Influencia del uso de representaciones ejecutables en el proceso de cambio de un registro semiótico verbal a uno simbólico al abordar problemas de máximos y mínimos utilizando GeoGebra

Adrián Arturo Chuquizán Cuaspa

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de Tecnología

Licenciatura en Electrónica

Bogotá, Colombia

2023

Influencia del uso de representaciones ejecutables en el proceso de cambio de un registro semiótico verbal a uno simbólico al abordar problemas de máximos y mínimos utilizando GeoGebra

Presentado por:

Adrián Arturo Chuquizán Cuaspa

Trabajo de grado presentado como requisito para optar por el título de:

Licenciado en Electrónica

Directora:

Vanessa María Garrido Altamar

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de Tecnología

Licenciatura en Electrónica

Bogotá, Colombia

2023

Dedicatoria

Logan y Leidy, todo lo que soy es por y para ustedes.

Los amo infinitamente.

Agradecimientos

Agradezco infinitamente a todas y cada una de las personas que hicieron posible la realización de este proyecto, a mi amada esposa e hijo, a mis padres, a mis hermanas y a todos los profesores y amigos de mi querida UPN.

Resumen

El presente trabajo investigativo, tiene como objetivo principal la elaboración y aplicación de un material didáctico digital basado en representaciones ejecutables y elaboradas en el software GeoGebra con el fin de estimar la influencia que dichas representaciones tienen sobre el proceso de extraer adecuadamente una ecuación matemática algebraica de un enunciado en lenguaje natural al abordar problemas de máximos y mínimos en un curso de calculo diferencial del Departamento de Tecnología de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN). Todo lo anterior encaminado a contribuir en la solución de uno de los inconvenientes más recurrentes, según la experiencia del autor tanto como estudiante como monitor del área de matemáticas, que se presentan al momento de cursar la asignatura de matemáticas 1.

Para alcanzar el objetivo propuesto se diseñó una serie de actividades basadas en un ambiente e-learning, mas específicamente en la plataforma Moodle, donde dichas actividades se organizaron de tal manera que los resultados obtenidos estuvieran bajo un enfoque de investigación cuantitativo cuasiexperimental.

De esta manera se elaboró el material didáctico digital y se aplicó al grupo de estudiantes de la asignatura de matemáticas 1 del Departamento de Tecnología de la UPN. Se obtuvo así, la participación de 4 estudiantes en la investigación, y aunque la participación fue menor a la esperada, los resultados obtenidos permiten dar una proyección positiva acerca del uso de estas representaciones ejecutables en el proceso de cambio de un registro semiótico verbal a uno simbólico, aunque esto no haya podido ser comprobado por medio de un análisis estadístico.

Contenido

Lista de tablas

Lista de figuras

1. Presentación

1.1 Planteamiento del problema

Partiendo de la experiencia del autor con estudiantes de primeros semestres de la licenciatura en electrónica de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN) en el área de matemáticas debido a los diferentes espacios de monitoria académica asignados desde el año 2018 hasta el año 2022, se pudo observar que una de las mayores dificultades que un estudiante de cálculo diferencial presenta al momento de enfrentarse a un problema de búsqueda de máximos y mínimos de una función o problemas de optimización (con los que por lo general se suele terminar un curso de cálculo diferencial), es la falta de habilidad para expresar en un lenguaje algebraico una situación problema enunciada en un lenguaje natural. Dicha dificultad es notada y puesta en consideración en algunos libros de texto que abordan el tema en cuestión como por ejemplo el del autor James Stewart, que en su libro Calculo de una Variable con Trascendentes Tempranas 7ma edición (2012) señala que el mayor desafío al momento de resolver un problema de optimización es convertir un problema expresado en palabras en una ecuación algebraica a la que se le pueda aplicar un proceso de derivación.

Expresando la anterior situación en términos de Raymond Duval (2006) se presenta una dificultad para hacer el cambio de un registro semiótico verbal a un registro semiótico simbólico con el objeto matemático *enunciado de un problema de máximos y mínimos*.

Este proceso de pasar de un registro semiótico a otro, denominado conversión entre registros, es de vital importancia en el aprendizaje de las matemáticas tal y como lo expresa Duval (2006), ya que representa la base para una auténtica apropiación de los conceptos matemáticos al ofrecer diferentes puntos de vista de un mismo objeto en cuestión.

Al anterior contexto hay que sumarle que una de las grandes ventajas que trae consigo la utilización de recursos tecnológicos en la didáctica de las matemáticas es la posibilidad de usar visualizaciones dinámicas y manipulables, también conocidas como representaciones ejecutables (Fernández,2017) de tal modo que permitan incrementar la expresividad de un objeto matemático y ayuden a fortalecer la experiencia visual en el proceso de aprendizaje, tal y como lo señalan las investigaciones desarrolladas por Dávila (2010), Otero (2012), Jaimes y Chaves (2012), Forero y Lopez (2012), Gono (2016), Zuluaga (2020), donde se destaca que el hecho de utilizar representaciones ejecutables basadas en geometría dinámica contribuyó de manera positiva al proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y en específico al cambio entre los diferentes registros semióticos de representación definidos por Duval.

Teniendo en cuenta el anterior contexto y para términos del presente estudio se plantea la siguiente pregunta de investigación:

¿En qué medida influye el uso de representaciones ejecutables en el proceso de cambio de un registro de lenguaje verbal a un registro simbólico al momento de abordar problemas de máximos y mínimos en estudiantes de primer semestre de la licenciatura en electrónica de la UPN?

1.2 Hipótesis

Con el fin de comprobar la pertinencia de la utilización de recursos didácticos en pro del aprendizaje de la matemática, se propone para esta investigación la siguiente hipótesis:

Los estudiantes que interactúan con el material didáctico digital basado en representaciones ejecutables desarrollado para el estudio, adquieren mayor habilidad al momento de plantear una ecuación algebraica simbólica a partir de un enunciado en lenguaje natural de problemas de máximos y mínimos

1.3 Justificación

Pereyra y Herrera (2019) en su estudio sobre las conversiones de registro de representación semiótica del concepto de función lineal en estudiantes de Informática, concluyen que una de las mayores dificultades al momento de resolver problemas que se modelan mediante una función, se presenta al momento de convertir un objeto matemático de un registro verbal a un registro algebraico, atribuyendo esta consecuencia a lo poco que se trabaja con resolución de problemas en escenarios escolares previos a la universidad.

La anterior dificultad ligada a que un adecuado razonamiento lógico matemático es indispensable para el estudio y desarrollo de carreras afines a la ciencia y la tecnología (Cruces y Zamora, 2016) y que el no presentar esta cualidad causa en los estudiantes desmotivación y apatía que afectan directamente el rendimiento académico o incluso provocan la deserción escolar tal y como lo indica el estudio realizado por Gutiérrez y Pérez (2014) en la licenciatura en Electrónica de la UPN señalando que una posible causa de la pérdida de calidad estudiantil está ligada con la reprobación de asignaturas como Matemáticas I y II, Física I y Circuitos I. Se infiere que hay una necesidad latente de desarrollar estrategias y materiales educativos que permitan superar los problemas que aparecen en el proceso de aprendizaje de estas asignaturas.

Ahora bien, en el marco de la educación con tecnología, en específico lo referente a la educación matemática mediada por la tecnología, Gómez (1997) resalta la ventaja que los recursos tecnológicos brindan al momento de generar nuevas experiencias dentro del aprendizaje de la matemática, ya que permite explotar esquemas interactivos que son prácticamente imposibles de lograr mediante recursos tradicionales como lápiz y papel. Esto es apoyado por Forero y López (2012) quienes consideran de suma importancia la implementación de tecnologías en la enseñanza de las matemáticas ya que permiten una mejor visualización de los conceptos y ofrecen un acercamiento más amable hacia la matemática.

Por todo lo anterior se considera significativo el adelanto de la presente investigación que apunta a contribuir en el desarrollo de materiales y habilidades en el aprendizaje de las matemáticas.

1.4 Objetivos

Los objetivos planteados para la presente investigación son los siguientes:

1.4.1 Objetivo General

Estimar la influencia que tiene el uso de representaciones ejecutables en el proceso de cambio de registro verbal al registro simbólico al abordar problemas de máximos y mínimos en estudiantes de la UPN inscritos en la asignatura Matemáticas I.

1.4.2 Objetivos específicos

1. Diseñar un material didáctico digital por medio del software GeoGebra basado en representaciones ejecutables que contribuya al traspaso entre el registro verbal y simbólico con el objeto matemático *enunciados de problemas de máximos y mínimos*.
2. Aplicar el material didáctico digital al grupo de Matemáticas I de la licenciatura en electrónica de la UPN bajo un enfoque de diseño cuasi experimental.
3. Hacer un análisis cuantitativo de los resultados obtenidos de la aplicación del material didáctico digital en cuanto a la influencia que tiene el uso de representaciones ejecutables sobre el proceso de cambio de registro.

1.5 Delimitación y alcance

Esta investigación se centra en estimar la influencia que tiene el uso de representaciones ejecutables sobre el cambio de registros semióticos y de alguna manera contribuir a la solución de uno de los problemas más comunes presentes al momento de abordar problemas de máximos y mínimos; sin embargo, no se contemplan los pasos posteriores a la obtención de la función simbólica que usualmente se siguen para la solución de un problema de máximos y mínimos, como lo es aplicar un proceso de derivación e igualación a cero.

Por lo tanto, el alcance de la investigación abarca únicamente el problema de la obtención de una expresión algebraica a partir de un enunciado verbal tomando como base varios enunciados de problemas de máximos y mínimos y no a la solución total de dichos problemas.

2. Marco de referencia

2.1 Antecedentes

Tras realizar una búsqueda a nivel local, nacional e internacional, se encontraron varias investigaciones que aportan de manera fundamental al desarrollo de esta investigación. A continuación, se describen brevemente los trabajos más significativos:

En este sentido, Luis Jaimes y Rafael Chaves en su proyecto de especialización en educación matemática llevado a cabo en la Universidad Pedagógica Nacional en el año 2012 y denominado *Propuesta de actividades para abordar problemas de mezclas en un curso de ecuaciones diferenciales mediante el apoyo de software libre GeoGebra*, proponen una serie de actividades que permitan hacer el traspaso de un registro semiótico del lenguaje natural al algebraico a partir de representaciones ejecutables, con el objetivo de proporcionar herramientas para plantear ecuaciones diferenciales que se ajusten a problemas de mezclas. Los autores concluyen que la ausencia del traspaso de registro aumenta el porcentaje de fracaso al momento de solucionar los problemas.

Del mismo modo, Danys Otero, también como proyecto de investigación de especialista en educación matemática en la Universidad Pedagógica Nacional en el 2012 elabora una propuesta de actividades denominada *Propuesta de intervención en el aula para resolver problemas de optimización relacionados con la minimización de costos, implementando como apoyo el software GeoGebra*, con el fin de desarrollar herramientas que permitan apoyar el proceso al momento de solucionar problemas de minimización de costos. El autor realiza un pilotaje a 20 estudiantes de grado 11 para identificar algunas dificultades en el desarrollo de problemas de optimización y así realizar ajustes a su propuesta inicial. Después lleva a cabo dos sesiones de trabajo utilizando el software GeoGebra enfocado en la solución de problemas de optimización. Concluye que la implementación de la actividad utilizando la herramienta tecnológica hace que se refleje en los estudiantes una mayor receptividad a la hora de resolver este tipo de problemas.

También, destaca el trabajo realizado por Fredy Zuluaga para obtener el título de Magíster en educación de la Universidad de Antioquia en el año 2020 y denominado *Comprensión del concepto de función a partir de representaciones por estudiantes de grado noveno mediante situaciones y un ejecutable virtual*. En este trabajo investigativo el autor pretendía analizar la comprensión del concepto de función en un grupo de estudiantes mediante el abordaje de situaciones y la utilización de un ejecutable virtual en GeoGebra. Para describir el grado de comprensión del concepto en cuestión, el autor hace uso del modelo teórico propuesto por Susan Pirie y Thomas Kieren. Se logró concluir que para el aprendizaje del concepto de función fueron fundamentales las diferentes representaciones de los enunciados mediante virtuales ejecutables que aportan de manera significativa a la comprensión adecuada de conceptos matemáticos.

Ya en el plano internacional, se encontró muy oportuno el trabajo de Laura del Río, Cecilia Sanz y Néstor Búcari con su artículo *Incidence of a hypermedia educational material on the Teaching and Learning of Mathematics* publicado en Journal of New Aprohaches in Educational Research de la Universidad de Alicante en el año 2019. Estos autores presentan el análisis de un estudio de caso llevado a cabo en un curso de Matemática de primer año de una facultad de ingeniería, para el cual desarrollaron un material didáctico hipermedial con el fin de ver su efecto. Crearon, además, un marco de estudio cuantitativo y cualitativo y se hizo una vivencia con 101 estudiantes que usaron este material. Encontraron, mediante el material, entrevistas y el grupo de control que la utilización del material contribuyó de manera positiva en diversos puntos del aprendizaje de los alumnos: lo cual les permitió adoptar un programa matemático como instrumento de investigación y de producción de conjeturas, promovió una reflexión crítica, y usaron dicho programa para comprobar lo que realizaban manualmente por medio de conversiones de registro de representación semiótica.

Por último, se resalta la tesis doctoral de Ebert Nhamo Gono de la universidad College London del año 2016 titulada The contributions of Interactive Dynamic Mathematics software in probing understanding of mathematical concepts: Case study on the use GeoGebra in learning the concept of modulus functions. Este trabajo se centró en las vivencias de los estudiantes al utilizar GeoGebra en el estudio del módulo de una función. El autor desarrolló cinco diferentes actividades junto con 6 estudiantes y encontró que el uso de este software motivó en los estudiantes el deseo de investigar las propiedades del módulo de funciones por su cuenta y en mayor profundidad, incluso desarrollando conjeturas válidas sobre el objeto matemático en cuestión y llevando a cabo conversiones entre varios registros de representación.

2.2 Marco Teórico

Este trabajo investigativo se centra en estimar la influencia que tienen las representaciones ejecutables en el abordaje de problemas de optimización, por lo que se considera que son tres los ejes fundamentales que sostienen este estudio: el marco matemático, el marco didáctico y la educación con tecnología. A continuación, se describen los aspectos más relevantes de cada uno.

2.2.1 Marco Matemático

El contexto matemático que se está abordando corresponde al cálculo infinitesimal, una asignatura que generalmente se presenta en épocas tempranas del plan de estudios de diversas carreras de nivel superior centrado en el estudio de fenómenos con naturaleza cambiante y de carácter fundamental para áreas como la química, la física, la economía, la ingeniería, entre otras (Dávila,2010).

En general, el tema de cálculo se divide en dos secciones, el cálculo diferencial y el cálculo integral. Dentro de la sección de cálculo diferencial se abordan temáticas como el concepto de función, límites, derivadas y aplicaciones prácticas de la derivada. Esto último, comúnmente, se aprovecha para encontrar la solución de situaciones en las que se necesita conocer la mejor manera de llevar a cabo una determinada tarea o también llamados problemas de optimización.

2.2.1.1 Problemas de optimización

Al respecto de los problemas de optimización Edwin J. Purcell, Dale Varberg y Steven E. Rigdon, en su libro Cálculo Diferencial e Integral Novena Edición (2007) explican lo siguiente:

Con frecuencia en la vida, nos enfrentamos con el problema de encontrar la mejor manera de hacer algo. Por ejemplo, un granjero necesita elegir la mezcla de cultivos que sea la más apropiada para producir la mayor ganancia. Un médico desea seleccionar la menor dosis de una droga que curará cierta enfermedad. A un fabricante le gustaría minimizar el costo de distribución de sus productos. Algunas veces, un problema de este tipo puede formularse de modo que implique maximizar o minimizar una función en un conjunto específico. Si es así, los métodos de cálculo proporcionan una herramienta poderosa para resolver el problema.

La mejor manera de hacer una tarea determinada, desde una mirada matemática, consiste en encontrar puntos máximos o mínimos de la función que modela el comportamiento de la situación, esto generalmente por medio de la aplicación de un proceso de derivación e igualación a cero.

Así mismo, es importante resaltar que, para ejecutar la resolución de problemas de máximos y mínimos, los libros de texto presentan una serie de pasos y recomendaciones que se sugiere seguir para alcanzar el éxito en esta tarea especifica. Un ejemplo de este procedimiento es presentado por George B. Thomas en su libro Cálculo Una Variable Decimosegunda edición (2010) presentado a continuación:

1. **Lea el problema**. Lea el problema hasta que lo comprenda. ¿Qué datos se dan? ¿Cuál es la cantidad desconocida que debe optimizarse?

2. **Elabore un dibujo**. Anote el nombre de cada parte que pueda ser importante para el problema.

3. **Introduzca variables**. Elabore una lista de las relaciones en el dibujo y en el problema como una ecuación o una expresión algebraica: luego, identifique la variable desconocida.

4. **Escriba una ecuación para la cantidad desconocida**. Si puede, exprese la incógnita como una función de una sola variable o con dos ecuaciones con dos incógnitas. Esto talvez requiera mucha manipulación algebraica.

5. **Pruebe los puntos críticos y los extremos del intervalo en el dominio de la incógnita**. Utilice lo que conoce acerca de la forma de la gráfica de la función. Con base en la primera y segunda derivadas identifique y clasifique los puntos críticos de la función.

Como se puede notar en los pasos anteriores, el mayor esfuerzo se centra en plantear adecuadamente la ecuación algebraica que modela la situación problema. Y es también en donde se presenta la dificultad de la mayoría de los estudiantes. Es en este sentido, es aquí que el presente estudio reitera su deseo de aportar con herramientas tecnológicas al campo de la didáctica de las matemáticas.

2.2.2 Marco Didáctico

2.2.2.1 Registros semióticos de representación

En cuanto a las representaciones y registros semióticos, el principal referente es Duval (2006) quien afirma que el aprendizaje matemático se desarrolla necesariamente en un contexto de representación, por ejemplo, los números naturales pueden ser representados mediante puntos, líneas, mediante una representación poligonal o con un sistema de notación decimal. Lo importante para conseguir un aprendizaje adecuado es la habilidad, por parte de los estudiantes, de reconocer el objeto matemático en cuestión en diferentes contextos de representación que para la actividad matemática son necesariamente semióticos.

Lo importante de los anteriores contextos de representación, también denominados registros de representación semiótica es su propiedad de transformación que puede ser de conversión o tratamiento. La conversión se presenta cuando existe un cambio en el sistema semiótico o registro sin cambiar los objetos indicados y el tratamiento se refiere a que manteniendo el mismo registro semiótico se aplica una serie de procedimientos válidos para obtener una representación diferente. A continuación, se presenta un ejemplo de transformación presentado por el mismo Duval.

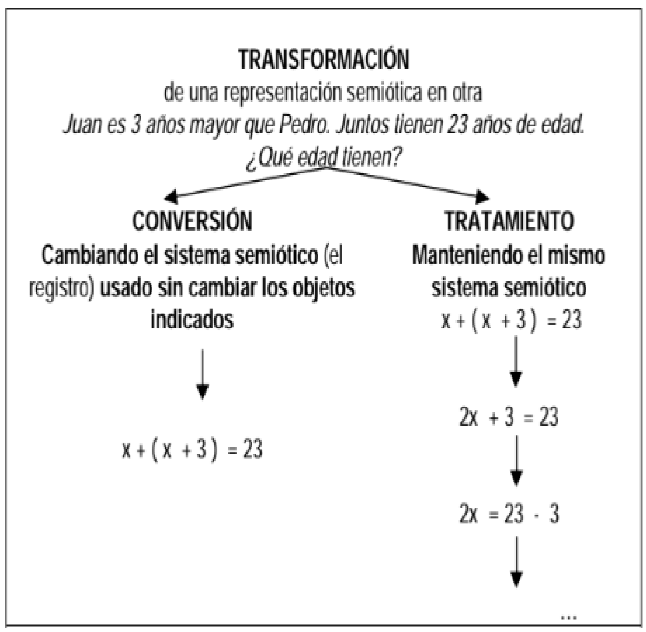


Figura 1. Adaptado de “Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación” (p. 146), por R. Duval, 2006, *La Gaceta de la RSME, 9*(1).

Cuando se logra que un estudiante pueda reconocer y usar diferentes registros semióticos y realizar adecuadamente conversiones y tratamientos entre diferentes registros y además pueda reconocer que una u otra representación facilita la obtención de determinada información acerca del objeto en cuestión, es cuando se logra una aprendizaje profundo y adecuado.

2.2.2.2 Representaciones ejecutables

Por su parte, las representaciones ejecutables según Moreno (2001) son aquellas herramientas que permiten la mediación en el aprendizaje implementadas mediante equipos informáticos y que por su naturaleza tienen la característica de ser ejecutable, es decir que, dentro de un ambiente computacional, estas representaciones son manipulables y procesables, lo que contribuye a una percepción más realista del objeto matemático. Para Jaimes y Chavez (2012) estas representaciones utilizan equipos tecnológicos (computadores, tablets, celulares, entre otros), para facilitar la manipulación y transformación directa de los objetos mediante el dinamismo en que se representan los objetos.

2.2.2.2.1 GeoGebra

Desde su página oficial geogebra.org se puede entender que es un software matemático y dinámico de uso gratuito que permite trabajar con geometría, hojas de cálculo, algebra, graficas 2D y 3D, características que lo hacen perfecto como herramienta para la enseñanza de las matemáticas.

GeoGebra cuenta con la opción de alojar los materiales didácticos desarrollados para ser ejecutados online y crear con ellos actividades completas de enseñanza mediada por tecnología.

2.2.2.3 Materiales didácticos digitales

Según Area (2019) un material didáctico digital se puede describir como un "empaquetamiento" de una propuesta de enseñanza-aprendizaje en un artefacto digital, como por ejemplo video, presentación, juegos online, gráficas dinámicas, etc. que tiene como fin presentar un determinado contenido a un estudiante. Algunas características básicas que deben poseer los MDD son un diseño atractivo y original, simplicidad, diferentes formatos multimedia, organización hipertextual, interactividad y accesibilidad y fácil navegación.

2.2.2.4 e-learning

Según el ministerio de educación nacional el e-learning es una modalidad de educación donde el proceso de enseñanza-aprendizaje está basado en el uso de tecnologías de la información y la comunicación.

2.2.2.4.1 Moodle

Desde su página oficial se puede entender que Moodle es una plataforma de aprendizaje que tiene el fin de proporcionarle a educadores, administradores y estudiantes un sistema integrado, único robusto y muy seguro para desarrollar ambientes de aprendizaje totalmente personalizables.

3. Metodología

3.1 Tipo y enfoque de la investigación

Tomando como referencia lo planteado por Arias (2006) y Moraleda (2016), se tiene que la presente investigación se inscribe dentro de un enfoque cuantitativo, pues intenta comprobar la relación existente entre la variable independiente *uso de representaciones ejecutables* y la variable dependiente *grado de habilidad para plantear una ecuación algebraica a partir de un enunciado*. Se pretende un nivel de investigación explicativo mediante un diseño cuasi experimental aplicado a estudiantes de la asignatura matemáticas I de la Licenciatura en Electrónica de la Universidad Pedagógica Nacional.

Para el adecuado cumplimiento de los objetivos planteados, esta investigación, se desarrolló en tres fases principales:

1. Desarrollo del material didáctico digital
2. Aplicación del material didáctico digital a los estudiantes
3. Recolección y análisis de los resultados.

3.2 Fase 1. Diseño del Material Didáctico Digital

Para el diseño del material didáctico digital en primer lugar se realizó una búsqueda de problemas típicos de optimización en varios libros de texto de cálculo con el fin de seleccionar los más adecuados para ser abordados desde un punto de vista de implementación por medio del software GeoGebra.

Para ello se elaboró la siguiente matriz que cuenta con la información básica acerca del enunciado de cada problema preseleccionado, el libro de texto de donde surgió y un indicador de si es posible la realización de una representación ejecutable, a partir del criterio propio del investigador.

Tabla 1.

Problemas de máximos y mínimos encontrados en los libros de texto

#	Enunciado	Libro	¿Es Realizable?
1	Un faro se encuentra ubicado en un punto A, situado a 5 km del punto más cercano O de una costa recta. En un punto B, también en la costa y a 6 km de O, hay una tienda. Si el guarda faros puede remar a 2km/h, y puede caminar a 4 km/h, ¿Dónde debe desembarcar en la costa, para ir del faro a la tienda en el menor tiempo posible?	1	Muy probable
2	Una ventana tiene forma de rectángulo, culminando en la parte superior con un triángulo equilátero. El perímetro de la ventana es de 3 metros. ¿Cuál debe ser la longitud de la base del rectángulo para que la ventana tenga el área máxima?	1	Muy probable
3	Demuestre que de todos los rectángulos con diagonal dada d = 1, el que tiene mayor área, es el cuadrado.	2	Probable
4	Con un trozo de material rectangular, se forma una caja abierta suprimiendo de cada esquina cuadrados iguales y doblando los lados hacia arriba. Hallar las dimensiones de la caja de mayor volumen que se puede construir de esta manera, si el material tiene dimensiones a y b.	2	Muy probable
5	Doble una hoja de papel rectangular haciendo coincidir el vértice C con un punto del lado AD. Determine x para que la longitud del pliegue l sea mínima. Obtenga además la longitud del pliegue mínimo.	2	Poco probable
6	Entre todos los triángulos rectángulos con perímetro 2p, ¿cuál es el que tiene área máxima?	2	Probable
7	Suponga que un pez nada río arriba con velocidad relativa al agua $\boldsymbol{V}$ y que la corriente del río tiene velocidad $-\boldsymbol{V_c}$ (el signo negativo indica que la velocidad de la corriente es en dirección opuesta a la del pez). La energía empleada en recorrer una distancia d a contracorriente es directamente proporcional al tiempo requerido para recorrer la distancia d y el cubo de la velocidad. ¿Qué velocidad v minimiza la energía empleada en nadar esta distancia?	3	Poco probable
8	Un granjero desea cercar tres corrales rectangulares adyacentes idénticos cada uno con un área de 300 pies cuadrados. ¿Cuáles deben ser el ancho y el largo de cada corral, de modo que se ocupe la menor cantidad de valla?	3	Muy probable

9	Un barco sale de un muelle a las 14:00 y viaja hacia el sur a una velocidad de 20 km/h. Otro barco ha estado dirigiéndose al este a 15 km/h y llega al mismo muelle a las 15:00. ¿A qué hora estuvieron los dos barcos más cerca uno del otro?	6	Probable
10	Encuentre el volumen máximo que puede tener un cilindro circular recto, si está inscrito en una esfera de radio r.	3	Probable
11	La iluminación en un punto es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia del punto a la fuente luminosa y directamente proporcional a la intensidad de la fuente. Si dos fuentes luminosas están separadas $\boldsymbol{S}$ pies y sus intensidades son $\boldsymbol{I_1}$ e $\boldsymbol{I_2}$, respectivamente, ¿en qué punto entre ellas la suma de sus iluminaciones será mínima?	3	Poco Probable
12	Un alambre de 100 centímetros de largo se corta en dos pedazos; uno se dobla para formar un cuadrado y el otro se dobla para formar un triángulo equilátero. ¿En dónde debe hacerse el corte si (a) la suma de las dos áreas debe ser mínima; (b) máxima? (Cabe la posibilidad de no cortar).	3	Probable
13	Una caja cerrada en forma de paralelepípedo rectangular con base cuadrada tiene un volumen dado. Si el material utilizado para el fondo cuesta 20% más por pulgada cuadrada que el material para los lados y el material de la tapa cuesta 50% más por pulgada cuadrada que cada lado, encuentre las proporciones más económicas para la caja.	3	Probable
14	Un observatorio debe tener la forma de un cilindro circular, coronado por un domo semiesférico. Si el domo semiesférico cuesta el doble por pie cuadrado que las paredes cilíndricas, ¿cuáles son las proporciones más económicas para un volumen dado?	3	Probable
15	Una barda de h pies de altura corre paralela a un edificio alto y a w pies de él. Encuentre la longitud de la escalera más corta que llegue del suelo hasta la pared del edificio, pasando por encima de la barda.	3	Probable
16	Un canalón metálico para el agua de lluvia tiene lados de 3 pulgadas y un fondo horizontal de 3 pulgadas, los lados forman ángulos iguales $\boldsymbol{\alpha}$ con el fondo. ¿Cuál debe ser $\boldsymbol{\alpha}$ para maximizar la capacidad de desalojo de agua del canalón?	3	Probable
17	Tengo suficiente plata pura como para cubrir un área de 1 metro cuadrado de superficie. Planeo cubrir una esfera y un cubo. ¿Qué dimensiones deben tener si el volumen total de los sólidos plateados debe ser máximo? ¿Y mínimo? (Se permite la posibilidad de que se utilice toda la plata en un sólido).	3	Poco probable

18	Dada una esfera de radio ***R***. Hallar el radio ***r*** y la altura ***h*** del cilindro circular recto de mayor superficie lateral que puede inscribirse en la esfera	4	Probable
19	Hallar el rectángulo de mayor área que puede inscribirse en un semicírculo, teniendo la base inferior en el diámetro.	4	Probable
20	un alambre recto de 60 cm de longitud se dobla para formar una L. Cuál es la distancia más corta posible entre los dos extremos del alambre doblado	5	Probable
21	Con un trozo de material rectangular, se forma una caja abierta suprimiendo de cada esquina cuadrados iguales y doblando los lados hacia arriba. Hallar las dimensiones de la caja de mayor volumen que se puede construir de esta manera, si el material tiene dimensiones ***a*** y ***b***.	6	Probable
22	Se hace una lata cilíndrica sin tapa para contener $V\ cm^3$ de líquido. Encuentre las dimensiones que minimizan el costo del metal para hacer la lata.	6	Muy probable
23	La resistencia de una viga rectangular es directamente proporcional al producto del ancho y el cuadrado de la altura de su sección transversal. Halle las dimensiones de la viga más resistente que se pueda obtener de un tronco circular de radio ***A***	7	Muy probable
24	Dos ciudades, A y B, están situadas a 10 y 14 Km. de un río. Estas ciudades deben aprovisionarse de un mismo depósito construido sobre el borde del río. En qué punto del borde del río, M, ¿debe colocarse el depósito para que la tubería gastada sea mínima? La proyección de AB sobre el borde del río mide 20 Km.	8	Muy probable

Los números que aparecen en la columna **libro** hace referencia a los siguientes libros de texto:

1. Calculo diferencial e integral con aplicaciones del autor Elsie Hernández
2. Calculo I. Problemas resueltos del autor Rodrigo Vargas
3. Calculo diferencial e integral de los autores Edwin Purcell, Dale Varberg y Steven Rigdon
4. Calculo Volumen I, del autor Tom Apostol
5. Calculo con geometría analítica, de los autores C. H. Edwars y David Penney

6. Cálculo de una variable Trascendentes tempranas, del autor James Stewart

7. Calculo con geometría analítica, del autor Earl Swokowski

8. Introducción al cálculo infinitesimal, del autor Juan A. Viedma

De esta manera se seleccionaron un total de 6 problemas de máximos y mínimos considerados muy probables para ser representados y trabajados por medio del software GeoGebra, se describe a continuación en qué consiste la representación ejecutable para cada uno.

3.2.1 Problema 1. Una caja sin tapa

De una pieza cuadrada de cartón de lado L, se quiere hacer una caja sin tapa cortando para ello de cada una de sus esquinas un cuadrado de lado x. Encontrar el valor de x que hace que el volumen de la caja sea máximo.

La representación que se logró para este problema es la siguiente:

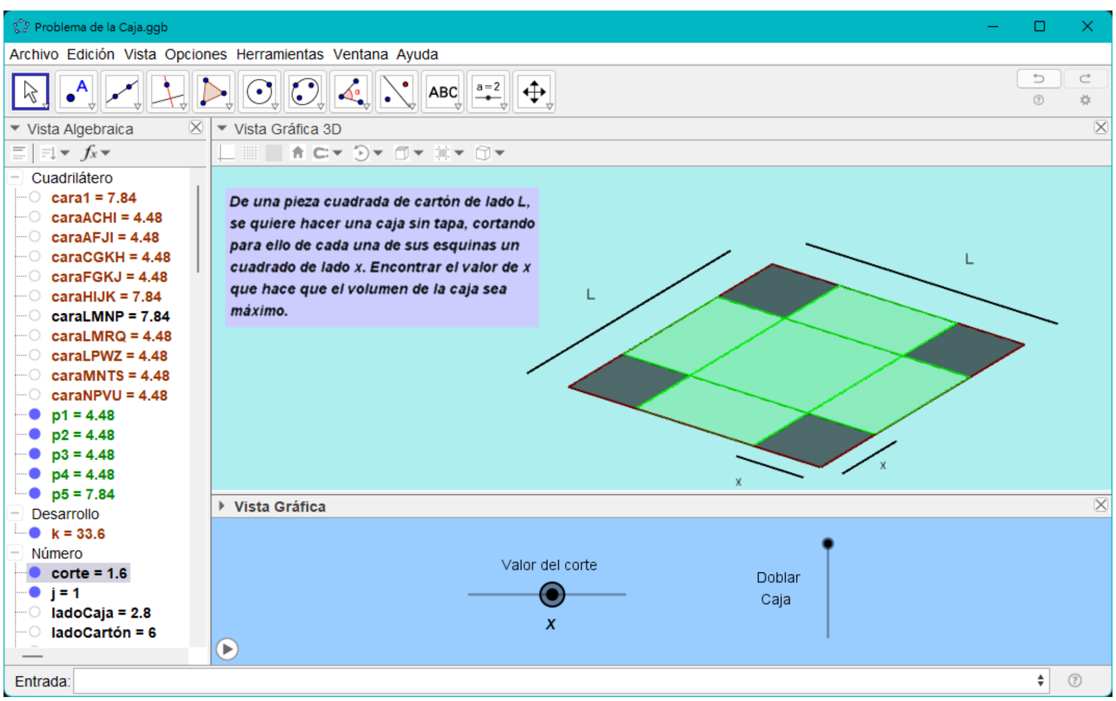


Figura 2. Representación del Problema 1 realizada en GeoGebra

Por medio de los deslizadores de la parte inferior se controla el valor de x, incrementándose o disminuyéndose, y con el otro deslizador se realiza una simulación en 3D de doblar las partes del cartón hacia arriba para formar la caja.

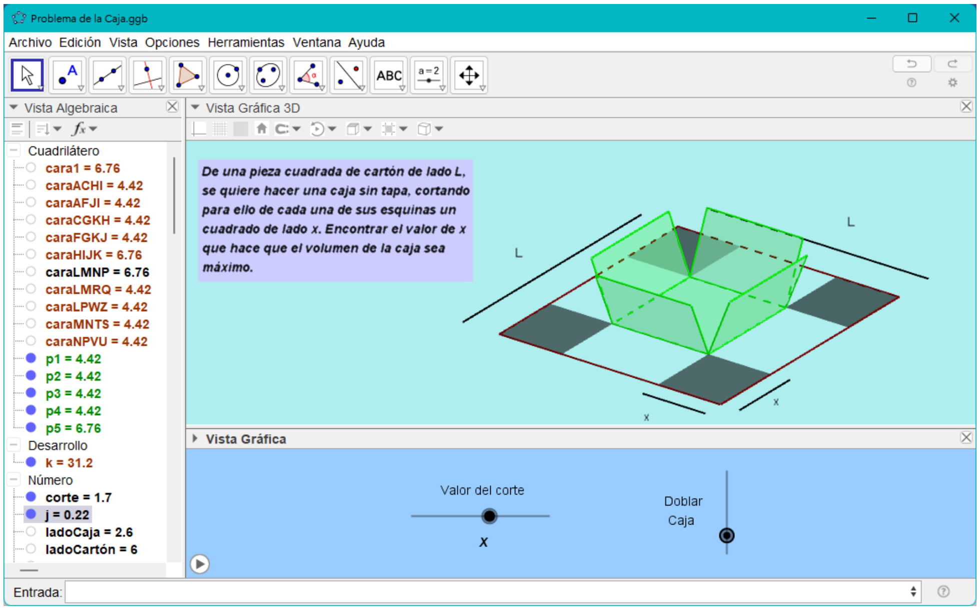


Figura 3. Representación del Problema 1 modificando los deslizadores

La idea para esta representación es que el estudiante logre relacionar el valor del corte con la variable independiente y también con la altura de la caja para calcular su volumen. También es importante que el estudiante pueda, manteniendo la caja doblada, variar el valor del corte y notar visualmente la variación del Volumen, verificando de esta manera que hay un volumen máximo y un volumen mínimo.

3.2.2 Problema 2. La menor tubería

Dos ciudades, A y B, están situadas a 10 y 14 Km. de un río. Estas ciudades deben aprovisionarse de un mismo depósito construido sobre el borde del río. En qué punto

del borde del río, M, ¿debe colocarse el depósito para que la tubería gastada sea mínima? La proyección de AB sobre el borde del río mide 20 Km.

Para este problema se realizó la siguiente representación

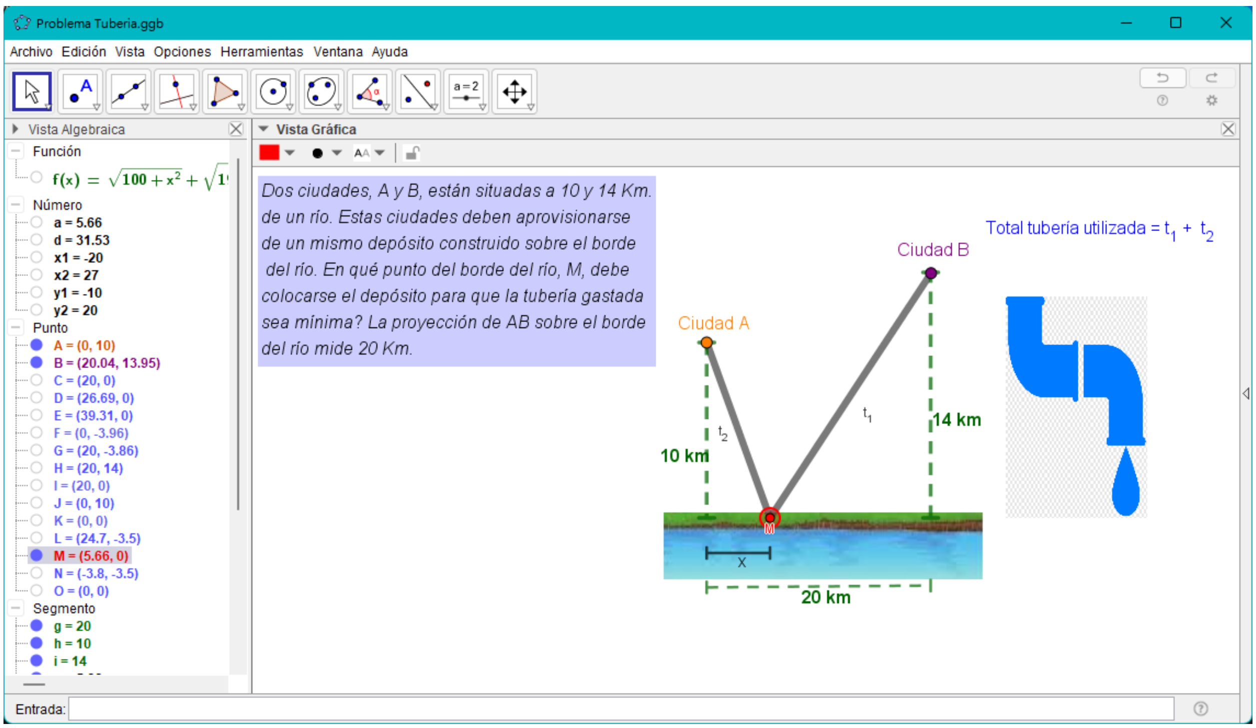


Figura 4. Representación del Problema 2 realizada en GeoGebra

En esta representación se puede mover el punto M hacia la derecha o la izquierda, cambiando las distancias t1 y t2 que representan la cantidad de tubería utilizada. También para ilustrar el cambio de la cantidad en función de x, se hace variar el tamaño de la imagen azul de la parte derecha, aumentando o disminuyendo según la solución previamente calculada.

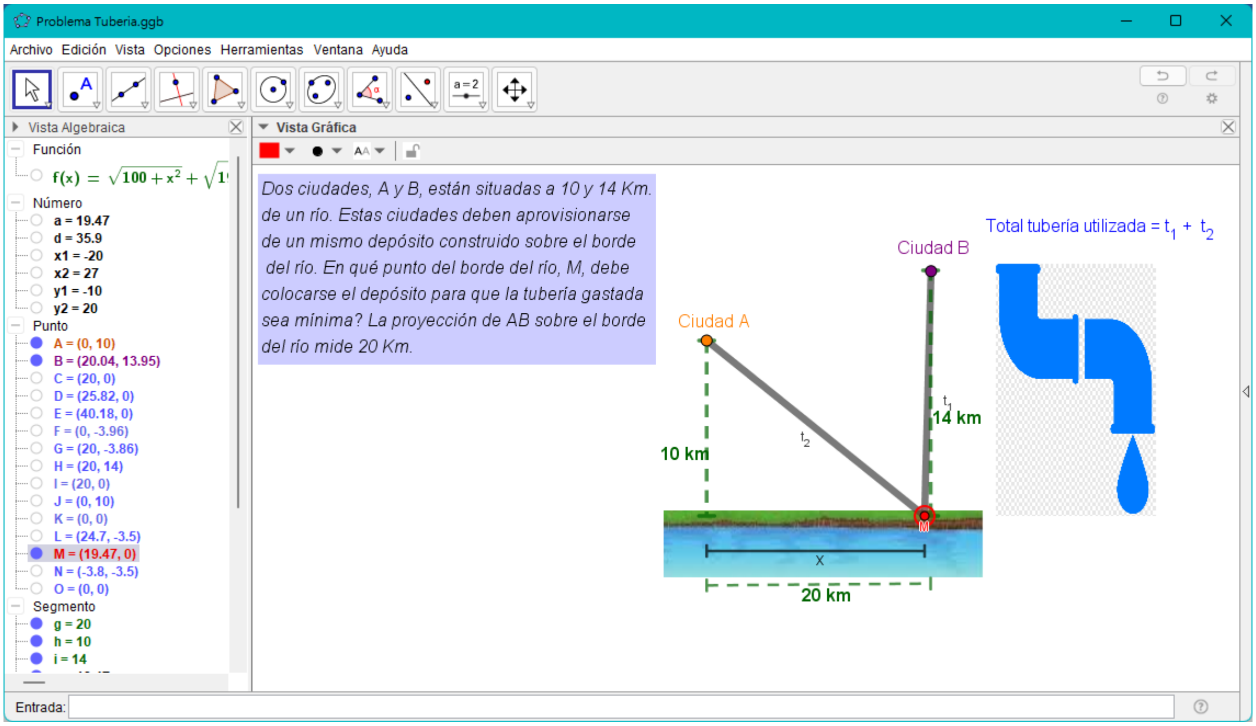


Figura 5. Representación del Problema 2 moviendo el punto M

3.2.3 Problema 3. Construyendo una cerca

Un granjero dispone de 100 m de tela metálica; con ella quiere hacer un cercado utilizando una pared y cerrando sobre ella un rectángulo. ¿Qué dimensiones debe dar al rectángulo para que el área del cercado sea máxima?

Se realizó la siguiente representación retomando las ideas de que al mover el deslizador se visualice gráficamente su efecto en el área total encerrada, intentando contribuir en la relación que hace el estudiante con respecto a la variable independiente y su efecto en la función que representa el área, manteniendo siempre la longitud de la cerca constante.

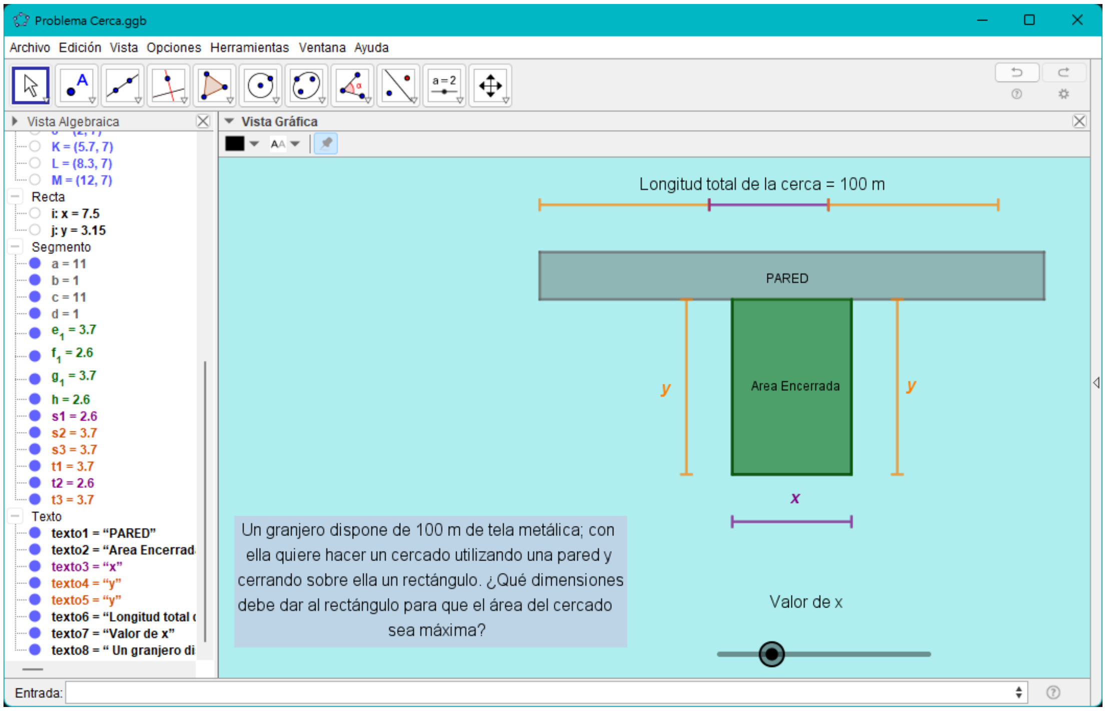


Figura 6. Representación del Problema 3 realizada en GeoGebra

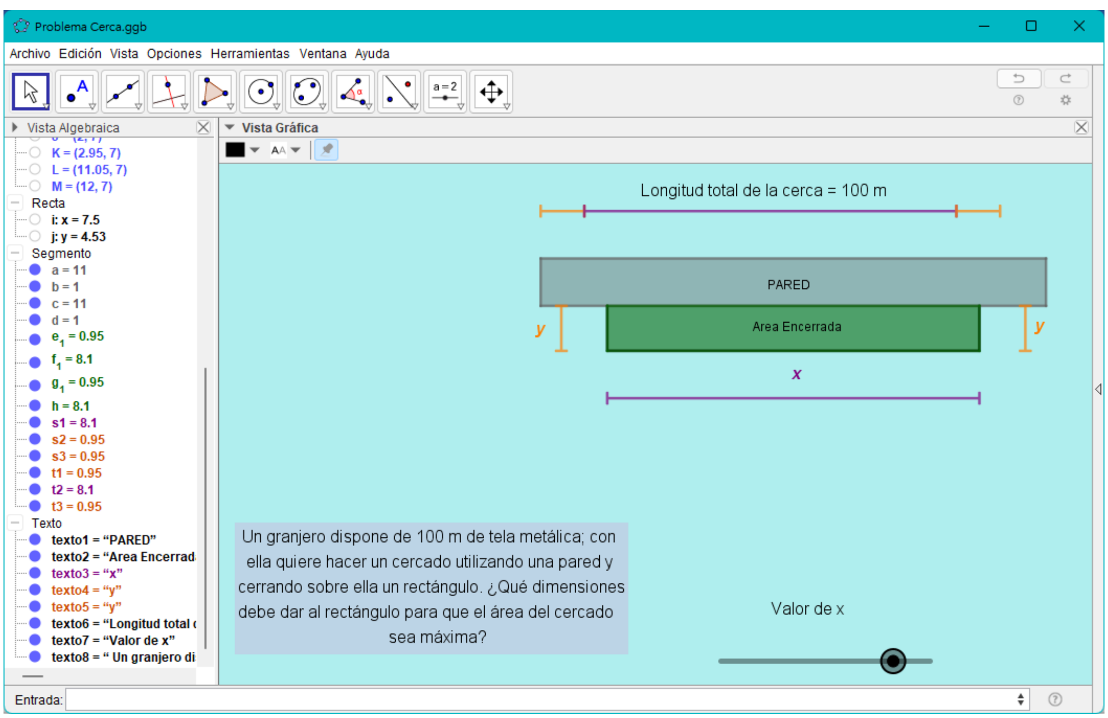


Figura 7. Representación del Problema 3 moviendo el deslizador

3.2.4 Problema 4. Del faro a la playa

Un faro se encuentra ubicado en un punto A, situado a 5 Km del punto más cercano O de una costa recta. En un punto B, también en la costa y a 6 Km de O, hay una tienda. Si el guarda faros puede remar a 2Km/h, y puede caminar a 4Km/h, ¿Dónde debe desembarcar en la costa para ir del faro a la tienda en el menor tiempo posible?

Para la realización de esta representación se consideró que además del deslizador por medio del cual el estudiante incrementa o disminuye el valor de la variable independiente, contribuiría de manera positiva agregar un botón con el que se pudiera iniciar una animación que indicaba el recorrido del guarda faros.

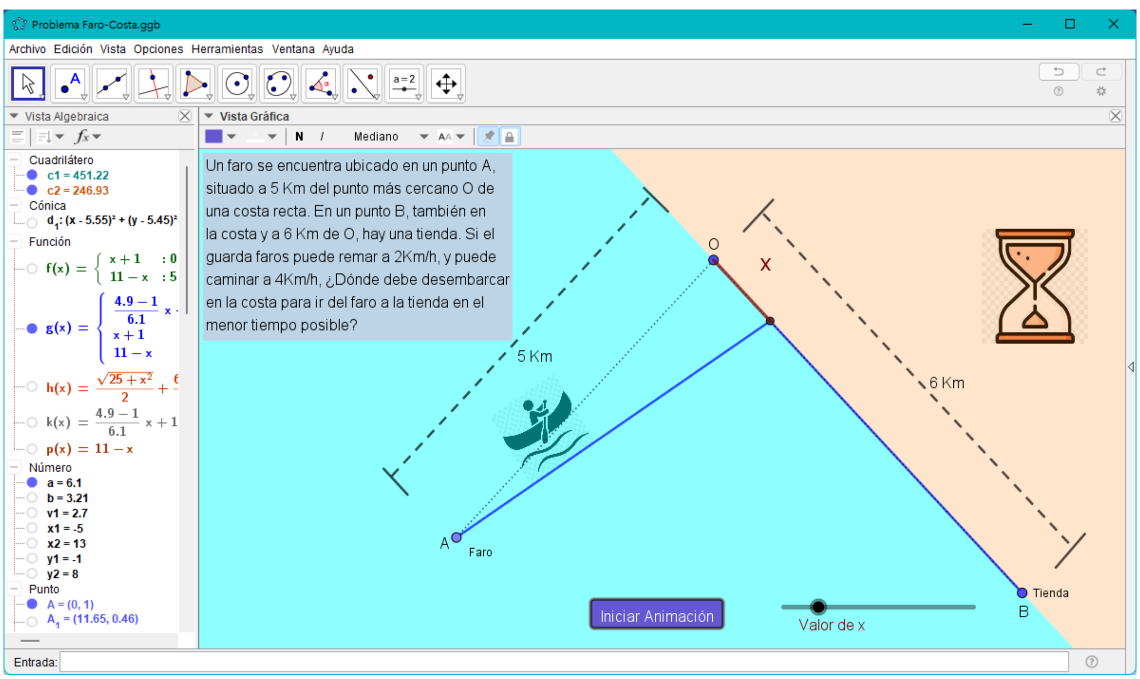


Figura 8. Representación del Problema 4 realizada en GeoGebra

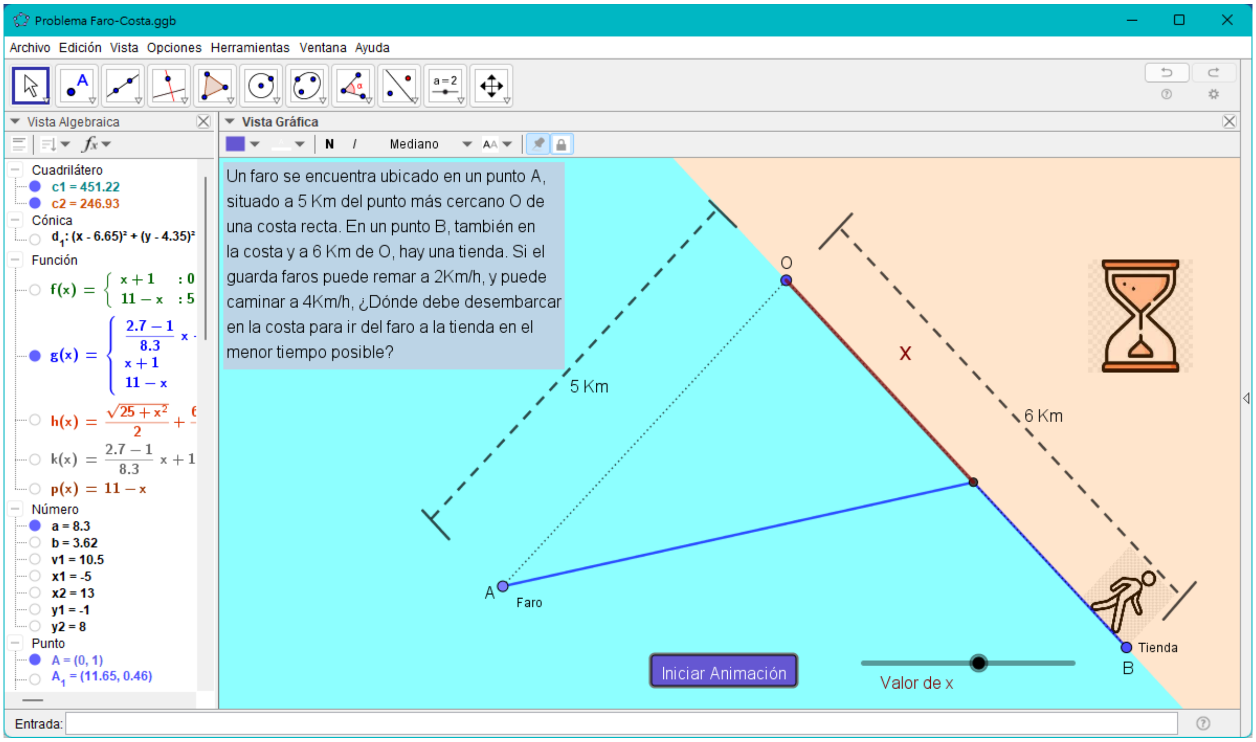


Figura 9. Representación del Problema 4 moviendo el deslizador

Se realizó, también, por medio de un deslizador oculto, que la velocidad de recorrido de los tramos fuera diferente, intentando simular las velocidades indicadas en el problema.

3.2.5 Problema 5. La viga más resistente

La resistencia de una viga rectangular es directamente proporcional al producto del ancho y el cuadrado de la altura de su sección transversal. Halle las dimensiones de la viga más resistente que se pueda obtener de un tronco circular de radio A

Para esta representación se utilizó dos tipos de vista, la 2D y la 3D con el fin de mejorar la visualización del problema y contribuir con la comprensión de las variables involucradas y sus relaciones.

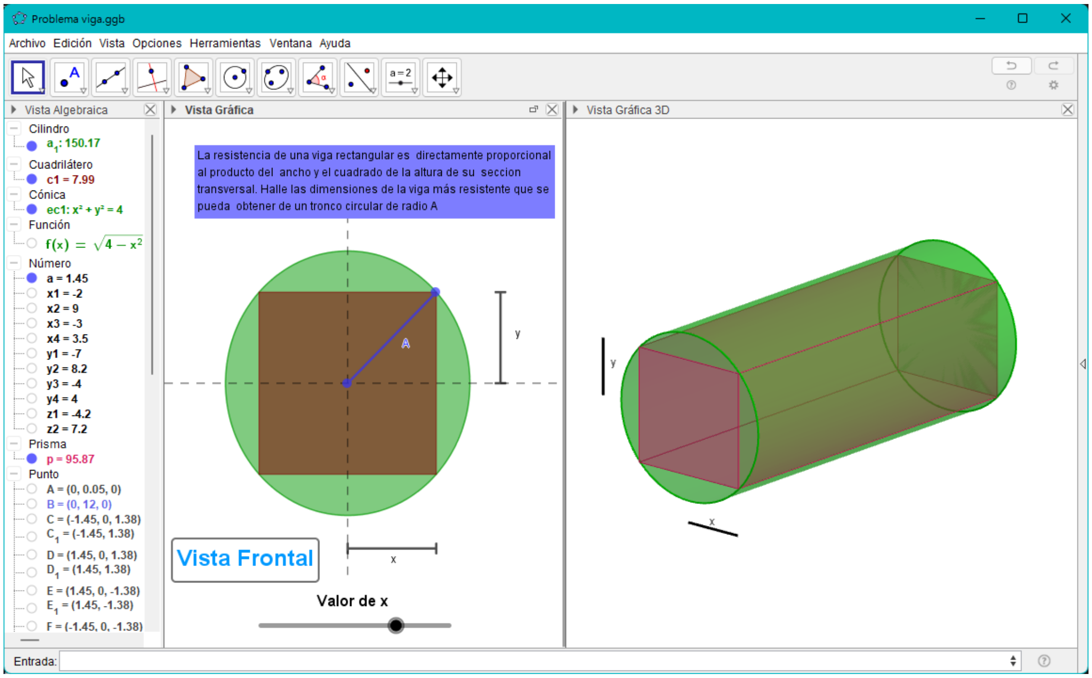


Figura 10. Representación del Problema 5 realizada en GeoGebra

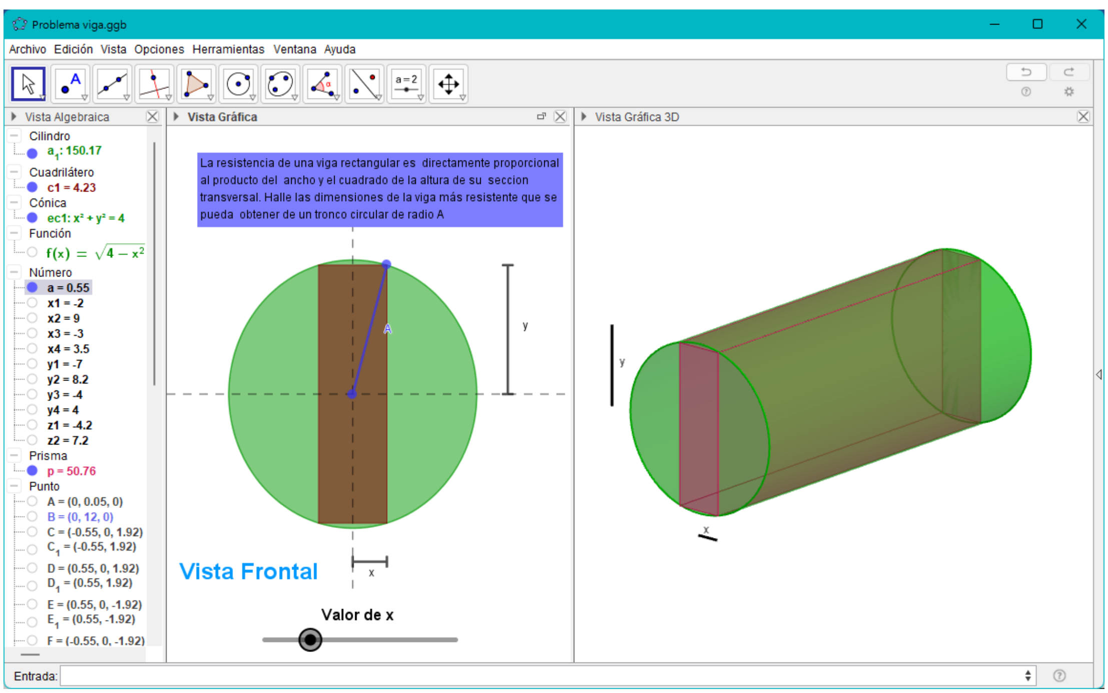


Figura 11. Representación del Problema 5 moviendo el deslizador

3.2.6 Problema 6. Una ventana restringida

Una ventana tiene forma de rectángulo, culminando en la parte superior con un triángulo equilátero. El perímetro de la ventana es de 3 metros. ¿Cuál debe ser la longitud de la base del rectángulo para que la ventana tenga el área máxima?

Esta representación tiene los mismos lineamientos de diseño que las anteriores, intentando promover la compresión y diferenciación entre variables y valores constantes del problema

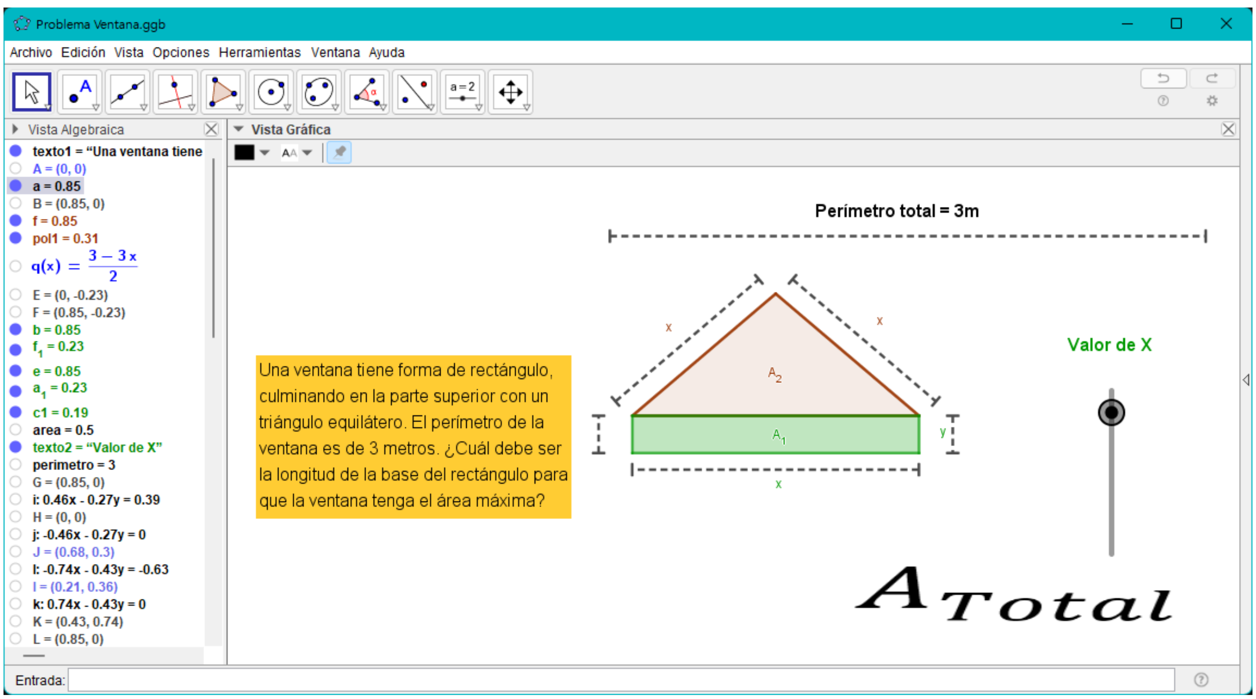


Figura 12. Representación del Problema 6 realizada en GeoGebra

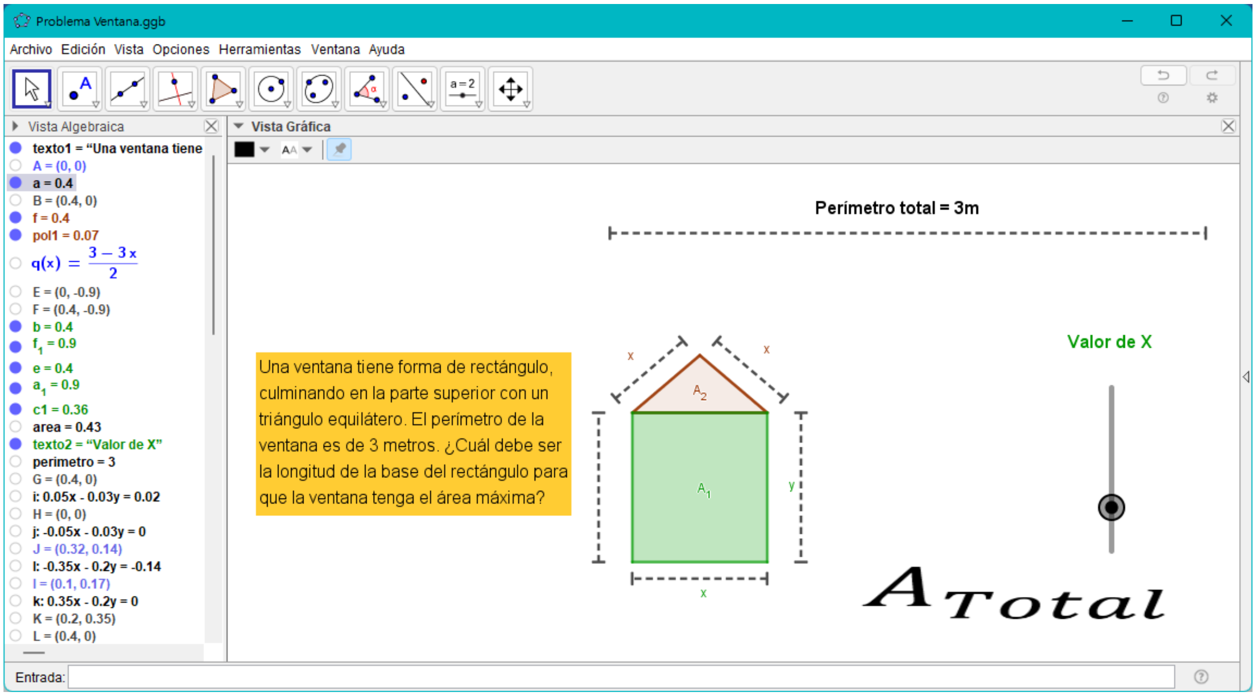


Figura 13. Representación del Problema 3 moviendo el deslizador

3.2.7 Puesta en línea de las representaciones ejecutables

Luego del desarrollo de las representaciones ejecutables por medio de GeoGebra, se realizó la respectiva puesta en línea de éstas, con el fin de que pudieran ser accesibles desde cualquier lugar y también desde cualquier programa que acepte una incrustación por medio de HTML.

Para esto se procedió a crear una cuenta de usuario en la plataforma de GeoGebra y se procedió a subir y publicar los respectivos materiales.

El siguiente es un pantallazo de la página principal donde se alojan los recursos. Cabe aclarar que a las representaciones realizadas en GeoGebra fue necesario aplicarles un cambio en el sentido de no mostrar el enunciado, ya que se decidió hacer este paso por medio un paquete SCORM (Shareable Content Object Reference Mode o Modelo de Referencia para Objetos de Contenido Compartible) desarrollado para ser subido a la plataforma Moodle (se explica esta decisión más adelante). También se tuvo que aplicar restricciones de movilidad de los ejes o rotación de las visualizaciones para mantener un aspecto más ordenado.

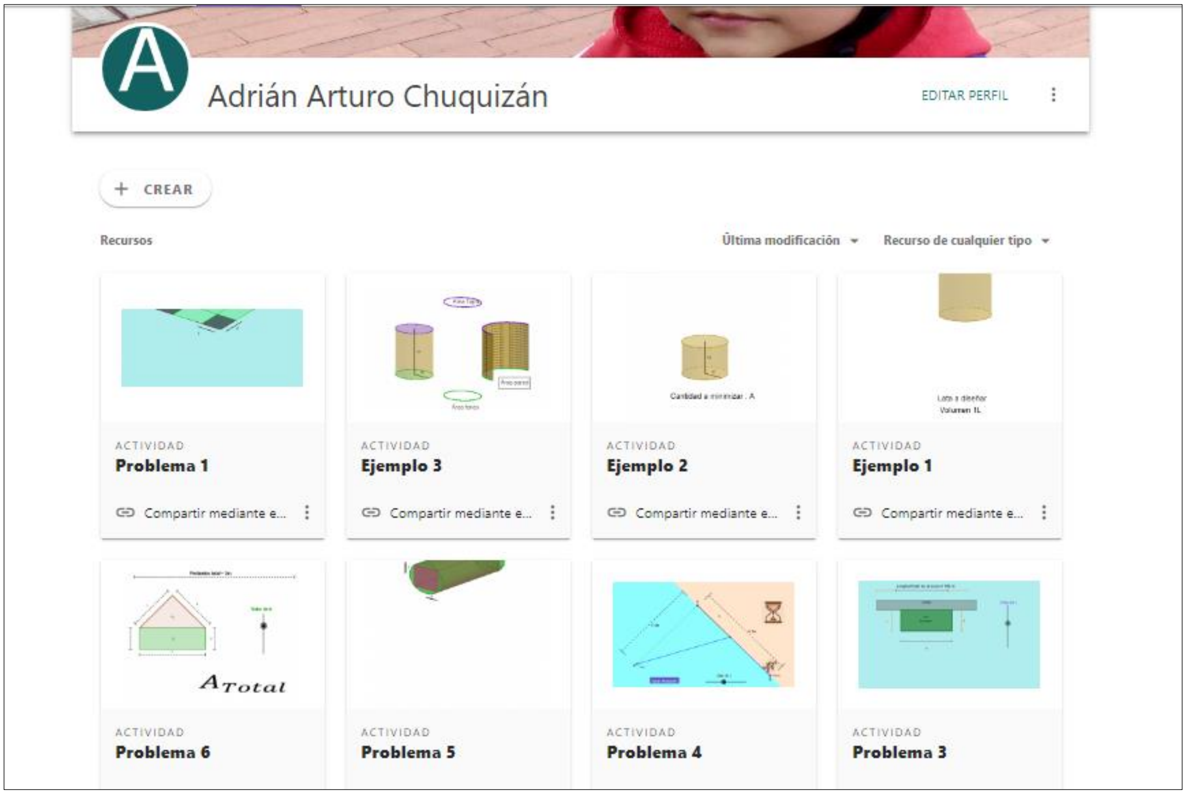


Figura 14. Recursos alojados en la página de GeoGebra

3.2.8 Creación del paquete SCORM para el grupo experimental

Una vez completado el paso anterior se vio la necesidad de empezar a probar el material dentro de alguna plataforma que ejecutara Moodle. Para ello en principio se pensó en usar sistemas gratuitos que ofrecen la creación y administración de cursos Moodle. La plataforma escogida fue MilAulas.com, en ella se creó un curso de prueba y se empezó a ensayar con las representaciones realizadas en GeoGebra. Sin embargo, esta plataforma presentaba dos grandes desventajas en su uso.

1. Muestra anuncios publicitarios molestos que no permiten una adecuada concentración.

2. Si la plataforma no se usa en algunos días, los materiales desarrollados serán eliminados.

Debido a esto se pensó en la solicitud de apertura de un curso Moodle dentro de la plataforma de la universidad. Sin embargo, mientras se esperaba este proceso, fue necesario seguir trabajando em el material didáctico digital, por lo que se buscó una solución que permitiera hacer que la creación de las actividades para Moodle fuera una actividad con mayor portabilidad e independencia del alojamiento.

Se encontró así, que una solución es la creación de paquetes SCORM. Estos paquetes son reconocidos y ejecutados por Moodle y también por otras plataformas de e-learning.

Estos paquetes se pueden crear mediante diferentes softwares, entre ellos el seleccionado en este estudio fue *eXeLearning*, que es una herramienta de código abierto para facilitar la creación de contenidos educativos mediante el uso de árboles de contenido, elementos multimedia, actividades interactivas, actividades de evaluación, etc. y que utiliza protocolos HTML y XML para su desarrollo.

Se procedió entonces al desarrollo del paquete SCORM para el grupo experimental, recordando que, por el enfoque y metodología de la investigación, se debía dar acceso a las representaciones ejecutables desarrolladas, mientras que al grupo de control no.

Los contenidos que se pretenden brindar por medio de este paquete son:

1. Una introducción acerca de los problemas de máximos y mínimos y como se relacionan con la vida cotidiana.

2. Los pasos que generalmente se siguen para la resolución de este tipo de problemas. Incluyendo en cada paso un ejemplo.

3. El enunciado de cada uno problemas de máximos y mínimos seleccionados, la representación ejecutable, algunas preguntas orientadoras y una sección de evaluación tipo selección múltiple.

A continuación, se presentan algunos pantallazos del desarrollo de este paquete SCORM

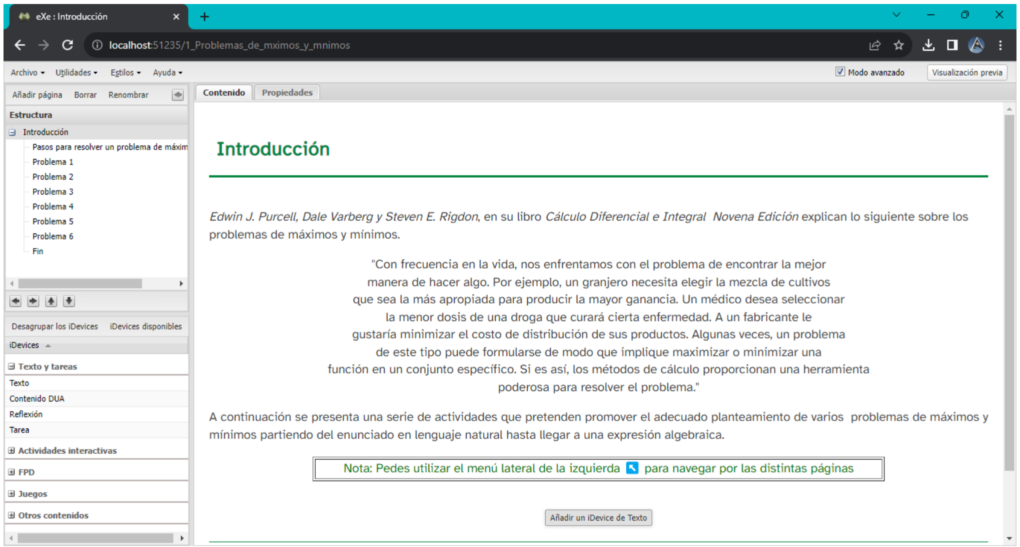


Figura 15. Sección de introducción del paquete SCORM

Figura 16. Sección de los pasos para resolver un problema de máximos y mínimos del paquete SCORM

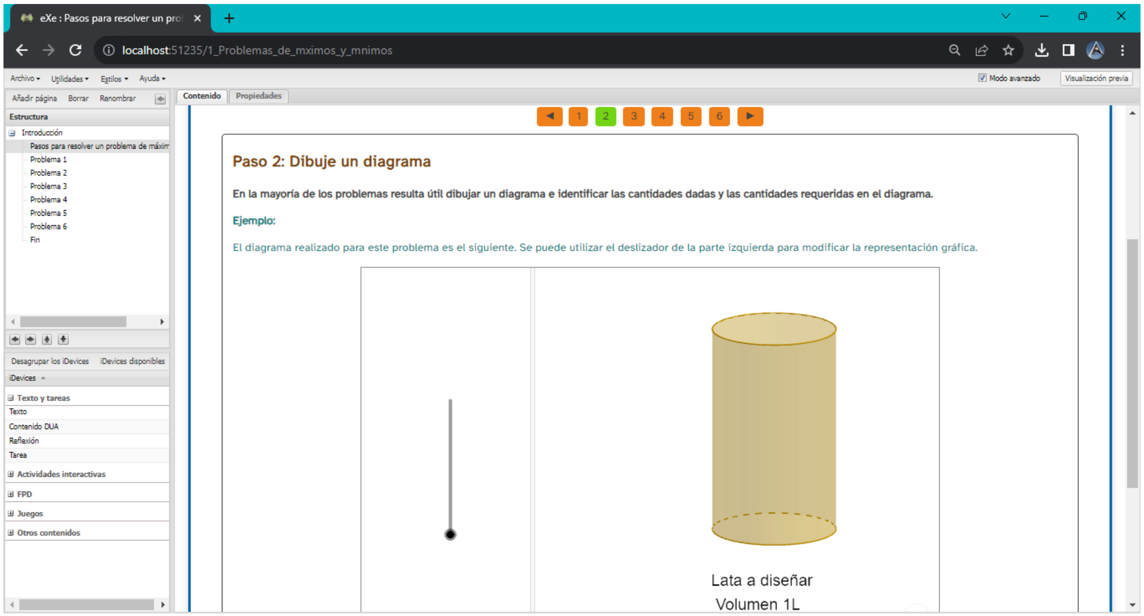


Figura 17. Sección de pasos para resolver un problema de máximos y mínimos del paquete SCORM, paso 2

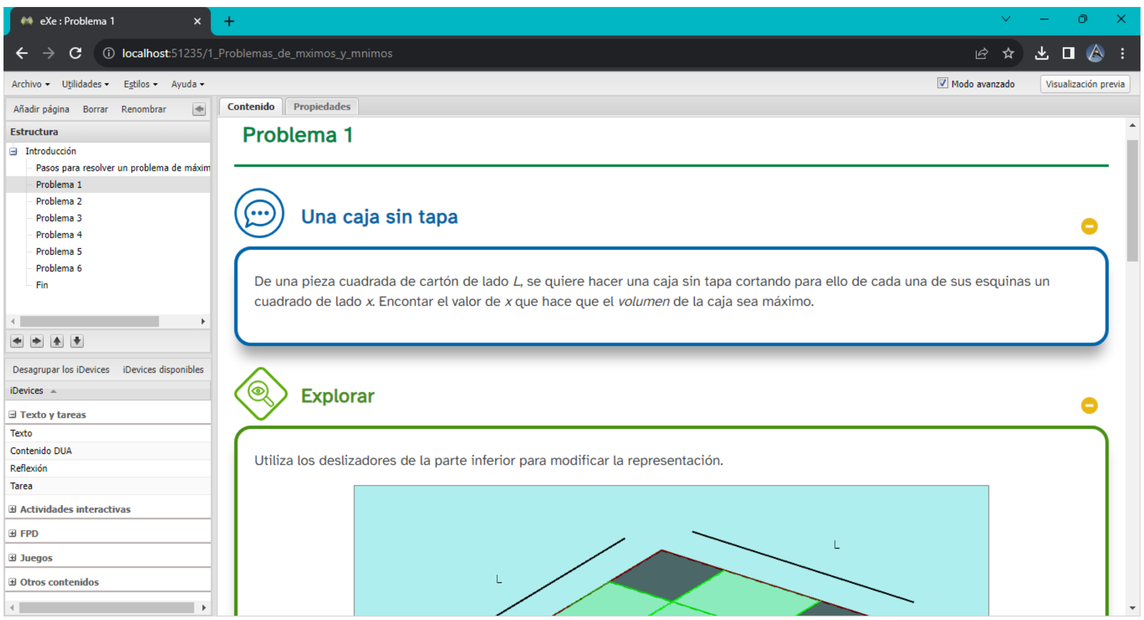


Figura 18. Enunciado del Problema 1 del paquete SCORM

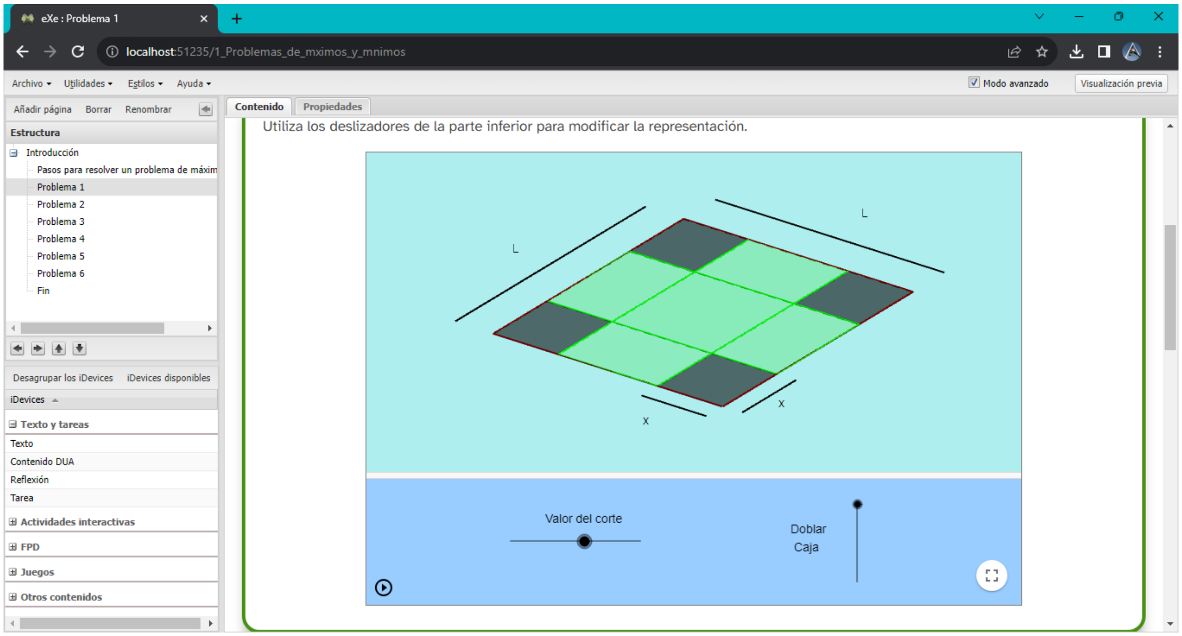


Figura 19. Representación ejecutable del Problema 1 del paquete SCORM

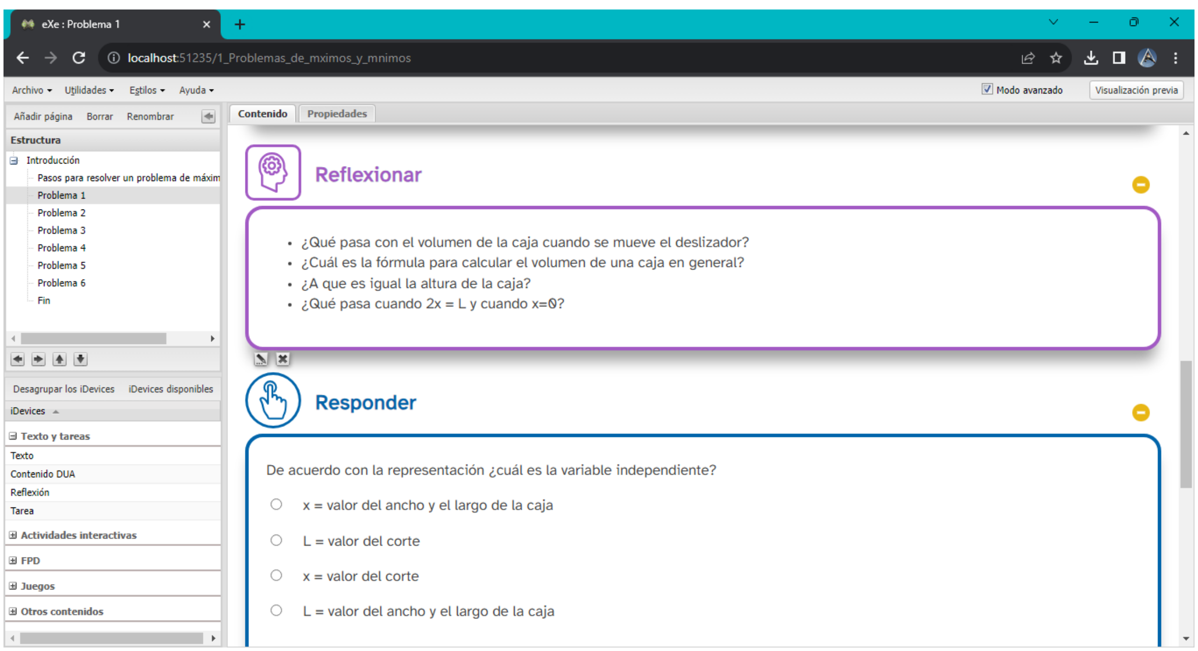


Figura 20. Sección de preguntas clave del Problema 1 del paquete SCORM

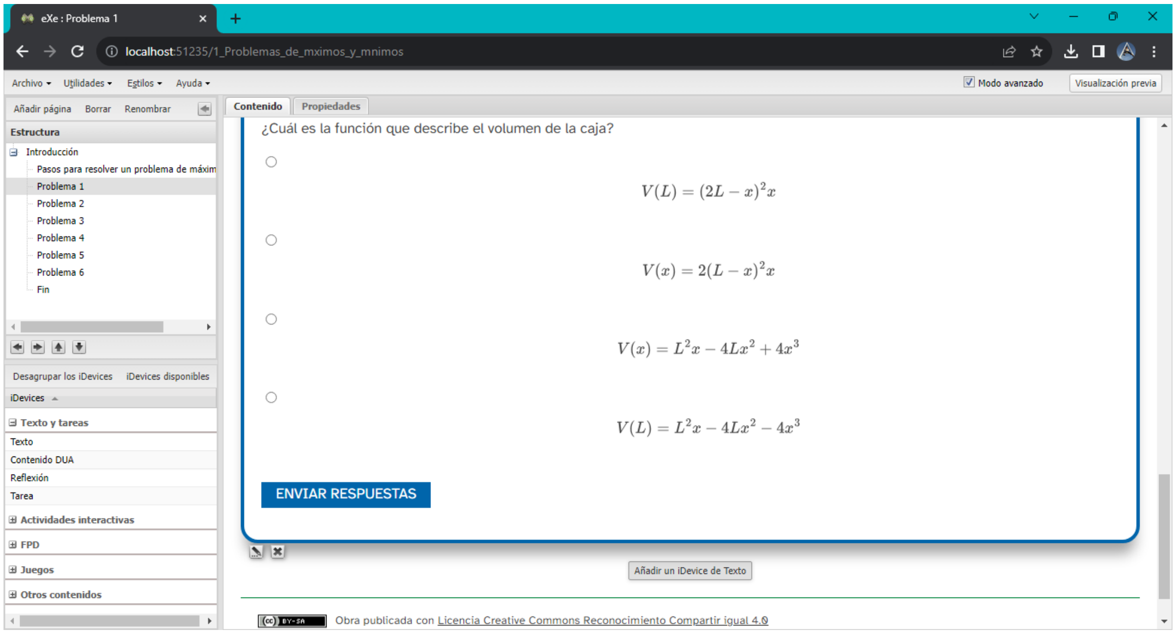


Figura 21. Sección de preguntas de selección múltiple del Problema 1 del paquete SCORM

Cabe resaltar que, para la sección de los pasos a seguir para la solución de problemas de máximos y mínimos, se desarrolló también un ejemplo utilizando GeoGebra, el ejemplo seleccionado corresponde al problema de encontrar las dimensiones de una lata en forma de cilindro circular recto con volumen dado de 1 L que minimicen el material utilizado.

Las mismas secciones que se utilizaron para el problema 1 se utilizaron para los restantes 5 problemas.

3.2.9 Creación del paquete SCORM para el grupo de control

El grupo de control no tuvo acceso a las representaciones ejecutables desarrolladas en GeoGebra, en su lugar simplemente se presentaban diagramas estáticos de los enunciados. Esto se realizó así con el fin de comprobar la influencia de la utilización de las representaciones ejecutables.

A continuación, se presenta un ejemplo de las representaciones estáticas utilizadas. Todas las demás secciones descritas en el paquete SCORM para el grupo experimental se mantienen sin ningún cambio.

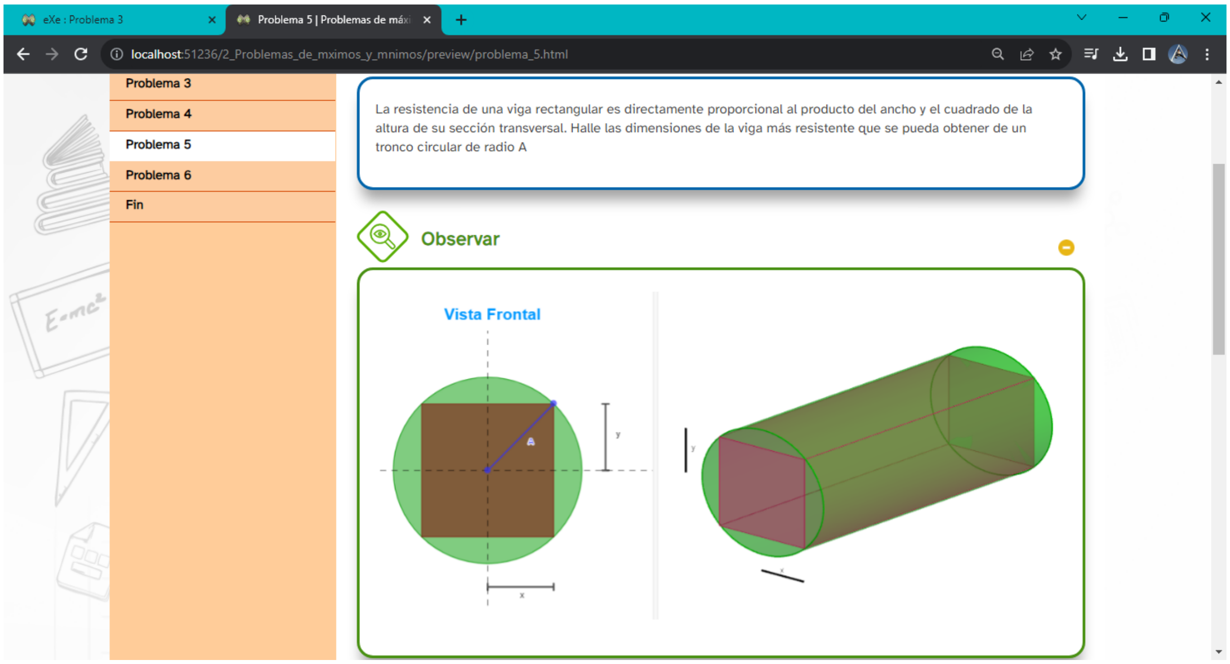


Figura 22. Ejemplo de representación estática del Problema 5 del paquete SCORM para grupo de control

3.2.10 Creación de las pruebas pretest y postest

Para el desarrollo de esta parte de la investigación se siguió la estrategia de crear un banco de preguntas en la plataforma Moodle, con el fin de agilizar el proceso de realizar los cuestionarios basados en estos problemas. Se escogieron en total 6 problemas para la creación de esta prueba, todos similares a los escogidos para el desarrollo de las representaciones ejecutables. A continuación, se detallan los problemas seleccionados, los primeros 5 corresponden al pretest y para el postest se reemplazó el problema 3 por el problema 6. Cabe resaltar que con el fin de mantener lo más parecidos el pretest y el postest se retomaron algunos problemas cambiándole únicamente los datos relevantes.

Tabla 2.

Problemas seleccionados para el pretest y el postest

#	Titulo	Enunciado
1	Cercando corrales…	Un granjero desea cercar tres corrales rectangulares adyacentes idénticos, cada uno con un área de 300 pies cuadrados. ¿Cuáles deben ser el ancho y el largo de cada corral, de modo que se ocupe la menor cantidad de valla? Si denotamos y = largo de un corral y x = ancho de un corral ¿Cuál es la expresión algebraica que describe la cantidad de valla utilizada en términos de x?
2	Cortando un alambre	Un alambre de 100 centímetros de largo se corta en dos pedazos; uno se dobla para formar un cuadrado y el otro se dobla para formar un triángulo equilátero. ¿En dónde debe hacerse el corte si la suma de las dos áreas debe ser mínima? Si denotamos como x a la distancia de corte ¿Cuál es la expresión algebraica que describe la suma de las dos áreas en función de x?
3	Haciendo una caja	Con un trozo de material rectangular, se forma una caja abierta suprimiendo de cada esquina cuadrados iguales y doblando los lados hacia arriba. Hallar las dimensiones de la caja de mayor volumen que se puede construir de esta manera, si el material tiene dimensiones a y b. Si denotamos al valor del corte en cada esquina como x, ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el volumen de la caja?
4	la lata más barata	Se hace una lata cilíndrica sin tapa para contener V cm3 de líquido. Encuentre las dimensiones que minimizan el costo del metal para hacer la lata. Si denotamos como r al radio de la base de la lata ¿Cuál es la expresión que describe el área total en función de r?

5	Otra caja, pero especial	Una caja cerrada en forma de paralelepípedo rectangular con base cuadrada tiene un volumen dado V. Si el material utilizado para el fondo cuesta 20% más por pulgada cuadrada que el material para los lados y el material de la tapa cuesta 50% más por pulgada cuadrada que cada lado, encuentre las proporciones más económicas para la caja. Si nombramos como x al lado de la base cuadrada de la caja y P al precio por pulgada cuadrada del material de los lados de la caja ¿Cuál es la expresión algebraica, en términos de x, que describe el costo total de la caja?
6	Cubriendo con plata...	Tengo suficiente plata pura como para cubrir un área de 1 metro cuadrado de superficie. Planeo cubrir una esfera y un cubo. ¿Qué dimensiones deben tener si el volumen total de los sólidos plateados debe ser máximo? Si designamos como r al radio de la esfera, ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el volumen total de los sólidos en función de r?

Con estas preguntas se crearon cuestionarios de opción múltiple y así recoger los resultados. Estas pruebas se presentan con mayor profundidad en el anexo 1.

3.3 Fase 2. Aplicación del Material Didáctico Digital a los Estudiantes

Esta fase describe las actividades realizadas con el fin de preparar lo necesario para la aplicación de todos los materiales desarrollados a los estudiantes de la asignatura Matemáticas I de la licenciatura en electrónica de la universidad Pedagógica Nacional.

3.3.1 Solicitud de permiso para trabajar con el grupo de Matemáticas I

Como primera medida se solicitó el respectivo permiso al profesor encargado de la signatura de Matemáticas I de la licenciatura en Electrónica, sin embargo, se encontró que para el semestre 2023-2 la licenciatura en electrónica no tuvo un curso particular dedicado al desarrollo de esta asignatura y que ya no era dirigida por el profesor habitual como se había hecho en anteriores semestres. Los cambios consistieron en cambio de profesor y unificación de los grupos de Matemáticas I de la licenciatura en Electrónica y licenciatura en Diseño Tecnológico, ambas pertenecientes al departamento de tecnología de la UPN.

De este modo se contactó al profesor Rodrigo Martínez, encargado de la asignatura realizando la respectiva solicitud y reiterándole que el desarrollo de estas actividades no interferiría de ninguna manera en el desarrollo de la temática que él estuviera abordando ya que todas las actividades son extra clase y el respondió con un listado de 17 estudiantes que habían concedido el permiso para participar de este estudio.

3.3.2 Solicitud de creación del curso Moodle

Como ya se mencionó anteriormente fue necesario la solicitud de creación de un curso Moodle directamente a la plataforma de universidad Pedagógica Nacional, con el fin de evitar los problemas que traen consigo el uso de plataformas gratuitas.

Es así, que se contactó con el Centro de Innovación, Desarrollo Educativo y Tecnológico de la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia (CINNDET), que afortunadamente abrieron la posibilidad de la creación de este curso como apoyo al desarrollo de este trabajo de grado.

El curso creado fue titulado TG-MATEMATICAS-AC

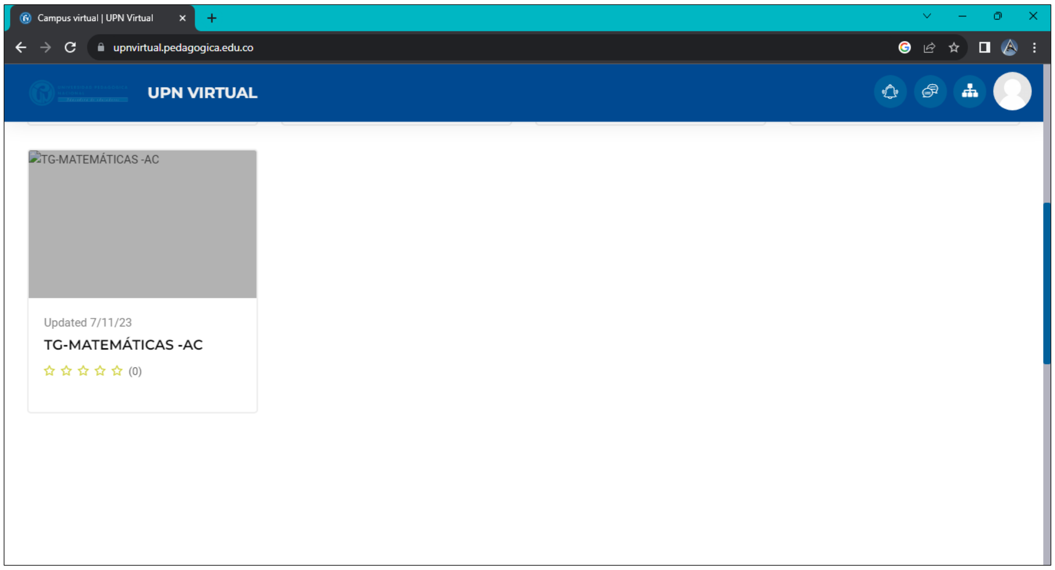


Figura 23. Curso en la plataforma Moodle asignado como apoyo al trabajo de grado

Una ventaja agregada que trajo consigo el uso de la plataforma institucional, es que los usuarios ya se encontraban registrados en el sistema global de Moodle para la universidad denominado UPN virtual, y los usuarios y contraseñas ya están asignadas para cada estudiante.

3.3.3 Matriculación de los estudiantes al curso Moodle

Se realizó la matriculación manual de los estudiantes que accedieron a participar del estudio al curso creado para este fin. Se utilizó el correo institucional y se les indicó la manera de ingresar a la plataforma.

También se realizó un sorteo al azar mediante la página web https://app-sorteos.com/es/apps/sortear-grupos-online para conformar los grupos experimental y de control.

3.3.4 Puesta en línea de los materiales en Moodle

Con todo lo anterior ya preparado se procedió a crear las actividades necesarias para la aplicación del material a los estudiantes.

Se creo una pequeña encuesta de caracterización con el fin de conocer las edades aproximadas de los estudiantes y la licenciatura a la cual pertenecen.

Luego se desarrolló el pretest en forma de cuestionario utilizando el banco de preguntas descrito anteriormente.

Se subieron los dos paquetes SCORM respectivamente para el grupo experimental y de control y se puso restricciones de acceso para cada uno de estos de manera adecuada.

Se creo el postest de misma manera que el pretest, haciendo las modificaciones pertinentes.

Por último, se envió un correo a todos los participantes indicándoles que ya estaban disponibles las actividades y haciendo las sugerencias necesarias para el ingreso a la plataforma y al curso.

3.4 Fase 3. Recolección y Análisis de los Resultados

En esta fase se hizo un seguimiento de la interacción de los estudiantes con los materiales didácticos en la plataforma Moodle, sin embargo, la participación esperada de los 17 estudiantes que aceptaron la intervención en el estudio fue considerada baja. Consiguiendo en una primera instancia únicamente 2 resultados completos.

Debido a lo anterior y con el ánimo de mejorar la participación, se insistió varias veces enviando y recordando la invitación a participar y ampliando las fechas de cierre de las actividades. También en este sentido, se elaboró un video explicando los objetivos del estudio y motivando la participación mediante la exaltación de las posibles ventajas de intervenir en el estudio.

Para seguir insistiendo en la participación se hizo la solicitud de entrega de trabajo de grado de manera extemporánea con el fin de alargar los plazos y con la expectativa de generar más participación.

Se solicitó la colaboración a la profesora Nathaly Sanchez encargada de la asignatura Fundamentos de Tecnología 1, asignatura de primer semestre, de la Licenciatura en Electrónica y a la profesora Vanessa Garrido directora de este trabajo investigativo y además encargada de la asignatura Física 1 con el fin de alcanzar una mayor difusión del estudio y ellas muy amablemente accedieron. Con esta estrategia se logró aumentar la participación de 2 estudiantes más.

Con estas nuevas condiciones se siguió insistiendo y posponiendo las fechas posibles de participación. Finalmente se cerró la participación obteniendo un total de 4 resultados completos.

Por otro lado, y tratando de dar una posible explicación a la baja participación, está el hecho de que los materiales se plantearon como una actividad totalmente virtual que no involucraba una recompensa inmediata como una nota para la asignatura, lo cual para muchos estudiantes no fue lo suficientemente motivante.

4. Resultados

Como se mencionó anteriormente los resultados obtenidos se consideran insuficientes en términos muestrales para realizar un análisis estadístico profundo y comprobar o rechazar la hipótesis mediante las técnicas adecuadas, como se tenía previsto al inicio de la investigación.

Sin embargo, de los 4 resultados obtenidos se pueden hallar indicios de la influencia de los materiales desarrollados en el proceso de aprendizaje al abordar problemas de máximos y mínimos.

En cuanto a la descripción de los estudiantes participantes que desarrollaron todas las actividades propuestas, se tiene que 3 corresponden al sexo masculino y 1 al femenino; 2 pertenecen a la Licenciatura en Electrónica y 2 a la Licenciatura en Diseño Tecnológico; 3 fueron asignados al grupo experimental y 1 al grupo de control.

Los resultados obtenidos por los estudiantes en las pruebas pretest y postest se presentan en la siguiente tabla:

Tabla 3.

Resultados de las pruebas pretest y postest

Id	Grupo	Calificación pretest/5.0	Calificación postest/5.0
Estudiante 1	G1	2.0	3.0
Estudiante 2	G2	3.0	3.0
Estudiante 3	G1	2.0	2.5
Estudiante 4	G1	1.0	2.0

En cuanto a la columna grupo, se tiene que G1: grupo experimental y G2: grupo de control.

Los datos recolectados no pueden dar información acerca de la correlación entre el uso de representaciones ejecutables y el grado de habilidad para plantear correctamente una ecuación algebraica a partir de un enunciado en lenguaje natural. Sin embargo, observando los resultados de la anterior tabla se logra evidenciar una proyección positiva hacia la propuesta de que el uso de este tipo de recursos tecnológicos en pro de la didáctica de las matemáticas es adecuado y recomendado, tal y como lo concluyen las diferentes investigaciones mostradas en la sección de antecedentes. Esto apoyado en que, mientras que para el grupo de control no se tuvo cambios en los resultados obtenidos en las pruebas pretest y postest, el promedio de calificación de la prueba postest para el grupo experimental es de 2.5 en comparación con la prueba pretest que es de 1.6, lo que indica un incremento cercano al 16% en la calificación del grupo que tuvo acceso a las representaciones ejecutables.

5. Conclusiones y recomendaciones

5.1 Conclusiones

Se logró diseñar un ambiente didáctico digital basado en representaciones ejecutables mediante el software GeoGebra, lo que permitió el abordaje de la pregunta de investigación en cuanto a la influencia que tiene el uso de este tipo de representaciones, en contraste con representaciones estáticas, al momento de abordar problemas de máximos y mínimos con el fin de extraer adecuadamente una expresión algebraica a partir de un enunciado en lenguaje natural. En este sentido se verificó la utilidad del software para crear representaciones dinámicas fácilmente integrables en ambientes e-learning.

Se aplicó el material didáctico digital a 4 de 26 estudiantes de Matemáticas 1 del departamento de Tecnología, esto permitió evidenciar que, aunque el uso de recursos tecnológicos digitales en el ámbito educativo está en aumento y tiene ventajas en contraste con la metodología tradicional de enseñanza, tal y como se expone en los antecedentes, estos recursos no son lo suficientemente motivantes para los estudiantes si no están acompañados de una orientación adecuada.

Al analizar los resultados obtenidos se pudo estimar una proyección positiva acerca de que las representaciones ejecutables promueven la habilidad de plantear ecuaciones algebraicas a partir de enunciados en lenguaje natural cuando se abordan problemas de máximos y mínimos, ya que hubo un aumento en promedio del 16% en la calificación del grupo después de haber aplicado el material.

5.2 Recomendaciones

Como recomendaciones para trabajos futuros se propone las siguientes:

1. Darle continuidad al proyecto aplicando el material desarrollado a diferentes grupos que estén cursando asignaturas referentes al calculo diferencial, procurando tener un control mas significativo sobre el grupo a fin de garantizar la participación en el estudio.

2. Extrapolar el uso de estas representaciones ejecutables a otras asignaturas en las que al abordar cualquier tipo de problemas se considere importante una visualización dinámica de sus representaciones gráficas, como por ejemplo en la Física.

3. Incluir este tipo de materiales en cursos que promueven la formación virtual con el fin de aprovechar al máximo el potencial de las representaciones ejecutables dentro de este ambiente y la disposición de los estudiantes a recibir el conocimiento de esta forma.

6. Referencias

Area, M. ULLaudiovisual - Universidad de la Laguna. (21 de marzo de 2019). *Material didáctico digital* [Archivo de video]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=znacv-W4YX4

Apostol, T. (1999). Calculus Volumen I: Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal. Reverté Ediciones, S.A. de C.V.

Arias, F. (2006). El proyecto de investigación. Introducción a la metodología científica. Editorial Episteme, C.A.

Cruces, L. y Zamora, N. (2016). Incremento del razonamiento analítico en los estudiantes de educación superior. *Revista Iberoamericana de Ciencias, 3*(7), 187-197.

del Río, L., Sanz, C. y Búcari, N. (2019). Incidence of a hypermedia educational material on the Teaching and Learning of Mathematics. *Journal of New Approaches in Educational Research (NAER Journal), 8*(1), 50-57.

Dávila, M. (2012). La derivada a partir de problemas de optimización en ambientes dinámicos creados con GeoGebra. [Tesis de maestría, Universidad de Sonora]. https://repositorioinstitucional.uson.mx/bitstream/20.500.12984/7765/1/davilaaraizamariateresam.pdf.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME, 9*(1), 143-168.

Edwars, C. y Penney D. (1996). Cálculo con Geometría analítica. Prentice Hall Hispanoamericana, S.A.

Fernández, E. (2017). Aspectos cognitivos y tareas en ambientes de geometría dinámica 2D y 3D en la geometría escolar. 140-147.

Forero, C. y López, D. (2012). Una aproximación al concepto de razón de cambio con estudiantes de grado sexto a partir de la mediación con geometría dinámica. [Trabajo de grado, Universidad Pedagógica Nacional]. http://repositorio.pedagogica.edu.co/handle/20.500.12209/117

Gómez, P. (1997). Tecnología y educación matemática. *Informática Educativa, 10*(1), 93-111.

Gutiérrez, J. y Pérez, G. (2014). Análisis de la deserción estudiantil en la Licenciatura en Electrónica de la Universidad Pedagógica Nacional. [Trabajo de grado, Universidad Pedagógica Nacional]. http://repositorio.pedagogica.edu.co/bitstream/handle/20.500.12209/1963/TE-17230.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Hernández, E. (2009). Cálculo diferencial e integral con aplicaciones. Escuela Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Jaimes, L. y Chaves, R. (2012). Propuesta de actividades para abordar problemas de mezclas en un curso de ecuaciones diferenciales mediante el apoyo de software libre “GeoGebra”. [Trabajo de grado, Universidad Pedagógica Nacional]. http://repository.pedagogica.edu.co/handle/20.500.12209/151?show=full

Moraleda, A. Bureau Veritas Formación. (6 de junio de 2016). *Diseños de Investigación Cuantitativa en Educación bajo los modelos de Campbell y Stanley* [Archivo de video]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=CoV7rHeaO40

Moreno, L. (2001). Instrumentos matemáticos computacionales. 81-86.

Nhamo, E. (2016). The contributions of Interactive Dynamic Mathematics software in probing understanding of mathematical concepts: Case study on the use GeoGebra in learning the concept of modulus functions. [Tesis doctoral, University College London].

Otero, D. (2012). Propuesta de intervención en el aula para resolver problemas de optimización relacionados con la minimización de costos, implementando como apoyo el software GEOGEBRA. [Trabajo de grado, Universidad Pedagógica Nacional]. http://repository.pedagogica.edu.co/handle/20.500.12209/118

Pereyra, N. y Herrera, C. (2019). Análisis de conversiones de registros de representación semiótica de la función lineal en estudiantes ingresantes en carrera de pregrado. *Revista Electrónica Iberoamericana de Educación en Ciencias y Tecnología,* (18), 81-103.

Purcell, E., Rigdon, S. y Varberg, D. (2007). Calculo diferencial e integral. Pearson Educación de México S.A. de C.V.

Stewart, J. (2012). Cálculo de una variable Transcendentes tempranas. Cengage Learning Editores, S.A. de C.V.

Swokowski, E. (1989). Cálculo con geometría analítica. Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V.

Thomas, G. (2010). Cálculo una variable. Pearson Educación de México.

Vargas, R. (2007). Cálculo I problemas resueltos. Pontificia Universidad Católica de Chile.

Viedma, J. (1962). Introducción al cálculo infinitesimal. Serie didáctica de matemática contemporánea, Norma.

Zuluaga, F. (2020). Comprensión del concepto de función a partir de representaciones por estudiantes de grado noveno mediante situaciones y un ejecutable virtual. [Tesis de maestría, Universidad de Antioquia].

http://bibliotecadigital.udea.edu.co/handle/10495/17400

7. Anexos

Anexo 1. Pruebas pretest y postest desarrolladas para el estudio.

Prueba pretest.

La siguiente actividad presenta varios problemas de optimización para los cuales se necesita obtener una exprexión algebráica que modela el comportamiento de una cantidad específica en términos de otra. Esta ecuación constituye la base primordial para encontrar la solución del problema, puesto que al contar con ésta y aplicarle un proceso de derivación, se encontrará la respuesta al problema enunciado.

Es importante entender que para términos de esta actividad solamente se pide realizar las acciones necesarias hasta llegar a obtener la expresión algebráica mencionada, evitando cualquier proceso de derivación.

Algunas recomendaciones para conseguir dicha ecuación que aprecen en el libro *Cálculo de una Variable Décimosegunda Edición* del autor *George B. Thomas* son las siguientes:

Resolución de problemas aplicados a la optimización

1. *Lea el problema.* Lea el problema hasta que lo comprenda. ¿Qué datos se dan? ¿Cuál es la cantidad desconocida que debe optimizarse?
2. *Elabore un dibujo.* Anote el nombre de cada parte que pueda ser importante para el problema.
3. *Introduzca variables.* Elabore una lista de las relaciones en el dibujo y en el problema como una ecuación o una expresión algebraicas; luego, identifique la variable desconocida.
4. *Escriba una ecuación para la cantidad desconocida.* Si puede, exprese la incógnita como una función de una sola variable o con dos ecuaciones con dos incógnitas. Esto tal vez requiera mucha manipulación algebraica.
5. *Pruebe los puntos críticos y los extremos del intervalo en el dominio de la incógnita.* Utilice lo que conoce acerca de la forma de la gráfica de la función. Con base en la primera y la segunda derivadas identifique y clasifique los puntos críticos de la función.

Para los problemas enunciados a continuación, por favor determine la expresión que modela la situación en términos de una sola variable . Para ello, realice el procedimiento que considere necesario (bosquejos, expresiones, desarrollos algebráicos, diagramas, etc.) en una hoja a mano, luego tómele una fotografía al procedimiento desarrollado para cada problema y súbalo como evidencia al final de esta actividad en el espacio designado para ello.

Cercando corrales...

Un granjero desea cercar tres corrales rectangulares adyacentes idénticos, cada uno con un área de 300 pies cuadrados. ¿Cuáles deben ser el ancho y el largo de cada corral, de modo que se ocupe la menor cantidad de valla?

Si denotamos *y = largo de un corral* y *x = ancho de un corral*

¿Cuál es la expresión algebráica que describe la cantidad de valla utilizada en términos de x?

Nota Importante: Recuerde realizar el procedimiento en una hoja de papel y tomarle una fortografia tanto a este problema como a cada uno de los siguientes. Es de vital importancia.

Seleccione una:

○

$$C(x) = 6x + \frac{1200}{x}$$

○

$$C(x) = 4x + \frac{1200}{x}$$

○

$$C(x) = 4x + \frac{300}{x}$$

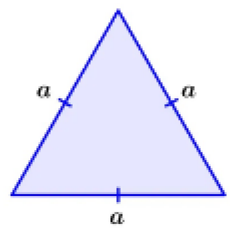
○

$$C(x) = 6x + \frac{300}{x}$$

Cortando un alambre...

Un alambre de 100 centímetros de largo se corta en dos pedazos; uno se dobla para formar un cuadrado y el otro se dobla para formar un triángulo equilátero. ¿En dónde debe hacerse el corte si la suma de las dos áreas debe ser mínima?

Ayuda: Recuerde que para un triángulo equilátero se tiene



$$A = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

Si denotamos como *x* a al distancia de corte ¿Cuál es la expresión algebráica que describe la suma de las dos áreas en función de x?

Seleccione una:

○ $$A(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{\sqrt{3}}{3}(100 - x)^2$$

○ $$A(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{\sqrt{3}}{36}(100 - x^2)$$

○ $$A(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{\sqrt{3}}{36}(100 - x)^2$$

○ $$A(x) = \frac{x^2}{9} + \frac{\sqrt{3}}{16}(100 - x)^2$$

Haciendo una caja...

Con un trozo de material rectangular, se forma una caja abierta suprimiendo de cada esquina cuadrados iguales y doblando los lados hacia arriba. Hallar las dimensiones de la caja de mayor volumen que se puede construir de esta manera, si el material tiene dimensiones a y b.

Si denotamos al valor del corte en cada esquina como *x*, ¿Cuál es la expresión algebráica que representa el volumen de la caja?

Seleccione una:

○

$$V(x) = 4x^3 + 2(a-b)x^2 + abx$$

○

$$V(x) = 4x^3 + 2(a+b)x^2 - abx$$

○

$$V(x) = 4x^3 - 2(a-b)x^2 - abx$$

○

$$V(x) = 4x^3 - 2(a+b)x^2 + abx$$

La lata más barata...

Se hace una lata cilíndrica sin tapa para contener V cm³ de líquido. Encuentre las dimensiones que minimizan el costo del metal para hacer la lata.

Si denotamos como ***r*** al radio de la base de la lata ¿Cuál es la expresión que describe el área total en función de ***r***?

Seleccione una:

○

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2\pi V}{r}$$

○

$$A(r) = \pi r^2 + \frac{2V^2}{r}$$

○

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$$

○

$$A(r) = \pi r^2 + \frac{2V}{r}$$

Prueba postest.

La siguiente actividad presenta varios problemas de optimización para los cuales se necesita obtener una exprexión algebráica que modela el comportamiento de una cantidad específica en términos de otra. Esta ecuación constituye la base primordial para encontrar la solución del problema, puesto que al contar con ésta y aplicarle un proceso de derivación, se encontrará la respuesta al problema enunciado.

Es importante entender que para términos de esta actividad solamente se pide realizar las acciones necesarias hasta llegar a obtener la expresión algebráica mencionada, evitando cualquier proceso de derivación.

Algunas recomendaciones para conseguir dicha ecuación que aprecen en el libro *Cálculo de una Variable Décimosegunda Edición* del autor *George B. Thomas* son las siguientes:

Resolución de problemas aplicados a la optimización

1. *Lea el problema.* Lea el problema hasta que lo comprenda. ¿Qué datos se dan? ¿Cuál es la cantidad desconocida que debe optimizarse?
2. *Elabore un dibujo.* Anote el nombre de cada parte que pueda ser importante para el problema.
3. *Introduzca variables.* Elabore una lista de las relaciones en el dibujo y en el problema como una ecuación o una expresión algebraicas; luego, identifique la variable desconocida.
4. *Escriba una ecuación para la cantidad desconocida.* Si puede, exprese la incógnita como una función de una sola variable o con dos ecuaciones con dos incógnitas. Esto tal vez requiera mucha manipulación algebraica.
5. *Pruebe los puntos críticos y los extremos del intervalo en el dominio de la incógnita.* Utilice lo que conoce acerca de la forma de la gráfica de la función. Con base en la primera y la segunda derivadas identifique y clasifique los puntos críticos de la función.

Para los problemas enunciados a continuación, por favor determine la expresión que modela la situación en términos de una sola variable . Para ello, realice el procedimiento que considere necesario (bosquejos, expresiones, desarrollos algebráicos, diagramas, etc.) en una hoja a mano, luego tómele una fotografía al procedimiento desarrollado para cada problema y súbalo como evidencia al final de esta actividad en el espacio designado para ello.

Cortando un alambre...

Un alambre de 100 centímetros de largo se corta en dos pedazos; uno se dobla para formar un cuadrado y el otro se dobla para formar un círculo. ¿En dónde debe hacerse el corte si la suma de las dos áreas debe ser mínima?

Si denotamos como *x* a al distancia de corte ¿Cuál es la expresión algebráica que describe la suma de las dos áreas en función de x?

Nota importante: Recuerde realizar el procedimiento en una hoja de papel y luego tomarle una fotografía a cada problema. Es muy importante.

Seleccione una:

- $$A(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{(100-x)^2}{2\pi}$$

- $$A(x) = \frac{100-x}{16} + \frac{x^2}{2\pi}$$

- $$A(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{(100-x)^2}{4\pi}$$

- $$A(x) = \frac{100-x}{16} + \frac{2x^2}{\pi}$$

Cubriendo con plata...

Tengo suficiente plata pura como para cubrir un área de 1 metro cuadrado de superficie. Planeo cubrir una esfera y un cubo. ¿Qué dimensiones deben tener si el volumen total de los sólidos plateados debe ser máximo?

Ayuda: Recuerde que para una esfera se tiene $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ y $A = 4\pi r^2$

Si designamos como ***r*** al radio de la esfera, ¿Cuál es la expresión algebráica que representa el volumen total de los sólidos en función de ***r***?

Seleccione una:

○

$$V(x) = \frac{4}{3}\pi r^3 + \left(\sqrt{\frac{1-4\pi r^2}{6}}\right)^3$$

○

$$V(x) = \frac{4}{3}\pi r^2 + \left(\sqrt{\frac{1-4\pi r^2}{6}}\right)^2$$

○

$$V(x) = \frac{4}{3}\pi r^3 + \left(\sqrt{\frac{1-3\pi r^2}{6}}\right)^3$$

○

$$V(x) = \frac{4}{3}\pi r^2 + \left(\sqrt{\frac{1-3\pi r^2}{6}}\right)^2$$

La lata más barata...

Se hace una lata cilíndrica con tapa para contener V cm³ de líquido. Encuentre las dimensiones que minimizan el costo del metal para hacer la lata.

Si denotamos como ***r*** al radio de la base de la lata ¿Cuál es a expresión que describe el área total en función de ***r***?

Seleccione una:

○

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$$

○

$$A(r) = \pi r^2 + \frac{2V}{r}$$

○

$$A(r) = \pi r^2 + \frac{V}{r}$$

○

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{V}{r}$$

Cercando corrales...

Un granjero desea cercar dos corrales rectangulares adyacentes idénticos, cada uno con un área de A metros cuadrados. ¿Cuáles deben ser el ancho y el largo de cada corral, de modo que se ocupe la menor cantidad de valla?

Si denotamos *y = largo de un corral* y *x = ancho de un corral*

¿Cuál es la expresión algebráica que describe la cantidad de valla utilizada en términos de x?

Seleccione una:

○ $$C(x) = 3x^2 + \frac{4A}{x}$$

○ $$C(x) = 4x + \frac{3A}{x}$$

○ $$C(x) = 4x^2 + \frac{3A}{x}$$

○ $$C(x) = 3x + \frac{4A}{x}$$

La caja mas barata...

Una caja cerrada en forma de paralelepípedo rectangular con base cuadrada tiene un volumen de 300 cm^3. Si el material utilizado para el fondo cuesta 50% más por centímetro cuadrado que el material para los lados y el material de la tapa cuesta 30% más por centímetro cuadrado que cada lado, encuentre las proporciones más económicas para la caja.

Si nombramos como ***x*** al lado de la base cuadrada de la caja y ***P*** al precio por centímetro cuadrado del material de los lados de la caja ¿Cuál es la expresión algebráica, en términos de x, que describe el costo total de la caja?

Seleccione una:

○

$$C(x) = P(2.8x^2 + \frac{1200}{x})$$

○

$$C(x) = P(2x^2 + \frac{1200}{x})$$

○

$$C(x) = P(2x + \frac{1200}{x^2})$$

○

$$C(x) = P(2.8x + \frac{1200}{x^2})$$