaciones y autoevalúen el trabajo, comprobando la validez de los resultados obtenidos, de esta manera el estudiante no simula la actividad científica, lo que hace es una aproximación a los procedimientos de la ciencia (Martín, Gómez & Gutiérrez, 2000).

En definitiva, se abandona la visión tradicional de las prácticas experimentales, y se incursiona en que el estudiante se aproxime al que hacer científico y construya su propio conocimiento, donde el profesor planea e interfiere en dicha construcción de forma guiada y permite que sus estudiantes se interesen e indaguen sobre el fenómeno.

El uso de diferentes medios para la enseñanza de la física, como la enseñanza de conceptos; las prácticas experimentales; la resolución de problemas; y el desarrollo de otras disciplinas en su formalización, puntualmente el uso de las matemáticas, evidencian el panorama de estrategias utilizadas por el profesor para generar en sus estudiantes aprendizajes, sin embargo, dependiendo de cómo se manejan estos medios, puede que los estudiantes, se aproximen o no al conocimiento. De aquí, la importancia del hacer del profesor frente al conocimiento y a la interacción entre profesor-alumno-saber (Barros, 2008).

4.1.1.3 Didáctica de las matemáticas: una aproximación a la escuela francesa

La investigación sobre didáctica de las matemáticas es amplia y ha aportado de forma significativa a la conformación de la didáctica de las disciplinas como disciplina científica. Según Zambrano (2005) “Los matemáticos, conscientes de las dificultades de la difusión de su saber siempre han estado atentos a los medios que les permita llevar a cabo satisfactoriamente esta tarea.” (p.24)

Francia es el país en donde mayor desarrollo ha tenido la enseñanza de las matemáticas, diferentes grupos de investigadores han tratado de establecer esta naciente disciplina. Godino (1991), Gascón (1998) y Contreras (2012), han resaltado la importancia de los trabajos de Chevallard y Brousseau, en su formalización.

Sobre la historia de la didáctica de las matemáticas Contreras (2012), la divide de acuerdo al desarrollo en tres momentos. El primero, en el siglo XIX, denominado didáctica pre científica, se basaba en procesos de enseñanza aprendizaje de forma tradicional:

... la labor principal del docentes es la (Sic) difundir la matemática, es decir, comunicar a los estudiantes los logros efectuados por otros, interiorizarlos y tratar de aplicarlos de la mejor manera, en el trayecto a hacerlos más fáciles o comprensibles se pueden utilizar materiales y objetos didácticos. (p. 21)

En el siglo XX se formaliza, en la década de los cincuenta y sesenta, el segundo momento denominado didáctica clásica (Gascón, 1998 y Contreras, 2012), la cual tiene como primer y principal objetivo, proporcionar al profesor los recursos profesionales que éste necesita para

llevar a cabo su labor de la manera más satisfactoria posible, se desarrolló bajo la proyección de los modelos psicológicos del aprendizaje, con dos enfoques, el primero va dirigido hacia el estudiante, es pensado desde las teorías cognitivas de Ausubel que se enfoca en el alumno y el conocimiento que obtenga de forma significativa; el segundo va dirigido a analizar el pensamiento y la actividad del profesor, es mediado por la psicología. Para Contreras (2012) en estos dos enfoques:

El saber didáctico se convierte en un saber técnico, en el sentido de la aplicación de otros saberes más fundamentales que son importados de otras ciencias, por lo que la didáctica de la matemática puede considerarse como un conjunto de saberes normativos pero no explicativos... (p. 21)

El tercer momento, en la década de los setenta, se abandona la visión clásica y se desarrolla la didáctica fundamental, se reconocen la existencia de más objetos didácticos, -resolución de problemas; rutinas; currículo; enseñanza de los objetos matemáticos-, el reconocerse estos nuevos objetos lleva a "...la necesidad para la didáctica de disponer de un *modelo de la actividad matemática* y de un *modelo del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas* en el que dichos objetos puedan estar debidamente representados." (Gascón, 1998, p. 9)

Continuando, con Contreras (2012) "... el objetivo fundamental de la didáctica es el de definir un "conocimiento matemático", mediante una "situación" tal que ésta situación produzca "situaciones a-didácticas" en los alumnos que permitan engendrar una buena representación del conocimiento." (p.22). Sobre la didáctica fundamental, Gascón (1998) citando a Brousseau destaca que:

...nació precisamente cuando Brousseau vislumbró por primera vez la necesidad para la didáctica de utilizar un modelo propio de la actividad matemática, dado que los modelos epistemológicos usuales no habían sido construidos para responder a los mismos problemas que se plantea la didáctica. Históricamente se corresponde con las primeras formulaciones de la *teoría de las situaciones didácticas*, cuyo texto fundador fue publicado a principios de los años 70 (Brousseau, 1972). (p. 9)

Al igual que en la época clásica, en esta parte del desarrollo y las transformaciones de las matemáticas y por consiguiente la didáctica de las matemáticas, trae consigo tensiones entre

estas y las otras disciplinas, para Brousseau (1991) el territorio de la didáctica de las matemáticas era propio y casi exclusivo de los matemáticos. Para lo cual utilizó los siguientes argumentos: 1. Por lo general los matemáticos son profesores. 2. Los matemáticos son los responsables del uso que se les dé a las matemáticas. 3. Para la enseñanza de las matemáticas en la básica, es importante que se haga de forma rigurosa la vigilancia epistemológica, debido a que este es el primer campo de formación de toda la población.

Continuando con lo expresado por Gascón (1998) la didáctica fundamental, tiene un enfoque antropológico desde los planteamientos de Chevallard (1985):

En el marco de la didáctica fundamental pronto se puso de manifiesto que no era posible interpretar adecuadamente la *matemática escolar* ni la *actividad matemática escolar* sin tener en cuenta los fenómenos relacionados con la *reconstrucción escolar de las matemáticas* que tienen su origen en la propia institución de producción del saber matemático. (p.15)

En consecuencia, el desarrollo de la didáctica de las matemáticas, se formaliza como una ciencia, debido a la institucionalización y al enfoque antropológico de la didáctica, que aparece a mediados de la década de los 80. “Su objetivo es llegar a describir, caracterizar y explicar (pero también diseñar, ayudar a gestionar y evaluar) los procesos de estudio de las comunidades que se ven llevados a estudiar matemáticas en el seno de ciertas instituciones.” (Gascón, 1998, p.16). En general, “...la didáctica de las matemáticas puede seguir siendo considerada como la *ciencia de los fenómenos y los procesos didácticos*, con la condición de que “*didáctico*” se entienda como “*relativo al estudio de las matemáticas*”.” (Gascón, 1998, p.17).

Para Brousseau (2007) la didáctica de las matemáticas es una ciencia “...de las discusiones de difusión y apropiación de los conocimientos matemáticos útiles a los hombres y a sus instituciones.” (p.23).

Por su parte, Godino (1991) reconoce el carácter de ciencia a la didáctica de las matemáticas teniendo como fundamento epistemológico los planteamientos derivados de Kuhn, Lakatos y Bunge. Para lo cual señala que para Kuhn la ciencia está en constante evolución y que debido a esa evolución se va conformando una red de conocimientos como teorías, hipótesis, leyes, y

técnicas, que son compartidas y comunicadas por los miembros de una comunidad de científicos, de esta manera la ciencia se constituye por la aceptación de un paradigma, que una vez establecido, se da uso para la explicación de diferentes fenómenos, en ocasiones, se enfrenta a dificultades, las cuales son normales en el desarrollo de la ciencia, sin embargo, cuando las dificultades aumentan hasta entrar en crisis, da lugar a la revolución científica, en la que nuevamente se confrontan y entran en juicio nuevos planteamientos, formando el cambio de paradigma.

Para Lakatos la construcción de una ciencia se da en los programas de investigación competitivos, con el descubrimiento y la explicación de nuevos fenómenos, además, resalta la importancia de entrelazar teorías, por medio de reglas metodológicas (heurística), en la que dicha teoría debe cumplir con tres propósitos: el primero, es que debe responder inquietudes que las antiguas teorías no cumplían; el segundo, es que haga predicciones que las antiguas teorías no hacían; y el tercero, que dicha teoría se pueda confirmar.

El planteamiento de Bunge, es que para conformar una ciencia deben existir diferentes líneas de investigación, que puede ser de forma individual, pero prioritariamente desde comunidades científicas, formando un organismo progresivo de conocimientos diferenciados por ser racionales; sistemáticos; exactos; verificables y falibles. “...un campo de conocimiento puede caracterizarse como un sector de la actividad humana dirigido a obtener, difundir o utilizar conocimientos de alguna clase.” (p.9).

De esta manera, para Godino (1991) la didáctica de las matemáticas o la educación matemática, es una ciencia en la se destaca que existen diferentes líneas de investigación; en la formalización coexisten otras disciplinas (la filosofía, la psicología, y la didáctica general), sin embargo, es necesario de una delimitación entre la didáctica y dichas disciplinas; finalmente, está centrada en “... la enseñanza y el currículo matemático, se interesa por comprender las combinaciones de contenido, secuenciación, estrategias y sistemas de impartición más efectivos para distintos perfiles de aptitudes de los alumnos.” (p.25). Empleando las palabras de Godino (1991):

El estado de la Didáctica de la Matemática puede definirse como el de un campo de investigación científico tecnológico emergente en el que se identifican un cúmulo de teorías competitivas, expresadas generalmente de un modo informal y dependientes especialmente de planteamientos psicológicos. Sin embargo, el número y calidad creciente de las investigaciones en el área nos hacen ser optimistas sobre la consolidación de nuestra disciplina como campo autónomo de conocimiento en un futuro no muy lejano. (p.29)

Continuando con este mismo autor, sitúa a la didáctica de la matemática como ciencia, desde la didáctica de la escuela francesa, para lo cual, menciona dos teorías: una las situaciones didácticas de Guy Brousseau y otra la transposición didáctica de Chevallard, su tesis es que las dos teorías están de acuerdo en considerar el conocimiento matemático, al profesor y al alumno como polos en continua interacción, pero difieren en que la transposición se sitúa a nivel local mientras que las situaciones didácticas se sitúa a nivel global; finalmente asegura, que la aplicación de estas didácticas permiten que los alumnos avancen en la difusión del conocimiento y el afianzamiento de la democracia en la sociedad.

4.1.1.3.1 Fundamentos de la didáctica de las matemáticas

En concomitancia con lo mencionado en el apartado anterior, la didáctica fundamental, pensada como ciencia, se cimienta desde las situaciones didácticas (Brousseau, 2007) y la transposición didáctica (Chevallard, 2005), en tal sentido se continuará en lo que sigue.

Godino (1991), citando a Brousseau (1986) asegura que la didáctica de las matemáticas se sitúa en términos de las situaciones didácticas, donde el enfoque es "... el de una construcción que permite comprender las interacciones sociales entre alumnos, docentes y saberes matemáticos que se dan en una clase y condicionan lo que los estudiantes aprenden y como lo aprenden." (p.7)

Para Brousseau (2007) la teoría de las situaciones didácticas tiene presente las diferentes teorías y metodologías de la enseñanza, establece que es necesario "... Proporcionar una reflexión acerca de las relaciones entre los "contenidos" de la enseñanza y los métodos de la educación" (p.12). Para este autor, una situación es "... un modelo de interacción de un sujeto con cierto

medio que determina un conocimiento dado, como el recurso del que dispone el sujeto para alcanzar o conservar en este medio un estado favorable.” (p.16).

Razón por la cual, las situaciones didácticas, son “... un entorno del alumno diseñado y manipulado por el docente, que la considera como una herramienta.” (p.17), quien es el encargado de proponer los recursos o medios que favorezcan el proceso de aprendizaje, para lo cual, utiliza diferentes medios que pueden ser objetos e instrumentos como los libros; juegos; modelos; y ejercicios, los cuales son producidos y estudiados por la ingeniería didáctica (Brousseau, 2007). Como el objetivo de aplicar los diferentes medios, es lograr el aprendizaje, su funcionamiento se evidencia si se produce un efecto en la enseñanza. En este sentido, el profesor analiza y reformula las situaciones didácticas, con el fin de hacer una devolución de la mejora de sus hallazgos y lo institucionaliza.

Por lo que se refiere al alumno, debe aprender estableciendo relaciones y reglas con el medio, el cual es manipulado por el profesor que la considera como herramienta, de estas relaciones, el estudiante se enfrenta a cuatro situaciones: acción, el alumno actúa frente a una situación con sus conocimientos implícitos; formulación, los alumnos se cuestionan y se ponen en la búsqueda de respuestas que satisfagan dichos cuestionamientos; validación, después de la formulación, los alumnos hacen la puesta en común de sus respuestas y se ponen de acuerdo sobre la veracidad o falsedad de dichas respuestas; finalmente la institucionalización, se basa en las conclusiones de los aprendizajes producidos por los alumnos, el aprendizaje es pensado como el proceso que se lleva a cabo para modificar los conocimientos, donde el objetivo no es el aprendizaje de automatismos, ni axiomas.

Al contrario, el estudiante genera una situación matemática, es capaz de aplicar, usar, controlar, discutir, y elucidar las propiedades del objeto matemático a diferentes situaciones. De esta manera, las situaciones matemáticas, son las que provocan una actividad matemática en el alumno sin intervención del profesor. En este punto, se ve la diferencia entre un saber habitual y un saber erudito, el cual permite la solución de una situación fundamental (Brousseau, 2007).

Antes de lograr el aprendizaje es probable que existan obstáculos epistemológicos, en el que un conocimiento legítimo anterior y aceptado por el estudiante se interpone ante el nuevo conocimiento -situación adidáctica-, también se pueden generar desequilibrios, que consisten en las dificultades que se presenten antes de comprender el nuevo conocimiento.

En cuanto a los medios, Brousseau (2007) centra la atención en la importancia de la resolución de ejercicios, sin embargo, refiere que la enseñanza de las matemáticas no debe sólo referirse a este medio, debido a que cada noción tiene una serie de problemas que resolver, entonces, el estudiante debe crear estrategias y poner en juego la noción en sí, para la resolución de dichos ejercicios, generando una situación, nominada, como el modelo de interacción entre un sujeto y un medio determinado, "... un problema o un ejercicio no puede considerarse como una simple reformulación de un saber, sino como un dispositivo, un medio que "responde al sujeto" siguiendo alguna regla." (p.17). Godino (1991) hace alusión a que el conocimiento matemático se construye mediante la resolución de problemas en el cual el alumno debe estar interesado en resolver y para lo cual debe crear una situación didáctica que:

...es un conjunto de relaciones explícita y/o implícitamente establecidas entre un alumno o un grupo de alumnos, algún entorno (incluyendo instrumentos o materiales) y el profesor con un fin de permitir a los alumnos aprender - esto es, reconstruir - algún conocimiento. Las situaciones son específicas del mismo. (p.21)

Por consiguiente, la teoría de las situaciones didácticas describe la actividad del estudiante y del profesor, en la interacción con la enseñanza y el aprendizaje del saber. En donde, el profesor, es el encargado de plantear las situaciones, que las ve como herramientas, mientras que el estudiante toma decisiones frente a la situación y construye el conocimiento.

Sobre la antropología de la didáctica de las matemáticas, Chevallard (2005) define la transposición didáctica como "El "trabajo" que transforma de un objeto de saber a enseñar en un objeto de enseñanza." (p.45). Se pregunta acerca del objeto de la didáctica, para lo cual la sitúa en la antropología cuyo objeto es lo didáctico. Desde el punto de vista antropológico, están presentes las instituciones, los sujetos, los objetos, la relación del sujeto con el objeto y de la institución con el objeto; a estas relaciones las llamó conocimiento "... entendido como

existencia de relaciones (personales o institucionales) con los objetos *existe en el momento en lo real antropológico.*” (p.149); entonces, lo didáctico existe cuando un sujeto cambia la interacción entre otro sujeto y el objeto.

En cuanto a la noción de saber, Chevallard (2005) expresa que es la organización de conocimientos y hace claridad en que la institución puede manipular el saber en cuatro sentidos: 1. La problemática de la utilización del saber. 2. La problemática de la enseñanza del saber. 3. La problemática de producción de un nuevo saber. 4. La manipulación transpositiva de los saberes, los saberes a enseñar dependen del funcionamiento de las sociedades. El autor destaca que “...la enseñanza de un saber, más ampliamente su manipulación didáctica en general, no puede comprenderse en muchos de sus aspectos si se ignoran sus utilidades y producción.” (p.155). Entonces hay transposición didáctica “... porque el funcionamiento didáctico del saber es distinto al funcionamiento académico, porque hay dos regímenes del saber, interrelacionados pero no superponibles...” (p.25)

De esta manera Chevallard (2005) categorizó los saberes así:

Saber científico o erudito: Es el saber de los matemáticos, categorizados como nociones matemáticas, por ejemplo, la noción de número, la adición o la función. Existen otras nociones como las paramatemáticas, que *son nociones herramienta necesarias para la enseñanza*, estas nociones dependen del contexto del plan de estudios, ligadas a las nociones matemáticas como la noción de ecuación o demostración, y la protomatemática estas *se relaciona con las capacidades y habilidades, de los estudiantes frente al objeto de enseñanza.*

Saber a enseñar: Para que un saber sabio, pase a ser un saber a enseñar, existen dos transposiciones, una es externa, que define por ejemplo los contenidos propios del currículo, en esta transposición, se deben tener en cuenta, el contexto social, sus necesidades y el desarrollo tecnológico, así como los conocimientos del profesor; de esta manera para la selección de los contenidos del currículo es necesario que existan entes que vigilen y estructuren dicha selección, para esto participan sociólogos, psicólogos, pedagogos, matemáticos; esto es a lo que Chevallard (2005) denomina la vigilancia epistemológica, la cual es pertinente ya que no permite que el

saber se banalice, ni tampoco que se lleve al aula un conocimiento desactualizado, en palabras de Chevallard (2005):

Es uno de los instrumentos de la *ruptura* que la didáctica debe ejercer para construirse en su propio dominio; es aquel por el cual la entrada del saber en la problemática de la didáctica pasa de la potencia al acto: en la medida en que el saber deviene para ella *problemático* puede figurar, adelante, como un término en lo enunciado de problemas (nuevos o simplemente reformulados) y en su solución. (p.16)

Chevallard (2005) advirtió que los conocimientos científicos son transformados al momento de ser transmitidos por la sociedad y que en ocasiones pueden llegar a cambiar los significados. De esta manera, se refiere al cuidado que debe tener el sistema educativo para marcar un punto intermedio entre el saber científico y el saber trivial que posee la sociedad, denominado saber didáctico, el cual legitima el proyecto de enseñanza.

De aquí es necesario mencionar la noosfera para Chevallard (2005) es “... el centro operacional del proceso de transposición, que traducirá en los hechos la respuesta al desequilibrio creado y comprobado (expresado por los matemáticos, los padres, los enseñantes mismos) [...] esta mantiene dentro de límites aceptables la autonomía del funcionamiento didáctico.” (p.34). De esta manera la noosfera crea el conjunto de instancias donde se hacen las negociaciones y se regulan los cambios entre el sistema de enseñanza y su entorno; se proporcionan soluciones a problemas que se presentan en el sistema didáctico (saber, estudiante y profesor).

La segunda es interna, donde el principal agente es el profesor, quien debe pensar en cómo hacer que ese conocimiento o noción matemática establecida en el currículo, sea enseñable por medio de metodologías y estrategias de enseñanza. Para esto, el profesor posee una ideología y conocimientos propios, es el encargado de incorporar un saber científico a saber a enseñar. Para Chevallard (2005) “...preparar una lección es sin duda trabajar con la transposición didáctica (o más bien *en* la transposición didáctica); jamás es *hacer* la transposición didáctica.” (p.20).

Saber enseñado: Para que un saber sea enseñado es necesario que el saber a enseñar sea transformado haciendo una contextualización, y para enseñar ese saber se requiere un tiempo de ejecución, sin embargo, el tiempo de enseñanza por parte del profesor, es diferente al tiempo de

aprendizaje por parte del estudiante; esta diferencia de tiempos se da por diferentes circunstancias, como la planeación de las clases y el tiempo limitado para cumplir con lo propuesto en el currículo, no permiten que el profesor se detenga por un prolongado tiempo en un tema que presenta dificultad, en ocasiones el profesor pretende que al avanzar en los contenidos el estudiante aclare ciertas dudas pero no siempre se logra. Así, lo que el profesor enseña no es precisamente lo que el estudiante aprende. Ni mucho menos lo que sabe el profesor es lo mismo que sabe el estudiante, quien posee conocimientos que vienen de su contexto y asimila el saber a enseñar a saber enseñado.

4.1.1.3.2 Problemas en la enseñanza de las matemáticas

Aunque no es desconocida la importancia de las matemáticas en diferentes campos de la vida, tanto académicos como cotidianos, los estudiantes muestran desinterés, desmotivación y dificultad para aprenderla. Al respecto, algunos autores han destacado algunos problemas como los siguientes:

- ✓ **Los saberes fragmentados en la enseñanza de las matemáticas y el distanciamiento entre el saber científico y el saber a enseñar.** En este caso como lo menciona Litwin (2008) “... Se enseña protodisciplina en la escuela primaria y son tratamientos protodisciplinarios las propuestas de divulgación científicas hechas por los mismos científicos cuando pretenden encontrar formas que permitan la comprensión de determinados temas...” (p.100). El distanciamiento entre los saberes se puede resolver incluyendo en la explicación científica un proceso que atienda los intereses de las instituciones y las organizaciones sociales. Para Trujillo, *et al* (2010) “...los problemas de la educación matemática se resuelven mediante el desarrollo de procesos orientados, por teorías didácticas, hacia la transformación de los estados de funcionamiento no deseado del sistema educativo.” (p.14).

Así entonces, el objeto principal de la didáctica es justamente estudiar las condiciones que deben cumplir las situaciones o los problemas propuestos al alumno para favorecer la aparición, el funcionamiento y el rechazo de concepciones (Trujillo, *et al*, 2010). “...Enseñar un conocimiento C consiste en organizar el medio didáctico de tal manera que el conocimiento C se

torna necesario para que el estudiante pueda sobrevivir en dicho medio.” (p.106). Entonces, la enseñanza de una noción, debe darse por medio del diseño de situaciones didácticas basadas en los objetos de enseñanza, los cuales poseen un conocimiento específico, que es utilizado para dar solución de la situación, de esta manera, los estudiantes se involucran en realizar la actividad matemática y el conocimiento adquirido es el producto de construcciones y reconstrucciones dadas de la experiencia e interacción con el/los objeto/s y el/los medio/s. En cuanto al aprendizaje, el estudiante compromete los conocimientos anteriores, los revisa, los modifica, los completa o rechaza para conformar nuevas concepciones (Trujillo, *et al*, 2010).

- ✓ **La enseñanza de las matemáticas de forma abstracta y alejada de la cotidianidad y el contexto de los estudiantes.** Para Alfaro & Jessenia (2012) “... en el afán de abarcar la mayor cantidad de contenidos del saber sabio, estos son incorporados al programa de enseñanza sin cuestionar antes su pertinencia o bien, evaluar su factibilidad como objeto de enseñanza. (p.167). Cabe mencionar entonces, la ruptura que hubo en la enseñanza de la matemática en la época media, debido al cambio en el desarrollo de las matemáticas en términos de ecuaciones. Esta nueva corriente, en la enseñanza de las matemáticas trajo varios efectos. Por ejemplo, el aumento en la enseñanza de estructuras abstractas como el álgebra y la disminución en la enseñanza de la geometría, por consiguiente esto generó un cambio en los ejercicios propuestos que dejaron de ser problemas elaborados e interesantes para analizar, para ahora ser ejercicios de sustitución que se resuelven de manera mecánica (Gil & Guzman, 1993). Con esto se evidencia la importancia de la historia de las matemáticas para la enseñanza matemáticas, que se basa en mostrarle a los estudiantes que las matemáticas permiten la descripción de fenómenos reales y además que las construcciones matemáticas poseen un acumulado de teorías que han permitido su desarrollo de acuerdo a las necesidades de la sociedad.
- ✓ **La percepción mecanicista de la resolución de problemas,** los estudiantes solucionan problemas por medio de algoritmos y fórmulas, sin tener en cuenta, la materialización en los modelos y artefactos, que condicionan la cotidianidad de los seres humanos (Trujillo, *et al*, 2010). Godino (1991) refiere que “... muchos estudiantes responden a una cuestión, no según un razonamiento matemático esperado, sino como consecuencia de un proceso de decodificación de las convenciones didácticas implícitas...” (p.22). Citando un ejemplo del mecanicismo en la

resolución de problemas Godino (1991) retoma el ejercicio hecho por Stella Baruk llamado "la edad del capitán" donde su enunciado es el siguiente: Un barco mide 37 metros de largo y 5 de ancho. ¿Cuál es la edad del capitán? "... la mayoría de los niños en los primeros años escolares responden que 42 o 32 años... Son muy pocos los casos de niños que contestan que no tiene sentido la pregunta." (p.22). Entonces, es necesario que para la resolución de problemas se creen nuevas estrategias, que permitan que el estudiante encuentre en las matemáticas un problema para analizar y no para repetir procedimientos.

- ✓ **Los conocimientos que posee el profesor de matemáticas**, surge un problema cuando se evidencia que el profesor no posee los suficientes conocimientos para lograr la enseñanza efectiva de las matemáticas Trujillo, *et al* (2010) reflexiona que "...se debe mejorar los conocimientos matemáticos de los profesores y estimular la reflexión sobre la naturaleza de las matemáticas y los factores internos y externos que definen su desarrollo teórico y métodos de validación." (p.20)

Frente a la complejidad entre las interacciones saber, alumno y profesor dentro del contexto particular de la clase, en la enseñanza de las matemáticas, se plantean ciertas reglas que organizan dichas interacciones, denominado el contrato didáctico, es un juego en el que los profesores y estudiantes son los jugadores y el conocimiento matemático es el juez, encargado de juzgar el actuar del estudiante frente a una situación didáctica (Trujillo, *et al*, 2010).

4.2 Didáctica y conocimiento del profesor

Sobre el profesor, Comenio (1998) mencionó que era el poseedor del conocimiento "*representa la sabiduría*":

...el hombre ha sido creado con aptitud para la inteligencia de las cosas, para el buen orden de las costumbres y para el amor de DIOS sobre todas las cosas (acabamos de ver que está destinado a todo esto) y que lleva dentro de sí las raíces de los tres principios enunciados como los árboles tienen las suyas enterradas.

Y para que con mayor evidencia aparezca lo que quiere decir Sirach, cuando afirma que la Sabiduría puso fundamentos eternos en el hombre (Eclesiást. 1. 10.), vamos a ver cuáles son los fundamentos de erudición, virtud y religión puestos en nosotros y que hacen del hombre un maravilloso instrumento de la Sabiduría. (p.9)

Pensando en el tiempo que demanda, copiar, dictar y traducir (en el caso de la enseñanza de otra lengua), Comenio creó el texto ilustrado. Sin embargo, con este hecho el profesor o enseñante no debe preocuparse de la disciplina a enseñar ni en cómo enseñar, puesto que esto ya está determinado; de esta manera el profesor no reinventa, y su función no es otra que la de operario (Gallego & Gallego, 2006). La didáctica entonces es un método, que es único para enseñar todos los saberes, que nace de la pregunta ¿Cómo enseñar todo a todos?

Para Comenio (1998) las cosas tenían un lugar y un orden, por ejemplo, existe el templo para que los adultos se instruyan en la religión, o la curia para dar la información al pueblo, así mismo, debe existir la escuela para jóvenes, lugar al que van a aprender dependiendo de su edad, yendo de lo simple a lo complejo. Sobre el orden, hace relación a que debido a la necesidad del ser humano de reducir el trabajo, para ciertas labores se acude a un tercero, cita el ejemplo de los campesinos que encargan a los vaqueros para que lleven a pastar sus vacas y cerdos, de esta manera, en la escuela se encargan de enseñar algunos padres que poseen un conocimiento y que tienen tiempo, "...de este modo cada cual puede servir a muchos y muchos a cada uno." (p.21), sobre los que enseñan Comenio (1998) explicó que:

... muy raramente los mismos padres tienen condiciones o tiempo para educar a los hijos, debe haber, por consiguiente, quienes hagan esto exclusivamente y por lo mismo sirvan a toda la comunidad.

...Y aunque no faltarán padres que puedan dedicarse completamente a la enseñanza de sus hijos, es mucho mejor que se eduque la juventud reunida, porque el fruto y la satisfacción del trabajo es mayor cuando se toma el ejemplo y el impulso de los demás. Es naturalísimo hacer lo que otros hacen, ir adonde vemos que van los demás y seguir a los que van delante, como adelantarse a los que nos siguen. (p.21)

No obstante, con las investigaciones y el posicionamiento de la didáctica como ciencia, que trata los problemas relacionados con la enseñanza, el profesor quien es el que dirige, planea y crea los medios adecuados para dicho fin, debe ser el principal conocedor e investigador sobre didáctica. Al respecto, Asprelli (2011) refiere que "el didacta (profesor-maestro) es la persona especializada en la enseñanza." (p.81). Como lo menciona Chevallard (2005), el profesor debe buscar la manera de que un saber científico se vuelva enseñable.

Entonces el profesor, no sólo debe intervenir con sus estudiantes, sino que debe saber cómo interponerse entre el conocimiento científico, los estudiantes y la enseñanza, así, la didáctica se conforma como la disciplina que le da coherencia y organización a la actividad del profesor (Zambrano, 2005).

Hay que hacer notar, que la didáctica es aún desconocida como ciencia, tanto por profesores en formación, profesores en ejercicio, y por investigadores externos, como señala Roa (2016):

... el paradigma de la didáctica y la pedagogía como ciencias todavía no ha superado el desconocimiento por parte de sus comunidades de investigadores externos a estas, por lo que se sigue pensando que el conocimiento que el profesor enseña es el mismo conocimiento de las disciplinas que toma la didáctica para hacerlo enseñable. (p.116)

Razón por la cual, no se entiende la profesión docente y su campo específico de conocimiento, según Roa (2016) "...es esencial que en la formación del futuro profesor se le entienda como un profesional que tiene sus raíces en las didácticas y pedagogías *per se*." (p.283). Al asumir estas raíces, se reconoce al profesor como un profesional, y al conocimiento didáctico y pedagógico como disciplinas poseedoras de conocimientos especializados, debido a que se puede identificar lo concerniente a los aspectos epistemológicos, filosóficos, históricos y teóricos, que vienen del reconocimiento de sus objetos y las investigaciones elaboradas por grupos de investigación en torno a lo propio de la enseñanza y el aprendizaje (Roa, 2016).

Acerca del conocimiento del profesor Porlán, Rivero, & Del Pozo (1997) establecen que este posee cuatro saberes que están yuxtapuestos Tabla 4.1, situados en dos dimensiones, una epistemológica (nivel racional-experiencial) y otra psicológica (nivel tácito-explícito): 1. Saberes académicos, disciplinares o metadisciplinares son saberes de contenido, psicológicos, pedagógicos, didácticos y epistemológicos. 2. Saberes basados de la experiencia, el profesor los desarrolla durante el transcurso de su profesión, sobre aspectos de los procesos de enseñanza y aprendizaje. 3. Saberes de rutinas y guiones de acción, es el saber más cercano a la conducta, permite resolver problemas de la actividad docente. 4. Teorías implícitas, son las teorías que explican el porqué el actuar del profesor, sin tener en cuenta que de ese actuar existen teorías o formalizaciones conceptuales.

Tabla 4.1: Dimensiones y componentes del conocimiento profesional
(Tomada de Porlán, Rivero & Del Pozo, 1997)

	Nivel explícito	Nivel tácito
Nivel racional	Saber académico	Teorías implícitas
Nivel experiencial	Creencias y principios de actuación	Rutinas y guiones de acción

Debido a la necesidad de profesionalizar la enseñanza y de esta manera replantear los exámenes docentes Shulman (1986) plantea el conocimiento didáctico del contenido (CDC), en el cual el conocimiento del profesor debe integrar el contenido, la didáctica y el currículo, de esta manera caracterizó el conocimiento en tres ejes: 1. Conocimiento del contenido de la materia, hace referencia a la cantidad y organización de conocimiento *per se*, que posee el profesor, este conocimiento es el que permite, por un lado que genere estrategias para la enseñanza (qué conocimiento enseñar, en qué momento enseñar y bajo qué paradigma) y por otro que investigue sobre su profesión. 2. Conocimiento didáctico del contenido, se relaciona con la capacidad de enseñar, el profesor organiza el conocimiento a enseñar y presenta el contenido de tal manera que despierte el interés y favorezca las habilidades de los estudiantes, poniendo en juego, formas de representaciones, que algunas vienen de la investigación y otras se originan a partir de la práctica, tales como analogías, ejemplos, demostraciones y explicaciones que permiten hacer comprensible el contenido, de tal manera que el proceso de enseñanza sea efectivo. 3. Conocimiento del currículo, este conocimiento se relaciona con los programas diseñados para la enseñanza, la creación del plan de estudios, el uso de materiales como software, textos, materiales visuales, experimentos y películas, relaciones con conocimientos vistos en otras clases.

Así, se entiende que "...la formación de los profesionales deviene de unas disciplinas de conocimiento que se instalan en las universidades. (p.266). Disciplinas que forman en el profesional un pensamiento crítico y consciente para el caso de los profesores, de su quehacer, en

el aula y de la responsabilidad frente al conocimiento enseñado, donde la reflexión sobre sus prácticas de enseñanza debe ser una constante, para García (2009) el profesor “...ha de asumir el rol de profesor-investigador de su praxis, y abandonar la acción docente basada en la mera reproducción y transmisión de conocimientos ya elaborados...” (p.369).

De esta manera, el profesor deja de ser un repetidor de teorías científicas y se pone en la búsqueda de estrategias que permitan cada día mejorar su práctica, como lo hace notar García (2009) el profesor “...ha de abandonar, pues, el papel de mero transmisor de conocimientos científicos ya elaborados, y pasar a ser un profesor investigador, reflexivo, crítico e innovador de su práctica educativa.” (p.371).

En tal sentido, es posible declarar que los saberes que enseña el profesor, que no son el conocimiento científico, por decirlo de otra manera el conocimiento elaborado por los físicos, matemáticos, biólogos. Roa (2016) se preguntó sobre estos conocimientos por medio de dos cuestionamientos ¿Cuál es la disciplina de conocimiento del profesor: la química, la física, la biología? Si son estas, entonces ¿El profesor enseña química, biología pura, etc.? (p.294) a lo que alude que si los objetos de enseñanza vienen de lo concerniente de las disciplinas, entonces se entiende que es el motivo por el cual los estudiantes no entiendan lo que se les enseñan, y que el profesor no entienda la forma de aprender de los estudiantes. “De allí que sea frecuente escuchar a los profesores, tanto en formación como en ejercicio, que *una cosa es la teoría y otra la práctica.*” (p.294). Por el contrario, el profesor enseña un conocimiento que está determinado tanto por el conocimiento de la disciplina que enseña como por el conocimiento en didáctica.

Al ser la enseñanza un proceso social, el profesor en su acción se ve enfrentado a diversos problemas relacionados precisamente con la sociedad:

Avances de la ciencia vs avances en la enseñanza: Dicho proceso está inmerso en una sociedad en la que los avances y las nuevas teorías de la ciencia que permiten explicar el mundo natural están en constante desarrollo, presentándose así un conocimiento no lineal, Mellado (2001) refiriéndose a (Paixão y Cachapuz, 1998) refiere que “La concepción de la ciencia ha cambiado en las últimas décadas con la nueva filosofía de la ciencia, que nos ha ayudado a huir de

reduccionismos absolutistas, y a reflexionar sobre la complejidad del conocimiento científico, de su construcción histórica, de sus cambios, y de sus relaciones con la tecnología y los acontecimientos sociales.” (p.18), entonces el profesor debe crear una relación entre dichos avances y los conocimientos que enseña.

Por este motivo, el profesor se enfrenta a las preguntas: ¿cómo enseñar? y ¿qué enseñar? Para lo cual debe tener en cuenta que en la sociedad actual, la información está al alcance de todos, sin importar la calidad y/o veracidad, así la escuela se enfrenta a una lucha: lo que muestran los medios de comunicación versus los conocimientos que un individuo debe poseer, para que actúe en la sociedad de una manera crítica, conocedor de la realidad social, política y económica. Sin dejar de lado la importancia de la elaboración del currículo en el que se deben escoger los contenidos más relevantes y necesarios para el estudiante, permitiendo el uso de analogías, contradicciones, procesos reflexivos y el análisis epistemológico (Camilloni, 2008a).

La relación ciencia, tecnología y sociedad: Como se mencionó anteriormente, debido a los avances de la ciencia y la tecnología, cada vez más la sociedad se interesa por estar informada y acorde con dichos avances. En este punto es importante mencionar dos caras de la moneda. Una la llamada divulgación científica, que ha dejado de lado el pensamiento de los científicos como un grupo cerrado totalmente hermético, en el que sólo hablan de ciencia los expertos, ya que poseen un lenguaje específico y exclusivo, que fortalece el derecho de admisión, para pensar que aunque ellos son los expertos deben hacer entendible el conocimiento por medio del lenguaje para llevarlo a la sociedad (Hernández & López, 2002). La otra cara de la moneda es como el profesor incluye la tecnología para fomentar el interés de los estudiantes y lograr que estos tengan un aprendizaje significativo. Según Mellado (2001):

El aumento de la escolaridad obligatoria, la creciente interculturalidad, la conflictividad en las aulas, los nuevos conocimientos y el extraordinario avance de las nuevas tecnologías de la información, suponen un reto permanente para los profesores de secundaria, muchos de los cuales encuentran un desajuste entre su rol tradicional y lo que se espera de ellos. (p.18)

Para esto, es importante saber utilizar las herramientas tecnológicas y no simplemente cambiar tablero y marcador por video beam y computador. Por el contrario se deben potencializar las

diferentes herramientas que hoy día ofrece la tecnología, para hacer óptimos los procesos de enseñanza. Según Pacios (1980) “... los buenos profesores deben aprender técnicas recién descubiertas, más eficaces que las suyas, y familiarizarse con ellas.”(p.34).

Resistirse a cambiar la forma de enseñar: El profesor al ser un profesional en los temas relacionados con la didáctica, debe estar en constante evaluación y reflexión sobre sus prácticas. Es muy mencionado que el profesor en la práctica reproduce lo que vio de sus profesores, como lo refiere Porlán, *et al* (1997), el actuar del profesor está dado por los guiones y rutinas de acción, el cual es un saber que se adquiere en gran parte siendo alumnos. Así entonces, desde la formación el profesor, debe poseer herramientas necesarias para que sea capaz de replantear sus prácticas favoreciendo los avances, para lograr que la disciplina sea enseñable, así mismo, respecto a la disciplina que enseña, debe tener claro que no está enseñando el conocimiento científico, sino que está enseñando un conocimiento que al ser transmitido por otros se ha transformado a partir del devenir de la escuela, el lenguaje, la comunicación y el contexto los cuales juegan un papel importante en la construcción de saberes. Para Davini (2008):

...se ha insistido en la necesidad de favorecer el desarrollo reflexivo y crítico de los docentes para comprender y operar en la enseñanza, o para transformar la trama de significados previos que ellos mismos arrastran, incorporados en su propia trayectoria social y escolar. (p.50)

CAPÍTULO V: RELACIONES ENTRE ENSEÑANZA DEL MOVIMIENTO UNIFORMEMENTE ACELERADO Y LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA A LA LUZ DEL CONTEXTO DE LA FÍSICA Y LAS MATEMÁTICAS

Este capítulo, se divide en cuatro momentos, el primer momento trata sobre algunas investigaciones en el marco de la enseñanza de las matemáticas y la enseñanza del concepto función y función cuadrática. Para el segundo momento, se muestra lo propio de las investigaciones realizadas en torno a la enseñanza de la física y la enseñanza del movimiento uniformemente acelerado. El tercer momento, trata de la relación entre la física y las matemáticas, alrededor de la enseñanza de los objetos en cuestión. Para la presentación de las investigaciones se tienen en cuenta los objetivos, metodología (sujetos u objetos de estudio, instrumentos) y conclusiones. El cuarto momento, con el fin de vislumbrar las posibles divergencias y/o convergencias entre la didáctica del MUA y la didáctica de la FC, se presenta un análisis poniendo en juego lo encontrado en las diferentes investigaciones y desde cinco aspectos: objeto didáctico; conocimiento del profesor; medios para la enseñanza; instrumentos para la enseñanza; y metodologías para la enseñanza.

La mayoría de las publicaciones consultadas emergen de las problemáticas que se evidencian en la enseñanza de las dos disciplinas de conocimiento ya señaladas, donde los sujetos de estudio pueden ser, según las características de la investigación, el profesor y/o estudiante; en tanto que los objetos de estudio se relacionan con el conocimiento del profesor, la enseñanza y el aprendizaje.

5.1 Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

En lo que sigue en este apartado, se analizan cuatro artículos con los que se busca abordar preguntas relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, a saber: ¿cuáles son los conocimientos que debe poseer el profesor de matemáticas para que lograr óptimos procesos de enseñanza?

Sobre el conocimiento del profesor, Pinto & González (2008) hicieron una revisión teórica del conocimiento didáctico del contenido CDC del profesor de matemáticas. Dividieron el trabajo en tres partes, en la primera, reconocieron los fundamentos teóricos del CDC elaborados por Shulman (1987), quien referenció los conocimientos del profesor en siete categorías: conocimiento de la materia; conocimiento didáctico del contenido; conocimiento pedagógico; conocimiento curricular, conocimiento de los educandos, conocimiento del contexto educacional, y conocimiento de los objetivos. En la segunda parte, resaltan la importancia del CDC desde dos campos: como modelo teórico en la formación inicial y permanente de los profesores y el otro pensado como objeto de estudio y de investigación. En la tercera parte, realizan una revisión de las investigaciones realizadas sobre el tema a nivel internacional. Concluyen, que las investigaciones sobre el CDC permite un acercamiento teórico y práctico hacia lo que requieren los programas de formación para lograr que el conocimiento sea transformado para la enseñanza; comprender la realidad escolar; generar estrategias para la enseñanza de las matemáticas; conocer cómo se desarrolla la realidad escolar; clarificar la comprensión y significado de las matemáticas, y generar un repertorio de estrategias o representaciones instruccionales.

Acerca de los problemas en el aprendizaje de las matemáticas, Aparicio (2007) diseñó un diagnóstico acerca de las causas de los altos índices de reprobación y rezago en la asignatura de cálculo en la Facultad de Ciencias exactas de la Universidad Autónoma en México en seis licenciaturas. La investigación se llevó a cabo en tres etapas: 1. Diagnóstico de los posibles factores que influyen en la problemática en cuestión. 2. Basado en el punto anterior, elaboró un diseño de estrategias para entender la reprobación. 3. Implementó acciones y estrategias, académicas y administrativas, con el fin de reducir la reprobación y rezago. Para cada etapa, realizó diferentes actividades como análisis de libros de texto, revisión de los programas académicos, estudio de las diferentes dificultades que presentan los estudiantes al entender y aprender los temas del cálculo. Para el autor, la problemática se presenta desde el funcionamiento del contrato didáctico (profesor, alumno y saber), por este motivo centra la investigación desde dentro, en donde analiza: las prácticas de aula; el comportamiento de los estudiantes; las costumbres didácticas del profesorado; el análisis del discurso matemático escolar y la estructuración de contenidos temáticos. Encuentran que: en las prácticas de aula prevalecen las clases tradicionales de tipo expositivas-discursivas; los estudiantes, para la

resolución de problemas utilizan métodos de tipo algebraico y se resisten a utilizar soluciones visuales; la forma como los estudiantes plantean la resolución de problemas, viene de replicar la forma como se desarrollan los contenidos en la clase; los profesores, ven el cálculo como una herramienta, sin embargo, desconocen las aplicaciones y las características únicas del objeto de enseñanza.

Por su parte, Martínez, Torres, Tellería & Dibut (2007) proponen el diseño de una estrategia didáctica diseñada para la universalización, con el fin de contribuir con la flexibilización en la enseñanza aprendizaje de las matemáticas en carreras universitarias (contabilidad, ingeniería industrial e ingeniería agrónoma) donde sus currículos incluyen el cálculo diferencial e integral como disciplina básica. Explican que con el currículo flexible, el conocimiento atiende las necesidades e intereses de los estudiantes, en tanto que los profesores son los agentes principales para generar los cambios. Este currículo propicia el desarrollo individual, social y profesional. Está enmarcado dentro del constructivismo, en el que los estudiantes llegan al conocimiento de forma significativa, en donde el estudiante aprende un contenido, le da un significado, y se logran interacciones entre conocimientos previos y los nuevos conocimientos, lo que se consigue si el profesor utiliza métodos eficaces, domina un conjunto de competencias y toma decisiones adecuadas.

La estrategia se diseña para ser aplicada en el currículo de la educación superior, se desarrolla en tres fases: 1. Preparatoria, se tiene en cuenta la preparación de los profesores; se revisan las necesidades de los estudiantes; se realiza el diagnóstico de conocimientos previos; se aplican las tecnologías de la información como medio fundamental; se prepara la evaluación de forma individual teniendo en cuenta las características de cada individuo. 2. Implementación, se hace un análisis de lo diseñado, en el que se tiene en cuenta la estructura basado en objetivos, contenidos, métodos, medios y evaluación. 3. Control, se analizan los resultados; se tienen en cuenta aspectos observables y medibles; se hacen conclusiones de los resultados y si es necesario se realizan modificaciones.

En este mismo sentido, con el fin de hacer un acercamiento sobre las competencias que posee el profesor de matemáticas y obtener un diagnóstico actual de la enseñanza Farfán & Sosa (2007),

elaboraron un estudio de las concepciones de cinco profesores de bachillerato acerca de la naturaleza de las matemáticas, la enseñanza y su aprendizaje. Por medio de tres instrumentos: dos cuestionarios; uno para obtener indicios de las ocho concepciones iniciales del profesor (Pensar y razonar; argumentar; comunicar; modelar; plantear y resolver problemas; representar; utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas; utilizar ayudas y herramientas), y el otro, para indagar sobre posibles capacitaciones y actualizaciones del profesor; finalmente una entrevista estructurada, para profundizar en las concepciones del profesor. Para la recolección de datos utilizaron grabaciones de clase y para la entrevista grabaron un video en el que el profesor contaba la metodología de clase.

Los autores analizaron, tres tipos de concepciones: matemáticas, en las que predomina la concepción platónica, es decir, como un conocimiento preexistente a descubrir; tendencia didáctica en la que prevalecen las clases tradicionales en la que el profesor expone el tema, propone un ejemplo y plantea una serie de ejercicios a solucionar por parte de los estudiantes; las concepciones sobre enseñanza y aprendizaje, prevalece el instrumentalismo, centrado en el estudiante. Concluyen que estas concepciones pueden depender de sus creencias, valores, proposiciones y principios, con respecto a las competencias iniciales, se evidenció que los profesores no lograron el desarrollo de las ocho competencias previamente establecidas.

De las investigaciones expuestas en esta primera parte, se puede notar que el conocimiento del profesor de matemáticas está dado por una serie de conocimientos propios, los cuales se ponen en juego para la creación de estrategias apropiadas para la enseñanza de las matemáticas, están bajo la influencia de sus creencias; sus propias concepciones sobre los objetos a enseñar y sobre la didáctica de ese conocimiento. Con el desarrollo de la didáctica de las matemáticas en lo atinente a constructos tales como la transposición didáctica de Chevallard, los sistemas didácticos de Brousseau y el CDC de Shulman, se busca hacer entendible el conocimiento del profesor, en donde se pone en juego no solo el conocimiento disciplinar, sino el conocimiento didáctico, lo que conduce a pensar y reflexionar en temas sobre el desarrollo de la práctica docente en torno a la elaboración del currículo; la planeación e implementación de medios; la creación de sistemas didácticos; la transposición didáctica y la elaboración de la evaluación.

Ahora bien, el profesor debe tener en cuenta por un lado los medios adecuados para lograr la enseñanza de objetos matemáticos, como la resolución de problemas; el análisis de libros y las representaciones. Por otro lado, tiene en cuenta características, conocimientos previos e intereses, que poseen los estudiantes, sobre las matemáticas, razón por la cual, la enseñanza no es una relación unívoca, en el sentido que no todos los estudiantes entienden ni aprenden de la misma manera, ni tampoco unilateral, no sólo el profesor transmite conocimientos por medio de clases expositivas-discursivas en las que el estudiante asimila los conocimientos transmitidos, mostrando que las matemáticas es un conocimiento rígido y absoluto, en donde el estudiante, se remite a seguir pasos en la resolución de problemas sin realizar análisis complejos e interpretaciones de la realidad, por el contrario todos participan de forma dinámica en la construcción del conocimiento.

5.1.1 La enseñanza de función y función cuadrática

La enseñanza de objetos matemáticos ha representado un problema para los investigadores y profesores de matemáticas, para el caso de esta tesis de Maestría en Educación, es motivo de análisis la enseñanza del concepto de función y función cuadrática.

En tal sentido, se ha realizado algunas investigaciones, Amaya, Pino & Medina (2016), con el objetivo de evaluar el conocimiento matemático de los profesores en formación, y avanzar en la transformación de sus representaciones sobre el concepto de función, caracterizaron sus conocimientos. Evaluaron lo que los profesores comprenden sobre funciones y la forma como comunican sus comprensiones a los estudiantes. Para ello utilizaron la dimensión matemática, que se divide en dos subcategorías, la primera subcategoría denominada el conocimiento común del contenido, es el conocimiento que comparte el profesor con sus estudiantes para orientar la resolución de problemas; la otra subcategoría llamada conocimiento ampliado del contenido, es el conocimiento que permite organizar y estructurar los conceptos a enseñar según el nivel de educación; así como, seleccionar las representaciones más adecuadas para la enseñanza de la función cuadrática.

Los autores concretaron una muestra de 90 profesores en formación (28 de tercer semestre; 28 de sexto semestre; y 34 de octavo semestre, de la Universidad de Sucre, Colombia), a los cuales se les aplicó un cuestionario de siete preguntas, a partir de una situación sociocultural representada en una gráfica de costos e ingresos para la producción de un libro. Las preguntas y sus correspondientes categorías fueron:

Tabla 5.1: Tabla de categorías y preguntas, de los indicadores que determinan la relación entre el concepto de función y el contexto sociocultural. (Tomada de Amaya, *et al.* 2016).

Categoría	Pregunta
Identificación y uso del intercepto al origen en una función.	¿Cuáles son los Costos, los Ingresos y la Ganancia por producir y vender 0 ejemplares?
Identificación y uso de los intervalos de variación de una función.	¿Dentro de qué límites se debe mantener la oferta para obtener ganancias?
Determinación de los máximos y mínimos de una función.	¿Cuántos ejemplares se deben producir y vender para obtener la máxima Ganancia?
Identificación y uso del concepto de pendiente de una recta.	¿Cuánto cuesta producir cada libro si no se consideran los Costos fijos de producción?
En el mismo plano coordenado realiza la gráfica de las Ganancias, Modelación matemática de una situación funcional.	Calcula una expresión matemática que permita un cálculo aproximado de las Ganancias.
Utilización del concepto de ecuación para encontrar una incógnita.	Si se sabe que se obtuvo una Ganancia de 20.000 pesos, ¿cuál fue el número de ejemplares que se debió producir y vender?
Analiza el crecimiento y decrecimiento de una función.	¿En qué intervalos crecen la funciones de Costos, de Ingresos y de Ganancias?

Amaya, *et al.* (2016), esperaban que los profesores en formación transformaran la representación gráfica a lenguaje coloquial y gráfico, este tipo de transformaciones son una herramienta para la enseñanza de objetos matemáticos. Sin embargo, la evaluación arrojó que existen dificultades en la noción de función y sus diferentes representaciones, particularmente en la identificación y uso de los elementos de las funciones involucradas, la identificación de los interceptos al origen sin ayuda gráfica y el análisis de los valores extremos, así como con los intervalos de crecimiento la modelación de las funciones y la identificación de la pendiente de la función lineal. Existe cierto distanciamiento entre el manejo del concepto de función a nivel escolar y el uso del concepto a nivel social.

Cribeiro, Madrid & Fraga (2013) hicieron un análisis reflexivo de los resultados obtenidos en las investigaciones hechas por Criberio y Madrid, en específico caracterizando lo que entienden los

estudiantes y profesores en torno a los conceptos relación, ecuación o función. El estudio tuvo como base la ingeniería; licenciatura en ciencias biológicas; licenciatura en matemáticas, maestría en matemática educativa de la Universidad de la Habana y la Universidad Autónoma de Coahuila. Para avanzar en el análisis plantearon las siguientes características para los conceptos en cuestión:

Si se tienen dos conjuntos A y B, se tiene una relación si los elementos del conjunto A (dominio) se relacionan con algunos elementos del conjunto de B (codominio); es una ecuación si, a cada elemento del dominio le corresponde un único codominio, el objetivo de la ecuación es encontrar el conjunto solución, que es otro objeto matemático; es una función si, cumple que cada elemento del conjunto A se relaciona con un elemento del conjunto B y también cada elemento del conjunto A le corresponde un solo elemento del conjunto B.

Para Cribeiro, *et al.* (2013), la primera característica no es determinante para tener una función, si se tiene en cuenta los conjuntos de llegada y partida. Una razón de no poder diferenciar entre los conceptos en cuestión es que se obvia la notación matemática. Proponen que al inicio del curso de cálculo diferencial en las universidades, se trabaje con una y varias variables, con el fin de que los estudiantes comprendan que el concepto de función varía de acuerdo al par de conjuntos con los que se trabaje y que lo puedan aplicar a los conceptos de derivada, límite, continuidad y diferencial.

Debido a la dificultad que presenta la enseñanza de la función cuadrática, Flores, Gaita & Carrillo (2013) presentan una metodología para el análisis de libros de matemáticas, establecida bajo la noción de praxeología y los indicadores de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). Analizaron la organización matemática del libro “*Matemáticas para el análisis económico*” de Sydsaeter, Hammond y Carbajal (2012), el cual es usado en la carrera de economía. Tuvieron en cuenta la organización didáctica; la forma como el libro desarrolló el objeto de enseñanza (función cuadrática); sobre la praxeología hacen seguimiento a las tareas, técnicas y tecnologías.

Resaltan la importancia de la organización matemática (OM) que hace referencia al objeto matemático y la organización didáctica (OD) que da cuenta de la construcción del conocimiento de dicho objeto matemático en un contexto de intención didáctica. Analizaron diez tipos de tareas: siete de ellas partían de la expresión algebraica de la función cuadrática para la que debían determinar el dominio e imagen; hallar los ceros; calcular los puntos de intersección con los ejes coordenados; identificar si la gráfica es cóncava o convexa; hallar la gráfica; determinar los coeficientes cuando vienen expresados como parámetros; hallar el valor máximo o mínimo que alcanza dicha función. Las otras tres tareas consistían en determinar la expresión algebraica de la función cuadrática a partir de la gráfica; dado un problema contextualizado interpretar modelos económicos con respecto a máximos y mínimos; y modelizar los fenómenos del mundo real utilizando funciones cuadráticas. Cada tarea debía tener diferentes técnicas; usar representaciones del objeto matemático; incluir modelización e incluir el estudio de casos diferentes. Concluyen que, las tareas que desarrolla el libro contribuyen a relacionar la representación gráfica con la analítica y resaltan que la mayoría de las tareas están en función de la expresión algebraica, a lo que sugieren hacer una contextualización previa y potencializar la interpretación, modelización y traducción.

Con el objetivo de motivar a los profesores e investigadores en didáctica de las matemáticas a incluir el desarrollo histórico y sugerir actividades para la enseñanza del concepto de función Ugalde (2013) hace una revisión del desarrollo histórico del concepto de función, dividido en ocho periodos, los cuales se presentan aquí brevemente:

Tabla 5.2: Tabla elaborada a partir de los periodos establecidos por (Ugalde, 2013).

Periodo	Descripción
Babilónico y egipcio	Identificaron la dependencia entre cantidades como se evidencia en las tablas de arcilla y los papiros.
Griego 600 AC a 400 DC	Es más claro el concepto de dependencia entre cantidades, con Arquímedes quien estableció la ley de la hidrostática y Euclides que estableció que por dos puntos distintos sólo pasa una línea recta.
Oriental y semítico 600 AC y siglo XIV	Para la época habían avanzado en la trigonometría y dieron las bases para el álgebra y la aritmética.
Edad media siglo V y XIV	Utilizaron letras del alfabeto para expresar relaciones de tipo funcional; Oresme diseñó una versión remota de representación gráfica para modelar fenómenos naturales con características variables.
Renacimiento siglo XV y XVI	Usaron símbolos para representar los objetos matemáticos y

	dieron un nuevo enfoque para estudiar los fenómenos naturales de forma experimental y física, en donde el estudio de variables se daba por medio de relaciones, expresiones numéricas y representaciones.
Siglo XVII y XVIII	Estudiado por diferentes científicos como Descartes que expresó el sistema coordenado, Fermat encontró ecuaciones para la recta, la circunferencia, la elipse, la parábola y la hipérbola, Galileo usó fórmulas para relacionar cantidades.
Siglo XIX	Se da una definición rigurosa del concepto, se establece el concepto de dominio y de correspondencia uno a uno.
Siglo XX y XXI	La definición se establece dentro de la teoría de conjuntos y se utiliza la noción de gráfico para darle sustento.

Después de hacer la descripción del desarrollo histórico, Ugalde (2013) analizó los tipos de representaciones de la función cuadrática que son descripción verbal, diagramas, tabla de valores, gráfica y relación algebraica, a partir de las representaciones, propuso actividades para la enseñanza del concepto de función, algunos son:

Tabla 5.3: Tabla elaborada a partir de las actividades propuestas para la enseñanza de la función cuadrática por (Ugalde, 2013).

Actividad	Ejemplo
Uso de ejemplos sobre correspondencia o relación	Para los niveles más elementales, unir números con la cantidad adecuada de elementos.
Uso de sistemas coordenados	Sistema de calles y avenidas
Uso de la medición	Medir catetos o ángulos de planos inclinados
Uso de sucesiones que es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales y su codominio es cualquier conjunto	Su principal utilidad está en el concepto de convergencia; la monotonía, para concretar el concepto de función creciente.
Uso de los fenómenos periódicos	Los movimientos ondulatorios, que permiten estudiar fenómenos naturales con el estudio de funciones trigonométricas.
Uso de la escala y unión de puntos	Permite sacar conclusiones e interpretaciones adecuadas y no siempre la unión de puntos permite describir la realidad debido a la discontinuidad.
Uso de ejemplos numéricos	El área bajo la curva

Concluye que en el proceso de enseñanza el profesor debe buscar estrategias que permitan a los estudiantes identificar y relacionar con la realidad el concepto de función de tal forma que construyan el conocimiento, que debe ser reflejo del proceso histórico ya que es el mejor referente de obstáculos y catalizadores del concepto de función, el cual se ha dado por el deseo de entender la naturaleza. El reto para los profesores es preparar actividades encaminadas a que los estudiantes descubran el concepto de función; y que permitan mostrar que la función

cuadrática no es un proceso axiomático, sino por el contrario su desarrollo se ha dado con el objetivo de describir fenómenos de la naturaleza.

Vivas (2010) presenta los avances de una investigación sobre un instrumento para analizar la forma en que es presentada la función cuadrática en los textos escolares, tomando como eje la reforma educativa de 1993 de la ley Federal de Educación, ello en función de que el texto constituye para el profesor un pilar básico de enseñanza, sobre el cual el docente va a centrar su acción pedagógica, y es desde allí donde se dan los diferentes enfoques a una disciplina a lo largo del tiempo. Los textos se examinaron desde tres dimensiones: la dimensión formal (tipografía, colores, estilo de los títulos, conceptos claves, ideas principales, ilustraciones, distribución de contenidos, lenguaje); la dimensión epistemológica (responde a preguntas tales como qué es la matemática, cuáles son sus características, cómo se presenta a los estudiantes, para qué se estudia).

Estas preguntas tienen respuestas desde dos visiones epistemológicas. Una desde el cuasi-empirismo, en el que las matemáticas son absolutas universales y objetivas. Otra a partir del constructivismo, donde las matemáticas son un sistema complejo de conceptos y representaciones, los conocimientos revisables y las verdades son relativas); la dimensión didáctica (buscan elementos sobre la forma de abordar la función cuadrática y las diversas tendencias didácticas [tradicional, tecnológica, espontaneísta e investigativa]). Esta investigación fue de corte no experimental, considerada desde el punto de la temporalización como estudio longitudinal. El criterio de selección de textos fue tomar autores y editoriales más utilizados por los docentes en los últimos 40 años en Argentina.

Sobre el uso de la historia de la matemática en la enseñanza, Dalcín & Olave (2007) elaboraron una reseña sobre la forma como diferentes culturas trataron problemas matemáticos, que en la actualidad se solucionan con ecuaciones de segundo grado. Las culturas que tuvieron en cuenta fueron, los Babilonios (2000AC-600 AC), quienes hacían diferentes operaciones como multiplicación, división, cuadrados, cubos, y raíces cuadradas por medio de tablas. Los griegos, en la *proposición 5* de los *Elementos de Euclides* (300 AC), interpretan el rectángulo como la diferencia de cuadrados. En la cultura Hindú, Brahmagupta (598-660) aplicó los métodos del

álgebra a la astronomía, además le dio solución a la cuadrática. Por su parte, en la cultura Árabe, Mohammed ibn-Musa al-Jwarizmi (780 – 850 aprox.) en una de sus obras describe la solución de ecuaciones canónicas de primer y segundo orden y Francis Viéte (1540-1603), introdujo el uso de letras y le dio una nueva solución a la ecuación cuadrática, partiendo de una igualdad en la que la incógnita tomaba ciertos valores establecidos.

Dalcín & Olave (2007) concluyen que la importancia de la historia en la enseñanza de las matemáticas radica en que contribuye a entender que las ideas y las variaciones de las matemáticas se han desarrollado por un conjunto de hechos de acuerdo a las necesidades de la sociedad.

Por su parte, Ibarra & Fernández (2007) debido a los bajos resultados de las pruebas nacionales e internacionales, que comprueban que la enseñanza de la matemática no está siendo lo suficientemente óptima, y con el interés de contribuir en la búsqueda de alternativas para la enseñanza de las matemáticas, diseñaron, aplicaron y evaluaron una secuencia como herramienta para la enseñanza de la función cuadrática. Para la secuencia didáctica utilizaron la representación semiótica de Raymond Duval, la cual permite tres actividades que son: la formación de una representación identificable como imagen de un registro dado, el tratamiento de una representación y la conversión de una representación.

Los autores trabajaron en dos fases, para la primera fase elaboraron un pilotaje con el fin de obtener resultados en los conocimientos de los estudiantes frente al concepto de función cuadrática. Para la segunda fase implementaron la secuencia didáctica. Trabajaron con 15 estudiantes de primer año de bachillerato. En la fase inicial fueron divididos por grupos y se les entregó una cartilla con las actividades propuestas, posteriormente con el fin de evaluar la certeza de la secuencia didáctica se les hizo un cuestionario con ocho actividades, similares a las elaboradas en la secuencia didáctica, que resolvieron de forma individual, sin límite de tiempo. Finalmente elaboraron una entrevista, para indagar sobre las estrategias utilizadas por los estudiantes para solucionar dichas actividades. Para el registro de datos elaboraron una bitácora, grabaciones en video y registros escritos. Observaron que los estudiantes tenían disposición para solucionar y defender sus conclusiones en las actividades propuestas demostrando sus

conocimientos y habilidades, logrando institucionalizar el conocimiento adquirido, acogieron de igual manera las tres formas de representación de la función cuadrática dejando de lado la forma tradicional y lograron establecer el nuevo conocimiento.

Con respecto a la enseñanza del concepto de función en matemáticas, Ramírez (2007) menciona que a pesar de que el concepto de función se enseñe a lo largo de los años escolares, los estudiantes universitarios presentan dificultades al utilizarlo. Por este motivo el autor realizó un trabajo en el cual expuso ideas de las etapas para la enseñanza del concepto de función. Dichas etapas son: entender el concepto de correspondencia, transformación y función, sobre las fases en la enseñanza del concepto menciona tres que son: la preparación para el concepto, la formación del concepto y la asimilación del concepto. Trabaja sobre el concepto de función por la naturaleza modelizadora, la utilización para representaciones de la cotidianidad, el uso en otras profesiones como: la física; la ingeniería; la biología; la economía y dado que permite entender otros conceptos matemáticos como: derivada; límite; continuidad; integrales. Afirma que en la asimilación del concepto de función es necesario aplicar la modelación, sugiere la estructura de un trabajo didáctico tanto en matemáticas como en otras disciplinas. Para las carreras universitarias el trabajo didáctico debe modelar las situaciones propias de la profesión.

Con el fin de caracterizar el conocimiento didáctico de los profesores de matemáticas en formación Tovar & Triviño (2007) elaboraron un instrumento de recogida de información, para posteriormente hacer el análisis de los resultados. La metodología utilizada fue cualitativa descriptiva, en la que utilizaron las definiciones y los mapas conceptuales, relatados y elaborados respectivamente por cinco profesores de XI semestre, de la licenciatura en matemáticas y física de la Universidad de Amazonia, en torno al conocimiento que poseían sobre la estructuración de los sistemas de representación de la función cuadrática, dirigida a estudiantes de grado octavo (8) de educación básica secundaria. Para el análisis de las definiciones, tuvieron en cuenta, cuatro ítems del contenido matemático que son de orden: Algebraico, verbal, numérico y gráfico. Mientras que, para el análisis de los mapas tuvieron en cuenta las jerarquías y las conexiones creadas por los estudiantes que son: puntuales, globales, implícitas, explícitas, internas o externas. Del análisis de contenido hecho por los profesores en formación, concluyen que, por medio de los instrumentos diseñados, lograron caracterizar el conocimiento didáctico de los

profesores en cuestión, identifican carencias en el tratamiento integrado de la organización conceptual del contenido matemático. Finalmente notan que al hacer referencia al contenido matemático, los profesores en formación priorizan el lenguaje verbal, dando así una visión descriptiva y cualitativa de la relación funcional.

Gómez & Carulla (2001) presentan como los profesores de matemáticas se enfrentan cotidianamente a problemas complejos y hacen una reflexión del papel que juegan las nociones de estructura conceptual, sistema de representación y mapa conceptual como herramientas conceptuales y metodológicas para la práctica docente del profesor de matemáticas.

Indican que el conocimiento del profesor de matemáticas incluye el conocimiento didáctico y el conocimiento disciplinar, son los propicios para llevar a cabo los procesos de enseñanza de las matemáticas, que surge del diseño, puesta en práctica y evaluación de actividades en las que cada estudiante construye el conocimiento matemático en un ambiente de interacción social, en el que las representaciones de los objetos matemáticos son necesarios para una mejor comprensión, pero no hay que confundir entre el objeto matemático y sus posibles representaciones. Debido a la complejidad de las funciones las cuales se pueden representar mediante tablas, gráficas, expresiones analíticas (algebraicas) y verbales.

Sugieren que el profesor realice un análisis didáctico con cuatro componentes: el análisis de contenido, el profesor estructura el contenido matemático de forma didáctica, para esto, identifica conceptos a enseñar, por medio de procedimientos como sistemas de representación y modelización; el análisis cognitivo, el profesor identifica las dificultades y errores a los que los estudiantes se pueden enfrentar; el análisis de instrucción, del resultado de los análisis anteriores, el profesor elabora y valora las actividades que harán los estudiantes; y el análisis de actuación, el profesor analiza las acciones de los estudiantes con el fin de determinar su etapa cognitiva frente al objeto enseñado. Este análisis es el que los autores denominan conocimiento didáctico, el cual está compuesto por elementos teóricos y conceptuales que son los organizadores de currículo para algunos autores.

Gómez & Carulla (2001) concluyen que si el profesor de matemáticas asume una posición constructivista del aprendizaje en el aula de clase, entonces se enfrenta a varias preguntas: ¿cómo debe ser la enseñanza?; ¿qué conocimientos debe tener el docente para poder diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de clase?; ¿qué tipos de análisis debe hacer para lograrlo?. Sobre el uso de los mapas conceptuales en la enseñanza del concepto de función, refieren que tiene dos ventajas, una es que permiten hacer descripciones no lineales y observar cómo se estructura la información debido a su carácter gráfico. Sobre los sistemas de representación, destaca que la importancia radica en que por medio de estos se pueden reconocer las características del objeto en cuestión.

De las investigaciones revisadas se encontró que el concepto de función es de gran importancia para las matemáticas y por consiguiente para la enseñanza, por diferentes razones, como la existencia del concepto desde el inicio de los números; por las múltiples aplicaciones que se pueden tener del concepto para la explicación de fenómenos cotidianos; la aplicación de modelos físicos, químicos, sociales, económicos; y porque es un concepto base para la enseñanza de otros objetos matemáticos, como la derivada y la integral.

Debido a la importancia del concepto de función y función cuadrática varios investigadores, se han cuestionado sobre los problemas que existen alrededor de su enseñanza, arrojando que dependen de varios factores, de los cuales el conocimiento del profesor juega un papel importante, ya que el profesor es quien debe lograr que el objeto de enseñanza se vuelva un objeto enseñado, de aquí entonces, que el profesor debe tener un amplio conocimiento disciplinar, en donde es necesario que logre comprender, aplicar y trasladar las distintas formas de representación del concepto de función y función cuadrática.

Para algunos autores como Tovar & Triviño (2007) las representaciones se dividen en algebraica, verbal, numérica y gráfica; mientras que para Gómez & Carulla (2001) son tabular, gráfica, analítica y verbal; para Ugalde (2014) son de tipo verbal, diagramas, tabular, gráfica y analítica. Teniendo en cuenta que, el profesor posee un conocimiento didáctico; que permite al conocimiento disciplinar pasar por un proceso de transposición didáctica, el cual faculta que el profesor organice, plantee y diseñe estrategias que proporcionen al estudiante herramientas para

aproximarse al conocimiento y a los diferentes tipos de representaciones de la función cuadrática de forma adecuada.

En la elaboración de estrategias, es el profesor quien propone una situación didáctica, la cual implica el uso de medios, como la resolución de problemas, los cuales deben ser producto del análisis consiente del profesor y de lo que él espera frente al conocimiento; la historia de las matemáticas, que permite al profesor mostrar la importancia del desarrollo del objeto a través de los años en la sociedad; y la modelación de fenómenos, que contribuye a aproximar el objeto de estudio a la aplicación en diferentes contextos relacionados con la realidad de los estudiantes, en este punto es importante mencionar que uno de los modelos más aplicados es el de movimiento que se relaciona con la dependencia del tiempo, en el cual, se evidencia el desarrollo bilateral de las matemáticas en el desarrollo del concepto de función con el desarrollo del concepto de movimiento, específicamente la función cuadrática y el movimiento uniformemente acelerado.

Las investigaciones se basan en un nuevo paradigma, en el que las matemáticas no son una disciplina cerrada, terminada y con una realidad absoluta, por el contrario con la utilización de la historia del concepto de función, el análisis y nuevo planteamiento de la resolución de problemas, en el que se encuentra inmerso la modelación de fenómenos cotidianos, que permitan que el estudiante por medio de actividades de aprendizaje analice y aplique los conocimientos adquiridos sin acudir a mecanicismos y reproducción de algoritmos. Se busca entonces, que tanto el profesor en formación como el profesor experto, entienda que desde su conocimiento profesional, es quien plantea los procesos de enseñanza en donde es importante manejar metodologías basadas en el constructivismo y herramientas como las TIC, que permiten entender y conocer a los estudiantes frente a lo que saben del objeto a enseñar; sus intereses particulares; las dificultades a las que se enfrentan; y lo que esperan aprender.

5.2 Enseñanza y aprendizaje de la física

Sobre la epistemología en la enseñanza de la física, Massoni & Moreira (2010) realizaron un relato y análisis de las concepciones epistemológicas y el aporte para el aprendizaje de la física, de un profesor de secundaria de Porto Alegre Brasil, quien ya había participado en dos estudios

anteriores en los que habían indagado sobre sus concepciones. En esta tercera investigación hicieron un estudio de caso etnográfico: seguimiento durante un semestre, de las clases de física, el análisis sobre sus prácticas en el aula y los aportes de las concepciones para lograr que sus estudiantes llegaran a un aprendizaje significativo. Encontraron que en el proceso de enseñanza aprendizaje intervienen varios aspectos como: el aula de clase; la disposición de los estudiantes y del profesor; la cantidad de estudiantes; las metodologías utilizadas por el profesor; y el currículo.

Por otra parte, afirmaron que aunque las prácticas del profesor, mostraban que la física se establece de forma tentativa, hipotética y provisional; regidas bajo las concepciones epistemológicas contemporáneas del conocimiento, como las establecidas por: Popper (racionalismo crítico, el conocimiento científico es de naturaleza hipotética y las teorías son verificadas); Kuhn (la ciencia crece de forma dinámica, tiene un modelo revolucionario, seguida por paradigmas); Lakatos (Sustitución de teorías que mejor explican la naturaleza); y Toulmin (la base del conocimiento científico está en el cambio conceptual, el conocimiento está en continua evolución), en ocasiones en la práctica del docente, hacía falta la explicación a los estudiantes sobre la metodología utilizada y el objetivo de la clase; así como las explicaciones oportunas y finales de lo establecido por la comunidad científica.

Carnivo & Lopes (2003) identifican el fracaso en el aprendizaje de la física y lo atribuyen a la calidad en la enseñanza. Con el fin de valorar la calidad del aprendizaje y contribuir a mejorarla, exponen una herramienta para el estudio de la eficacia del aprendizaje de la física, de las universidades portuguesas en las carreras de ciencias e ingeniería. Desarrollan un marco teórico acerca de los tipos de aprendizaje de los estudiantes y los enfoques de enseñanza de los profesores, los cuales son: aprendizaje superficial es memorístico, pero no se comprende el tema de estudio y la enseñanza se basa en los intereses del profesor; aprendizaje profundo se llega a una comprensión, en este caso la enseñanza se basa en las necesidades e intereses de los estudiantes; finalmente el rendimiento elevado en este tipo de aprendizaje el objetivo es tener reconocimiento académico y buenos resultados.

Analizaron tres actividades en la enseñanza de la física: la resolución de problemas, las cuales deben acercarse a la realidad de los estudiantes; el aprendizaje de conceptos, que debe ser una consecuencia de las estrategias de enseñanza y las prácticas experimentales, que deben ser en contexto y transformadas de forma abierta. Finalmente, basados en el marco teórico elaborado, construyen la estrategia de evaluación llamada “tool box”, que consiste en una serie de instrumentos que permiten medir la calidad de los aprendizajes. Por un lado tienen indicadores directos que son resultados académicos, mapas conceptuales y modelizaciones de una situación física y por otro indirectos que son cuestionarios de los enfoques de aprendizaje de los estudiantes y cuestionarios de los enfoques de enseñanza de los profesores.

Aduriz & Morales (2002) realizaron una revisión teórica al concepto de modelo científico y modelo didáctico para la enseñanza de la física, se basaron en tres disciplinas. 1 epistemológica, se basa en el concepto de representación, en la que las teorías científicas tienen transformaciones conceptuales y lingüística, dentro de estas transformaciones, existen diferencias entre: realidad empírica y sistema teórico, sistema teórico y modelo científico, modelo científico y modelo didáctico este último supone transposición que transforma los contenidos. 2 didáctica, se establece en el concepto teórico metacognición, donde el uso de analogías juega un papel importante, tanto en los modelos científicos que da cuenta de las semejanzas entre las teorías y el mundo como en los modelos didácticos que es una de las primordiales funciones semióticas para la transposición didáctica, 3. Retórica, este último se basa en el concepto de metáfora, que es una estrategia lingüística que permite reconstruir relaciones de la física erudita en el aula.

Con el objetivo de analizar aspectos didácticos en la enseñanza de la física en la universidad de carreras técnicas, Beléndez (1996) tuvo en cuenta, las diferentes etapas de los procesos de enseñanza objetivos, contenidos, actividades, procedimientos, y evaluación. Revisó cuatro formas didácticas: clases teóricas, para las que el profesor debe permitir que los estudiantes, interactúen y participen, *lección dialogada*; resolución de problemas, no es suficiente con obtener un resultado numérico, se debe incrementar la capacidad de análisis de los estudiantes, permitiendo que expliquen la pregunta, discutan los principios a aplicar, den una solución matemática y analicen el resultado obtenido; prácticas experimentales, es un método fundamental y complementario en la enseñanza, que introduce al alumno al método científico,

donde el profesor permite que el estudiante sea el principal protagonista, permite que resuelva sus dudas ya que une lo estudiado en las lecciones dialogadas, la resolución de problemas y la realidad científica; y tutorías, permite el acercamiento entre el profesor y el estudiante, así, el profesor interactúa con cada estudiante, reconociendo de forma personal el nivel de progreso, los posibles errores conceptuales y recomendar material bibliográfico.

En estas formas didácticas están presentes los recursos didácticos (tablero, libros, videos, películas, experimentos, demostraciones). Sobre la evaluación alude que es un aspecto complejo, que depende de las cuatro formas didácticas estudiadas anteriormente, donde se consideran aspectos que van más allá de la visión clásica de medir lo que el estudiante sabe y no sabe. Algunos aspectos son conocimientos adquiridos; la capacidad de razonamiento; la habilidad en la resolución de situaciones; la capacidad de análisis; la capacidad de observación; la elaboración de informes; el trabajo personal; la habilidad en el manejo de variables y materiales y la actividad científica.

En otra investigación, Gil Pérez, Martínez & Senent (1988) abordaron de forma crítica, el fracaso de la resolución de problemas en la enseñanza de la física, centrandó la mirada a cuestionarse sobre el que hacer del profesor y las implicaciones en el fracaso de los estudiantes al momento de solucionar problemas. Hacen una crítica a la forma tradicional, el operativismo y la mirada superficial, que se le da a la enseñanza de la física. Proponen que el profesor debe replantear los problemas, de tal manera que permitan que el estudiante haga un análisis cualitativo y formule una hipótesis a comprobar, poniendo en juego las estructuras conceptuales y la imaginación creativa. Aseguran que al replantear los problemas, no solo se reduce el fracaso en la resolución de problemas, si no que habrá un cambio en lo metodológico y en las actitudes, que favorecen en la interacción estudiante y profesor, por consiguiente al aprendizaje de la física.

La enseñanza de la física, continúa siendo un problema de investigación debido a la complejidad y al fracaso que evidencia su aprendizaje.

En tal sentido, las investigaciones revisadas tienen varios puntos en común, como la importancia epistemológica de la física en la enseñanza, que permite evidenciar que las construcciones y avances de la ciencia han estado encaminadas al entendimiento y explicación

de los fenómenos cotidianos, llevando a una permanente evolución y desarrollo de la física. Hay que destacar, que el profesor es el encargado de analizar su práctica y estar es constante cambio en cuanto a la organización de contenidos, la elaboración del currículo y la evaluación, atendiendo a la necesidad de la sociedad, y a los cambios de pensamiento sobre la enseñanza, en donde se dejan de lado las clases tradicionales, en las que el profesor es quien trasmite información y el objetivo es que los estudiantes memoricen fórmulas y la apliquen de forma mecánica en la resolución de problemas, por el contrario se imponen metodologías constructivistas en las que el profesor y los estudiantes actúan de forma activa en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

En consecuencia, los medios de enseñanza son replanteados y tienen otro enfoque, en la enseñanza de la física los más comunes son las clases teóricas, en las que se debe tener en cuenta las ideas previas y permitir la participación activa de los estudiantes, se privilegian el uso de analogías, de la historia de la disciplina, las representaciones y transformaciones conceptuales y lingüísticas; la resolución de problemas, en las que no lleve al estudiante a una solución mecánica, sino que permita que el estudiante analice, proponga soluciones y confronte sus conocimientos y planteamientos con otros estudiantes y con el profesor, permitiendo así un análisis no sólo del proceso de solución sino también de los resultados obtenidos; y las prácticas experimentales que aproximen a los estudiantes al que hacer científico, que permitan indagar, enfrentarse a problemas y plantear las soluciones. Se potencializa el uso de instrumentos para la enseñanza como el uso de material visual, las demostraciones y los experimentos. De esta manera, se presenta la física como una disciplina dinámica y no terminada, que tiene aplicaciones en la cotidianidad, ya sea en el día a día como en la aplicación para las distintas carreras profesionales.

5.2.1 Enseñanza del movimiento uniformemente acelerado

Con el fin de investigar la problemática del aprendizaje de la cinemática en los estudiantes de Física I en la Universidad de la provincia de Pichincha, Díaz, Abril, Díaz & Bravo (2017) elaboraron una propuesta didáctica, fundamentada en la metodología aprendizaje basado en

proyectos (ABP) y el uso de las TIC, para lo cual, utilizaron los ocho pasos del ABP sugeridos por Lamb, Smith & Johnson (1997) como lo muestra la tabla 5.4

Tabla 5.4: Tabla elaborada a partir de los pasos del ABP seguidos por (Díaz, *et al* 2017).

PASOS	ACTIVIDAD
La exploración	Requiere que el estudiante lea y analice el escenario del problema.
El cuestionamiento	El estudiante realiza una lluvia de ideas.
La búsqueda	El estudiante hace una lista de aquello que se conoce del problema.
La evaluación	El estudiante usa la información.
La síntesis	El estudiante procesa e integra la información.
La creación	El estudiante desarrolla el producto.
La comunicación	El estudiante informa los resultados y obtenga retroalimentación.
La valorización	El estudiante valora el proyecto y reflexiona sobre el proceso.

Díaz, *et al* (2017) evidenciaron tres problemas fundamentales que son: la falta de conocimientos previos en cinemática; bajo nivel de matemáticas; poco uso de las TIC por parte de los docentes y estudiantes. Esta investigación cuasi experimental ayudó a encontrar una base sólida conceptual sobre las recomendaciones metodológicas conceptuales; por medio del ABP los estudiantes aprenden a resolver problemas complejos y reales, se aprende de manera crítica y reflexiva, el realizar proyectos ayuda a generar conocimiento significativo, se promueve el descubrimiento, la curiosidad y el análisis, se genera un trabajo comparativo y colaborativo, se permite un mejor proceso de evaluación, las TIC permiten apoyar, facilitar y producir un conocimiento más creativo y eficaz.

Al reconocer el carácter mecanicista en la resolución de problemas de cinemática, donde la finalidad es encontrar la fórmula que lleva a la solución, Sánchez (2017) elaboró e implementó una estrategia de aula. En el artículo, muestra los resultados de la implementación de la propuesta basada en la resolución de problemas y el uso de la integral y derivada en la enseñanza y aprendizaje de la cinemática. El diseño metodológico utilizado fue cuasi-experimental y los sujetos de estudio fueron 90 estudiantes de Ingeniería Civil de la Universidad de Bío-Bío, divididos en dos grupos, uno llamado grupo experimental con el que se trabajó la propuesta de aprendizaje basado en el uso de la integral y la derivada llamado grupo experimental y otro grupo denominado grupo tradicional, con el que se trabajó la metodología tradicional por medio de clases expositivas de transmisión de contenidos acabados y el uso de ecuaciones generales en la resolución de ejercicios.

Para los dos grupos se les aplicó un pre y post test, en los que revisaron: los conocimientos previos, relacionados con vectores y cinemática; el rendimiento escolar, por medio de un certamen que contiene tres problemas relacionados con vectores, movimiento en una dimensión y movimiento en dos dimensiones; la estabilidad del aprendizaje, para el cual se diseñaron tres test con seis preguntas con características similares al aplicado en el rendimiento académico. Para el análisis de los datos utilizaron estadística descriptiva U de Mann Whisney, que permite contrastar las diferencias significativas entre los grupos. Los análisis de los resultados, arrojaron que en el pre test no había diferencias entre los dos grupos. Para el post test, los resultados variaron significativamente, lo que indicó que estas diferencias se deben a la implementación de la propuesta de aula.

Para el autor, la propuesta favoreció el describir e interpretar los problemas y ejercicios, debido a que son planteados a través de un modelo único, con base en la derivada y la integral, que resalta la interpretación física del problema y no el uso de fórmulas a memorizar. De esta manera, se puede evidenciar que los contenidos de cinemática comprenden un conjunto de conceptos, principios, leyes y reglas a aprender significativamente.

Los ejercicios trabajados bajo el método único, favorecen la interpretación física y el reconocimiento de condiciones de frontera iniciales y finales. Establece el impacto del uso de la integral y la derivada como método único de resolución de ejercicios en el rendimiento académico y la estabilidad de los aprendizajes en cinemática, de estudiantes de Ingeniería. La finalidad de la intervención fue aportar significado y sentido físico a todo el desarrollo matemático involucrado en la solución de los ejercicios y problemas. Dando resultados óptimos y muestran diferencias estadísticamente significativas a favor del grupo experimental.

Sandoval, García, Mora & Suárez (2017) muestran los resultados obtenidos frente a la aplicación de una estrategia didáctica basada en experimentos para optimizar la comprensión gráfica de la cinemática. Aplicaron la estrategia a cuatro grupos, tres de ellos eran estudiantes de ingeniería ambiental e ingeniería industrial del Instituto Tecnológico Superior de Comalco, con ellos trabajaron con la metodología tradicional y con un grupo de ingeniería petrolera de la

Universidad Politécnica del Golfo de México, con ellos se trabajó aprendizaje basado en experimentos (ABE).

Dentro del diseño de la estrategia se analizaron temas de movimiento rectilíneo uniformemente y movimiento rectilíneo acelerado. Los grupos se subdividieron en equipos de cuatro integrantes, los cuales analizaron y discutieron diversas actividades conceptuales, consecutivamente elaboraron cinco experimentos, tres sobre movimiento rectilíneo uniformemente, cuyo objetivo fue reconocer y determinar la velocidad constante por medio del concepto de pendiente de la línea recta; y dos sobre movimiento rectilíneo acelerado, en los que analizaron e interpretaron tres tipos de gráficas, con sus relaciones matemáticas y físicas: posición vs tiempo, distribución cuadrática en el tiempo; velocidad vs tiempo, distribución lineal en el tiempo; aceleración vs tiempo, distribución lineal horizontal. Para cada experimento entregaron un reporte en los cuales, encontraron el modelo matemático, encontraron e interpretaron estándares; se hizo una retroalimentación para recordar los conceptos estudiados; las características de las gráficas y la relación con el movimiento de los cuerpos.

Para medir los niveles de interpretación y comprensión gráfica se utilizó el test TUG-K en el pre test, se encontraron que el nivel de análisis de los cuatro grupos es similar, evidenciaron dificultades para elaborar cálculos de aceleración a partir de la gráfica de velocidad vs tiempo, quiere decir que no reconocen la relación entre la pendiente de la recta y el fenómeno físico, tampoco calcularon el desplazamiento por medio de la gráfica de velocidad vs tiempo, es decir no interpretan el área de bajo la gráfica como el desplazamiento recorrido, por último, no describen textualmente la gráfica, quiere decir que no relacionan, ni transforman de un tipo de representación a otra.

En el pos test, los resultados cambiaron según la metodología aplicada, en los grupos que se trabajó de forma tradicional, los resultados no fueron favorables ya que no superaron las dificultades evidenciadas en el pre test; mientras que con el grupo que se trabajó el ABE los resultados mejoraron, los estudiantes lograron determinar la velocidad y la aceleración de un cuerpo por medio de la pendiente; también lograron calcular el desplazamiento del cuerpo a partir de la gráfica de velocidad vs tiempo; lograron interpretar el significado del área bajo la

curva, así mismo lograron transformar la representación gráfica a la textual y viceversa, sin embargo continúa la dificultad de calcular la velocidad por medio de la gráfica de aceleración vs tiempo.

Sandoval, *et al* (2017) concluyen que la prueba de hipótesis muestra que entre los grupos experimental y de control existen diferencias significativas en sus aprendizajes, estos resultados muestran que la estrategia desarrollada brinda mejores resultados que la tradicional. De esta manera, la propuesta metodológica logró mejorar de forma significativa el análisis de las gráficas de cinemática, interpretar los modelos matemáticos y hacer predicciones concretas a través de ellos.

Por esa misma línea, Salazar (2014) diseñó una unidad didáctica sobre la caída libre de los cuerpos, con la metodología de resolución de problemas, esto con el fin de desarrollar habilidades y actitudes científicas en los estudiantes de grado décimo. El problema emerge de hacer un análisis de las pruebas externas e internas realizadas en el Colegio Vista Bella IED, que dan cuenta de la poca apropiación que tienen los estudiantes en los conceptos relacionados con la caída libre de los cuerpos.

La primera etapa de la metodología fue una prueba diagnóstica y el análisis de resultados, que dieron lugar a la segunda etapa, que fue la elaboración e implementación de la unidad didáctica, que a su vez tuvo tres fases: 1. Diseño de actividades. 2. Ejecución, en la que se desarrollaron cinco aspectos: evaluación diagnóstica, actividades de exploración, actividades de socialización, actividades de resolución de problemas y actividades de síntesis. 3. Evaluación de logros alcanzados. Deduce que los estudiantes no tienen claridad en los conceptos en cuestión y la carencia de habilidades en la resolución de problemas. Además de la importancia de un cambio epistemológico y metodológico en la planeación de actividades y el planteamiento de problemas por parte de los profesores.

Ledesma & Pocovi (2013) presentan los resultados de una experiencia piloto realizada con 59 estudiantes que inician el curso de física en las carreras de Ingeniería de la Universidad Nacional de Salta. El estudio se realizó al identificar que a pesar de que los estudiantes en las carreras de

ingeniería logran hacer operaciones utilizando vectores, demuestran dificultades en la interpretación de magnitudes físicas de carácter vectorial como la aceleración, los autores sustentan que la problemática se da por diferentes circunstancias, que no están relacionadas con deficiencias en los conocimientos matemáticos, por el contrario es por no tener el claro concepto físico, confundir los conceptos velocidad y aceleración; por limitar la enseñanza a una definición operacional y a la resolución de problemas de forma mecánica.

Para la prueba piloto trabajaron desde dos perspectivas de aprendizaje:

- A partir de textos propuesta por Alexander y Kulicowich (1994) quienes estudiaron las características de los libros de física y encontraron que son de tipo bilingüe, compuestos por dos sistemas, uno simbólico que son la ecuaciones, gráficas y diagramas; otro que es lingüístico que son las explicaciones verbales del sistema simbólico. Para comprender lo que leen los lectores hacen traducciones entre ambos sistemas.
- Desde la perspectiva de cambio conceptual propuesta por Chi (1992), en donde aclara que el concepto aceleración es de tipo proceso debido a que posee atributos ontológicos que radican de la definición. Por ejemplo, la aceleración se debe a un cambio en la velocidad o la aceleración es variación de la velocidad. Más no es de tipo materia ya que no se le pueden atribuir características propias de la materia como que sea consumible o empujable.

Diseñaron cuatro textos que manejaron traducciones del sistema simbólico al lingüístico, sobre el concepto de velocidad y aceleración, enfocados en el carácter vectorial. Encontraron que para comprender el concepto de aceleración no es suficiente mostrar la expresión analítica; es necesario que los textos tengan un alto contenido lingüístico que incluyan la descripción de la ontología de la magnitud estudiada.

Respecto a la resolución de problemas, Torres (2013) critica la resolución mecánica de los ejercicios a lápiz y papel, en los que el estudiante no desarrolla criterios y argumentos para analizar gráficas y solucionar problemas de la vida cotidiana, demostrando que no tiene claridad

conceptual. El autor diseñó e implementó una estrategia didáctica, por medio de la resolución de problemas y el uso de software interactivo, basado en la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel, esto con el fin de superar la falta de claridad en los conceptos de la cinemática y lograr un aprendizaje significativo.

La investigación se realizó en tres etapas: 1. El diseño de la estrategia didáctica, creó una plataforma virtual, con la herramienta TIC moodle y planeó las actividades en siete subtemas: introducción; concepto de función y fenómenos físicos dependientes del tiempo; posición, velocidad y aceleración; movimiento rectilíneo; caída libre y lanzamiento vertical; movimiento parabólico; movimiento circular uniforme; y movimiento armónico simple. 2. La implementación, se hizo con un curso de 38 estudiantes de grado décimo de la Institución Educativa San Cristóbal, con una duración de 30 horas de clase, durante el segundo periodo académico. 3. La evaluación, hizo una observación inicial sobre las calificaciones y actitudes de los estudiantes, al final de la implementación elaboró un examen de 18 preguntas basadas en análisis e interpretación de gráficas y una encuesta para evaluar la motivación de los estudiantes frente a la estrategia. Concluye que los estudiantes presentaron una actitud positiva frente a la implementación y que los resultados académicos del segundo periodo mejoraron respecto al primer periodo.

Sobre el mismo medio de enseñanza Sánchez, Moreira & Caballero (2009) presentan las implicaciones didácticas del diseño y aplicación de una propuesta metodológica para la enseñanza y aprendizaje (EA), en la que abordaron los procedimientos, actitudes, principios y leyes que rigen la cinemática dentro de la asignatura Física I con 108 estudiantes de Ingeniería de la Universidad del Bío-Bío, Chile. La propuesta se centró en la resolución de problemas y el uso del cálculo diferencial, basado en la teoría adquisición de aprendizajes significativos, donde el estudiante a través de actividades de aprendizaje (AA) desarrolla tres habilidades que son interpretar, describir y transferir nuevos conocimientos a nuevas situaciones, de esta manera, se eliminó el automatismo y el mecanicismo asociado a las fórmulas y al aprendizaje memorístico.

Trabajaron con dos grupos de estudiantes, uno llamado grupo control se trabajó la metodología tradicional, clases expositivas, en donde se realizan demostraciones para encontrar las fórmulas

que posteriormente se utilizan en la resolución de ejercicios; el otro llamado grupo experimental, se trabajó la metodología activa-participativa por medio de la resolución de problemas y el uso del cálculo diferencial, en la que se propone una situación conductora, que a su vez se divide en una serie de problemas, que motiva a los estudiantes a realizar AA; genera la necesidad de investigación; y de compartir los resultados incentivando el trabajo colaborativo para llegar a la resolución del problema planteado inicialmente. Para comprobar y analizar los resultados de la implementación se elaboró un pre test y post test, las estrategias de aprendizaje se midieron por medio del Inventario de R. Schmeck que está conformado por 55 enunciados distribuidos en cuatro tipos de procesamiento: Elaborativo, metódico, profundo y retención de hechos.

Sánchez, *et al* (2009) concluyeron que la estrategia aplicada es una alternativa que permite cambios en el aprendizaje de los estudiantes, donde el grupo experimental en el procesamiento profundo y elaborativo (transferencia y abstracción de contenidos) mejoró de forma significativa en comparación al grupo de control. Con la aplicación de la propuesta más estudiantes lograron relacionar, comprender, abstraer y transferir contenidos aprendidos; los resultados establecen una influencia de la propuesta metodológica en el rendimiento académico de los estudiantes, esto se evidencia en los resultados de la evaluación de contenidos de cinemática.

De la encuesta de opinión infieren que la propuesta promueve en los estudiantes habilidades como buscar, resumir, organizar, transferir, comunicar información, sustentar, defender y respetar ideas. Motiva la interacción entre la triada estudiante, profesor y conocimiento. Frente al uso del cálculo diferencial concluyen que al describir los fenómenos de cinemática por medio de la derivación e integración, contribuye a eliminar el uso repetitivo de fórmulas y favorece el análisis de las condiciones físicas iniciales y finales.

Sobre la enseñanza de la mecánica, Adrian & Cornejo (2006) realizaron un análisis de los libros más comunes utilizados en Argentina, para la enseñanza de la mecánica en secundaria, en un periodo de tiempo de 1840 a 2000. Esta revisión histórica se basa en tres ejes fundamentales: la manera como se expusieron los temas de cinemática y dinámica en los comienzos del sistema educativo; las diferencias de los planteamientos en las diferentes épocas; y las causas de las diferencias de esos planteamientos.

Inician la revisión con los libros del siglo XIX, en los que encuentran que las explicaciones matemáticas son limitadas; no hay capítulos establecidos que separen la cinemática de la dinámica, ni tampoco son explícitos en el manejo de unidades debido a que para la época no estaban consolidados; no habían representaciones gráficas; a los cuerpos los denominaban graves; no tenían en cuenta las condiciones iniciales de los movimientos; para el movimiento variado mencionaban que había acelerado y retardado, debido a fuerzas aceleratrices o retardatrices respectivamente. Continúa el análisis con los libros de 1900-1930 donde observan la existencia de capítulos que diferencian la cinemática de la dinámica; el concepto de aceleración no es claro; se empiezan a homogenizar las unidades y aparecen problemas. En los libros de 1930, encuentran varios cambios, como el análisis dimensional, mayor claridad en las unidades del sistema cgs y técnico; aparece el concepto de sistema de referencia; incrementa el manejo matemático, principalmente destacan el concepto de función. Finalmente en los textos de 1930 hasta la actualidad, aparece el sistema internacional de medida y la aplicación de las matemáticas en todos los capítulos; los textos adoptan un lenguaje científico y el diseño conceptual de la mecánica que se utiliza en la actualidad. En general a través de los años se evidencian cambios en los planteamientos y desarrollos del tema en cuestión, que emergen de los cambios por un lado de la didáctica y por otro lado de los continuos avances de la física, al ser esta una ciencia en continuo desarrollo.

Por lo que se refiere al concepto de aceleración, Laburú & de Carvalho (1992) elaboraron un reconocimiento de las nociones de los niños en edades entre los 11 y 16 años del Colegio Estatal Vicente Rijo de Londrina, sobre el concepto de aceleración, enmarcado en la visión cinemática. Indagaron dichas concepciones con 34 estudiantes, de los cuales 10 de ellos habían abordado el concepto en cuestión. El instrumento para el abordaje de las concepciones fue entrevista clínica por medio de tres tareas - experimentos y la recolección de datos se hizo a través de grabaciones que posteriormente fueron transcritas. Afirman, que no se evidencian cambios ni evolución en el pensamiento, frente a las ideas que se tienen del concepto de aceleración (concepto cualitativo), a pesar de que algunos de los estudiantes ya habían estado en cursos de cinemática. Mencionan la importancia de esta investigación, debido al tratamiento de la didáctica.

De las investigaciones anteriores se encontró que la enseñanza y aprendizaje de la cinemática forma un problema tanto a nivel escolar como a nivel universitario, los estudiantes no reconocen las magnitudes y características de los movimientos, por ejemplo, para el movimiento uniformemente acelerado, no diferencian los conceptos velocidad y aceleración; se les dificulta el análisis del fenómeno mediante modelos matemáticos; se evidencia el fracaso en la resolución de problemas; así como la falta de claridad en los objetivos de las prácticas experimentales.

Los investigadores en didáctica de la física, se enfrentan a estos problemas tomando diferentes puntos de referencia, en donde centran la mirada hacia las prácticas de enseñanza y por consiguiente el conocimiento y estrategias creadas por el profesor de física.

Se muestran de acuerdo con el carácter epistemológico de la física y de la didáctica, que demuestran que son disciplinas en constante evolución y desarrollo. Razón por la cual, la enseñanza también ha venido cambiando, se deja de lado la visión tradicional en la que el profesor repite teorías y fórmulas para que los estudiantes las memoricen, haciendo de la física una disciplina objetivista, con verdades absolutas, en el que predomina el método científico observable y comprobable. Dando lugar a la enseñanza dinámica, en donde el profesor hace un proceso de transposición didáctica, en la que prevalece prácticas que tienen en cuenta los intereses de los estudiantes; la interacción entre estudiantes, profesores y conocimiento, además privilegia los contextos tanto internos como externos a la escuela; en donde la planeación de clase; la elaboración de la evaluación; y la organización del currículo son ejes centrales para una mejora de las prácticas de enseñanza.

Considerando el cambio de las prácticas de enseñanza, los medios ya antes mencionados como la resolución de problemas y las prácticas experimentales, también se ven involucrados en el cambio, algunos autores sugieren trabajarlos bajo la metodología ABP, con el fin de que el estudiante obtenga un aprendizaje significativo. Sobre la resolución de problemas se debe potencializar el análisis de los estudiantes, para ello el planteamiento de los problemas de cinemática, deben cambiar el esquema del uso de datos implícitos y explícitos, para encontrar la incógnita, el cual tiene una solución algorítmica, a que el planteamiento del ejercicio tenga una característica problematizadora, que lleva a los estudiantes a cuestionarse e indagar.

Sobre las prácticas experimentales, se deben pensar de tal manera que el estudiante no siga una serie de pasos cuyo objetivo es comprobar la teoría o lo “visto en clase”, por el contrario con la intervención del profesor, deben tener claro que el objetivo es analizar, estudiar, descubrir, y construir el conocimiento del objeto físico, por medio de la investigación, el manejo materiales y variables.

Para los dos medios antes mencionados, el uso de las matemáticas se deben dar de la necesidad del estudiante para facilitar la resolución del problema, por medio de las representaciones matemáticas que demuestran la relación entre las matemáticas, la física y la cotidianidad, estas representaciones son de tipo analítico, gráfico, tabular y verbal, para el movimiento uniformemente acelerado existen tres tipos de relaciones entre magnitudes físicas que dependen del tiempo y que se pueden describir en términos de las diferentes representaciones matemáticas.

Por ejemplo, de la relación entre posición y tiempo, del análisis gráfico o de la ecuación de posición contra tiempo se puede hacer la descripción del movimiento, entonces, las estrategias de enseñanza creadas por el profesor deben llevar a que el estudiante logre hacer transformaciones entre los cuatro tipos de representaciones para describir el movimiento.

Cabe anotar que, el uso de las matemáticas para la enseñanza de la física debe tener en cuenta, la edad; el nivel educativo; los conocimientos previos en física, y matemáticas. En el caso de la educación básica y media, el profesor dirige la explicación por medio de bases geométricas o algebraicas. Mientras que para la educación superior, se puede incluir el análisis por medio de las bases de cálculo diferencial e integral.

Además de los medios, se deben tener en cuenta, los instrumentos utilizados en la enseñanza de la física, de las investigaciones consultadas se encuentran dos: el uso de las TIC, por su carácter actual, permite aproximar el conocimiento a los intereses y lenguajes de los estudiantes; y el uso de libros de texto, que es una herramienta tradicional y común en la enseñanza, el cual va en desarrollo según los cambios tanto disciplinares como didácticos, como se evidenció en la investigación hecha por Adrian & Cornejo (2006). Hay que tener en cuenta, que cada texto

maneja diferentes tipos de representaciones, explicaciones y tareas, sin embargo, la tendencia es que en la resolución de problemas y las prácticas experimentales prevalecen los métodos tradicionales mecanicistas y reduccionistas de la física.

Sobre lo tratado en el capítulo IV de la didáctica como ciencia, disciplina y método, autores como Torres (2013) continúan pensando la didáctica de la física como el método que se debe aplicar para llevar a cabo procesos de enseñanza adecuados, con el fin de que los estudiantes adquieran conocimientos, esto se evidencia en el apartado donde trata la didáctica en el cual incluye que la “didáctica utilizada es basado bajo las ideas de Ausubel”. De esta manera, dentro del pensamiento de los profesores existe un conocimiento confuso, y no reconocen que la didáctica hace parte del conocimiento que posee el profesor.

5.3 Relación matemática y física

Pietrocola (2002) plantea que una problemática de la enseñanza de la física es que los profesores piensan que la matemática es una herramienta para formular las leyes físicas y creen que el problema en la enseñanza es que los estudiantes no aprenden física por los pocos conocimientos o deficiencias que tienen en matemáticas. El objetivo del artículo es mostrar que la relación entre la matemática y la física es compleja y que tiene implicaciones en la enseñanza. El autor hace un estudio epistemológico de lo que ha sido la matemática para la actividad científica, menciona cómo para Galileo la matemática es un lenguaje que permite explicar un fenómeno. Por otro lado, menciona que la física parte de una explicación cualitativa de un fenómeno y que es necesaria una explicación cuantitativa, para lograr una mejor comprensión. Afirma que la matemática, para la física y la enseñanza de la física tiene un papel estructurante. Que no es suficiente el conocimiento de las matemáticas (operaciones), para lograr una configuración lógica, entre lo abstracto y lo complejo, sino que las representaciones de la realidad del mundo elaboradas por la física, se teorizan a través de una estructura matemática.

Con el interés de comprender la manera como los estudiantes perciben el entramado entre la física y las matemáticas en la resolución de problemas, Pérez & Dibar (2012) analizaron cincuenta resoluciones de un problema de cinemática elaboradas por sesenta estudiantes de las

carreras de los profesorados de física y matemáticas, ingeniería y ecología, que cursaban la materia de física general en la Universidad Nacional General Sarmiento. El problema consistía en el movimiento ascendente de una esfera a través de un plano inclinado, con su respectiva tabla de datos de posición y tiempo.

Utilizaron la metodología exploratoria y cualitativa, las categorías: incoherente o no contesta, correcto, tabla, ecuaciones, posición, velocidad, se armaron a partir de las resoluciones hechas por los estudiantes. Para interpretar las categorías, tomaron como marco de referencia las representaciones semióticas de Duval (1995), quien argumenta que el estudiante demuestra que se apropia del objeto de conocimiento y lo diferencian de sus representaciones si logra hacer conversiones entre esas representaciones. Por ejemplo, si el objeto de conocimiento es el movimiento uniformemente acelerado, el estudiante se apropia del conocimiento si logra realizar transformaciones de la representación gráfica a la representación lingüística, a representación tabular, o algebraica, es decir de una representación a todas las combinaciones posibles.

Pérez & Dibar (2012) concluyeron que los estudiantes usaron la tabla para describir el movimiento y encontrar velocidades sin distinguir velocidad media de velocidad instantánea, para los estudiantes que usaron la categoría ecuación muestran que al usar la representación algebraica, no llevan el conocimiento a un lenguaje verbal, demostrando un aprendizaje mecánico basado en una enseñanza tradicional; para los estudiantes que trabajaron la categoría posición, realizan la representación gráfica, sin embargo no logran a partir de esa gráfica encontrar la gráfica de la velocidad. Con los resultados obtenidos se evidencia que, los estudiantes usan distintos tipos de representaciones semióticas, dependiendo de la forma como cada uno comprende el concepto de la situación presentada.

De los análisis de los resultados mencionan que las habilidades en matemáticas no se revelan independientes del concepto de las variables cinemáticas. El uso de tablas de datos, proporcionan un punto de apoyo que los estudiantes utilizan con facilidad en la resolución de ejercicios. Señalan que es necesario aprovechar los diferentes tipos de representación en el planteamiento de problemas, ya que de acuerdo con Duval (1995) una sola representación no proporciona una

imagen completa del objeto de conocimiento, estas representaciones, permiten ver el entramado entre las matemáticas y la física.

Sobre el proceso de modelación en física y matemáticas como objeto de enseñanza desde lo antropológico, Rodríguez (2007) observa una clase de matemáticas y una clase de física, en la modelación de las ecuaciones diferenciales, por medio de un análisis praxeológico, con estudiantes del último año de preparatoria en Francia. Para las matemáticas encuentra que la modelación está dada por situaciones extra-matemáticas en dos casos, uno por la presentación de una ecuación de la forma $y(x) = ax + b$, donde a y b son constantes y el otro caso, por una ecuación diferencial distinta pero que se puede llegar a la forma $y(x) = ax + b$, en ambos casos los estudiantes aplican lo dado por el maestro. Para la física, toma el tema circuito eléctrico RC (resistencia-condensador), donde se estudia la carga y descarga de un condensador, en el cual encuentra tres casos de modelación el primero, es la variación de la tensión del condensador en función del tiempo $u_c(t)$ y se llega a la ecuación de la forma $u_c(t) + at = b$, donde a y b son constantes en este caso se parte de una descripción verbal para llegar a la ecuación diferencial, el segundo caso, es la verificación de que existe una solución general por medio de la sustitución de valores dados y el tercer caso en el que se establece una solución particular en términos de las condiciones iniciales dadas en el ejercicio.

Dentro de las conclusiones destaca, que el proceso de modelación presentado en las clases de matemáticas es parcial y los estudiantes no establecen un modelo, restando significado a la práctica; el proceso de modelación vivido en las clases es muy alejado a lo experimentado por los expertos; el proceso de modelación es más acertado en la clase de física, sin embargo, es importante una interacción de las dos disciplinas para lograr un mejor entendimiento de los resultados matemáticos obtenidos.

Ardila (2006) analizó los procesos de traducción entre la diversidad de sistemas de representación (pasar de una situación descrita verbalmente a una ecuación o de ecuación pasar a gráfica) que puede tener un solo concepto. Por medio de talleres y entrevistas realiza un análisis de los desempeños de 36 estudiantes de grado 11, del Colegio Femenino Magdalena Ortega de Nariño, perteneciente a la localidad décima de Bogotá, con edades que oscilan entre los 15 y 18

años, frente a la modelación de la función cuadrática en un problema experimental de movimiento uniformemente acelerado (Aro de Müller y ticómetro) y los procesos de traducción entre sistemas de representación como la tabla de datos, la gráfica y la expresión algebraica. Las actividades para la recolección de datos, se elaboraron en tres sesiones, y trabajaron en grupos de cinco estudiantes.

Las traducciones analizadas fueron: Tabular-verbal; tabular-gráfica; gráfica-verbal; gráfica-analítica; analítica-verbal. Al respecto concluyeron que los estudiantes realizan la descripción verbal de la tabla y de la gráfica; pero no la representación analítica; además, utilizan las ideas previas de la noción proporcionalidad directa; no proponen ecuaciones para mostrar lo ocurrido en el experimento, finalmente mencionan que se evidenció cierta complejidad en el proceso de modelación de la noción matemática.

Por otra parte, con el fin de analizar la noción de idoneidad didáctica, Godino, Bencomo, Font & Wilhelmi (1991) hicieron una observación de la clase de matemáticas de un profesor que estaba enseñando el concepto de función, para lo cual el profesor propuso como actividad un ejercicio de aplicación de física sobre la caída libre de los cuerpos, para eso hizo grupos de trabajo y cada grupo debía responder una pregunta, que posteriormente debía ser explicada al resto de la clase. Los autores dividieron la idoneidad didáctica en seis dimensiones y razonaron los resultados de la observación:

1. Idoneidad epistémica: la enseñanza parte de un significado de referencia claro y estructurado, por parte del profesor, que permite la reformulación, problematización y la solución de una problemática por parte de los estudiantes. En la clase observada, el problema se genera al no poder armonizar la interdisciplinaridad en el ejercicio planteado. Debido a que unas preguntas estaban relacionadas directamente con la física, esto es una configuración epistémica empirista (altura, velocidad, entre otros) y otras con la matemática esto es una configuración epistémica formalista (dominio, condominio, rango, etc.).

2. Idoneidad cognitiva: la enseñanza se basa en tres aspectos, el primero hacer una evaluación inicial para al final comprobar los aprendizajes logrados, el segundo la revisión

curricular que debe tener en cuenta las diferencias individuales y la tercera, lograr que los aprendizajes estén próximos a los establecidos por las instituciones. Para este caso, el profesor presupone que la explicación que ha dado ha sido suficiente y que para los estudiantes es claro ciertos significados, además no hizo una revisión de ideas previas.

3. Idoneidad interaccional: como su nombre lo indica es la interacción entre estudiante-profesor, estudiante-estudiante, con el fin de identificar conflictos semióticos potenciales, efectivos y residuales. Los autores indican que es más productivo el trabajo cooperativo que la clase magistral individual, sin embargo para la instrucción analizada, el conflicto está en que cada grupo sólo debía estudiar una de las cuestiones y finalmente cada grupo elaboraba una clase magistral del punto trabajado.

4. Idoneidad mediacional: trata de los recursos materiales y temporales, para la instrucción observada existe una gran problemática ya que el tiempo destinado es demasiado (4 clases de 45 minutos cada una), además de que no utilizó recursos materiales.

5. Idoneidad emocional: este tipo de idoneidad es la que involucra la participación de los estudiantes y esta participación está dada ya que las actividades están pensadas teniendo en cuenta los intereses y emociones de los estudiantes. La clase observada consistió en una serie de preguntas sobre la caída libre de los cuerpos, la actividad era interesante, generaba la participación y el trabajo en equipo por parte de los estudiantes, sin embargo, como se mencionó anteriormente, se evidenció un problema que fue el entrelazamiento brusco de lo puramente matemático con lo físico.

6. Idoneidad ecológica: hace referencia a que el objeto de estudio debe estar acorde al proyecto educativo de la institución y las relaciones interdisciplinarias e intradisciplinarias, para la observación en cuestión, llegan a la conclusión que sí cumple esta idoneidad.

Para Godino, *et al* (1991) la importancia de la idoneidad didáctica se basa en que los profesores en formación amplíen su conocimiento frente a la práctica y aclaran que no existe un manual, pero que estas son herramientas para apoyar y reflexionar sobre las prácticas en el aula.

Barros (2008) elaboró una investigación documental, que demuestra que las teorías de la enseñanza de las ciencias, se pueden aplicar la didáctica de las matemáticas y las metodologías de tipo constructivista, debido a que es un proceso en el que se relaciona el profesor, el alumno y el objeto de saber. Asegura que para los procesos de enseñanza, se deben tener en cuenta, los conocimientos cotidianos de los estudiantes y académicos asimilados denominados conocimientos internos y los conocimientos del profesor como conocimientos externos. Expone los modelos para la enseñanza de las ciencias: modelo basado en el alumno como científico; el movimiento de las concepciones alternativas; el cambio conceptual; el modelo de enseñanza por investigación; y el modelo basado en el alumno como aprendiz en el aprendizaje significativo. Concluye que la enseñanza de las ciencias, adopta el constructivismo, advirtiendo los diferentes enfoques, también menciona que intervienen varios conocimientos como el científico, el cotidiano, el del profesor y el del alumno. Finalmente, el uso de las teorías de la escuela francesa, permiten que el profesor avance junto con los alumnos en la difusión del conocimiento.

Por medio del desarrollo histórico elaborado para los dos objetos de enseñanza para esta tesis (función cuadrática y movimiento uniformemente acelerado) y de las investigaciones estudiadas en este apartado (conocimiento didáctico del contenido; reprobación y rezago del cálculo; conocimiento matemático de profesores; conceptos relación, ecuación y función; enseñanza del concepto de función y el desarrollo histórico; historia de las ecuaciones de segundo grado; enfoque epistemológico en la enseñanza de la física; enseñanza de la mecánica en la escuela), se encontró que existe una relación compleja entre la física y las matemáticas y por consiguiente entre la enseñanza de objetos físicos y la enseñanza de objetos matemáticos, que han estado sometidas por tensiones generadas entre sus participantes tanto en las disciplinas como en las didácticas de las disciplinas. En el siglo XVI Comenio (1998), ya notaba estas tensiones:

...Acerca de las matemáticas puede existir la duda de si han de ir antes o después de la física. Los antiguos partían, en efecto, del conocimiento de las matemáticas, de donde les viene el nombre a dichas enseñanzas, y Platón no admitía en su Academia a quien estuviera ayuno en estos conocimientos. La causa de ello salta pronto a la vista, porque dichas ciencias, al tratar de los números y cantidades, se reciben y fijan en los sentidos y, por tanto, son más fáciles y exactas, desarrollan y hieren más la imaginación y, finalmente, predisponen y estimulan para el estudio de otras materias más remotas de los sentidos. (p.120)

La metafísica, investiga los primeros y más profundos fundamentos de la naturaleza; los requisitos, atributos, definiciones, axiomas, imágenes, composiciones y diferencias de todas las cosas. Cuando estas generalidades son conocidas, las cuales son fáciles de percibir, debido a que son principios que con la sola luz natural, se pueden conocer y admitir, se da paso a razonar sobre el mundo perceptible, en el que se enseñan ejemplos particulares de la naturaleza, enseñanza de la física. De la enseñanza de esas particularidades de la naturaleza se da paso a la enseñanza de sus sucesos, lo que corresponde a la clase de física (Comenio, 1998).

Con lo anteriormente referenciado, se reconoce que las matemáticas contribuyen a estructurar los fenómenos físicos y que la física contribuye a las matemáticas en la formalización de los objetos matemáticos, siendo estas dos disciplinas, lenguajes formados por la sociedad para entender y explicar la realidad del mundo, sin que uno sea instrumento del otro, ni mucho menos existan jerarquías entre estas ciencias.

Así, la física utiliza los diferentes tipos de representaciones matemáticas (tabular, gráfica, verbal, analítica) para describir los fenómenos, y las matemáticas pueden aplicar modelos físicos en el estudio de los objetos matemáticos, es necesario que la formación de profesores tanto en física como en matemáticas contribuya a que los profesores puedan relacionar los dos conocimientos, que permitan por un lado entender los fenómenos físicos por medio de representaciones y por otro lado desligar el carácter exclusivo de los objetos matemáticos en términos de las matemáticas.

Esto con el fin de que estas comprensiones, se vean reflejadas en el planteamiento de estrategias para el proceso de enseñanza de las dos disciplinas en cuestión, en las que el profesor también pone de manifiesto sus conocimientos didácticos, en donde estas relaciones físicas y matemáticas, pasan por un proceso de transposición didáctica generando una telaraña de conocimientos nuevos a ser enseñados, por medio de medios e instrumentos adecuados.

En común se encuentra la resolución de problemas y el carácter constructivista que se le debe dar, en donde es necesario tener en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes; los conocimientos de tipo científico; los conocimientos cotidianos y la interacción entre el profesor,

el estudiante y el objeto de saber. Para lograr una construcción del conocimiento es necesario que los estudiantes interactúen con las dos disciplinas, de tal manera que el proceso de resolución de problemas le permita analizar y entender los resultados obtenidos, en donde no se limite a obtener solo un resultado numérico.

5.4 Dos objetos de enseñanza e investigación: movimiento uniformemente acelerado y función cuadrática

Las investigaciones presentadas en este capítulo, consolidan la importancia del análisis de las prácticas del profesor de física y de matemáticas frente a los problemas recurrentes de la enseñanza y el aprendizaje, mostrando diferentes perspectivas como las concepciones de los profesores; las prácticas de aula; la utilización de las matemáticas en la enseñanza de la física y viceversa; el actuar de los estudiantes; las metodologías del profesor; la historia de la física y las matemáticas en la enseñanza. Siendo estos temas fundamentales y propios de la didáctica y a su vez del conocimiento profesional del profesor.

Objeto didáctico, se encontró que el uso de los tipos de representación de la FC, es una convergencia en la enseñanza de los dos objetos de estudio. Para el MUA, se puede pensar en el uso de las representaciones de acuerdo a la escolaridad de los estudiantes. Por ejemplo, en la educación en básica, lo más conveniente es utilizar la representación gráfica y tabular; para la educación media, además de hacer uso de las representaciones antes mencionadas, se incorpora la representación analítica en términos de ecuación o función; para la educación superior, se utilizan las representaciones mencionadas anteriormente, sin embargo, para la representación analítica se describe el movimiento por medio del concepto de derivada e integral. Para la FC, se enseña el concepto desarrollando los cuatro tipos de representación. No obstante, en los primeros años se inicia con el concepto relación, seguido con el concepto de ecuación y función. Para lo cual, las diferencias de estos tres objetos de estudio pueden generar un obstáculo epistemológico en la enseñanza de la FC.

Se evidencia la importancia del desarrollo histórico en la enseñanza de la física y de las matemáticas, para lograr mejores resultados y una mejor comprensión de la formalización de las

disciplinas, teniendo en cuenta, que estas muestran por un lado, explicaciones de realidades, que la sociedad se ha preguntado a lo largo del tiempo y que han permitido avanzar en el conocimiento del mundo y en el avance de la tecnología. Por otro lado, se logra la comprensión de términos y conceptos utilizados en la explicación de los fenómenos, por ejemplo, en la explicación que dio Aristóteles sobre el movimiento de los cuerpos, los cuales, pueden estar en acto o en potencia de moverse, en donde se puede interpretar que para un cuerpo que se encuentra en caída libre, está en acto ya que se está moviendo, pero que en un momento dado puede estar en potencia de moverse, debido a la altura que posee. Para la FC, permite comprender que este concepto no es abstracto, sino que deviene del nacimiento de los números; de la necesidad de realizar operaciones; y de relacionar cantidades, por ejemplo, la geometría básica, en los cálculos de áreas y volúmenes, como se encontró en las tablas elaboradas por los Babilonios, hasta llegar a explicar fenómenos cotidianos de diferentes disciplinas como la economía, la ingeniería y la física, para esta última, existen pensadores como Oresme, Galileo, Newton, entre otros, que realizaron de igual forma desarrollos tanto en física y como matemáticas.

Así, se ve la estrecha relación que existe entre estas disciplinas y por consiguiente, entre las matemáticas y la enseñanza de la física y entre la física y la enseñanza de las matemáticas, cada una contribuye a la modelización y el acercamiento del estudiante a la cotidianidad y explicación de los fenómenos naturales. Sin embargo, cada disciplina tiene objetos propios de estudio como el caso de la FC y el MUA, que aunque son muy cercanos toman distancia ya que cada uno posee particularidades a lo largo de su desarrollo teórico.

Conocimiento del profesor, Sobre los conocimientos que se ponen en juego en el proceso de enseñanza del MUA y la FC, tanto del profesor como del estudiante, se señala que es diferente conocer a saber; los estudiantes conocen que al acelerar un cuerpo, este irá más rápido, ese conocimiento viene de la representación de la realidad del sujeto, pero no constituye un saber ya que el saber deviene de un desarrollo a través de la historia, sin embargo, no se enseña el saber cómo saber, sino que se enseña un saber que ha pasado por un proceso de transposición didáctica, de tal manera que el profesor es productor de conocimientos particulares, que van dirigidos a las necesidades de la sociedad y del contexto.

Tanto en matemáticas como en física, se coincide en la importancia de la motivación y la disposición de los estudiantes para lograr un aprendizaje y comprensión de estas disciplinas. Para esto, es importante que el profesor propicie por medio de la planeación, actividades de aprendizaje llevadas a la práctica, las cuales deben ser pertinentes al contexto e intereses de los estudiantes, y permitir la interacción entre el estudiante, el profesor y el saber. Dicha práctica está influenciada por los conocimientos y actitudes del profesor. Los conocimientos son la historia y epistemología de la disciplina, como se mencionó en el objeto didáctico, es importante que los profesores en sus clases incluyan la historia con el fin de mejorar las comprensiones de los estudiantes; la disciplina a enseñar; la didáctica de la disciplina en donde se incluye que el profesor sea quien organice el currículo, elabore la evaluación, lleve a cabo la transposición didáctica y diseñe estrategias de enseñanza, todo esto teniendo en cuenta el conocimiento del contexto.

Metodologías y medios para la enseñanza, para el MUA y la FC, se resalta el enfoque constructivista basado en el aprendizaje significativo, apoyado en las ideas previas de los estudiantes; y la enseñanza basada en proyectos (ABP), con lo que se pretende que los estudiantes construyan su propio conocimiento, en donde el estudiante indaga, se cuestiona, analiza, y propone soluciones a situaciones didácticas.

Tanto en el MUA y la FC, el fracaso en la resolución de problemas, es una dificultad constante, para darle solución a esta problemática, se da un nuevo enfoque, que está relacionado con la forma de hacer el planteamiento de los ejercicios, los cuales no llevan al uso de algoritmos y las resoluciones mecánicas, fortaleciendo el ABP; el aprendizaje de conceptos, basado en el uso de situaciones didácticas en donde se parte del análisis y la argumentación de los estudiantes para estructurar el conocimiento; el uso de las representaciones matemáticas que pueden ser de tipo gráfico, tabular, algebraico y verbal.

Para el MUA, se encontró la metodología aprendizaje basada en experimentos (ABE), ya que en la enseñanza de la física las prácticas experimentales son actividades necesarias debido a la epistemología de esta ciencia, son basadas en las realidades, dejando de lado el objetivismo.

En los documentos analizados para la enseñanza de la FC no se encontraron evidencias de procesos de enseñanza en los que se realizaran con la metodología enseñanza basada en experimentos. Para la enseñanza de la FC; es común la modelización, que permite desarrollar reflexiones y relaciones con otras disciplinas de conocimiento.

Instrumentos para la enseñanza, para la enseñanza de los dos objetos, el uso de las TIC permiten la participación activa de los estudiantes; el diálogo entre estudiantes y profesor; y la interacción entre profesor-estudiante-conocimiento. El uso de estas herramientas genera un mayor acercamiento a los intereses y lenguaje propio de los estudiantes, el uso y análisis de los libros de texto; el uso de material visual, como películas y videos; el uso del tablero; y las demostraciones, contribuyen en la planeación de actividades que permiten al estudiante aproximarse al conocimiento.

CAPÍTULO VI: CONCLUSIONES Y PROYECCIONES

La pregunta problema fue resuelta, en los documentos revisados se encontró que existen relaciones para la didáctica de la física y de las matemáticas, en la enseñanza del MUA y la FC:

- Diferentes autores, se han preguntado acerca de la manera cómo enseñar y cómo lograr mejores aprendizajes de las matemáticas y la física, en los que han relacionado esta disciplina con otras disciplinas como: la historia, la epistemología, la psicología cognitiva, la pedagogía y la filosofía.
- Los dos procesos de enseñanza están permeados por el conocimiento que posee el profesor y los conocimientos previos que posee el estudiante, que vienen de la lectura que hace de su interacción con la realidad y de lo aprendido en años escolares anteriores.
- El estudio y desarrollo de la didáctica tanto en física como en matemáticas, ha formado un campo de conocimiento epistemológicamente consolidado, en el que su evolución y desarrollo ha sido influenciado por los representantes de los campos de conocimiento tanto en física como en matemáticas, lo cual permite pensar que la didáctica es de naturaleza científica. Sin embargo, es necesario que en este campo de conocimiento se enseñe de manera científica a los futuros profesores, con el fin de que la reconozcan como la disciplina que fundamenta su conocimiento.
- La didáctica de la física y de las matemáticas es cercana, esto se debe en parte al desarrollo de los dos campos de conocimiento, los cuales, desde la revisión histórica realizada, muestran que tienen una relación recíproca. Esta relación se ve reflejada en el MUA y el concepto de FC, las cuales se retroalimentan la una a la otra. Por este motivo, cuando se piensa en la enseñanza hay una coexistencia. No obstante, en la enseñanza existe una brecha entre estos desarrollos debido a que se toman las matemáticas como una herramienta para describir los fenómenos físico, más no como un conocimiento transversal de la física. De

igual manera, en la enseñanza de las matemáticas, los procesos de modelación de física son escasos, ya que se prefiere enseñar las matemáticas de forma mecánica.

- Cabe resaltar, que aunque existan relaciones entre las dos didácticas, cada una tiene sus objetos de estudio, que dependen de la disciplina, la epistemología y la historia propia de cada ciencia.
- Para la enseñanza tanto del MUA como de la FC, el medio más común utilizado por los profesores, es la resolución de problemas, que ha sido objeto de estudio por varios investigadores, quienes se han cuestionado por el fracaso que genera la resolución por parte de los estudiantes. El problema surge desde el propio planteamiento del problema, en donde por las características de los enunciados llevan a que los estudiantes se limiten a buscar fórmulas y algoritmos. Se sugiere tratarlos bajo la teoría ABP, que permite hacer entendible a los estudiantes su carácter analítico y problematizador; además entender las relaciones entre la física y las matemáticas.
- El aporte de la historia en la enseñanza de los dos objetos es significativo, ya que permite dar a conocer de dónde y el por qué nacen los términos, raciocinios, y expresiones dadas a los diferentes fenómenos, esto es, entender cómo se han dado sus desarrollos teóricos y matemáticos, que dan lugar a reconocer el carácter dinámico de las disciplinas, en las que el conocimiento no tiene verdades absolutas.
- En la enseñanza de los objetos en cuestión, se deben construir los conocimientos, acercándose a la manera como se construye el conocimiento científico. Significa, construir las bases y desarrollos académicos, esto es problematizar los hechos y las teorías que no permiten explicar completamente los hechos y las ideas de los estudiantes basadas muchas veces en el sentido común. Después de problematizar los conocimientos, se deben generar hipótesis, con las que los estudiantes den cuenta y validen los resultados obtenidos.
- Algunos factores como el tiempo de las clases; los requerimientos en cumplir la planeación; y la oposición del profesor en cambiar sus prácticas, no permiten seguir adelante con el constructivismo, de esta manera, prevalece una enseñanza tradicional, la cual se lleva a cabo

de forma pasiva y repetitiva, fomentando el mecanicismo y poco entendimiento de los dos objetos de estudio.

- Sobre las herramientas en la enseñanza, se encontró que aunque los libros de texto han cambiado con el paso de los años y también han incursionado en el constructivismo, si se hace un análisis praxeológico, se observa que tareas como la resolución de problemas y las prácticas experimentales, así como la estructura del libro, continúan manejando el método tradicional y mecánico de la física y las matemáticas.

Proyecciones

Hacer una revisión de otros procesos de investigación que tengan como objeto de estudio el MUA y la FC, con el fin de generar una categorización por grados de escolaridad, lo cual llevaría a determinar la evolución en el proceso de conocimiento en la etapa de enseñanza y aprendizaje de los dos objetos de estudio antes mencionados.

Generar un proceso de investigación que lleve a determinar si se desarrollan proyectos de aula en la enseñanza de la FC en el área de matemáticas.

Poder generar un esquema de prácticas experimentales en el área de matemáticas para la enseñanza de la FC, lo cual aportaría a una construcción mucho más rica y significativa en el aprendizaje desde el desarrollo de una metodología constructivista.

Ampliar los tiempos de enseñanza de la clase de física ya que se visualiza es escaso en relación a los contenidos programáticos que se deben desarrollar en el aula.

BIBLIOGRAFÍA

Adrian, P & Cornejo, J. (2006). La enseñanza de la mecánica en la escuela media: la evolución histórica de los textos (1840-2000). *Revista de enseñanza de la física*, 19 (2), 35-46.

Aduriz-Bravo, A; Izquierdo, M. (2002). Acerca de la didáctica de las ciencias como disciplina autónoma. *Revista electrónica de enseñanza de las ciencias*, 1 (3), 130-140. Recuperado de: http://reec.uvigo.es/volumenes/volumen1/REEC_1_3_1.pdf

Aduriz-Bravo, A & Morales, L (2002). El concepto de modelo en la enseñanza de la física consideraciones epistemológicas, didácticas y retóricas. *Revista caderno catarinense de ensino de física*, 19 (1), 76-89.

Alfaro, C & Chavarría, J. (2012). La transposición didáctica: Un ejemplo en el sistema educativo costarricense. *Uniciencia*, 26, 153-168.

Amaya, T; Pino, L & Medina, A. (2016). Evaluación del conocimiento de futuros profesores de matemáticas sobre las transformaciones de representaciones de una función. *Revista educación matemática*, 28 (3), 111-144.

Aparicio, E. (2007). El cálculo escolar universitario. Un estudio de su problemática en una facultad de ciencias. *Acta latinoamericana de matemática educativa*, 20 (1), 353-358.

Ardila, L. (2006). *Aproximación al concepto de función mediante la modelación de problemas experimentales: Movimiento uniformemente variado*. Tesis de Maestría. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá.

Asprelli, M. (2011). *La didáctica de la formación docente*. Argentina: Ediciones HomoSapiens.

Bachelard, G. (2000). *La formación del espíritu científico*. México: Siglo XXI editores.

Barros, J. (2008). Enseñanza de las ciencias desde una mirada de la didáctica de la escuela francesa. *Revista EIA*, 5 (10), 55-71. Recuperado de: <https://revistas.eia.edu.co/index.php/reveia/article/view/210/206>

Bautista, R. (2006). *Las matemáticas en la segunda mitad del siglo XX. En: Bautista et al. La formación de conceptos en ciencias y humanidades*. México: Siglo XXI editores.

Beléndez, A. (1996). Algunas consideraciones en torno al proceso enseñanza-aprendizaje de la física en la universidad. *Revista interuniversitaria de formación del profesorado*, 27, 189-203.

Bell, E. (2016). *Historia de las matemáticas*. México: Fondo de Cultura Económica. Recuperado de:

https://books.google.com.co/books?id=9PR2DQAAQBAJ&printsec=frontcover&authuser=1&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false

Berrone, L. (2001). Galileo y la génesis de la cinemática del movimiento uniformemente acelerado. *Revista de la sociedad española de historia de las ciencias y de las técnicas*, 24 (51), 629-648.

Bravo, A & Izquierdo, A. (2002). Acerca de la didáctica de las ciencias como disciplina autónoma. *Revista electrónica de enseñanza de las ciencias*, 1 (3), 130-140. Recuperado de: http://reec.uvigo.es/volumenes/volumen1/REEC_1_3_1.pdf

Brousseau, G. (1991). ¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de las matemáticas?. *Revista enseñanza de las ciencias*, 9 (1), 10-21.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Libros de Zorzal.

Camilloni, A. (2008a). De herencias, deudas y legados. Una introducción a las corrientes actuales a la didáctica. En: Camilloni, A; Davini, C; Edelstein, G; Litwin, E ; Souto, M & Barco, S. *Corrientes didácticas contemporáneas*. Buenos Aires: Paidós. pp. 17-39.

Camilloni, A. (2008b). Didáctica general y didácticas específicas. En Camilloni, A; Cols, E & Basabe, L. *El saber didáctico*. Buenos Aires: Paidós. pp. 19-39.

Carnivo, J & Lopes, B. (2003). La investigación en física general en la universidad. Propuestas de investigación. *Revista enseñanza de las ciencias*, 21 (3), 473-482.

Castilblaco, O & Nardi, R. (2014). Una caracterización de la didáctica de la física. *Memorias del Segundo y Tercer Foro de Experiencias Didácticas sobre CSC y Primer Encuentro de grupo alternancias*. pp. 13-21. Recuperado de: <http://revistas.pedagogica.edu.co/index.php/memorias/article/download/2643/2441>

Chevallard, Y. (2005). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.

Comenio, J. (1998). *Didáctica Magna*. México: Porrúa.

Contreras, F. (2012). La evolución de la didáctica de la matemática. *Revista horizonte de la ciencia*, 2 (2), 20-25.

Cribeiro, J; Madrid, H & Fraga, J. (2013). ¿Relación, función o ecuación? *Revista el cálculo y la enseñanza*, 5 (5), 41-56. Recuperado de: http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/data/docs/CP6.bbf0a982b7788f.pdf

Dalcín, M. & Olave, M. (2007). Ecuaciones de segundo grado: su historia. *Acta latinoamericana de matemática educativa*, 20 (1), 150-155.

Davini, C. (2008). Conflictos en la evolución de la didáctica. La demarcación entre la didáctica general y las didácticas especiales. En: Camilloni, A; Davini, C; Edelstein, G; Litwin, E; Souto, M & Barco, S. *Corrientes didáctica contemporáneas*. Buenos Aires: Paidós. pp 41-73.

De Ecahndía, G. (1995). *Aristóteles Física*. Madrid: Gredos.

De la Peña, L. (2006). *Algunos comentarios desde la física*. En: Bautista et al. *La formación de conceptos en ciencias y humanidades*. México: Siglo XXI editores. pp 52-64.

Díaz, J. (2013). El Concepto de Función: Ideas pedagógicas a partir de su historia e investigaciones. *Revista el cálculo y su enseñanza*. 4 (5), 13-25. Recuperado de: https://www.researchgate.net/publication/268217474_El_Concepto_de_Funcion_Ideas_pedagogicas_a_partir_de_su_historia_e_investigaciones

Díaz, J; Abril, A; Díaz, L & Bravo, F. (2017). La utilización del aprendizaje basado en proyectos en la enseñanza de la Cinemática. *Revista atlante: cuadernos de educación y desarrollo*. Recuperado de: <http://www.eumed.net/rev/atlante/2017/07/aprendizaje-cinematica.html>

Feldman, D. (1999). *Ayudar a enseñar. Relaciones entre didáctica y enseñanza*. Argentina: Aique.

Fernández, M & Rondero, C. (2004). El inicio histórico de la ciencia del movimiento: implicaciones epistemológicas y didácticas. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 7 (2), 145-156.

Feynman, R. (1969). ¿Qué es ciencia? *Physics Teacher*. Recuperado de: http://cecabogota.pbworks.com/w/file/46139955/art_Que_es_Ciencia_Richard%20Feynman.pdf

Fischl, J. (1984). *Manual de historia de la filosofía*. Barcelona: Herder.

Flores, J; Gaita, C & Carrillo, F (2013). Estudio de las organizaciones matemáticas del objeto función cuadrática en la enseñanza superior. *Actas de VII CIBEM*, 1306-1314.

Gallego, A & Gallego, R. (2006). *Acerca de la didáctica de las ciencias de la naturaleza. Una disciplina conceptual y metodológicamente fundamentada*. Bogotá: Magisterio.

García, A. (2009). Investigaciones en didáctica de la física: tendencias actuales e incidencia en la formación del profesorado. *Revista latin american journal of physics education*. 3 (2), 369-375.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Revista recherches en didactique des mathématiques*, 18 (52), 7-33.

Gil, D & Guzman, D. (1993). *Enseñanza de las ciencias y la matemática tendencias e innovaciones*. España: Popular.

Gil, D; Carrascosa, J & Martínez, F. (1999). El surgimiento de la didáctica de las ciencias como campo específico de conocimientos. *Revista de educación y pedagogía* , 11 (25), 15-65.

Gil, D; Martínez, J & Senent, F. (1988). El fracaso en la resolución de problemas de física: Una investigación orientada por nuestros supuestos. *Revista enseñanza de las ciencias*, 6 (2) 131-146.

Godino, J. (1991). Hacia una teoría de la didáctica de la matemática. En: Gutierrez, A. *Área de conocimiento: didáctica de la matemática*. Madrid: Síntesis. pp. 105-148.

Godino, J; Bencomo, D; Font, V & Wilhelmi, M. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de la matemáticas. *Revista Paradigma*, 27(2), 221-252.

Gómez, A. (2011). *Enseñanza de los conceptos la Cinemática desde una perspectiva vectorial con los estudiantes de grado décimo del Colegio José Antonio Galán*. Tesis de Maestría. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá.

Gómez, P & Carulla, C. (2001). *Enseñanza constructivista, conocimiento didáctico del profesor y análisis didáctico en matemáticas. El caso de la función cuadrática*. En Tirado, M. L. (Ed.), *Educación en Matemáticas*. Bogotá: IDEP. pp. 337-363. Recuperado de: <http://funes.uniandes.edu.co/365/>

Hernández, E. (2006). Algunos conceptos de la matemática del siglo XX. En: *Bautista et al. La formación de conceptos en ciencias y humanidades*. México: Siglo XXI editores.

Hernández, C & López, J. (2002). *Disciplinas*. Instituto colombiano para el fomento de la educación superior. Las aventuras de un significado. Bogotá.

Hurtado, J. (2010). *Metodología de la investigación. Guía para una comprensión holística de la ciencia*. Bogotá-Caracas: Quirón.

Ibarra, S & Fernández, L. (2007). *La enseñanza de la función cuadrática en el bachillerato. Resultados de un proyecto de desarrollo docente*. México: Universidad de Sonora.

Izquierdo, M; Sanmati, N & Espinet, M. (1999). Fundamentación y diseño de las prácticas escolares de ciencias experimentales. *Revista enseñanza de la ciencias*, 17 (1), 45-59. Recuperado de: <https://ddd.uab.cat/pub/edlc/02124521v17n1/02124521v17n1p45.pdf>

Jiménez, M; Aureli, C; Ana, O & Emilio, P. (2009). *Enseñar ciencias*. España: Grao.

Joshua, S & Dupin, J. (2005). *Introducción a la didáctica de las ciencias y la matemática*. Buenos Aires: Colihue.

Klein, G. (2012). *Didáctica de la física*. Uruguay: n/a.

Kleiner, I. (1989). Evolution of the function concept: A brief survey. *Revista the college mathematics journal*, 20 (4), 282-300. Recuperado de: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.113.6352&rep=rep1&type=pdf>

Laburú, C & de Carvalho, A. (1992). Investigación del desarrollo y aprendizaje de la noción de aceleración en adolescentes. *Revista enseñanza de las ciencias*, 10 (1) , 63-72.

Láscaris, C. (sin fecha). *Parménides: sobre la naturaleza*. Recuperado de: <http://www.inif.ucr.ac.cr/recursos/docs/Revista%20de%20Filosof%C3%ADa%20UCR/Vol.%20XIII/No.%2036/Parm%C3%A9nides.%20Sobre%20la%20Naturaleza.pdf>

Ledesma, L & Pocovi, C. (2013). La progresiva aproximación al cambio conceptual. Una experiencia de docencia a partir del caso de la aceleración. *Polifonías revista de educación*, 2 (3) 131-146.

Litwin, E. (2008). El campo de la didáctica: La búsqueda de una nueva agenda. En: Camilloni, A; Davini, C; Edelstein, G; Litwin, E; Souto, M & Barco, S. *Corrientes didácticas contemporáneas*. Buenos Aires: Paidós. pp 91-115.

Martín, J; Gómez, M & Gutiérrez, S. (2000). *La física y la química en secundaria*. Madrid: Narcea.

Martínez, D; Torres, A; Tellería, A; & Dibut, L. (2007). Estrategia didáctica para flexibilizar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática en la universalización de la educación superior. *Acta latinoamericana de matemática educativa*, 20 (1),138-143.

Massoni, N & Moreira, M. (2010). Un enfoque epistemológico de la enseñanza de la física: una contribución para el aprendizaje significativo de la física con muchas cuestiones sin respuesta. *Revista electrónica de enseñanza de las ciencias*, 9 (2) 283-308. Recuperado de: <https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/94795/000750348.pdf?sequence=1>

Mellado, V. (2001). ¿Por qué a los profesores de ciencias nos cuesta tanto cambiar nuestras concepciones y modelos didácticos? *Revista interuniversitaria de formación del profesorado*, 40, 17-30.

Pacios, A. (1980). *Introducción a la didáctica*. España: Editorial Cincel-Kapelusz.

Pietrocola, M. (2002). A Matemática como estruturante do Conhecimento físico. *Revista caderno brasileiro de ensino de física*, 19 (1), 89-109.

Pérez, S & Dibar, C. (2012). Primeras apropiaciones de la metamática en la física: Resolviendo problemas de cinemática en el primer año de la universidad. *Revista de enseñanza de la física*, 25 (1-2), 25-33.

- Pinto, J & González, M (2008). El conocimiento didáctico del contenido en el profesor de matemáticas: ¿una cuestión olvidada? *Revista educación matemática*, 20 (3), 83-100.
- Porlán, R; Rivero, A., & Martín, R. (1997). Conocimiento profesional y epistemología de los profesores I: Teoría, métodos e instrumentos. *Revista enseñanza de las ciencias*, 15 (2) 155-171. Recuperado de: <https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/21488/93522>
- Pozo, J & Gómez, M. (1998). *Aprender a enseñar ciencia. Del conocimiento cotidiano al conocimiento científico*. Madrid: Morata.
- Ramírez, E.(2007). Tratamiento didáctico de las funciones reales de una variable: proceso de modelación. *Acta latinoamericana de matemática educativa*, 20 (1), 235-240.
- Ríos, Y. (2007). Ingeniería didáctica referida al concepto de fracción. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 20 (1), 270-275.
- Roa, R. (2016). *Configuración del conocimiento profesional didáctico y pedagógico del profesor de ciencias para la enseñanza de la biotecnología*. Tesis Doctoral. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá.
- Rodríguez, R. (2007). La enseñanza de la modelación en clase de física y de matemáticas. *Acta latinoamericana de matemática educativa*, 20 (1), 114-119.
- Ruiz, A. (Sin fecha). *Historia y filosofía de las matemáticas*. Costa Rica: n/a.
- Ruiz, L. (1994). *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función. Análisis epistemológico didáctico*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada. Granada.
- Salazar, B. (2014). *Construcción de una unidad didáctica de cinemática (posición, velocidad, aceleración y caída libre) para potenciar el planteamiento y resolución de problemas en estudiantes de grado 10°*. Tesis de Maestría. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá.
- Sampieri, R; Fernández, C & Bautista, M. (2010). *Metodología de la investigación*. México: McGraw Hill.
- Sánchez, I. (2017). El uso de la integral y la derivada como método único para resolver problemas de cinemática. *Revista enseñanza de las ciencias*, (extraordinario), 1909-1915.
- Sánchez, I; Moreira, M & Caballero, C. (2009). Implementación de una propuesta de aprendizaje significativo de la cinemática a través de la resolución de problemas. *Revista chilena de ingeniería*, 17 (1), 27-41.
- Sandoval, M; García, M; Mora, C & Suárez, C. (2017). Estrategia enseñanza-aprendizaje basada en experimentos (ABE) para mejorar la comprensión de gráficas en Cinemática. *Revista latin american journal of physics education*, 11 (3), 33071-33078. Recuperado de: <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/6364302.pdf>

Sastre, P; Rey, G; & Boubée, C. (2008). El concepto de función a través de la historia. *Revista iberoamericana de educación matemática*, (16), 141-155. Recuperado de: http://www.fisem.org/www/union/revistas/2008/16/Union_016_014.pdf

Scheider, J. (2005). El nacimiento de la ciencias en los presocráticos. Universidad Del Cema. Recuperado de: http://www.ucema.edu.ar/u/jschneider02/Trabajos_de_investigacion/Joel

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*. 15 (2), 4-14.

Soneira, A. (2006). La teoría fundamentada en los datos (Grounded Theory) de Glaser y Strauss. En: *Vasilachis et al. Estrategias de investigación cualitativa*. Barcelona: Gedisa. pp. 153-173.

Farfán, R & Sosa, L. (2007). Formación de profesores. Diversas concepciones que afectan el quehacer docente y competencias iniciales de profesores del nivel medio superior. *Acta latinoamericana de matemática educativa*, 20 (1), 345-352.

Torres, S. (2013). *La enseñanza de la cinemática apoyada en la teoría del aprendizaje significativo, la resolución de problemas y el uso de applets*. Tesis de maestría. Universidad Nacional de Colombia. Medellín. Recuperado de: <http://www.bdigital.unal.edu.co/11602/1/71672894.2014.pdf>

Torretti, R. (2005). Espacio y tiempo en la física de Einstein. En: Estany, A. *Filosofía de las ciencias, sociales y matemáticas*. Madrid: Trotta. pp. 75-104.

Tovar, B & Triviño, J. (2007). *Conocimiento didáctico en la formación inicial del profesor de matemáticas relativo al concepto de función cuadrática*. Tesis de maestría. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá.

Trujillo, M; Castro, N; & César, D. (2010). *El concepto de función y la teoría de situaciones. Bases epistemológicas y didácticas en la enseñanza del concepto de función con la ayuda de calculadoras graficadoras*. Bogotá: Universidad de la Salle.

Ugalde, W. (2013). Funciones: desarrollo histórico del concepto y actividades de enseñanza aprendizaje. *Revista digital matemática, educación e internet*, 14 (1), 1-48. Recuperado de: <http://www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/>

Uribe, J. (2011). La investigación documental y el estado del arte como estrategia de investigación en ciencias sociales. En: Páramo, P. (compilador). *La investigación en ciencias sociales: estrategias de investigación*. Bogotá, Colombia: Universidad Piloto de Colombia. pp. 195-210.

Vargas, M. (2011). *El concepto de función y sus aplicaciones en situaciones relacionadas con fenómenos físicos, que conducen a un modelo cuadrático, una propuesta para trabajar en el grado noveno*. Tesis de Maestría. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá.

Vasilachis, I. (2006). *Estrategias de investigación cualitativa*. Barcelona, España: Gedisa, S.A.

Vasilashis de Gialdino, I. (1992). *Métodos cualitativos I. Los problemas teórico-epistemológicos*. Buenos Aires: Centro Editor de América Latina.

Vija, O. (2008). ¿Qué es didáctica de la física? *Revista Góndola*, 3 (2), 46-48. Recuperado de: <https://revistas.udistrital.edu.co/ojs/index.php/GDLA/article/view/5287>

Vivanco, J. (1971). *Las matemáticas de Pitágoras a Newton*. México, D.F.: Laia.

Vivas, R. (2010). La función cuadrática. Un estudio a través de los libros de texto de los últimos 40 años en Argentina. *Revista 10tuneada_lula.pmd*, 6 (10), 163-180. Recuperado de: <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3699237>

Zambrano, A. (2005). *Didáctica, Pedagogía y saber*. Bogotá, Colombia: Cooperativa Editorial Magisterio.

ANEXOS

Anexo 1: Sistematización de datos sobre enseñanza de las matemáticas.

Referencia	Categoría	Dato
<p>El conocimiento didáctico del contenido en el profesor de matemáticas: ¿Una cuestión ignorada?</p> <p>Pinto y González (2008)</p>	Objetivos	“En este artículo, se presenta primero cómo surge el conocimiento didáctico del contenido CDC, su significado, fundamento y naturaleza teórica. Segundo, se describen los elementos del CDC señalando su importancia e implicaciones como objeto de estudio y como modelo teórico para la formación de profesores. Tercero, se revisan las investigaciones realizadas en el ámbito internacional...” (p.83)
	Metodología	Los autores hacen una revisión teórica del conocimiento didáctico del contenido desde sus fundamentos, la naturaleza, la importancia como objeto de estudio.
	Aportes	<p>“El CDC no se limita a estudiar cómo se enseña para obtener conocimiento de la didáctica general, sino que busca, que el profesor comprenda lo que se ha de aprender y cómo se debe enseñar el contenido a partir de la propia práctica docente, de la comprensión de cómo el alumno aprende y comprende, resuelve problemas y desarrolla su pensamiento crítico acerca de dicho contenido (Shulman, 1987).” (p.86)</p> <p>“...los profesores no sólo tienen o deben conocer y comprender el contenido de su materia, sino también cómo enseñar ese contenido de manera efectiva, es decir, conocer lo que parece ser más fácil o difícil para los estudiantes, cómo organizar, secuenciar y presentar el contenido para promover el interés y habilidades del estudiante.” (p.89)</p> <p>“El CDC representa un esfuerzo para desarrollar un modelo sobre la cognición del profesor; proporciona un nuevo marco analítico para la organización y recogida de información sobre la cognición del profesor; resalta la importancia del conocimiento de la materia en cuestión y su transformación para la enseñanza...” (p.95)</p> <p>“El desarrollo de la investigación sobre el CDC permitirá acercarnos a las bases teóricas y prácticas que requieren los programas de formación, conocer cómo se desarrolla u opera en la realidad escolar, clarificar su comprensión y significado, y generar un repertorio de estrategias o representaciones instruccionales.” (p.96)</p>
	Otros	De la revisión de trabajo de investigación los autores encontraron que: “el mayor número de investigaciones ha sido sobre el conocimiento del contenido por enseñar (cerca de 88%), mientras que menos de 50% ha estudiado el conocimiento de la didáctica específica del contenido y del conocimiento acerca del proceso de aprendizaje del estudiante, respectivamente; siendo los tópicos de las fracciones y las funciones los temas más estudiados.” (p.93)
<p>El cálculo escolar universitario. Un estudio de su problemática en una facultad de ciencias</p>	Objetivos	Se infiere que los objetivos eran: Diagnosticar los factores que influyen en la reprobación y rezago en la asignatura del cálculo. Diseñar e implementar estrategias que atienden a reducir los índices de reprobación y rezago.
	Metodología	Llevó a cabo en tres etapas: 1. Diagnóstico de los posibles factores que influyen en la problemática en cuestión. 2. Basado en el punto anterior, elaboró un diseño de estrategias para entender la

Aparicio (2007)		<p>reprobación. 3. Implementó acciones y estrategias, académicas y administrativas, con el fin de reducir la reprobación y rezago. La población con la que trabajó fue estudiantes de la asignatura de cálculo en la Facultad de Ciencias Humanas de la Universidad Autónoma en México en seis licenciaturas.</p> <p>Se realizaron diferentes actividades como análisis de libros de texto, revisión de los programas académicos, estudio de las diferentes dificultades que presentan los estudiantes al entender y aprender los temas del cálculo.</p> <p>También tuvo en cuenta las prácticas de aula, el conocimiento disciplinar y didáctico del profesor, la estructuración de los contenidos y las actitudes de los estudiantes.</p> <p>El análisis de los problemas de rezago y reprobación del cálculo se deben hacer no desde fuera sino desde "...las prácticas de aula, el comportamiento de las y los estudiantes, las costumbres didáctica del profesorado, el análisis del discurso matemático escolar, la estructuración de contenidos temáticos..." (p.354)</p>
	Aportes	<p>Para la resolución de ejercicios "... los estudiantes emplean recursos basados en una manipulación algebraica y métodos analíticos de resolución." (p.356)</p> <p>También muestran resistencia a la resolución de ejercicios de forma visual:</p> <p>"...la manera en que los estudiantes tienden a plantear y resolver una actividad matemática escolar, no es ajena a la manera en como los contenidos matemáticos son desarrollados en el salón de clases." (357)</p> <p>"La enseñanza de aula se caracteriza por una marcada tendencia en el uso estrategias expositivas-discursivas centradas en el profesor como responsable del contrato didáctico." (p.357)</p> <p>"La didáctica de la matemática (matemática educativa en México) en tanto disciplina científica de naturaleza social, toma como principal objeto de estudio, los fenómenos didácticos asociados a la comunicación (enseñanza) y producción (generación de aprendizajes) de conocimientos matemáticos a fin de impactar de manera eficaz en la educación matemática."(p.353)</p> <p>Los profesores, "refieren al cálculo como una herramienta básica, importante para cualquier licenciatura, sin embargo, desconocen en cierta forma, las aplicaciones propias para cada una de ellas." (p.356)</p>
	Otros	
Estrategia didáctica para flexibilizar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática en la universalización de la educación superior	Objetivos	<p>"En este trabajo se propone el diseño de una estrategia didáctica para contribuir a flexibilizar y a hacer más eficiente el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática I y II para las carreras de Contabilidad, Ingeniería Industrial e Ingeniería Agrónoma." (p.138)</p>
Martínez, Torres, Tellería & Dibut (2007)	Metodología	<p>La estrategia se diseña para ser aplicada en el currículo de la educación superior, se desarrolla en tres fases: 1. Preparatoria, se tiene en cuenta la preparación de los profesores; se revisan las necesidades de los estudiantes; se realiza el diagnóstico de conocimientos previos; se aplican las tecnologías de la información como medio fundamental; se prepara la evaluación de forma individual teniendo en cuenta las características de cada individuo. 2. Implementación, se hace un análisis de lo diseñado, en el que se tiene en cuenta la estructura basado en objetivos, contenidos, métodos, medios y evaluación. 3. Control, se analizan los resultados; se tienen en cuenta aspectos observables y medibles; se</p>

		hacen conclusiones de los resultados y si es necesario se realizan modificaciones.
	Aportes	<p>“La estrategia que se propone en este trabajo se sustenta en los presupuestos teóricos relacionados con:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Los principios de las concepciones curriculares y en específico lo relacionado con el currículum flexible para la formación de profesionales competentes. • La significatividad didáctica en el proceso de enseñanza aprendizaje. • Comprensión y actos de comprensión en didáctica de la Matemática, que vincula lo relacionado con representaciones y visualización en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática.” (p.138) <p>Sobre la significatividad didáctica refieren que: “...logra una interacción entre los conocimientos previos y la nueva información, esa interacción tiene dos características; primera: activa, no es que reciban el conocimiento por vía inductiva o deductiva, de forma tradicional, sino activación que produzca cambios evolutivos para que construyan sus propios significados y el camino de su desarrollo; segunda: productiva, quiere decir que permita aplicar los conocimientos a nuevas situaciones de la realidad y ello implica que perciban la utilidad del conocimiento.” (p.140)</p> <p>“...con este enfoque constructivista asumimos que comprender un objeto matemático consiste en que el alumno sea capaz de reconocer sus características, propiedades y representaciones; relacionarlo con otros objetos matemáticos y usarlo en toda la variedad de situaciones problémicas que sean propuestas por el profesor.” (p.141)</p>
	Otros	
Formación de profesores. Diversas concepciones que afectan el quehacer docente y competencias iniciales de profesores del nivel medio superior Sosa & Farfan (2007)	Objetivos	Se infiere que: Hacer un acercamiento sobre las competencias que posee el profesor de matemáticas y obtener un diagnóstico actual de la enseñanza.
	Metodología	Elaboraron un estudio de las concepciones de cinco profesores de bachillerato acerca de la naturaleza de las matemáticas, la enseñanza y su aprendizaje. Por medio de tres instrumentos: dos cuestionarios y una entrevista estructurada.
	Aportes	Analizaron, tres tipos de concepciones: matemáticas, en las que predomina la concepción platónica, es decir, como un conocimiento preexistente a descubrir; tendencia didáctica en la que prevalecen las clases tradicionales en la que el profesor expone el tema, propone un ejemplo y plantea una serie de ejercicios a solucionar por parte de los estudiantes; las concepciones sobre enseñanza y aprendizaje, prevalece el instrumentalismo, centrado en el estudiante.
	Otros	Analizaron las ocho concepciones iniciales del profesor: Pensar y razonar; argumentar; comunicar; modelar; plantear y resolver problemas; representar; utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas; utilizar ayudas y herramientas.

Anexo 2: Sistematización de datos sobre enseñanza del concepto de función y función cuadrática.

Referencia	Categoría	Dato
<p>Evaluación del conocimiento de futuros profesores de matemáticas sobre las transformaciones de representaciones de una función</p> <p>Amaya, Pino & Medina (2016)</p>	<p>Objetivos</p>	<p>“En este trabajo se tuvo como objetivo evaluar el conocimiento matemático de futuros profesores de matemáticas para hacer transformaciones de las representaciones de una función. Concretamente se evalúa el reconocimiento, la producción y transformación de diferentes representaciones de una función, al igual que su uso, con el propósito de resolver una situación problema.” (p.3)</p>
	<p>Metodología</p>	<p>Aplicaron un cuestionario, a 90 profesores en formación repartidos en tres grupos, 28 de tercer semestre, 28 de sexto semestre y 34 de octavo semestre, de la Universidad de Sucre, Colombia. Utilizaron el modelo de conocimiento didáctico matemático, el cual proporciona tres categorías dimensión matemática, dimensión didáctica y dimensión meta didáctica-matemática.</p>
	<p>Aportes</p>	<p>“En relación con el concepto de función, parece haber un distanciamiento bien marcado entre su comprensión a nivel escolar y su necesidad de uso consciente a nivel social.” (p.112)</p> <p>“...la Dimensión matemática, conformada por las sub-categorías <i>conocimiento común del contenido</i> –relacionado con el conocimiento que un profesor moviliza para resolver los problemas que les coloca a sus estudiantes y para verificar que las soluciones dadas a ellos sean apropiadas; más específicamente, se relaciona con el conocimiento que el profesor comparte con estudiantes del nivel donde orienta–, y el <i>conocimiento ampliado del contenido</i> –que permite al profesor realizar las conexiones entre los conceptos que fundamentan lo que se trabaja en un nivel y proyectar lo trabajado hacia lo que se necesita posteriormente, además de permitirle seleccionar y utilizar diferentes representaciones de un objeto, decidir cuál registro utilizar como principal y cuál o cuáles como auxiliares.” (p.115)</p> <p>“La Dimensión matemática es integral, integrada e integradora debido a la naturaleza de sus componentes. Por un lado, el conocimiento común del contenido es absolutamente indispensable en un profesor de matemáticas, quien debe conocer el material que enseña y poderlo modificar para construir situaciones problema, sin que pierda su esencia matemática.” (p.115)</p> <p>“La Dimensión meta didáctico-matemática hace al profesor consciente de que de su formación y actualización continua y permanente depende, en gran medida, el aprendizaje de sus estudiantes; permite al profesor reflexionar sobre su propia práctica.”(p.115)</p> <p>“... el concepto de función tiene un estatus de facilitador en el aprendizaje de las matemáticas, pues permite la interacción de aprendices y objetos matemáticos, a través de actividades que involucran funciones con elementos del medio sociocultural.” (p.116)</p> <p>“... cabe resaltar la función de las representaciones semióticas como andamiaje en la adquisición de los conocimientos Matemáticos” (p.118)</p> <p>“Uno de los conflictos epistémicos más marcados en relación con el concepto de función (Godino, Wilhelmi y Bencomo, 2005) es el</p>

		<p>distanciamiento entre el reconocimiento del concepto a nivel escolar y su uso consciente a nivel social.” (p.141)</p> <p>“...se encontraron serias dificultades con la comprensión de la noción función, específicamente con la identificación y uso de los elementos de las funciones involucradas, la identificación de los interceptos al origen sin ayuda gráfica y el análisis de los valores extremos, así como con los intervalos de crecimiento la modelación de las funciones y la identificación de la pendiente de la función lineal.” (p.140)</p> <p>Categorías y preguntas extraídas de la tabla 1:</p> <p>“¿Cuáles son los Costos, los Ingresos y la Ganancia por producir y vender 0 ejemplares?, Identificación y uso del intercepto al origen en una función; ¿Dentro de qué límites se debe mantener la oferta para obtener ganancias?, Identificación y uso de los intervalos de variación de una función.; ¿Cuántos ejemplares se deben producir y vender para obtener la máxima Ganancia?, Determinación de los máximos y mínimos de una función; ¿Cuánto cuesta producir cada libro si no se consideran los Costos fijos de producción?, Identificación y uso del concepto de pendiente de una recta; Calcula una expresión matemática que permita un cálculo aproximado de las Ganancias. En el mismo plano coordenado realiza la gráfica de las Ganancias, Modelación matemática de una situación funcional; Si se sabe que se obtuvo una Ganancia de 20.000 pesos, ¿cuál fue el número de ejemplares que se debió producir y vender?, Utilización del concepto de ecuación para encontrar una incógnita; ¿En qué intervalos crecen la funciones de Costos, de Ingresos y de Ganancias?, Analiza el crecimiento y decrecimiento de una función.” (p.120)</p>
	Otros	<p>“...el estudio de las funciones es de suma importancia en el desarrollo de una comunidad, ya que conectan modelos y/o patrones con otros para producir estructuras matemáticas perdurables en el tiempo.” (p.112)</p> <p>“Los registros más comúnmente usados para representar una función son: analítico algebraico, analítico numérico, gráfico, figural, sagital, coloquial, tabular y el fenomenológico.” (p.117)</p> <p>“encontraron serias dificultades con la comprensión de la noción función, específicamente con la identificación y uso de los elementos de las funciones involucradas, la identificación de los interceptos al origen sin ayuda gráfica y el análisis de los valores extremos, así como con los intervalos de crecimiento la modelación de las funciones y la identificación de la pendiente de la función lineal.” (p.140)</p>
<p>¿Relación, función o ecuación?</p> <p>Cribeiro, Madrid & Fraga (2013)</p>	Objetivos	<p>Se infiere que:</p> <p>Hacer un análisis reflexivo de los resultados obtenidos en las investigaciones hechas por Cribeiro y Madrid, sobre lo que entienden estudiantes y profesores de los conceptos relación, ecuación o función.</p>
	Metodología	<p>Analizaron los resultados de las encuestas y entrevistas aplicadas a estudiantes de ingeniería, licenciatura en ciencias biológicas, licenciatura en matemáticas, maestría en matemática educativa, profesores de matemáticas de nivel pre universitario y universitario. De la Universidad de la Habana y la Universidad Autónoma de Coahuila.</p>
	Aportes	<p>“Relación:</p> <p>Basta con poder relacionar algunos elementos del primer conjunto con algunos del segundo conjunto, para tener una relación entre los</p>

		<p>conjuntos. No importa si se relacionan todos los elementos o solamente algunos de los elementos del primer conjunto, con uno o varios elementos del segundo conjunto. Se le llama dominio de la relación a los elementos del primer conjunto que se vinculan con elementos del segundo conjunto. Se le llama codominio a los elementos del segundo conjunto (variables dependientes) vinculados con elementos del conjunto de partida (variables independientes).</p> <p><i>Función:</i> Para tener una función se necesita además que se cumplan dos propiedades adicionales: P1 La primera propiedad pide que todos los elementos del conjunto A de partida (variables independientes) estén relacionados con algún elemento del segundo conjunto de llegada (variables dependientes). P2 La segunda propiedad establece que a cada elemento del conjunto de partida (variables independientes) le corresponde un único elemento del conjunto de llegada (variable dependiente). En caso de que no se cumpla la primera propiedad se restringe el conjunto A al subconjunto A1 de elementos que se relacionan con elementos de B y a este subconjunto se le llama dominio de la función. Esto hace que esta propiedad no sea determinante para tener una función, pues basta restringir el conjunto y en este subconjunto se tiene una función. Dado que la segunda propiedad es la que determina que el vínculo entre las variables sea función o no lo sea, los docentes y los libros de texto hacen énfasis en la comprobación de que se cumpla esta propiedad, minimizando la importancia de los conjuntos donde se establece el vínculo entre variables.</p> <p><i>Ecuación:</i> La ecuación expresa la relación (ley ó vínculo) existente entre elementos del dominio de la relación o función, con un único elemento del codominio (puede considerarse el 0 como ese elemento de B). El objetivo de una ecuación es hallar el conjunto solución, el cual es el subconjunto del dominio de la función o relación, relacionado con el valor dado del codominio. La ecuación y el conjunto solución son dos objetos matemáticos diferentes.” (p.45) “Los estudiantes subestiman los conceptos por considerarlos innecesarios, consideran que tienen que trabajar con fórmulas y realizar algoritmos de trabajo operacionales. Confunden las expresiones matemáticas que representan el vínculo entre variables con la función y la ecuación la asocian únicamente a una expresión matemática con signo de igualdad. Se considera a la notación matemática como algo carente de importancia, más bien un capricho de matemáticos sin utilidad práctica pues lo único importante, en su criterio son los pasos operacionales que hay que dar para resolver un tipo de ejercicio en particular.” (p.48) “...hacemos la proposición de incluir al inicio de los cursos de Cálculo las diferentes posibilidades de relaciones y funciones trabajando de R en R, de R^n en R, de R^n en R^m. El ejemplo del movimiento de un caracol, dado al inicio, puede ser el motivo para introducir diferentes funciones, de una variable, de varias variables, vectoriales.” (p.54)</p>
	Otros	<p>“La notación matemática en este caso ayuda a precisar los conceptos, destacando las características y diferencias entre ellos.” (p.48) Del análisis de los resultados los autores encontraron que “Es muy difícil que acepten que para una misma expresión matemática con pares de conjuntos diferentes se puede tener indistintamente una relación, una función, ningún vínculo o una ecuación.”</p>

<p>Estudio de las organizaciones matemáticas del objeto función cuadrática en la enseñanza superior</p> <p>Flores, Gaita & Carrillo (2013)</p>	<p>Objetivos</p>	<p>“Este artículo es un recorte de la investigación de Carrillo (2013) y tiene por objetivo presentar una metodología para el análisis de textos, teniendo como base la noción de praxeología propuesta por la Teoría Antropológica de lo Didáctico.” (p.1306)</p> <p>“En este trabajo se considera hacer un análisis del libro de texto Sydsaeter, Hammond y Carbajal (2012).” (p.1306)</p>
	<p>Metodología</p>	<p>Analizan “... la forma como el libro de texto presenta el desarrollo del objeto en estudio (a lo que denominamos organización didáctica), identificamos y analizamos las praxeologías: tareas, técnicas y tecnologías asociadas a la función cuadrática.” (p.1306)</p> <p>“La valoración del libro de texto analizado se hace según el desarrollo matemático y didáctico presentado para enfrentar las dificultades de los estudiantes.” (p.1307)</p>
	<p>Aportes</p>	<p>“Según Chevallard (1999) la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) distingue dos tipos de praxeologías u organizaciones: las Organizaciones Matemáticas (OM) y las Organizaciones Didácticas (OD). Las primeras se refieren a la realidad matemática que se pretende estudiar y que son el resultado de la construcción de la comunidad matemática. Las segundas se refieren a la forma en que eso ocurre; son el proceso de estudio y construcción del conocimiento en un contexto con intencionalidad didáctica.” (p.1307)</p> <p>“Si bien el texto presenta tareas que hacen referencia a la interpretación y justificación del objeto en estudio, no se observa la comparación entre técnicas para la solución de una tarea. Por otro lado, la mayoría de tareas que observamos en el libro se encuentran relacionadas, haciendo que dependa una de otra con respecto a la técnica usada para su solución.” (p.1311)</p> <p>“Con respecto al objeto de estudio, podemos reconocer cuatro formas distintas de representación: lenguaje natural, lenguaje algebraico, lenguaje gráfico y representación tabular.” (p.1311)</p> <p>El libro “... presenta una cantidad considerable de tareas que requieren de la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico. Esto ayudaría a superar la dificultad donde los alumnos deben relacionar la representación gráfica con la analítica.” (p.1312)</p> <p>“...el texto presenta un gran número de tareas que se resuelven a partir de la expresión algebraica y sin una contextualización previa. Por esa razón, se sugiere incrementar el número de tareas considerando otras que sean contextualizadas y que requieran de la interpretación, modelización y traducción, pues estas serán las características de las tareas a las que los alumnos se enfrentarán en su práctica profesional.” (p.1313)</p>
	<p>Otros</p>	<p>“El texto presenta una variedad de representaciones siendo esto favorable para la interpretación de conceptos matemáticos permitiéndonos así una valoración positiva del texto.” (p.1312)</p> <p>“...se observa la presencia de una tarea propuesta en relación a las dificultades que tienen que ver con la relación entre las variables de la función cuadrática, su variación conjunta y manipulación de parámetros, por lo que podemos inducir que el texto no ayudaría a superar dichas dificultades por falta de tareas, técnicas y tecnologías.” (p.1312)</p>
<p>Funciones: desarrollo histórico del concepto y actividades de</p>	<p>Objetivos</p>	<p>“La principal intención de este trabajo es motivar a los docentes e investigadores en educación matemática a integrar en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas relacionados con el concepto de función, el desarrollo histórico de dicho objeto de estudio.” (p.1)</p>

enseñanza aprendizaje		“Como segundo objetivo se desea sugerir diferentes actividades que se pueden utilizar para estudiar el concepto de función en los varios niveles de la educación formal.” (p.1)
Ugalde (2014)	Metodología	“...se divide en tres secciones. La primera sección es una revisión del desarrollo del concepto de función a través de la historia. La segunda sección es un breve estudio de los tipos de definición existentes y las diferentes formas de representar funciones. La tercera sección es un recuento de actividades o situaciones de interés, con la intención de indicar facetas interesantes a la hora de estudiar el concepto de función.” (p.1)
	Aportes	<p>“...el concepto de función está íntimamente ligado al concepto primitivo de conjunto (amén de otros conceptos como relación, variable, criterio, etc.).” (p.2)</p> <p>“...el concepto de función desde su origen –cualquiera que este sea–, está ligado al desarrollo del concepto de cantidad, y más generalmente, al concepto de número.” (p.2)</p> <p>“...el concepto de función nace del interés de la humanidad por entender el mundo que le rodea.” (p.2)</p> <p>“El concepto de función está presente en toda la matemática. No sólo es central en las áreas propias de la matemática (llamada teórica o pura), sino que es la herramienta por excelencia en las áreas que buscan modelar o describir las actividades cotidianas y los fenómenos que se perciben (matemática aplicada).” (p.2)</p> <p>“El concepto de función no escapa esta realidad. El concepto de función, como se entiende hoy en día, se consolida en el año 1837, con el matemático Gustav Dirichlet.” (p.4)</p> <p>Sobre la revisión del desarrollo histórico del concepto de función, lo dividió en ocho periodos: Babilónico y egipcio, quienes identificaron la dependencia entre cantidades como se evidencia en las tablas de arcilla y los papiros, estudiaron problemas como la variación de la luminosidad de la luna en intervalos iguales de tiempo, o períodos de visibilidad de un planeta respecto a su posición relativa con el sol. Este tipo de problemas con lleva, en forma latente, un sentido de funcionalidad; griego 600 AC a 400 DC; oriental y semítico 600 AC y siglo XIV; Edad media siglo V y XIV; Renacimiento siglo XV y XVI; siglo XVII y XVIII; siglo XIX; siglo XX y XXI.</p> <p>Formas de representar las funciones:</p> <p>“Descripción verbal: en este tipo de representación, mediante el lenguaje común se ofrece una descripción general, cualitativa, de la relación funcional que asigna los elementos del conjunto de salida, con los elementos del conjunto de llegada. Ofrece una relación funcional que no requiere de simbología elaborada.</p> <p>Se recuerda en este momento el hito histórico marcado por Dirichlet cerca del final del siglo XIX, cuando sugirió utilizar este tipo de representación para desligar el concepto de función de fenómenos físicos o de fórmulas concretas.</p> <p>Diagramas: La representación mediante diagramas es muy rica visualmente, y guarda estrecha relación con los diagramas de Venn de la teoría de conjuntos. Es muy útil para trabajar con conjuntos finitos, y con fenómenos que no son necesariamente cuantificables.</p> <p>Tabla de valores: mediante el listado explícito de pares ordenados, establece en forma concreta que elemento del primer conjunto corresponde a que elemento del segundo. Describe mejor funciones entre conjuntos finitos. Para conjuntos de gran cardinalidad ofrece sólo una visión parcial de la relación funcional.</p> <p>Gráfica: las más de las veces una representación cartesiana (discreta</p>

		<p>o continua), en donde los elementos del primer conjunto se representan sobre un eje horizontal, y los del segundo sobre un eje vertical (claro está, se limitan al caso de dos variables). Permite “visualizar” características globales de la relación funcional. Es la más popular de las representaciones, y guarda una estrecha relación primero, con el desarrollo histórico del concepto de función, y segundo con el cálculo, terreno de juego por excelencia para el estudio y uso de las funciones.</p> <p>Relación algebraica: En este tipo de representación se busca, mediante una fórmula matemática o ecuación entre los elementos de los conjuntos en cuestión, expresar en forma explícita o implícita, la relación funcional.”(p.19)</p>
	Otros	<p>“...el verdadero reto al enseñar el concepto de función radica en cómo diseñar actividades para que los estudiantes descubran el concepto de función por sí mismos, y no por una simple exposición por parte del docente.” (p.45)</p> <p>“...la historia es el mejor referente de obstáculos y catalizadores del concepto de función, y que al enseñar, el proceso de enseñanza aprendizaje debe ser un reflejo de ese proceso histórico.” (p.45)</p>
<p>La función cuadrática. Un estudio a través de los libros de texto de los últimos 40 años en Argentina</p> <p>Vivas (2010)</p>	Objetivos	<p>“Este artículo presenta algunos avances de una investigación, todavía en desarrollo, cuyo principal objetivo es analizar libros de texto publicados antes y después de la sanción de la Ley Federal de Educación, teniendo como eje central el concepto de función cuadrática.” (p.164)</p>
	Metodología	<p>“El instrumento de análisis será una adaptación del diseñado por Villella para examinar los libros escolares desde tres dimensiones: la formal, la epistemológica y la didáctica. También se abordará el estudio y tratamiento de la función cuadrática haciendo hincapié en los sistemas de representación utilizados en los textos.” (p.164)</p>
	Aportes	<p>“La función cuadrática es una función polinómica de segundo grado que puede escribirse de la siguiente forma: $f(x) = ax^2 + bx + c$ donde a, b y c son números reales cualesquiera con la condición de que $a \neq 0$.” (p.164)</p> <p>“Este estudio busca caracterizar la dimensión formal de los textos analizados, describir elementos que permitan visualizar la concepción de la Matemática que sustentan los autores; analizar la tendencia didáctica que predomina en el tratamiento de la función cuadrática y caracterizar el tratamiento de dicha función a partir del uso que se realiza de los diversos sistemas de representación.” (p.165)</p> <p>“Los libros se constituyen en artefactos culturales y la elección editorial que se hace de los mismos, además de la generalizada práctica del aula basada en trabajos preparados para los alumnos, van determinando lo que se debe aprender.” (p.166)</p> <p>“Para analizar los textos y determinar cómo influyen en el proceso de enseñanza definimos tres dimensiones: “la primera impresión que causa al lector el libro que tiene en sus manos, es lo que dimos en llamar la dimensión formal” (Villella, 2007, p.124). Esta dimensión tiene que ver con analizar la forma en la que el material llega impreso...” (p.172)</p> <p>“La “dimensión epistemológica”. Tal como afirma Sanz Lerma: “un libro escolar no presenta un saber de modo inocente, sino que presenta toda una visión del mundo que va desde unos determinados tipos de teorías científicas y no de otras, hasta las concepciones ideológicas menos aparentes de la sociedad en que está inmerso” (Sanz Lerma, 1995, p.212). Bajo esta dimensión intentaremos</p>

		<p>responder ¿Qué es la Matemática? ¿Qué características tiene? ¿Cómo se presenta a los alumnos? ¿Para qué se estudia?" (p.173)</p> <p>“Desde el punto de vista del Cuasi-Empirismo, la Matemática es un conocimiento objetivo, absoluto y universal, libre de valores y abstracto.” (p.173)</p> <p>“Para el Constructivismo, la Matemática resulta un sistema complejo de conceptos, procedimientos y representaciones interconectadas. Se caracteriza por ser un conocimiento revisable, con verdades relativas al contexto en que se trabaja. Se presenta a los alumnos mediante procesos inductivos-deductivos que llevan a las heurísticas y a la resolución de problemas.” (p.173)</p> <p>“...la "dimensión didáctica" se buscarán elementos que permitan relacionar las particularidades del abordaje de la función cuadrática en cada texto, con las diversas tendencias didácticas descritas por Contreras González (1999), a saber: a) "La tendencia tradicional": se caracteriza por el uso de la exposición magistral como técnica habitual y el uso del libro de texto como único material curricular, que contiene la información académica considerada correcta.” (p.174)</p> <p>“ b)"La tendencia tecnológica": el profesor no expone los contenidos en su fase final, sino que simula su proceso de construcción, apoyado en estrategias expositivas, y sigue una programación cerrada con una secuencia que emana de los aspectos estructurales de la disciplina.” (p.174)</p> <p>“ c)"La tendencia espontaneísta": la enseñanza no requiere de una planificación, basándose en un diseño abierto tanto de actividades como de recursos a ser utilizados. No interesan tanto los conceptos como los procedimientos y el fomento de actitudes positivas hacia el trabajo escolar.” (p.175)</p> <p>“ d)"La tendencia investigativa": se caracteriza por una propuesta organizada del profesor del proceso que llevarán a cabo los alumnos en la obtención de los saberes a través de la investigación. Interesa tanto la adquisición de conceptos, como el desarrollo de procedimientos y el fomento de actitudes positivas hacia la propia materia y el trabajo escolar en general.” (p.175)</p> <p>“En 1978 Claude Janvier en su tesis doctoral (Deulofeu, J., 2007) planteó la importancia de las representaciones en relación con el concepto de función y la constatación de que el núcleo del trabajo con funciones radica en la interpretación que subyace a cada representación, es decir, en la traducción de una representación a otra.</p> <p>Comenzamos entonces por identificar cinco sistemas de representación relevantes para la descripción de la función cuadrática: verbal, simbólico, gráfico, geométrico y numérico. (Gómez, P., Carulla, C., 1999). Cada una de estas representaciones permite expresar un fenómeno de cambio, una dependencia entre variables.” (p.176)</p>
	Otros	<p>“Es importante entonces, definir el término libro de texto o libro escolar, según la noción de Inés Sanz Lerma (1994), como aquellos libros que utilizan habitualmente profesores y alumnos a lo largo del curso escolar en el proceso de enseñanza-aprendizaje de un área de conocimiento.” (p.172)</p>
Ecuaciones de segundo grado: su historia.	Objetivos	<p>Se infiere que: Presentar una reseña del tratamiento que daban distintas culturas antiguas que en el lenguaje del álgebra actual remiten a ecuaciones de segundo grado.</p>

Dalcín & Olave (2007)	Metodología	Los autores, hacen un recuento histórico, del tratamiento de las ecuaciones de segundo grado. Tienen en cuenta cuatro culturas: la babilónica, la griega, la hindú, y la árabe.
	Aportes	Tener en cuenta la historia de las matemáticas en la enseñanza no es para que el estudiante, reproduzca las etapas, ni mucho menos reconozca anécdotas e historias. Por el contrario, permite que reconocer que el desarrollo de las matemáticas ha acumulado un conjunto de hechos que permiten ver que, por un lado los conceptos que la sustentan, tienen su origen en la abstracción de la realidad objetiva y por otro lado, las relaciones entre el desarrollo matemático y el desarrollo de la sociedad. En la enseñanza, se deben hacer conexiones entre la historia de las matemáticas y otras ciencias con las que interactúa, y que han permitido desarrollos importantes. Saber cómo, cuándo y por qué se dieron los desarrollos matemáticos y sus técnicas, proporciona elementos para mejorar la enseñanza de las matemáticas.
	Otros	Los Babilonios (2000 ac.-600 ac), usaron tablas de arcilla para la resolución de problemas matemáticos, algunos se refieren a ecuaciones del tipo: $x^2 + bx = c$ $x^2 = bx + c$ $x^2 + c = bx$; con b y c positivos. Euclides (300 ac), en diferentes proposiciones involucra los cuadrados, por ejemplo, en la proposición 5 del libro II interpreta el rectángulo como la diferencia de dos cuadrados. Brahmagupta (598-660), solucionó la ecuación de tipo $ax^2 + bx = c$. con una ecuación general: $x = \frac{-\left(\frac{b}{2}\right) + \sqrt{ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2}}{a}$ Mohammed ibn-Musa al-Jwarizmi (780 – 850 aprox.), en una de sus obras describe la solución de ecuaciones canónicas de primer y segundo orden, realizó una interpretación geométrica para resolver el problema de los cuadrados, llegó a la solución general: $x = -\left(\frac{b}{2}\right) + \frac{\sqrt{4c + (b)^2}}{2}$ Fracis Viéte (1540-1603), introdujo el uso de letras y le dio una nueva solución a la ecuación cuadrática, partiendo de una igualdad en la que la incognita tomaba ciertos valores establecidos. Llega a la solución general: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
La enseñanza de la función cuadrática en el bachillerato. Resultados de un proyecto de desarrollo	Objetivos	“Se presenta un reporte sobre el diseño, experimentación y evaluación de una secuencia de actividades didácticas para la enseñanza de la función cuadrática en el primer año del bachillerato. Tomando como marco teórico los sistemas de representación semiótica de Raymond Duval.” (p.24)
	Metodología	“La experimentación del proyecto se dividió en dos fases, un estudio piloto y la puesta en escena del diseño final de la secuencia didáctica. En ambas fases se trabajó con grupos de 15 de álgebra de primer año

<p>docente</p> <p>Ibarra & Fernández (2007)</p>		<p>de bachillerato, organizados en equipos de a lo más cuatro personas y en sesiones de 50 minutos, utilizando un cuadernillo de trabajo con las actividades propuestas.” (p.28)</p> <p>“Con la intención de evaluar el grado de efectividad de nuestra secuencia como herramienta en la enseñanza de la función cuadrática, se diseñó un cuestionario con ocho actividades similares a las que se incluyeron en el diseño didáctico, las cuales debieron ser contestadas en forma individual por los alumnos a quienes no se impuso límite de tiempo para realizar la tarea.” (p.28)</p>
	<p>Aportes</p>	<p>“Establecemos que las estrategias de enseñanza para las matemáticas deben estar diseñadas con el propósito de promover en el estudiante un constante conflicto cognitivo que lo induzca al razonamiento, análisis y reflexión de situaciones, así como a la búsqueda y aplicación de estrategias que lo ayuden a solucionar situaciones problemáticas. La capacidad de tomar decisiones propias por parte del estudiante, y saber interpretar correctamente el significado de las soluciones obtenidas, debe ser otro objetivo en el diseño de estrategias de enseñanza.” (p.27)</p> <p>“Según las teorías de Raymond Duval (Duval, 1993), para cada objeto es posible definir distintos sistemas de signos y reglas que lo simbolizan y facilitan su comprensión y aprendizaje. Dichos sistemas se constituyen como representaciones semióticas del objeto, donde un conjunto de signos se identifican las como <i>unidades significantes</i> del sistema, mientras que las reglas que lo rigen ordenan las asociaciones entre que pueden realizarse los signos.” (p.27)</p> <p>“Se encontró que nuestro diseño potenció en los alumnos la caracterización del objeto matemático en los registros de representación gráfico, tabular y algebraico, logrando una buena identificación de las unidades significantes de cada registro, así como una buena relación de las mismas al momento de llevar a cabo tratamientos internos a la función.” (p.30)</p>
	<p>Otros</p>	<p>“Con la actividad se pretende evaluar contenidos <i>disciplinarios</i> y <i>habilidades cognitivas</i> como los siguientes: 1. Se espera que los alumnos se vean en la necesidad de convertir la función del registro gráfico al tabular, 2. En el registro tabular, los alumnos se encontrarán con el problema de que no hay suficientes datos para realizar tratamientos, mediante el método de segundas diferencias para encontrar las coordenadas de los puntos que no contiene la gráfica y que son necesarios para encontrar la expresión algebraica. 3. Por lo tanto será necesario que el alumno entre en el terreno de las conjeturas y suponga los datos que le hacen falta. Específicamente se tienen que suponer las coordenadas del vértice y los puntos anterior y posterior a él, 4. Una vez propuestos los puntos que hacen falta, se espera que se realice la conversión del registro tabular al algebraico. 5. En el registro algebraico será necesario realizar tratamientos a la expresión simbólica para encontrar el parámetro “<i>a</i>” y finalmente obtener la expresión canónica de la función. 6. Por último se espera que los alumnos comprueben que tanto los datos supuestos, como la expresión algebraica encontrada, son correctos.”(p.29)</p>
<p>Tratamiento didáctico de las funciones reales de una variable: proceso de modelación</p>	<p>Objetivos</p>	<p>“En este trabajo se exponen algunas ideas sobre las etapas en el proceso que conduce a la asimilación del concepto de función y se muestran diferentes ejemplos, en los que la modelación matemática de situaciones reales, permite consolidar la asimilación o fijación del concepto, mediante su sistematización en diferentes temas de la disciplina o en su relación con otras disciplinas.” (p.235)</p>

Ramírez (2007)	Metodología	El autor realizó un trabajo en el cual expuso ideas de las etapas para la enseñanza del concepto de función.
	Aportes	Al estudiar un concepto matemático, reconocemos la necesidad de lograr un tratamiento metodológico (Ballester, 1992) que tenga en cuenta tres fases en la estructura del proceso a seguir en la elaboración de su definición: Preparación para el concepto, se caracteriza por las consideraciones y ejercicios preparatorios, lo cual generalmente se hace antes de la introducción del concepto. Formación del concepto, consiste en la parte del proceso donde se conduce desde la creación del nivel de partida, la motivación y la orientación hacia el objetivo, que pasa por la separación de las características comunes y no comunes, hasta llegar a la definición o a la explicación del concepto. Asimilación del concepto, termina con la fijación del concepto; el alumno asimila el contenido del concepto a través de acciones mentales y prácticas dirigidas hacia este objetivo.” (p.236) “En la asimilación del concepto de función es necesario que los estudiantes sean capaces de aplicar éste en la modelación de problemas relacionados con la profesión, teniendo en cuenta sus múltiples relaciones con otros conceptos matemáticos planteados en los programas de matemática y utilizados en la solución de problemas básicos fundamentales de la carrera.” (p.239)
	Otros	“En el objeto fundamental de estudio de la matemática para las carreras universitarias interviene, de una forma u otra, la modelación matemática mediante el concepto de función, por lo que se hace necesario profundizar en el tratamiento metodológico de este tema.” (p.239)
Conocimiento didáctico en la formación inicial del profesor de matemáticas relativo al concepto de función cuadrática Tovar & Triviño (2007)	Objetivos	“Caracterizar el conocimiento didáctico que tienen en cuenta un grupo de estudiantes para profesores de matemáticas en el XI semestre de la Universidad Amazonía, al utilizar e integrar la estructura conceptual y los sistemas de representación, como organizadores curriculares de un tópico matemático específico: función cuadrática en el grado octavo.” Específicos: “Elaborar el instrumento de recogida o análisis de la información relativa a la función cuadrática, aporte de la estructura conceptual y los sistemas de representaciones.” “Indagar el conocimiento didáctico de las estudiantes del XI semestre de la licenciatura en matemáticas y física, respecto a los organizadores del currículo: los sistemas de representación y la estructura conceptual de la función cuadrática, correspondiente análisis didáctico, y en particular el análisis de contenido.”
	Metodología	Trabajan la metodología cualitativa descriptiva, en la caracterización del CDC de cinco profesores de matemáticas en formación inicial de la universidad de Amazonía. Se analizaron cinco definiciones y cinco mapas conceptuales elaborados por los estudiantes donde el ejercicio organizador, se basó en los sistemas de representación de la estructura conceptual de la función cuadrática. La investigación se desarrolló en tres fases: 1. Diseño y planificación del trabajo. 2. Actuación y ejecución. 3. Organización, análisis y resultado.
	Aportes	Los sistemas de representación de la función cuadrática son: numérico, gráfico, simbólico y verbal. El análisis del contenido, es un análisis de las matemáticas escolares,

		<p>su propósito es la descripción estructurada de un tópico matemático desde las perspectivas de su enseñanza y aprendizaje en el aula de clase.</p> <p>Los autores tuvieron en cuenta tres organizadores del currículo:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Estructura conceptual: relaciones entre conceptos 2. Sistemas de representación: diferentes maneras para representar el concepto matemático y sus relaciones con otros conceptos. 3. Análisis fenomenológico: consiste en aquellos fenómenos, contextos, situaciones o problemas que pueden dar sentido al concepto. <p>Los futuros profesores al referirse al contenido matemático utiliza alto porcentaje de lenguaje verbal para dar una visión descriptiva y cualitativa de la relación funcional.</p>
	Otros	
<p>Enseñanza constructivista, conocimiento didáctico del profesor y análisis didáctico en matemáticas. El caso de la función cuadrática</p> <p>Gómez & Carulla (2001)</p>	Objetivos	<p>“En este documento reflexionamos sobre la importancia de las nociones de estructura conceptual, sistema de representación y mapa conceptual como componentes del conocimiento didáctico del profesor de matemáticas y como herramientas para la formación permanente de docentes y la investigación.” (p.2)</p>
	Metodología	<p>“Si el profesor de matemáticas asume una posición constructivista del aprendizaje, entonces se enfrenta a varios interrogantes: ¿cómo debe ser mi enseñanza?; ¿qué conocimientos debo tener para poder diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de clase?; ¿qué tipos de análisis debo hacer para lograrlo? En este capítulo abordamos algunos de estos interrogantes al reflexionar sobre el conocimiento didáctico del profesor de matemáticas y mostrar el papel del análisis didáctico en el diseño, puesta en práctica y evaluación de actividades de clase. (p.1)</p>
	Aportes	<p>El análisis didáctico sugiere cuatro componentes:</p> <p>“<i>Análisis cognitivo</i>. Con este análisis se busca identificar y describir las dificultades que los alumnos pueden enfrentar y los errores que los alumnos pueden llegar a cometer al realizar las tareas que componen la actividad.” (p.4)</p> <p>“<i>Análisis de contenido</i>. Con este análisis el profesor busca producir una descripción estructurada y sistemática del contenido matemático desde la perspectiva didáctica.</p> <p>Para ello, él debe construir la estructura conceptual de este contenido, en la que sea posible identificar los conceptos y procedimientos involucrados, junto con los sistemas de representación que permiten referirse a esos conceptos y procedimientos.</p> <p>Adicionalmente, el profesor debe realizar un análisis fenomenológico que le permita identificar los fenómenos naturales, sociales y matemáticos que pueden ser modelizados por subestructuras matemáticas contenidas en la estructura anterior.</p> <p><i>Análisis de instrucción</i>. En este análisis el profesor produce y evalúa (a la luz de los análisis anteriores) diseños de las actividades que realizarán los alumnos. <i>Análisis de actuación</i>. Este es el análisis que el profesor hace de las actuaciones recientes de los alumnos y que le permite determinar su estado cognitivo.” (p.5)</p> <p>“Desde esta perspectiva, en el discurso matemático del aula el alumno realiza dos tipos de actividades: la identificación o construcción del modelo y la resolución del problema a partir del modelo dentro de los sistemas de representación. Para la primera actividad es posible clasificar las tareas de acuerdo a la evidencia de</p>

		<p>la estructura matemática en la descripción que se hace del fenómeno dentro de la actividad:</p> <ul style="list-style-type: none"> • La estructura matemática (modelo) se encuentra explícita en la descripción del fenómeno, excepto que no está expresada en lenguaje matemático. Es el caso de problemas de caída libre en los que se menciona que el fenómeno sigue la ley de la gravedad. • La identificación del modelo depende esencialmente del conocimiento que el alumno tenga de la estructura matemática involucrada. Por ejemplo, la manera de expresar el perímetro y el área de un rectángulo en función de sus dimensiones, para hallar el rectángulo que, con un perímetro dado, tenga mayor área. • La estructura matemática proviene de las leyes naturales que regulan el fenómeno. Es el caso, por ejemplo, de tareas que se refieren a fenómenos de movimiento parabólico. • Se requiere de exploración y experimentación para la identificación del modelo. Éste es el caso de la carrera de caballos diseñada por Skovsmose (2000) en que las nociones de probabilidad surgen con motivo de la actuación de los alumnos en una simulación de una carrera de caballos utilizando dados. • El problema no está descrito en la tarea. El alumno tiene que estudiar y analizar una realidad para, primero, definir con claridad el problema y, después, modelizarlo. Estos son problemas del tipo “proyecto” (Skovsmose, 2000). • El fenómeno no tiene una estructura predeterminada y parte del problema consiste en evaluar diferentes estructuras posibles. Son el tipo de actividades que Lesh (1997) denomina de obtención de estructuras. Este autor da el ejemplo del debate sobre un sistema imparcial para combinar notas de un examen.” (p.16)
	Otros	

Anexo 3: sistematización de datos sobre enseñanza de la física.

Referencia	Categoría	Dato
<p>Un enfoque epistemológico de la enseñanza de la física: una contribución para el aprendizaje significativo de la física con muchas cuestiones sin respuesta</p> <p>Massoni & Moreira (2010)</p>	Objetivos	“El presente trabajo tiene el objetivo de relatar un estudio de caso con un profesor de física, cuyas concepciones epistemológicas fueron consideradas claramente concordes con las visiones epistemológicas contemporáneas.” (p.283)
	Metodología	“La metodología utilizada fue cualitativa del tipo de estudio etnográfico” (p.290) Los autores observaron, describieron e intentaron comprender, las concepciones epistemológicas de un profesor de secundaria de Porto Alegre Brasil y las implicaciones que tienen estas concepciones en la enseñanza.
	Aportes	Algunos rasgos importantes de las visiones epistemológicas contemporáneas son: “Según Popper, el conocimiento científico tiene naturaleza conjetural, hipotética; la falsedad o veracidad es el criterio de demarcación entre el discurso científico y otros tipos de conocimiento...” (p.289) “Para Kuhn, la ciencia crece a través de un sistema dinámico: periodos de ciencia normal interrumpidos por revoluciones científicas, seguidos de nueva ciencia normal, que está caracterizada por un conjunto de reglas, creencias, técnicas y

		<p>modelos compartidos por una comunidad científica...” (p.289)</p> <p>“Toulmin defiende que la ciencia no es socialmente neutra y descontextualizada, sino un proceso cooperativo, con influencias sociales, culturales, de cada época.” (p.289)</p> <p>“...según Lakatos, es la competición (y a veces sustitución) de teorías y/o programas de investigación.” (p.289)</p> <p>“La imaginación y la creatividad son ingredientes indispensables para el avance del conocimiento científico, según Feyerabend. (p.289)</p> <p>“La ciencia es una iniciativa racional no lineal, no acumulativa, en la cual la regla es la coexistencia de teorías rivales con el objetivo de producir teorías eficaces en la resolución de problemas científicos, según Laudan...” (p.289)</p> <p>“Para Bachelard, la ciencia resulta del pensamiento científico inconcluso, abierto, sujeto a la rectificación y el conocimiento avanza a medida que generamos rupturas, negación del conocimiento anterior y con eso superamos obstáculos epistemológicos...” (p.289)</p> <p>“Según Maturana, el fenómeno del conocer implica explicar el conocedor (el científico), que como ser vivo se auto-organiza permanentemente. [...]. Así, explicar es siempre una reformulación de la experiencia con elementos de la experiencia del observador, que necesita la aceptación del otro.” (p.300)</p> <p>“La ciencia es un proceso de construcción de modelos, que empieza con idealizaciones y simplificaciones (objeto-modelo), después se buscan teorías capaces de describirlo (modelo teórico), siendo que lo que caracteriza el conocimiento científico es su veracidad (Bunge, 1960, p.41).” (p.300)</p> <p>Encontraron que en el proceso de enseñanza aprendizaje intervienen varios aspectos como: el aula de clase; la disposición de los estudiantes y del profesor; la cantidad de estudiantes; las metodologías utilizadas por el profesor; y el currículo.</p>
	Otros	
<p>La enseñanza de física general en la universidad. propuestas de investigación</p> <p>Carnivo & Lopes (2003)</p>	Objetivos	<p>“Por ello nos parece fundamental realizar un estudio serio y sistemático sobre el fracaso en estas áreas, en particular al abordarlo desde el enfoque que es más susceptible de ser cambiado por parte de las instituciones universitarias: la forma en que se enseña en las mismas.” (p.474)</p> <p>“En este trabajo proponemos una herramienta para el análisis de la calidad del aprendizaje en las asignaturas de Física General (o equivalentes) de las licenciaturas de las universidades portuguesas. Presentamos un marco teórico y en relación con el mismo discutimos una estrategia de investigación que trata de desarrollar posibles soluciones.” (p.474)</p>
	Metodología	<p>Desarrollan un marco teórico acerca de los tipos de aprendizaje de los estudiantes y los enfoques de enseñanza de los profesores, basado en el marco teórico elaborado, construyen la estrategia de evaluación llamada “tool box”, que consiste en una serie de instrumentos que permiten medir la calidad de los aprendizajes.</p>
	Aportes	<p>Enfoques acerca del aprendizaje:</p> <p>“El enfoque superficial se fundamenta en un principio orientador, una intención, que es extrínseco al propósito real de la tarea de aprender. La estrategia que surge de este enfoque consiste en simular que se satisfacen las exigencias de la tarea, e invertir el mínimo tiempo y esfuerzo. Este enfoque se ha asociado muchas veces al «aprendizaje» memorístico al retener la información «de</p>

		<p>carrerilla».”(p.474)</p> <p>“El enfoque profundo se fundamenta en un interés por el asunto al que se refiere la tarea de aprendizaje y es la estrategia empleada para maximizar la comprensión.” (p.475)</p> <p>“El enfoque de «rendimiento elevado» (achieving approach, en el original) tiene su origen en la intención de obtener el mejor rendimiento posible. En el contexto de la educación formal principalmente, estos estudiantes pretenden conseguir las mejores calificaciones finales que sea posible. Al igual que en el enfoque superficial, el objetivo no está puesto en la tarea de aprendizaje en sí misma, sino en el reconocimiento por el alto nivel alcanzado en la ejecución.”(p.475)</p> <p>Algunas tendencias teóricas de didáctica de ciencias y de la física son:</p> <p>“La primera es que la enseñanza se debe volver más interactiva. [...]Esta tendencia tiene su base teórica en la concepción constructivista según la cual la enseñanza debe proporcionar fundamentalmente un ambiente de aprendizaje, y no sólo ha de transmitir simplemente información como pretendía el paradigma anteriormente dominante de enseñanza por transmisión-recepción.” (p.476)</p> <p>Una segunda tendencia de la investigación en didáctica de ciencias es el estudio de las concepciones de los alumnos (Viennot, 1996) y las dificultades más comunes entre los estudiantes cuando se enfrentan a cada uno de los aspectos de la física.” (p.476)</p> <p>“Otra tendencia hace referencia a los estudios acerca de la evolución conceptual, entendida como un proceso complejo, lento y que se produce sin la mediación del profesor (Silva, 1999; Lopes, 1999, 2002b; Lemeigman, 1993).” (p.476)</p> <p>“Una cuarta tendencia señala la necesidad de utilizar contextos de enseñanza que despierten el interés de los estudiantes y contribuyan a involucrarlos en tareas de aprendizaje diversificadas y orientadas a la comprensión de problemas o situaciones más o menos próximas a su contexto cotidiano.”(p.476)</p> <p>“Otra tendencia cuestiona la distinción que se ha hecho tradicionalmente entre teoría, práctica y problemas, o bien la nomenclatura habitualmente usada en didáctica de ciencias, el aprendizaje conceptual, el trabajo experimental y la resolución de problemas (abreviadamente: AC, TE y RP).” (p.476)</p>
	Otros	<p>“El fracaso escolar en las asignaturas de Matemáticas y Física del primer año de las licenciaturas de Ciencias, Educación e Ingenierías en las universidades portuguesas puede sobrepasar el 50% (Tavares et al., 1998).” (P.473)</p> <p>“Existe, sin embargo, un consenso tácito en considerar que los factores académicos, en general, y la calidad de la enseñanza, en particular, contribuyen necesariamente el fracaso escolar, a pesar de no ser los únicos factores.” (P.473)</p>
El concepto de modelo en la enseñanza de la física consideraciones epistemológicas, didácticas y retóricas	Objetivos	“La intención de este trabajo es proceder a una rápida revisión teórica de los modelos científicos y didácticos en física, desde los puntos de vista epistemológico, didáctico y retórico, por cuanto se entiende que los modelos se establecen como las formas de <i>representación</i> por excelencia de los contenidos científicos.” (p.77)
	Metodología	Los autores realizaron una revisión teórica del concepto de modelo desde un análisis epistemológico, didáctico y retórico.
	Aportes	“Los modelos científicos en física constituyen una representación teórica de la realidad que es de segundo orden (MATTHEWS,

Aduriz & Morales (2002)		1994). Los modelos didácticos son representaciones de orden superior (modelos de modelos), obtenidas por <i>transposición</i> a partir de los modelos científicos.” (p.77) “Históricamente, la analogía ha sido muy utilizada como recurso heurístico auxiliar en la enseñanza de la física y de las demás ciencias naturales.” (p.81)
	Otros	“Actualmente, podemos considerar los modelos científicos y didácticos como <i>representaciones</i> (esto es, abstracciones no lingüísticas) del mundo, con su propia lógica interna, sus relaciones de <i>semejanza</i> con los fenómenos, y sus propios medios expresivos (los lenguajes simbólicos especializados)” (p.78)
Algunas consideraciones en torno al proceso aprendizaje-enseñanza de la física en la universidad Beléndez (1996)	Objetivos	“El objetivo fundamental de este trabajo es presentar y analizar algunos aspectos didácticos de la enseñanza de la física en la universidad” (p.189)
	Metodología	Revisó cuatro formas didácticas: clases teóricas, para las que el profesor debe permitir que los estudiantes, interactúen y participen, <i>lección dialogada</i> ; resolución de problemas, no es suficiente con obtener un resultado numérico, se debe incrementar la capacidad de análisis de los estudiantes, permitiendo que expliquen la pregunta, discutan los principios a aplicar, den una solución matemática y analicen el resultado obtenido; prácticas experimentales, es un método fundamental y complementario en la enseñanza, que introduce al alumno al método científico, donde el profesor permite que el estudiante sea el principal protagonista, permite que resuelva sus dudas ya que une lo estudiado en las lecciones dialogadas, la resolución de problemas y la realidad científica; y tutorías, permite el acercamiento entre el profesor y el estudiante, así, el profesor interactúa con cada estudiante, reconociendo de forma personal el nivel de progreso, los posibles errores conceptuales y recomendar material bibliográfico.
	Aportes	“En todo proceso educativo es posible tener en cuenta distintas etapas, como son la formulación de objetivos, la elección de contenidos, la elección de actividades y de los procedimientos encaminados a la consecución de los objetivos, y la evaluación de la conducta...”(p.189) El concepto enseñanza implica, la presencia de discentes y para que tenga éxito es necesario que se produzca aprendizaje. “Enseñar significa realmente crear una situación en la que se produzca el aprendizaje”(p.191) Para “...los profesores universitarios, es necesario tener en cuenta que las tendencias actuales en una enseñanza universitaria de calidad dan importancia no sólo a la adquisición de unos conocimientos, por otro lado completamente necesario, sino que también expresan interés por la adquisición, por parte del alumno, técnicas y hábitos de estudio, de capacidad de análisis crítico, de inventar y descubrir...” (p.191) El profesor debe tener un conocimiento disciplinar, pero no es suficiente. Debe saber y saber enseñar. En el aprendizaje de la física, es necesario realizar experiencias de laboratorio y análisis teóricos de los fenómenos físicos, no se ve reflejado en la memorización de fórmulas. La enseñanza de la física se basa en tres formas didácticas clases teóricas, prácticas experimentales y resolución de problemas.
	Otros	
El fracaso en la	Objetivos	“El trabajo que aquí presentamos responde a dicho intento por

resolución de problemas de física: Una investigación orientada por nuestros supuestos Gil Pérez, Martínez & Senent (1988)		abordar de forma crítica la investigación sobre el fracaso en la resolución de problemas de Física.” (p.131)
	Metodología	<p>“Describiremos, a continuación, el proceso seguido en un curso sobre resolución de problemas dirigido a profesores en activo y en formación planteado como sesiones de trabajo para unos 40 profesores (número similar al de los alumnos de un aula) estructurados en pequeños grupos. Intentaremos mostrar así que dicho trabajo hace posible la puesta en cuestión de la didáctica habitual de resolución de problemas y la elaboración fundamentada de propuestas más efectivas.” (p.132)</p>
	Aportes	<p>“...un resultado de fracaso generalizado como el que se da en la resolución de problemas tiene su origen en errores de planteamiento en el proceso de enseñanza/aprendizaje.” (p.132)</p> <p>“...la didáctica habitual de resolución de problemas suele impulsar a un operativismo abstracto, carente de significado, que poco puede contribuir a un aprendizaje significativo. (p.133)</p> <p>¿Qué hemos de entender por problema?</p> <p>Los resultados de la discusión coinciden en caracterizar como problema las situaciones que plantean dificultades para las que no se poseen soluciones hechas. Se trata, por supuesto, de una idea justa, básicamente aceptada por quienes han abordado explícitamente la cuestión (Hudgins, 1966; Riche, 1978; Mettes et Al., 1980; Hayes, 1981; Bodner y McMillen, 1986). Pero lo importante es relacionar esta idea de lo que es un problema con lo que se hace en clase:</p> <p>¿En qué medida las explicaciones de los problemas hechas por los profesores o expuestas en los libros de texto están de acuerdo con su naturaleza de tarea desconocida, para la que de entrada no se posee solución?” (p.133)</p> <p>“...lo importante es relacionar esta idea de lo que es un problema con lo que se hace en clase: ¿En qué medida las explicaciones de los problemas hechas por los profesores o expuestas en los libros de texto están de acuerdo con su naturaleza de tarea desconocida, para la que de entrada no se posee solución?” (p.137)</p> <p>“La investigación sobre la resolución de problemas se ha orientado, durante decenios, a establecer las diferencias entre «buenos» y «mediocres» resolventes y a diseñar algoritmos de resolución para facilitar la tarea de los alumnos. Hemos intentado justificar por qué estas líneas de investigación se han mostrado inefectivas, explicitando y analizando críticamente los supuestos subyacentes en las mismas. Y hemos concebido nuevas vías de aproximación a partir de un cuestionamiento en profundidad del tipo de enunciados propuesto (muy alejados de lo que constituye una auténtica situación problemática) y de las orientaciones didácticas utilizadas para su resolución (consistente en la presentación lineal, «desproblematizada» de «la solución»).” (p.143)</p>
	Otros	<p>“El número de problemas que es posible abordar con la nueva metodología en las sesiones de trabajo de uno de estos cursos no es nunca elevado, pero, en todo caso es suficiente para que los profesores tengan los elementos necesarios para valorar comparativamente el nuevo modelo y la didáctica habitual.” (p.138)</p>

Anexo 4: sistematización de datos sobre enseñanza del movimiento uniformemente acelerado.

Referencia	Categoría	Dato
<p>El uso de la integral y la derivada como método único para resolver problemas de cinemática</p> <p>Sánchez (2017)</p>	<p>Objetivos</p>	<p>“Se postula que el uso de la integral y la derivada, para resolver ejercicios en un entorno de aprendizaje activo favorecen la adquisición de los conceptos físicos involucrados en la solución de cada ejercicio o problema, con la finalidad de favorecer el captar aprendizaje significativo, mejorar el rendimiento académico y la estabilidad del aprendizaje, es decir, se busca establecer el impacto del uso de la integral y la derivada en el rendimiento académico y estabilidad del aprendizaje.” (p.1909)</p> <p>“Se busca alcanzar una única forma de resolver los ejercicios, eliminando el uso indiscriminado de fórmulas y promoviendo la habilidad de interpretar, describir y transferir los conocimientos adquiridos en nuevas situaciones, lo que se logra a través de la comprensión de lo que realiza. Colocando de manifiesto la importancia de los conceptos involucrados en solución de ejercicios (condiciones físicas iniciales y finales) y la evaluación de los conceptos físicos involucrados (Sánchez et al. 2005).” (p.1910)</p>
	<p>Metodología</p>	<p>“De acuerdo a la investigación para comprobar la influencia de la metodología en el rendimiento académico, se utiliza un diseño cuasi-experimental de dos grupos relacionados sin asignación y al azar de los sujetos con Pre y Post test. Que son Grupo Experimental (GE) que se Interviene a través de una propuesta de aula de aprendizaje basado en uso de integral y derivada, para resolver las actividades de aprendizaje de Cinemática y el Grupo Control (GC) que trabaja con metodología tradicional a través de clase expositiva de transmisión acabada de contenidos y usando las ecuaciones generales para resolver ejercicios en la clase y en las prácticas.” (p.1911)</p> <p>“Instrumentos y técnicas de recolección de la información</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. <i>Conocimiento previo:</i> Para establecer el grado de conocimiento de los conceptos previos de Cinemática, se diseña y aplica un Test de vectores y parámetros de Cinemática 2. <i>Rendimiento Académico:</i> Se aplica un certamen de carácter formal diseñado y elaborado por un equipo de 4 docentes que trabajan la asignatura con metodología tradicional y experimental, que contiene tres problemas de Cinemática en los contenidos vectores y parámetros de Cinemática, movimiento en una dimensión, Movimiento en dos dimensiones. 3. <i>La estabilidad del aprendizaje:</i> para medir esta variables se diseñaron tres test con 6 preguntas de conocimientos similares cada uno de ellos, que consideraba: 1 Preguntas de parámetros de Cinemática, 3 preguntas de movimiento en una dimensión (Movimiento horizontal y vertical), y dos preguntas de movimiento en dos dimensiones (Proyectiles y Movimiento Circular) esta se midió aplicando tres test de conocimientos en Cinemática que fueron aplicadas en tres momentos diferentes a 1 mes, 2 meses y 3 meses después de la intervención.” (p.1911) <p>“Muestra</p> <p>La muestra, la constituyen 90 alumnos de la Universidad del Bío-Bío, Concepción, Chile. Distribuidos en GE y GC, cada uno de ellos formado por 45 alumnos con los cuales se trabaja simultáneamente</p>

		en las Unidades Programáticas.” (1911)
	Aportes	<p>En la resolución de problemas, tanto a nivel escolar como universitario, se da por el uso de fórmulas para llegar a una respuesta: “Poco importa: el porqué de dicha fórmula; su campo de aplicabilidad, su sentido físico y el resultado obtenido sobre todo si este último se ha obtenido con calculadora, infalible por definición” (p.1909)</p> <p>“... los ejercicios en general son resueltos aplicando una u otra fórmula dependiendo de los datos presentados en el enunciado. En este contexto el estudiante piensa que todos los ejercicios se resuelven identificando y aplicando la fórmula adecuada. En general en los textos de física se encuentran fórmulas para cada cantidad física involucrada en los contenidos de Cinemática como por ejemplo ecuación para: la posición, la velocidad, la aceleración, el alcance, tiempo máximo, altura máxima, tiempo de vuelo, etc.” (p.1914)</p> <p>En nuestra propuesta se plantea un único método para resolver los ejercicios y problemas de Cinemática basada en el modelo de la derivada y la integral; $(dv(t) = a(t)dt, dr(t) = v(t)dt)$ su uso con comprensión y autonomía en las actividades de aprendizaje, es un modelo matemático que permite a los alumnos encontrar las ecuaciones particulares que describen el movimiento de una partícula en una y dos dimensiones a partir del reconocimiento y la aplicación de las condiciones de frontera iniciales y finales...” (p.1924)</p>
	Otros	
<p>La utilización del aprendizaje basado en proyectos en la enseñanza de la cinemática</p> <p>Díaz, Abril, Díaz & Bravo (2017)</p>	Objetivos	<p>“El propósito de este estudio experimental es promover el aprendizaje significativo en la unidad de Cinemática utilizando recomendaciones metodológicas metodología del aprendizaje basado en proyectos (ABP) a la vez que diseñamos estrategias para el desarrollo del aprendizaje basado en proyectos, con uso de las TIC’s, promoviendo el cambio a un aprendizaje revelador para ello se lo ha realizado en varias aulas del primer nivel de física uno para luego observar si existen mejoras en su aprendizaje.” (p.2)</p>
	Metodología	<p>“La metodología utilizada en la investigación es el aprendizaje basado en proyectos como medio para enfrentar problemas que presentan tanto estudiantes como docentes en el proceso de enseñanza aprendizaje, como la falta de conocimientos previos de la Cinemática, bajo nivel de matemáticas con que llegan los estudiantes, poco uso de las Tics por parte de los docente y estudiantes.” (p.1)</p>
	Aportes	<p>“Desde la antigüedad se ha tratado de explicar el movimiento de los cuerpos como Aristóteles (384 a. C. – 322 a. C), propuso explicaciones de la caída libre después Galileo en el siglo XVI y XVII estudian más cuidadosamente este parte y explica sobre la aceleración y la inercia, Isaac Newton en el siglo XVII recopila muchos trabajos de físicos en donde explica el movimiento con efecto de 3 la gravedad, con la cual se enuncia más tarde las leyes de Newton para explicar el movimiento de los cuerpos y la mecánica clásica.” (p.2)</p> <p>“La física es sinónimo de la resolución de problemas y que la resolución de problemas consiste en insertar números en fórmulas, queremos presentar un enfoque más preparado de la resolución de problemas. Tal posición está basada en los conocimientos científicos actuales sobre los procesos mentales que usan los expertos en la resolución de problemas. Está visión, desde hace ya una década,</p>

		<p>forma parte de la didáctica de resolución de problemas en la mecánica universitaria.” (p.16)</p> <p>“Para el ABP, “Su procedimiento se basa en 8 pasos, según Lamb, Smith, &Johnson (1997) y Lamb (2001):</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. La exploración: requiere que el estudiante lea y analice el escenario del problema. 2. El cuestionamiento: el estudiante realiza una lluvia de ideas. 3. La búsqueda: el estudiante hace una lista de aquello que se conoce del problema. 4. La evaluación: el estudiante usa la información. 5. La síntesis: el estudiante procesa e integra la información. 6. La creación: el estudiante desarrolla el producto. 7. La comunicación: el estudiante informa los resultados y obtenga retroalimentación. 8. La valorización: el estudiante valora el proyecto y reflexiona sobre el proceso” (p.14)
	Otros	<p>“...se escogió la metodología del ABP ya que ayuda a mejorar las debilidades de la enseñanza de la cinemática, donde se alcanzará un mejor aprendizaje significativo en los estudiantes.” (p.21)</p> <p>“El uso de las tics fomenta el desarrollo de destrezas y habilidades cognitivas superiores en los aprendizajes a fin de permitirles expandir las potencialidades de procesamiento cognitivo y memoria, lo que facilita la construcción del aprendizaje significativo.” (p.22)</p> <p>“Es necesario ante el mundo globalizado apoyar los aprendizajes en la tecnología utilizando las herramientas adecuadas para la construcción de nuevos conocimientos, ya que facilita el aprendizaje y globaliza la información, para esto el docente debe tener la capacidad de disentir la herramienta adecuada para los conocimientos que desea construir en el alumno.” (p.22)</p>
<p>Estrategia enseñanza-aprendizaje basada en experimentos (ABE) para mejorar la comprensión de gráficas en Cinemática</p> <p>Sandoval, García, Mora & Suarez (2017)</p>	Objetivos	<p>“Se presentan los resultados de la aplicación de una estrategia de enseñanza basada en experimentos para mejorar la comprensión de gráficas de cinemática, con estudiantes universitarios.” (p.3307-1)</p>
	Metodología	<p>Aplicaron la estrategia a cuatro grupos, tres de ellos eran estudiantes de ingeniería ambiental e ingeniería industrial del Instituto Tecnológico Superior de Comalcalco, con ellos trabajaron de forma tradicional y con un grupo de ingeniería petrolera de la Universidad Politécnica del Golfo de México, con ellos se trabajó con el aprendizaje basado en experimentos (ABE). Dentro del diseño de la estrategia se analizaron temas de movimiento rectilíneo uniforme y movimiento rectilíneo acelerado. Los grupos se subdividieron en equipos de cuatro integrantes, los cuales analizaron y discutieron diversas actividades conceptuales, consecutivamente elaboraron cinco experimentos, tres sobre movimiento rectilíneo uniforme, cuyo objetivo fue reconocer y determinar la velocidad constante por medio del concepto de pendiente de la línea recta; y dos sobre movimiento rectilíneo acelerado, en los que analizaron e interpretaron tres tipos de gráficas, con sus relaciones matemáticas y físicas.</p>
	Aportes	<p>“...las gráficas son una parte de las ciencias que se usan en todas partes, tanto en la industria, negocios, campos de la medicina, así como en las matemáticas, química, biología y física. La interpretación de las gráficas no solo es una parte de las ciencias, es una habilidad esencial para los estudiantes que deben dominar con claridad.” (p. 3307-2)</p> <p>“La enseñanza tradicional está centrada en el profesor, por lo que los estudiantes tienen un proceso de aprendizaje pasivo. Durante la última década, las instituciones educativas abogan por adoptar un</p>

		<p>modelo más dinámico en el cual el estudiante sea protagonista y más autónomo en su aprendizaje (Zohar & Ben David, [4]). Diversos profesores optan por esta forma de trabajo por qué:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Promueve habilidades del pensamiento. 2. Los estudiantes adquieren mayores responsabilidades. 3. Desarrollan experiencias positivas en el aprendizaje de la física.” (p. 3307-2) <p>“...las dificultades de comprensión no deben ser atribuibles únicamente a problemas con la matemática, sino también a una escasa habilidad para establecer conexiones entre una representación gráfica y el concepto físico adecuado. De esta manera, el estudiante debe saber ir bidireccionalmente de una representación a otra.” (p. 3307-2)</p> <p>“Otros investigadores como (Gende, [14]) mencionan que en diversas áreas de la física parece haber una desconexión entre lo que los estudiantes aprenden en matemáticas y cómo aplican esos conocimientos en sus cursos de física; los casos más comunes de analizar son la interpretación de la pendiente de una curva en una gráfica posición-tiempo. Dichos autores consideran que los estudiantes tienen problemas para graficar datos, al parecer, porque no comprenden los fundamentos de una gráfica; tienen problemas para elegir las variables a graficar, etiquetan los ejes de manera incorrecta, tienden a conectar los puntos adyacentes, [...]En otras palabras, presentan problemas para transferir sus conocimientos de un campo a otro.” (p. 3307-2)</p> <p>“Con nuestra propuesta metodológica se ha logrado mejorar significativamente el análisis de las gráficas de cinemática, interpretar los modelos matemáticos y hacer predicciones concretas a través de ellos.” (p.3307-6)</p>
	Otros	<p>“Encontramos que los grupos tradicionales no pudieron eliminar sus ideas erróneas acerca de la interpretación de las mismas; la ganancia de Hake tiene un promedio de 7% lo que indica que el método tradicional no es efectivo para estos casos. Sin embargo, con ABE los estudiantes del grupo experimental pudieron superar diversas deficiencias en la interpretación de las gráficas, relacionaron la pendiente con la velocidad y la aceleración (según el tipo de gráfico), los modelos matemáticos con su interpretación física, así como el pasar de una representación gráfica a una textual y viceversa. La prueba de hipótesis muestra que entre los grupos experimental y de control existen diferencias significativas en sus aprendizajes, lo que nos sugiere que la estrategia planteada ofrece mejores resultados que la tradicional.” (p.3307-1)</p>
<p>Construcción de una unidad didáctica de cinemática (posición, velocidad, aceleración y caída libre) para potenciar el planteamiento y resolución de problemas en estudiantes de grado 10°</p>	Objetivos	<p>“Diseñar una unidad didáctica de cinemática fundamentada en la metodología de resolución de problemas para potenciar el desarrollo habilidades y actitudes científicas en estudiantes de 10° del Colegio Vista Bella.” (p.59)</p> <p>“Diseñar y aplicar una prueba diagnóstica con problemas de cinemática de diferentes niveles de complejidad. Analizar y contrastar los resultados de la prueba diagnóstica teniendo en cuenta diferentes fuentes bibliográficas sobre planteamiento y resolución de problemas de cinemática. Seleccionar y plantear situaciones problema de cinemática para el grado décimo. Elaborar la unidad didáctica de cinemática centrada en el planteamiento y resolución de problemas.” (p.59)</p>

Salazar (2014)	<p>Metodología</p>	<p>“Para obtener buenos resultados en la construcción de la Unidad Didáctica bajo los lineamientos de la metodología de Resolución de Problemas, la cual se desarrollará con los estudiantes del Colegio Vista Bella IED de grado 10°, se requiere de una planificación de cada una de las actividades a desarrollar. Para tal efecto la propuesta didáctica se desarrollará en tres fases a saber:</p> <p>FASE INICIAL: corresponde al diseño y planificación de cada una de las actividades.</p> <p>FASE DE EJECUCIÓN: Esta fase se desarrolla en cinco momentos como son:</p> <p>Evaluación diagnóstica: Permite indagar sobre los conocimientos previos de los estudiantes con relación a los conceptos a desarrollar.</p> <p>Actividades de exploración y experimentación: Estas permiten que los estudiantes activen sus saberes previos y desarrollen actividades experimentales de los conceptos a desarrollar.</p> <p>Actividades de socialización y conceptualización: Estas actividades permiten compartir los saberes de los estudiantes y hacer acuerdos que permitan conceptualizar los temas propuestos.</p> <p>Actividades de aplicación y resolución de problemas: En esta etapa se realizan los procesos de resolución de las situaciones problemas escogidas; se hacen las presentaciones y discusiones de los resultados obtenidos por los pequeños grupos, y se realiza las conceptualizaciones y clarificaciones pertinentes.</p> <p>Actividades de síntesis: En esta última etapa se proponen problemas de un nivel mayor de profundización, se discuten los procedimientos y resultados obtenidos, profundizando los conceptos y realizando extrapolación a otros contextos.</p> <p>FASE DE EVALUACIÓN: La tercera fase corresponde a la evaluación de los procesos y logros alcanzados por los estudiantes, en la que se evidenciará la apropiación de los conceptos y habilidades para resolver problemas de cinemática. De igual manera se evaluará los resultados de la propuesta metodológica.” (p.61)</p>
	<p>Aportes</p>	<p>“La didáctica de Las Ciencias Naturales, está constituida por un conjunto de conocimientos específicos de cada disciplina y debe abordar el método de enseñanza, desde principios históricos, epistemológicos, psicológicos y sociales, permitiendo que los estudiantes puedan apropiarse de dichos conocimientos, interpretarlos, reconstruirlos, validarlos y consolidarlos, en aras de potenciar un pensamiento crítico, creativo y científico.” (p.44)</p> <p>“En el marco de la pedagogía constructivista, se propone una unidad didáctica sobre cinemática basada en resolución de problemas, de tal manera que los estudiantes se planteen preguntas, formulen hipótesis, propongan posibles soluciones, delimiten o maximicen el problema. Este tipo de razonamientos generará que los estudiantes, puedan comprender mejor los conocimientos involucrados en un problema, dando posibles soluciones...” (p.44)</p>
	<p>Otros</p>	<p>“De igual manera esta metodología, requiere de cambios profundos en los docentes, tanto de orden epistemológico, como de orden metodológicos. Se requiere de una mayor atención en el momento de la planeación de las actividades, hasta el acompañamiento en el desarrollo de cada una de ellas, despertando la curiosidad, la motivación y el interés de los estudiantes.” (p.70)</p>
<p>La progresiva aproximación al cambio</p>	<p>Objetivos</p>	<p>“Se presentan los resultados de una experiencia piloto realizada con estudiantes que se aprestan a comenzar el primer curso de física en las carreras de Ingeniería de la U.N.Salta.” (p.131)</p>

<p>Conceptual. Una experiencia de docencia A partir del caso de la aceleración</p> <p>Ledesma & Pocovi (2013)</p>	<p>Metodología</p>	<p>“El estudio se realiza desde la perspectiva, planteada por Alexander y Kulikowich (1994), de aprendizaje a partir de textos y desde la perspectiva de Chi sobre cambio conceptual (1992: 2008).” (p.131)</p> <p>“Se diseñaron cuatro textos destinados a los 59 alumnos de las carreras de Ingeniería que aprobaron los cursos de Análisis I y Álgebra Lineal y Geometría Analítica y se aprestaban a comenzar a cursar Física I. La experiencia se llevó a cabo en el contexto de un curso de nivelación cuyo dictado es previo al comienzo de las clases de Física I. Los textos tienen una misma sección inicial en la cual se definen las variables de posición y velocidad.” (p.135)</p>
	<p>Aportes</p>	<p>“La justificación sobre-simplificada e ingenua que aduce una mala formación de los alumnos en matemática no se puede aplicar en este caso ya que cuando los mismos se aprestan a cursar la primera física de su carrera, ya han aprobado los cursos de matemática previos que poseen un alto grado de formalización.” (p.132)</p> <p>“...trabajos de investigación previos han estudiado distintas dificultades que surgen en su aprendizaje. Ha sido demostrado que a pesar de llegar a la solución numérica correcta de un problema, los estudiantes no poseen un entendimiento claro de los conceptos (Driver, 1986; Trowbridge y Mc Dermott, 1981). Varios estudios muestran que los estudiantes no distinguen entre los conceptos de velocidad y aceleración (Mc Dermott, 1984; Jones, 1983). Los trabajos de la década de los ochenta se limitaron a determinar las dificultades en la comprensión del concepto de aceleración que presentaban los alumnos: el conocimiento del concepto de aceleración es limitado a su definición operacional y su aplicación a problemas es de carácter mecánico.” (p.132)</p> <p>“Una de las actividades de aprendizaje más importantes que realizan los alumnos a nivel universitario consiste en la lectura de textos (Nist y Simpson, 2000). [...]. El sistema simbólico está compuesto de ecuaciones, gráficos y diagramas. El sistema lingüístico consiste en las explicaciones verbales aclaratorias del sistema simbólico. Las autoras se refieren a que los lectores «traducen» de un sistema a otro cuando tratan de comprender lo que leen. Los requerimientos de procesamiento de información por parte del lector aumentan cuanto menos abundantes y explícitas son las «traducciones» lingüísticas.” (p.134)</p>
	<p>Otros</p>	<p>“Los resultados mostrados nos permiten extraer algunas conclusiones acerca de las bondades de textos que poseen una gran cantidad de traducción simbólica-lingüística para el caso de magnitudes que son derivadas de otras o que se producen por el cambio de otra. La lectura de textos pobres en el sistema lingüístico y limitado a las expresiones matemáticas analíticas no parece ser tan productiva (en términos de comprensión) como la lectura de textos con un alto grado de traducción de los símbolos a palabras que apunten a mostrar la ontología del concepto a aprender. Más aún, la comprensión de conceptos tipo proceso deberá estar acompañada de ejemplificaciones que muestren de manera concreta los dibujos de los vectores involucrados y sus diferencias.” (p.142)</p>
<p>La enseñanza de la cinemática apoyada en la teoría del aprendizaje significativo, la</p>	<p>Objetivos</p>	<p>“Diseñar y experimentar una estrategia didáctica basada en la solución de problemas y el uso de software interactivo que permita a los estudiantes del grado décimo de la I.E. San Cristóbal el aprendizaje significativo de los conceptos, procedimientos y actitudes propios de la cinemática.” (p.11)</p> <p>“Iniciar cada subtema de la cinemática con el análisis de situaciones</p>

<p>solución de problemas y el uso de applets</p> <p>Torres (2013)</p>		<p>problema que motiven la participación de los estudiantes en clase y la consulta de información por parte de los estudiantes, para evaluar así los conocimientos previos y posibilitarles el aprendizaje significativo de los contenidos de la cinemática.</p> <p>Plantear situaciones problema de cinemática para ser resueltas por los estudiantes aplicando las ecuaciones y procedimientos matemáticos adecuados según el tipo de movimiento, y hacer las gráficas de posición, velocidad y aceleración en función del tiempo, con sus respectivos análisis.</p> <p>Presentar a los estudiantes materiales de estudio de la cinemática en formato de texto y de video, además de algunas actividades a realizar, en un curso virtual desarrollado en la plataforma Moodle para que tengan acceso permanente a ellos.</p> <p>Representar en forma gráfica, sin datos numéricos, un movimiento presentado en forma oral y, viceversa, describir oralmente un movimiento representado en una gráfica.</p> <p>Obtener los valores de posición, velocidad y aceleración desde una gráfica, para un tiempo, o un intervalo de tiempo dado, y escribir las ecuaciones de posición y velocidad correspondientes.</p> <p>Observar y analizar el comportamiento de las variables de los diferentes movimientos mediante la manipulación de <i>applets</i> presentando posteriormente un informe escrito de las observaciones y conclusiones.” (p.11)</p>
	Metodología	<p>“Este trabajo lo realicé en tres etapas. Primero diseñé una unidad didáctica para la enseñanza de la cinemática, en la cual incluyo la estrategia propuesta basada en la teoría de aprendizaje significativo de Ausubel, la solución de problemas y el uso de TIC. Luego desarrollé la estrategia en forma experimental en el grado 10^o – 6 de la Institución Educativa San Cristóbal y, finalmente, hice la evaluación y el análisis de los resultados.” (p.32)</p>
	Aportes	<p>“la comprensión de los conceptos estaría relacionada con la forma en que se presentan los contenidos y, quizás por ello, muchas investigaciones sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de las ciencias naturales se centran en la proposición y evaluación de estrategias diferentes a las que tradicionalmente se han usado.” (p.22)</p> <p>Se requiere entonces que las TIC sean usadas como herramientas auxiliares del proceso de enseñanza aprendizaje que ayuden a los estudiantes al entendimiento de los conceptos de la cinemática mediante la interacción con situaciones simuladas en las que ellos puedan observar cuál es el comportamiento de un móvil cuando se cambian los valores de las variables. (P.25)</p>
	Otros	
<p>Implementación de una propuesta de aprendizaje significativo de la cinemática a través de la resolución de problemas</p> <p>Sánchez, Moreira,</p>	Objetivos	<p>“En el presente trabajo se pretende mostrar las implicaciones didácticas de una propuesta metodológica activa, que busca facilitar la adquisición de un aprendizaje significativo a través de la resolución de problemas (ASARP), que incluyen actividades de aprendizaje (A.A) y uso del cálculo diferencial para resolver los ejercicios y ejemplos presentados en el aula, y así poner de manifiesto la importancia de los conceptos involucrados en la solución (condiciones físicas iniciales y finales) y la evaluación de los conceptos físicos involucrados [1].” (p.27)</p>
	Metodología	<p>“La propuesta ha sido aplicada a estudiantes de Ingeniería en Ejecución eléctrica y electrónica de la Universidad del Bío-Bío</p>

Caballero (2009)		<p>(Chile), con la finalidad de: facilitar la adquisición de aprendizaje significativo, eliminar el uso mecánico e indiscriminado de fórmulas, desarrollar estrategias de aprendizaje, mejorar el rendimiento académico y valoración de la propuesta. Los resultados obtenidos en dos aplicaciones sistemáticas de la propuesta metodológica bajo ABP son alentadores; la muestra de alumnos manifestó estar motivados, valorando favorablemente la metodología, lo que presupone su validez en otros campos del saber.” (p.28)</p> <p>“El punto de partida de la propuesta consiste en plantear un problema integrador de contenidos, como un desafío, a resolver al final de la unidad programática por los alumnos. En primera instancia, sirve para establecer los conocimientos previos, contenidos a investigar y los posibles escenarios, a partir de los cuales se plantean una serie de problemas más acotados en contenidos y sus correspondientes AA, que llevan a la solución de cada problema, a través de los conocimientos adquiridos al resolver las AA. Esto implica que los alumnos deben considerar la situación Física en su máxima amplitud, superando la mera manipulación de las expresiones algebraicas; deben analizar, con detenimiento y críticamente, hasta lo más obvio, eliminando los ejercicios con datos y uso mecánico de fórmulas para encontrar incógnitas, lo que resulta de gran importancia para la construcción del conocimiento.” (p.28)</p> <p>“Desde esta perspectiva, la propuesta metodológica con base a un problema integrador y una secuencia de problemas más acotados implica incluir una secuencia de AA que comprenden según [4-5] las fases de: exploración de ideas, introducción de variables, síntesis y transferencia de contenidos a situaciones nuevas, simples y complejas, para interpretar la realidad.” (p.29)</p>
	Aportes	<p>“La propuesta tiene por finalidad mejorar el proceso de (E-A), favorecer y facilitar la adquisición de un aprendizaje significativo de conceptos, procedimientos, actitudes y habilidades de comunicación en la asignatura de Física I, a partir de la implementación del ASARP como metodología de trabajo en el aula, que pretende promover la adquisición del conocimiento en un contexto metodológico activo-participativo, y así establecer su influencia en las estrategias de aprendizaje y rendimiento académico de los alumnos.” (p.28)</p> <p>“La propuesta de aprendizaje con base en un problema integrador y secuencia de problemas más acotados, al igual que el ABP propuestos por [19-21], tiene por finalidad que los alumnos aprendan en pequeños grupos, a partir de un problema, buscar la información necesaria para comprender el problema y obtener una solución bajo la supervisión de un tutor.” (p.30)</p> <p>“El papel de los ejercicios en la propuesta de aprendizaje significativo, a través de la resolución problemas (ASARP), es el siguiente: a) Fomentar el uso de herramientas matemáticas necesarias para la interpretación, descripción y comprensión de los contenidos en Física; b) Evidenciar la aplicación y transferencia de contenidos, a través de la derivación e integración de parámetros de cinemática; c) Permitir que cuando los alumnos se enfrentan con los ejercicios puedan reconocer las condiciones físicas que son necesarias para la resolución de los mismos (condiciones físicas iniciales y finales); d) Eliminar la asociación, bastante generalizada, que hacen los alumnos de la Física, relacionando cada pregunta de un ejercicio con la fórmula para su resolución; e) A través de los ejercicios a resolver, se establece un método único de abordar la</p>

		solución de todos los ejercicios de cinemática, de manera similar, por medio del cálculo diferencial.” (p.31)
	Otros	
<p>La enseñanza de la mecánica en la escuela media: la evolución histórica de los textos (1840-2000)</p> <p>Adrian & Cornejo (2006)</p>	Objetivos	“En el presente trabajo se realiza un análisis acerca de la enseñanza de la mecánica en la escuela media argentina, en el período 1840-2000. El estudio se centró en los textos de física más característicos que se utilizaron en la enseñanza secundaria de nuestro país, a lo largo de las distintas épocas.” (p.35)
	Metodología	“... se analizan los libros de texto correspondientes al siglo XIX, algunos de ellos anteriores a la fecha “fundacional” del Sistema Educativo Argentino, el año 1884. A continuación describiremos los libros característicos del período 1900-1930, y luego los textos publicados a partir de 1930, hasta 1960. Finalmente hacemos referencia a las obras editadas desde 1960 hasta la actualidad. En VI presentamos las conclusiones de este estudio. Finalmente, en el “Apéndice” se expone el listado con las obras consultadas, ordenadas cronológicamente.” (p.36)
	Aportes	<p>“La transposición didáctica de la ciencia académica al ámbito escolar, incluye variados aspectos tales como la selección social de los contenidos científicos que se enseñan en la escuela, el grado de actualización presentado por los mismos, la renovación metodológica y las innovaciones en la didáctica, así como las formas ideológicas y la relación del poder con los contenidos escolares.” (p.36)</p> <p>“El análisis de libros de texto de distintas épocas se revela como una herramienta útil e interesante [...] para buscar paralelismos entre tal forma de presentación y la evolución de las disciplinas científicas.” (p.43)</p> <p>“...la estructura actual de la mecánica se revela como el resultado de un largo proceso de construcción histórica.” (p.44)</p> <p>Se evidencian cambios y diferencias en los planteamientos y desarrollos de los libros que se deben a:</p> <p>“Según “Mach (1949) encontramos algún paralelismo entre la sucesión de tales cambios y la evolución de la mecánica como disciplina científica. Por el contrario, siguiendo a Holbrow (1999) podríamos atribuir tales cambios a razones de índole fundamentalmente didáctica. Quizás se trate de una compleja mezcla de factores, estrechamente vinculados entre sí.” (p.45)</p>
	Otros	<p>“La mecánica en los textos del siglo XIX</p> <p>En los libros de texto correspondientes al siglo XIX que hemos podido consultar, la cinemática y la dinámica no aparecen como capítulos separados, sino englobadas en un capítulo general de mecánica. En el mismo se exponen los conceptos de movimiento y los principios que lo rigen, utilizando denominaciones diferentes a las habitualmente empleadas en la actualidad. Cabe aclarar que esto no es una mera característica de los libros de texto para la enseñanza media, sino que refleja el estado de la mecánica en la época bajo estudio, en la que todavía no estaban definitivamente consolidados tanto el vocabulario como los sistemas de unidades, alcanzando ambos su desarrollo definitivo recién en las primeras décadas del siglo XX (Mach, 1949, primera edición 1883).” (p.37)</p> <p>“Los libros de texto en el período 1900-1930</p> <p>En esta época se observa una gran producción de textos elaborados por autores nacionales, que se incrementa hacia el período comprendido entre 1910 y 1920. Aportan varias novedades en la</p>

		<p>presentación de los temas...” (p.39)</p> <p>“Los textos a partir de 1930</p> <p>A partir de 1930 en los textos aparecen cambios en el desarrollo de las unidades de cinemática y dinámica, que han de fijar el perfil de estos temas y que hasta hoy se conservan en su gran mayoría.” (p.41)</p> <p>“Los textos desde 1960 a la actualidad</p> <p>La aparición del SI (Sistema Internacional de Unidades) se verá rápidamente reflejada en los textos de física, ampliándose los capítulos iniciales de los libros para indicar el sistema de unidades que habrá de utilizarse a lo largo del texto. El SI homogeneizó el tipo de unidades empleados en todos los libros nacionales, excepto aquellos de origen estadounidense, que tardarán algunos años en adaptarse al Sistema Internacional.” (p.42)</p>
<p>Investigación del desarrollo y aprendizaje de la noción de aceleración en adolescentes</p> <p>Laburú & de Carvalho (1992)</p>	Objetivos	“...profundizar en el conocimiento de las nociones que, sobre el concepto de aceleración, presentan niños y adolescentes.” (p.63)
	Metodología	<p>“La muestra constó de 12 alumnos pertenecientes a la 2ª serie del 2º grado, 12 alumnos pertenecientes a la 8ª serie del 1º grado y 10 alumnos pertenecientes a 6ª serie del grado. De estos alumnos, únicamente los del 2º grado habían pasado por un curso de cinemática, donde el concepto en estudio fue abordado.</p> <p>La metodología utilizada se basó en la realización de entrevistas clínicas. En ellas y durante la ejecución de las tareas, se plantearon un conjunto de preguntas estandarizadas.</p> <p>Las entrevistas fueron grabadas y posteriormente transcritas para un análisis futuro. Cada entrevista tenía una duración media de 20 minutos.” (p.64)</p>
	Aportes	<p>“... demostramos que la aceleración como concepto surge de la noción de incremento de velocidad en su forma más próxima de la noción física. La aceleración está conjugada, para su completa comprensión, con un conjunto de variables como son: velocidad, tiempo, concepto de magnitudes instantáneas, articulación métrica del tipo razón proporcional. Estas, a la vez, están sujetas a factores cognitivos, ya que precisan ser articuladas de forma lógico-matemática concatenada a, evidentemente, pensamientos formales.” (p.71)</p> <p>“...la gran mayoría de las enseñanzas se dan de una forma unívoca, primándose la observación pasiva y la memorización, en detrimento de la observación activa por medio de la reflexión crítica dirigida a la construcción gradual y bien estructurada del conocimiento.” (p.71)</p> <p>“...no deberíamos despreciar un cambio didáctico, apoyado por un cambio metodológico (Gil 1983), dando oportunidad a la confrontación de los modelos intuitivos de la noción de aceleración relacionada con la fuerza y la velocidad [...]. No obstante, los datos demuestran que se hace necesaria una confrontación lógica y métrica. Lógica en el sentido de poner de relieve la aparición de contradicciones conceptuales; métrica en el sentido de que se debería explorar conceptual y matemáticamente, y no con un simple operativismo, por medio de magnitudes; situar el concepto de magnitudes instantáneas y, en la aceleración, realzar conceptualmente la importancia del establecimiento de la velocidad instantánea a su respectivo tiempo instantáneo en situaciones experimentales y teóricas; destacar la existencia de movimientos naturales donde estas dos últimas magnitudes se relacionan de una forma siempre constante, generando una nueva magnitud llamada aceleración media.” (p.71)</p>
	Otros	“Se vio que, a pesar de que la muestra incluye sujetos con cursos de

		cinemática, las ideas de éstos se mantuvieron en los términos cualitativos de aquéllos que nunca pasaron por un curso de cinemática.” (p.72)
--	--	--

Anexo 5: sistematización de datos sobre relación matemática y física.

Referencia	Categoría	Dato
Primeras apropiaciones de la matemática en la física: Resolviendo problemas de cinemática en el primer año de la universidad Pérez & Dibar (2012)	Objetivos	<p>“Entender la forma en que los alumnos se apropian del entramado de física y matemática que es necesario para resolver problemas.” (p.25)</p> <p>“... indagamos acerca de la resolución de un problema de movimiento rectilíneo con aceleración constante, diseñado de manera tal que los alumnos deben interpretar, producir y trabajar con diferentes representaciones semióticas de la posición, la velocidad y la aceleración.” (p.26)</p>
	Metodología	<p>“El análisis de los datos fue realizado con una metodología exploratoria y cualitativa, basada en la teoría enraizada y las categorías fueron armadas de acuerdo a las similitudes entre las resoluciones. (Glaser y Strauss, 1999; Hopkins et. al., 1989; Taylor, S. y Bogdan, R., 1987; Turner, 1981).</p> <p>Para la interpretación de los datos, una vez obtenidas las categorías, se han tomado en cuenta los resultados previos de nuestras investigaciones, siempre guiadas por el reconocimiento del particular entramado que forman la matemática y la física, especialmente en el momento del aprendizaje de los primeros modelos físicos, y la comparación con el modelo teórico de Duval (1995) que influyó el diseño del problema presentado a los alumnos. Para la realización del presente trabajo se seleccionó un curso de la materia Física General de la Universidad Nacional de General Sarmiento. Esta es la primera materia de física que cursan los alumnos de las carreras de los profesados de Física y de Matemática, ingenierías y ecología. Los alumnos han cursado una materia de matemática con contenidos de cálculo.</p> <p>Se observaron las seis clases referidas a cinemática, con el objetivo de conocer los contenidos que se dictan y las estrategias sugeridas por los docentes para la resolución de problemas.” (p.27)</p>
	Aportes	<p>“El entramado de los conceptos y sus representaciones tiene particularidades que deben ser objeto de enseñanza.” (p.25)</p> <p>“... los modelos físicos están necesariamente asociados a modelos matemáticos (Lombardi, 1998).” (p.25)</p> <p>“...que las personas demuestran haberse apropiado de un objeto de conocimiento y lo diferencian de sus múltiples representaciones posibles, si pueden realizar todas las conversiones entre esas representaciones.” (p.26)</p> <p>“...las habilidades matemáticas no se muestran independientes del concepto de las distintas variables cinemáticas.” (p.32)</p> <p>“Nuestros resultados muestran que el uso de tablas de datos en los problemas proporciona un punto de apoyo importante que los alumnos utilizan con soltura para avanzar en la resolución.” (p.32)</p> <p>“Proponemos aprovechar las múltiples representaciones posibles, presentando problemas variados en cuanto al trabajo de conversión que se pide. Es necesario afrontar la enseñanza desnaturalizando la supuesta facilidad de transferencia entre lo que se aprende en matemática y su uso en la construcción de modelos en el ámbito de</p>

		la física.” (p.32)
	Otros	“...los alumnos se manejan con los datos numéricos, tanto para corroborar sus afirmaciones como para sacar conclusiones respecto del movimiento presentado.” (p.31)
Enseñanza de las ciencias desde una mirada de la didáctica de la escuela francesa Barros (2008)	Objetivos	“En la didáctica de las matemáticas ha habido un desarrollo muy valioso por parte de la escuela francesa que vale la pena recoger y considerar para la enseñanza de las ciencias en general. Por esto, en este artículo se ha querido presentar algunos elementos de esta didáctica con miras a su implantación en la enseñanza de las ciencias.” (p.56)
	Metodología	“En este artículo se lleva a cabo un recorrido por algunos modelos de enfoque constructivista, hasta llegar a la didáctica de la escuela francesa, en un intento por mostrar los elementos de las situaciones didácticas de importante desarrollo en la enseñanza de las matemáticas. Se pretende con ello mostrar que esta didáctica podría acogerse en la enseñanza de las ciencias, dado que su propuesta ofrece al proceso de la enseñanza-aprendizaje y, en particular, a la relación ternaria profesor, alumno y objeto del saber...” (p.55)
	Aportes	<p>“En la enseñanza de las ciencias intervienen variedad de conocimientos: el de las ciencias, el del científico, el académico, el del profesor, el cotidiano, el del alumno.” (p.55)</p> <p>“Un elemento básico de la enseñanza es el conocimiento que tiene el profesor de la asignatura a su cargo, sin embargo, es reconocida por las instituciones y los propios docentes la importancia de las consideraciones didácticas en la práctica de la enseñanza y del aprendizaje.” (p.56)</p> <p>“Los modelos de enseñanza de las ciencias hoy utilizados se apoyan en el enfoque constructivista. El planteamiento de base en este enfoque es que el individuo es una construcción propia que se va produciendo como resultado de la interacción de sus disposiciones internas y su ambiente, y su conocimiento no es una copia de la realidad, sino una construcción que hace la persona misma.” (p.56)</p> <p>“...los conocimientos que intervienen en el encuentro del profesor con el alumno, podríamos atenernos a los presentados por Marín (2003a). Uno de ellos es el <i>conocimiento cotidiano</i> del alumno, el cual se adquiere de forma espontánea e informal y se construye en la constante interacción con el medio natural y social. Otro conocimiento del alumno es el <i>académico asimilado</i>, que ya ha adquirido de forma más dirigida, sistemática y formal a través del profesor que posee el <i>conocimiento académico docente</i> o <i>conocimiento académico para enseñar</i>. Así mediante el proceso de enseñanza y aprendizaje se produce una transformación de un <i>conocimiento académico</i> a otro.” (p.58)</p> <p>“Si la educación científica se entiende, más que como adquisición de un saber disciplinado, elaborado y formalizado, como un enriquecimiento del conocimiento del alumno para actuar y comprender mejor el medio, entonces un modelo para la enseñanza de las ciencias debe buscar concordancia, más que con el modo con que se construye el conocimiento de ciencias, con el modo de construir el alumno su propio conocimiento. No se debe confundir un mayor acuerdo entre enseñanza de ciencias y quehacer científico con una mayor comprensión del alumno de los contenidos (Marín, 2003a).” (p.61)</p>

		<p>La didáctica de las matemáticas de la escuela francesa ha desarrollado teorías entre ellas las situaciones didácticas de Guy Brousseau y la transposición didáctica de Ives Chevallard. “Según Michèle Artigue, ambas teorías comparten la premisa de considerar los sistemas didácticos compuestos de tres polos en continua interacción: el conocimiento matemático, el alumno y el profesor, pero difieren en el nivel en el que enfocan el estudio de estos sistemas didácticos. Mientras que la <i>teoría de las situaciones didácticas</i> se sitúa en un nivel local, la <i>teoría de la transposición didáctica</i> abarca desde las instituciones destinatarias de esa enseñanza, ofreciendo así una visión de tipo global de los fenómenos didácticos (Calvo, 2001).” (p.61)</p> <p>“...la explicación que hace Yves Chevallard cuando quiere situar la didáctica de las matemáticas. Dice: “La didáctica, las didácticas, se inscriben en el campo de la antropología” (Chevallard, 1991). Simplemente porque la antropología es el estudio del hombre.” (p.61)</p> <p>“La <i>teoría de las situaciones didácticas</i> busca estudiar, apoyándose en enfoques constructivistas del aprendizaje, las situaciones de apropiación del conocimiento matemático a partir de la adaptación del alumno a ambientes que se le presentan en un comienzo como problemáticos (Panizza, 2003).” (p.62)</p> <p>“Cada situación puede ser de tres clases: <i>de acción, de formulación o de validación</i>. Para que alrededor de estas situaciones exista aprendizaje y se asegure la transmisión de los conocimientos culturales que se desea que adquieran los alumnos, es necesaria la implementación de dos tipos de intervenciones del profesor: la institucionalización y la devolución.” (p.62)</p> <p>“El <i>contrato didáctico</i>, como “regla de decodificación de la actividad didáctica”, constituye, entonces, un sistema de normas; algunas de estas, en su mayoría genéricas, pueden ser perdurables; otras, en su mayoría específicas del saber, deben ser definidas en función de los progresos del saber.” (p.66)</p> <p>“...las condiciones antropológicas de la teoría de las situaciones didácticas y de la teoría de la transposición didáctica. Hacen un valioso aporte a la relación profesor-alumno-saber.” (p.70)</p>
	Otros	<p>“Debe reconocerse, sin embargo, que existen a su vez dentro del constructivismo diversos enfoques de los cuales los más destacados son: el piagetiano, el humano, el social y el radical.” (p.70)</p> <p>“La didáctica de las matemáticas de la escuela francesa ha propuesto, con Brousseau, Chevallard, Sensevy y otros, importantes aportaciones al proceso de enseñanza-aprendizaje que se propone aquí sean acogidos en la enseñanza de las ciencias.” (p.70)</p>
<p>La enseñanza de la modelación en clase de física y de Matemáticas</p> <p>Rodríguez (2007)</p>	Objetivos	<p>“En esta investigación, estableceremos un <i>modelo</i> del proceso de modelación que constituya una referencia para posteriormente caracterizarlo, desde un punto de vista antropológico, en dos instituciones diferentes: la clase de matemáticas y la clase de física.” (p.133)</p>
	Metodología	<p>“Nos interesa estudiar el proceso de modelación como objeto de enseñanza así como precisar la manera en la cual este proceso es llevado al sistema escolar, en particular en el último año de estudios en el liceo en Francia. Para ellos realizaremos observaciones en clase de física y matemáticas cuando la noción ecuación diferencial es introducida como una herramienta para modelar diversas situaciones extra-matemáticas.” (p.135)</p>

	Aportes	<p>Para existen "...dos tipos de problema: matemáticos y aplicados. Los problemas aplicados, situados desde un inicio en el "<i>mundo real</i>" (el resto del mundo fuera de las matemáticas) son de interés en nuestro trabajo El paso entre una situación real hacia la construcción de un modelo matemático es denominado modelación por Blum y Niss en esa época." (p.114)</p> <p>Análisis praxeológico de manuales de matemáticas: "...en la introducción de la ecuación diferencial como herramienta de modelación, situaciones extra-matemáticas modeladas por: a) una ecuación diferencial de la forma $y'=ay+b$ con a y b constantes y b) una ecuación diferencial diferente pero que se puede transformar a una de la forma $y'=ay+b$ con a y b constantes. (p.136)</p> <p>"El tipo de tareas más frecuentemente observadas es la búsqueda de la solución general (TSG) y particular de la ecuación diferencial (TSM)." (p.136)</p> <p>Análisis de praxeológico de manuales de física: el objeto ecuación diferencial (ED) es una herramienta de modelación en tres grandes dominios: la radioactividad, la mecánica y los circuitos eléctricos. Escogiendo como tema de estudio la parte de Electricidad y analizando los ejercicios propuestos en el capítulo "Circuito RC" (resistencia-condensador), donde la carga y descarga de un condensador es estudiada, identificamos tres tareas a realizar con respecto a la modelación: TEED: Establecimiento de la ecuación diferencial para modelar la variación (en el circuito RC) de la tensión en bornas del condensador u_C en función del tiempo. Se parte de una descripción verbal en términos de la física para llegar a una ED de la forma $u_C'+a u_C = b$ con a, b constantes. TVSG: Verificación de que una solución general es solución de la ED establecida. La técnica τVSG es la sustitución (en la ED) de la solución general dada previamente en el enunciado. TSP: Establecer una solución particular de la ecuación diferencial en términos de los parámetros del circuito, donde las condiciones iniciales a utilizar son normalmente establecidas por los alumnos." (p.137)</p>
	Otros	<p>"La situación inicial de la gran mayoría de los ejercicios observados en los manuales de ambas clases está situada en un dominio pseudo-concreto ya que ciertas elecciones son ya realizadas y sólo son mencionadas las variables que intervendrán en el modelo matemático final (consecuencia: las etapas de la Representación mental de la situación y de la confrontación Modelo-Situación Real se encuentran también al interior de este dominio)." (p.137)</p> <p>"El proceso de modelación existente en clase de Matemáticas es mostrado a los alumnos de manera parcial evitando confrontarlos a etapas claves de esta práctica. La gran parte del tiempo, los alumnos no establecen el modelo lo cual resta significado a la práctica. [...], el proceso de modelación existente en esta clase es lejano a aquel vivido por los expertos y en términos de la enseñanza no permite al alumno el enfrentarse al acto de modelar de manera completa." (p.137)</p> <p>"En clase de física, se observa una importancia mayor dada a este proceso de modelación.[...]. Observamos que en esta disciplina el proceso de modelación vive de manera más cercana a nuestro esquema de referencia y algunas etapas son más tratadas en particular el establecimiento del modelo y de las condiciones</p>

		iniciales para encontrar una solución particular lo cual permite al alumno un mayor aprendizaje respecto a la modelación en Física.” (p.138)
Aproximación al concepto de función mediante la modelación de problemas experimentales: Movimiento uniformemente variado Ardila (2006)	Objetivos	<p>“Analizar el proceso de traducción entre sistemas de representación de la función cuadrática, mediante la modelación de un problema experimental de Movimiento uniforme variado para estudiantes de último año de secundaria.” (p.12)</p> <p>“Categorizar los niveles de modelación en la solución de un problema experimental, para estudiantes de último año de educación media” (p.12)</p> <p>“Describir el desempeño de estudiantes de último año de educación secundaria de un colegio del distrito capital en el proceso de traducción de un sistema de representación a otro a partir de un problema experimental”. (p.13)</p>
	Metodología	El autor trabajó con la metodología cualitativa, por medio de técnicas que incluían talleres y entrevistas, realizó un análisis del desempeño en el proceso de traducción entre sistemas de representación, por medio del problema experimental aro de Müller y ticómetro, a 36 estudiantes del Colegio Femenino Magdalena Ortega, que cursaban grado once.
	Aportes	<p>Los tipos de traducción son: tabular-verbal; Tabular-gráfica; gráfica-verbal; gráfica-analítica; analítica verbal.</p> <p>Las traducciones, llevan a idear actividades en las que prima la utilización de diferentes modos de representación.</p> <p>Las clases tradicionales, se centran en transformaciones sintácticas o aplicación de algoritmos.</p> <p>En el aprendizaje de las matemáticas la adquisición de un conocimiento obedece a la capacidad de que el estudiante reconozca e interprete las representaciones del objeto de conocimiento.</p>
	Otros	<p>El concepto de representación propone cuatro actividades:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. transposiciones semióticas de representación. 2. construcción de pruebas de modelos. 3. consolidación de relaciones y procesos en objetos conceptuales. 4. traducciones entre sistemas de representación <p>En el proceso de modelación de la función cuadrática, los estudiantes avanzan en la descripción verbal y de la gráfica, mas no en la representación analítica.</p>
A matemática como estructurante do conhecimento físico Pietrocola (2002)	Objetivos	“O objetivo deste artigo é mostrar que existe uma relação muito mais complexa entre ambas as disciplinas, que faz da Matemática um estruturante do conhecimento físico. Esta relação possui profundas implicações para o ensino de Física.” (p.89)
	Metodología	En la enseñanza de la física, el lenguaje matemático a menudo se considera como la gran responsable del fracaso escolar. Es común que los profesores atribuyan que sus alumnos no entienden Física debido a la fragilidad de sus conocimientos matemáticos. Para muchos, una buena base matemática en los años anteriores, garantiza éxito en el aprendizaje de la física. En este trabajo, se pretende analizar lo que hay de verdad en este argumento. Para ello, será necesario primero precisar el papel desempeñado por las matemáticas en la constitución del trabajo en la física.
	Aportes	Es innegable que la Matemática está, hoy más que nunca, alojada de forma definitiva en el seno de la Física. Esto queda claro cuando

		<p>nos volvemos a los productos de su actividad científica. En los libros y artículos, se ve que la Matemática que se encuentra en el centro de la actividad científica, gráficos, vectores, tensores, inequidades, geometrías, entre otros.</p> <p>Buena parte de los problemas del aprendizaje de la física se localiza en el dominio de las matemáticas refleja un el posicionamiento epistemológico ingenuo, en donde se atribuye que las matemáticas son <i>instrumento de</i> la física.</p> <p>En el desempeño de las clases de Física, se muestra como sinónimo de un operacionalismo matemático. En este contexto, se crea la imagen de la matemática es <i>el lenguaje</i> de la física, y por lo tanto su instrumento.</p> <p>Paty (1989) afirma que, para Galileo, la "matemática era concebida como un conocimiento que permitía una lectura directa de la naturaleza, que, precisamente, era la lengua." En el contexto de Galileo, la geometría mantiene su</p> <p>el estado de lenguaje preferido del mundo, pero ahora como recurso del pensamiento para su estructuración teórica. Este proceso se configura como una "traducción matemática", donde el científico sería el traductor por su capacidad de transitar entre dos "idiomas": de la naturaleza y de las matemáticas.</p>
	Otros	
<p>Análisis y valoración de la idoneidad de procesos de estudio de matemáticas</p> <p>Godino, Bencomo, Font & Wilhelmi (1991)</p>	Objetivos	
	Metodología	<p>Describen una experiencia de aula, en la que el objetivo fue que los estudiantes, interpretaran, recordaran y formalizaran el concepto de función aplicándolo a una situación de física: lanzamiento vertical hacia arriba. La población estudiada fue estudiantes de primer curso de una escuela de ingeniería.</p>
	Aportes	<p>“La idoneidad didáctica supone la articulación coherente y armónica de las siguientes idoneidades parciales: epistémica, cognitiva, mediacional, emocional, interaccional y ecológica.” (p.5)</p> <p>“1. Idoneidad epistémica, se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o previstos), respecto de un significado de referencia.</p> <p>2. Idoneidad cognitiva, expresa el grado en que los significados pretendidos/implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos,...</p> <p>3. Idoneidad interaccional, grado en que las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales (que se puedan detectar a priori), y , por otra parte, resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción...</p> <p>4. Idoneidad mediacional, grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.</p> <p>5. Idoneidad emocional, grado de implicación (interés, motivación) del alumnado en el proceso de estudio.</p> <p>6. Idoneidad ecológica, grado de adaptación del proceso de estudio al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social, etc. (p.5)</p> <p>La idoneidad didáctica, “Se trata de un constructo multidimensional, compuesto de seis facetas o dimensiones mediante las cuales se pretende abordar de manera integral la complejidad de factores que intervienen en el diseño, desarrollo y</p>

		evaluación de cualquier proceso de estudio matemático. (p.15)
	Otros	Es necesario que los profesores planifiquen la enseñanza teniendo en cuenta los significados institucionales que se pretenden estudiar, adoptando para los mismos una visión ampliada, no reducida a los aspectos discursivos (idoneidad epistémica). Asimismo, es necesario diseñar e implementar una trayectoria didáctica que tenga en cuenta los conocimientos iniciales de los estudiantes