

ANÁLISIS DE LOS COEFICIENTES DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA DESDE UNA MIRADA
EXPERIMENTAL

CRISTIAN RENNE GUTIÉRREZ

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D.C.

2024

ANÁLISIS DE LOS COEFICIENTES DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA DESDE UNA
MIRADA EXPERIMENTAL

Trabajo de grado presentado como requisito para optar por el título de Licenciado en
Matemáticas

Trabajo de grado asociado al estudio de un asunto de interés profesional del estudiante

Cristian Renne Gutierrez

C.C. 1013628880

Cód. 2014240025

Director

Orlando Aya Corredor

Docente Departamento de Matemáticas U.P.N

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología Departamento de Matemáticas

Bogotá, D.C. 2024

Contenido

1.	Justificación	7
2.	Objetivos	8
2.1	Objetivo General:	8
2.2	Objetivos específicos:	8
3.	Antecedentes	9
4.	Marco Teórico	23
4.1	Marco Matemático	24
4.2	Marco Físico	26
4.3	Marco Didáctico	32
4.4	Marco Tecnológico	33
5.	Diseño de la propuesta	35
6.	Contexto de aplicación de la propuesta y pregunta orientadora	37
6.1	Pregunta Orientadora	38
7.	Implementación de la propuesta	39
8.	Análisis de resultados	46
9.	Conclusiones y posibles desarrollos	78
10.	Referencias	82
11.	Anexos	84
	Anexo A. Herramientas matemáticas	84
	Anexo B. Fase de Exploración en Tracker	92
	Anexo C. Refuerzo del uso de Excel	96
	Anexo D. Taller educativo N°1	100
	Anexo E. Taller educativo N°2	111
	Anexo F. Taller educativo N°3	122
	Anexo G. Taller educativo N°4	147
	Anexo H. Experimento Simulado II, III, IV, V	173

Anexo I. Talleres Entregados a los Estudiantes.....	181
---	-----

Introducción

El estudio de la función cuadrática y sus coeficientes ha sido de gran relevancia a lo largo de la historia de las matemáticas y la física, especialmente en el contexto de la cinemática. A lo largo de los siglos, autores como Nicolás de Oresme y Galileo Galilei contribuyeron significativamente a la comprensión del movimiento uniformemente acelerado y al desarrollo de herramientas matemáticas que, hasta el día de hoy, son fundamentales en diversas áreas del conocimiento. Estas contribuciones han influido en el enfoque educativo actual, en el que se busca conectar los fenómenos del mundo real con el aprendizaje matemático.

En el ámbito educativo colombiano, los documentos curriculares como los Lineamientos Curriculares, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas y los Derechos Básicos de Aprendizaje, establecen como prioridad el desarrollo de competencias fundamentales en los estudiantes, tales como el razonamiento, la resolución de problemas, la argumentación y la modelación de fenómenos de la realidad. Estas competencias buscan que los estudiantes utilicen las matemáticas de manera significativa, aplicando conceptos abstractos a situaciones de su entorno cotidiano y contribuyendo así a la mejora de su comprensión del mundo y de sus condiciones de vida.

Siguiendo el enfoque del aprendizaje significativo propuesto por Ausubel (2002), el presente proyecto se enmarca en la idea de que el conocimiento matemático debe construirse a partir de los saberes previos del estudiante, en un contexto que favorezca la integración de nuevos conceptos de manera comprensible y útil. Este trabajo se centra en el diseño e implementación de una propuesta didáctica para estudiantes de grado noveno, en la cual se estudian los coeficientes de la función cuadrática a través de la experimentación con el movimiento parabólico y el plano inclinado. La propuesta pretende vincular los conocimientos matemáticos con fenómenos de la realidad, utilizando una metodología basada en simulaciones

vivencias experimentales que permitan una comprensión más profunda y significativa de los conceptos involucrados.

El propósito principal de este proyecto es generar una herramienta pedagógica que no solo mejore la comprensión de los estudiantes sobre la función cuadrática, sino que además promueva la aplicación de estos conocimientos en situaciones futuras, facilitando la construcción de nuevos conceptos y procedimientos matemáticos en un contexto que fomente el pensamiento crítico y la resolución de problemas.

1. Justificación

El interés por el estudio de la función cuadrática, sus coeficientes a , b y c , y sus variaciones surgió en el semestre 2014-1, cuando cursaba la licenciatura en matemáticas en la Universidad La Gran Colombia y formaba parte del semillero de investigación *Mathema*, creado por el profesor Carlos León. Durante este periodo, participé en la construcción y presentación del trabajo titulado *El laboratorio de física: un escenario de resignificación matemática en la UniAgustiniana*. Este proyecto proponía una metodología en la que la física se entendía como un escenario para resignificar conceptos matemáticos y facilitar su apropiación. En el segundo semestre de 2014, ingresé a la Universidad Pedagógica Nacional, y continué con la inquietud de cómo vincular lo realizado en la investigación con el profesor León y la función cuadrática. Así, en este trabajo de grado, se aborda el estudio de la función cuadrática, sus coeficientes y sus variaciones a partir de la experimentación.

El objetivo de este proyecto es diseñar e implementar una propuesta didáctica para estudiantes de grado noveno del Colegio Parroquial Nuestra Señora, que permita analizar los coeficientes de la función cuadrática en relación con el movimiento parabólico, desde una perspectiva simulada y experimental, modelando un fenómeno de la realidad.

2. Objetivos

2.1 Objetivo General:

- Diseñar e implementar una propuesta didáctica para estudiantes de grado noveno del Colegio Parroquial de Nuestra Señora que permita el análisis de los coeficientes de la función cuadrática a partir del movimiento parabólico desde una perspectiva simulada, experimental y que modele un fenómeno de la realidad.

2.2 Objetivos específicos:

- Establecer un vínculo entre la matemática y la física para resignificar los parámetros de una función cuadrática.
- Analizar la función cuadrática como un concepto que modela fenómenos de la realidad.
- Presentar una propuesta para el aprendizaje significativo de la función cuadrática.

3. Antecedentes

Los antecedentes se presentan a través de tres componentes, la histórica, las investigaciones realizadas sobre la enseñanza de función cuadrática experimentalmente y la relación que la experimentación tiene con la teoría del aprendizaje significativo y su correspondencia con los documentos curriculares nacionales e internacionales.

En la componente histórica se mencionan a dos autores importantes precursores de lo que hoy en día se llama la cinemática, el primero, es Nicolas de Oresme quién trabajó, a finales del siglo XIV, en caracterizar las variaciones de magnitudes pensando un poco desde la perspectiva de la física aristotélica; y por otra parte Galileo Galilei en el descubrimiento del movimiento libre de los cuerpos graves, confirmando que el movimiento de estos cuerpos es uniformemente acelerado. El primer autor demostró el Teorema del valor medio o Ley de Merton que establece que “un cuerpo en movimiento uniformemente acelerado recorre, en un determinado intervalo de tiempo, el mismo espacio que sería recorrido por un cuerpo que se desplazara con velocidad constante e igual a la velocidad media del primero” (Freixenet, 2017, p. 88); luego Galileo demostró geométricamente de manera idéntica la idea probada por Oresme frente a la Ley de Merton. Galileo marcó el inicio de la física renacentista a inicios del siglo XVII con el estudio de la caída de los graves (cuerpos pesados) y el lanzamiento de proyectiles, y es considerado como el padre de la ciencia moderna por la introducción de la metodología experimental que partía de observaciones y hechos, sometiéndolos a condiciones controladas y medibles para luego formular hipótesis y posteriormente determinar leyes (Freixenet, 2017, p. 90).

En cuanto a las investigaciones realizadas sobre la enseñanza de la función cuadrática usando experimentos reales o simulados, se da apertura con la Tesis “*modelación de la función cuadrática mediada por Tracker en estudiantes de quinto grado de secundaria*” (Espinosa, 2020). El objetivo de dicho estudio fue “analizar como los estudiantes de quinto grado de

secundaria modelan la función cuadrática al resolver una actividad mediada por Tracker” (Espinosa, 2020, p. 2). La actividad trata de buscar un modelo matemático del movimiento vertical de un objeto que se desliza en un plano inclinado; la metodología usada es el ciclo de modelación propuesto por Haines, C., Galbraith, P., Blum, W. y Khan, S. (2007) consiste en analizar siete fases: comprensión, simplificación/estructuración, matematización, resolución matemática, interpretación, validación y comunicación. Para el desarrollo de estas fases trabajan con una guía propuesta por Gallart (2016) consistente en una serie de preguntas que permiten hacer el tránsito entre las fases del proceso de modelación.

En segunda instancia está el trabajo de grado hecho por Vargas (2011) titulado el concepto de función y sus aplicaciones en situaciones relacionadas con fenómenos físicos, que conducen a un modelo cuadrático, una propuesta para trabajar en el grado noveno. En esta propuesta didáctica el foco central es la modelación de fenómenos físicos, que permitan llegar a modelos cuadráticos mediante el análisis de las variables, planteamiento de hipótesis y su verificación por medio de experimentos directos o el uso de simuladores. En esta propuesta se presentan dos unidades didácticas. La primera aborda los conocimientos previos que tiene el estudiante como el de función, parejas ordenadas, formas de representar una función, dominio, rango, variable independiente y dependiente y la segunda unidad en actividades a desarrollar donde se abordan conceptos como función cuadrática, formas de representación, evaluación, puntos de corte con los ejes, máximo y mínimo, comportamiento de los parámetros en la función cuadrática. Se presenta un taller de conocimientos previos de tipo instruccional, con la intención construir gráficas de funciones cuadráticas donde deben realizar el tránsito entre registros de representación pasando del algebraico al tabular y de este al gráfico utilizando papel y lápiz. Luego, deben construir en el simulador varias gráficas cuyo objetivo es analizar las similitudes, diferencias en cuanto a concavidad, eje de simetría, puntos de corte, mínimos y máximos potenciando así la facilidad del simulador para hacer las gráficas de varias

funciones de manera simultánea. Es importante resaltar que debido al uso de programa Tracker, algunas fases no fueron muy observables y por ende difíciles de analizar, eso conlleva a hacer un replanteamiento de las actividades para futuros proyectos.

La Relación Entre El Aprendizaje Significativo, Los Estándares Nacionales e Internacionales.

Como teoría epistemológica se asume la postura de Ausubel de la teoría del aprendizaje significativo, se analiza el contexto de los lineamientos curriculares y los estándares básicos en competencias de matemáticas y el modelo pedagógico del colegio elegido para este proyecto de grado. Ausubel (2002) menciona que:

El aprendizaje del alumno depende de la estructura cognitiva previa que se relaciona con la nueva información, debe entenderse, por estructura cognitiva al conjunto de conceptos, ideas que un individuo posee en un determinado campo de conocimiento, así como su organización. (p. 1)

y caracteriza al proceso logrado por aprendizaje significativo de la siguiente manera:

El aprendizaje es significativo cuando los contenidos son relacionados de modo no arbitrario y sustancial (no al pie de la letra) con lo que el alumno ya sabe. Por relación sustancial y no arbitraria se debe entender que las ideas se relacionan con algún aspecto existente específicamente relevante de la estructura cognoscitiva del alumno, como una imagen, un símbolo ya significativo, un concepto o una proposición. (Ausubel, 2002, p.46)

Esto indica que, en el acto educativo, se debe considerar los conocimientos previos que el estudiante tiene, y así poder interactuar con la nueva información y cómo ella se ha de incorporar a la estructura cognitiva de la persona.

Según Ausubel (2002) algunas condiciones para favorecer la construcción de aprendizaje significativo son:

- Material potencialmente significativo, esto quiere decir que el material debe relacionarse de manera no arbitraria y sustancial (no al pie de la letra) con la estructura cognoscitiva que el estudiante tiene, y que para él tenga un

significado lógico, ósea que pueda ser relacionable con las ideas que tenga en su estructura cognitiva.

- Cuando el significado potencial se convierte en contenido cognoscitivo nuevo, diferenciado e idiosincrático se dice que el aprendizaje es significativo.
- Disposición para el aprendizaje significativo, es decir que el estudiante muestre interés para relacionar de manera sustancial y no literal el conocimiento nuevo con su estructura cognitiva.

Así mismo Ausubel (2002) plantea que el aprendizaje significativo no es la simple conexión de la información nueva con la que ya existe en nuestra estructura cognitiva. El aprendizaje significativo es la modificación y evolución de la nueva información en la estructura cognoscitiva del alumno. Es importante mencionar que existen tres tipos de aprendizaje significativo a saber:

- Aprendizaje de representaciones: es la atribución de significados a determinados símbolos; al respecto Ausubel menciona lo siguiente:

“Ocurre cuando se igualan en significado símbolos arbitrarios con sus referentes (objetos, eventos, conceptos) y significan para el alumno cualquier significado al que sus referentes aludan” (Ausubel, 2002, p.46).

- Aprendizaje de conceptos: los conceptos se definen como *"objetos, eventos, situaciones o propiedades de que posee atributos de criterios comunes y que se designan mediante algún símbolo o signos"*. Los conceptos son adquiridos a través de dos procesos: Formación y asimilación. El primero se obtiene mediante la experiencia directa, siguiendo etapas, formulando y comprobando hipótesis, y el segundo se da por una ampliación del vocabulario, porque el estudiante puede definir los conceptos usando combinaciones que ya tiene en su estructura cognitiva (Ausubel, 2002, p. 61).

- Aprendizaje de proposiciones: el aprendizaje de proposiciones implica la combinación y relación de varias palabras cada una de las cuales constituye un referente unitario, luego estas se combinan de tal forma que la idea resultante es más que la simple suma de los significados de las palabras componentes individuales, produciendo un nuevo significado que es asimilado a la estructura cognoscitiva. Es decir, que una proposición potencialmente significativa, expresada verbalmente, como una declaración que posee significado denotativo (las características evocadas al oír los conceptos) y connotativo (la carga emotiva, actitudinal e idiosincrática provocada por los conceptos) de los conceptos involucrados, interactúa con las ideas relevantes ya establecidas en la estructura cognoscitiva y, de esa interacción, surgen los significados de la nueva proposición (Ausubel, 2002, p.6).

De acuerdo con la teoría del aprendizaje significativo, este tipo de aprendizaje se alcanza cuando los nuevos conocimientos se integran de manera coherente con las estructuras cognitivas previas del estudiante. Esto implica que el proceso de aprendizaje no puede ocurrir de forma aislada; requiere de un conjunto de herramientas clave, como el contexto en el que se desarrolla el conocimiento, el escenario en el que se imparte, y, fundamentalmente, los conocimientos previos del alumno. Estos elementos permiten que el estudiante construya un entendimiento profundo y significativo, en lugar de simplemente memorizar información de manera superficial.

Para que el aprendizaje sea verdaderamente significativo, es esencial que el estudiante pueda relacionar los nuevos conceptos con lo que ya sabe, estableciendo conexiones que faciliten una comprensión más rica y duradera. Este tipo de aprendizaje no solo promueve el desarrollo cognitivo, sino que también resulta útil en el largo plazo, ya que permite a los estudiantes aplicar los conocimientos adquiridos en situaciones futuras. Además, estos

aprendizajes, particularmente en matemáticas, facilitan la construcción de nuevos conceptos y procedimientos, promoviendo la transferencia de conocimientos y el pensamiento crítico, elementos fundamentales en el desarrollo de habilidades para resolver problemas complejos en diversos contextos.

En la segunda parte de este capítulo se hace una revisión bibliográfica de los documentos curriculares nacionales e internacionales.

Documentos Curriculares Nacionales e Internacionales

Los documentos curriculares colombianos, como los Lineamientos Curriculares, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas y los Derechos Básicos de Aprendizaje, tienen como objetivo desarrollar en los estudiantes competencias y procesos matemáticos fundamentales, tales como el saber, el saber hacer, el razonamiento, la resolución de problemas, la comunicación, la argumentación y la modelación de fenómenos de la realidad. Estas competencias buscan que los estudiantes apliquen las matemáticas en su entorno cotidiano, otorgando significado a conceptos abstractos que, en muchas ocasiones, se quedan en el ámbito teórico. Al vincular las matemáticas con la realidad, no solo se mejora la comprensión de los estudiantes sobre el mundo que los rodea, sino que también se contribuye a mejorar sus condiciones de vida.

El primer documento curricular que se aborda son los lineamientos curriculares, el cual determina que uno de los conocimientos básicos es el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos analíticos que, para la educación actual, comporta nuevos retos:

Superar la enseñanza de contenidos matemáticos fragmentados y compartimentalizados, para ubicarse en el dominio de un campo conceptual, que involucre conceptos y procedimientos interestructurados y vinculados que permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad práctica del hombre, como de las ciencias y las propiamente matemáticas donde la variación se encuentre como sustrato de ellas. (MEN, 1998, p.50)

Así, los contenidos matemáticos que se sugieren desde los lineamientos para abordar, para los grados octavo y noveno son: funciones, modelación, variables, magnitudes, formas de representar una función como gráfica, tabular, algebraica y verbal.

Por otra parte, según el Ministerio de Educación Nacional es relevante tener diversos registros de representación de los objetos matemáticos, en particular para las funciones se tiene como un primer registro el dado por las tablas y desde este avanzar a nuevos registros:

Las tablas se pueden usar posteriormente para llevar a los estudiantes a la graficación de situaciones problema de tipo concreto, aunque quede restringida al primer cuadrante. La identificación de la variable independiente y dependiente es más significativa cuando se inicia desde la representación de situaciones concretas. Más adelante se formaliza el sistema cartesiano con el aprendizaje de su sintaxis.

Por su parte, las gráficas cartesianas también pueden ser introducidas tempranamente en el currículo. Ellas hacen posible el estudio dinámico de la variación. La relación explícita entre las variables que determinan una gráfica puede ser iniciada con situaciones de variación cualitativa y con la identificación de nombres para los ejes coordenados. (MEN, 1998, p.50)

De acuerdo con lo anterior, es importante construir el escenario concreto que permita al estudiante hacer la tabla de valores y posteriormente graficarlas en el plano cartesiano, con ello permitirá que los alumnos encuentren mayor significado a la experiencia vivida y así lograr la construcción de un aprendizaje significativo a partir de material potencialmente significativo como lo menciona Ausubel (2002).

El segundo documento curricular que se aborda son los estándares básicos de competencias en matemáticas los cuales definen las competencias como:

Un *saber hacer* flexible que puede actualizarse en distintos contextos, es decir, como la capacidad de usar los conocimientos en situaciones distintas de aquellas en las que se aprendieron. Implica la comprensión del sentido de cada actividad y sus implicaciones éticas, sociales, económicas y políticas. (MEN, 2006, p.12)

Cabe resaltar que el MEN hace énfasis en las competencias más que en los contenidos, sin embargo, la competencia no es independiente de los contenidos temáticos de un saber disciplinar; esto es *del saber qué, del saber cómo, del saber por qué o del saber para qué* ya que el desarrollo de las competencias necesita de conocimientos, habilidades, destrezas, comprensiones, actitudes y disposiciones específicas. Se debe tener en cuenta que para mostrar

que una persona es competente no basta con lo mencionado anteriormente, debe adicionarle ser capaz de relacionar y organizar el currículo en función de un desempeño flexible, eficaz y con sentido (MEN, 2006).

También se plantea desde el MEN (2006) que ser matemáticamente competente significa que una actividad matemática debe involucrar, en la medida de lo posible los cinco procesos generales, que son formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar, y formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos, para que sea matemáticamente rica. A continuación, se describen, de una manera global, estos cinco procesos.

Formular y Resolver Problemas

Las situaciones problema suministran el contexto instantáneo en donde el quehacer matemático cobra sentido, porque las situaciones que se abordan están sujetas a experiencias de la vida real y resultan ser más significativas para los alumnos. En este sentido los problemas de la vida real deben entenderse como aquellos que pueden surgir de las mismas matemáticas o de otras ciencias haciendo una transversalidad entre áreas del conocimiento mostrando la utilidad que tiene no solo en un campo específico (MEN, 2006) y por ello pueden involucrar elementos tanto teóricos como prácticos.

Modelar procesos y fenómenos de la realidad

La modelación hace referencia a un esquema gráfico, mental o tridimensional que ayude a ser más comprensible y significativa la situación matemática que se presente en el ámbito cotidiano, científico o matemático. También puede entenderse como una estructura que se usa como referencia para lo que se trata de comprender; una imagen analógica que busca que las ideas o conceptos sean concretos para su manejo y su adquisición (MEN, 2006).

Comunicación

La comunicación es la forma en que se puede expresar la matemática a través de diferentes lenguajes con los que se representan, se leen y se escriben, se hablan y se escuchan. Los estudiantes y docentes pueden construir el lenguaje en su clase con el fin de dotar de significado las palabras, gráficas y símbolos; además, se busca que aprecien la necesidad de utilizar acuerdos colectivos y grupales con el que valoren la eficiencia, la eficacia y la economía de usar el lenguaje matemático (MEN,2006).

Razonar

El razonamiento permite hacer conjeturas, refutaciones, afirmaciones por medio de contexto o materiales físicos (en los primeros grados), para poder convertirlos en teoría que sea válida y se pueda usar posteriormente (razones y argumentos). Los materiales ayudan a potenciar los conocimientos, conceptos y procedimientos en los estudiantes, además de mostrar que las matemáticas son divertidas, espontaneas, experienciales y no simples reglas de memorización para aplicar algoritmos.

Los estándares básicos de competencias en matemáticas mencionan que es conveniente que:

las situaciones de aprendizaje propicien el razonamiento es los aspectos espaciales, métricos y geométricos, el razonamiento numérico y el uso de las gráficas. En estas situaciones pueden aprovecharse diversas ocasiones de reconocer y aplicar tanto el razonamiento lógico inductivo y abductivo, al formular hipótesis o conjeturas, como el deductivo, al intentar comprobar la coherencia de una proposición con otras aceptadas previamente como teoremas, axiomas, postulados o principios, o al intentar refutarla por su contradicción con otras o por la construcción de contraejemplos (MEN, 2006, p.54).

La formulación, comparación y ejercitación de procedimientos

Este proceso permite a los estudiantes la construcción y ejecución segura y rápida de los procedimientos de rutina, procurando que los alumnos mejoren su velocidad sin perder la comprensión de los algoritmos (MEN, 2006). Para el MEN (2006) las ejecuciones de procedimientos rutinarios contribuyen en el desarrollo significativo y comprensivo del conocimiento matemático y se debe considerar al menos tres mecanismos cognitivos

involucrados en dichos algoritmos. El primero, la alternación de momentos en los que prima lo conceptual y en otros lo procedimental; el segundo, la automatización que necesita de la práctica para lograr una rápida, segura y eficaz forma de ejecutar los procedimientos. Cabe aclarar que este mecanismo cognitivo contribuye a desarrollar destrezas y habilidades para las tareas matemáticas y no tanto en lo significativo y comprensivo. El tercero es la reflexión sobre que procedimientos y algoritmos llevan al reconocimiento de patrones y regularidades que permitan conceptualizar y generalizar, y posteriormente poder usarlos de manera fiable y eficaz. Así mismo, según el MEN (2006) ser competente matemáticamente hablando requiere que el estudiante sea diestro, eficaz y eficiente en el desarrollo de cada uno de los procesos generales y del pensamiento lógico y matemático tal como lo enuncian los lineamientos curriculares. A continuación, se menciona uno de los pensamientos matemáticos que más transcendencia tiene en este proyecto.

Pensamiento Matemático Variacional y sistemas algebraicos. Según los estándares básicos de competencia en matemáticas se entienden como:

El reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos. Uno de los propósitos de cultivar el pensamiento variacional es construir desde la Educación Básica Primaria distintos caminos y acercamientos significativos para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico y, en la Educación Media, del cálculo diferencial e integral. Este pensamiento cumple un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y las matemáticas mismas (MEN, 2006, p 67).

Los EBCM manifiestan que los estudiantes de grado noveno deben ser competentes para realizar acciones, descritas en primera persona, como:

- Describo y represento situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas).

- Reconozco el conjunto de valores de cada una de las cantidades variables ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio (variación).
- Identifico las características de las diversas gráficas cartesianas (de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.) en relación con la situación que representan.
- Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.
- Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.
- Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas. Identifico la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en las gráficas que las representan
- Reconozco tendencias que se presentan en conjuntos de variables relacionadas
- Diseño experimentos aleatorios (de las ciencias físicas, naturales o sociales) para estudiar un problema o pregunta.
- Describo tendencias que se observan en conjuntos de variables relacionadas.
- Uso comprensivamente algunas medidas de centralización, localización, dispersión y correlación (percentiles, cuartiles, centralidad, distancia, rango, varianza, covarianza y normalidad).

El tercer documento curricular nacional son los derechos básicos de aprendizaje (DBA) que mencionan detalladamente los saberes y habilidades que deben aprender y desarrollar los estudiantes en cada ciclo. Los DBA establecen que los estudiantes deben ser capaces de:

- Identificar cuando una relación es una función; reconocer que una función se puede representar de diversas maneras y encontrar su dominio y su rango.
- Describir características de la relación entre dos variables a partir de una gráfica

- Expresar una función cuadrática ($f(x) = ax^2 + bx + c$) de distintas formas ($y = a(x + d)^2 + e$, estándar o $y = a(x - f)(x - g)$) factorizada, o general $y = ax^2 + bx + c$ y reconocer el significado de los parámetros a, c, d, e, f y g , y su relación con la gráfica.

A continuación, y como un referente de contraste, se presenta lo declarado por el NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) al respecto.

Los NCTM (2000) Tienen dos focos teóricos los cuales son: crear una visión coherente de lo que significa tener cultura matemática en un mundo sustentado por calculadoras y ordenadores, y crear un conjunto de estándares para supervisar los currículos matemáticos y la evaluación asociada. Se define el estándar como una afirmación – declaración que puede ser utilizada para juzgar la calidad del currículo matemático o de métodos de evaluación.

En este trabajo se estudiarán algunos estándares que están asociados al concepto de función y que así mismo permiten analizar una posible forma en que se deben aprender los conceptos matemáticos, con el fin de usarlos al momento de solucionar situaciones matemáticas. A continuación, se mencionan cuatro estándares que se relacionan con el presente trabajo: elaborar modelos de fenómenos del mundo real con diversos tipos de funciones; representar y analizar relaciones funcionales utilizando tablas, reglas orales, ecuaciones y gráficas; hacer traducciones entre representaciones tabulares, gráficas y analíticas de funciones y entender las operaciones con conjuntos de funciones, sus propiedades generales y su comportamiento (NCTM, 2000).

En particular, en cuanto al concepto de función, los estándares curriculares y de evaluación matemática mencionan que:

está presente a lo largo de todo el currículo, en la aritmética, las funciones aparecen como como operaciones normales entre números, donde dos números se corresponden con uno solo, las funciones son relaciones entre variables que representan números, en geometría las funciones ponerse en relación conjuntos de puntos con sus imágenes en movimientos tales como reflexiones y traslaciones. El concepto función es importante porque también constituye una representación matemática de muchas situaciones de entrada-salida que se

encuentran en el mundo real, incluyendo las que han surgido últimamente como resultado de los avances de la tecnología, un ejemplo es la tecla $\sqrt{x}$ de las calculadoras (NCTM, 2000, p. 159).

Según los NTCM (2000) los estudiantes del nivel de noveno deben ser capaces de:

Explorar problemas y describir los resultados usando modelos o representaciones matemáticas gráficas, numéricas, físicas, algebraicas y verbales.

Utilizar una idea matemática para avanzar en su comprensión de otras ideas matemáticas.

Aplicar el pensamiento matemático y la creación de modelos para resolver problemas que surjan en otras áreas, como la ciencia.

Describir y representar relaciones con tablas, gráficas y reglas.

Analizar relaciones funcionales para explicar de qué forma un cambio de una cantidad provoca un cambio en la otra.

Usar patrones y funciones para representar y resolver problemas.

Entender los conceptos de variable, expresión y ecuación.

Representar situaciones y patrones numéricos con tablas, graficas, reglas verbales y ecuaciones, y explorar las interrelaciones de estas representaciones.

Analizar tablas y gráficas para identificar propiedades y relaciones.

Recoger, organizar y analizar datos de forma sistemática.

Elaborar, leer e interpretar tablas y diversas representaciones gráficas.

Formular inferencias y argumentos convincentes que se basen en el análisis de datos.

Evaluar argumentos que estén basados en el análisis de datos.

Usar, con cada vez más confianza, enfoques de resolución de problemas para investigar y entender contenido matemáticos.

Aplicar estrategias integradas de resolución de problemas matemáticos para resolver problemas dentro y fuera de las matemáticas.

Reconocer y formular problemas a partir de situaciones dentro y fuera de las matemáticas.

Aplicar el proceso de formulación de modelos matemáticos a situaciones de problema del mundo real.

Expresar ideas matemáticas oralmente y por escrito.

Construir argumentos sencillos válidos.

Juzgar la validez de un argumento.

Elaborar modelos de fenómenos del mundo real con diversos tipos de funciones.

Representar y analizar relaciones funcionales utilizando tablas, reglas orales, ecuaciones y gráficas.

Hacer traducciones entre representaciones tabulares, gráficas y analíticas de funciones.

Reconocer que con el mismo tipo de función pueden elaborarse modelos para una gran variedad de situaciones problema.

Analizar los efectos que ocasiona en las gráficas de funciones un cambio de los parámetros.

Asimilar y extraer inferencias a partir de diagramas, tablas y graficas que recojan datos de situaciones del mundo real.

Utilizar curvas de ajuste para efectuar predicciones a partir de los datos.

Entender y aplicar medidas de centralización, dispersión y correlación.

Comprobar hipótesis utilizando la estadística de forma adecuada (pp, 70-147)

En el siguiente capítulo se presentará el marco teórico que soportó la fundamentación, implementación y análisis de la propuesta.

4. Marco Teórico

En este capítulo se presentan cuatro apartados que abordan diversos aspectos relacionados con el estudio de las funciones cuadráticas desde una perspectiva matemática y aplicada. El primero se centra en realizar un balance matemático exhaustivo de la función cuadrática, profundizando en su definición, características, y propiedades fundamentales, tales como el vértice, los interceptos y el comportamiento de su gráfica en el plano cartesiano. A través de este análisis, se pretende que el lector no avezado comprenda a fondo las bases algebraicas que sustentan a esta función. El segundo explora la relación entre las funciones cuadráticas y su aplicación en la física, específicamente en fenómenos como la caída libre y el movimiento parabólico. Aquí se analiza cómo las ecuaciones cuadráticas permiten modelar trayectorias y comportamientos en sistemas físicos, lo que no solo facilita la resolución de problemas prácticos, sino que también ayuda a entender la importancia de estas funciones en el estudio de fenómenos naturales.

El tercero, se dedica a establecer y comparar las distintas representaciones de las funciones en matemáticas, haciendo especial hincapié en las funciones cuadráticas. En este contexto, se exploran representaciones gráficas, algebraicas y simbólicas, destacando cómo cada una de ellas ofrece diferentes perspectivas para analizar y resolver problemas matemáticos. Además, se enfatiza en la importancia de desarrollar habilidades para interpretar diversos registros de representación y realizar conversiones entre ellos. Finalmente, el cuarto integra los contenidos de los tres apartados anteriores mediante el uso de recursos tecnológicos. Aquí se discuten las herramientas digitales, como software de simulación y calculadoras gráficas, que permiten una mejor visualización y conceptualización de las funciones cuadráticas y su aplicación en problemas reales. De esta manera, se concluye el capítulo mostrando cómo la tecnología puede servir como un puente entre la teoría matemática, la física y la representación gráfica, facilitando un aprendizaje más dinámico y efectivo.

4.1 Marco Matemático

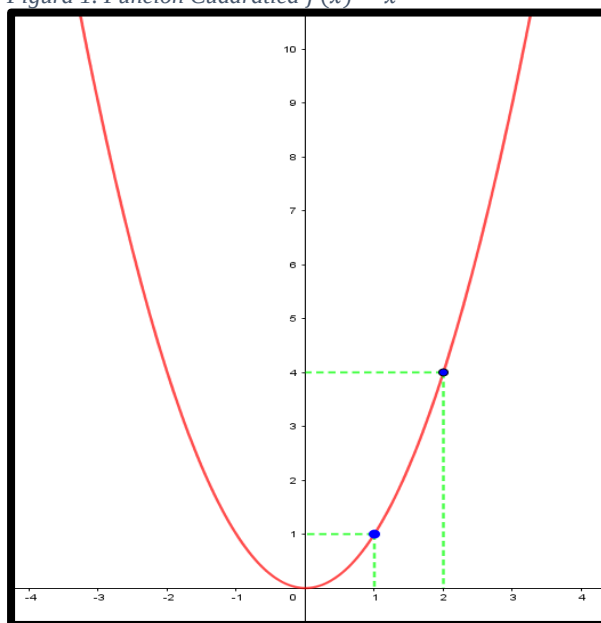
Algunas de las definiciones presentadas a continuación se fundamentan en Stewart, Redlin & Watson (2007). Sin pérdida de generalidad, una función es una regla que asigna a cada elemento x en un conjunto A exactamente un elemento, simbolizado $f(x)$, en un conjunto B .

Para hablar sobre funciones estas deben tener nombres, usualmente se asignan letras como f, g, h entre otras. Por ejemplo:

“ g ” es la regla que asigna a un elemento de un conjunto A un número que corresponde a su cuadrado: “el cuadrado de un número”, el cual se encuentra en el conjunto B . Los cuales de manera general se denominan conjunto de partida y conjunto de llegada.

Cuando se escribe $g(2)$, se interpreta “aplicar la regla g al número 2. Al aplicar la regla $g(2) = 2^2 = 4$.

Figura 1. Función Cuadrática $f(x) = x^2$



Una función cuadrática es una función f de la forma

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

Donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$

En particular, si se toma $a = 1$ y $b = c = 0$, se obtiene la función cuadrática simple, o también denominada básica, $f(x) = x^2$ cuya gráfica es la presentada en la Figura 1 y que se denomina parábola. De hecho, la gráfica de cualquier función cuadrática es un parábola y se puede obtener a partir de $f(x) = x^2$ teniendo en cuenta transformaciones tales como desplazamientos, dilataciones o contracciones (horizontales o verticales) y reflexiones con

respecto a los ejes. La función cuadrática, en variable real puede ser expresada de forma algebraica de diversas formas como se describe a continuación.

FUNCIÓN CUADRÁTICA EN SU FORMA GENERAL, ESTÁNDAR Y FACTORIZADA

La forma general de la función es $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$. Esta forma permite determinar el sentido de apertura, abre hacia arriba si $a > 0$ o hacia abajo si $a < 0$ y el punto de corte con el eje Y toda vez que si $x = 0, f(0) = c$ luego el corte será $(0, c)$.

La forma estándar de la función es $f(x) = a(x - h)^2 + k$, donde h y k son las coordenadas del vértice; la parábola abre hacia arriba si $a > 0$ o hacia abajo si $a < 0$.

Figura 2. Función Cuadrática Estándar con $a > 0$

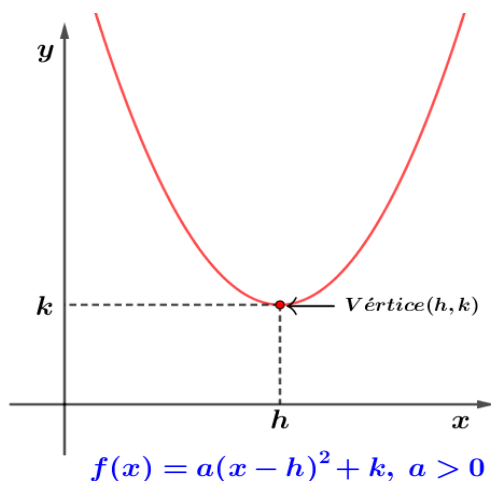
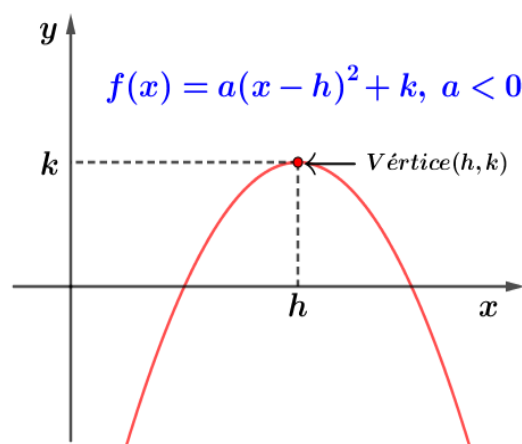


Figura 3. Función Cuadrática Estándar con $a < 0$



La función cuadrática en forma factorizada en los $\mathbb{R}$ se puede escribir como:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Siendo a el coeficiente de la función cuadrática y x_1 y x_2 las raíces o ceros reales de la función de $f(x)$. Los valores x_1 y x_2 también podrían corresponder a números complejos, pero ello indicaría que la curva de f no cortaría al eje X.

Para pasar de una forma algebraica a la otra se procede con métodos algebraicos. Por ejemplo, para ir de la forma factorizada a la general y establecer las relaciones entre ellas se procede de la siguiente manera:

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$y = a(x^2 - xx_1 - xx_2 + x_1x_2)$$

$$y = ax^2 - axx_1 - axx_2 + ax_1x_2$$

$$y = ax^2 - x(ax_1 - ax_2) + ax_1x_2$$

Se determina que:

$$b = ax_1 - ax_2$$

$$c = ax_1x_2$$

Dentro del desarrollo del trabajo y de la propuesta se incorporan otras herramientas matemáticas tales como el ajuste de curvas, los modelos de correlación; sin embargo, para no desviar el objeto central de estudio, estos serán presentados en el [Anexo A](#).

4.2 Marco Físico

MOVIMIENTO RECTILINEO UNIFORMEMENTE VARIADO (M.R.U.V)

Un cuerpo describe un movimiento rectilíneo uniformemente variado cuando su trayectoria es una recta y, a la vez, su aceleración es constante y no nula Bautista y Salazar (2011).

Cuando un cuerpo describe un M.R.U.V, puede suceder que su rapidez aumente, si la aceleración y la velocidad en un instante tienen el mismo signo o que su rapidez disminuya, si la aceleración y la velocidad instantánea tienen signos contrarios.

La aceleración en un M.R.U.V se define como el cociente entre cualquier cambio de velocidad y el tiempo empleado en producirse dicho cambio. Si cuando $t = 0$ la velocidad inicial es v_0 y al cabo de determinado tiempo t la velocidad es v , entonces:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - 0} = \frac{v - v_0}{t}$$

$$a = \frac{v - v_0}{t}$$

de donde:

$$v = v_0 + a \cdot t$$

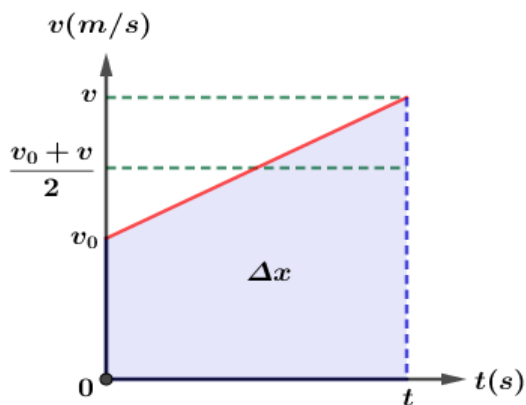
El desplazamiento en un M.R.U.V

Si una partícula se mueve con determinada velocidad v_0 en $t = 0 \text{ s}$, y acelera uniformemente hasta alcanzar una velocidad v en un tiempo t , en cada unidad de tiempo, la velocidad aumenta en la misma proporción (modelo lineal)

Como el desplazamiento Δx se representa por el área comprendida entre la curva y eje horizontal de la gráfica velocidad como una función del tiempo, se tiene que este desplazamiento es el mismo que si la partícula se hubiera movido durante el mismo intervalo de tiempo con velocidad igual al promedio entre v_0 y v tal como se muestra en la Figura 4.

(Ley de Merton)

Figura 4. Gráfica v vs t y cálculo de desplazamiento Δx .



El desplazamiento en un M.R.U.V, en el cual la velocidad inicial es v_0 y la velocidad final es v , describe un movimiento uniforme con velocidad igual al promedio de dichas velocidades. A continuación, se demuestra la ecuación de las posición con respecto al tiempo

Tabla 1. Demostración ecuación de posición con respecto al tiempo.

PASOS	AFIRMACIÓN	RAZÓN
1	<ul style="list-style-type: none"> • $velocidad\ promedio = \frac{v_0 + v}{2}$ • $\Delta x = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t$, donde $v = v_0 + a \cdot t$ 	Dado

	<ul style="list-style-type: none"> $\Delta x = x - x_0$ 	
2	$\Delta x = \frac{v_0 + v_0 + a \cdot t}{2} \cdot t$	Sustituir $v = v_0 + a \cdot t$
3	$\Delta x = \frac{2v_0 + a \cdot t}{2} \cdot t$ $\Delta x = \frac{2v_0 \cdot t + a \cdot t^2}{2}$ $\Delta x = v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$	Operar
4	$x - x_0 = v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$	Sustituir $\Delta x = x - x_0$
5	$x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$	Despejar x

Se concluye la ecuación de la posición con respecto al tiempo:

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$$

A partir de la ecuación $v = v_0 + a \cdot t$ y el desplazamiento $\Delta x = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t$, se puede obtener una expresión para la velocidad en un movimiento acelerado en función del desplazamiento. A continuación, se presenta la demostración.

Tabla 2. Demostración de la ecuación velocidad final.

PASOS	AFIRMACIÓN	RAZÓN
1	<ul style="list-style-type: none"> $v = v_0 + a \cdot t$ $\Delta x = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t$ 	Dado
2	$t = \frac{v - v_0}{a}$	Despejar t de $v = v_0 + a \cdot t$
3	$\Delta x = \left(\frac{v_0 + v}{2}\right) \left(\frac{v - v_0}{a}\right)$	Sustituir $t = \frac{v - v_0}{a}$ en $\Delta x = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t$

4	$\Delta x = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$	Operar.
5	$v^2 = v_0^2 + 2a \cdot \Delta x$	Despejar la v^2

Se concluye que la velocidad v cumplirá con: $v^2 = v_0^2 + 2a \cdot \Delta x$

CAÍDA LIBRE

La caída libre consiste en dejar caer un objeto libremente cerca de la superficie terrestre. La tierra ejerce una fuerza de atracción hacia el centro imprimiendo cierta aceleración, se ha determinado experimentalmente que un cuerpo en caída libre, aumenta su velocidad en unos 9,8 metros por segundo cada segundo, es decir que la aceleración producida por la Tierra es constante y tiene un valor aproximado de $9,8 \frac{m}{s^2}$. Todos aquellos objetos que se lanzan hacia arriba o abajo y los que se dejan caer a partir del reposo, experimentan una aceleración dirigida hacia abajo cuyo valor es $9,8 \frac{m}{s^2}$, Bautista y Salazar (2011).

Al despreciar la resistencia del aire y suponer que la aceleración de la gravedad no varía con la altitud, el movimiento de un cuerpo en caída libre se presenta bajo aceleración constante. Por lo tanto, las ecuaciones que describen el movimiento de los cuerpos que se mueven en el vacío en dirección vertical corresponden a un M.R.U.V, con un valor de aceleración hacia abajo de $9,8 \frac{m}{s^2}$.

$$v = v_0 + gt$$

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$$

La letra y indica la posición con respecto al punto desde el cual se considera el movimiento (marco de referencia inercial), debido a que esta letra representa el eje vertical del plano coordenado.

MOVIMIENTO PARABÓLICO Y SEMIPARABÓLICO

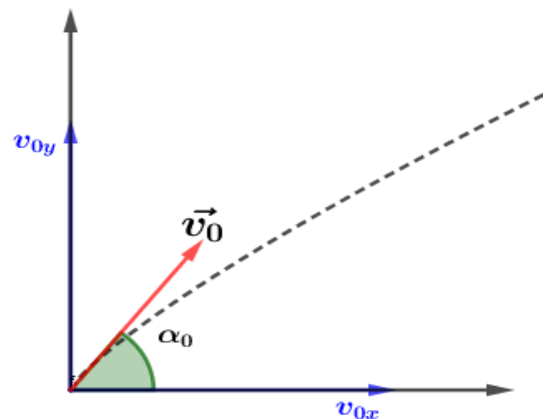
El movimiento parabólico se compone de dos movimientos, uno horizontal (M.R.U) y otro vertical (M.R.U.A). En el primero la velocidad es constante, en el segundo la aceleración es constante y equivale a la gravedad, Bautista y Salazar (2011).

Se lanza un objeto con velocidad v_0 , que forma con la horizontal un ángulo α_0 como se observa en la Figura 5, la velocidad inicial tiene dos componentes: v_{0x} y v_{0y} , las cuales se determina por:

$$v_{0x} = v_0 \cdot \cos \alpha_0$$

$$v_{0y} = v_0 \cdot \sin \alpha_0$$

Figura 5. Componentes del movimiento parabólico.



Ahora, si se considera el origen, es decir el punto (0,0), como punto de partida del proyectil, al cabo de determinado tiempo el objeto ocupa la posición (x, y) y su velocidad es $v = \langle v_x, v_y \rangle$, donde la componente de la velocidad en la dirección del eje X es constante, esto es, su valor en cualquier instante es el mismo que en el momento del lanzamiento, es decir v_{0x} ; y dado que la aceleración solo tiene componente en la dirección del eje Y, que es la gravedad, como se observa en la Figura 6. Entonces:

$$x = v \cdot t$$

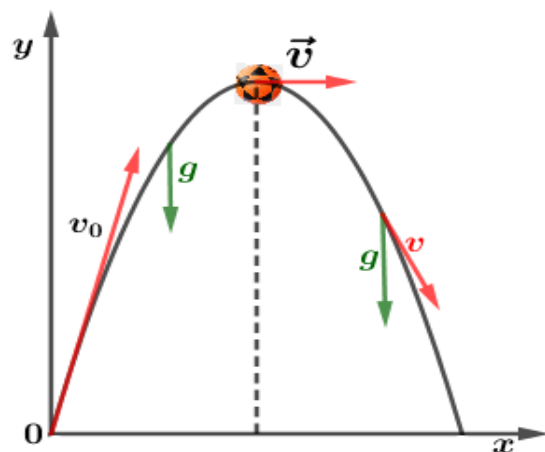
$$y = v_{0y} \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

$$v_x = v_{0x} = \text{constante}$$

$$v_y = v_{0y} + g \cdot t$$

La velocidad de un objeto en cualquier punto de la trayectoria es un vector tangente a la misma, y a partir de las

Figura 6. Movimiento Parabólico.



expresiones para x e y es posible determinar la posición del objeto en cualquier tiempo t .

ECUACIÓN DE ALCANCE Y TIEMPO DE VUELO EN EL TIRO PARABÓLICO

Si se lanza un proyectil con una velocidad inicial v_0 , como se observa en la Figura 7, la velocidad tiene las dos componentes ya mencionadas:

$$v_{0x} = v_0 \cdot \cos \alpha$$

$$v_{0y} = v_0 \cdot \sin \alpha$$

Ahora, se analizan el movimiento en relación con la dirección en el eje X y en el eje Y .

A lo largo del eje Y la aceleración es la gravedad por consiguiente se tiene que:

$$v = v_{0y} - g \cdot t$$

La velocidad final $v = 0$ cuando el objeto alcanza la altura máxima por ende se tiene:

$$0 = v_{0y} - g \cdot t$$

Se despeja t :

$$0 - v_{0y} = -v_{0y} + v_{0y} - g \cdot t$$

$$-v_{0y} = -g \cdot t$$

$$\frac{-v_{0y}}{-g} = \frac{-g \cdot t}{-g}$$

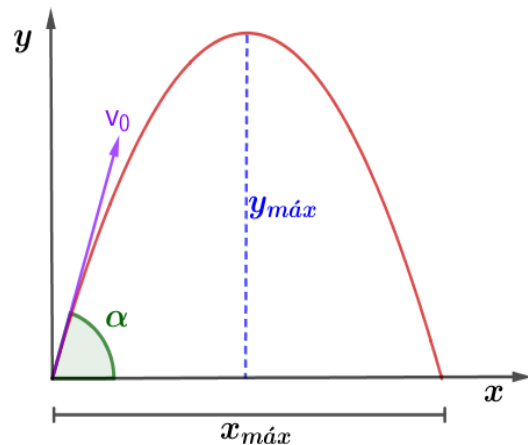
$$t = \frac{v_{0y}}{g}$$

Ahora $v_{0y} = v_0 \cdot \sin \alpha$ entonces se tiene:

$$t = \frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{g}$$

Esta expresión corresponde al tiempo que tarda el proyectil en alcanzar la altura máxima, esto quiere decir que el tiempo de vuelo, t_{vuelo} , es:

Figura 7. Gráfica de altura máxima.



$$t_{vuelo} = \frac{2v_0 \cdot \sin \alpha}{g}$$

Para hallar la altura máxima $y_{m\acute{a}x}$ se utiliza la siguiente expresi3n:

$$v^2 = v_{0y}^2 + 2ay_{m\acute{a}x}$$

Como la altura m\acute{a}xima se alcanza cuando $v_{0y} = 0$ y la aceleraci3n en el eje y es la gravedad, entonces se tiene lo siguiente:

$$0^2 = v_{0y}^2 - 2gy_{m\acute{a}x}$$

y despejando $y_{m\acute{a}x}$

$$0^2 - v_{0y}^2 = -v_{0y}^2 + v_0^2 - 2gy_{m\acute{a}x}$$

$$-v_{0y}^2 = -2gy_{m\acute{a}x}$$

$$\frac{-v_{0y}^2}{-2g} = \frac{-2g}{-2g} y_{m\acute{a}x}$$

$$y_{m\acute{a}x} = \frac{v_{0y}^2}{2g}$$

Ahora $v_{0y} = v_0 \cdot \sin \alpha$ por lo tanto:

$$y_{m\acute{a}x} = \frac{(v_0 \cdot \sin \alpha)^2}{2g}$$

En el eje x , se tiene que $x = v \cdot t$, por lo tanto:

$$x_{m\acute{a}x} = v_{0x} \cdot t_{vuelo}$$

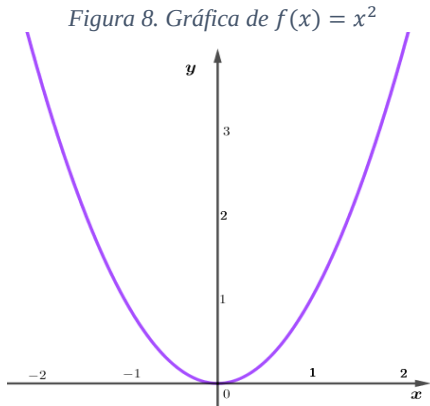
$$x_{m\acute{a}x} = (v_0 \cdot \cos \alpha) \cdot \frac{2v_0 \cdot \sin \alpha}{g}$$

$$x_{m\acute{a}x} = \frac{v_0^2 \cdot 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \cdot \sin (2\alpha)}{g}$$

4.3 Marco Did\acute{a}ctico

Teniendo como referencia a Duval (2006) se considera que la ense\~nanza de las matem\acute{a}ticas se enfoca en actividades cognitivas como el razonamiento, la conceptualizaci3n y la resoluci3n de problemas. Ense\~nar y aprender las matem\acute{a}ticas va m\acute{a}s all\acute{a} del uso de s\~mbolos y lenguajes, se deben usar diferentes tipos de representaci3n y expresi3n para lograr una apropiaci3n de los conceptos matem\acute{a}ticos. Por consiguiente, se analizan las formas de

representar una función, tal como lo menciona Stewart, Redlin & Watson (2007) quienes consideran que cuando se pasa de una forma de representar a otra se comprende más el concepto de función, sin embargo, ciertas funciones son más fáciles describirlas de una forma que de otra. A continuación, se muestran las formas de representar una función:

Verbal: mediante una descripción con palabras: “eleve al cuadrado”	Algebraica: mediante una fórmula explicita: $f(x) = x^2$												
Visual: Por medio de una gráfica.  <p><i>Figura 8. Gráfica de $f(x) = x^2$</i></p>	Numérica: Por medio de una tabla de valores: <p><i>Tabla 3. Representación numérica.</i></p> <table><tr><td>x</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>y</td><td>4</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>4</td></tr></table>	x	-2	-1	0	1	2	y	4	1	0	1	4
x	-2	-1	0	1	2								
y	4	1	0	1	4								

4.4 Marco Tecnológico

La parte tecnológica se compone del material físico y tecnológico que se usó en el proyecto de grado. Se inicia presentando en el aula el experimento real (plano inclinado y esfera), y luego se explica qué son el programa Tracker, Excel y el simulador Phet.

Tracker es un programa que permite hacer análisis de video construido sobre Java Open Source Physics (OPS). En el programa se puede crear escenas para el experimento, hacer el seguimiento de los móviles, crear diagramas, tablas y hacer análisis de datos. Adicionalmente, es un programa gratuito que se puede descargar en: <https://physlets.org/tracker/>

Excel es un programa que permite organizar y operar con datos numéricos, esto se hace en una hoja de cálculo, que está compuesta por celdas que se ordenan en filas y columnas. Así mismo, se puede hacer tablas de valores, gráficos matemáticos y análisis de datos.

El simulador Phet es un producto hecho por estudiantes de la universidad de colorado en Estados Unidos, y que recibe aportes de la comunidad con el fin de hacer divulgación científica básica. Cuenta con simuladores de experimentos en física, química, matemáticas y biología. El simulador de física permite trabajar con experimentos de movimientos, ondas, calor, termodinámica y electricidad entre otros. Se puede acceder de forma gratuita en: <https://phet.colorado.edu/es/simulations/filter?subjects=physics&type=html>

En la experimentación real se usa un plano inclinado de longitud 100 cm con tres alturas reales 10 cm , 20 cm , 30 cm y una esfera con una masa de 197 gr como se observa en la Figura 9.

Figura 9. Montaje de plano inclinado para experimentos reales.



5. Diseño de la propuesta

En el presente capítulo se presentan los criterios estructurales de la propuesta fundamentada en el marco teórico abordado en el capítulo anterior y apoyado en lo que se conoce como metodología diseño de experimentos.

METODOLOGÍA DISEÑO DE EXPERIMENTOS

Según Design – Based Research Collective (DBRC), que está conformado por profesores, investigadores y diseñadores de políticas educativas, se ha llegado a establecer que la investigación educativa tiene una brecha con respecto a los problemas con contextos naturales y de la práctica diaria. Así, se debe buscar enfoques metodológicos que permitan tratar los problemas de la práctica y así conducir al desarrollo de conocimientos útiles para los estudiantes (DBRC, 2003). Es así como emerge el diseño de experimentos que busca estudiar cómo el aprendizaje en contexto se logra por medio de un estudio sistemático de estrategias y herramientas de instrucción (DBRC, 2003). Las tareas serán secuenciadas, ordenadas y previamente planeadas con una justificación teórica y con un contexto (real, matemático o que involucre otras ciencias).

Así mismo, el diseño de experimentos está interesado por comprender el pensamiento de los niños. Piaget, Vygotsky y Dewey citados en Confrey (2006), argumentan que en la formación del pensamiento estudiantil se encuentra el origen del proceso que sería la clave para caracterizar el aprendizaje, puesto que comprender cómo se forman los pensamientos es clave para entender lo que cuenta como conocimiento. De igual manera la experimentación en física es la herramienta más práctica que tiene el docente para verificar las teorías con los estudiantes, además de desarrollar un pensamiento lógico-formal que permita al estudiante indagar y analizar fenómenos físicos.

La experimentación, de manera general, se clasifica en experimentos reales, simulados y mentales. El primero hace referencia a la experimentación por medio de los sentidos, poder observar la situación real y tomar mediciones directas. El segundo hace referencia a los experimentos que se realizan por medio de programas y ordenadores, la ventaja que tiene este tipo de experimentación es que no se necesita hacer el montaje del experimento, simplemente los programas o simuladores permiten hacer los ajustes de los parámetros como si fueran un ajuste real y el tercero es un experimento que permite hacer una construcción ideal para comprender ciertos conceptos y fenómenos que son difíciles de comprobar.

6. Contexto de aplicación de la propuesta y pregunta orientadora

La institución educativa donde se realiza la propuesta y la implementación de la misma, es el Colegio Parroquial de Nuestra Señora ubicado en barrio Quiroga Central, Calle 31 b sur # 23 – 60 de la ciudad de Bogotá - Colombia. El colegio ofrece educación en los niveles básica primaria y secundaria y media con un PEI dirigido a la formación integral en cuanto a lo cognitivo, social y humanista como lo refleja su modelo pedagógico.

En cuanto a lo cognitivo busca explicar y aclarar cómo aprende el estudiante, qué procesos matemáticos utiliza, qué habilidades y destrezas necesita para su proceso de aprendizaje, y su vínculo con lo social porque el alumno aprende en un contexto como su familia, el colegio y el mundo que lo rodea creando interacciones con las demás personas para lograr una construcción social del conocimiento, y humanista porque se refiere a los valores y actitudes de cada individuo. El colegio académicamente considera siete campos de pensamiento, uno de ellos es el matemático, que, para grado noveno, donde se aplica la propuesta, tiene una intensidad de cinco horas semanales y el otro es el campo científico que incluye física con dos horas semanales.

El campo de pensamiento matemático es entendido como la unidad de procesos y contenidos donde la finalidad es apoyar a los estudiantes para que se apropien del conocimiento matemático que les enseñan y así poderlos convertir en herramientas para la vida. Dentro de los procesos generales que deben adquirir los estudiantes está el razonamiento, el planteamiento y resolución de problemas, la comunicación, la modelación y la elaboración de procedimientos. El razonamiento busca justificar los procesos que ayudan a formar conclusiones a partir de formulación de hipótesis, hacer conjeturas, predicciones, encontrar contraejemplos e identificar patrones. El planteamiento de problemas se refiere a formular y plantear problemas a partir de situaciones matemáticas, de otras ciencias y de la realidad, luego, aplicar estrategias para desarrollar el problema y encontrar soluciones con argumentos

matemáticos. La comunicación busca expresar de forma oral, escrita, gráfica y visual las ideas matemáticas. La modelación busca identificar matemáticas específicas en un contexto real, luego, traducir a un modelo matemático y representar por una fórmula o una relación para dar solución al problema inicial. La elaboración, comparación y ejercitación de procedimiento hace referencia a operar, predecir, usar fórmulas o propiedades para realizar cálculos matemáticos.

La institución tiene 250 estudiantes, solo hay un grado noveno y este cuenta con 25 estudiantes entre los 13 y 14 años de edad, con un estudiante con necesidades educativas especiales (NEE). En general el grupo 901 muestra interés por aprender matemáticas, sin embargo, están en constante cuestionamiento del por qué y para qué me sirven las matemáticas, cómo las veo aplicadas mi vida cotidiana, qué utilidad tienen. Cabe resaltar que el colegio donde se aplica este proyecto es donde trabaja actualmente el autor del presente trabajo.

6.1 Pregunta Orientadora

En el anterior contexto y bajo la premisa de la necesidad de que los estudiantes resignifiquen el concepto de función cuadrática, logren apropiarlo no simplemente para una evaluación si no para la vida, es indispensable poder crear una experiencia significativa donde el educando viva la situación problema de forma real y simulada. Con base en esto se formula la pregunta problema de este proyecto, ¿Cómo a través de la recreación de un escenario físico real o simulado se logra dar significado a la función cuadrática, los parámetros a , b y c , y las variaciones de primer y segundo orden?; entendiendo las variaciones de primer, segundo y tercer orden, como el $\Delta f, \Delta(\Delta f), \Delta(\Delta f(\Delta f))$ respectivamente cuando la variación de la variable independiente se realiza a intervalos iguales es decir $\Delta x = k$.

7. Implementación de la propuesta

En este apartado se explica cómo se desarrollaron cada una de las sesiones de clase que se llevaron a cabo en la implementación de la propuesta. Para esto se organizó de la siguiente manera:

- Prueba diagnóstica: aplicación de cuestionario sobre funciones, haciendo hincapié en la función lineal, intercepciones, pendientes y su representación.
- Introducción al uso Tracker: sesión guiada para la presentación del programa y exploración por parte de los estudiantes.
- Refuerzo del uso de Excel: sesión guiada para ampliar el uso Excel por parte de los estudiantes.
- Experimento real mediado por Tracker: trabajo grupal para la toma de datos y la realización de los gráficos de dispersión.
- Análisis de datos mediado por Excel I (datos Tracker): realización de tablas de datos y gráficos, para analizar los aspectos variacionales de la función cuadrática
- Experimento simulado mediado por Phet: simulación de los experimentos previamente realizados y verificación de datos.
- Análisis de datos mediado por Excel II (datos simuladores Phet): realización de tablas de datos y gráficos, para analizar los aspectos variacionales de la función cuadrática.

PRUEBA DIAGNÓSTICA

Objetivo General	Reconocer los conocimientos previos que tienen los estudiantes sobre función lineal, pendiente de una recta y su representación gráfica, algebraica y tabular.
Objetivos específicos	<ul style="list-style-type: none">● Identificar la representación gráfica de la función lineal.● Reconocer la pendiente de una recta

	<ul style="list-style-type: none"> • Comparar las formas de representar una función.
Conceptos matemáticos	Función lineal, representaciones de una función, intercepto con los ejes X e Y .
Material	Guía elaborada por el docente en formación.
Tiempo	Un bloque de clase (90 minutos) para desarrollar la actividad.

CUESTIONARIO

PREGUNTA 1.

Dibuje la gráfica a partir de la función $y = 3x + 1$,

- ¿Qué puede concluir a partir de su forma?
- ¿Cuál es su dominio (Escríballo como conjunto por comprensión)?
- ¿Cuál es la intercepción de la gráfica con el eje x ? ¿y con el eje y ?
- ¿Cuál es su pendiente?
- ¿es x una variable o incógnita?, explique por qué.

JUSTIFICACIÓN 1:

- Lo que se pretende con esta pregunta es identificar si el estudiante a partir de la expresión algebraica puede dibujar la gráfica de la función y concluya que se obtiene una forma lineal e identificar que transición realiza entre los registros de representación.
- Identificar si el estudiante tiene el concepto de dominio de una función lineal, en particular, y de dominio de una función en general.
- Identificar los puntos de intercepción de la función lineal con los ejes.
- Reconocer qué parámetro determina la pendiente de la función lineal.
- Reconocer las diferencias entre una variable y una incógnita

En los ítems C y D también se busca ver que registros utilizan para la determinación.

PREGUNTA 2.

Realice la gráfica correspondiente de la siguiente tabla y encuentre la expresión algebraica que representa y en función de x .

Tabla 4. Tabla de datos - lineal.

x	0	1	2	3	4
y	-2	-4	-6	-8	-10

JUSTIFICACIÓN:

Verificar que los estudiantes realizan cambio de representación tabular a gráfica y de alguna de ellas a la algebraica. Además, determinar si hacen tareas cognitivas básicas como el ubicar los ejes cartesianos de manera correcta, o el de usar escalas graduadas adecuadas.

PREGUNTA 3.

Dibuje la trayectoria de un balón que pateó Radamel Falcao hacia una portería.

JUSTIFICACIÓN:

Identificar que los estudiantes entienden el concepto trayectoria.

PREGUNTA 4

Conteste si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y de una breve explicación de su respuesta.

- A. El intervalo (a, b) *abierto* se define como todos los valores que están entre a y b .
- B. El cuadrado de un número es multiplicar el número dado por dos.

JUSTIFICACIÓN:

Verificar que los estudiantes tengan claro la noción de conjunto y en particular el de intervalo; y de otra parte la definición de potenciación y más específicamente elevar un número al cuadrado.

INTRODUCCIÓN AL USO TRACKER

Objetivo General	Explorar con el programa Tracker las herramientas que permiten crear y simular escenarios experimentales con el fin de crear tablas y gráficos matemáticos.
Objetivos específicos	<ul style="list-style-type: none">● Indagar las herramientas en Tracker como cargar un video, crear una barra de calibración, crear ejes cartesianos y tablas de valores.
Conceptos matemáticos	<ul style="list-style-type: none">● Plano cartesiano.● Rotación de ejes cartesianos.
Materiales	<ul style="list-style-type: none">● Computador con un video de un experimento con un plano inclinado.● Archivo cargado al computador con la actividad de exploración de Tracker.
Tiempo	Un bloque de clase (90 minutos) para desarrollar la actividad

Para ver la guía de la fase de exploración a Tracker ir a [Anexo B](#)

REFUERZO DEL USO DE EXCEL

Objetivo General	Reforzar los conocimientos sobre las herramientas básicas que tiene Excel como por ejemplo tablas de datos, gráficos estadísticos y fórmulas.
Objetivos específicos	<ul style="list-style-type: none">● Indagar las herramientas que tiene Excel como gráficos de dispersión y fórmulas.
Conceptos matemáticos	<ul style="list-style-type: none">● Gráficos de dispersión.● Tablas de datos.● Coeficiente de determinación (R^2)
Materiales	<ul style="list-style-type: none">● Computador con Excel.● Guía que proporciona el paso a paso y la tabla de datos para digitar en Excel.
Tiempo	Una hora de clase (60 minutos) para desarrollar la actividad

Para ver la guía del refuerzo de Excel ir a [Anexo C.](#)

EXPERIMENTO REAL

El experimento real consiste en soltar una esfera por un plano inclinado a una altura de 30 cm y grabar el video de ese movimiento, luego, los estudiantes deben cargarlo en el programa Tracker y obtener la tabla que relaciona la posición contra el tiempo empleado de la esfera al rodar por el plano. Después, se copia la tabla de datos en Excel y realiza el análisis de los coeficientes de la función cuadrática y sus dos primeras variaciones. El experimento se debe repetir con las otras dos alturas, la de 10 cm y 20 cm.

Para este experimento se utiliza un taller educativo, que se entiende como una metodología de trabajo que se caracteriza por la investigación, el aprendizaje por descubrimiento y el trabajo en equipo. Se centra en la solución de problemas y requiere la participación de todos los integrantes del grupo, además, se enfoca en el saber hacer, que en este caso se relaciona con la práctica de la actividad propuesta y los conocimientos que adquieren en cada paso del taller. El docente cumple un papel de asistente que colabora con los estudiantes en su proceso de aprendizaje donde ellos proponen respuestas a las interrogantes planteadas durante la práctica de la actividad.

Para este experimento se tiene planteado los siguientes objetivos, temas matemáticos y tiempos establecidos para la aplicación del taller.

Objetivo General	Identificar la forma de la gráfica a partir de la tabla de valores y el gráfico de dispersión elaborado en Excel.
Objetivos específicos	Construir una tabla de valores a partir de la experimentación real mediada por Tracker. Crear un gráfico de dispersión
Conceptos matemáticos	Gráfico de dispersión Correlación Tabla de valores Variables

Materiales	Computador donde estén cargados los tres videos del experimento con un plano inclinado. Archivo cargado al computador con el taller educativo mediado por Tracker y Excel.
Tiempo	Dos bloques de clase (180 minutos) para desarrollar la actividad

Para el taller educativo N°1 ir a [Anexo D.](#)

Como conclusión del experimento real hecho con el plano inclinado se puede afirmar que su gráfico de dispersión que se ajusta a una forma cuadrática y su coeficiente de correlación en cada uno de los casos son aproximadamente 1, y se tiene tanto la expresión gráfica como la mejor representación algebraica que mejor se ajusta a los datos tomados.

Después de realizar la construcción de la tabla de valores y la gráfica del experimento que se asocia a la función cuadrática, se hacen las diferencias de primer y segundo orden para analizar las variaciones de la función cuadrática.

ANÁLISIS DE DATOS MEDIADO POR EXCEL I

En esta parte se hace el análisis de datos utilizando Excel para determinar las diferencias de primer y segundo orden, luego se realizan las respectivas gráficas y se obtienen las conclusiones a partir de las representaciones gráficas y algebraicas de la función cuadrática.

Ir al [Anexo E](#) para ver el taller educativo N°2 en el cual se deben seguir las indicaciones para la construcción de tablas de datos con las cuales se quiere hacer el análisis de las variaciones de la función cuadrática.

En este experimento real del plano inclinado con altura de 10 *cm*, 20 *cm* y 30 *cm* se logra relacionar que la primera variación de la función cuadrática es una aproximación a función lineal.

EXPERIMENTO SIMULADO MEDIADO POR PHET

En este experimento simulado (ES) los estudiantes deben usar el simulador Phet con movimiento de proyectiles (Lanzamiento vertical y movimiento parabólico). En la primera parte los estudiantes se familiarizan con el simulador para lo cual se hace una fase de exploración y en la segunda parte se procede a usar la pestaña de laboratorio simulado para llevar a cabo cinco experimentos simulados, con lo cual se busca hacer un análisis más detallado que con el experimento real y bajo condiciones controladas o en un ambiente ideal. Ir al [Anexo F](#) para ver el taller educativo N°3. A continuación, se muestran las conclusiones obtenidas en cada uno de los experimentos simulados en Phet.

ES	Conclusiones
I	Se puede concluir que el coeficiente a se relaciona con la gravedad que se trabaje en el simulador.
II	Se puede concluir que el valor de a depende de la gravedad como era de esperarse.
III	Los valores que se pueden deducir, al comparar ambas ecuaciones, es que el coeficiente a de la ecuación se relaciona con la mitad de la aceleración del objeto lanzado; que el coeficiente b es la velocidad inicial (en y) del objeto y c es la posición inicial del objeto. Para comprobar esta última relación se harán lanzamientos con altura inicial diferente de cero aplicados al modelo 1 y 3 presentados anteriormente.
IV	Teniendo en cuenta lo anterior se puede concluir que el coeficiente a se relaciona con la aceleración y con la gravedad que se trabaje en el simulador, el valor de b con la velocidad inicial en y y el valor de c corresponde a la altura inicial del objeto que, en este caso, es 10 m .
V	Teniendo en cuenta lo anterior y los datos dados inicialmente en el simulador se puede deducir que los valores a, b y c de la función cuadrática se relacionan con: el coeficiente a de la ecuación es la mitad de la aceleración del objeto lanzado, el coeficiente b es la velocidad inicial (en el eje y) del objeto y c es la posición inicial del objeto que es 5 m .

ANÁLISIS DE DATOS MEDIADO POR EXCEL II

En este apartado se hace el análisis de datos utilizando Excel para determinar las diferencias de primer y segundo orden, luego se realizan las respectivas gráficas y se obtienen las conclusiones a partir de las representaciones gráficas y algebraicas de la función cuadrática.

Ir al [Anexo G](#) para ver el taller educativo N°4 en el cual se deben seguir las indicaciones para la construcción de tablas de datos para hacer el análisis de las variaciones de la función cuadrática.

La conclusión que se obtiene del análisis de los experimentos simulados es que la primera variación de la función cuadrática es una variación lineal y la segunda es posiblemente una constante, esto lo determinan teniendo como referencia la representación gráfica y algebraica de las funciones.

8. Análisis de resultados

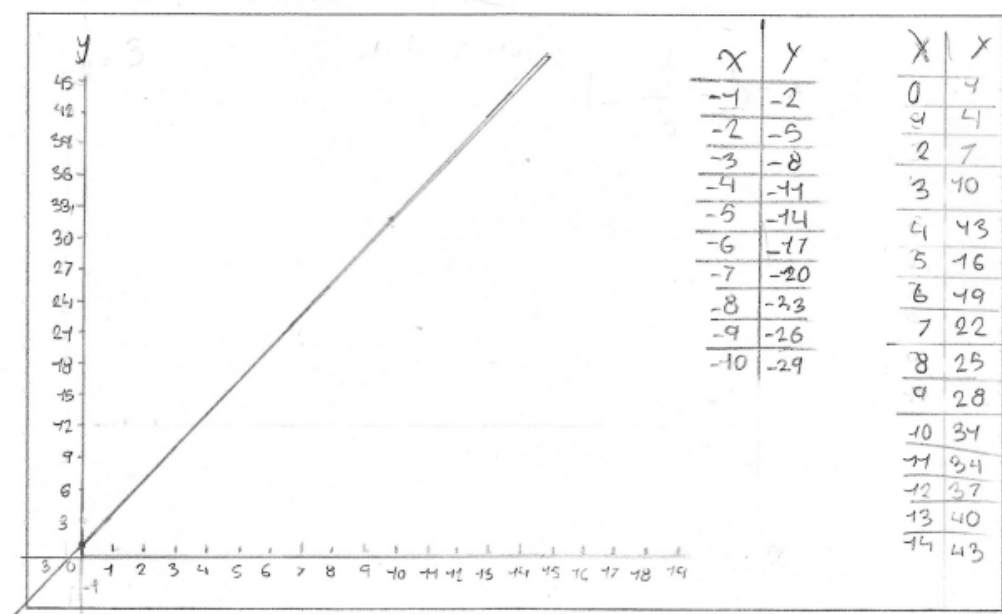
a. Prueba diagnóstica: aplicación de cuestionario sobre funciones, haciendo hincapié en la función lineal, intercepciones, pendientes y su representación.

En la primera pregunta el grupo de estudiantes responde lo siguiente:

Figura 10. Gráfica de la función $y=3x+1$

PREGUNTA 1.

Dibuje la gráfica a partir de la función $y = 3x + 1$,



En este punto los estudiantes hacen cambios de representación, de una algebraica a una tabular y de una tabular a una gráfica como lo dice el MEN (2006) es uno de sus estándares indica: describo y represento situaciones de variación relacionado diferentes representaciones.

Figura 11. Respuesta 1A

A. ¿qué puede concluir a partir de su forma?

Es una función exponencial ascendente y no pasa por el punto de origen

Los estudiantes cometen el error de confundir una función lineal con una exponencial, se interpreta como una confusión por parte de los estudiantes puesto que ellos están trabajando con esta función en clase e intentan asociarlo con ello.

Figura 12. Respuesta 1B

B. ¿Cuál es su dominio (Escríballo como conjunto por comprensión)?

Dom f = $\mathbb{R}$
Dom f = $(-\infty, \infty)$

Los estudiantes reconocen las características de las funciones como lo son el dominio y el rango como lo menciona el MEN (2016) en uno de sus derechos básicos de aprendizaje indica: Identificar cuando una relación es función, reconocer que una función se puede representar de diversas maneras y encuentra su dominio y rango.

Figura 13. Respuesta 1C.

C. ¿Cuál es la intercepción de la gráfica con el eje x? ¿y con el eje y?

$y = 3x + 1$
 $y - 1 = 3x$
 $\frac{y-1}{3} = x$
• Cuando x es igual a 0 y toma el valor de 1.
• Cuando y es igual a 0 x toma el valor de $-0,33$ periódico.
 $y = 3(0) + 1$
 $y = 1$
 $x = \frac{(0)-1}{3}$
 $x = -0,33$

Los estudiantes reconocen y encuentran cuál es el punto de corte con el eje X e Y de la función lineal.

Figura 14. Respuesta 1D.

D. ¿Cuál es su pendiente?

La pendiente de la recta es 3

Los estudiantes determinan por medio de la expresión algebraica cuál es la pendiente de la recta como lo relaciona el MEN (2006), cuando menciona en uno de sus estándares que el estudiante es capaz de describir y representar situaciones de variación relacionando diferentes representaciones como expresiones verbales y tablas de datos.

Figura 15. Respuesta 1D.

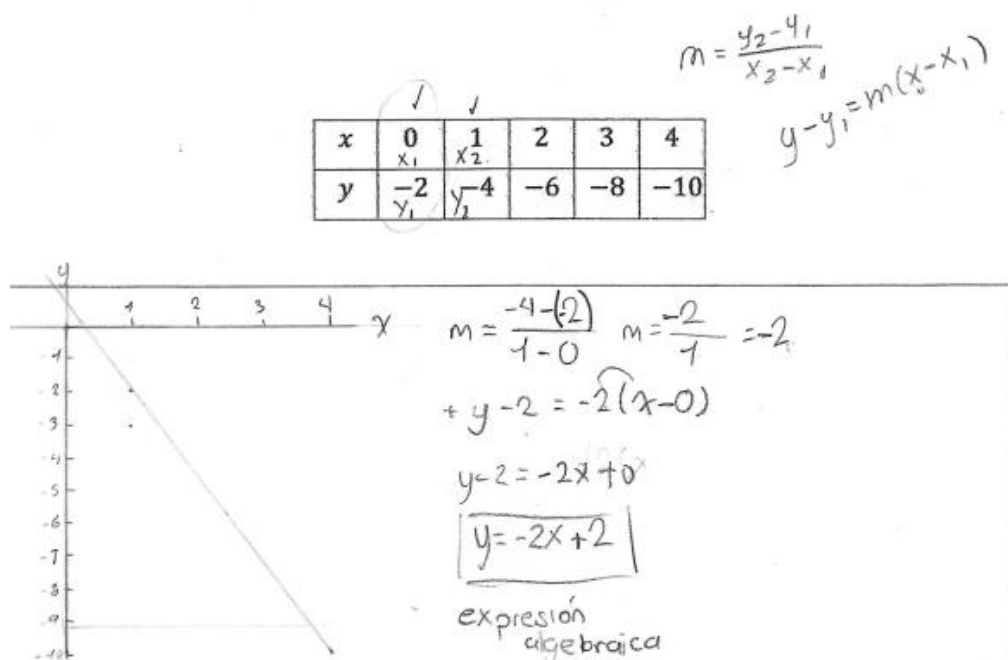
E. ¿es x una variable o incógnita?, explique por qué.

x es una variable ya que dependiendo el valor que tome x puede variar también el valor de y

Los estudiantes no logran, en general, identificar cuál es la diferencia entre variable e incógnita y esto se hace importante, puesto que según los NTCM (2000) los alumnos deben ser capaces de: entender los conceptos como de variable, expresión y ecuación pues el no reconocerlos genera obstáculos en el aprendizaje de conceptos y procesos.

En la segunda pregunta el grupo de estudiantes responde lo siguiente:

Figura 16. Respuesta 2.



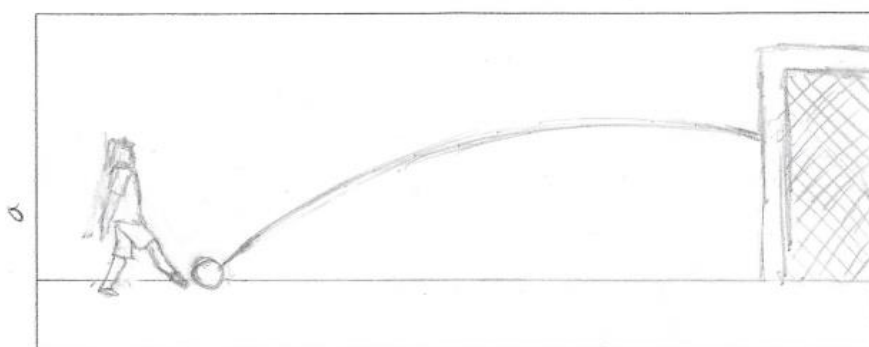
En esta pregunta los estudiantes logran encontrar la pendiente y la expresión algebraica que representa la gráfica de la función. El MEN (2006) en uno de sus estándares establece que: reconoce el conjunto de valores de cada una de las cantidades ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio (variación).

En la tercera pregunta el grupo de estudiantes responde lo siguiente:

Figura 17. Respuesta 3.

PREGUNTA 3.

Dibuje la trayectoria de un balón que pateó Radamel Falcao hacia una portería.



El grupo de tres estudiantes reconoce la trayectoria de un balón que es pateado por un futbolista, en el dibujo se observa que es una curva.

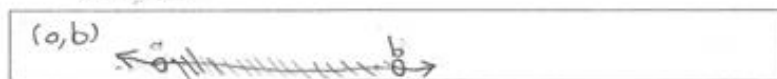
En la cuarta pregunta el grupo de estudiantes responde lo siguiente:

Figura 18. Respuesta 4A

PREGUNTA 4

Conteste si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

- A. El intervalo (a, b) abierto se define como todos los valores que están entre a y b .



Si, esto correcto por que como se muestra en la evidencia son los valores entre a y b .

Los estudiantes deben confirmar que los valores que están entre a y b son los que pertenecen al intervalo (a, b) .

Figura 19. Respuesta 4B

B. El cuadrado de un número es multiplicar el número dado por dos.

No, por que un número al cuadro es multiplica el mismo número dos veces y lo que nos indicando la afirmación es el doble de un número, es decir, multiplicarlo por dos.

Los estudiantes son capaces de transitar por el lenguaje algebraico y el lenguaje común para confirmar la veracidad de una afirmación y diferencian las expresiones correspondientes.

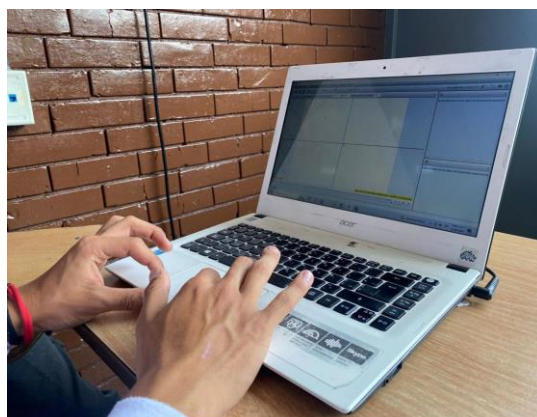
- Introducción al uso Tracker: sesión guiada para la presentación del programa y exploración por parte de los estudiantes.

Los estudiantes realizan la exploración guiada en el programa Tracker.

Figura 20. Exploración en Tracker de los estudiantes I



Figura 21. Exploración en Tracker de los estudiantes II



- Refuerzo del uso de Excel: sesión guiada para ampliar el uso Excel por parte de los estudiantes.

Los estudiantes realizan el taller de refuerzo en Excel, según las orientaciones dadas en la guía correspondientes y las orientaciones dadas por el docente

Figura 22. Refuerzo de Excel I

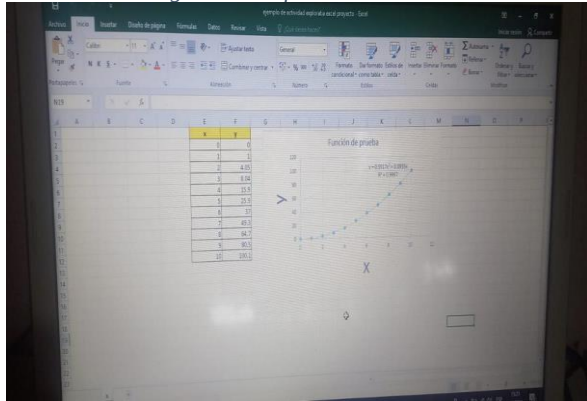


Figura 23. Refuerzo de Excel II



- Experimento real mediado por Tracker: trabajo grupal para la toma de datos y la realización de los gráficos de dispersión.

Los estudiantes trabajan en la toma de datos usando el experimento real y con una altura de 10 cm reales.

Figura 24. Inicio del experimento real I.

Altura de 10 cm

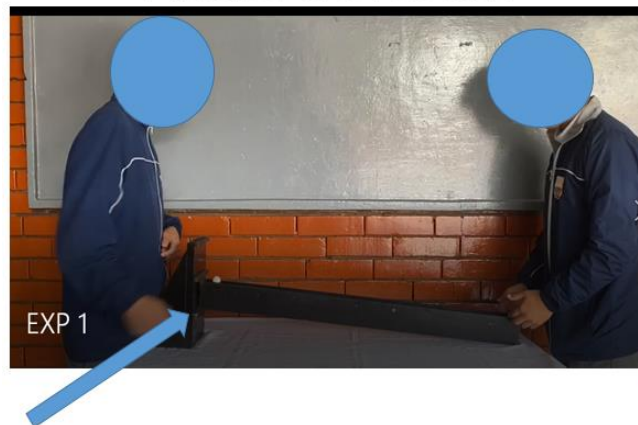
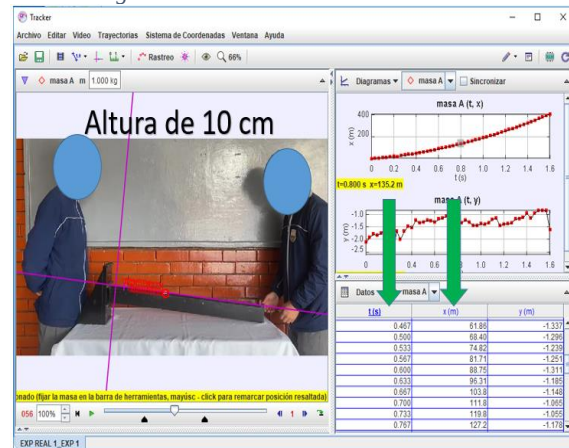


Figura 25. Rodamiento de la esfera por el plano inclinado- experimento real I

Altura de 10 cm



Figura 26. Selección de datos en Tracker.

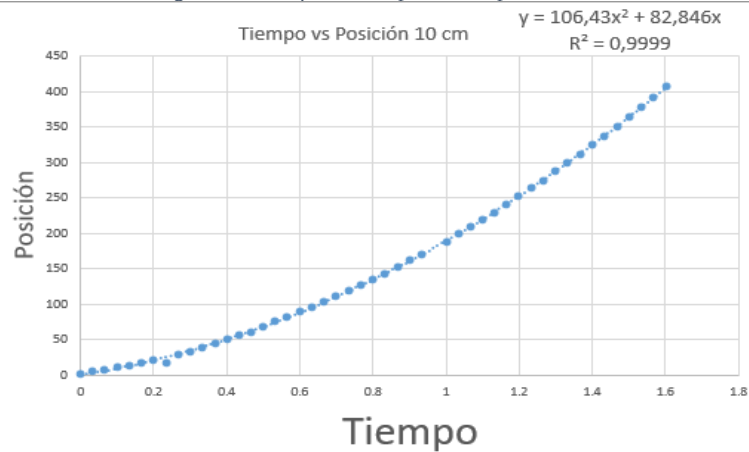


Ahora se presentan la tabla de datos con la que posteriormente realizan el gráfico de dispersión.

Figura 27. Tabla de datos.

t(s)	x(m)
0	1.354
0.033	4.033
0.067	7.118
0.1	10.54
0.133	13.68
0.167	17.32
0.2	21.28
0.233	17.13
0.267	29.97
0.3	32.78
0.333	39.67
0.367	44.77
0.4	50.33
0.433	55.92
0.467	61.86
0.5	68.4
0.533	74.82
0.567	81.71
0.6	88.75
0.633	96.31
0.667	103.8
0.7	111.8
0.733	119.8
0.767	127.2
0.8	135.2

Figura 28. Gráfico de dispersión experimento real I

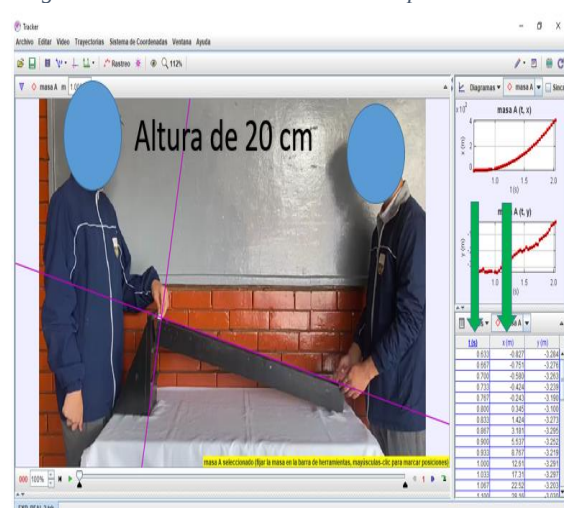


Los estudiantes trabajan en la toma de datos usando el experimento real y con una altura de 20 cm reales.

Figura 29. Inicio del experimento real II.



Figura 30. Toma de datos en Tracker experimento real II

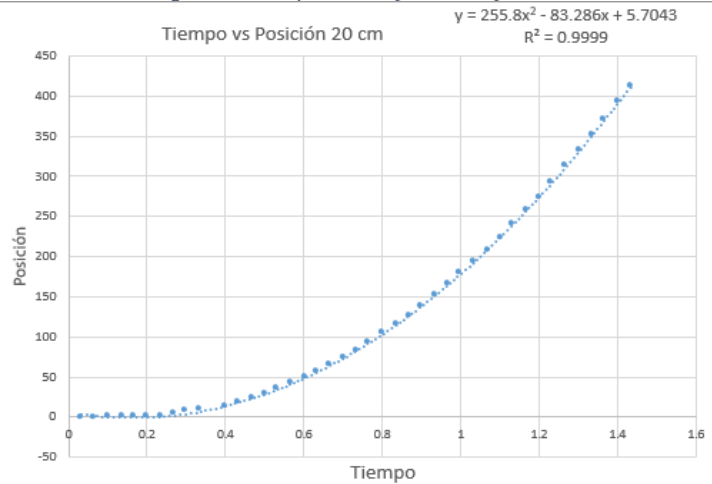


Ahora se presentan la tabla de datos con la que posteriormente realizan el gráfico de dispersión.

Figura 31. Tabla de datos.

t(s)	x(m)
0.033	-0.827
0.067	-0.751
0.1	-0.58
0.133	-0.424
0.167	-0.243
0.2	0.345
0.233	1.424
0.267	3.181
0.3	5.537
0.333	8.767
0.4	12.61
0.433	17.31
0.467	22.52
0.5	28.16
0.533	34.71
0.567	41.26
0.6	48.26
0.633	56.37
0.667	64.56
0.7	73.4
0.733	82.66
0.767	92.52
0.8	102.7
0.833	113.3
0.867	124.9

Figura 32. Gráfico de dispersión experimento real II

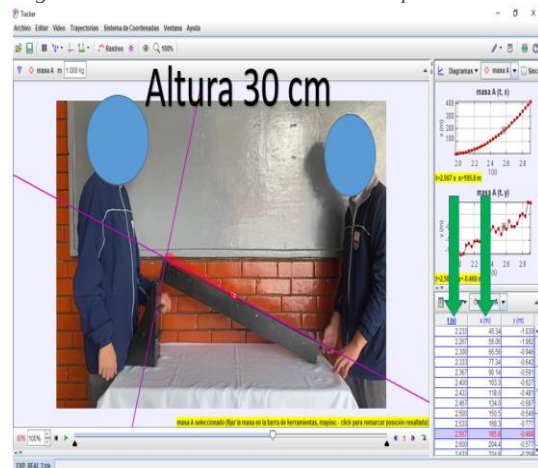


Los estudiantes trabajan en la toma de datos usando el experimento real y con una altura de 30 cm reales.

Figura 33. Inicio del experimento real III
Altura de 30 cm



Figura 34. Toma de datos en Tracker experimento real III



Ahora se presentan la tabla de datos con la que posteriormente realizan el gráfico de dispersión.

Figura 35. Tabla de datos

t(s)	x(m)
0	1.468
0.033	3.447
0.067	6.775
0.1	10.8
0.133	15.82
0.167	21.85
0.2	28.51
0.233	37.07
0.267	45.34
0.3	56.06
0.333	66.56
0.367	77.34
0.4	90.14
0.433	103.3
0.467	118.6
0.5	134
0.533	150.5
0.567	168.3
0.6	185.8
0.633	204.4
0.667	224.6
0.7	246.1
0.733	267.9
0.767	290.8
0.8	314.1

Figura 36. Gráfico de dispersión experimento real III



A partir de las tablas de datos y las gráficas de dispersión los estudiantes concluyeron que la forma de la gráfica es una curva y que a partir de que su valor de R cuadrado es muy cercano a 1, la función es una cuadrática, y por lo tanto se puede obtener su expresión algebraica. Esta información se obtuvo a partir de una grabación de audio hecha por el docente en formación.

Figura 37. Imagen del momento en el cual se generó la conclusión.



- Análisis de datos mediado por Excel I: realización de las tablas de datos y gráficos, para asociar con las variaciones de la función cuadrática con los videos hechos en Tracker.

EXPERIMENTO REAL - TRACKER

El ítem 1,2,3 y 4 es la construcción de la tabla de datos con las columnas diferencias de primero, segundo y tercer orden, esto a partir del experimento real con una altura de 10 cm, 20 cm, 30 cm.

Altura de 10 cm reales

Figura 38. Tabla del experimento real I con las diferencias.

t(s)	x(m)	DIFERENCIA DE PRIMER ORDEN	DIFERENCIA DE SEGUNDO ORDEN	DIFERENCIA DE TERCER ORDEN
0	1.354			
0.033	4.033	2.679		
0.067	7.118	3.085	0.41	
0.1	10.54	3.422	0.34	-0.07
0.133	13.68	3.14	-0.28	-0.62
0.167	17.32	3.64	0.50	0.78
0.2	21.28	3.96	0.32	-0.18
0.233	17.13	-4.15	-8.11	-8.43
0.267	29.97	12.84	16.99	25.10
0.3	32.78	2.81	-10.03	-27.02
0.333	39.67	6.89	4.08	14.11
0.367	44.77	5.1	-1.79	-5.87
0.4	50.33	5.56	0.46	2.25
0.433	55.92	5.59	0.03	-0.43
0.467	61.86	5.94	0.35	0.32
0.5	68.4	6.54	0.60	0.25
0.533	74.82	6.42	-0.12	-0.72
0.567	81.71	6.89	0.47	0.59
0.6	88.75	7.04	0.15	-0.32
0.633	96.31	7.56	0.52	0.37
0.667	103.8	7.49	-0.07	-0.59
0.7	111.8	8	0.51	0.58
0.733	119.8	8	0.00	-0.51
0.767	127.2	7.4	-0.60	-0.60
0.8	135.2	8	0.60	1.20
0.833	143.3	8.1	0.10	-0.50
0.867	151.7	8.4	0.30	0.20

Altura de 20 cm reales

Figura 39. Tabla del experimento real II con las diferencias.

t(s)	x(m)	DIFERENCIA DE PRIMER ORDEN	DIFERENCIA DE SEGUNDO ORDEN	DIFERENCIA DE TERCER ORDEN
0.033	-0.827			
0.067	-0.751	0.076		
0.1	-0.58	0.171	0.095	
0.133	-0.424	0.156	-0.015	-0.11
0.167	-0.243	0.181	0.025	0.04
0.2	0.345	0.588	0.407	0.382
0.233	1.424	1.079	0.491	0.084
0.267	3.181	1.757	0.678	0.187
0.3	5.537	2.356	0.599	-0.079
0.333	8.767	3.23	0.874	0.275
0.4	12.61	3.843	0.613	-0.261
0.433	17.31	4.7	0.857	0.244
0.467	22.52	5.21	0.51	-0.347
0.5	28.16	5.64	0.43	-0.08
0.533	34.71	6.55	0.91	0.48
0.567	41.26	6.55	0	-0.91
0.6	48.26	7	0.45	0.45
0.633	56.37	8.11	1.11	0.66
0.667	64.56	8.19	0.08	-1.03
0.7	73.4	8.84	0.65	0.57
0.733	82.66	9.26	0.42	-0.23
0.767	92.52	9.86	0.6	0.18
0.8	102.7	10.18	0.32	-0.28
0.833	113.3	10.6	0.42	0.1
0.867	124.9	11.6	1	0.58
0.9	137.1	12.2	0.6	-0.4
0.933	149.8	12.7	0.5	-0.1

Altura de 30 cm reales

Figura 40. Tabla del experimento III con las diferencias.

t(s)	x(m)	DIFERENCIA DE PRIMER ORDEN	DIFERENCIA DE SEGUNDO ORDEN	DIFERENCIA DE TERCER ORDEN
0	1.468			
0.033	3.447	1.979		
0.067	6.775	3.328	1.349	
0.1	10.8	4.025	0.697	-0.652
0.133	15.82	5.02	0.995	0.298
0.167	21.85	6.03	1.01	0.015
0.2	28.51	6.66	0.63	-0.38
0.233	37.07	8.56	1.9	1.27
0.267	45.34	8.27	-0.29	-2.19
0.3	56.06	10.72	2.45	2.74
0.333	66.56	10.5	-0.22	-2.67
0.367	77.34	10.78	0.28	0.5
0.4	90.14	12.8	2.02	1.74
0.433	103.3	13.16	0.36	-1.66
0.467	118.6	15.3	2.14	1.78
0.5	134	15.4	0.1	-2.04
0.533	150.5	16.5	1.1	1
0.567	168.3	17.8	1.3	0.2
0.6	185.8	17.5	-0.3	-1.6
0.633	204.4	18.6	1.1	1.4
0.667	224.6	20.2	1.6	0.5
0.7	246.1	21.5	1.3	-0.3
0.733	267.9	21.8	0.3	-1
0.767	290.8	22.9	1.1	0.8
0.8	314.1	23.3	0.4	-0.7
0.833	339.4	25.3	2	1.6
0.867	365.1	25.7	0.4	-1.6

En el ítem 5 y 6 se selecciona las columnas $t(s)$ y *primera diferencia* y se realiza el gráfico de dispersión con la columnas $t(s)$ y *primera diferencia*.

En el ítem 7 y 8 se selecciona las columnas $t(s)$ y *segunda diferencia* y se realiza el gráfico de dispersión con la columnas $t(s)$ y *segunda diferencia*.

Tabla de valores y Gráficos de dispersión para la altura de 10 cm

Figura 41. Tabla y gráfico de dispersión primera variación.



Figura 42. Tabla y gráfico de dispersión segunda variación.



Tabla de valores y Gráficos de dispersión para la altura de 20 cm

Figura 43. Tabla y gráfico de dispersión primera variación.

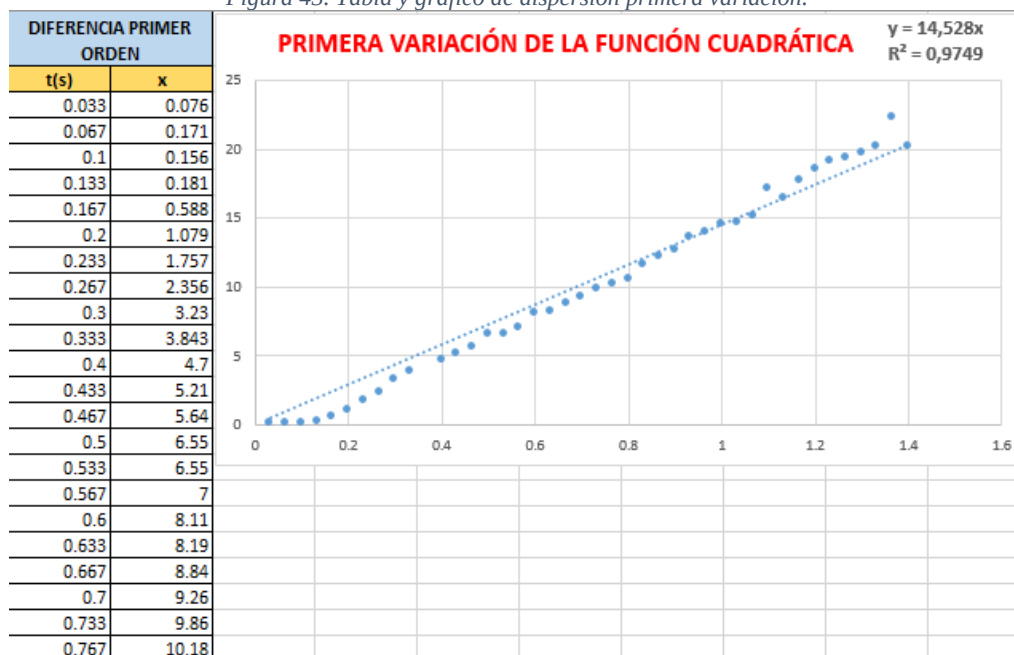


Figura 44. Tabla y gráfico de dispersión segunda variación.



Tabla de valores y Gráficos de dispersión para la altura de 30 cm

Figura 45. Tabla y gráfico de dispersión primera variación.

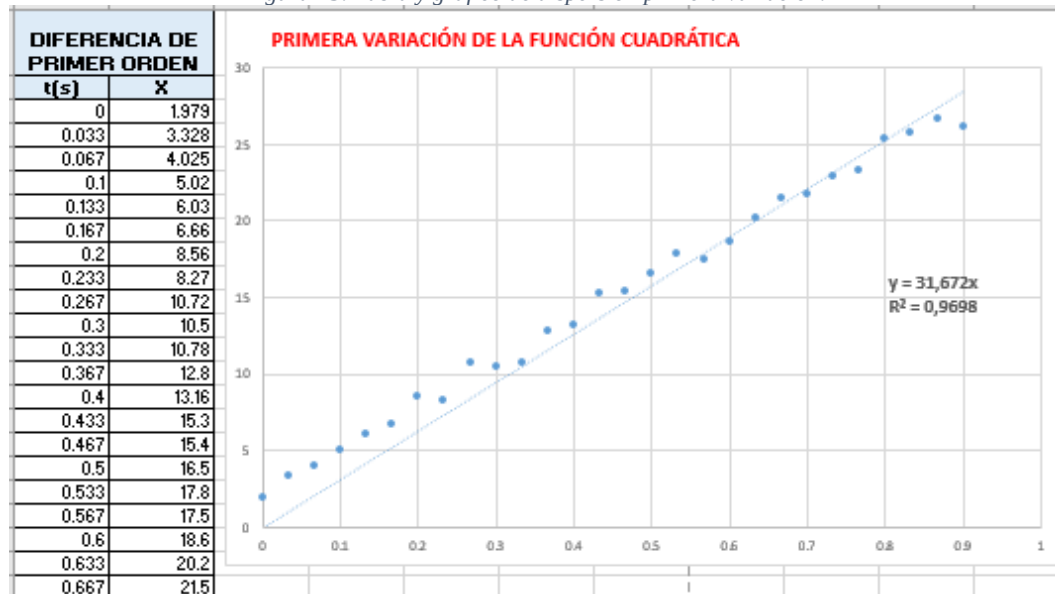
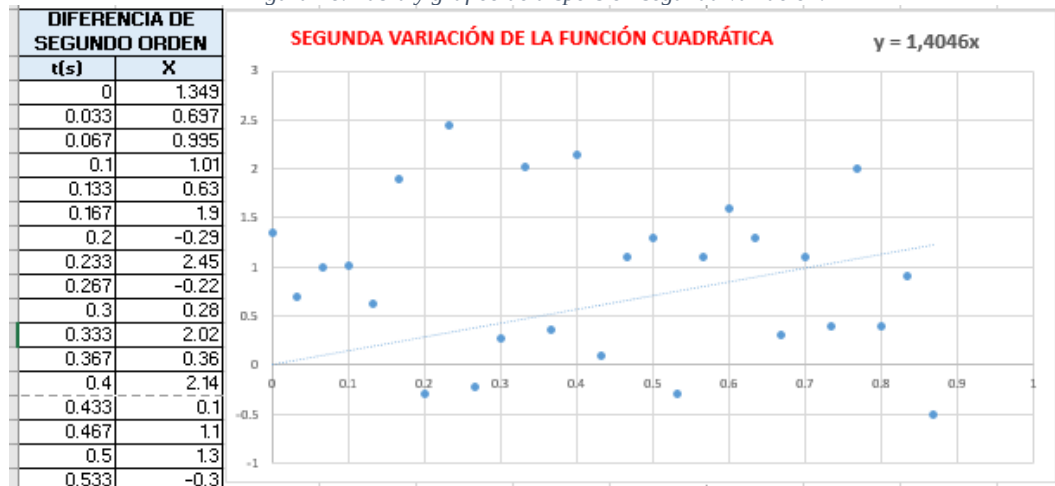


Figura 46. Tabla y gráfico de dispersión segunda variación.



En el ítem 11 los estudiantes deben escribir la expresión algebraica de la primera y la segunda variación de los experimentos reales con altura de 10 cm, 20 cm y 30 cm.

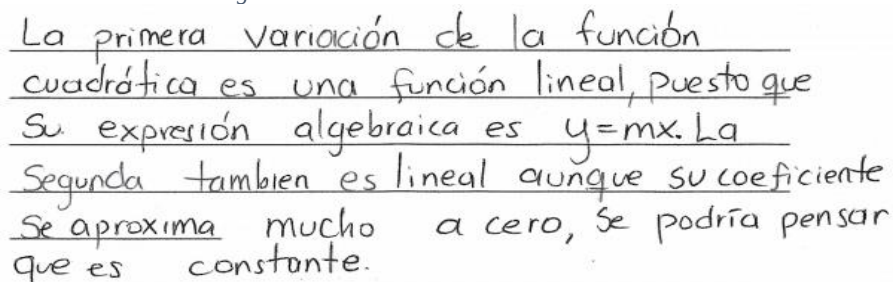
Figura 47. Tabla con expresiones algebraicas.

	EXPERIMENTO REAL 10 CM	EXPERIMENTO REAL 20 CM	EXPERIMENTO REAL 30 CM
PRIMERA VARIACIÓN	$y = 9,8692x$	$y = 14,528x$	$y = 31,672x$
SEGUNDA VARIACIÓN	$y = 0,2056x$	$y = 0,5444x$	$y = 1,4046x$

Los estudiantes reconocen la expresión algebraica mostrada en Excel. Según el MEN (2006) los alumnos deben ser capaces de: describir situaciones en diferentes tipos de representaciones (gráficas y algebraicas).

En el ítem, 12 los estudiantes deben sacar una conclusión a partir de la primera y la segunda variación de la función cuadrática.

Figura 48. Conclusiones de los estudiantes.



La primera variación de la función cuadrática es una función lineal, puesto que su expresión algebraica es $y=mx$. La segunda también es lineal aunque su coeficiente se aproxima mucho a cero, se podría pensar que es constante.

Los estudiantes logran identificar que la primera variación de una función cuadrática es una variación lineal y que la segunda es igual, sin embargo, quedan con la duda de si puede llegar a ser una constante puesto que dos de las tres expresiones algebraicas se acercan mucho a un valor constante tanto en su coeficiente lineal como en su término independiente, y podría interpretarse gráficamente y algebraicamente como una función constante. Es importante aclarar que en la expresión algebraica de la segunda variación del experimento real con altura de 30 cm no cumple con que el valor de la pendiente y del término independiente se acerque a cero, y esto se debe a que en la experimentación real hay variables que afectan la toma de medidas como por ejemplo la resistencia del aire, es aquí cuando se hace importante recurrir a la teoría y la simulación de experimentos para buscar las condiciones ideales y poder comprobar la afirmación de que la segunda variación es una variación constante.

Los estándares básicos de competencias en matemáticas nos muestran la importancia de estudiar la variación en las aulas de clase y esto se ve directamente relacionado con los siguientes estándares: describo y represento situaciones de variación relacionando diferentes representaciones; reconozco el conjunto de valores de cada una de las cantidades variables ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio (variación); identifico relaciones entre

propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas. uso comprensivamente medidas de dispersión y correlación.

Los NTCM (2000) mencionan la importancia de estudiar situaciones de variación y análisis de situaciones problema por medio de representaciones como gráficas, numéricas, físicas, algebraicas y verbales. Así mismo, extraer inferencias a partir de estas representaciones.

- Experimento simulado mediado por Phet: simulación de los experimentos previamente realizados y verificación de datos.

EXPERIMENTO SIMULADO I

Ítems 1, 2 y 3 es la construcción de los datos en el simulador para ingresarlos en la tabla y el ítem 4 es la construcción de la tabla de valores

Figura 49. Construcción de datos iniciales y toma de medidas

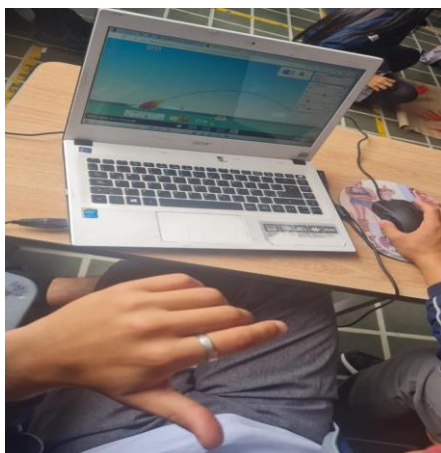
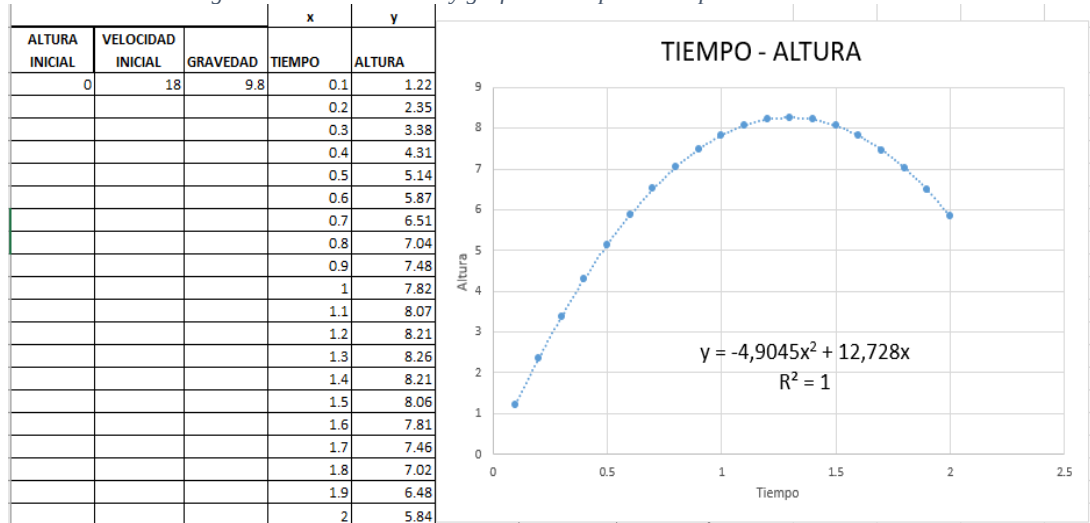


Figura 50. Tabla de valores experimento simulado I

VELOCIDAD INICIAL	GRAVEDAD	TIEMPO	ALTURA
78	9,8	0,1	1,22
		0,2	2,31
		0,3	3,38
		0,4	4,31
		0,5	5,14
		0,6	5,87
		0,7	6,51
		0,8	7,04
		0,9	7,48
		1	7,82
		1,1	8,07
		1,2	8,21
		1,3	8,26
		1,4	8,21
		1,5	8,06
		1,6	7,81
		1,7	7,46
		1,8	7,02
		1,9	6,48
		2	5,84

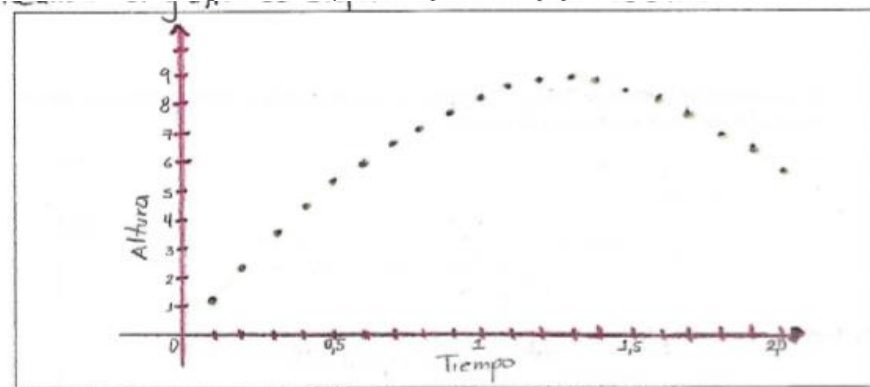
Ítem 5,6, 7 y 8 es la construcción de la tabla de datos y el gráfico en Excel con el valor de R cuadrado.

Figura 51. Tabla de datos y gráfico de dispersión experimento simulado I



Ítem 9 es la construcción de la gráfica en lápiz y papel.

Figura 52. Gráfico de dispersión en papel.



Ítem 10. Los estudiantes deben responder la forma que tiene el gráfico de dispersión.

Figura 53. Respuesta 10.

Tiene forma parabolico, como una curva hacia abajo.

Ítem 11 Los estudiantes deben reconocer los datos iniciales del experimento.

Figura 54. Respuesta 11.

$v_0 = 18 \text{ m/s}$ $y_0 = 0 \text{ m}$
 $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ $\alpha_0 = 45^\circ$

Ítem 12 Los estudiantes deben copiar la ecuación dada en Excel.

Figura 55. Respuesta 12.

$y = -4,9045x^2 + 12,728x ; R^2 = 1$

Ítem 13 y 14 es un referente teórico para los estudiantes sobre ecuación cuadrática y ecuación de posición.

Ítem 15 los estudiantes deben reconocer la variable independiente y dependiente.

Figura 56. Respuesta 15.

Variable dependiente es la altura.
Variable independiente es el tiempo.

Ítem 16 Los estudiantes deben hallar una relación entre los coeficientes de la función cuadrática y la ecuación de posición contra tiempo.

Figura 57. Respuesta 16.

El coeficiente cuadrático a es $-4,9045$ y en la ecuación de posición es $\frac{1}{2}g$, se puede establecer la siguiente igualdad:

$$a = \frac{1}{2}g$$

$$a = \frac{1}{2} \cdot (9,8 \text{ m/s})$$

Figura 58

$a = \frac{9,8 \text{ m/s}^2}{2}$
 $a = 4,9 \text{ m/s}^2 \rightarrow$ este valor es similar al coeficiente cuadrático de la ecuación dada en excel.

La velocidad inicial en y (V_{oy}) utiliza el ángulo y la V_0 por ende podemos hacer lo siguiente:

$$V_{oy} = V_0 \cdot \text{Sen } \alpha$$

$$V_{oy} = 18 \cdot \text{Sen } 45^\circ$$

$$V_{oy} = 12,7279220614 \text{ m/s}$$

Este valor coincide con el coeficiente lineal b de la ecuación cuadrática.

El término independiente no está, creemos que es cero. La altura inicial es cero metros, tal vez se puedan relacionar.

Ítem 17 Los estudiantes deben sacar las conclusiones sobre el experimento simulado en Phet teniendo como referencia las relaciones obtenidas en el ítem 16.

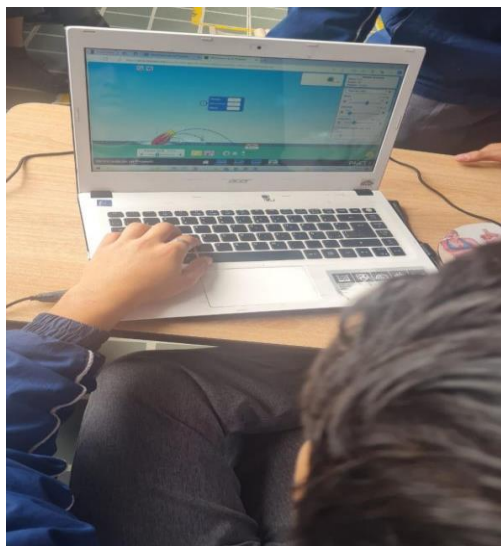
Figura 59. Respuesta 17.

• El parámetro a se relaciona con la gravedad que es la aceleración.
• El parámetro b se relaciona con la velocidad inicial en y .
• El parámetro c creemos que se relaciona con la altura inicial.

EXPERIMENTO SIMULADO II

Ítems 1, 2, 3 y 4 es la construcción de los datos en el simulador para ingresarlos en la tabla.

Figura 60. Construcción de datos iniciales y toma de medidas



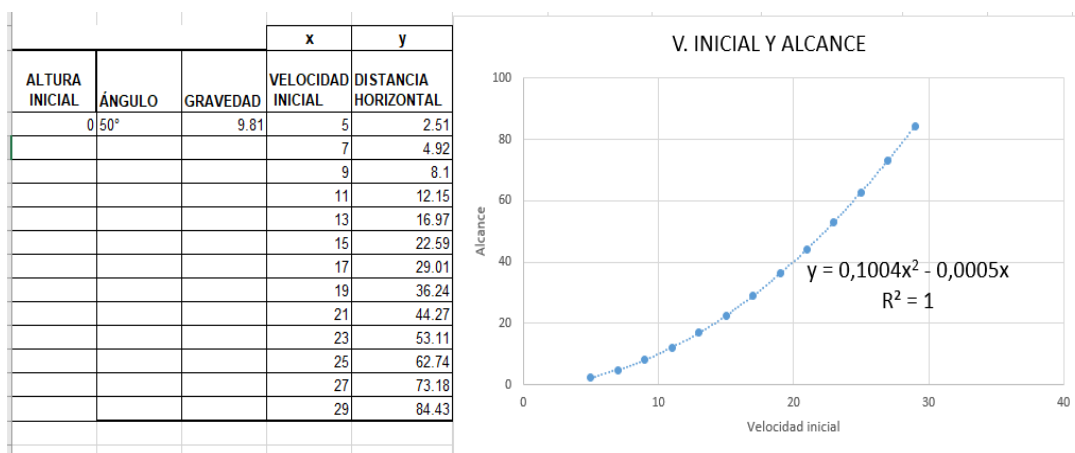
Ítem 5 es la construcción de la tabla de valores

Figura 61. Tabla de valores experimento simulado II

ÁNGULO	GRAVEDAD	VELOCIDAD INICIAL	DISTANCIA HORIZONTAL
50°	9,81	5	2,51
		7	4,92
		9	8,1
		11	12,15
		13	16,97
		15	22,59
		17	29,01
		19	36,24
		21	44,27
		23	53,11
		25	62,74
		27	73,18
		29	84,43

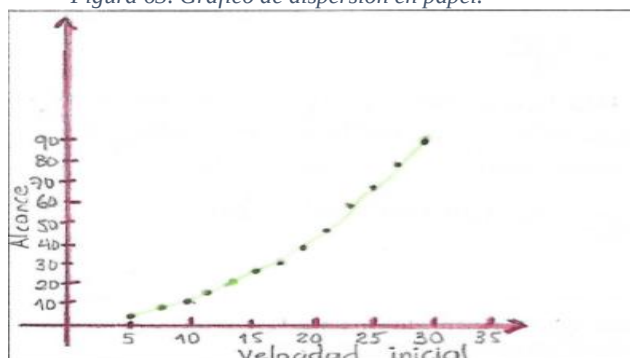
Ítem 6,7 y 8 es la construcción de la tabla de datos y el gráfico en Excel con el valor de R cuadrado.

Figura 62. Tabla de datos y gráfico de dispersión experimento simulado II



Ítem 9 es la construcción de la gráfica en lápiz y papel.

Figura 63. Gráfico de dispersión en papel.



Ítem 10 Los estudiantes deben responder la forma que tiene el gráfico de dispersión.

Figura 64. Respuesta 10.

Tiene forma parabólica, como una curva que abre hacia arriba.

Ítem 11 Los estudiantes deben reconocer los datos iniciales del experimento.

Figura 65. Respuesta 11.

$$g = \underline{9,81 \text{ m/s}^2} \quad \alpha_0 = \underline{50^\circ}$$

Ítem 12 Los estudiantes deben copiar la ecuación dada en Excel.

Figura 66. Respuesta 12.

$$\underline{y = 0,1004x^2 - 0,0005x; R^2 = 1}$$

Ítem 13 y 14 es un referente teórico para los estudiantes sobre ecuación cuadrática y ecuación de posición.

Ítem 15 los estudiantes deben reconocer la variable independiente y dependiente.

Figura 67. Respuesta 15.

Variable independiente es Velocidad inicial
Variable dependiente es el alcance máximo horizontal

Ítem 16 Los estudiantes deben hallar una relación entre los coeficientes de la función cuadrática y la ecuación de alcance máximo.

Figura 68. Respuesta 16.

$$X_{\text{máx}} = \frac{V_0^2 \cdot \text{Sen}(2\alpha)}{g}$$

El $X_{\text{máx}}$ hace las veces de y y V_0 las veces de x .
ahora el coeficiente cuadrático es $\frac{\text{Sen}(2\alpha)}{g}$.
Realizamos la sustitución y obtenemos:

$$a = \frac{\text{Sen}(2 \cdot 50^\circ)}{9,81 \text{ m/s}^2} = 0,1003881502 \text{ s}^2/\text{m}$$

Ítem 17 Los estudiantes deben sacar las conclusiones sobre el experimento simulado en Phet teniendo como referencia las relaciones obtenidas en el ítem 16.

Figura 69. Respuesta 17.

El coeficiente cuadrático a depende de la gravedad.
y se relaciona con la aceleración del objeto

EXPERIMENTO SIMULADO III

Ítems 1, 2, 3 y 4 es la construcción de los datos en el simulador para ingresarlos en la tabla. Ítem 5 es la construcción de la tabla de valores.

tabla.

Figura 70. Construcción de datos iniciales y toma de medidas

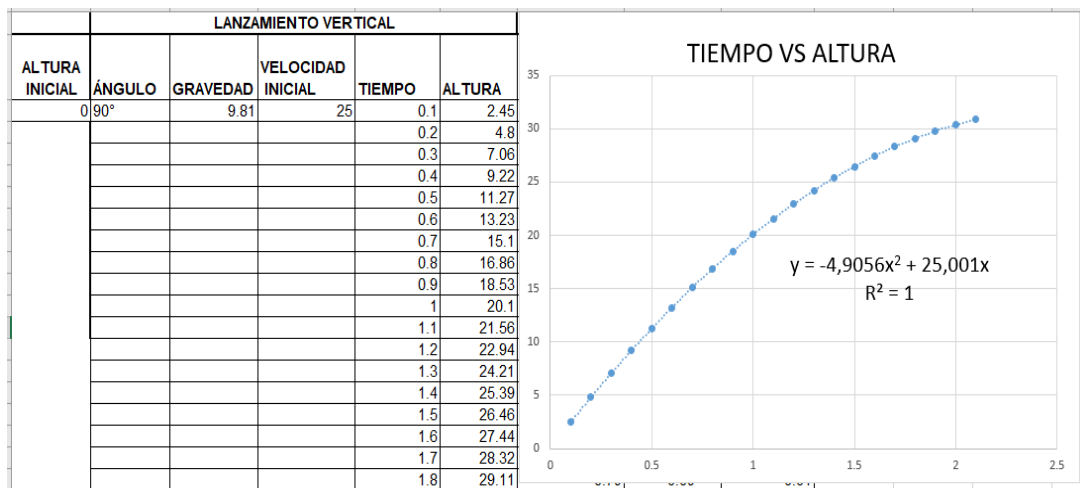


Figura 71. Tabla de valores experimento simulado III

ÁNGULO	GRAVEDAD	VELOCIDAD INICIAL	TIEMPO	ALTURA
40°	9,81	25	0,1	2,45
			0,2	4,8
			0,3	7,06
			0,4	9,22
			0,5	11,27
			0,6	13,23
			0,7	15,1
			0,8	16,86
			0,9	18,53
			1	20,1
			1,1	21,56
			1,2	22,94
			1,3	24,21
			1,4	25,39
			1,5	26,46
			1,6	27,44
			1,7	28,32
			1,8	29,11
			1,9	29,81
			2	30,38
			2,1	30,84

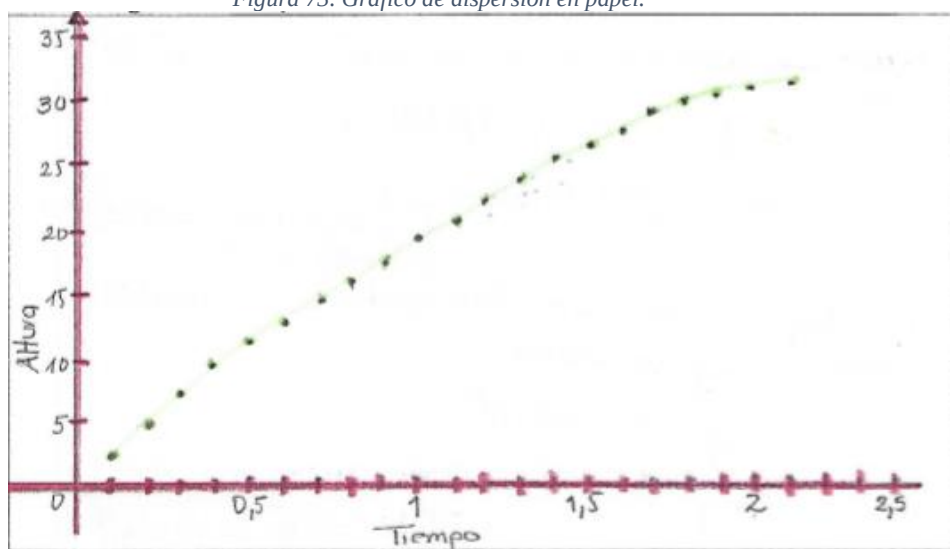
Ítem 6, 7 y 8 es la construcción de la tabla de datos y el gráfico en Excel con el valor de R cuadrado.

Figura 72. Tabla de datos y gráfico de dispersión experimento simulado III



Ítem 9 es la construcción de la gráfica en lápiz y papel.

Figura 73. Gráfico de dispersión en papel.



Ítem 10 Los estudiantes deben responder la forma que tiene el gráfico de dispersión.

Figura 74. Respuesta 10.

Tiene forma parabólica, como una curva hacia abajo.

Ítem 11 Los estudiantes deben reconocer los datos iniciales del experimento.

Figura 75. Respuesta 11.

$$v_0 = \underline{25 \text{ m/s}}$$

$$g = \underline{9,81 \text{ m/s}^2}$$

$$\alpha_0 = \underline{90^\circ}$$

Ítem 12 Los estudiantes deben copiar la ecuación dada en Excel.

Figura 76. Respuesta 12.

$$\underline{y = -4,9056x^2 + 25,001x \text{ y } R^2 = 1}$$

Ítem 13 y 14 es un referente teórico para los estudiantes sobre ecuación cuadrática y ecuación de posición.

Ítem 15 los estudiantes deben reconocer la variable independiente y dependiente.

Figura 77. Respuesta 15.

Variable independiente Tiempo
Variable dependiente Altura

Ítem 16 Los estudiantes deben hallar una relación entre los coeficientes de la función cuadrática y la ecuación de posición contra tiempo.

Figura 78. Respuesta 16.

Para el valor del coeficiente cuadrático se usa lo siguiente:

$$a = \frac{1}{2}g \rightarrow a = \frac{1}{2}(-9,81 \text{ m/s}^2)$$

$$a = -4,905 \text{ m/s}^2 \rightarrow \text{Este valor coincide con el coeficiente cuadrático dado en excel}$$

La $V_0 = V_{0y}$ por ser un lanzamiento vertical o
También $V_{0y} = V_0 \cdot \text{Sen } \alpha$
 $V_{0y} = 25 \cdot \text{Sen } 90^\circ$
 $V_{0y} = 25 \text{ m/s} \rightarrow \text{Este valor coincide con el coeficiente lineal dado en la ecuación de excel}$
 y C coincide con la altura inicial porque es cero.

Ítem 17 Los estudiantes deben sacar las conclusiones sobre el experimento simulado en Phet teniendo como referencia las relaciones obtenidas en el ítem 16.

Figura 79. Respuesta 17.

- El coeficiente a se relaciona con la aceleración que es la gravedad
- El coeficiente b se relaciona con la velocidad inicial del objeto y el coeficiente c con la altura inicial.

EXPERIMENTO SIMULADO IV

Ítems 1, 2 y 3 es la construcción de los datos en el simulador para ingresarlos en la tabla.

Figura 80. Construcción de datos iniciales y toma de medidas.



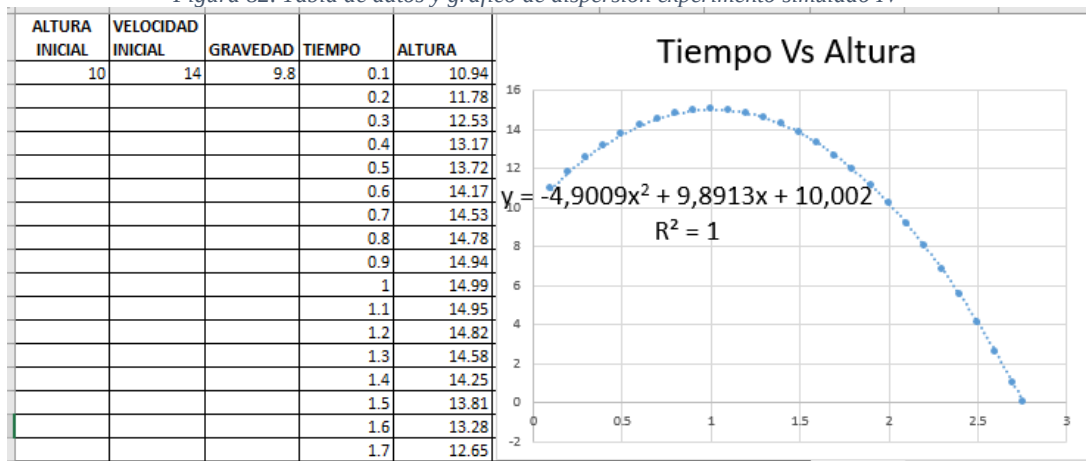
Ítem 4 es la construcción de la tabla de valores.

Figura 81. Tabla de valores experimento simulado IV

ALTURA INICIAL	VELOCIDAD INICIAL	GRAVEDAD	TIEMPO	ALTURA
10	14	9.8	0.1	10.94
			0.2	11.78
			0.3	12.53
			0.4	13.17
			0.5	13.72
			0.6	14.17
			0.7	14.53
			0.8	14.78
			0.9	14.94
			1.0	14.99
			1.1	14.95
			1.2	14.82
			1.3	14.58
			1.4	14.25
			1.5	13.81
			1.6	13.28
			1.7	12.65
			1.8	11.93
			1.9	11.14
			2.0	10.18
			2.1	9.16

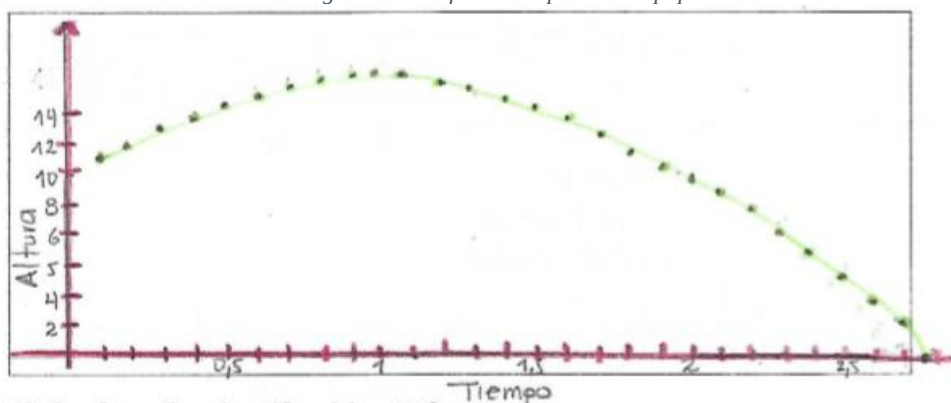
Ítem 5,6 y 7 es la construcción de la tabla de datos y el gráfico en Excel con el valor de R cuadrado.

Figura 82. Tabla de datos y gráfico de dispersión experimento simulado IV



Ítem 8 es la construcción de la gráfica en lápiz y papel.

Figura 83. Gráfico de dispersión en papel.



Ítem 10 Los estudiantes deben responder la forma que tiene el gráfico de dispersión.

Figura 84. Respuesta 10.

Tiene forma parabolica, como una curva hacia abajo.

Ítem 11 Los estudiantes deben reconocer los datos iniciales del experimento.

Figura 85. Respuesta 11.

$$v_0 = 14 \text{ m/s} \quad y_0 = 10 \text{ m}$$
$$g = 9,81 \text{ m/s}^2 \quad \alpha_0 = 45^\circ$$

Ítem 12 Los estudiantes deben copiar la ecuación dada en Excel.

Figura 86. Respuesta 12.

$$y = -4,9009x^2 + 9,8913x + 10,002 \text{ y } R^2 = 1.$$

Ítem 13 y 14 es un referente teórico para los estudiantes sobre ecuación cuadrática y ecuación de posición.

Ítem 15 los estudiantes deben reconocer la variable independiente y dependiente.

Figura 87. Respuesta 15.

Variable independiente Tiempo

Variable dependiente Altura.

Ítem 16 Los estudiantes deben hallar una relación entre los coeficientes de la función cuadrática y la ecuación de posición contra tiempo.

Figura 88. Respuesta 16.

El coeficiente cuadrático $a = \frac{1}{2}g$ luego:

$$a = \frac{1}{2}(-9,81 \text{ m/s}^2)$$

$a = -4,905 \text{ m/s}^2$ → Este valor coincide con el coeficiente cuadrático dado en la ecuación de excel.

Para el valor b se tiene que V_{0y} .

$$V_{0y} = V_0 \cdot \text{Sen} \alpha$$
$$V_{0y} = 14 \text{ m/s} \cdot \text{Sen} 45^\circ$$
$$V_{0y} = 9,8994949366$$
$$V_{0y} = 9,891 \text{ m/s}$$

→ Este valor coincide con el coeficiente b de la ecuación dada en excel.

Excel nos proporciona que el coeficiente c es 10,002 y se sabe que la altura inicial es de 10 m.

Ítem 17 Los estudiantes deben sacar las conclusiones sobre el experimento simulado en Phet teniendo como referencia las relaciones obtenidas en el ítem 16.

Figura 89. Respuesta 17.

- El parámetro a se relaciona con la aceleración que en este caso es la gravedad.
- El parámetro b se relaciona con la velocidad inicial y del objeto.
- El parámetro c se relaciona con la altura inicial.

EXPERIMENTO SIMULADO V

Ítems 1, 2 y 3 es la construcción de los Ítem 4 es la construcción de la tabla de valores.

datos en el simulador para ingresarlos

en la tabla.

Figura 91. Tabla de valores experimento simulado V

LANZAMIENTO VERTICAL					
Altura Inicial	ÁNGULO	GRAVEDAD	V. INICIAL	TIEMPO	ALTURA
5	90°	11	25	0,1	7,44
				0,2	9,78
				0,3	12
				0,4	14,12
				0,5	16,12
				0,6	18,02
				0,7	19,8
				0,8	21,48
				0,9	23,05
				1	24,5
				1,1	25,85
				1,2	27,08
				1,3	28,21
				1,4	29,22
				1,5	30,13
				1,6	30,92
				1,7	31,61
				1,8	32,18
				1,9	32,65
				2	33
				2,1	33,25

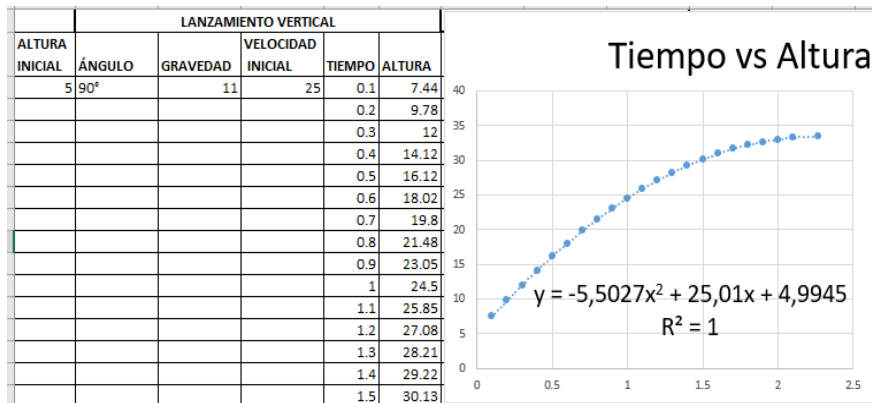
Figura 90. Construcción de datos iniciales y toma de medidas.



Ítem 5,6 y 7 es la construcción de la tabla de datos

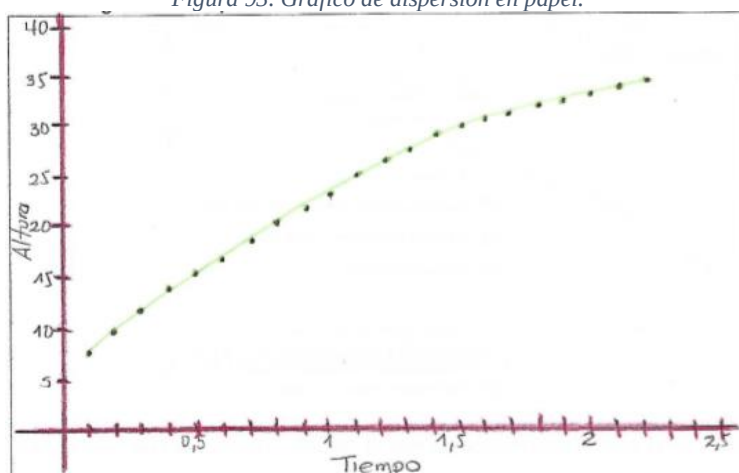
y el gráfico en Excel con el valor de R cuadrado.

Figura 92. Tabla de datos y gráfico de dispersión experimento simulado V



Ítem 8 es la construcción de la gráfica en lápiz y papel.

Figura 93. Gráfico de dispersión en papel.



Ítem 9 Los estudiantes deben responder la forma que tiene el gráfico de dispersión.

Figura 94. Respuesta 9.

Tiene forma parabólica, como una curva hacia abajo.

Ítem 10 Los estudiantes deben reconocer los datos iniciales del experimento.

Figura 95. Respuesta 10.

$$v_0 = \underline{25 \text{ m/s}}$$

$$y_0 = \underline{5 \text{ m}}$$

$$g = \underline{-11 \text{ m/s}^2}$$

$$\alpha_0 = \underline{90^\circ}$$

Ítem 11 Los estudiantes deben copiar la ecuación dada en Excel.

Figura 96. Respuesta 11.

$$\underline{y = -5,5027x^2 + 25,01x + 4,9945}$$

Ítem 12 y 13 es un referente teórico para los estudiantes sobre ecuación cuadrática y ecuación de posición.

Ítem 14 los estudiantes deben reconocer la variable independiente y dependiente.

Figura 97. Respuesta 12.

Variable independiente Tiempo
Variable dependiente Altura

Ítem 15 Los estudiantes deben hallar una relación entre los coeficientes de la función cuadrática y la ecuación de posición contra tiempo.

Figura 98. Respuesta 15.

El coeficiente cuadrático $a = \frac{1}{2}g$ luego:

$$a = \frac{1}{2}(-11 \text{ m/s}^2)$$

$$a = -5,5 \text{ m/s}^2$$

Este valor coincide con el coeficiente cuadrático dado en la ecuación del excel.

Para el valor b se tiene que $V_{oy} = V_0 \text{Sen} \alpha$

$$V_{oy} = 25 \text{ m/s} \cdot \text{Sen } 90^\circ$$

$$V_{oy} = 25 \text{ m/s}$$

Este valor coincide con el coeficiente b de la ecuación que dió excel

La altura inicial es de 5m y el coeficiente c de excel es de 4,9945.

Ítem 16 Los estudiantes deben sacar las conclusiones sobre el experimento simulado en Phet teniendo como referencia las relaciones obtenidas en el ítem 15.

Figura 99. Respuesta 16.

- El parámetro a se relaciona con la aceleración que en este caso es la gravedad.
- El parámetro b se relaciona con la velocidad inicial en y del objeto.
- El parámetro c se relaciona con la altura inicial.

En general para los cinco experimentos simulados se tiene la siguiente estructura: primero la elaboración de la tabla de valores a partir de los experimentos simulados en Phet; luego, construir el gráfico de dispersión con su respectiva representación algebraica y por último, buscar por medio de la comparación entre la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ y la ecuación de posición $y(t) = y_0 + v_0t + \frac{1}{2}gt^2$ la relación que existe entre los parámetros a, b, c de la función cuadrática y la posición inicial del objeto, la velocidad inicial y la aceleración.

En los experimentos se evidencia que los estudiantes lograron navegar en el simulador, construir el experimento y obtener los datos para la representación numérica y gráfica, esto se ve reflejado en las primeras 5 respuestas de los talleres. Según los NTCM (2000) los estudiantes deben ser capaces de: “recoger, organizar y analizar datos de forma sistémica y explorar problemas y describir los resultados usando modelos o representaciones matemáticas

numéricas y gráficas. Adicionalmente deben utilizar curvas de ajuste para efectuar predicciones a partir de los datos”. (pp 71-147)

Los estudiantes encontraron la relación que existe entre los parámetros de la función cuadrática y la ecuación de posición, donde $a = \frac{1}{2}g$, $b = v_{0y}$, $c = y_0$. Según los NTCM (2000) los estudiantes deben ser capaces de:

“Utilizar una idea matemática para avanzar en su comprensión de otras ideas matemáticas; expresar ideas matemáticas oralmente y por escrito, construir argumentos sencillos validos; elaborar modelos de fenómenos del mundo real con diversos tipos de funciones; representar y analizar relaciones funcionales utilizando tablas, reglas orales, ecuaciones y gráficas; reconocer que con el mismo tipo de función pueden elaborarse modelos para una gran variedad de situaciones problema; analizar los efectos que ocasiona en las gráficas de funciones un cambio de parámetros; similar y extraer inferencias a partir de diagramas, tablas y gráficas que recojan datos de situaciones del mundo real y, entender y aplicar medidas de correlación”. (pp 71-147)

- Análisis de datos mediado por Excel II: realización de las tablas de datos y gráficos, para asociar con las variaciones de la función cuadrática (experimentos simulados).

EXPERIMENTO SIMULADO I:

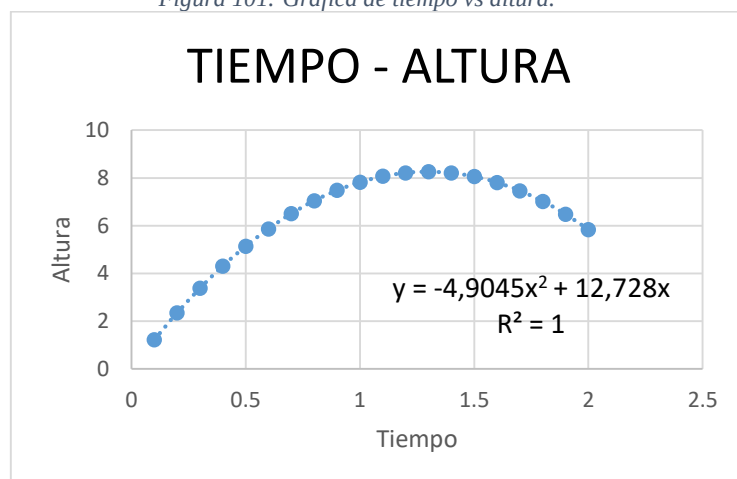
En los ítems 1,2, 3 y 4 se realiza la construcción de la tabla de valores de la primera y segunda diferencia de los datos a partir de la tabla obtenida en el experimento simulado I.

Figura 100. Tabla de datos con las diferencias.

ALTURA INICIAL	VELOCIDAD INICIAL	GRAVEDAD	TIEMPO	ALTURA	PRIMERA DIFERENCIA	SEGUNDA DIFERENCIA	TERCERA DIFERENCIA
0	18	9.8	0.1	1.22			
			0.2	2.35	1.13		
			0.3	3.38	1.03	-0.10	
			0.4	4.31	0.93	-0.10	0.00
			0.5	5.14	0.83	-0.10	0.00
			0.6	5.87	0.73	-0.10	0.00
			0.7	6.51	0.64	-0.09	0.01
			0.8	7.04	0.53	-0.11	-0.02
			0.9	7.48	0.44	-0.09	0.02
			1	7.82	0.34	-0.10	-0.01
			1.1	8.07	0.25	-0.09	0.01
			1.2	8.21	0.14	-0.11	-0.02
			1.3	8.26	0.05	-0.09	0.02
			1.4	8.21	-0.05	-0.10	-0.01
			1.5	8.06	-0.15	-0.10	0.00
			1.6	7.81	-0.25	-0.10	0.00
			1.7	7.46	-0.35	-0.10	0.00
			1.8	7.02	-0.44	-0.09	0.01
			1.9	6.48	-0.54	-0.10	-0.01
			2	5.84	-0.64	-0.10	0.00

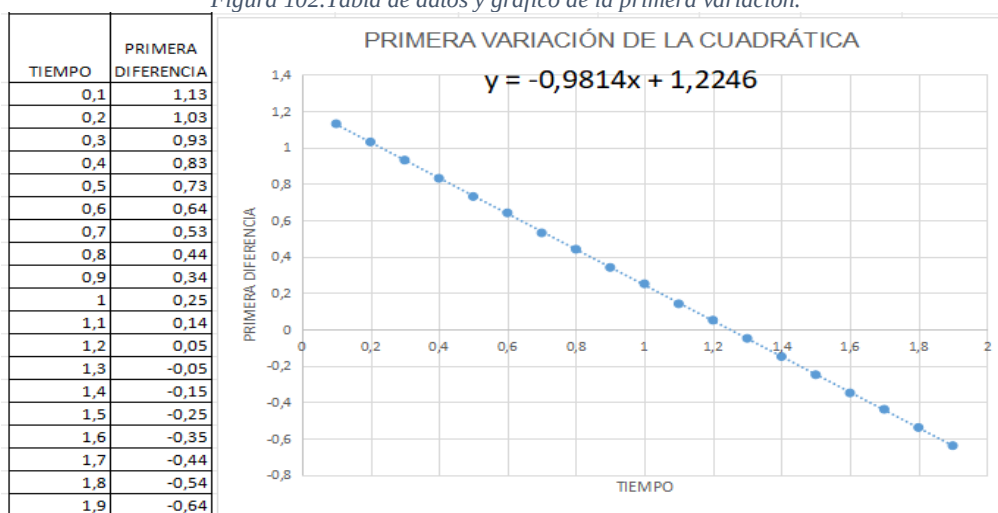
En el ítem 5 se realiza el gráfico de dispersión de tiempo vs altura.

Figura 101. Gráfica de tiempo vs altura.



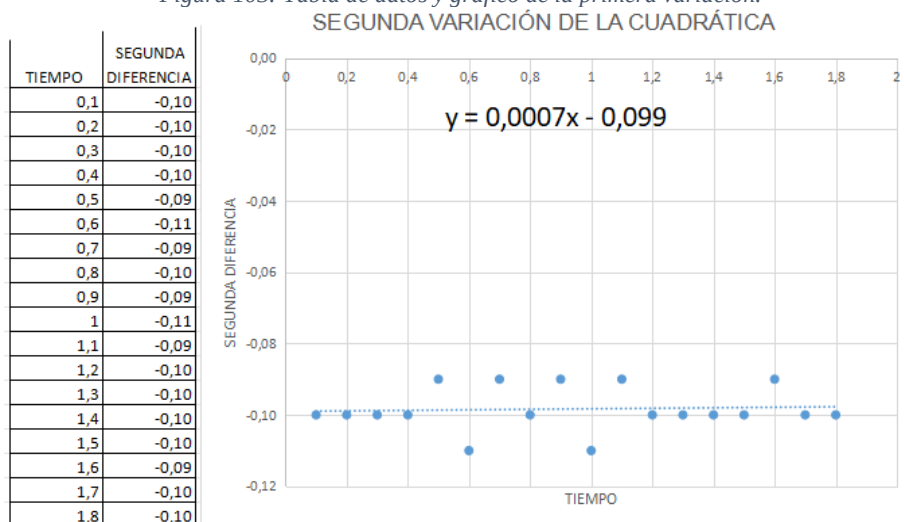
En el ítem 6 y 7 se seleccionan las columnas tiempo y primera diferencia y luego se hace el gráfico de dispersión que corresponde a estos datos, por último, se le asigna el nombre de primera variación de la cuadrática.

Figura 102. Tabla de datos y gráfico de la primera variación.



En el ítem 8 y 9 se seleccionan las columnas tiempo y segunda diferencia y luego se hace el gráfico de dispersión que corresponde a estos datos, por último, se le asigna el nombre de segunda variación de la cuadrática.

Figura 103. Tabla de datos y gráfico de la primera variación.



Para el experimento II, III, IV y V se realizan los mismos pasos del 1 al 9 mostrados en el experimento I, para acceder a la evidencia ir al [Anexo H](#).

En el ítem 10 los estudiantes deben escribir la expresión algebraica de la primera y segunda variación de los cinco experimentos simulados con Phet.

Figura 104. Tabla con expresiones algebraicas de la primera y segunda variación.

EXPERIMENTO	PRIMERA VARIACIÓN	SEGUNDA VARIACIÓN
SIMULADO I	$y = -0,9814x + 1,2246$	$y = 0,0007x - 0,099$
SIMULADO II	$y = 0,4016x + 0,4007$	$y = 0,0002x + 0,8009$
SIMULADO III	$y = -0,9809x + 2,4509$	$y = -0,0004x - 0,0975$
SIMULADO IV	$y = -0,9225x + 0,8864$	$y = -0,0003x - 0,0976$
SIMULADO V	$y = -1,097x + 2,4434$	$y = 0,0042x - 0,1134$

En el ítem 11, los estudiantes deben responder, ¿Qué puede concluir de la primera y segunda variación de la función cuadrática?

Figura 105. Respuesta 11.

Como en el experimento con tracker la primera variación es una función lineal y la segunda variación también es lineal, sin embargo se acerca mucho a cero.

Los estudiantes reconocen que la primera variación de la función cuadrática es una variación lineal y la segunda es posiblemente una constante, esto lo determinan teniendo como referencia la representación gráfica y algebraica de las funciones y considerando que la pendiente de las rectas de regresión es muy baja.

Según el MEN los estudiantes deben desarrollar las siguientes competencias:

“Describo y represento situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas); reconozcan el conjunto de valores de cada una de las cantidades variables ligadas entre sí en situaciones conocidas de cambio (variación); modelo situaciones de variación con funciones polinómicas; reconozco tendencias que se presentan en conjuntos de variables relacionadas y uso comprensivamente medidas de dispersión ” (2006, pp 86 - 87)

Según los NCTM los estudiantes deben ser capaces de:

“Explorar problemas y describir los resultados usando modelos o representaciones matemáticas gráficas, numéricas, y algebraicas; representar y analizar relaciones funcionales utilizando tablas, reglas orales, ecuaciones y gráficas; hacer traducciones entre representaciones tabulares, gráficas y analíticas de funciones; utilizar curvas de ajuste para efectuar predicciones a partir de los datos, aplicar el pensamiento matemático y la creación de modelos para resolver problemas que surjan en otras áreas con otra ciencia; analizar relaciones funcionales para explicar de qué forma un cambio de una cantidad provoca un cambio de otra; representar situaciones y patrones numéricos con tablas, gráficas y explorar las interrelaciones de estas representaciones; elaborar, leer e interpretar tablas y diversas representaciones gráficas; formular inferencias y argumentos convincentes que se basen en el análisis de datos; aplicar estrategias integradas de resolución de problemas matemáticos para resolver problemas dentro y fuera de las matemáticas” (2000, pp. 70 - 147)

9. Conclusiones y posibles desarrollos

El desarrollo del presente trabajo permitió establecer desde los objetivos específicos propuestos lo siguiente:

1. Desde el establecimiento del vínculo entre la matemática y la física para resignificar los parámetros de una función cuadrática los estudiantes lograron:

- Redescubrir que los parámetros de la función cuadrática y los elementos de la ecuación de posición de un cuerpo en cinemática están relacionados, esto se comprobó por medio de tres experimentos reales y cinco simulados donde los estudiantes pusieron en juego su conocimiento previo y las capacidades que tiene para construir sobre el aprendizaje ya adquirido.

2. Desde el análisis de la función cuadrática como un concepto que modela fenómenos de la realidad:

- Los estudiantes lograron encontrar relaciones entre la primera y la segunda variación de la función cuadrática, esto se logró a través de tres experimentos reales y luego de cinco simulados que permitieron ratificar las predicciones que se hicieron en primera instancia. Esto comprueba lo expuesto por los documentos curriculares nacionales e internacionales donde manifiesta que se debe trabajar con la variación en escenarios reales como el aula de clase.
- Se presentó dificultad en encontrar una regularidad total en la primera y segunda variación de la función cuadrática y en la relación directa entre los coeficientes a , b y c con la aceleración, la velocidad inicial y la altura inicial del objeto en el plano inclinado. En la parte de la regularidad en cuanto a las variaciones, la dificultad que se presentó tiene que ver con la pendiente de la expresión algebraica del experimento real III (altura 30 cm reales) porque no se acerca a cero de la manera que se esperaba y desde la parte estadística el coeficiente de correlación es muy bajo y en la gráfica los puntos están

muy dispersos, por lo tanto, no se podía establecer una correlación entre las variables. Así mismo, no se pudo establecer una relación entre los parámetros de la función cuadrática y los elementos de la ecuación de posición contra el tiempo, lo único que se pudo determinar a partir del experimento real fue la forma de la gráfica y la expresión algebraica de la misma, esto dio como resultado una ecuación cuadrática y una curva en la representación gráfica.

3. Desde la propuesta para el aprendizaje significativo de la función cuadrática se logró evidenciar que los estudiantes:

- Lograron dar significado a las representaciones verbales, numéricas, visuales y algebraicas de la función cuadrática a través de la experimentación real y simulada utilizando papel, lápiz, Excel, Tracker y Phet y determinando unas conclusiones a partir de los conocimientos previos que tenían y de la comparación entre las expresiones algebraicas de la función cuadrática y la ecuación de posición en cinemática.
- Lograron dar significado a los conceptos como: parámetros de la función cuadrática, coeficiente de correlación, ecuaciones, expresiones algebraicas, aceleración, velocidad y altura inicial, esto se logró por medio de cinco experimentos simulados que permitieron establecer una relación directa entre los coeficientes de la función cuadrática y los elementos de la ecuación de posición con respecto al tiempo de la cinemática.
- Lograron dar significado a las proposiciones como: la primera variación de la función cuadrática es una variación lineal y la segunda es una constante. Esto se logró por medio de la experimentación real y simulada, a partir de la representación algebraica y gráfica de la primera y segunda variación de la función cuadrática; los parámetros a , b y c se relacionan de manera directa con la aceleración de la gravedad, la velocidad inicial en el eje Y y la altura inicial en la que se lanza un objeto. Esto se logró por medio de cinco

experimentos simulados que tenían diferentes condiciones iniciales como altura a 0 m, 5m y 10 m, velocidades iniciales diferentes, y ángulos de lanzamiento diferentes, esto se hizo con el fin de que los estudiantes descubrieran la relación que existía entre los elementos del movimiento parabólico y los parámetros de la función cuadrática.

4. Desde la formación como investigador me enseñó a buscar información confiable y verídica, además aprender a escribir que no es una tarea fácil, aprendí normas APA, a relacionar la matemática con otras áreas del conocimiento como la física, a construir talleres educativos que permitan redescubrir relaciones entre objetos matemáticos y objetos de otras ciencias.

5. Desde mi ejercicio como profesor no titulado.

- Este trabajo de grado enriqueció mi labor como docente en ejercicio porque me mostro que los estudiantes deben ver las matemáticas como una aplicación de la realidad y no como simples algoritmos y ecuaciones que determinan unos resultados numéricos sin ningún tipo de significado.
- Me enseñó a utilizar diferentes recursos como la tecnología, los experimentos reales y simulados y la construcción de aprendizaje significativo en los estudiantes desde la matemática.

Ampliaciones

Como futuras ampliaciones al presente trabajo que pueden constituirse en interés de desarrollo para profesores en ejercicio o para docentes en formación y que eventualmente se pueden desarrollar como trabajos de grado o de investigación se encuentran:

- Profundizar en el empleo de Tracker como herramienta del aula para la medición de experimentos físicos de movimiento. Por ejemplo, para determinar componentes horizontales y verticales de la velocidad, elaborar gráficas de posición contra tiempo, velocidad contra tiempo y de aceleración contra tiempo.

- Estudiar la variación cuadrática desde la perspectiva de otros fenómenos de diferentes disciplinas o de la misma física, por ejemplo, el movimiento de un péndulo simple.
- Modelar otro tipo de comportamientos que no sean cuadráticos sino lineales, periódicos, exponenciales o logarítmicos con el fin de realizar un aprendizaje significativo y contexto tanto de concepto como de procesos matemáticos.

10. Referencias

- Ausubel, D. P. (2002). Adquisición y retención del conocimiento: una perspectiva cognitiva. España: Paidós.
- Bautista, M. y Salazar, F. (2011). *Hipertexto físico 1* [Archivo PDF] <https://matematicasievg.wordpress.com/wp-content/uploads/2020/04/fisica-10-hipertexto-santillana.pdf>
- Confrey, J. (2006) The Evolution of Design Studies as Methodology. In. R.K. Sawyer (Ed.). The Cambridge Handbook of the Learning Sciences, Cambridge University Press, New York, 135-152. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511816833.010>
- Design - Based Research Collective. (2003). Design-based research: An emerging paradigm for educational inquiry. *Educational researcher*, 32(1), 5-8 <https://doi.org/10.3102/0013189X032001005>
- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 9(1), 143-168
- Espinosa, C. (2020). *Modelación de la función cuadrática mediada por Tracker en estudiantes de quinto grado de secundaria* [Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú. Escuela de postgrados. <http://hdl.handle.net/20.500.12404/17784>
- Ernest, P. Skovsmose, O., Van Bendegem, J. P., Bicudo, M., Miarka, R., Kvasz, L. y Moeller, R. (2016). *The philosophy of mathematics education*. Springer Nature.
- Fernández, Tomás y Tamaro, Elena. (2024). *Biografía de Nicolás de Oresme*. <https://www.biografiasyvidas.com/biografia/o/oresme.htm>
- Freixenet, J. T. (2017). Matemáticas y Movimiento en el Siglo XIV. *Pensamiento Matemático*, 7(2), 87-99

- Gallart Palau, C. (2016). *La Modelización como herramienta de evaluación competencial* [Tesis doctoral]. Universitat Politècnica de València. <https://doi.org/10.4995/Thesis/10251/68492>
- Haines, C., Galbraith, P., Blum, W. y Khan, S. (2007). *Mathematical modelling: Education, engineering and economics-ICTMA 12*. Elsevier.
- Ministerio de Educación Nacional (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje de Matemáticas*. Colombia. Bogotá
- Ministerio de Educación Nacional (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas*. Colombia. Bogotá.
- Ministerio de Educación Nacional (2006). *Estandares Basicos en competencias de Matemáticas*. Colombia. Bogotá
- Spiegel, M.R. (1975). *Probability and Statistics*. McGraw, Hill, New York.
- National Council of Teacher of Mathematics NCTM. (2000). *Estandares curriculares y de evaluación matemática*. S.A.E.M.
- Stewart, J. Redlin, L. Watson, S (2007). *Precálculo de Stewart. Matemáticas para el cálculo*. Quinta edición. Editorial Thomson. México.
- Vargas Núñez, M. (2011). *El concepto de función y sus aplicaciones en situaciones relacionadas con fenómenos físicos, que conducen a un modelo cuadrático, una propuesta para trabajar en el grado noveno* [Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia]. <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/10183>

11. Anexos

Anexo A. Herramientas matemáticas

Algunas de las definiciones presentadas a continuación se fundamentan en Spiegel (1975), como por ejemplo curva de ajuste, regresión, método de mínimos cuadrados y coeficiente de correlación.

La curva de ajuste permite establecer una relación entre dos o más variables y se puede expresar en forma matemática por medio de una ecuación que conecte las variables.

En primera instancia se recolectan los datos indicando los valores correspondientes de las variables. Se supone que x denota la estatura y y el peso de un adulto, entonces una muestra de n individuos resultaría en las estaturas $x_1, x_2, \dots, x_n$ y los pesos correspondientes $y_1, y_2, \dots, y_n$.

En segunda instancia se dibujan los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ en un sistema de coordenadas rectangulares. A este conjunto de puntos se llama diagrama de dispersión.

Del diagrama de dispersión se puede observar una curva que se aproxime a los datos, dicha curva se llama curva de aproximación. En la Figura 106 se puede observar una relación lineal entre variables; en la Figura 107 una relación no lineal; y en la Figura 108 parece que las variables no tienen ninguna relación.

Figura 106. Gráfico de dispersión – Relación Lineal.

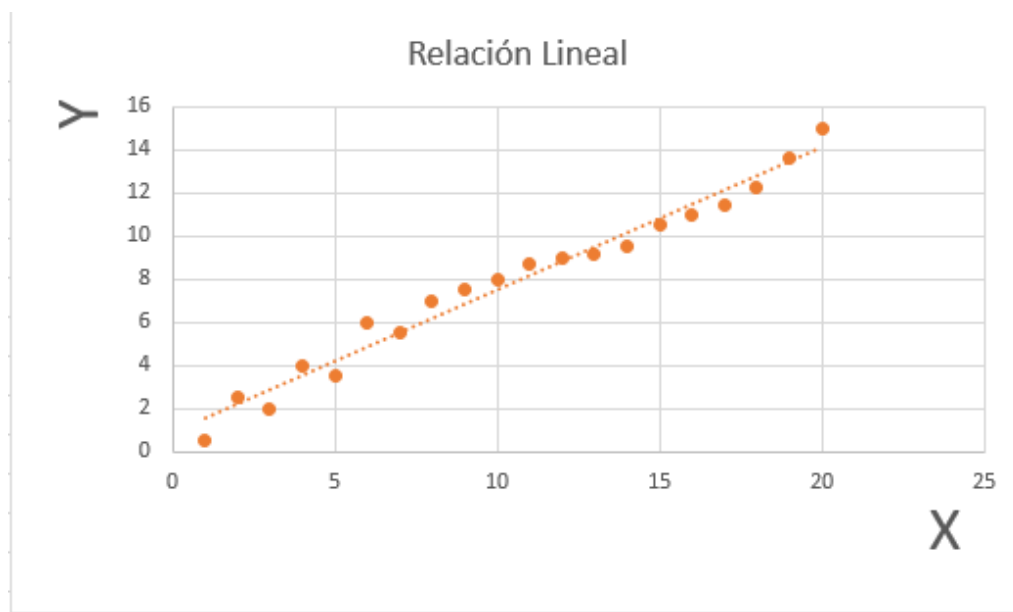


Figura 107. Gráfico de dispersión – Relación no lineal

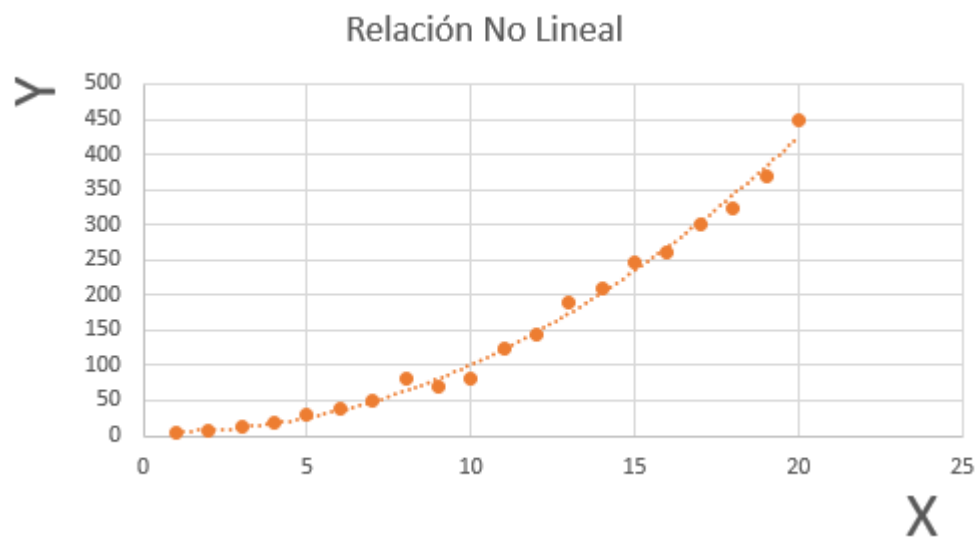
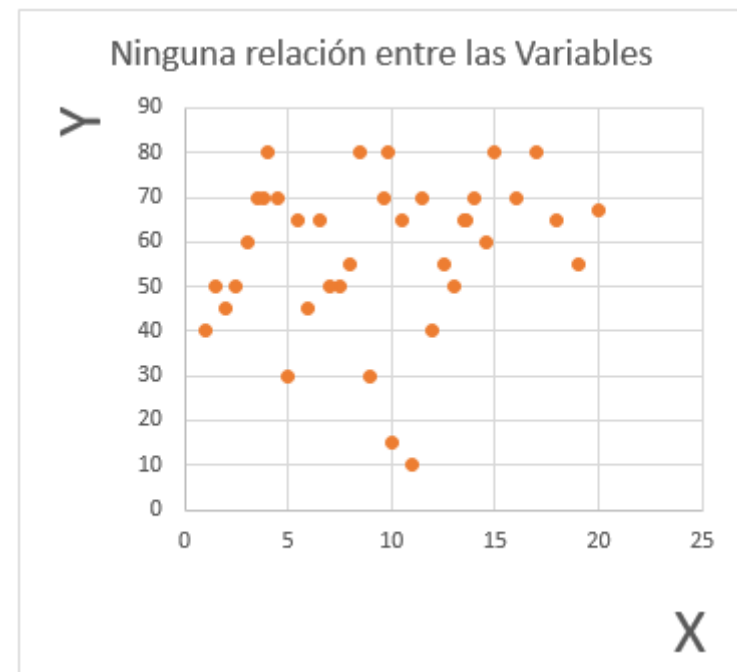


Figura 108. Gráfico de dispersión las variables no se relacionan.



El problema de encontrar las ecuaciones de curvas de aproximación que se ajusten a conjuntos de datos se denomina curva de ajuste.

Para el diagrama de dispersión que se muestra en la Figura 106 se puede utilizar una recta de la forma:

$$y = a + bx \quad (1)$$

Para el diagrama de dispersión que se muestra en la Figura 107 se puede utilizar una curva cuadrática o parabólica.

$$y = a + bx + cx^2 \quad (2)$$

Regresión

El objetivo principal del ajuste de curvas es estimar una de las variables en términos de la otra, a ese proceso de estimación se le llama regresión. Si la y se va a estimar a partir de x

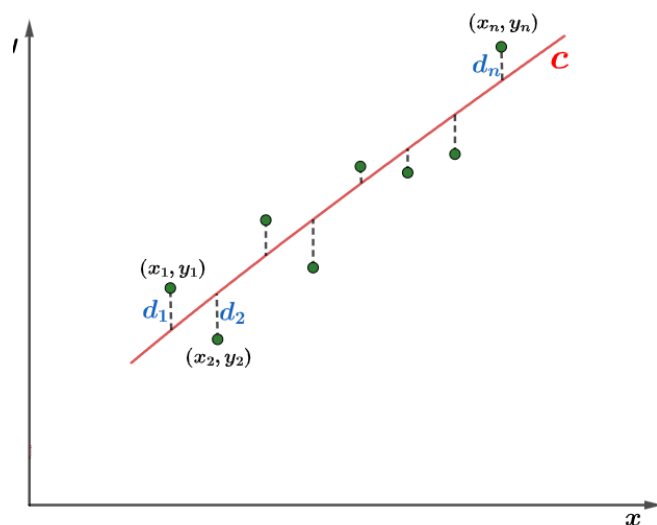
a través de alguna ecuación se llamará ecuación de regresión de y sobre x y a la curva correspondiente curva de regresión de y sobre x .

Métodos de Mínimos Cuadrados

Usualmente, más de una curva de cualquier tipo suele ajustarse a un conjunto de datos. Estas pueden ser rectas, parábolas u otras curvas de aproximación, por eso se hace necesario tener una definición de la mejor recta o parábola de ajuste.

Para establecer una definición ver Figura 109, donde los puntos tienen coordenadas $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$. Para un valor dado de x , por ejemplo x_1 , habrá una diferencia entre el valor y_1 y el valor correspondiente determinado de la curva C . Esta diferencia se escribe como d_1 , que en algunas ocasiones se menciona como desviación, error, o residuo y puede ser positivo, negativo o cero, de la misma manera a los valores $x_2, \dots, x_n$ se obtiene las desviaciones $d_2, \dots, d_n$.

Figura 109. Curva de ajuste.



Definición: De todas las curvas de aproximación de un conjunto de puntos de datos dados, la curva que tenga la propiedad de que

$$d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_n^2 = \text{un mínimo}, \text{ es la mejor curva de ajuste.}$$

Esto quiere decir que si $d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_n^2$ es pequeña el ajuste es bueno, si es grande es malo.

Recta de Mínimos Cuadrados

La recta de mínimos cuadrados de aproximación al conjunto de datos $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ tiene la ecuación:

$$y = a + bx \quad (3)$$

Donde las constantes a y b se determinan solucionando simultáneamente las ecuaciones

$$\sum y = an + b \sum x \quad (4)$$

$$\sum xy = a \sum x + b \sum x^2$$

Los valores de a y b que se obtienen en la ecuación anterior están dados por:

$$a = \frac{(\sum y)(\sum x^2) - (\sum x)(\sum xy)}{n \sum x^2 - (\sum x)^2} \quad b = \frac{n \sum xy - (\sum x)(\sum y)}{n \sum x^2 - (\sum x)^2} \quad (5)$$

El resultado de b también se puede escribir como:

$$b = \frac{\sum(x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sum(x - \bar{x})^2} \quad (6)$$

Es importante aclarar que la barra indica media, es decir, $\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$

Al dividir ambos lados de ecuación (1) por n resulta:

$$\bar{y} = a + b\bar{x} \quad (7)$$

Por tanto, se va a hallar primero b de (5) o (6) y luego emplear (7) para hallar $a = \bar{y} - b\bar{x}$. Esto es equivalente a escribir la recta de mínimos cuadrados como:

$$y - \bar{y} = b(x - \bar{x}) \quad \text{ó} \quad y - \bar{y} = \frac{\sum(x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sum(x - \bar{x})^2}(x - \bar{x}) \quad (8)$$

El resultado (8) indica que la constante b , que es la pendiente de la recta (3), es la constante fundamental para determinar la recta. De (8) también se ve que la recta de mínimos cuadrados pasa a través del punto $(\bar{x}, \bar{y})$, se denomina el centroide o centro de gravedad de los datos.

Parábola de Mínimos Cuadrados

La parábola de mínimos cuadrados que se ajusta a un conjunto de puntos muestrales está dada por:

$$y = a + bx + cx^2 \quad (9)$$

Donde a, b, c se determinan de las ecuaciones normales.

$$\sum y = na + b \sum x + c \sum x^2 \quad (10)$$

$$\sum xy = a \sum x + b \sum x^2 + c \sum x^3$$

$$\sum x^2y = a \sum x^2 + b \sum x^3 + c \sum x^4$$

Estas ecuaciones se obtienen formalmente sumando ambos lados de (9) después de multiplicar sucesivamente por 1, x y x^2 respectivamente.

Error Típico de la Estima

Si se denota y_{est} el valor estimado de y para un valor dado de x obtenido de la curva de regresión de y sobre x , entonces una medida de la dispersión con respecto a la curva de regresión es:

$$s_{x,y} = \sqrt{\frac{\sum (y - y_{est})^2}{n}} \quad (10)$$

Esta cantidad se llama error típico de la estima de y sobre x porque $\sum (y - y_{est})^2 = \sum d^2$.

En el caso de una recta de regresión $y_{est} = a + bx$, con a y b dados por (4) se tiene:

$$s_{x,y}^2 = \frac{\sum y^2 - a \sum y - b \sum xy}{n} \quad \text{ó} \quad s_{x,y}^2 = \frac{\sum (y - \bar{y})^2 - b(x - \bar{x})(y - \bar{y})}{n} \quad (11)$$

También se puede expresar $s_{x,y}^2$ por la recta de mínimos cuadrados en términos de la varianza y del coeficiente de correlación como:

$$s_{x,y}^2 = s_y^2(1 - r^2) \quad (12)$$

Coeficiente de Correlación Lineal

El coeficiente de correlación lineal se define formalmente como:

$$r = \frac{s_{x,y}}{s_x s_y} = \frac{\sum (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x - \bar{x})^2} \sqrt{\sum (y - \bar{y})^2}} \quad (13) \quad \text{ó}$$

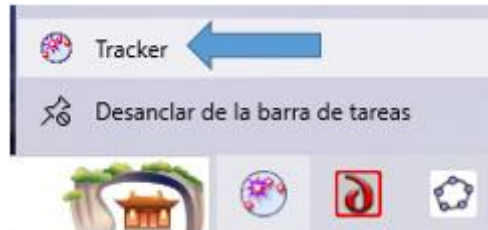
$$r^2 = \frac{\text{variación explicada}}{\text{variación total}} = \frac{\sum (y_{est} - \bar{y})^2}{\sum (y - \bar{y})^2} \quad (14)$$

La ecuación 14 es la definición de coeficiente de correlación generalizada, quiere decir que también funciona para una correlación de datos no lineales.

Anexo B. Fase de Exploración en Tracker

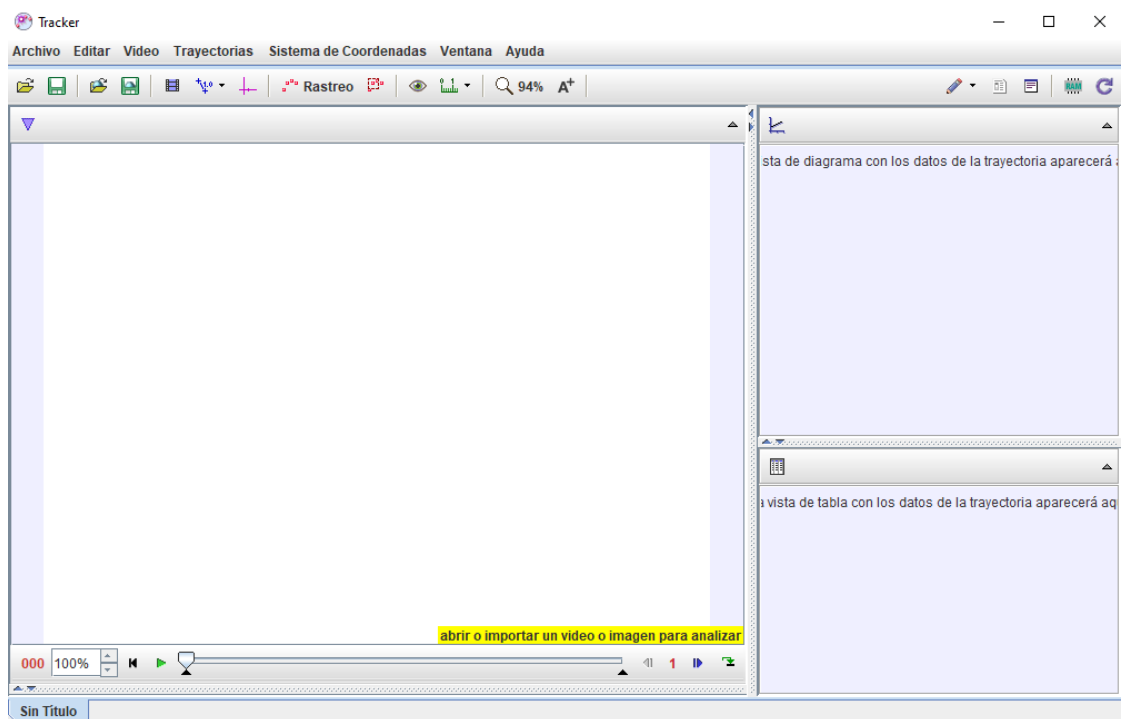
1. Abrir el programa Tracker: Dar clic en el programa Tracker.

Figura 110. Acceso al programa Tracker



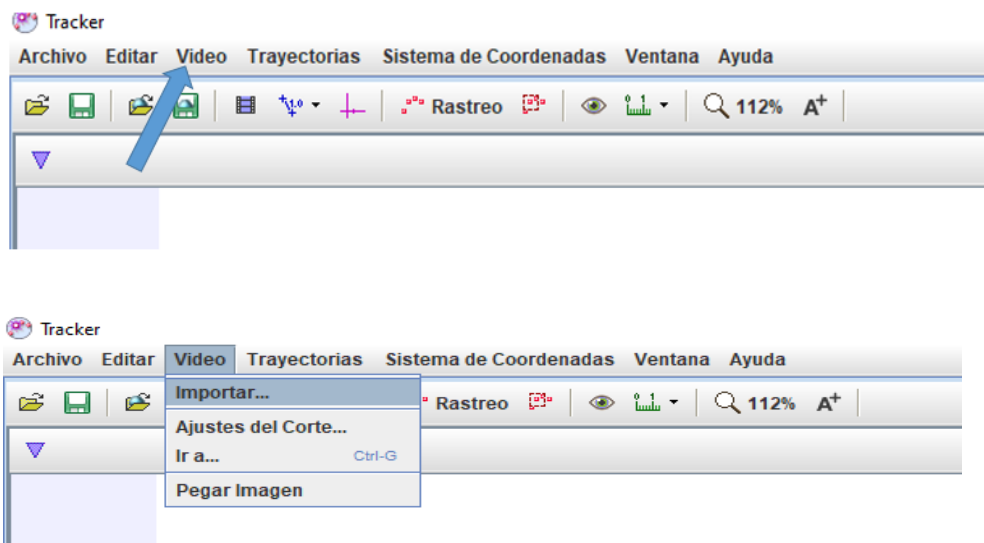
2. Interfaz del programa: observar la interfaz del programa.

Figura 111. Interfaz del programa Tracker



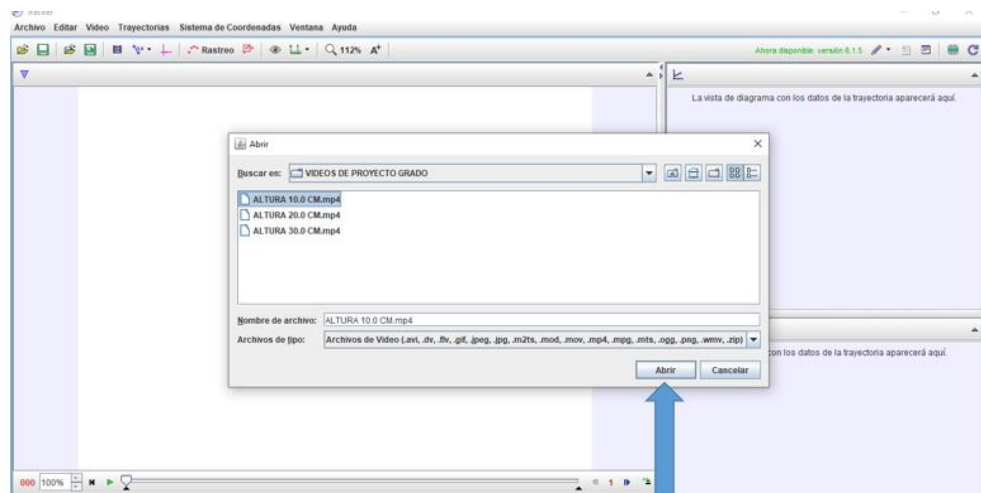
3. Cargar un video en el programa Tracker: Dar clic en la pestaña video y luego importar.

Figura 112. Carga del vídeo en Tracker I



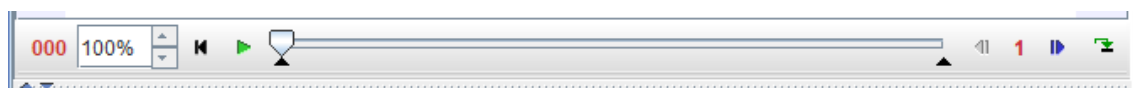
4. Buscar el video y seleccionar abrir.

Figura 113. Carga del vídeo Tracker II



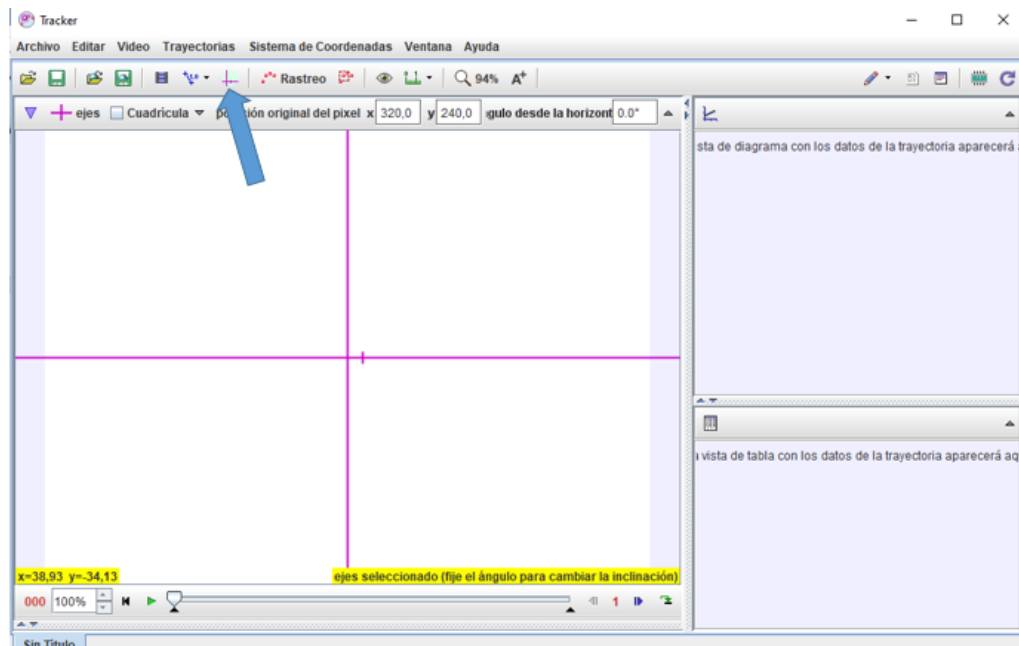
5. Barra inferior: determinar el intervalo para trabajar el experimento.

Figura 114. Barra inferior para video



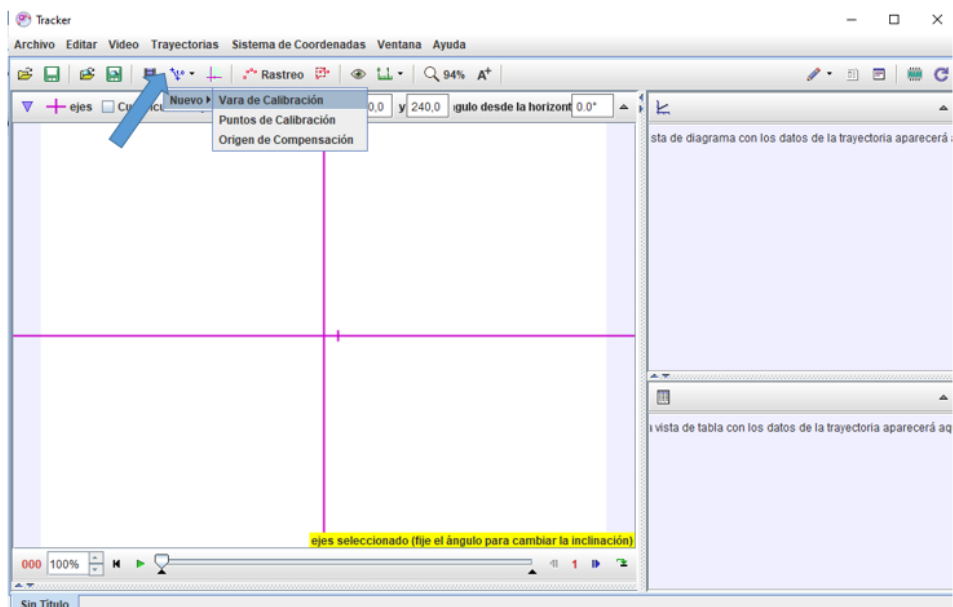
6. Crear sistema de coordenadas: seleccionar en la imagen que muestra los ejes coordenados en color rosado.

Figura 115. Sistema de coordenadas



7. Crear Vara de calibración: Dar clic en la imagen que representa la vara de calibración.

Figura 116. Vara de calibración



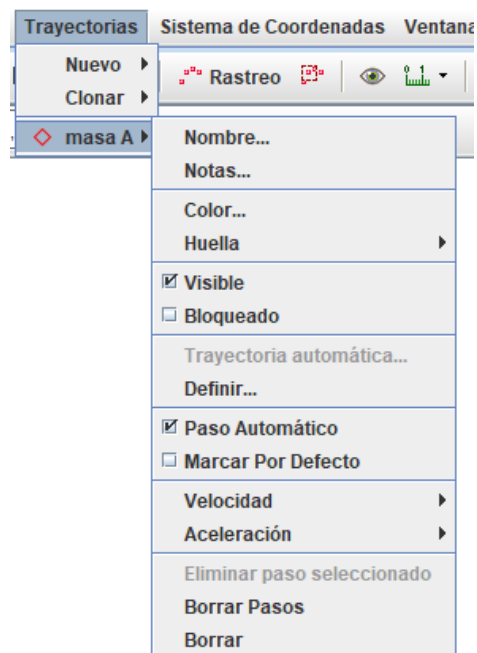
8. Crear una masa puntual: Dar clic en trayectoria, luego masa puntual.

Figura 117. Masa puntual



9. Traza trayectoria: Dar clic en trayectorias, masa A y luego trayectoria automática.

Figura 118. Trayectoria de la masa



10. Cargar el segundo video y repetir los pasos del 1 al 9.

Anexo C. Refuerzo del uso de Excel

1.Abrir Excel.

Figura 119. Abrir excel



2. Insertar la tabla de datos.

Figura 120. Tabla de datos

x	y
0	0
1	1
2	4.05
3	8.04
4	15.9
5	25.9
6	37
7	49.3
8	64.7
9	80.5
10	100.1

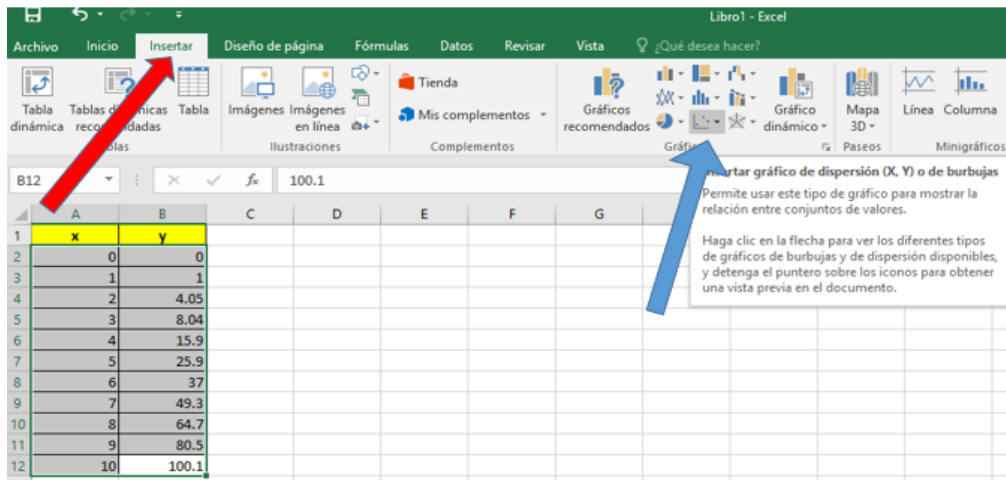
3.Se selecciona las dos celdas.

Figura 121. Selección de datos

A	B
x	y
0	0
1	1
2	4.05
3	8.04
4	15.9
5	25.9
6	37
7	49.3
8	64.7
9	80.5
10	100.1

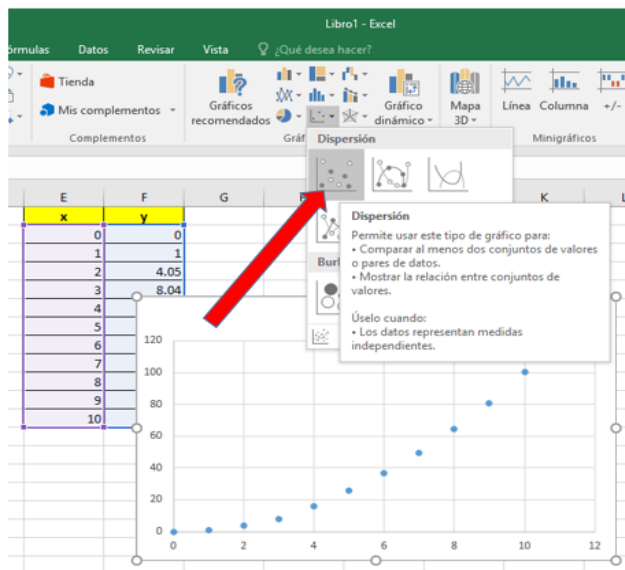
4. Se selecciona la opción insertar (flecha roja) y luego gráfico de dispersión (flecha azul).

Figura 122. Insertar gráfico de dispersión.



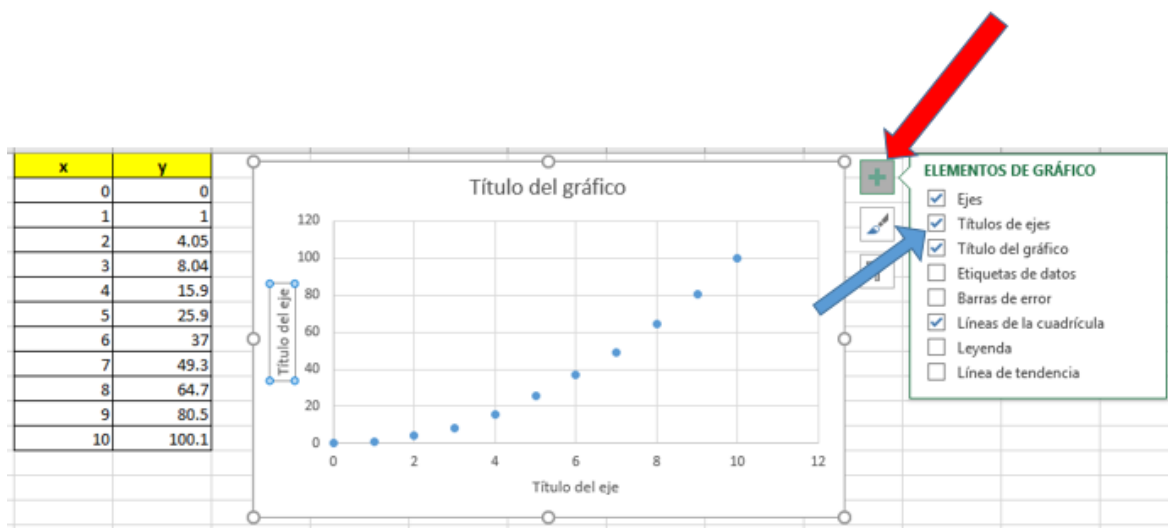
5. Se selecciona el gráfico de dispersión (flecha roja), y se da clic.

Figura 123. Selección gráfico de dispersión.



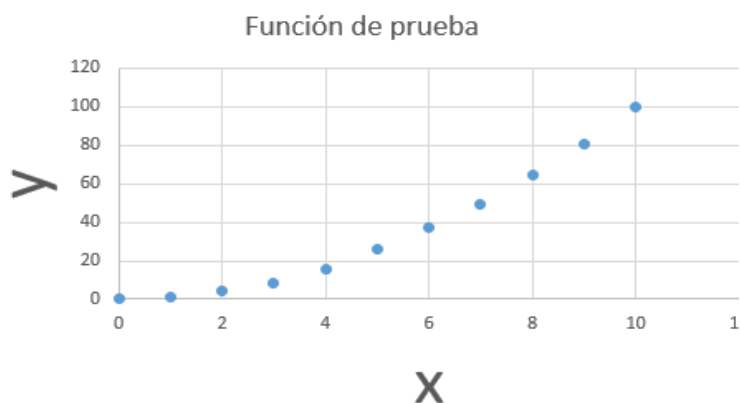
6. Seleccionar elementos de gráfico (flecha roja), y se procede escoger marcar título y los ejes del gráfico (Flecha azul).

Figura 124. Elementos de gráfico de dispersión.



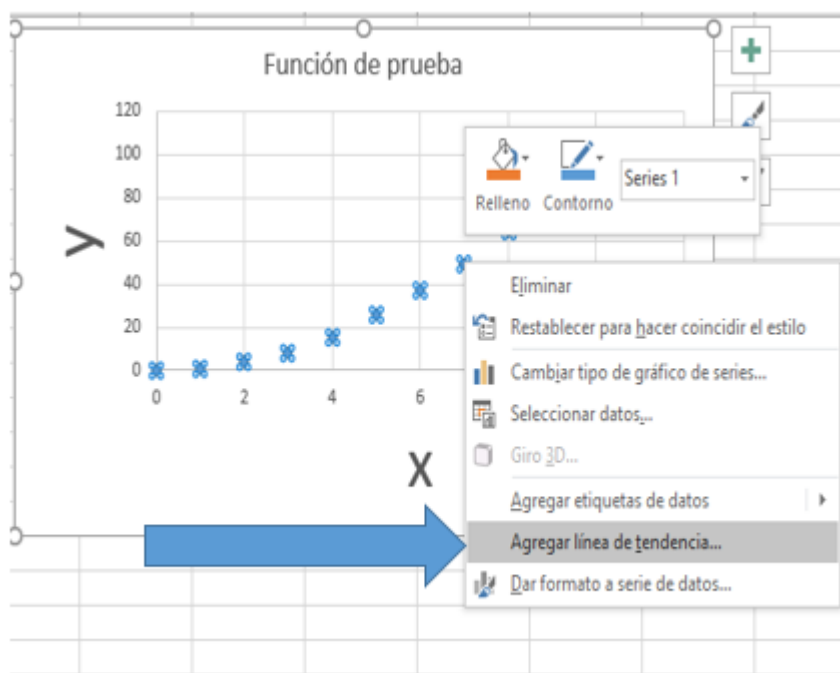
7. Ponerle nombre al título del gráfico y título de los ejes.

Figura 125. Título del gráfico de dispersión.



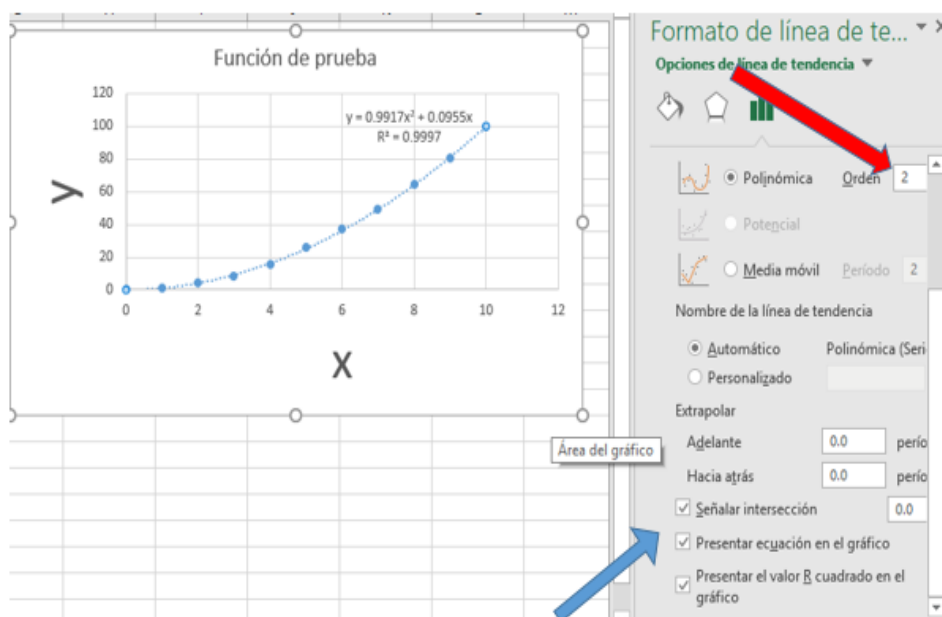
8. Se selecciona un punto de la gráfica, se da clic derecho y se elige agregar línea de tendencia central (flecha azul).

Figura 126. Agregar línea de tendencia central



9. Se elige el orden polinómico que corresponda al ejemplo, en este caso es 2 (flecha roja), luego se elige seleccionar intersección, presentar ecuación en el gráfico y presentar el valor de R cuadrado en el gráfico (flecha azul).

Figura 127. Orden del polinomio



Anexo D. Taller educativo N°1

TALLER EDUCATIVO N°1

1. Ubica el plano inclinado con la altura de 10 *cm*.
2. Grabar el video y cargarlo en el computador en documentos. Se debe grabar teniendo en cuenta que en el plano inclinado se vea la posición de la esfera.

Sugerencia: Para grabar el video lo ideal es colocar una tela en el fondo de un color que haga un gran contraste con el color del plano y la esfera.

3. Cargar el video en el programa Tracker.

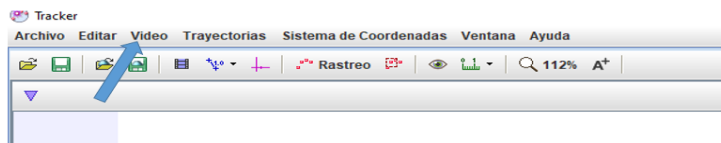
Paso 1: Abrir el programa Tracker.

Figura 128. Logo del programa Tracker



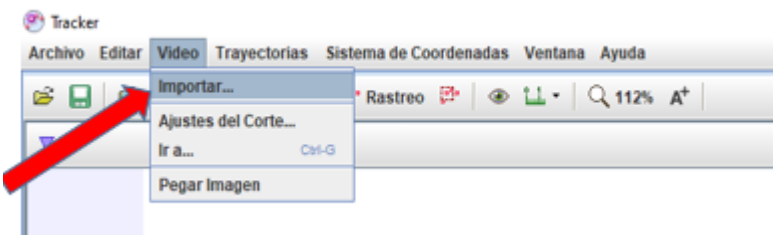
Paso 2: Ir a la pestaña video (flecha azul).

Figura 129. Pestaña vídeo en Tracker



Paso 3: Seleccionar opción importar (flecha roja).

Figura 130. Importar el vídeo



Paso 4: Buscar el archivo donde está el video y darle “abrir” (flecha azul).

Figura 131. Cargar vídeo experimento real – 10 cm de altura

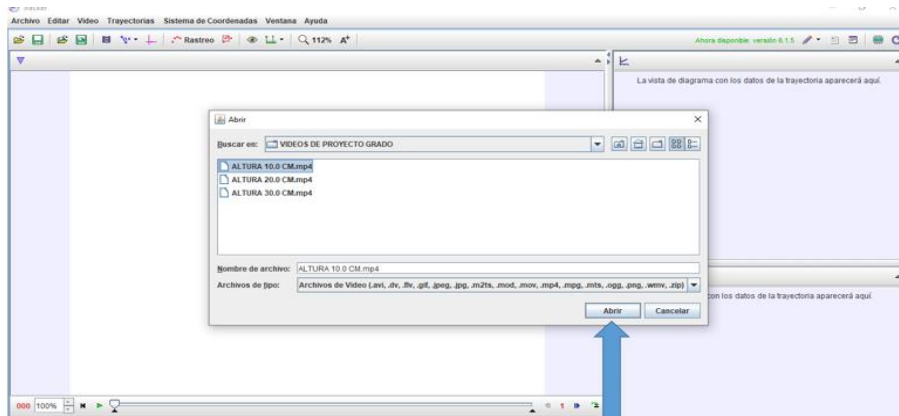
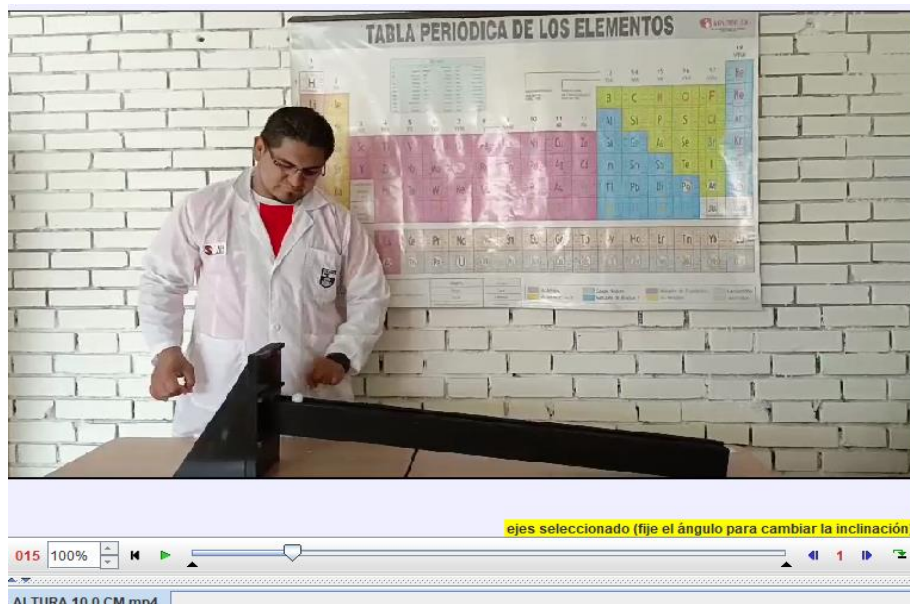


Figura 132. Plano inclinado real con altura de 10 cm



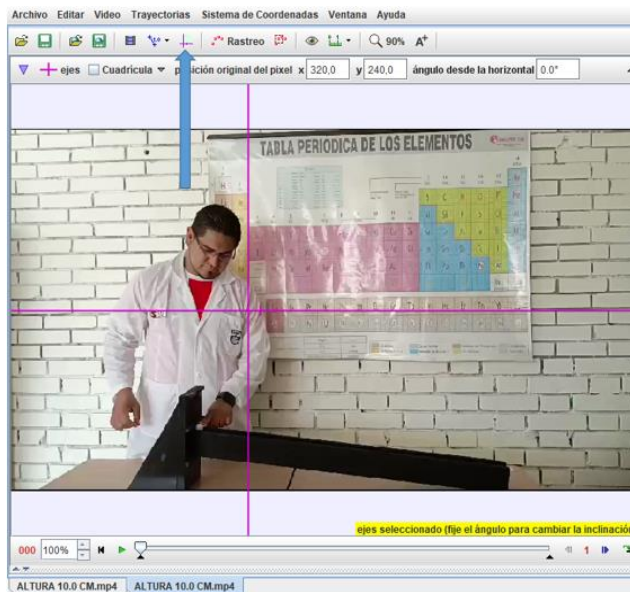
Paso 6: Observar la parte inferior “barra” para seleccionar el intervalo que interesa trabajar. Luego se debe seleccionar ese intervalo con las flechas que están hacia arriba.

Figura 133. Selección del intervalo de tiempo



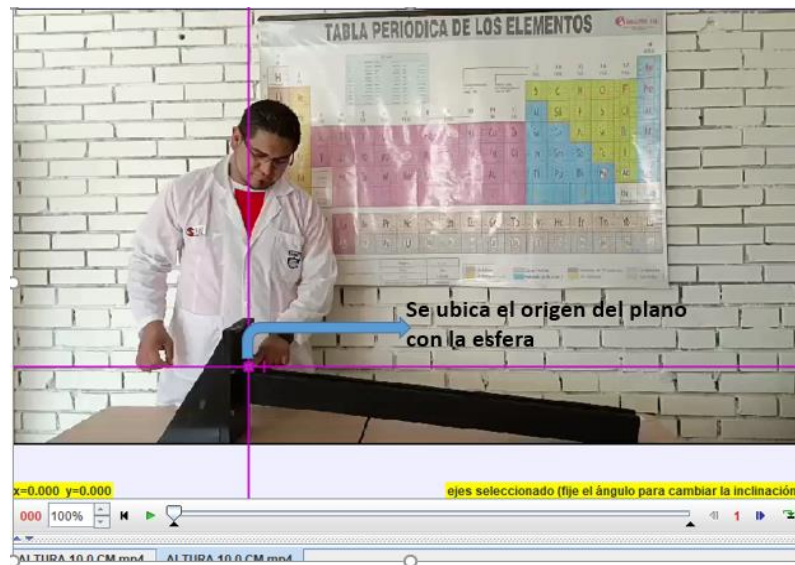
Paso 7: Crear un sistema de coordenadas (flecha azul).

Figura 134. Crear sistema de coordenadas



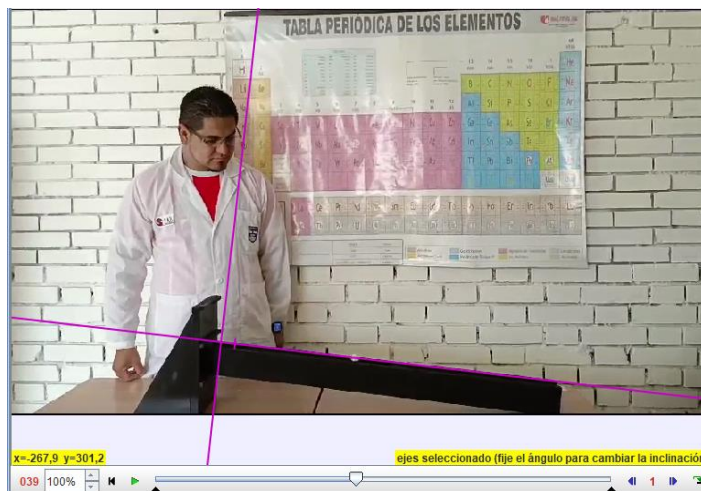
Paso 8: Arrastra los ejes de tal manera que el origen coincida con la esfera.

Figura 135. Esfera y origen del plano cartesiano



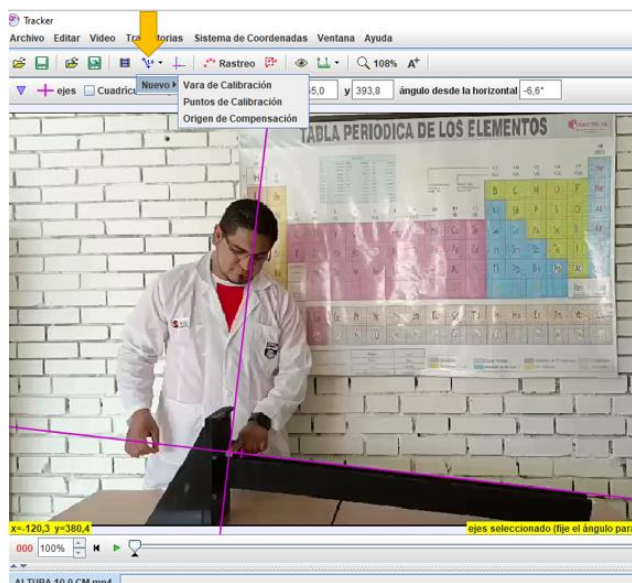
Paso 9: Gira los ejes de tal manera que coincida con la hendidura del plano inclinado.

Figura 136. Rotación de los ejes



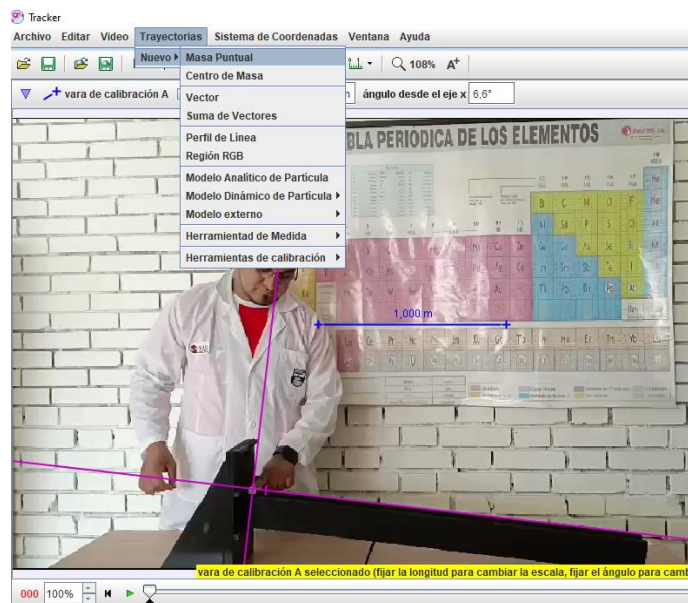
Paso 10: Selecciona la herramienta que se muestra en la flecha amarilla, luego crear una vara de calibración.

Figura 137. Crear vara de calibración



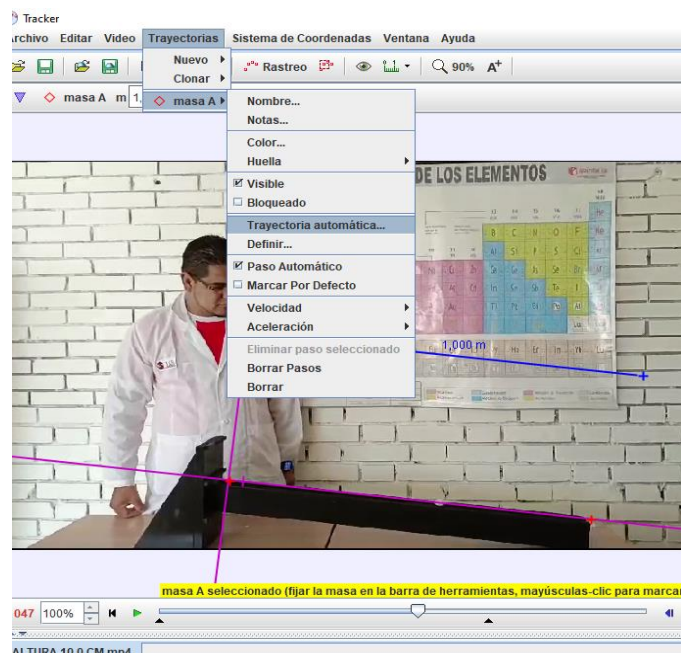
Paso 11: Selecciona trayectoria, luego Nuevo y después crear una masa puntual.

Figura 138. Crear masa puntual.



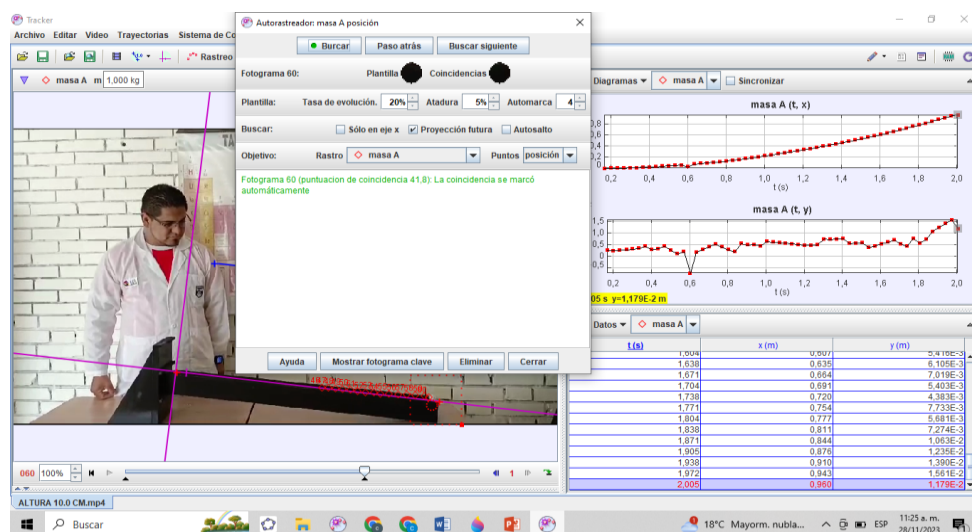
Paso 12: Luego se dirige a trayectorias y masa A y trayectoria automática.

Figura 139. Crear masa



Paso 13: Luego se selecciona la tecla Ctrl + Shit y se elige la esfera blanca como referencia, luego sale una ventana emergente y en ella se le da buscar, posteriormente genera la gráfica de $x(m)$ vs $t(s)$ “posición contra tiempo”.

Figura 140. Crear curva y tabla de datos de referencia.



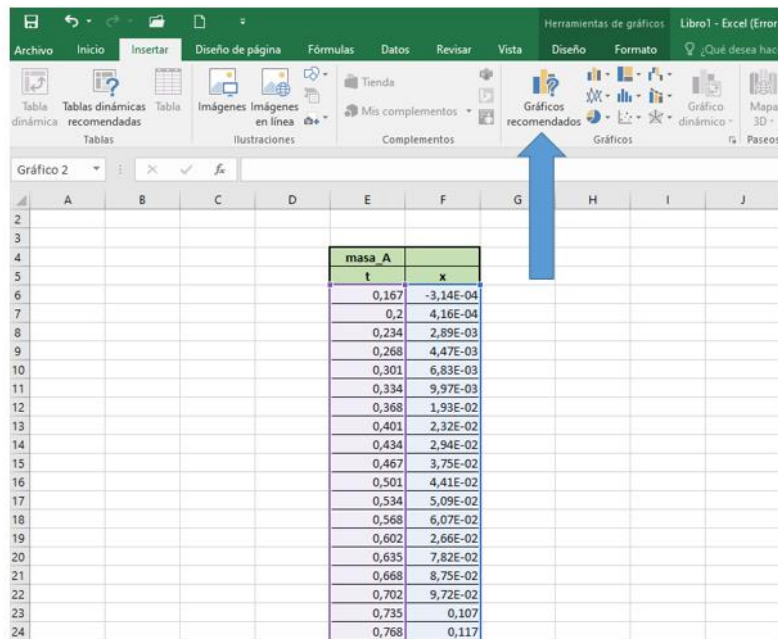
Paso 14: Se copian las columnas de $t(s)$ y $x(m)$ en un Excel.

Figura 141. Tabla de datos $t(s)$ y $x(m)$

masa_A	
t	x
0,167	-3,14E-04
0,2	4,16E-04
0,234	2,89E-03
0,268	4,47E-03
0,301	6,83E-03
0,334	9,97E-03
0,368	1,93E-02
0,401	2,32E-02
0,434	2,94E-02
0,467	3,75E-02
0,501	4,41E-02
0,534	5,09E-02
0,568	6,07E-02
0,602	2,66E-02
0,635	7,82E-02
0,668	8,75E-02
0,702	9,72E-02
0,735	0,107
0,768	0,117

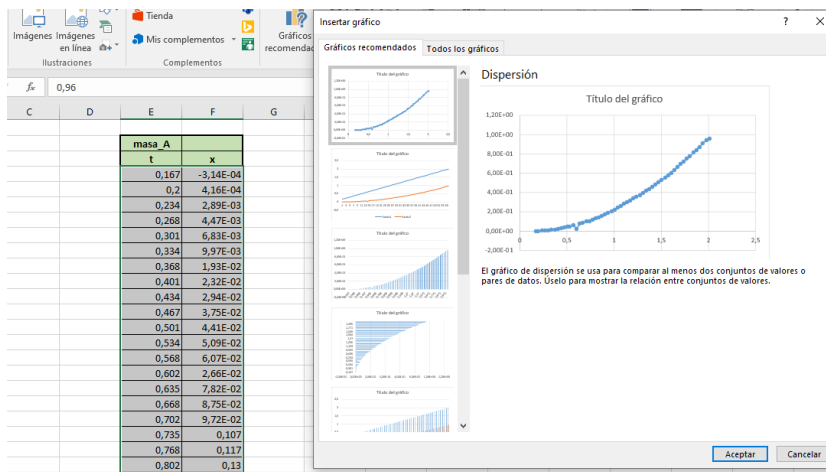
Paso 15: Realizar la gráfica con los datos ingresados en el Excel. Se seleccionan los datos, luego se selecciona la opción gráficos recomendados.

Figura 142. Insertar gráfico de dispersión



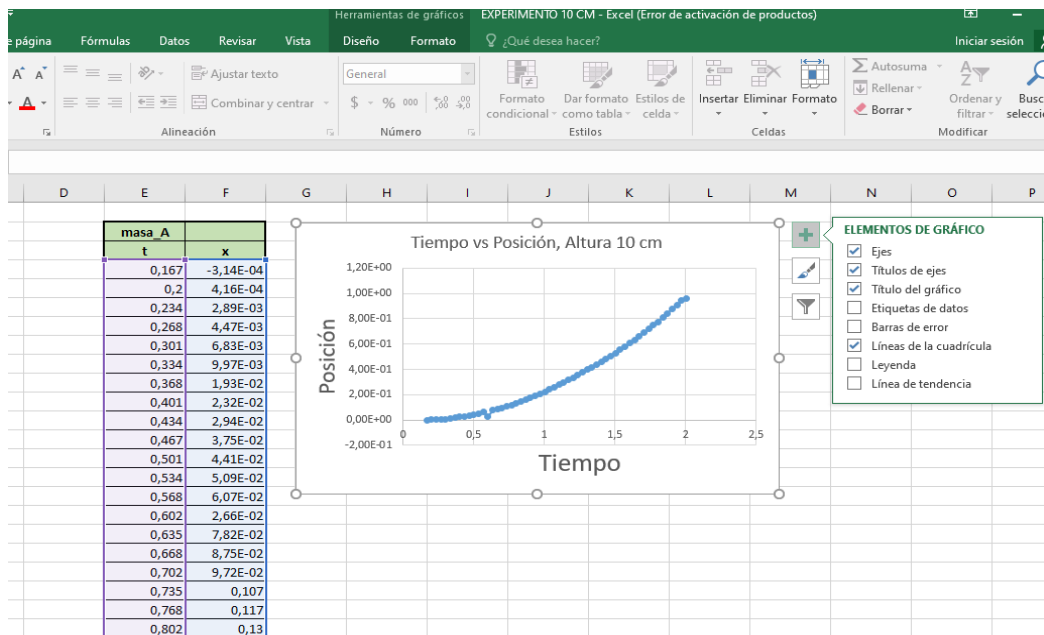
Paso 16: Se debe seleccionar el gráfico que dice dispersión y luego aceptar.

Figura 143. Elección del gráfico de dispersión



Paso 17: Dar clic en elementos de gráfico y se selecciona marcar los ejes y título, luego, se marca título y ejes.

Figura 144. Elementos del gráfico de dispersión



Paso 18: Se da doble clic sobre un punto de la gráfica y se selecciona agregar línea de tendencia central, luego, elegir la opción polinómica de orden 2.

Figura 145. Agregar línea de tendencia central

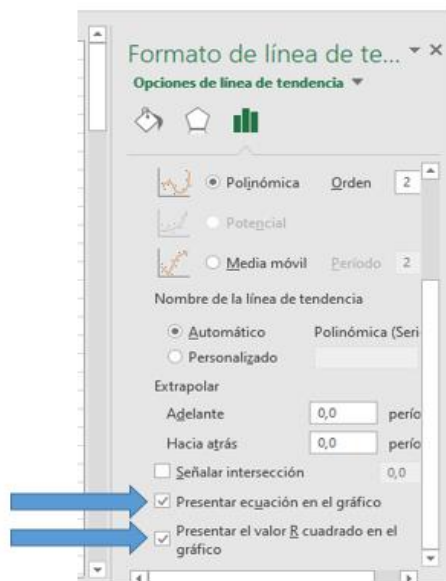


Figura 146. Seleccionar el orden del polinomio



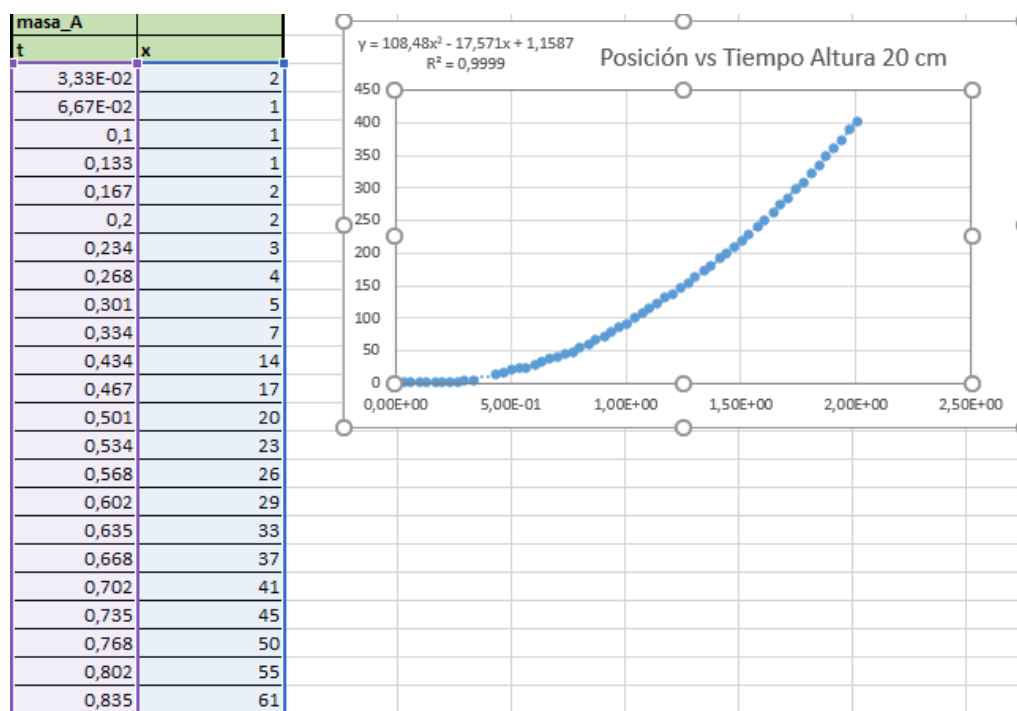
Paso: 19: Luego en la parte inferior de la barra de formato de línea de tendencia, activan la opción presentar ecuación en el gráfico y el valor R cuadrado en el gráfico (coeficiente de correlación).

Figura 147. Formato línea de tendencia central



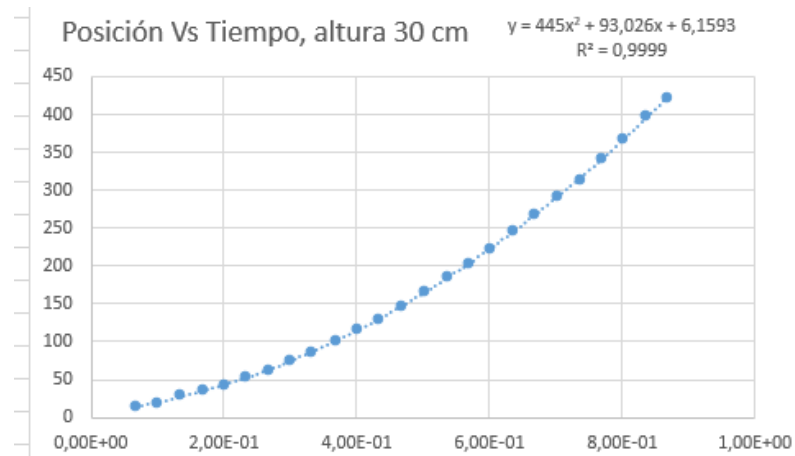
Repitiendo las instrucciones del paso 1 al 19 con alturas de 20 cm y 30 cm se obtienen las siguientes tablas de valores y gráficos.

Figura 148. Tabla y gráfico de posición vs tiempo - altura 20 cm



t	x
6,653E-2	13,64
9,992E-2	19,34
0,134	27,38
0,167	34,37
0,201	43,29
0,234	53,15
0,267	63,21
0,301	73,79
0,334	86,49
0,367	99,64
0,401	115,1
0,434	130,4
0,468	146,4
0,502	164,5
0,535	185,0
0,568	202,9
0,602	221,9
0,635	246,2
0,668	266,4
0,702	290,1
0,735	313,2
0,768	341,0
0,802	368,2

Figura 149. Tabla de datos y gráfico de dispersión posición vs tiempo - altura 30 cm



Anexo E. Taller educativo N°2

1. Se usa la tabla de valores obtenida en el experimento real con una altura de 10 cm.

Figura 150. Tabla de valores – tiempo vs posición

masa_A	
t	x
0,167	-3,14E-04
0,2	4,16E-04
0,234	2,89E-03
0,268	4,47E-03
0,301	6,83E-03
0,334	9,97E-03
0,368	1,93E-02
0,401	2,32E-02
0,434	2,94E-02
0,467	3,75E-02
0,501	4,41E-02
0,534	5,09E-02
0,568	6,07E-02
0,602	2,66E-02
0,635	7,82E-02
0,668	8,75E-02
0,702	9,72E-02
0,735	0,107
0,768	0,117
0,802	0,13
0,835	0,143

2. Se agrega una columna a la derecha de tal manera que sea la diferencia entre el valor $4,16E - 04$ y $-3,14E - 04$; luego $2,89E - 03$ y $4,16E - 04$ y así sucesivamente. Para esto se selecciona la parte inferior de la celda de la tercera columna y se arrastra hacia abajo (flecha azul) para que automáticamente se obtengan los demás resultados.

Figura 151. Tabla con tiempo vs diferencia de primer orden

masa_A		
t	x	Diferencia Primer orden
0,167	-3,14E-04	
0,2	4,16E-04	7,31E-04
0,234	2,89E-03	2,47E-03
0,268	4,47E-03	1,58E-03
0,301	6,83E-03	2,36E-03
0,334	9,97E-03	3,13E-03
0,368	1,93E-02	9,29E-03
0,401	2,32E-02	3,93E-03
0,434	2,94E-02	6,19E-03
0,467	3,75E-02	8,12E-03
0,501	4,41E-02	6,56E-03
0,534	5,09E-02	6,86E-03
0,568	6,07E-02	9,80E-03
0,602	2,66E-02	-3,41E-02
0,635	7,82E-02	5,16E-02
0,668	8,75E-02	9,28E-03
0,702	9,72E-02	9,68E-03
0,735	0,107	9,82E-03
0,768	0,117	1,00E-02
0,802	0,13	1,30E-02
0,835	0,143	1,30E-02
0,868	0,158	1,50E-02
0,902	0,174	1,60E-02
0,936	0,19	1,60E-02
0,969	0,205	1,50E-02

3. Se agrega otra columna a la derecha de tal manera que sea la diferencia entre $2,47 E - 03$ y $7,31 E - 03$; luego $1,58 E - 03$ y $2,47 E - 03$ y así sucesivamente. Para esto se selecciona la parte inferior de la celda y se arrastra hacia abajo (flecha azul) para que automáticamente se obtengan los demás resultados.

Figura 152. Tabla de valores tiempo vs diferencia de segundo orden

=C5-C4				
A	B	C	D	E
masa_A		Diferencia Primer orden	Diferencia Segundo Orden	
t	x			
0,167	-3,14E-04			
0,2	4,16E-04	7,31E-04		
0,234	2,89E-03	2,47E-03	1,74E-03	
0,268	4,47E-03	1,58E-03	-8,92E-04	-2,64
0,301	6,83E-03	2,36E-03	7,77E-04	1,67
0,334	9,97E-03	3,13E-03	7,72E-04	5,00
0,368	1,93E-02	9,29E-03	6,16E-03	5,39
0,401	2,32E-02	3,93E-03	-5,36E-03	1,15
0,434	2,94E-02	6,19E-03	2,26E-03	7,62
0,467	3,75E-02	8,12E-03	1,93E-03	3,30
0,501	4,41E-02	6,56E-03	-1,56E-03	3,49
0,534	5,09E-02	6,86E-03	3,00E-04	1,86
0,568	6,07E-02	9,80E-03	2,94E-03	2,64
0,602	2,66E-02	-3,41E-02	-4,39E-02	-4,69
0,635	7,82E-02	5,16E-02	8,57E-02	1,30
0,668	8,75E-02	9,28E-03	-4,23E-02	1,28
0,702	9,72E-02	9,68E-03	4,00E-04	4,27
0,735	0,107	9,82E-03	1,40E-04	2,60
0,768	0,117	1,00E-02	1,80E-04	4,00
0,802	0,13	1,30E-02	3,00E-03	2,82
0,835	0,143	1,30E-02	-1,39E-17	2,00
0,868	0,158	1,50E-02	2,00E-03	2,00
0,902	0,174	1,60E-02	1,00E-03	-1,00
0,936	0,19	1,60E-02	2,78E-17	1,00
0,969	0,205	1,50E-02	-1,00E-03	-1,00

4. Se agrega otra columna a la derecha de tal manera que sea la diferencia entre $-8,92 E - 04$ y $1,74 E - 03$; luego $7,77 E - 04$ y $-8,92 E - 04$ y así sucesivamente. Para esto se selecciona la parte inferior de la celda y se arrastra hacia abajo (flecha azul) para que automáticamente se obtengan los demás resultados.

Figura 153. Tabla de valores tiempo vs diferencia de tercer orden

=D6-D5				
A	B	C	D	E
masa_A		Diferencia Primer orden	Diferencia Segundo Orden	
t	x			
0,167	-3,14E-04			
0,2	4,16E-04	7,31E-04		
0,234	2,89E-03	2,47E-03	1,74E-03	
0,268	4,47E-03	1,58E-03	-8,92E-04	-2,64E-03
0,301	6,83E-03	2,36E-03	7,77E-04	1,67E-03
0,334	9,97E-03	3,13E-03	7,72E-04	-5,00E-06
0,368	1,93E-02	9,29E-03	6,16E-03	5,39E-03
0,401	2,32E-02	3,93E-03	-5,36E-03	-1,15E-02
0,434	2,94E-02	6,19E-03	2,26E-03	7,62E-03
0,467	3,75E-02	8,12E-03	1,93E-03	-3,30E-04
0,501	4,41E-02	6,56E-03	-1,56E-03	-3,49E-03
0,534	5,09E-02	6,86E-03	3,00E-04	1,86E-03
0,568	6,07E-02	9,80E-03	2,94E-03	2,64E-03
0,602	2,66E-02	-3,41E-02	-4,39E-02	-4,69E-02
0,635	7,82E-02	5,16E-02	8,57E-02	1,30E-01
0,668	8,75E-02	9,28E-03	-4,23E-02	-1,28E-01
0,702	9,72E-02	9,68E-03	4,00E-04	4,27E-02
0,735	0,107	9,82E-03	1,40E-04	-2,60E-04
0,768	0,117	1,00E-02	1,80E-04	4,00E-05
0,802	0,13	1,30E-02	3,00E-03	2,82E-03
0,835	0,143	1,30E-02	-1,39E-17	-3,00E-03
0,868	0,158	1,50E-02	2,00E-03	2,00E-03
0,902	0,174	1,60E-02	1,00E-03	-1,00E-03
0,936	0,19	1,60E-02	2,78E-17	-1,00E-03
0,969	0,205	1,50E-02	-1,00E-03	-1,00E-03

5. Luego se selecciona las columnas t y x y se realizan los pasos mostrados en la experimentación real con el plano inclinado de 10 cm y se obtiene la siguiente gráfica.

Figura 154. Gráfico de dispersión tiempo vs posición – altura 10 cm



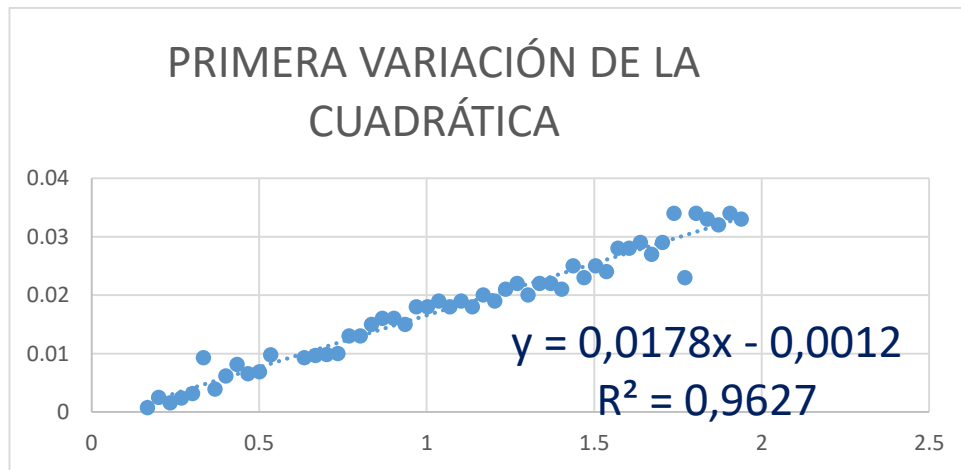
12. Se seleccionan las columnas t y la resaltada en verde (primeras diferencias).

Figura 155. Tabla de valores tiempo vs diferencia de primer orden

t	x
0,167	0,0007305
0,2	0,0024747
0,234	0,001583
0,268	0,00236
0,301	0,003132
0,334	0,009294
0,368	0,00393
0,401	0,00619
0,434	0,00812
0,467	0,00656
0,501	0,00686
0,534	0,0098
0,635	0,00928
0,668	0,00968
0,702	0,00982
0,735	0,01
0,768	0,013
0,802	0,013
0,835	0,015
0,868	0,016
0,902	0,016
0,936	0,015
0,969	0,018
1,003	0,018
1,036	0,019
1,069	0,018
1,103	0,019

7. Se realiza el gráfico de dispersión con las columnas anteriores, ubicando el título primera variación de la función cuadrática.

Figura 156. Gráfico de dispersión, primera variación de la cuadrática



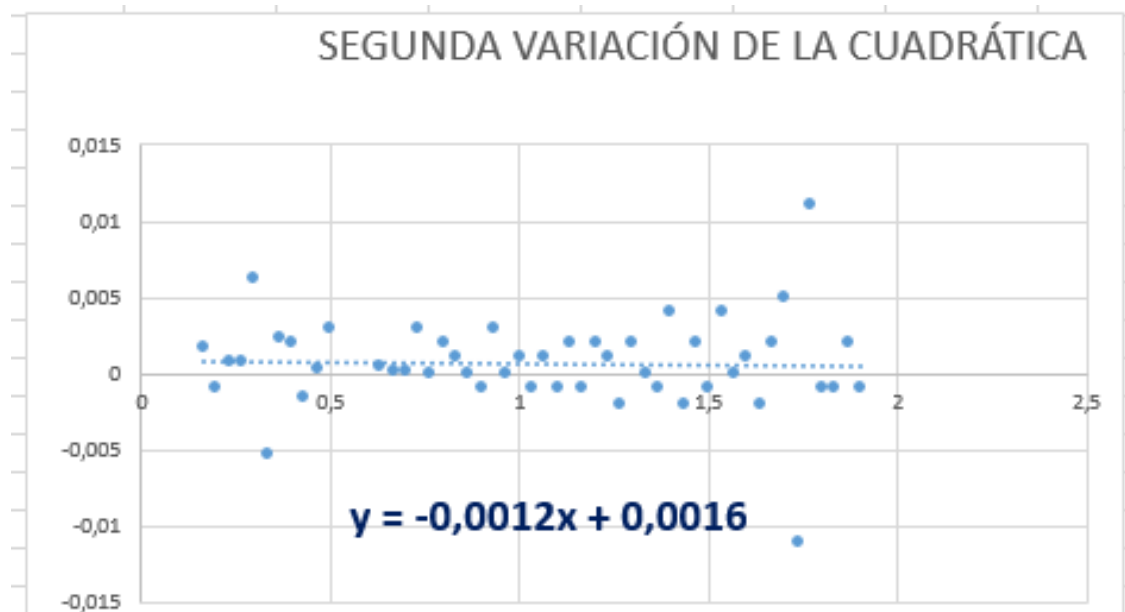
8. Se seleccionan las columnas t y la resaltada en amarillo (segundas diferencias)

Figura 157. Tabla de valores tiempo vs diferencia de segundo orden

t	x
0.167	0.0017442
0.2	-0.0008917
0.234	0.000777
0.268	0.000772
0.301	0.006162
0.334	-0.005364
0.368	0.00226
0.401	0.00193
0.434	-0.00156
0.467	0.0003
0.501	0.00294
0.635	0.0004
0.668	0.00014
0.702	0.00018
0.735	0.003
0.768	-1.388E-17
0.802	0.002
0.835	0.001
0.868	2.776E-17
0.902	-0.001
0.936	0.003
0.969	-2.776E-17
1.003	0.001
1.036	-0.001
1.069	0.001
1.103	-0.001
1.136	0.002
1.169	-0.001

9. Se realiza el gráfico de dispersión con las columnas anteriores, ubicando el título segunda variación de la función cuadrática.

Figura 158. Gráfico de dispersión segunda variación de la cuadrática



A continuación, se presenta la gráfica y la tabla completa de valores para el experimento real con plano inclinado con altura de 20 *cm* que se obtiene siguiendo los mismos pasos que se usaron para obtener la tabla de valores del plano inclinado de 10 *cm* de altura, posteriormente se realiza la primera y la segunda variación de la función cuadrática que modela el experimento.

Figura 159. Tabla de valores tiempo vs posición y las diferencias de primer, segundo y tercer orden.

masa_A				
t	x			
3,33E-02	2			
6,67E-02	1	-0,325		
0,1	1	0,089	0,4	
0,133	1	0,130	0,0	0
0,167	2	0,317	0,2	0
0,2	2	0,687	0,4	0
0,234	3	0,832	0,1	0
0,301	5	1,436	0,6	0
0,334	7	1,923	0,5	0
0,434	14	7,128	5,2	5
0,467	17	3,040	-4,1	-9
0,501	20	3,140	0,1	4
0,534	23	3,100	0,0	0
0,568	26	3,040	-0,1	0
0,602	29	3,200	0,2	0
0,635	33	3,780	0,6	0
0,668	37	3,960	0,2	0
0,702	41	3,960	0,0	0
0,735	45	3,990	0,0	0
0,768	50	4,890	0,9	1
0,802	55	5,230	0,3	-1
0,835	61	5,530	0,3	0
0,868	66	5,100	-0,4	-1
0,902	72	6,590	1,5	2

PLANO INCLINADO CON ALTURA DE 20 CM POSICIÓN VS TIEMPO

Figura 160. Tabla de valores tiempo vs posición altura 20 cm

masa_A	
t	x
3,33E-02	2
6,67E-02	1,2
0,1	1,3
0,133	1,4
0,167	1,8
0,2	2,5
0,234	3,3
0,301	4,7
0,334	6,6
0,434	13,8
0,467	16,8
0,501	20,0
0,534	23,1
0,568	26,1
0,602	29,3
0,635	33,1
0,668	37,0
0,702	41,0
0,735	45,0
0,768	49,9
0,802	55,1
0,835	60,6
0,868	65,7
0,902	72,3

Figura 161. Gráfico de dispersión altura 20 cm



Figura 162. Tabla de valores tiempo vs primera diferencia

t	x
3,33E-02	-0,325
6,67E-02	0,089
0,1	0,13
0,133	0,317
0,167	0,687
0,2	0,832
0,268	0,905
0,301	1,923
0,434	3,04
0,467	3,14
0,501	3,1
0,534	3,04
0,568	3,2
0,602	3,78
0,635	3,96
0,668	3,96
0,702	3,99
0,735	4,89
0,768	5,23
0,802	5,53
0,835	5,1
0,868	6,59
0,902	6,84

Figura 163. Gráfico de dispersión primera variación de la cuadrática

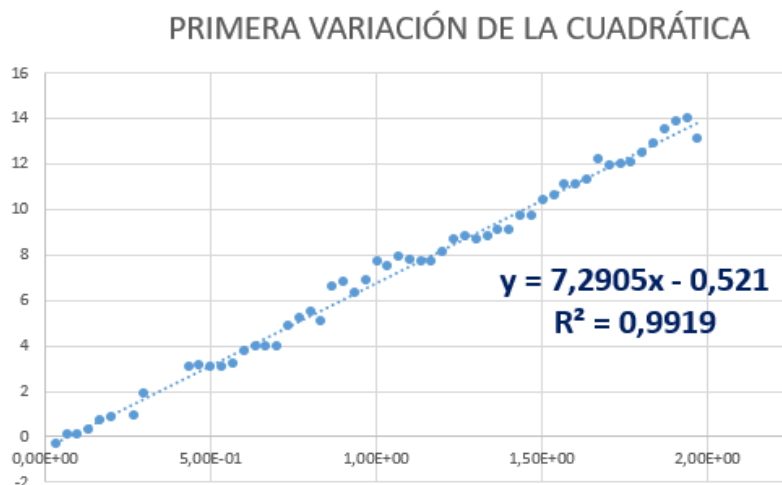
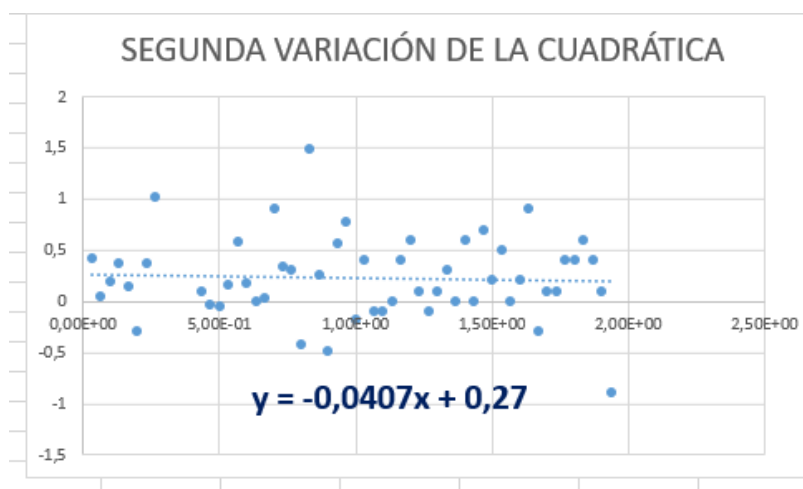


Figura 164. Tabla de valores tiempo vs segunda diferencia

t	x
3,33E-02	0,414
6,67E-02	0,041
0,1	0,187
0,133	0,37
0,167	0,145
0,2	-0,301
0,234	0,374
0,268	1,018
0,434	0,1
0,467	-0,04
0,501	-0,06
0,534	0,16
0,568	0,58
0,602	0,18
0,635	0
0,668	0,03
0,702	0,9
0,735	0,34
0,768	0,3
0,802	-0,43
0,835	1,49
0,868	0,25
0,902	-0,49

Figura 165. Gráfico de dispersión segunda variación de la cuadrática



Ahora se presenta la gráfica y la tabla completa de valores para el experimento real con plano inclinado con altura de 30 cm, posteriormente se realiza la primera y la segunda variación de la función cuadrática que modela el experimento.

Figura 166. Tabla de valores tiempo vs posición y diferencias de primer, segundo y tercer orden

masa_A				
t	x			
6.65E-02	13.64			
0.09992	19.34	5.7		
0.134	27.38	8.04	2.34	
0.167	34.37	6.99	-1.05	-3.39
0.201	43.29	8.92	1.93	2.98
0.234	53.15	9.86	0.94	-0.99
0.267	63.21	10.06	0.2	-0.74
0.301	73.79	10.58	0.52	0.32
0.334	86.49	12.7	2.12	1.6
0.367	99.64	13.15	0.45	-1.67
0.401	115.1	15.46	2.31	1.86
0.434	130.4	15.3	-0.16	-2.47
0.468	146.4	16	0.7	0.86
0.502	164.5	18.1	2.1	1.4
0.535	185	20.5	2.4	0.3
0.568	202.9	17.9	-2.6	-5
0.602	221.9	19	1.1	3.7
0.635	246.2	24.3	5.3	4.2
0.668	266.4	20.2	-4.1	-9.4
0.702	290.1	23.7	3.5	7.6

PLANO INCLINADO CON ALTURA DE 30 CM

Figura 167. Tabla de valores tiempo vs posición altura 30 cm

masa_A	
t	x
6,65E-02	13,64
0,09992	19,34
0,134	27,38
0,167	34,37
0,201	43,29
0,234	53,15
0,267	63,21
0,301	73,79
0,334	86,49
0,367	99,64
0,401	115,1
0,434	130,4
0,468	146,4
0,502	164,5
0,535	185
0,568	202,9
0,602	221,9
0,635	246,2
0,668	266,4
0,702	290,1
0,735	313,2

Figura 168. Gráfico de dispersión Tiempo vs Posición, altura 30 cm

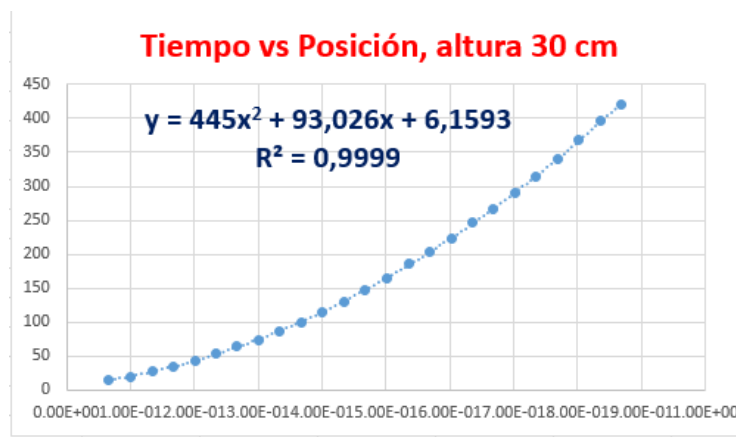


Figura 169. Tabla de valores tiempo vs diferencia de primer orden

t	x
6,65E-02	5,7
0,09992	8,04
0,134	6,99
0,167	8,92
0,201	9,86
0,234	10,06
0,267	10,58
0,301	12,7
0,334	13,15
0,367	15,46
0,401	15,3
0,434	16
0,468	18,1
0,502	20,5

Figura 170. Gráfico de dispersión de la primera variación cuadrática

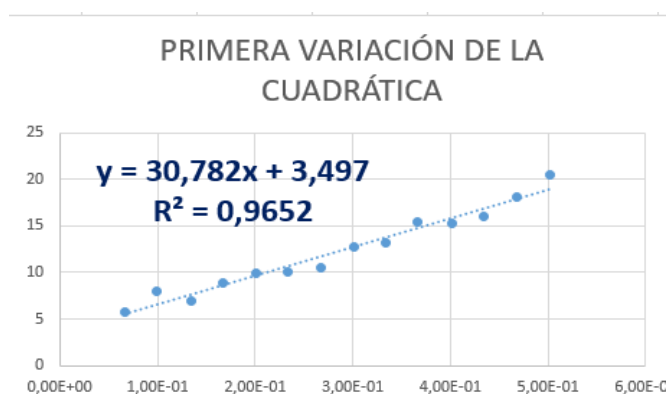
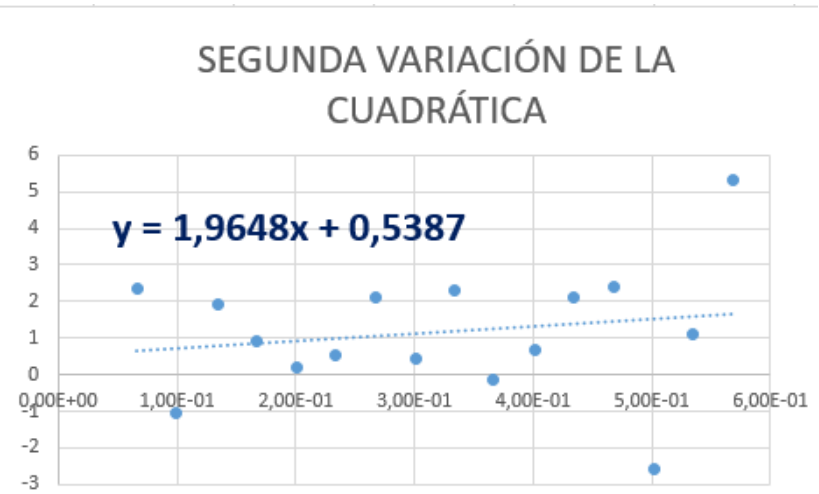


Figura 171. Tabla de valores tiempo vs diferencia de segundo orden

t	x
6,65E-02	2,34
0,09992	-1,05
0,134	1,93
0,167	0,94
0,201	0,2
0,234	0,52
0,267	2,12
0,301	0,45
0,334	2,31
0,367	-0,16
0,401	0,7
0,434	2,1
0,468	2,4
0,502	-2,6
0,535	1,1
0,568	5,3

Figura 172. Gráfico de dispersión segunda variación cuadrática



Primera Parte – Fase de Exploración

1. Observar los siguientes videos introductorios al uso del simulador Phet:

<https://www.youtube.com/watch?v=x7noCkSCNlw>

https://www.youtube.com/watch?v=Yb2t54_YN4g

2. Ingresar al siguiente link:

https://phet.colorado.edu/sims/html/projectile-motion/latest/projectile-motion_all.html?locale=es

3. Dar clic en INTRODUCCIÓN.

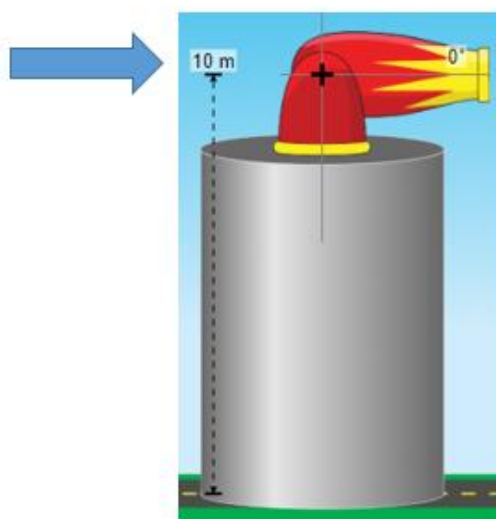
Figura 173. Interfaz del simulador Phet



4. Reconocer cada una de las herramientas que tiene la aplicación en la parte de la introducción.

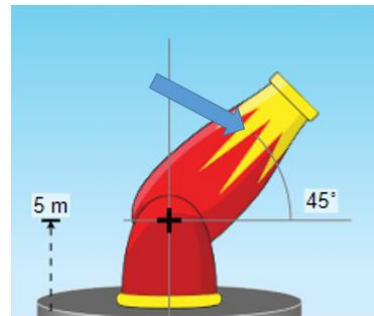
Altura del cilindro: Se selecciona la parte donde muestra el número que identifica la altura del cilindro, luego se empieza a desplegar para modificar la altura del mismo.

Figura 174. Botón para la altura del cilindro



Ángulo del cañón: Se debe seleccionar donde está la flecha y empezar a girar para obtener diferentes ángulos de lanzamiento del cañón.

Figura 175. Ángulo del cañón.



Dispositivo para tomar medidas como el tiempo de vuelo, la distancia horizontal y la altura.

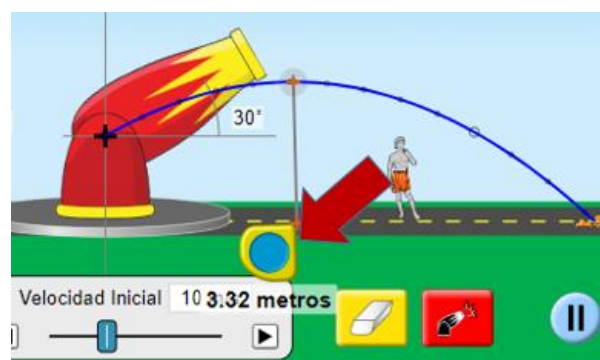
Se da clic sostenido en la circunferencia y se empieza a mover por cada punto de la curva mostrada en el simulador, luego se obtienen las mediciones como tiempo de vuelo, altura y distancia.

Figura 176. Dispositivo para la toma de medidas



Flexómetro: Sirve para tomar medidas de longitud horizontales y verticales del objeto en lanzamiento. Funciona como lo que conocemos como “metro” real, se deja un punto fijo y se estira para marcar el otro punto.

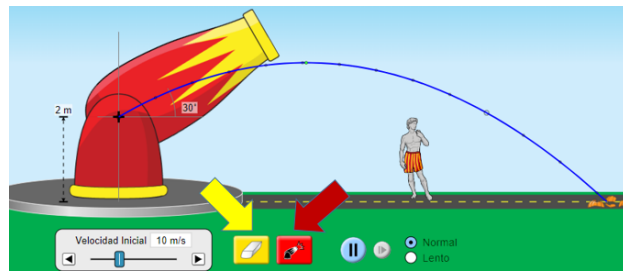
Figura 177. Flexómetro



Botón para borrar y para lanzar el proyectil.

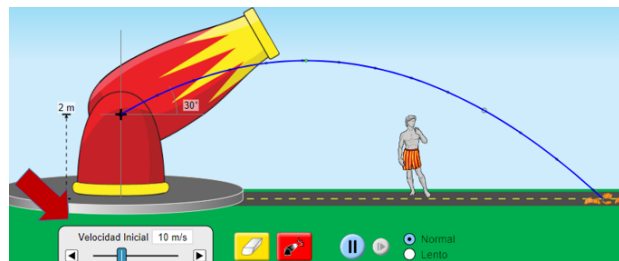
La flecha que señala el botón amarillo es el borrar, se activa dando clic sobre el botón con imagen de borrador. La flecha que señala el botón rojo es el de lanzamiento del proyectil, se activa dando clic sobre el botón rojo con la imagen de cañón.

Figura 178. Botones de borrar y de lanzamiento de proyectil.



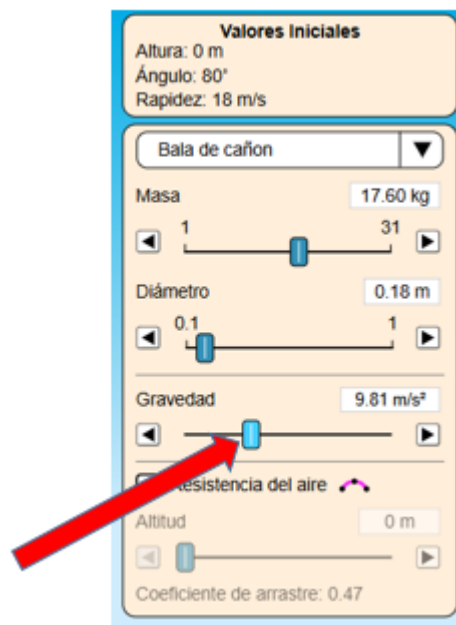
Deslizador para la velocidad inicial del proyectil.

Figura 179. Deslizador para la velocidad inicial



Deslizador para la gravedad: esta herramienta permite modificar el valor de la gravedad.

Figura 180. Deslizador de la gravedad



Para los experimentos simulados, es importante que la pestaña que se elija en el simulador sea **Laboratorio**, y así obtener todas las funciones que se necesitan.



Segunda Parte – Experimentos Simulados con Phet

A continuación, se presentan los cinco experimentos simulados que deben realizar los estudiantes:

Experimento simulado 1. En este experimento se debe hacer el lanzamiento de un proyectil, anotar los valores del tiempo y la distancia con una velocidad inicial fija (18 m/s) y la gravedad fijada en $9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Experimento simulado 2. En este experimento se debe hacer el lanzamiento de un proyectil, anotar los valores de la velocidad inicial que varían de dos en dos partiendo de 5 m/s y medir la distancia horizontal dependiendo de la velocidad con la que se hace el lanzamiento.

Experimento simulado 3. En este experimento se debe hacer un lanzamiento vertical del proyectil (con un ángulo de 90°), una velocidad inicial de 25 m/s y la gravedad de $9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, luego se anotan los valores del tiempo y la altura del objeto.

Experimento simulado 4. En este experimento se debe hacer el lanzamiento de un proyectil, anotar los valores del tiempo y la distancia con una velocidad inicial fija (14 m/s), la gravedad de $9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ y altura inicial de 10 m . Luego, se anotan los valores de tiempo y altura.

Experimento simulado 5. En este experimento se debe hacer un lanzamiento vertical del proyectil (con un ángulo de 90°), una velocidad inicial de 25 m/s , la gravedad de $11 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ y una altura inicial de 5 m , luego se anotan los valores del tiempo y la altura del objeto.

EXPERIMENTO SIMULADO 1. TIRO PARABÓLICO

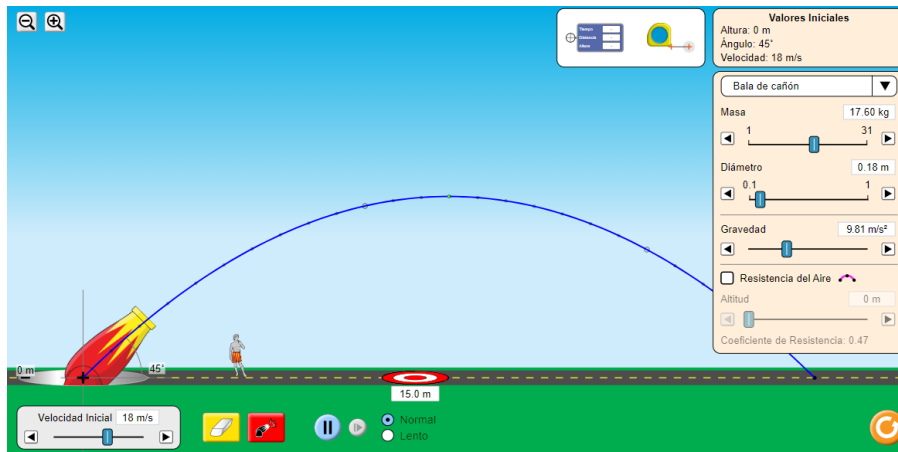
TIEMPO -ALTURA

1. Ingresar al siguiente link y selecciona la pestaña **Laboratorio**:

https://phet.colorado.edu/sims/html/projectile-motion/latest/projectile-motion_all.html?locale=es

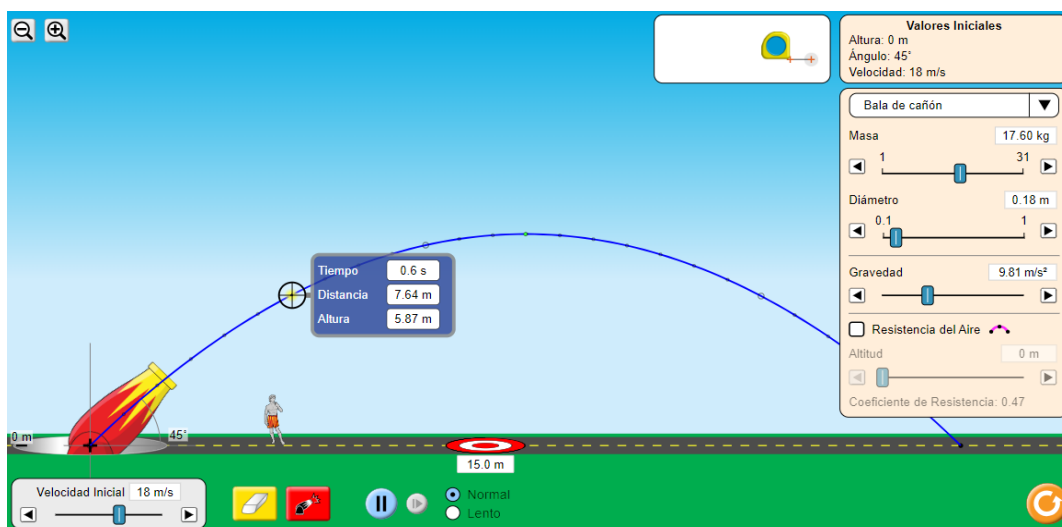
- Se elige un ángulo de 45° , una velocidad inicial de 18 m/s y una gravedad de $9,81 \text{ m/s}^2$, luego se hace el lanzamiento del proyectil.

Figura 181. Selección de datos iniciales



- Se selecciona el dispositivo para tomar medidas. Se toman el tiempo de vuelo y la altura.

Figura 182. Toma de medidas



- Hacer la tabla de datos en una plantilla de Excel.

Figura 183. Tabla de datos tiempo vs altura

			x	y
ALTURA INICIAL	VELOCIDAD INICIAL	GRAVEDAD	TIEMPO	ALTURA
0	18	9.8	0.1	1.2
			0.2	2.3
			0.3	3.3
			0.4	4.3
			0.5	5.1
			0.6	5.8
			0.7	6.5
			0.8	7.0
			0.9	7.4
			1	7.8
			1.1	8.0
			1.2	8.2
			1.3	8.2
			1.4	8.2
			1.5	8.0
			1.6	7.8
			1.7	7.4
			1.8	7.0
			1.9	6.4
			2	5.8

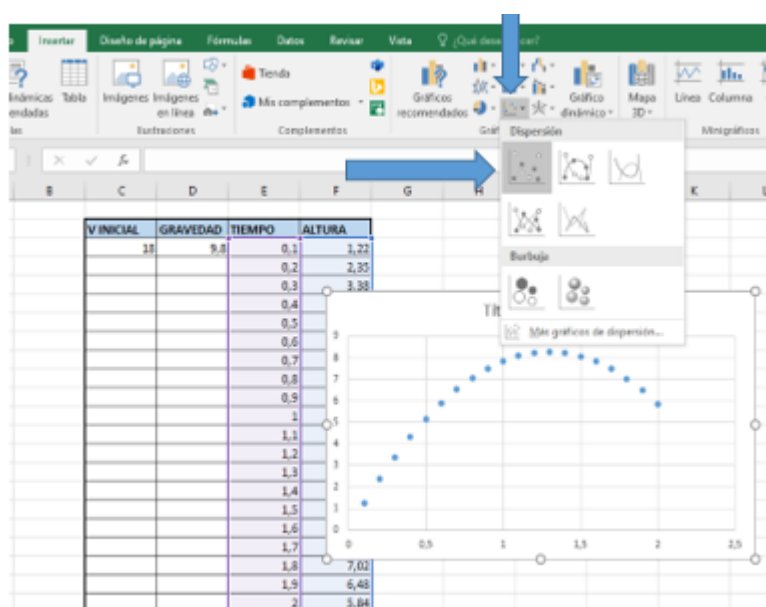
- Se seleccionan las columnas tiempo y altura.

Figura 184. Selección de datos tiempo y altura

			x	y
ALTURA INICIAL	VELOCIDAD INICIAL	GRAVEDAD	TIEMPO	ALTURA
0	18	9.8	0.1	1.22
			0.2	2.35
			0.3	3.38
			0.4	4.31
			0.5	5.14
			0.6	5.87
			0.7	6.51
			0.8	7.04
			0.9	7.48
			1	7.82
			1.1	8.07
			1.2	8.21
			1.3	8.26
			1.4	8.21
			1.5	8.06
			1.6	7.81
			1.7	7.46
			1.8	7.02
			1.9	6.48
			2	5.84

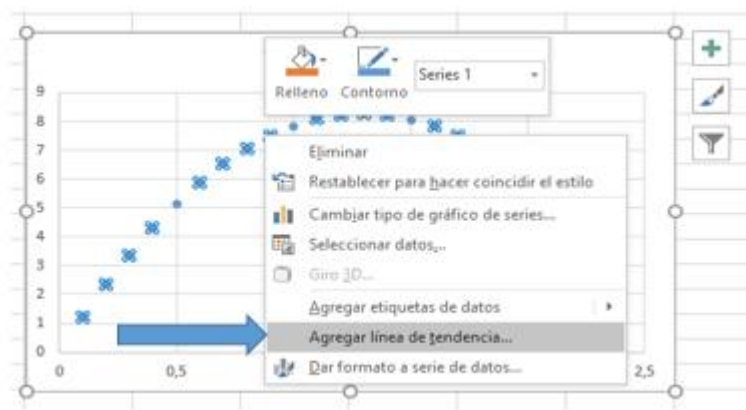
6. Se selecciona la pestaña insertar, luego gráfico de dispersión y se da clic.

Figura 185. Selección de gráfico de dispersión



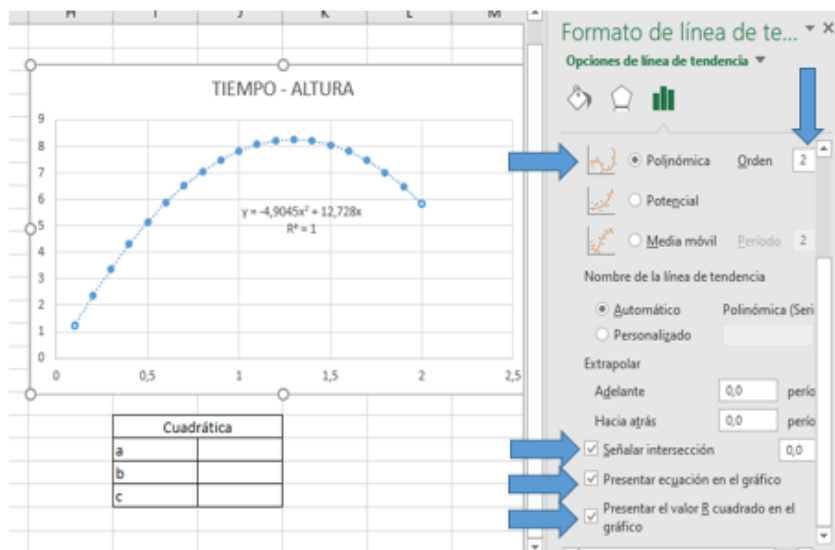
7. Se da doble clic sobre un punto en la gráfica y se selecciona la opción agregar línea de tendencia central.

Figura 186. Selección de línea de tendencia central



- Los estudiantes deben elegir la opción polinómica que mejor se ajusta al gráfico presentado, teniendo como referencia que el valor de R cuadrado sea los más aproximado a 1 (esta inducción se hará con el refuerzo de Excel, donde se presentan gráficos que se asocian a funciones lineales, cuadráticas y exponenciales). Luego dar clic en “Señalar intersección”, “Presentar ecuación del gráfico” y “Presentar el valor de R cuadrado en el gráfico”).

Figura 187. Selección de orden del polinomio



- Teniendo en cuenta la ecuación de la posición contra el tiempo en el movimiento de proyectiles $y = v_{oy} \cdot t + \frac{1}{2}g \cdot t^2$, deducir quien es el valor de a y b en la ecuación: $y = -4,9045x^2 + 12,728x$.

Se sabe que la velocidad en y es $v_{oy} = v_0 \cdot \sin \alpha$

Luego, se sustituyen los valores dados:

$$\alpha = 45^\circ, v_0 = 18 \text{ m/s}$$

Ahora:

$$v_{oy} = 18 \text{ m/s} \cdot \text{sen}(45^\circ)$$

$$v_{oy} = 12,727922 \dots$$

$$v_{oy} = 12,728 \text{ m/s}$$

Con esto se concluye el valor b se relaciona con la velocidad inicial en y .

Se tiene como referencia la ecuación de posición:

$$y = v_{oy} \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

Para el coeficiente cuadrático " a " se realiza la sustitución de $a = \frac{1}{2}g$ donde

$g = -9,81 \frac{m}{s^2}$ y se obtiene:

$$a = \frac{1}{2} \left(-9,81 \frac{m}{s^2} \right)$$

$$a = -4,905 \frac{m}{s^2}$$

Entonces se puede concluir que el coeficiente a se relaciona con la gravedad que se trabaje en el simulador.

Así la expresión algebraica $y = 12,728 \cdot t - 4,905 \cdot t^2$ modela el experimento simulado 1 y es la que se muestra en la figura 91.

EXPERIMENTO SIMULADO 2. TIRO PARABÓLICO

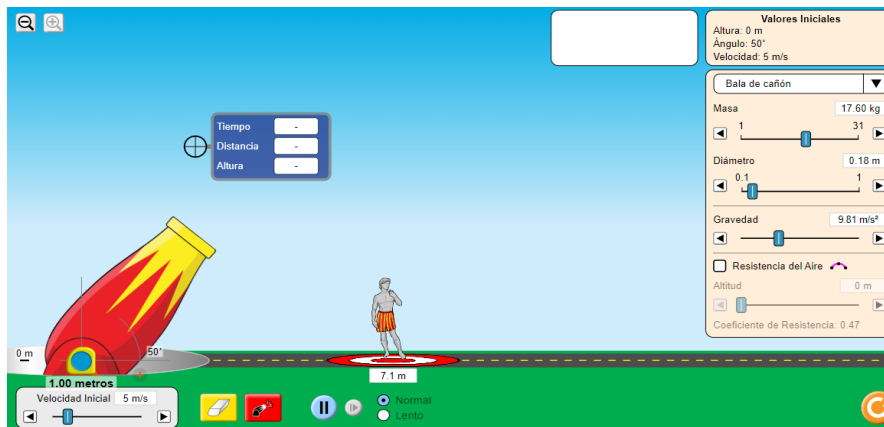
VELOCIDAD INICIAL – DISTANCIA HORIZONTAL

1. Ingresar al siguiente link y selecciona la pestaña LABORATORIO:

https://phet.colorado.edu/sims/html/projectile-motion/latest/projectile-motion_all.html?locale=es

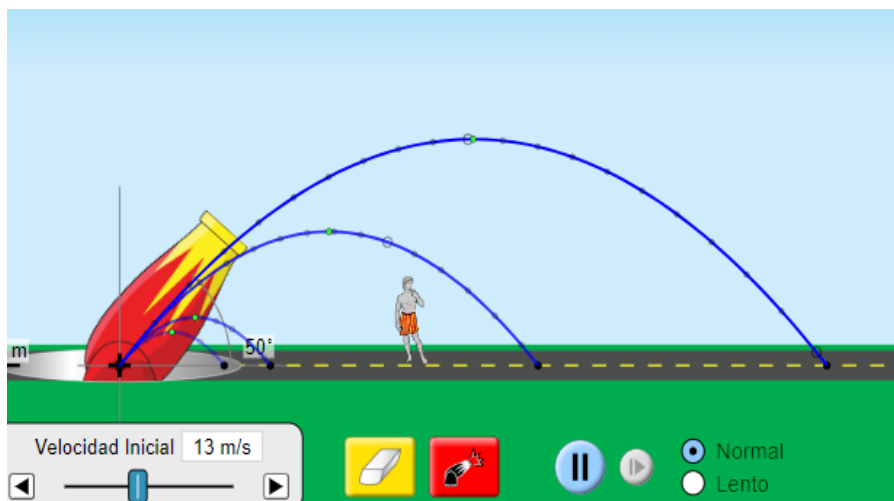
2. Se elige un ángulo de 50° , una velocidad inicial de 5 m/s y la gravedad de $9,81 \frac{m}{s^2}$

Figura 188. Selección de datos iniciales



3. Se realizan los lanzamientos de proyectil dejando fijo el valor de la gravedad y el ángulo, el único valor a variar es la velocidad inicial empezando en 5 m/s y aumentando su valor de dos en dos m/s .

Figura 189. Lanzamiento de proyectil



4. Se selecciona el dispositivo para tomar medidas. Las medidas que se toman son la velocidad inicial y el alcance horizontal.

Figura 190. Toma de medidas



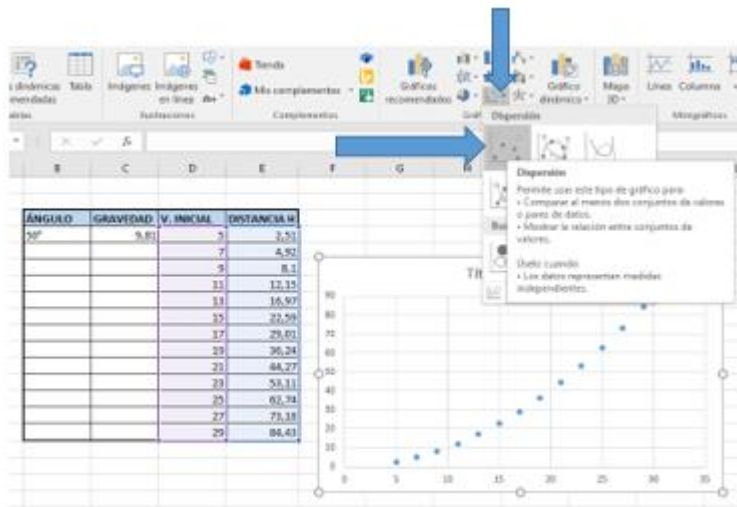
5. Se escriben los datos en una plantilla de Excel.

Figura 191. Tabla de datos velocidad inicial y distancia horizontal

			x	y
ALTURA INICIAL	ÁNGULO	GRAVEDAD	VELOCIDAD INICIAL	DISTANCIA HORIZONTAL
0	50°	9.81	5	2.51
			7	4.92
			9	8.1
			11	12.15
			13	16.97
			15	22.59
			17	29.01
			19	36.24
			21	44.27
			23	53.11
			25	62.74
			27	73.18
			29	84.43

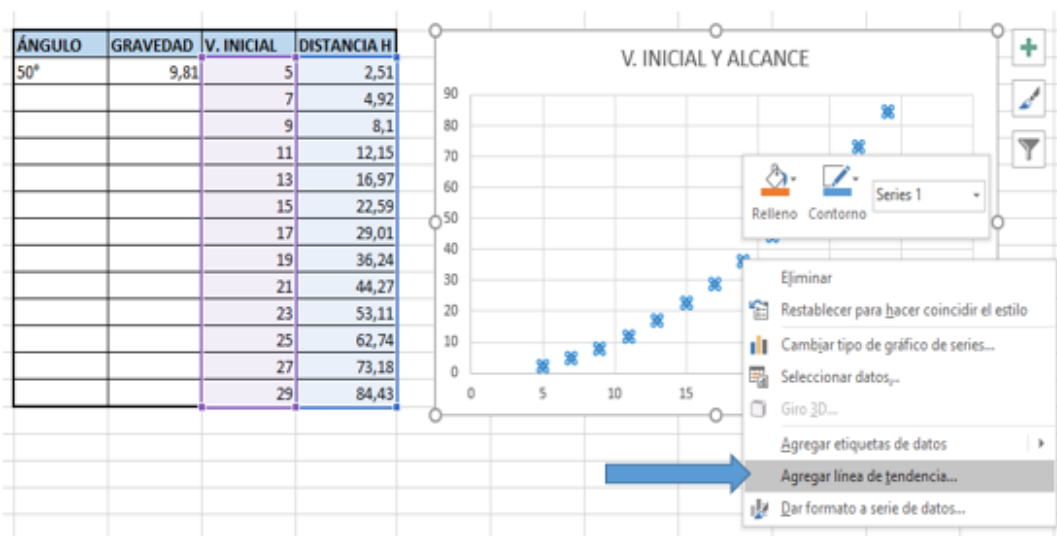
6. Se selecciona las columnas velocidad inicial y distancia horizontal, después la pestaña insertar, luego gráfico de dispersión y se da clic en él.

Figura 192. Selección de gráfico de dispersión



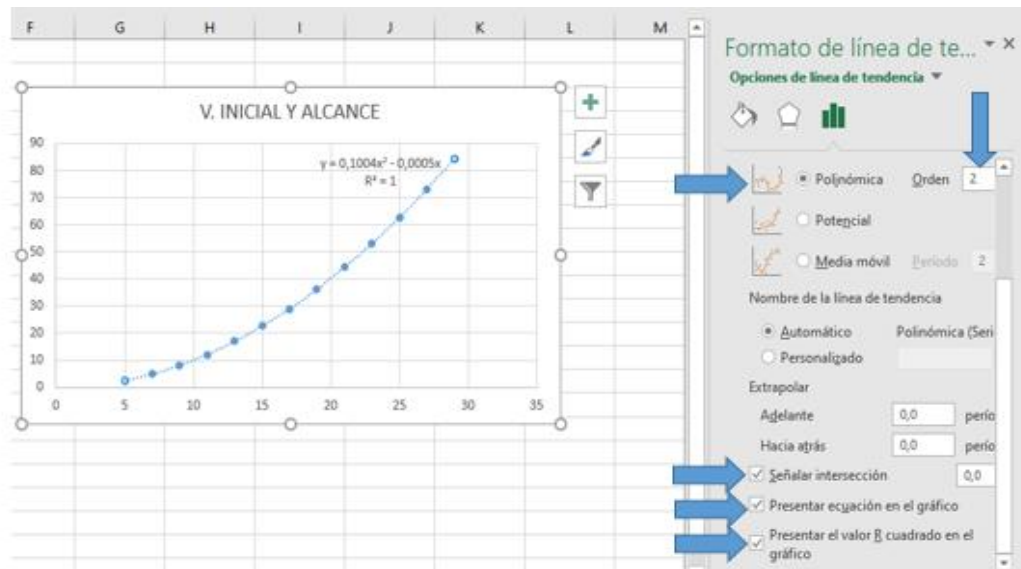
7. Se da clic derecho sobre un punto en la gráfica y se selecciona la opción agregar línea de tendencia central.

Figura 193. Selección de línea de tendencia central



8. Se selecciona la opción polinómica de orden 2, luego “señalar intersección”, presentar ecuación del gráfico y presentar el valor de R cuadrado en el gráfico.

Figura 194. Selección de orden del polinomio



9. Teniendo en cuenta que el alcance máximo depende de velocidad inicial, el ángulo y la gravedad se tiene la siguiente relación funcional:

$$x_{max} = \frac{v_0^2 \cdot \sin(2\alpha)}{g}$$

La variable dependiente es el alcance horizontal y la variable independiente es la velocidad inicial. Ahora se tiene que el parámetro a de la función cuadrática se relaciona con el valor constante que en este caso es $a = \frac{\sin(2\alpha)}{g}$.

Entonces:

$$x_{max} = a \cdot v_0^2$$

Realizando la sustitución con el valor del ángulo 50° y la gravedad de $9,81 \text{ m/s}^2$ se tiene que el coeficiente cuadrático es:

$$\frac{\sin(2 * 50^\circ)}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0,100388 \frac{\text{s}^2}{\text{m}}$$

entonces se puede concluir que el valor de a depende de la gravedad como era de esperarse.

EXPERIMENTO SIMULADO 3. LANZAMIENTO VERTICAL

TIEMPO – ALTURA

1. Ingresar al siguiente link y selecciona la pestaña **Laboratorio**.

https://phet.colorado.edu/sims/html/projectile-motion/latest/projectile-motion_all.html?locale=es

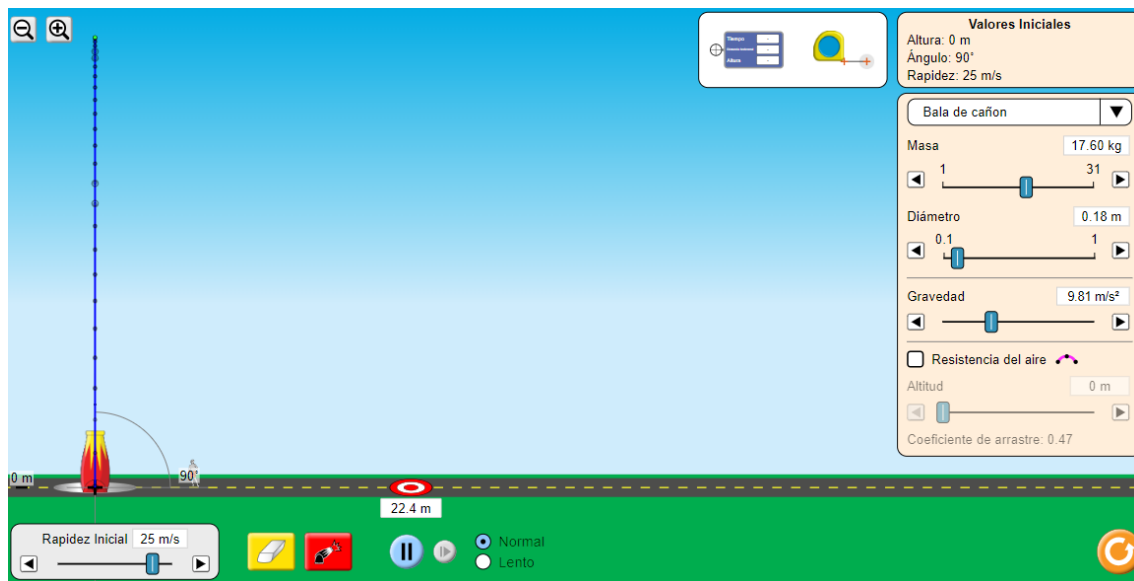
2. Se elige un ángulo de 90° , una velocidad inicial de 25 m/s y la gravedad de $9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Figura 195. Selección de datos iniciales



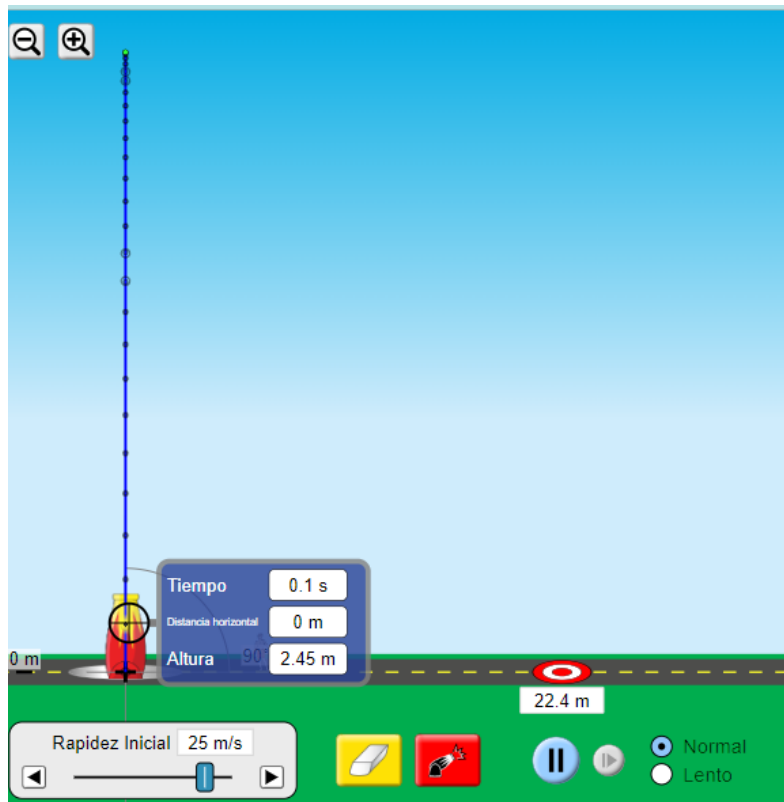
3. Se realiza el lanzamiento del proyectil.

Figura 196. Lanzamiento de proyectil



4. Se selecciona el dispositivo para tomar medidas. Las medidas que se toman son el tiempo y la altura en cada punto.

Figura 197. Toma de medidas



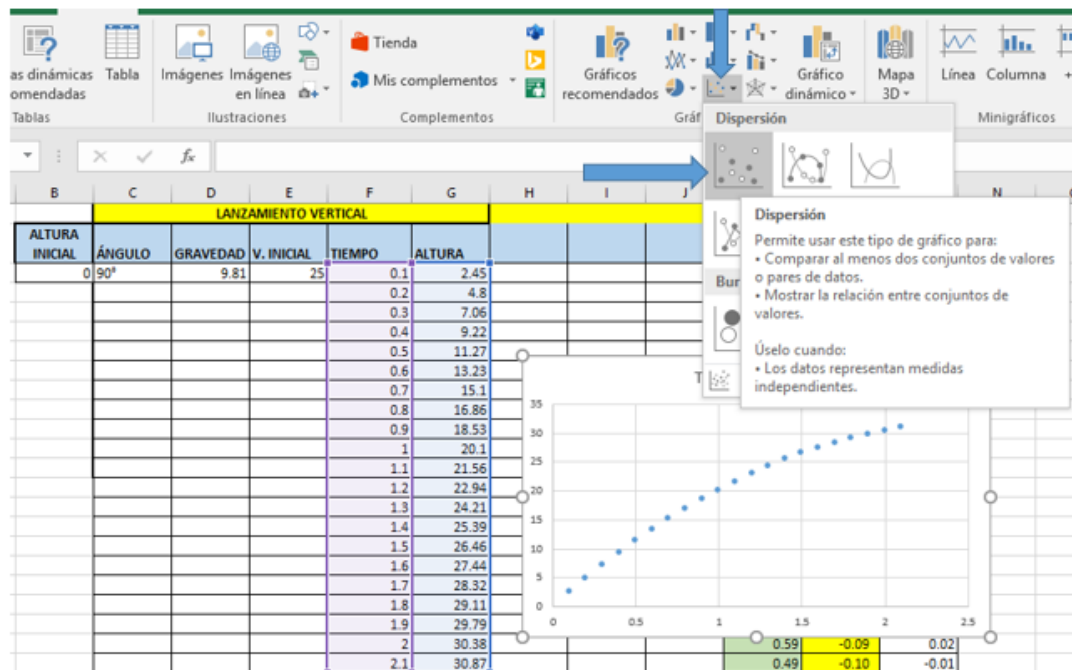
5. Se registran los datos en una plantilla de Excel.

Figura 198. Tabla de datos de lanzamiento vertical, tiempo vs altura

LANZAMIENTO VERTICAL					
ALTURA INICIAL	ÁNGULO	GRAVEDAD	VELOCIDAD INICIAL	TIEMPO	ALTURA
0	90°	9.81	25	0.1	2.45
				0.2	4.8
				0.3	7.06
				0.4	9.22
				0.5	11.27
				0.6	13.23
				0.7	15.1
				0.8	16.86
				0.9	18.53
				1	20.1
				1.1	21.56
				1.2	22.94
				1.3	24.21
				1.4	25.39
				1.5	26.46
				1.6	27.44
				1.7	28.32
				1.8	29.11
				1.9	29.79
				2	30.38
				2.1	30.87

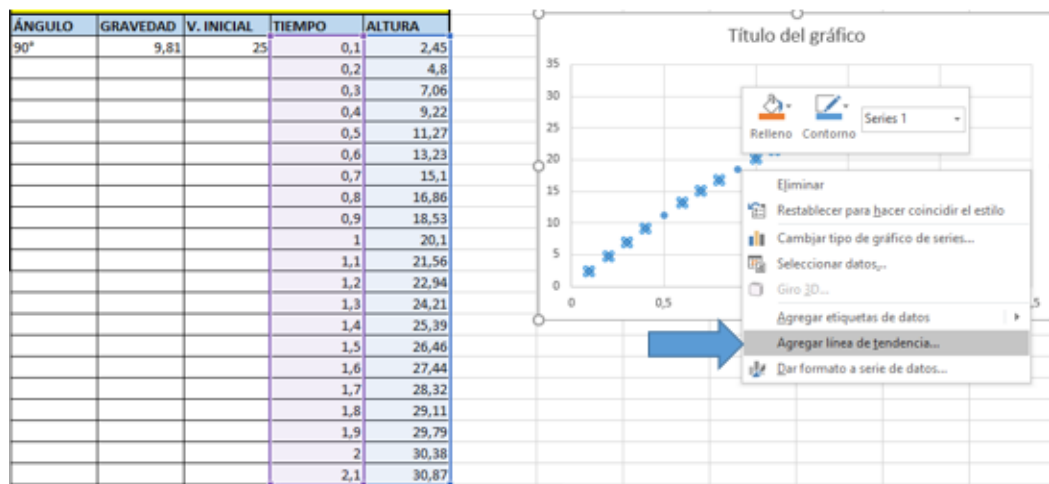
- Se selecciona la pestaña insertar, luego gráfico de dispersión y se da clic en él.

Figura 199. Selección de gráfico de dispersión



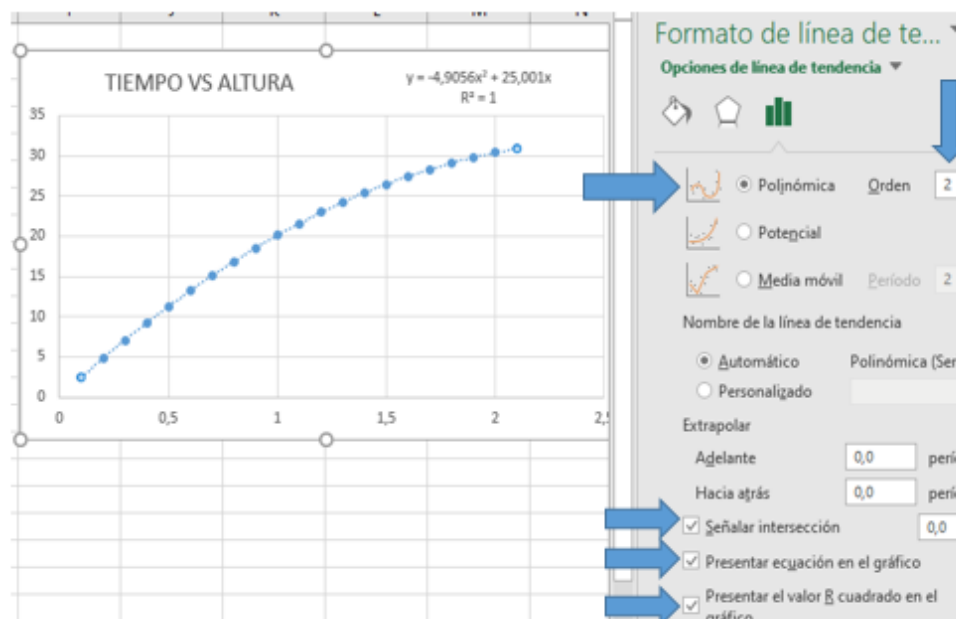
- Se da doble clic sobre un punto en la gráfica y se selecciona la opción agregar línea de tendencia central.

Figura 200. Selección de línea de tendencia central



- Se selecciona la opción polinómica de orden 2, luego “señalar intersección, presentar ecuación del gráfico y presentar el valor de R^2 cuadrado en el gráfico”.

Figura 201. Selección de orden del polinomio



9. La ecuación de la posición, como una función del tiempo, en el lanzamiento vertical es:

$$y(t) = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

Donde:

y_0	Posición inicial
v_0	Velocidad inicial
g	Aceleración

La ecuación que representa el lanzamiento vertical es:

$$y = -4,9056 x^2 + 25,001 x$$

Los valores que se pueden deducir al comparar ambas ecuaciones es que el coeficiente a de la ecuación se relaciona con la mitad de la aceleración del objeto lanzado, que el coeficiente b es la velocidad inicial (en y) del objeto y c es la posición inicial del objeto, para comprobar esta última relación se harán lanzamientos con altura inicial diferente de cero aplicados al modelo 1 y 3 presentados anteriormente.

EXPERIMENTO SIMULADO 4. TIRO PARABÓLICO

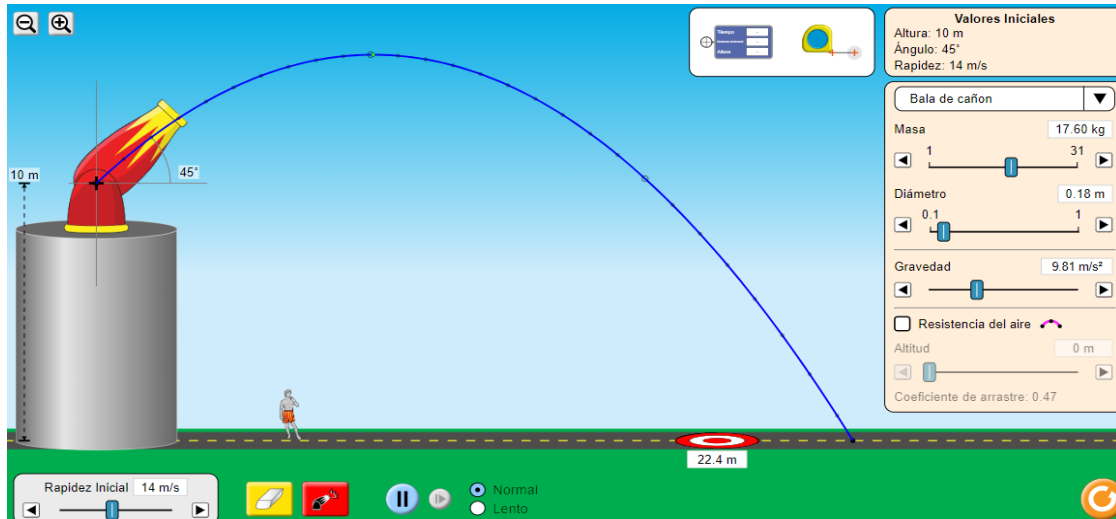
TIEMPO –ALTURA INICIAL

1. Ingresar al siguiente link y selecciona la pestaña LABORATORIO.

https://phet.colorado.edu/sims/html/projectile-motion/latest/projectile-motion_all.html?locale=es

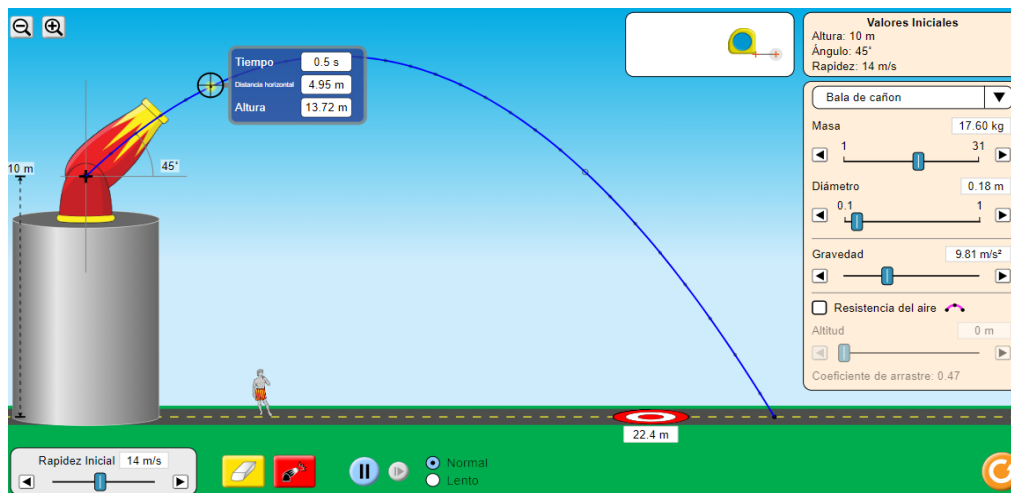
- Se elige un ángulo de 45° , una velocidad inicial de 14 m/s , una gravedad de $9,81 \text{ m/s}^2$ y una altura inicial de 10 m , luego se hace el lanzamiento del proyectil.

Figura 202. Selección de datos iniciales y lanzamiento de proyectil



- Se selecciona el dispositivo para tomar medidas. Las medidas que se registran en la tabla son el tiempo de vuelo y la altura.

Figura 203. Toma de medidas



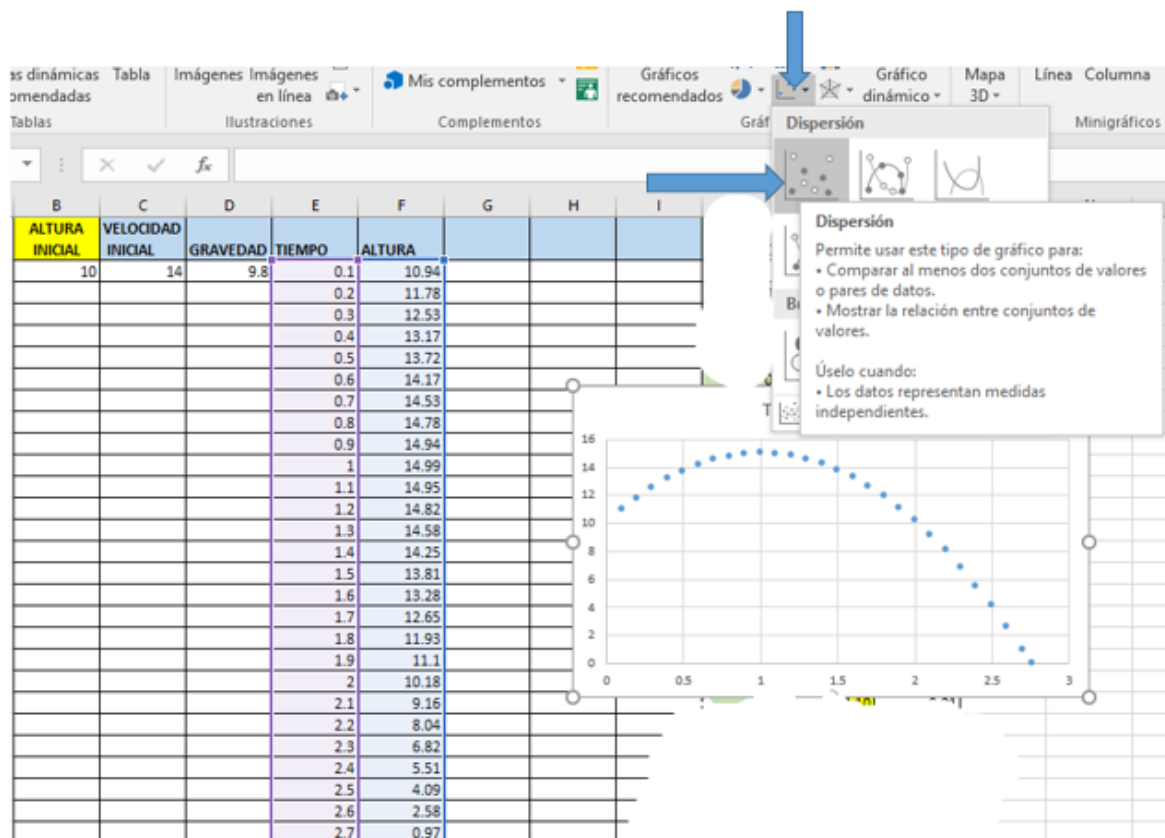
- Se registran los datos en una plantilla de Excel.

Figura 204. Tabla de datos tiempo vs altura

ALTURA INICIAL	VELOCIDAD INICIAL	GRAVEDAD	TIEMPO	ALTURA
10	14	9.8	0.1	10.94
			0.2	11.78
			0.3	12.53
			0.4	13.17
			0.5	13.72
			0.6	14.17
			0.7	14.53
			0.8	14.78
			0.9	14.94
			1	14.99
			1.1	14.95
			1.2	14.82
			1.3	14.58
			1.4	14.25
			1.5	13.81
			1.6	13.28
			1.7	12.65
			1.8	11.93
			1.9	11.1
			2	10.18
			2.1	9.16
			2.2	8.04
			2.3	6.82
			2.4	5.51
			2.5	4.09
			2.6	2.58
			2.7	0.97

- Se seleccionan las columnas tiempo y altura, posteriormente la pestaña insertar, luego gráfico de dispersión y se da clic.

Figura 205. Selección de gráfico de dispersión



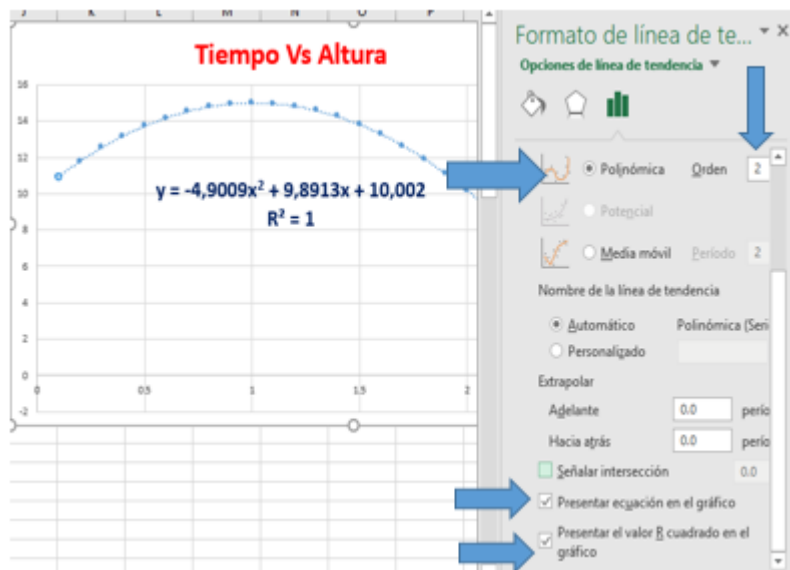
- Se da doble clic sobre un punto en la gráfica y se selecciona la opción agregar línea de tendencia central.

Figura 206. Selección de línea de tendencia central



- Se selecciona la opción polinómica de orden 2, luego “señalar intersección, presentar ecuación del gráfico y presentar el valor de R^2 cuadrado en el gráfico”.

Figura 207. Selección de orden del polinomio



8. Teniendo en cuenta la ecuación de la posición contra el tiempo en el movimiento de proyectiles $y = y_0 + v_{oy} \cdot t + \frac{1}{2}g \cdot t^2$, se relacionan los coeficientes de a , b y c en la ecuación: $y = -4,9045x^2 + 9,8913x + 10,002$.

Para el coeficiente cuadrático “ a ”, por comparación, se realiza la sustitución

$$a = \frac{1}{2}g, \text{ donde } g = -9,81 \frac{m}{s^2}$$

Luego, se sustituyen los valores dados:

$$\alpha = 45^\circ, v_0 = 14 \text{ m/s}$$

Se sabe que la velocidad inicial en y es $v_{oy} = v_0 \cdot \text{sen } \alpha$, por lo tanto se sustituye con los datos conocidos:

$$v_{oy} = 14 \text{ m/s} \cdot \text{sen } (45^\circ)$$

$$v_{oy} = 9,899494 \dots$$

$$v_{oy} = 9,891 \text{ m/s}$$

Con esto se concluye el coeficiente b se relaciona con la velocidad inicial en y .

Teniendo en cuenta lo anterior se puede concluir que el coeficiente a se relaciona con la aceleración y con la gravedad que se trabaje en el simulador, el valor de b con la velocidad inicial en y y el valor de c corresponde a la altura inicial del objeto que, en este caso, es 10 m.

EXPERIMENTO SIMULADO 5. LANZAMIENTO VERTICAL

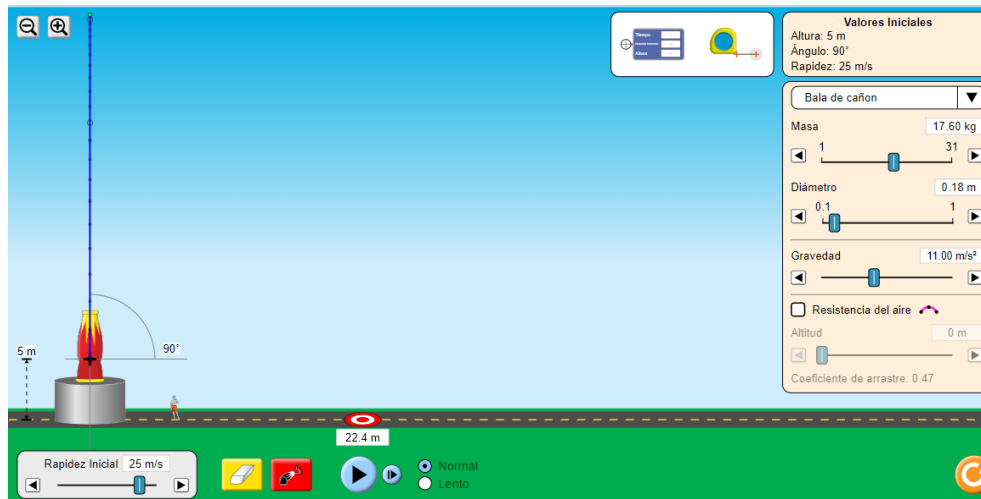
TIEMPO – ALTURA INICIAL

1. Ingresar al siguiente link y selecciona la pestaña LABORATORIO.

https://phet.colorado.edu/sims/html/projectile-motion/latest/projectile-motion_all.html?locale=es

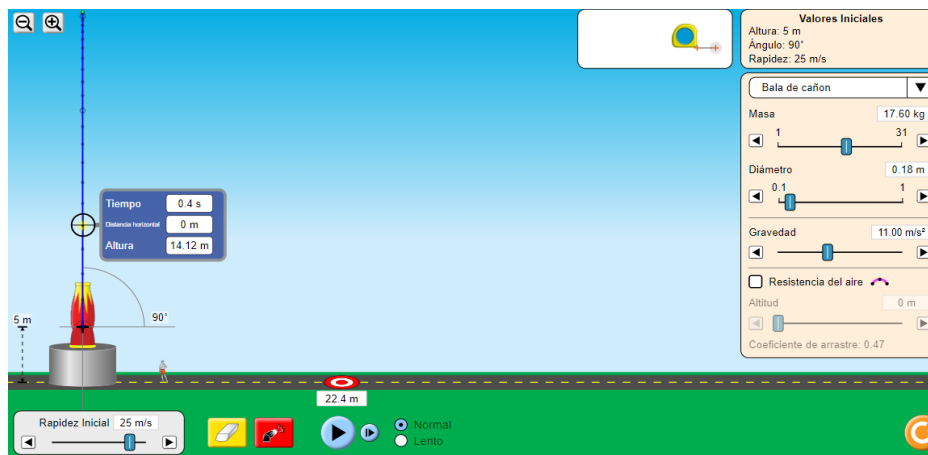
- Se elige un ángulo de 90° , una velocidad inicial de 25 m/s , la gravedad de $11 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ y una altura inicial de 5 m .

Figura 208. Selección de datos iniciales y lanzamiento de proyectil



- Se selecciona el dispositivo para tomar medidas. Las medidas que se toman son el tiempo de vuelo y la altura.

Figura 209. Toma de medidas



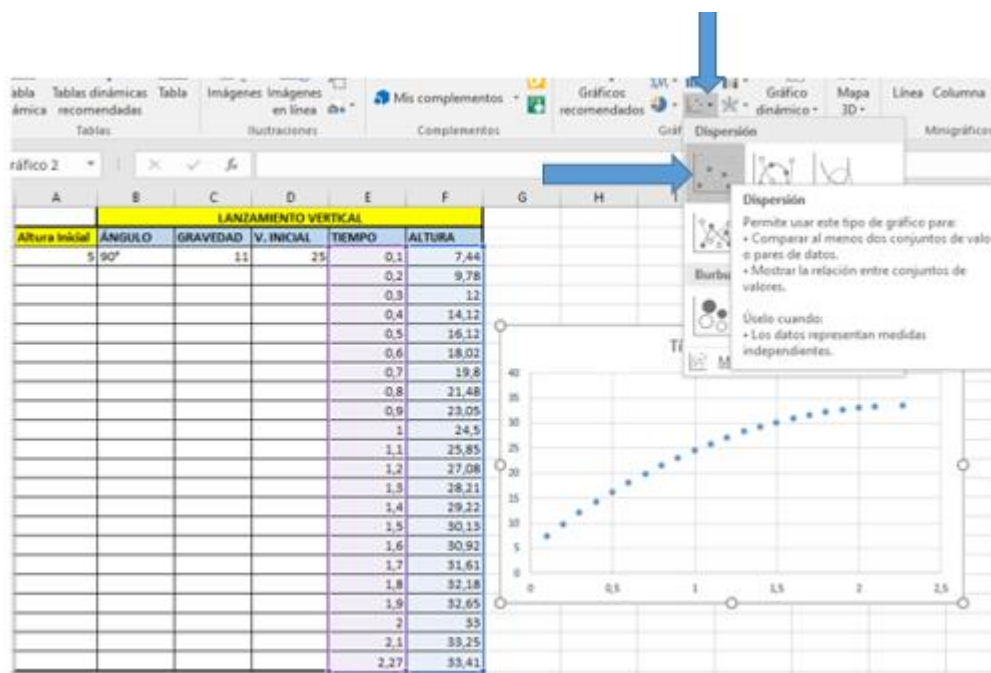
- Se registran los datos en una plantilla de Excel.

Figura 210. Tabla de datos de lanzamiento vertical tiempo vs altura

LANZAMIENTO VERTICAL					
Altura Inicial	ÁNGULO	GRAVEDAD	V. INICIAL	TIEMPO	ALTURA
5	90°	11	25	0,1	7,44
				0,2	9,78
				0,3	12
				0,4	14,12
				0,5	16,12
				0,6	18,02
				0,7	19,8
				0,8	21,48
				0,9	23,05
				1	24,5
				1,1	25,85
				1,2	27,08
				1,3	28,21
				1,4	29,22
				1,5	30,13
				1,6	30,92
				1,7	31,61
				1,8	32,18
				1,9	32,65
				2	33
				2,1	33,25
				2,27	33,41

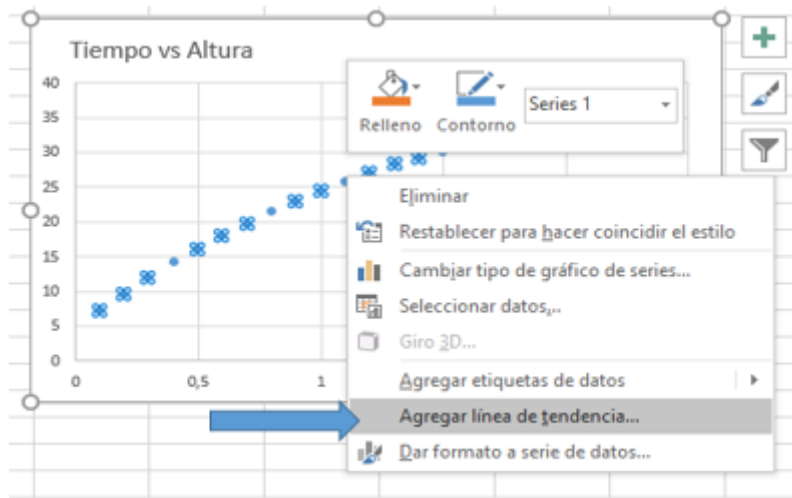
- Se seleccionan las columnas tiempo y altura, posteriormente la pestaña insertar, luego gráfico de dispersión y se da clic.

Figura 211. Selección de gráfico de dispersión



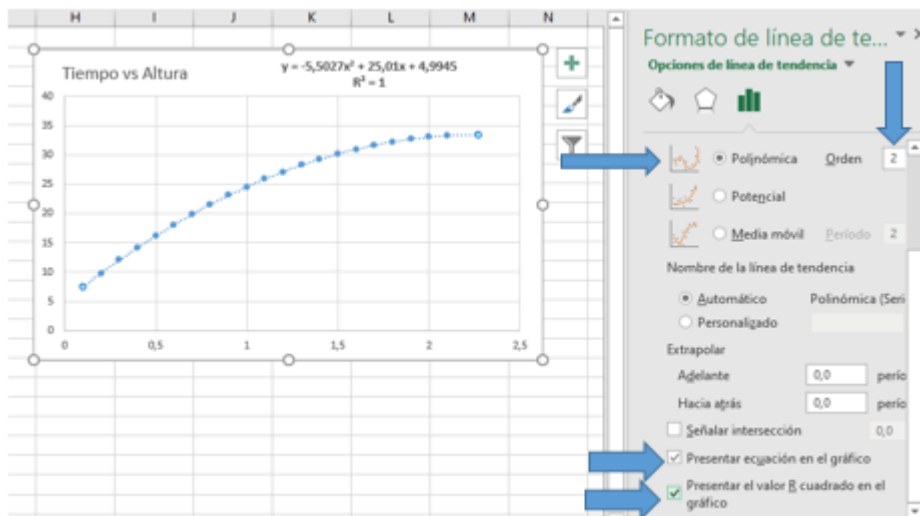
- Se da doble clic sobre un punto en la gráfica y se selecciona la opción agregar línea de tendencia central.

Figura 212. Selección de línea de tendencia central



- Se selecciona la opción polinómica de orden 2, luego “señalar intersección, presentar ecuación del gráfico y presentar el valor de R^2 cuadrado en el gráfico”.

Figura 213. Selección de orden del polinomio



- La ecuación de la posición, como una función del tiempo, en el lanzamiento vertical es:

$$y(t) = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

Donde:

y_0	Posición inicial
v_0	Velocidad inicial
g	Aceleración

La ecuación que representa el lanzamiento vertical, suministrada por Excel es:

$$y = -5,5027 x^2 + 25,01x + 4,9945$$

Para el coeficiente cuadrático “ a ” se realiza la sustitución de $a = \frac{1}{2}g$ donde

$g = 11 \frac{m}{s^2}$ y se obtiene:

$$a = \frac{1}{2} \left(-11 \frac{m}{s^2} \right)$$

$$a = -5,5 \frac{m}{s^2}$$

Teniendo en cuenta lo anterior y los datos dados inicialmente en el simulador se puede deducir que los valores a, b y c de la función cuadrática se relacionan con: el coeficiente a de la ecuación es la mitad de la aceleración del objeto lanzado, el coeficiente b es la velocidad inicial (en el eje y) del objeto y c es la posición inicial del objeto que es $5 m$.

Anexo G. Taller educativo N°4

1. Se usa la tabla de valores obtenida en el experimento simulado I – Tiempo vs Altura.

Figura 214. Tabla de datos tiempo vs altura

			x	y
ALTURA INICIAL	VELOCIDAD INICIAL	GRAVEDAD	TIEMPO	ALTURA
0	18	9.8	0.1	1.22
			0.2	2.35
			0.3	3.38
			0.4	4.31
			0.5	5.14
			0.6	5.87
			0.7	6.51
			0.8	7.04
			0.9	7.48
			1	7.82
			1.1	8.07
			1.2	8.21
			1.3	8.26
			1.4	8.21
			1.5	8.06
			1.6	7.81
			1.7	7.46
			1.8	7.02
			1.9	6.48
			2	5.84

2. Se agrega una columna a la derecha de tal manera que sea la diferencia entre el valor 2,35 y 1,22; luego 3,38 y 2,35 y así sucesivamente. Para esto se selecciona la parte inferior de la celda de la tercera columna y se arrastra hacia abajo para que automáticamente se obtengan los demás resultados.

Figura 215. Primera diferencia

ALTURA INICIAL	VELOCIDAD INICIAL	GRAVEDAD	x	y	PRIMERA DIFERENCIA
			TIEMPO	ALTURA	
0	18	9.8	0.1	1.22	
			0.2	2.35	1.13
			0.3	3.38	1.03
			0.4	4.31	0.93
			0.5	5.14	0.83
			0.6	5.87	0.73
			0.7	6.51	0.64
			0.8	7.04	0.53
			0.9	7.48	0.44
			1	7.82	0.34
			1.1	8.07	0.25
			1.2	8.21	0.14
			1.3	8.26	0.05
			1.4	8.21	-0.05
			1.5	8.06	-0.15
			1.6	7.81	-0.25
			1.7	7.46	-0.35
			1.8	7.02	-0.44
			1.9	6.48	-0.54
			2	5.84	-0.64

3. Se agrega otra columna a la derecha de tal manera que sea la diferencia entre 1,03 y 1,13; luego 0,93 y 1,03 y así sucesivamente, esto es la diferencia de las primeras diferencias. Para esto se selecciona la parte inferior de la celda y se arrastra hacia abajo para que automáticamente se obtengan los demás resultados.

Figura 216. Segunda diferencia

ALTURA INICIAL	VELOCIDAD INICIAL	GRAVEDAD	x	y	PRIMERA DIFERENCIA	SEGUNDA DIFERENCIA
			TIEMPO	ALTURA		
0	18	9.8	0.1	1.22		
			0.2	2.35	1.13	
			0.3	3.38	1.03	-0.10
			0.4	4.31	0.93	-0.10
			0.5	5.14	0.83	-0.10
			0.6	5.87	0.73	-0.10
			0.7	6.51	0.64	-0.09
			0.8	7.04	0.53	-0.11
			0.9	7.48	0.44	-0.09
			1	7.82	0.34	-0.10
			1.1	8.07	0.25	-0.09
			1.2	8.21	0.14	-0.11
			1.3	8.26	0.05	-0.09
			1.4	8.21	-0.05	-0.10
			1.5	8.06	-0.15	-0.10
			1.6	7.81	-0.25	-0.10
			1.7	7.46	-0.35	-0.10
			1.8	7.02	-0.44	-0.09
			1.9	6.48	-0.54	-0.10
			2	5.84	-0.64	-0.10

4. Se agrega otra columna a la derecha de tal manera que sea la diferencia entre -0,10 y -0,10; luego -0,10 y -0,10 y así sucesivamente (diferencias de tercer orden). Para esto se selecciona

la parte inferior de la celda y se arrastra hacia abajo para que automáticamente se obtengan los demás resultados.

Figura 217. Tercera diferencia

			x	y			
ALTURA INICIAL	VELOCIDAD INICIAL	GRAVEDAD	TIEMPO	ALTURA	PRIMERA DIFERENCIA	SEGUNDA DIFERENCIA	TERCERA DIFERENCIA
0	18	9.8	0.1	1.22			
			0.2	2.35	1.13		
			0.3	3.38	1.03	-0.10	
			0.4	4.31	0.93	-0.10	0.00
			0.5	5.14	0.83	-0.10	0.00
			0.6	5.87	0.73	-0.10	0.00
			0.7	6.51	0.64	-0.09	0.01
			0.8	7.04	0.53	-0.11	-0.02
			0.9	7.48	0.44	-0.09	0.02
			1	7.82	0.34	-0.10	-0.01
			1.1	8.07	0.25	-0.09	0.01
			1.2	8.21	0.14	-0.11	-0.02
			1.3	8.26	0.05	-0.09	0.02
			1.4	8.21	-0.05	-0.10	-0.01
			1.5	8.06	-0.15	-0.10	0.00
			1.6	7.81	-0.25	-0.10	0.00
			1.7	7.46	-0.35	-0.10	0.00
			1.8	7.02	-0.44	-0.09	0.01
			1.9	6.48	-0.54	-0.10	-0.01
			2	5.84	-0.64	-0.10	0.00

5. Luego se selecciona las columnas tiempo y altura y se realizan los pasos mostrados en el experimento simulado I y se obtiene la siguiente gráfica.

Figura 218. Gráfico de dispersión tiempo vs altura



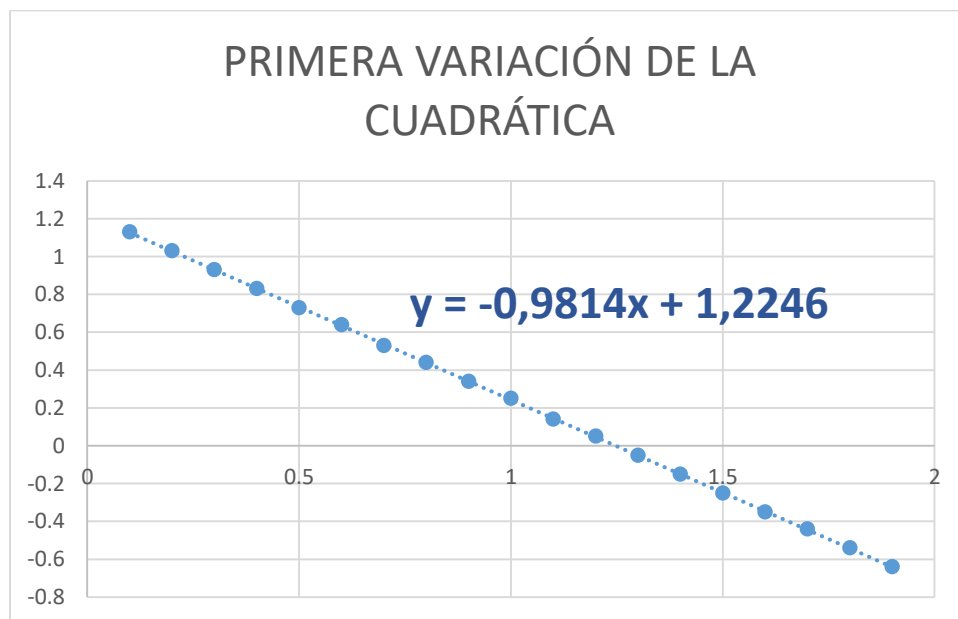
6. Se seleccionan las columnas tiempo y la subrayada en verde “primera diferencia”.

Figura 219. Tabla de datos tiempo vs primera diferencia

x	y
TIEMPO	PRIMERA DIFERENCIA
0.1	1.13
0.2	1.03
0.3	0.93
0.4	0.83
0.5	0.73
0.6	0.64
0.7	0.53
0.8	0.44
0.9	0.34
1	0.25
1.1	0.14
1.2	0.05
1.3	-0.05
1.4	-0.15
1.5	-0.25
1.6	-0.35
1.7	-0.44
1.8	-0.54
1.9	-0.64

7. Se realiza el gráfico de dispersión con las columnas anteriores, ubicando el título primera variación de la función cuadrática.

Figura 220. Gráfico de dispersión primera variación cuadrática



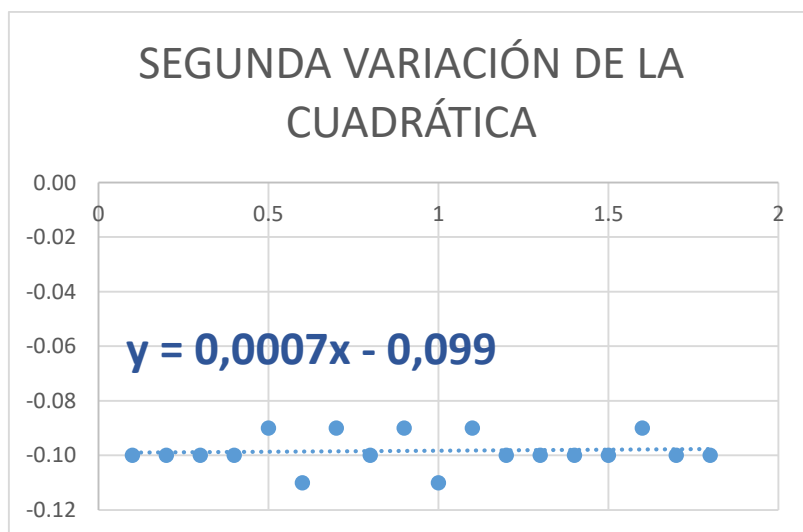
8. Se seleccionan las columnas tiempo y la subrayada en amarillo “segunda diferencia”.

Figura 221. Tabla de datos tiempo vs segunda diferencia

x	y
TIEMPO	SEGUNDA DIFERENCIA
0.1	-0.10
0.2	-0.10
0.3	-0.10
0.4	-0.10
0.5	-0.09
0.6	-0.11
0.7	-0.09
0.8	-0.10
0.9	-0.09
1	-0.11
1.1	-0.09
1.2	-0.10
1.3	-0.10
1.4	-0.10
1.5	-0.10
1.6	-0.09
1.7	-0.10
1.8	-0.10

9. Se realiza el gráfico de dispersión con las columnas anteriores, ubicando el título segunda variación de la función cuadrática.

Figura 222. Gráfico de dispersión de la segunda variación cuadrática



10. Se usa la tabla de valores obtenida en el experimento simulado II– Velocidad inicial vs Distancia Horizontal.

Figura 223. Tabla de datos velocidad inicial vs distancia horizontal

			x	y
ALTURA INICIAL	ÁNGULO	GRAVEDAD	VELOCIDAD INICIAL	DISTANCIA HORIZONTAL
0	50°	9.81	5	2.51
			7	4.92
			9	8.1
			11	12.15
			13	16.97
			15	22.59
			17	29.01
			19	36.24
			21	44.27
			23	53.11
			25	62.74
			27	73.18
			29	84.43

11. Se agrega una columna a la derecha de tal manera que sea la diferencia entre el valor 4,92 y 2,51; luego 8,1 y 4,92 y así sucesivamente. Para esto se selecciona la parte inferior de la celda de la tercera columna y se arrastra hacia abajo para que automáticamente se obtengan los demás resultados.

Figura 224. Primera diferencia

			x	y	
ALTURA INICIAL	ÁNGULO	GRAVEDAD	VELOCIDAD INICIAL	DISTANCIA HORIZONTAL	PRIMERA DIFERENCIA
0	50°	9.81	5	2.51	
			7	4.92	2.41
			9	8.1	3.18
			11	12.15	4.05
			13	16.97	4.82
			15	22.59	5.62
			17	29.01	6.42
			19	36.24	7.23
			21	44.27	8.03
			23	53.11	8.84
			25	62.74	9.63
			27	73.18	10.44
			29	84.43	11.25

12. Se agrega otra columna a la derecha de tal manera que sea la diferencia entre 1,03 y 1,13; luego 0,93 y 1,03 y así sucesivamente. Para esto se selecciona la parte inferior de la celda y se arrastra hacia abajo para que automáticamente se obtengan los demás resultados.

Figura 225. Segunda diferencia

			x	y		
ALTURA INICIAL	ÁNGULO	GRAVEDAD	VELOCIDAD INICIAL	DISTANCIA HORIZONTAL	PRIMERA DIFERENCIA	SEGUNDA DIFERENCIA
0	50°	9.81	5	2.51		
			7	4.92	2.41	
			9	8.1	3.18	0.77
			11	12.15	4.05	0.87
			13	16.97	4.82	0.77
			15	22.59	5.62	0.80
			17	29.01	6.42	0.80
			19	36.24	7.23	0.81
			21	44.27	8.03	0.80
			23	53.11	8.84	0.81
			25	62.74	9.63	0.79
			27	73.18	10.44	0.81
			29	84.43	11.25	0.81

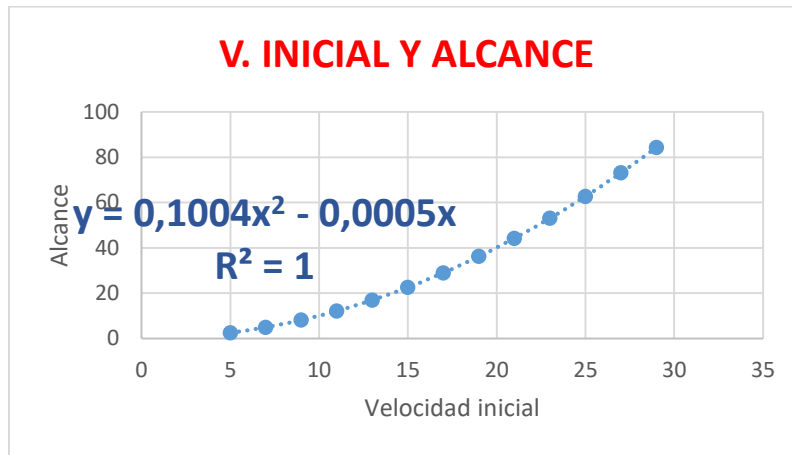
13. Se agrega otra columna a la derecha de tal manera que sea la diferencia entre 0,87 y 0,77; luego 0,77 y 0,87 y así sucesivamente. Para esto se selecciona la parte inferior de la celda y se arrastra hacia abajo para que automáticamente se obtengan los demás resultados.

Figura 226. Tercera diferencia

			x	y			
ALTURA INICIAL	ÁNGULO	GRAVEDAD	VELOCIDAD INICIAL	DISTANCIA HORIZONTAL	PRIMERA DIFERENCIA	SEGUNDA DIFERENCIA	TERCERA DIFERENCIA
0	50°	9.81	5	2.51			
			7	4.92	2.41		
			9	8.1	3.18	0.77	
			11	12.15	4.05	0.87	0.10
			13	16.97	4.82	0.77	-0.10
			15	22.59	5.62	0.80	0.03
			17	29.01	6.42	0.80	0.00
			19	36.24	7.23	0.81	0.01
			21	44.27	8.03	0.80	-0.01
			23	53.11	8.84	0.81	0.01
			25	62.74	9.63	0.79	-0.02
			27	73.18	10.44	0.81	0.02
			29	84.43	11.25	0.81	0.00

14. Luego se selecciona las columnas velocidad inicial y distancia horizontal y se realizan los pasos mostrados en el experimento simulado II y se obtiene la siguiente gráfica.

Figura 227. Gráfico de dispersión de velocidad inicial y alcance horizontal



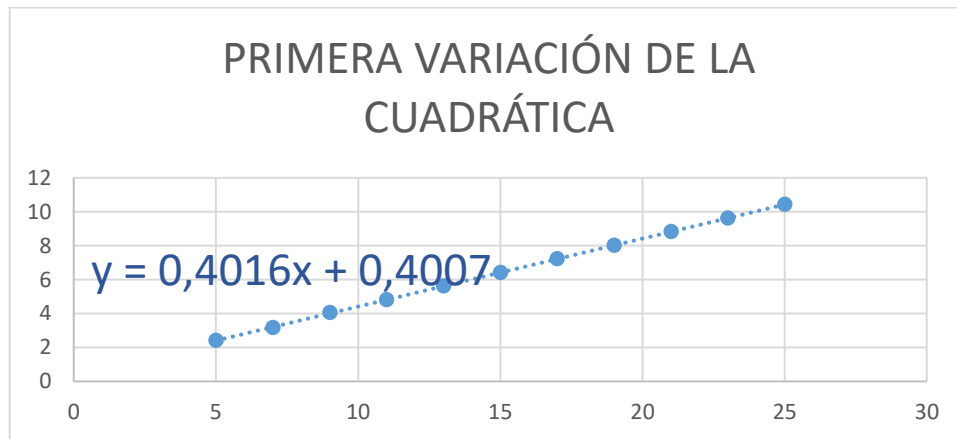
15. Se seleccionan las columnas tiempo y la subrayada en verde “primera diferencia”.

Figura 228. Tabla de datos de tiempo vs primera diferencia

x	PRIMERA DIFERENCIA
5	2.41
7	3.18
9	4.05
11	4.82
13	5.62
15	6.42
17	7.23
19	8.03
21	8.84
23	9.63
25	10.44
27	11.25

16. Se realiza el gráfico de dispersión con las columnas anteriores, ubicando el título primera variación de la función cuadrática.

Figura 229. Gráfico de dispersión de la primera variación de la cuadrática



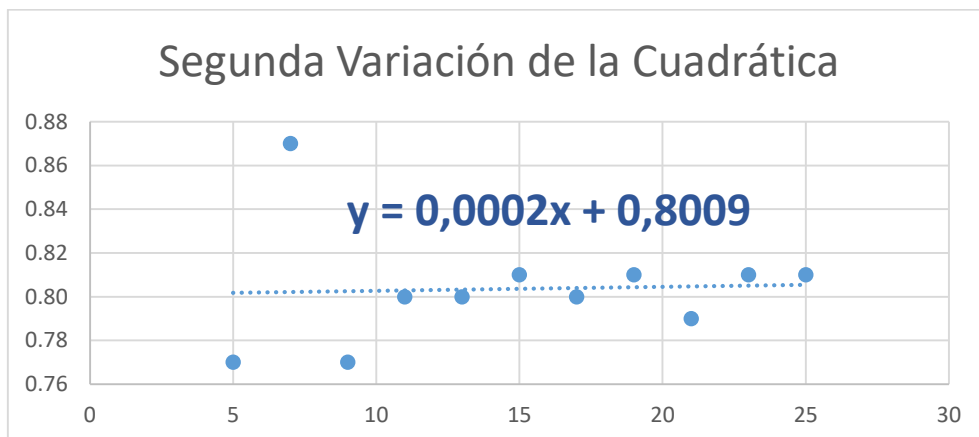
17. Se seleccionan las columnas tiempo y la subrayada en amarillo “segunda diferencia”.

Figura 230. Tabla de datos de tiempo vs segunda diferencia

x	SEGUNDA DIFERENCIA
5	0.77
7	0.87
9	0.77
11	0.80
13	0.80
15	0.81
17	0.80
19	0.81
21	0.79
23	0.81
25	0.81

18. Se realiza el gráfico de dispersión con las columnas anteriores, ubicando el título segunda variación de la función cuadrática.

Figura 231. Gráfico de dispersión de la segunda variación de la cuadrática



19. Se usa la tabla de valores obtenida en el experimento simulado III– Tiempo vs Altura (Lanzamiento vertical).

Figura 232. Tabla de datos tiempo vs altura

LANZAMIENTO VERTICAL					
ALTURA INICIAL	ÁNGULO	GRAVEDAD	VELOCIDAD INICIAL	TIEMPO	ALTURA
0	90°	9.81	25	0.1	2.45
				0.2	4.8
				0.3	7.06
				0.4	9.22
				0.5	11.27
				0.6	13.23
				0.7	15.1
				0.8	16.86
				0.9	18.53
				1	20.1
				1.1	21.56
				1.2	22.94
				1.3	24.21
				1.4	25.39
				1.5	26.46
				1.6	27.44
				1.7	28.32
				1.8	29.11
				1.9	29.79
				2	30.38
				2.1	30.87

20. Se agrega una columna a la derecha de tal manera que sea la diferencia entre el valor 4,8 y 2,45; luego 7,06 y 4,8 y así sucesivamente. Para esto se selecciona la parte inferior de la celda de la tercera columna y se arrastra hacia abajo para que automáticamente se obtengan los demás resultados.

Figura 233. Primera diferencia

LANZAMIENTO VERTICAL						PRIMERA DIFERENCIA
ALTURA INICIAL	ÁNGULO	GRAVEDAD	VELOCIDAD INICIAL	TIEMPO	ALTURA	
0	90°	9.81	25	0.1	2.45	
				0.2	4.8	2.35
				0.3	7.06	2.26
				0.4	9.22	2.16
				0.5	11.27	2.05
				0.6	13.23	1.96
				0.7	15.1	1.87
				0.8	16.86	1.76
				0.9	18.53	1.67
				1	20.1	1.57
				1.1	21.56	1.46
				1.2	22.94	1.38
				1.3	24.21	1.27
				1.4	25.39	1.18
				1.5	26.46	1.07
				1.6	27.44	0.98
				1.7	28.32	0.88
				1.8	29.11	0.79
				1.9	29.79	0.68
				2	30.38	0.59
				2.1	30.87	0.49

21. Se agrega otra columna a la derecha de tal manera que sea la diferencia entre 2,26 y 2,35; luego 2,16 y 2,26 y así sucesivamente. Para esto se selecciona la parte inferior de la celda y se arrastra hacia abajo para obtener los demás resultados.

Figura 234. Segunda diferencia

LANZAMIENTO VERTICAL							
ALTURA INICIAL	ÁNGULO	GRAVEDAD	VELOCIDAD INICIAL	TIEMPO	ALTURA	PRIMERA DIFERENCIA	SEGUNDA DIFERENCIA
0	90°	9.81	25	0.1	2.45		
				0.2	4.8	2.35	
				0.3	7.06	2.26	-0.09
				0.4	9.22	2.16	-0.10
				0.5	11.27	2.05	-0.11
				0.6	13.23	1.96	-0.09
				0.7	15.1	1.87	-0.09
				0.8	16.86	1.76	-0.11
				0.9	18.53	1.67	-0.09
				1	20.1	1.57	-0.10
				1.1	21.56	1.46	-0.11
				1.2	22.94	1.38	-0.08
				1.3	24.21	1.27	-0.11
				1.4	25.39	1.18	-0.09
				1.5	26.46	1.07	-0.11
				1.6	27.44	0.98	-0.09
				1.7	28.32	0.88	-0.10
				1.8	29.11	0.79	-0.09
				1.9	29.79	0.68	-0.11
				2	30.38	0.59	-0.09
				2.1	30.87	0.49	-0.10

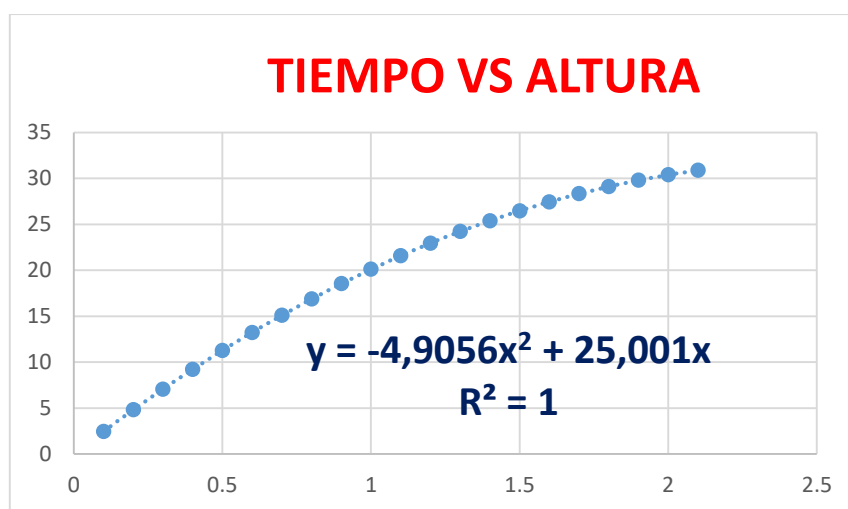
22. Se agrega otra columna a la derecha de tal manera que sea la diferencia entre $-0,10$ y $-0,09$; luego $-0,11$ y $-0,10$ y así sucesivamente. Para esto se selecciona la parte inferior de la celda y se arrastra hacia abajo para generar automáticamente los demás resultados.

Figura 235. Tercera diferencia

LANZAMIENTO VERTICAL								
ALTURA INICIAL	ÁNGULO	GRAVEDAD	VELOCIDAD INICIAL	TIEMPO	ALTURA	PRIMERA DIFERENCIA	SEGUNDA DIFERENCIA	TERCERA DIFERENCIA
0	90°	9.81	25	0.1	2.45			
				0.2	4.8	2.35		
				0.3	7.06	2.26	-0.09	
				0.4	9.22	2.16	-0.10	-0.01
				0.5	11.27	2.05	-0.11	-0.01
				0.6	13.23	1.96	-0.09	0.02
				0.7	15.1	1.87	-0.09	0.00
				0.8	16.86	1.76	-0.11	-0.02
				0.9	18.53	1.67	-0.09	0.02
				1	20.1	1.57	-0.10	-0.01
				1.1	21.56	1.46	-0.11	-0.01
				1.2	22.94	1.38	-0.08	0.03
				1.3	24.21	1.27	-0.11	-0.03
				1.4	25.39	1.18	-0.09	0.02
				1.5	26.46	1.07	-0.11	-0.02
				1.6	27.44	0.98	-0.09	0.02
				1.7	28.32	0.88	-0.10	-0.01
				1.8	29.11	0.79	-0.09	0.01
				1.9	29.79	0.68	-0.11	-0.02
				2	30.38	0.59	-0.09	0.02
				2.1	30.87	0.49	-0.10	-0.01

23. Luego se selecciona las columnas tiempo y altura, se realizan los pasos mostrados en el experimento simulado III y se obtiene la siguiente gráfica.

Figura 236. Gráfico de dispersión tiempo vs altura



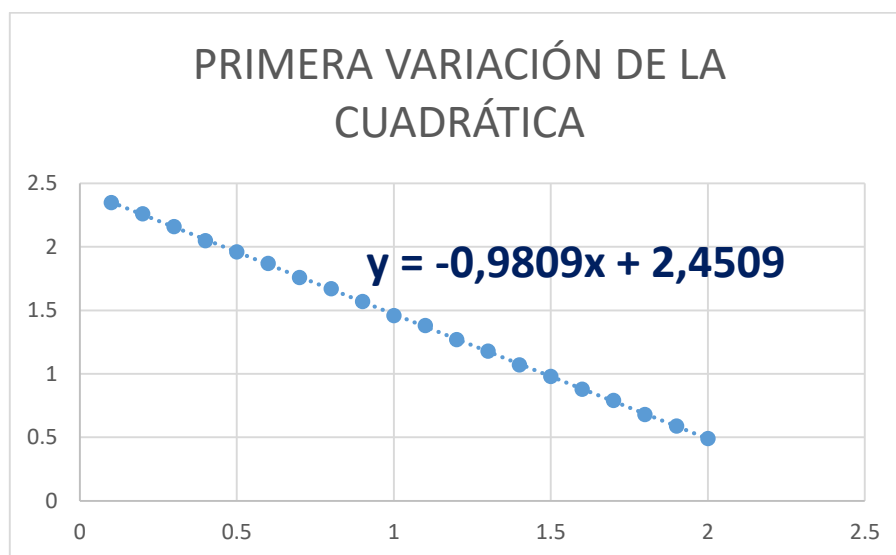
24. Se seleccionan las columnas tiempo y la subrayada en verde “primera diferencia”.

Figura 237. Primera diferencia

X	PRIMERA DIFERENCIA
0.1	2.35
0.2	2.26
0.3	2.16
0.4	2.05
0.5	1.96
0.6	1.87
0.7	1.76
0.8	1.67
0.9	1.57
1	1.46
1.1	1.38
1.2	1.27
1.3	1.18
1.4	1.07
1.5	0.98
1.6	0.88
1.7	0.79
1.8	0.68
1.9	0.59
2	0.49

25. Se realiza el gráfico de dispersión con las columnas anteriores, ubicando el título primera variación de la función cuadrática.

Figura 238. Gráfico de dispersión primera variación de la cuadrática



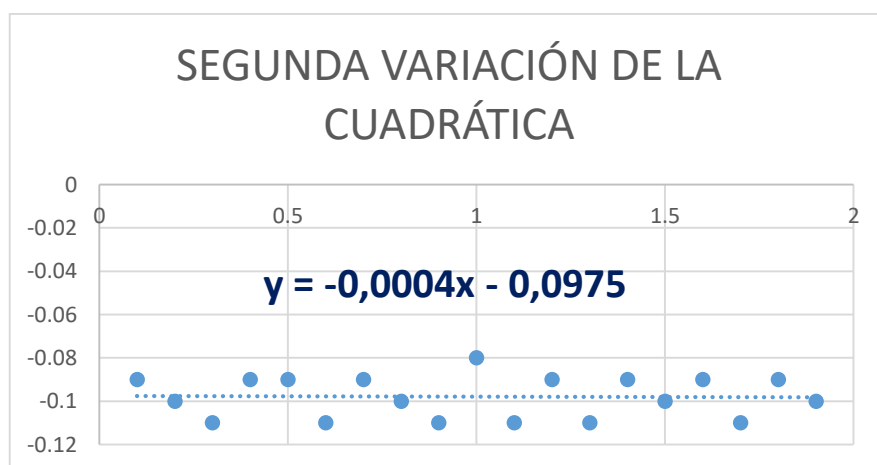
26. Se seleccionan las columnas tiempo y la subrayada en amarillo “segunda diferencia”.

Figura 239. Segunda diferencia

x	SEGUNDA DIFERENCIA
0.1	-0.09
0.2	-0.1
0.3	-0.11
0.4	-0.09
0.5	-0.09
0.6	-0.11
0.7	-0.09
0.8	-0.1
0.9	-0.11
1	-0.08
1.1	-0.11
1.2	-0.09
1.3	-0.11
1.4	-0.09
1.5	-0.1
1.6	-0.09
1.7	-0.11
1.8	-0.09
1.9	-0.1

27. Se realiza el gráfico de dispersión con las columnas anteriores, ubicando el título segunda variación de la función cuadrática.

Figura 240. Gráfico de dispersión segunda variación de la cuadrática



28. Se usa la tabla de valores obtenida en el experimento simulado IV – Tiempo vs Altura (con altura inicial de 10 m).

Figura 241. Tabla de datos tiempo vs altura

ALTURA INICIAL	VELOCIDAD INICIAL	GRAVEDAD	TIEMPO	ALTURA
10	14	9.8	0.1	10.94
			0.2	11.78
			0.3	12.53
			0.4	13.17
			0.5	13.72
			0.6	14.17
			0.7	14.53
			0.8	14.78
			0.9	14.94
			1	14.99
			1.1	14.95
			1.2	14.82
			1.3	14.58
			1.4	14.25
			1.5	13.81
			1.6	13.28
			1.7	12.65
			1.8	11.93
			1.9	11.1
			2	10.18
			2.1	9.16
			2.2	8.04
			2.3	6.82
			2.4	5.51
			2.5	4.09
			2.6	2.58
			2.7	0.97

29. Se agrega una columna a la derecha de tal manera que sea la diferencia entre el valor 11,78 y 10,94; luego 12,53 y 11,78 y así sucesivamente. Para esto se selecciona la parte inferior de la celda de la tercera columna y se arrastra hacia abajo para que automáticamente se obtengan los demás resultados tal como se muestra en la figura 146.

Figura 242. Primera diferencia

ALTURA INICIAL	VELOCIDAD INICIAL	GRAVEDAD	TIEMPO	ALTURA	PRIMERA DIFERENCIA
10	14	9.8	0.1	10.94	
			0.2	11.78	0.8
			0.3	12.53	0.8
			0.4	13.17	0.6
			0.5	13.72	0.6
			0.6	14.17	0.4
			0.7	14.53	0.4
			0.8	14.78	0.3
			0.9	14.94	0.2
			1	14.99	0.1
			1.1	14.95	0.0
			1.2	14.82	-0.1
			1.3	14.58	-0.2
			1.4	14.25	-0.3
			1.5	13.81	-0.4
			1.6	13.28	-0.5
			1.7	12.65	-0.6
			1.8	11.93	-0.7
			1.9	11.1	-0.8
			2	10.18	-0.9
			2.1	9.16	-1.0
			2.2	8.04	-1.1
			2.3	6.82	-1.2
			2.4	5.51	-1.3
			2.5	4.09	-1.4
			2.6	2.58	-1.5

30. Se agrega otra columna a la derecha de tal manera que sea la diferencia entre 0,8 y 0,8; luego 0,6 y 0,8 y así sucesivamente. Para esto se selecciona la parte inferior de la celda y se arrastra hacia abajo para que automáticamente se obtengan los demás resultados.

Figura 243. Segunda diferencia

ALTURA INICIAL	VELOCIDAD INICIAL	GRAVEDAD	TIEMPO	ALTURA	PRIMERA DIFERENCIA	SEGUNDA DIFERENCIA
10	14	9.8	0.1	10.94		
			0.2	11.78	0.8	
			0.3	12.53	0.8	-0.09
			0.4	13.17	0.6	-0.11
			0.5	13.72	0.6	-0.09
			0.6	14.17	0.4	-0.10
			0.7	14.53	0.4	-0.09
			0.8	14.78	0.3	-0.11
			0.9	14.94	0.2	-0.09
			1	14.99	0.1	-0.11
			1.1	14.95	0.0	-0.09
			1.2	14.82	-0.1	-0.09
			1.3	14.58	-0.2	-0.11
			1.4	14.25	-0.3	-0.09
			1.5	13.81	-0.4	-0.11
			1.6	13.28	-0.5	-0.09
			1.7	12.65	-0.6	-0.10
			1.8	11.93	-0.7	-0.09
			1.9	11.1	-0.8	-0.11
			2	10.18	-0.9	-0.09
			2.1	9.16	-1.0	-0.10
			2.2	8.04	-1.1	-0.10
			2.3	6.82	-1.2	-0.10
			2.4	5.51	-1.3	-0.09
			2.5	4.09	-1.4	-0.11
			2.6	2.58	-1.5	-0.09
			2.7	0.97	-1.6	-0.10

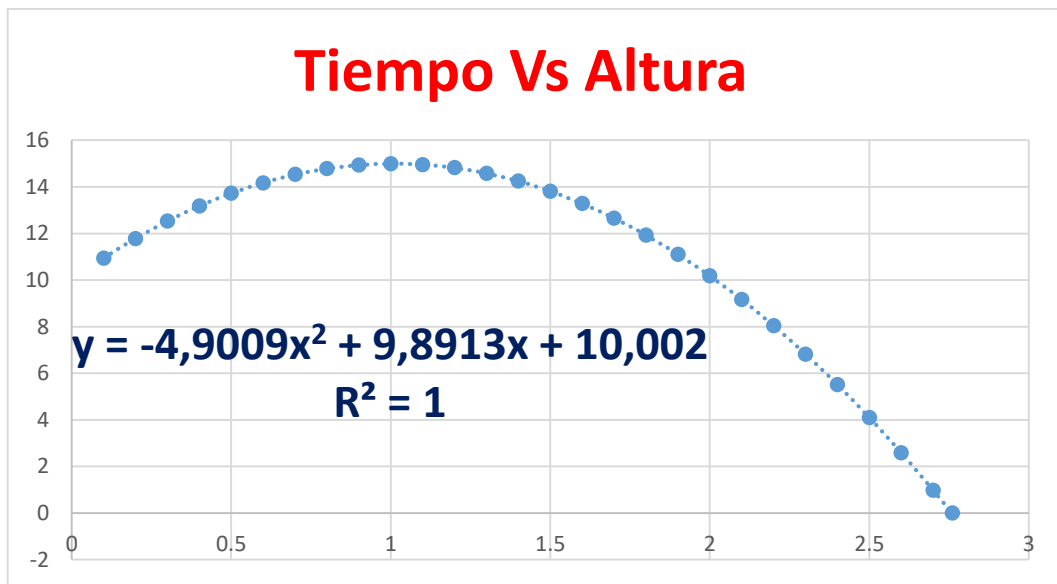
31. Se agrega otra columna a la derecha de tal manera que sea la diferencia entre $-0,09$ y $-0,11$; luego $-0,09$ y $-0,11$ y así sucesivamente. Para esto se selecciona la parte inferior de la celda y se arrastra hacia abajo para que automáticamente se obtengan los demás resultados.

Figura 244. Tercera diferencia

ALTURA INICIAL	VELOCIDAD INICIAL	GRAVEDAD	TIEMPO	ALTURA	PRIMERA DIFERENCIA	SEGUNDA DIFERENCIA	TERCERA DIFERENCIA
10	14	9.8	0.1	10.94			
			0.2	11.78	0.8		
			0.3	12.53	0.8	-0.09	
			0.4	13.17	0.6	-0.11	-0.02
			0.5	13.72	0.6	-0.09	0.02
			0.6	14.17	0.4	-0.10	-0.01
			0.7	14.53	0.4	-0.09	0.01
			0.8	14.78	0.3	-0.11	-0.02
			0.9	14.94	0.2	-0.09	0.02
			1	14.99	0.1	-0.11	-0.02
			1.1	14.95	0.0	-0.09	0.02
			1.2	14.82	-0.1	-0.09	0.00
			1.3	14.58	-0.2	-0.11	-0.02
			1.4	14.25	-0.3	-0.09	0.02
			1.5	13.81	-0.4	-0.11	-0.02
			1.6	13.28	-0.5	-0.09	0.02
			1.7	12.65	-0.6	-0.10	-0.01
			1.8	11.93	-0.7	-0.09	0.01
			1.9	11.1	-0.8	-0.11	-0.02
			2	10.18	-0.9	-0.09	0.02
			2.1	9.16	-1.0	-0.10	-0.01
			2.2	8.04	-1.1	-0.10	0.00
			2.3	6.82	-1.2	-0.10	0.00
			2.4	5.51	-1.3	-0.09	0.01
			2.5	4.09	-1.4	-0.11	-0.02
			2.6	2.58	-1.5	-0.09	0.02
			2.7	0.97	-1.6	-0.10	-0.01

32. Luego se selecciona las columnas tiempo y altura, se realizan los pasos mostrados en el experimento simulado IV y se obtiene la siguiente gráfica.

Figura 245. Gráfico de dispersión tiempo vs altura



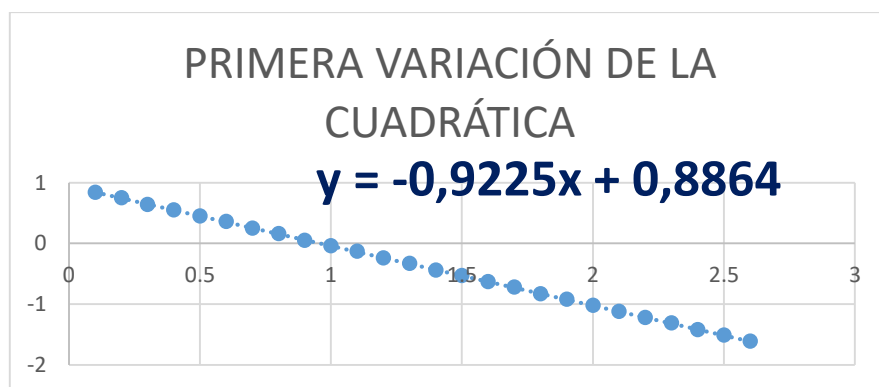
33. Se seleccionan las columnas tiempo y la subrayada en verde “primera diferencia”.

Figura 246. Primera diferencia

X	PRIMERA DIFERENCIA
0.1	0.84
0.2	0.75
0.3	0.64
0.4	0.55
0.5	0.45
0.6	0.36
0.7	0.25
0.8	0.16
0.9	0.05
1	-0.04
1.1	-0.13
1.2	-0.24
1.3	-0.33
1.4	-0.44
1.5	-0.53
1.6	-0.63
1.7	-0.72
1.8	-0.83
1.9	-0.92
2	-1.02
2.1	-1.12
2.2	-1.22
2.3	-1.31
2.4	-1.42
2.5	-1.51
2.6	-1.61

34. Se realiza el gráfico de dispersión con las columnas anteriores, ubicando el título primera variación de la función cuadrática.

Figura 247 Primera variación de la cuadrática



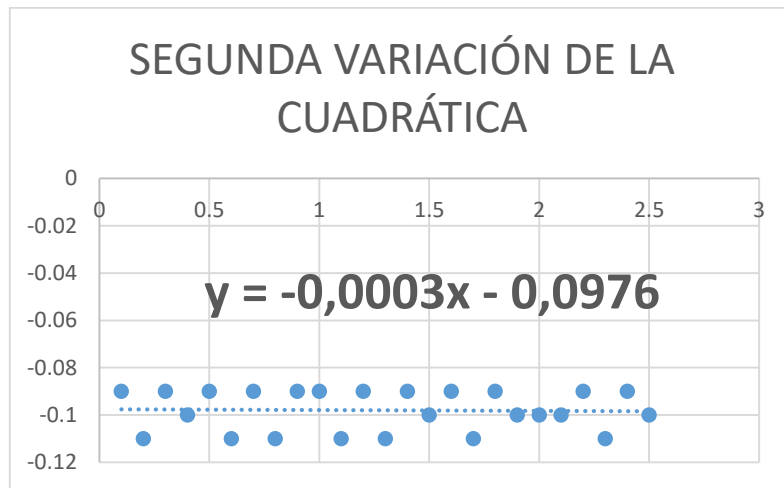
35. Se seleccionan las columnas tiempo y la subrayada en amarillo “segunda diferencia”.

Figura 248. Segunda diferencia

X	SEGUNDA DIFERENCIA
0.1	-0.09
0.2	-0.11
0.3	-0.09
0.4	-0.1
0.5	-0.09
0.6	-0.11
0.7	-0.09
0.8	-0.11
0.9	-0.09
1	-0.09
1.1	-0.11
1.2	-0.09
1.3	-0.11
1.4	-0.09
1.5	-0.1
1.6	-0.09
1.7	-0.11
1.8	-0.09
1.9	-0.1
2	-0.1
2.1	-0.1
2.2	-0.09
2.3	-0.11
2.4	-0.09
2.5	-0.1

36. Se realiza el gráfico de dispersión con las columnas anteriores, ubicando el título segunda variación de la función cuadrática.

Figura 249. Gráfico de dispersión segunda variación de la cuadrática



37. Se usa la tabla de valores obtenida en el experimento simulado V – tiempo vs altura en cualquier instante (con altura inicial de 5 m y gravedad de $11 \frac{m}{s^2}$).

Figura 250. Tabla de datos de lanzamiento vertical, tiempo vs altura

	LANZAMIENTO VERTICAL				
ALTURA INICIAL	ÁNGULO	GRAVEDAD	VELOCIDAD INICIAL	TIEMPO	ALTURA
5	90°	11	25	0.1	7.44
				0.2	9.78
				0.3	12
				0.4	14.12
				0.5	16.12
				0.6	18.02
				0.7	19.8
				0.8	21.48
				0.9	23.05
				1	24.5
				1.1	25.85
				1.2	27.08
				1.3	28.21
				1.4	29.22
				1.5	30.13
				1.6	30.92
				1.7	31.61
				1.8	32.18
				1.9	32.65
				2	33
				2.1	33.25
				2.27	33.41

38. Se agrega una columna a la derecha de tal manera que sea la diferencia entre el valor 9,78 y 7,44; luego 12 y 9,78 y así sucesivamente. Para esto se selecciona la parte inferior de la celda de la tercera columna y se arrastra hacia abajo para que automáticamente se obtengan los demás resultados

Figura 251. Primera diferencia

LANZAMIENTO VERTICAL						
ALTURA INICIAL	ÁNGULO	GRAVEDAD	VELOCIDAD INICIAL	TIEMPO	ALTURA	PRIMERA DIFERENCIA
5	90°	11	25	0.1	7.44	
				0.2	9.78	2.34
				0.3	12	2.22
				0.4	14.12	2.12
				0.5	16.12	2
				0.6	18.02	1.9
				0.7	19.8	1.78
				0.8	21.48	1.68
				0.9	23.05	1.57
				1	24.5	1.45
				1.1	25.85	1.35
				1.2	27.08	1.23
				1.3	28.21	1.13
				1.4	29.22	1.01
				1.5	30.13	0.91
				1.6	30.92	0.79
				1.7	31.61	0.69
				1.8	32.18	0.57
				1.9	32.65	0.47
				2	33	0.35
				2.1	33.25	0.25
				2.27	33.41	0.16

39. Se agrega otra columna a la derecha de tal manera que sea la diferencia entre 2,22 y 2,34; luego 2,12 y 2,22 y así sucesivamente. Para esto se selecciona la parte inferior de la celda y se arrastra hacia abajo para que automáticamente se obtengan los demás resultados.

Figura 252. Segunda diferencia

LANZAMIENTO VERTICAL							
ALTURA INICIAL	ÁNGULO	GRAVEDAD	VELOCIDAD INICIAL	TIEMPO	ALTURA	PRIMERA DIFERENCIA	SEGUNDA DIFERENCIA
5	90°	11	25	0.1	7.44		
				0.2	9.78	2.34	
				0.3	12	2.22	-0.12
				0.4	14.12	2.12	-0.10
				0.5	16.12	2	-0.12
				0.6	18.02	1.9	-0.10
				0.7	19.8	1.78	-0.12
				0.8	21.48	1.68	-0.10
				0.9	23.05	1.57	-0.11
				1	24.5	1.45	-0.12
				1.1	25.85	1.35	-0.10
				1.2	27.08	1.23	-0.12
				1.3	28.21	1.13	-0.10
				1.4	29.22	1.01	-0.12
				1.5	30.13	0.91	-0.10
				1.6	30.92	0.79	-0.12
				1.7	31.61	0.69	-0.10
				1.8	32.18	0.57	-0.12
				1.9	32.65	0.47	-0.10
				2	33	0.35	-0.12
				2.1	33.25	0.25	-0.10
				2.27	33.41	0.16	-0.09

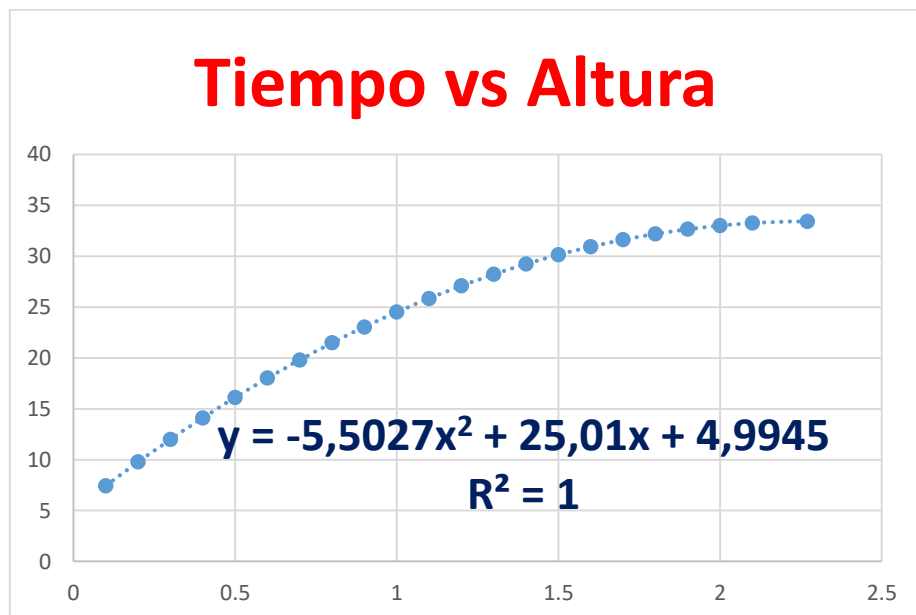
40. Se agrega otra columna a la derecha de tal manera que sea la diferencia entre $-0,10$ y $-0,12$; luego $-0,12$ y $-0,10$ y así sucesivamente. Para esto se selecciona la parte inferior de la celda y se arrastra hacia abajo para que automáticamente se obtengan los demás resultados.

Figura 253. Tercera diferencia

LANZAMIENTO VERTICAL								
ALTURA INICIAL	ÁNGULO	GRAVEDAD	VELOCIDAD INICIAL	TIEMPO	ALTURA	PRIMERA DIFERENCIA	SEGUNDA DIFERENCIA	TERCERA DIFERENCIA
5	90°	11	25	0.1	7.44			
				0.2	9.78	2.34		
				0.3	12	2.22	-0.12	
				0.4	14.12	2.12	-0.10	0.02
				0.5	16.12	2	-0.12	-0.02
				0.6	18.02	1.9	-0.10	0.02
				0.7	19.8	1.78	-0.12	-0.02
				0.8	21.48	1.68	-0.10	0.02
				0.9	23.05	1.57	-0.11	-0.01
				1	24.5	1.45	-0.12	-0.01
				1.1	25.85	1.35	-0.10	0.02
				1.2	27.08	1.23	-0.12	-0.02
				1.3	28.21	1.13	-0.10	0.02
				1.4	29.22	1.01	-0.12	-0.02
				1.5	30.13	0.91	-0.10	0.02
				1.6	30.92	0.79	-0.12	-0.02
				1.7	31.61	0.69	-0.10	0.02
				1.8	32.18	0.57	-0.12	-0.02
				1.9	32.65	0.47	-0.10	0.02
				2	33	0.35	-0.12	-0.02
				2.1	33.25	0.25	-0.10	0.02
				2.27	33.41	0.16	-0.09	0.01

41. Luego se selecciona las columnas tiempo y altura, se realizan los pasos mostrados en el experimento simulado V y se obtiene la siguiente gráfica.

Figura 254. Gráfico de dispersión tiempo vs altura



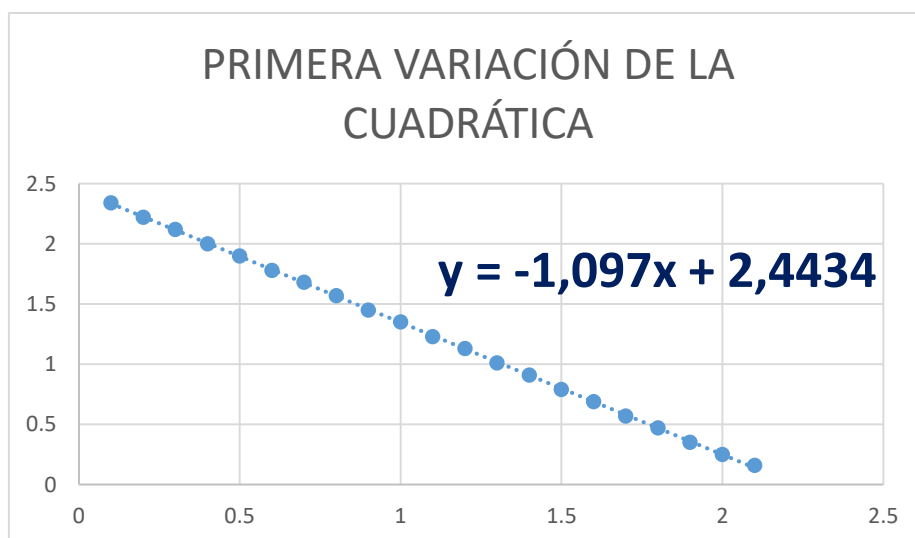
42. Se seleccionan las columnas tiempo y la subrayada en verde “primera diferencia”.

Figura 255. Primera diferencia

X	PRIMERA DIFERENCIA
0.1	2.34
0.2	2.22
0.3	2.12
0.4	2
0.5	1.9
0.6	1.78
0.7	1.68
0.8	1.57
0.9	1.45
1	1.35
1.1	1.23
1.2	1.13
1.3	1.01
1.4	0.91
1.5	0.79
1.6	0.69
1.7	0.57
1.8	0.47
1.9	0.35
2	0.25
2.1	0.16

43. Se realiza el gráfico de dispersión con las columnas anteriores, ubicando el título primera variación de la función cuadrática.

Figura 256. Gráfico de dispersión de la primera variación cuadrática



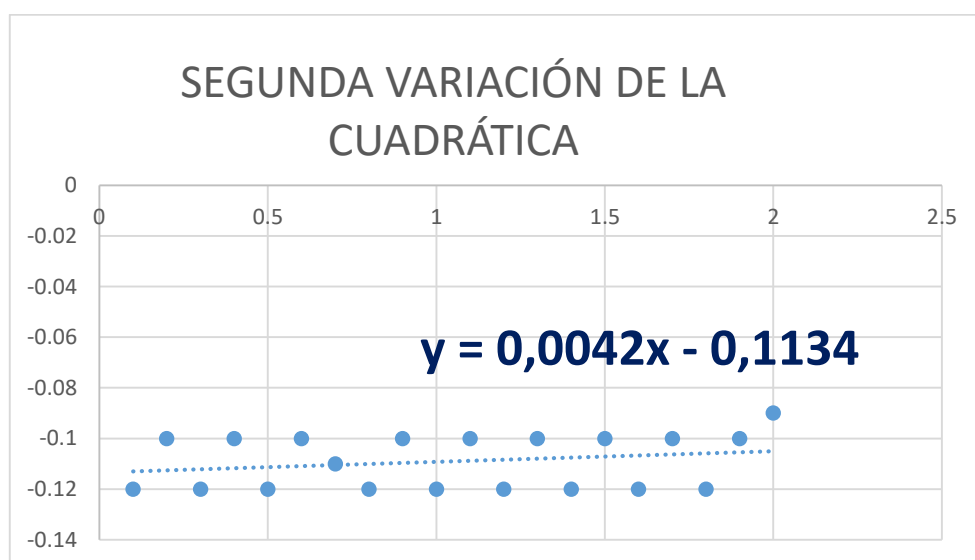
44. Se seleccionan las columnas tiempo y la subrayada en amarillo “segunda diferencia”.

Figura 257. Segunda diferencia

X	SEGUNDA DIFERENCIA
0.1	-0.12
0.2	-0.1
0.3	-0.12
0.4	-0.1
0.5	-0.12
0.6	-0.1
0.7	-0.11
0.8	-0.12
0.9	-0.1
1	-0.12
1.1	-0.1
1.2	-0.12
1.3	-0.1
1.4	-0.12
1.5	-0.1
1.6	-0.12
1.7	-0.1
1.8	-0.12
1.9	-0.1
2	-0.09

45. Se realiza el gráfico de dispersión con las columnas anteriores, ubicando el título segunda variación de la función cuadrática.

Figura 258. Gráfico de dispersión de la segunda variación cuadrática



Anexo H. Experimento Simulado II, III, IV, V

EXPERIMENTO SIMULADO II:

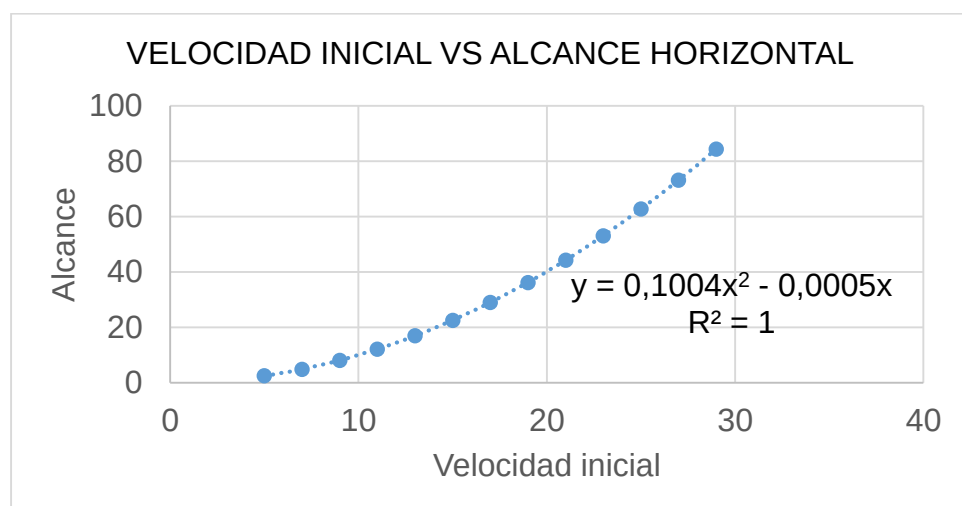
En los ítems 1,2, 3 y 4 se realiza la construcción de la tabla de valores de la primera y segunda diferencia de los datos a partir del experimento simulado II.

Figura 259. Tabla de datos con la primera, segunda y tercera diferencia

ALTURA INICIAL	ÁNGULO	GRAVEDAD	x	y	PRIMERA DIFERENCIA	SEGUNDA DIFERENCIA	TERCERA DIFERENCIA
			VELOCIDAD INICIAL	DISTANCIA HORIZONTAL			
0	50°	9.81	5	2.51			
			7	4.92	2.41		
			9	8.1	3.18	0.77	
			11	12.15	4.05	0.87	0.10
			13	16.97	4.82	0.77	-0.10
			15	22.59	5.62	0.80	0.03
			17	29.01	6.42	0.80	0.00
			19	36.24	7.23	0.81	0.01
			21	44.27	8.03	0.80	-0.01
			23	53.11	8.84	0.81	0.01
			25	62.74	9.63	0.79	-0.02
			27	73.18	10.44	0.81	0.02
			29	84.43	11.25	0.81	0.00

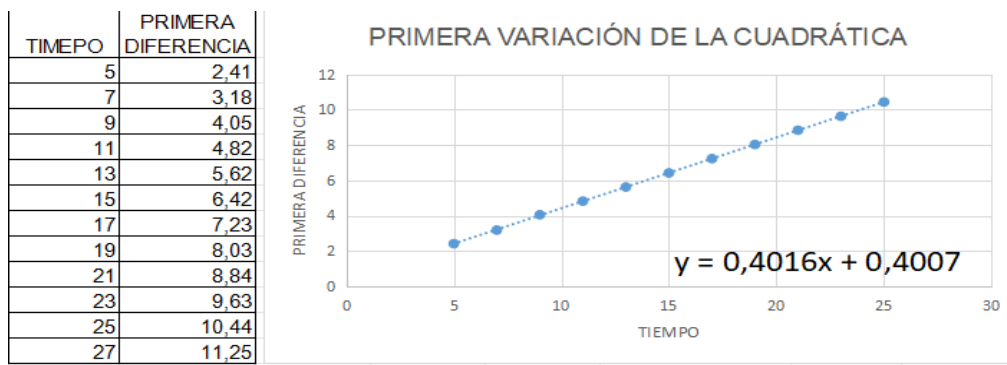
En el ítem 5 se realiza el gráfico de dispersión de velocidad inicial vs alcance horizontal.

Figura 260. Gráfico de dispersión velocidad inicial vs alcance horizontal



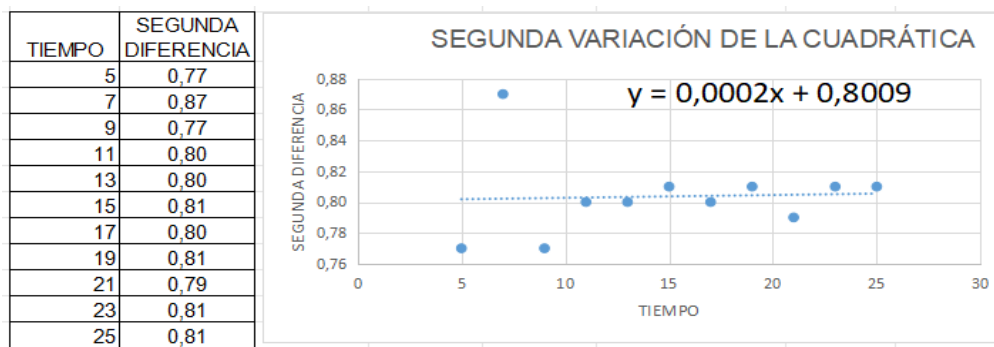
En el ítem 6 y 7 se seleccionan las columnas tiempo y primera diferencia y luego se hace el gráfico de dispersión que corresponde a estos datos, por último, se le asigna el nombre de primera variación de la cuadrática.

Figura 261. Tabla de datos y gráfico de dispersión de la primera variación de la cuadrática



En el ítem 8 y 9 se seleccionan las columnas tiempo y segunda diferencia y luego se hace el gráfico de dispersión que corresponde a estos datos, por último, se le asigna el nombre de segunda variación de la cuadrática.

Figura 262. Tabla de datos y gráfico de dispersión de la segunda variación de la cuadrática



EXPERIMENTO SIMULADO III:

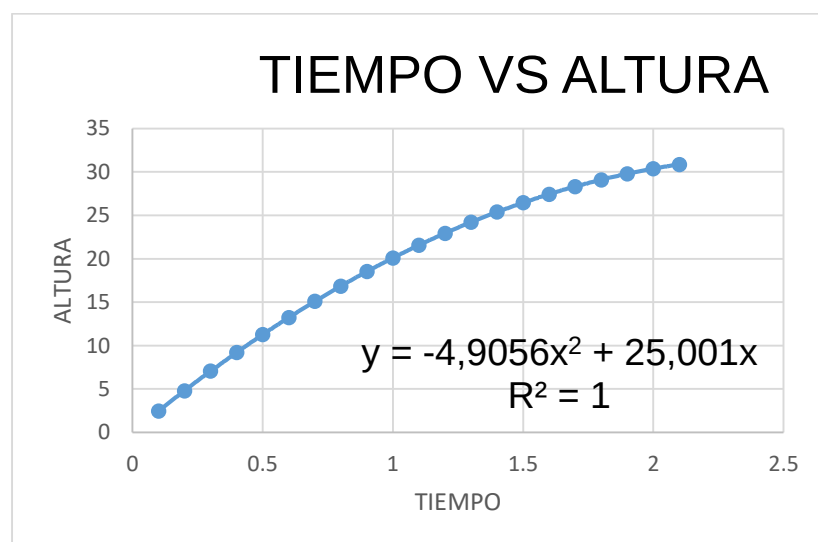
En los ítems 1,2, 3 y 4 se realiza la construcción de la tabla de valores de la primera y segunda diferencia de los datos a partir del experimento simulado III.

Figura 263. Tabla de datos con la primera, segunda y tercera diferencia

LANZAMIENTO VERTICAL								
ALTURA INICIAL	ÁNGULO	GRAVEDAD	VELOCIDAD INICIAL	TIEMPO	ALTURA	PRIMERA DIFERENCIA	SEGUNDA DIFERENCIA	TERCERA DIFERENCIA
0	90°	9.81	25	0.1	2.45			
				0.2	4.8	2.35		
				0.3	7.06	2.26	-0.09	
				0.4	9.22	2.16	-0.10	-0.01
				0.5	11.27	2.05	-0.11	-0.01
				0.6	13.23	1.96	-0.09	0.02
				0.7	15.1	1.87	-0.09	0.00
				0.8	16.86	1.76	-0.11	-0.02
				0.9	18.53	1.67	-0.09	0.02
				1	20.1	1.57	-0.10	-0.01
				1.1	21.56	1.46	-0.11	-0.01
				1.2	22.94	1.38	-0.08	0.03
				1.3	24.21	1.27	-0.11	-0.03
				1.4	25.39	1.18	-0.09	0.02
				1.5	26.46	1.07	-0.11	-0.02
				1.6	27.44	0.98	-0.09	0.02
				1.7	28.32	0.88	-0.10	-0.01
				1.8	29.11	0.79	-0.09	0.01
				1.9	29.79	0.68	-0.11	-0.02
				2	30.38	0.59	-0.09	0
				2.1	30.87	0.49	-0.10	0

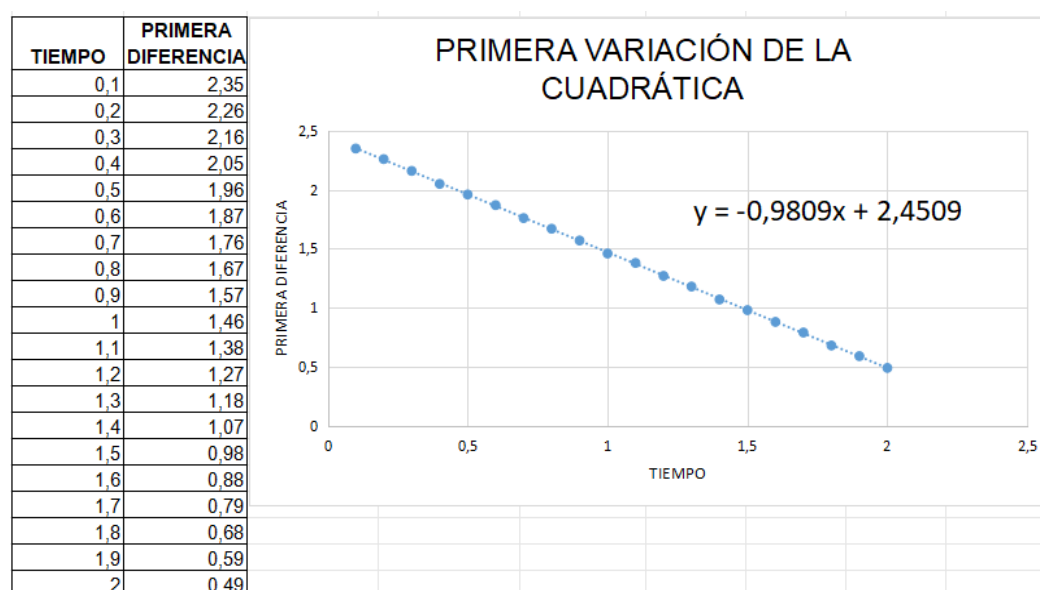
En el ítem 5 se realiza el gráfico de dispersión de velocidad tiempo vs altura.

Figura 264. Gráfico de dispersión tiempo vs altura



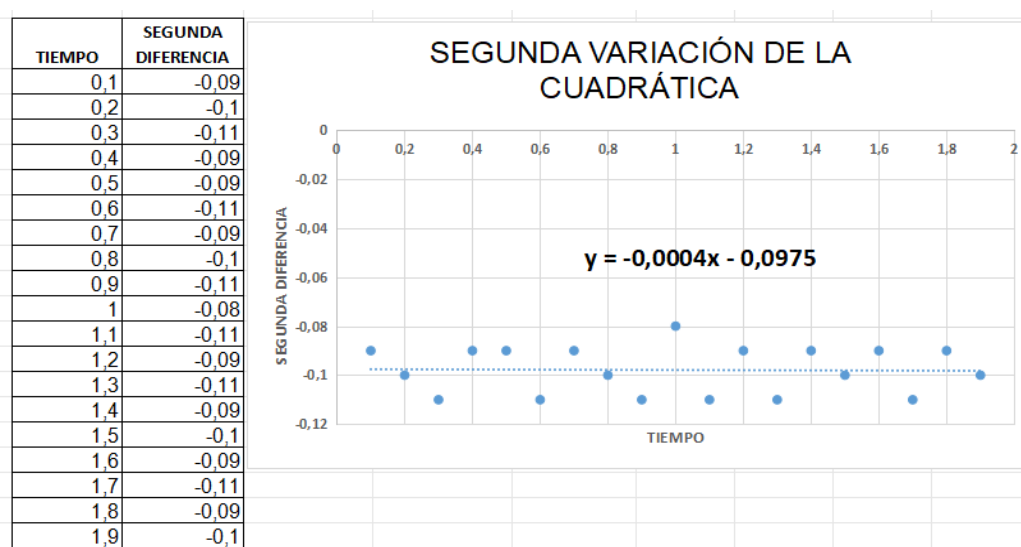
En el ítem 6 y 7 se seleccionan las columnas tiempo y primera diferencia y luego se hace el gráfico de dispersión que corresponde a estos datos, por último, se le asigna el nombre de primera variación de la cuadrática.

Figura 265. Tabla de datos y gráfico de dispersión de la primera variación de la cuadrática



En el ítem 8 y 9 se seleccionan las columnas tiempo y segunda diferencia y luego se hace el gráfico de dispersión que corresponde a estos datos, por último, se le asigna el nombre de segunda variación de la cuadrática.

Figura 266. Tabla de datos y gráfico de dispersión de la segunda variación de la cuadrática



EXPERIMENTO IV:

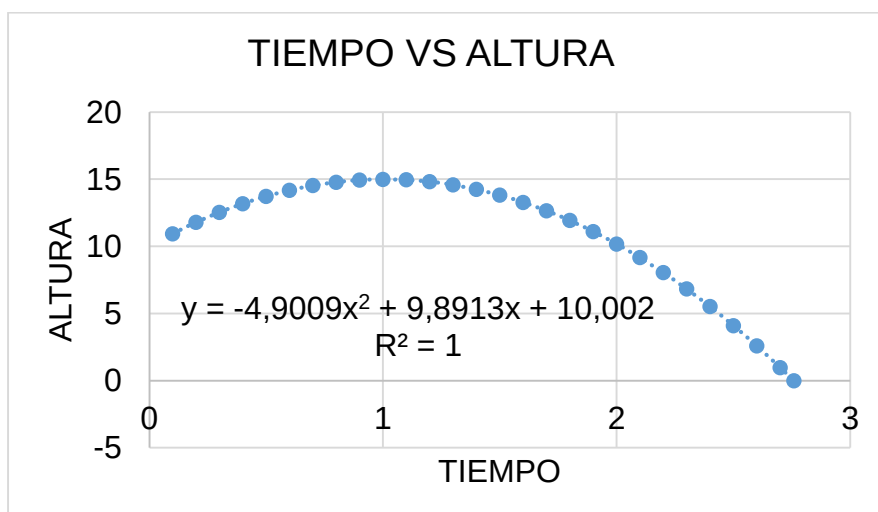
En los ítems 1,2, 3 y 4 se realiza la construcción de la tabla de valores de la primera y segunda diferencia de los datos a partir del experimento simulado IV.

Figura 267. Tabla de datos con la primera, segunda y tercera diferencia

ALTURA INICIAL	VELOCIDAD INICIAL	GRAVEDAD	TIEMPO	ALTURA	PRIMERA DIFERENCIA	SEGUNDA DIFERENCIA	TERCERA DIFERENCIA
10	14	9.8	0.1	10.94			
			0.2	11.78	0.8		
			0.3	12.53	0.8	-0.09	
			0.4	13.17	0.6	-0.11	0.0
			0.5	13.72	0.6	-0.09	0.0
			0.6	14.17	0.4	-0.10	0.0
			0.7	14.53	0.4	-0.09	0.0
			0.8	14.78	0.3	-0.11	0.0
			0.9	14.94	0.2	-0.09	0.0
			1	14.99	0.1	-0.11	0.0
			1.1	14.95	0.0	-0.09	0.0
			1.2	14.82	-0.1	-0.09	0.0
			1.3	14.58	-0.2	-0.11	0.0
			1.4	14.25	-0.3	-0.09	0.0
			1.5	13.81	-0.4	-0.11	0.0
			1.6	13.28	-0.5	-0.09	0.0
			1.7	12.65	-0.6	-0.10	0.0
			1.8	11.93	-0.7	-0.09	0.0
			1.9	11.1	-0.8	-0.11	0.0
			2	10.18	-0.9	-0.09	0.0
			2.1	9.16	-1.0	-0.10	0.0
			2.2	8.04	-1.1	-0.10	0.0
			2.3	6.82	-1.2	-0.10	0.0
			2.4	5.51	-1.3	-0.09	0.0
			2.5	4.09	-1.4	-0.11	0.0
			2.6	2.58	-1.5	-0.09	0.0
			2.7	0.97	-1.6	-0.10	0.0

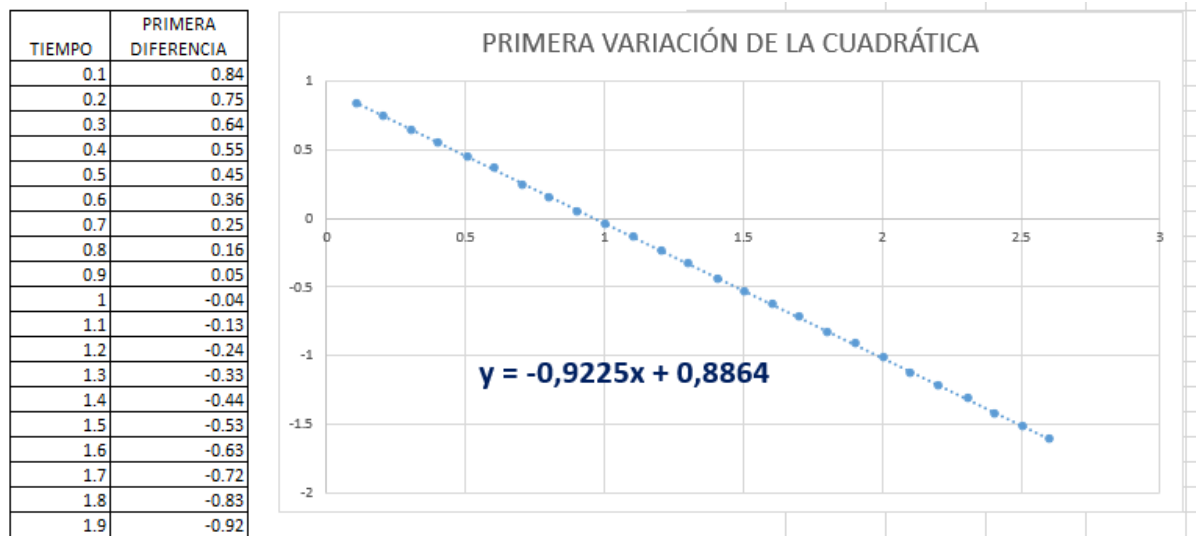
En el ítem 5 se realiza el gráfico de dispersión de velocidad tiempo vs altura.

Figura 268. Gráfico de dispersión tiempo vs altura



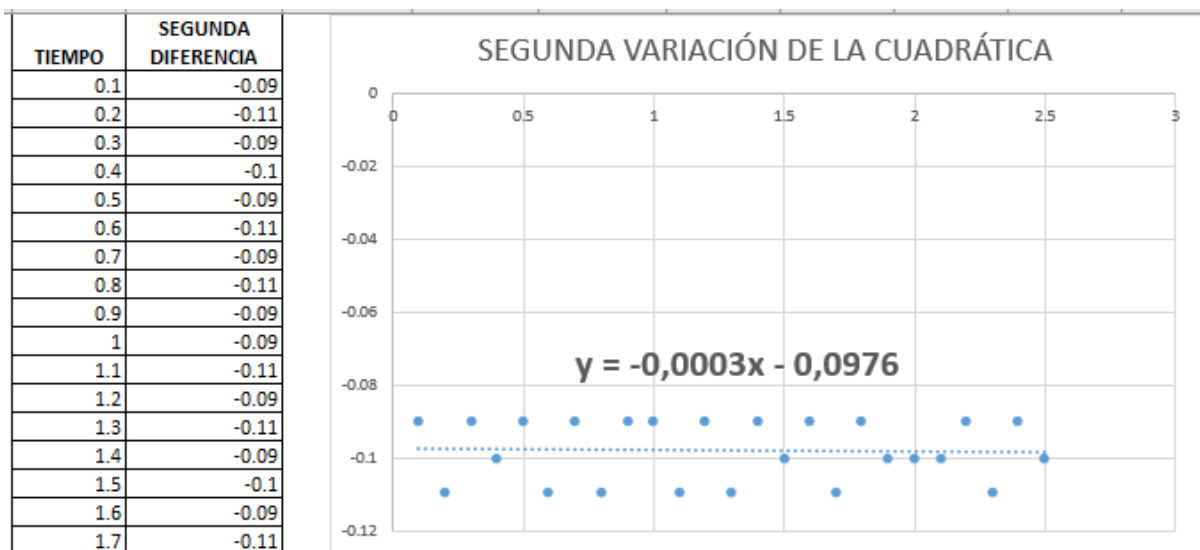
En el ítem 6 y 7 se seleccionan las columnas tiempo y primera diferencia y luego se hace el gráfico de dispersión que corresponde a estos datos, por último, se le asigna el nombre de primera variación de la cuadrática.

Figura 269. Tabla de datos y gráfico de dispersión de la primera variación de la cuadrática



En el ítem 8 y 9 se seleccionan las columnas tiempo y segunda diferencia y luego se hace el gráfico de dispersión que corresponde a estos datos, por último, se le asigna el nombre de segunda variación de la cuadrática.

Figura 270. Tabla de datos y gráfico de dispersión de la segunda variación de la cuadrática



EXPERIMENTO V:

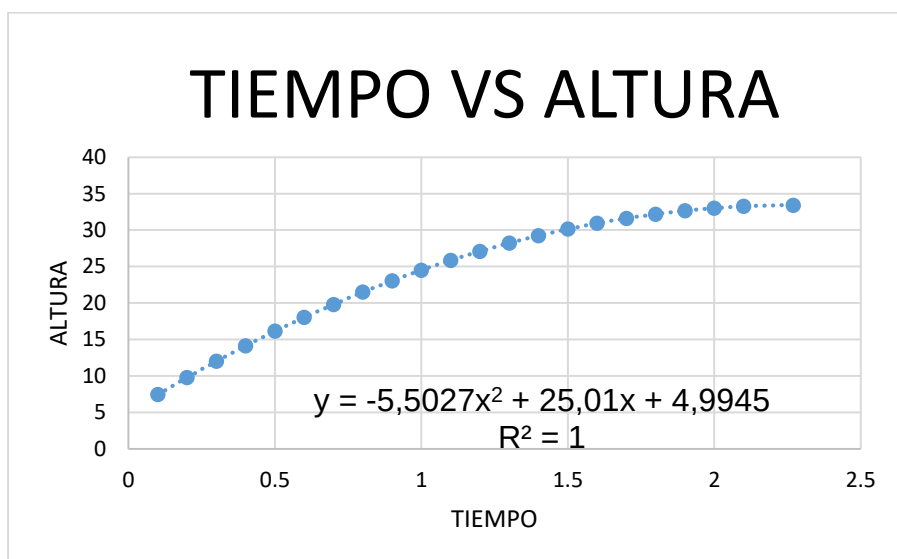
En los ítems 1,2, 3 y 4 se realiza la construcción de la tabla de valores de la primera y segunda diferencia de los datos a partir del experimento simulado V.

Figura 271. Tabla de datos con la primera, segunda y tercera diferencia

ALTURA INICIAL	LANZAMIENTO VERTICAL					PRIMERA DIFERENCIA	SEGUNDA DIFERENCIA	TERCERA DIFERENCIA
	ÁNGULO	GRAVEDAD	VELOCIDAD INICIAL	TIEMPO	ALTURA			
5	90°	11	25	0.1	7.44			
				0.2	9.78	2.34		
				0.3	12	2.22	-0.12	
				0.4	14.12	2.12	-0.10	0.0
				0.5	16.12	2	-0.12	0.0
				0.6	18.02	1.9	-0.10	0.0
				0.7	19.8	1.78	-0.12	0.0
				0.8	21.48	1.68	-0.10	0.0
				0.9	23.05	1.57	-0.11	0.0
				1	24.5	1.45	-0.12	0.0
				1.1	25.85	1.35	-0.10	0.0
				1.2	27.08	1.23	-0.12	0.0
				1.3	28.21	1.13	-0.10	0.0
				1.4	29.22	1.01	-0.12	0.0
				1.5	30.13	0.91	-0.10	0.0
				1.6	30.92	0.79	-0.12	0.0
				1.7	31.61	0.69	-0.10	0.0
				1.8	32.18	0.57	-0.12	0.0
				1.9	32.65	0.47	-0.10	0.0
				2	33	0.35	-0.12	0.0
				2.1	33.25	0.25	-0.10	0.0
				2.27	33.41	0.16	-0.09	0.0

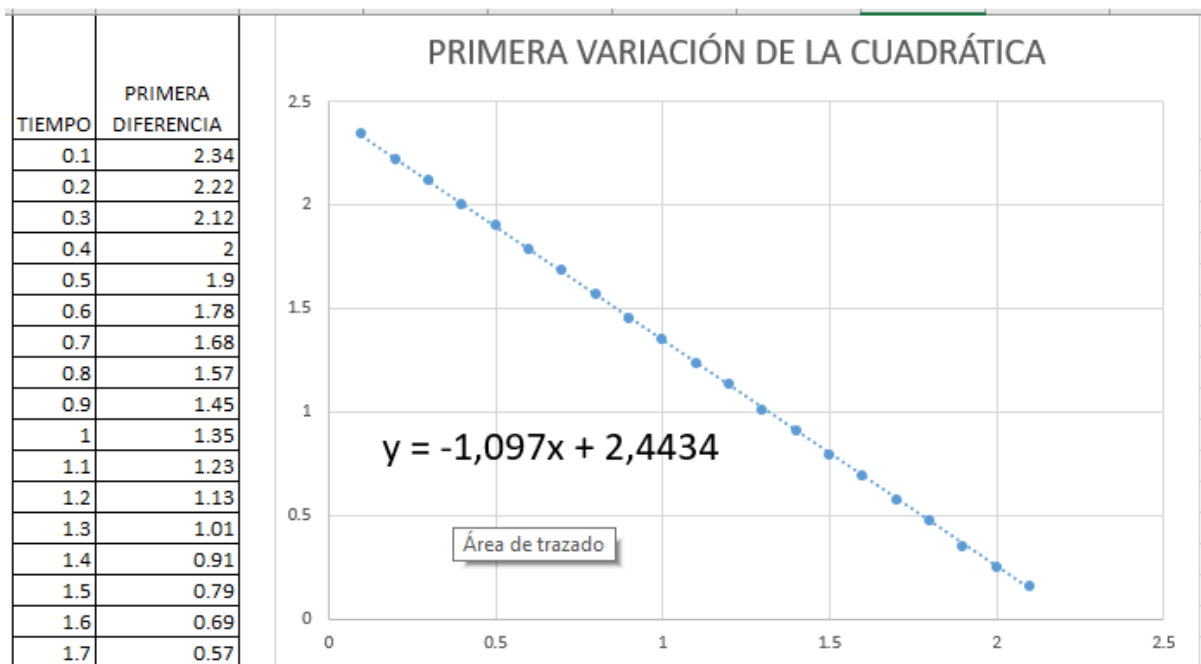
En el ítem 5 se realiza el gráfico de dispersión de velocidad tiempo vs altura.

Figura 272. Gráfico de dispersión tiempo vs altura



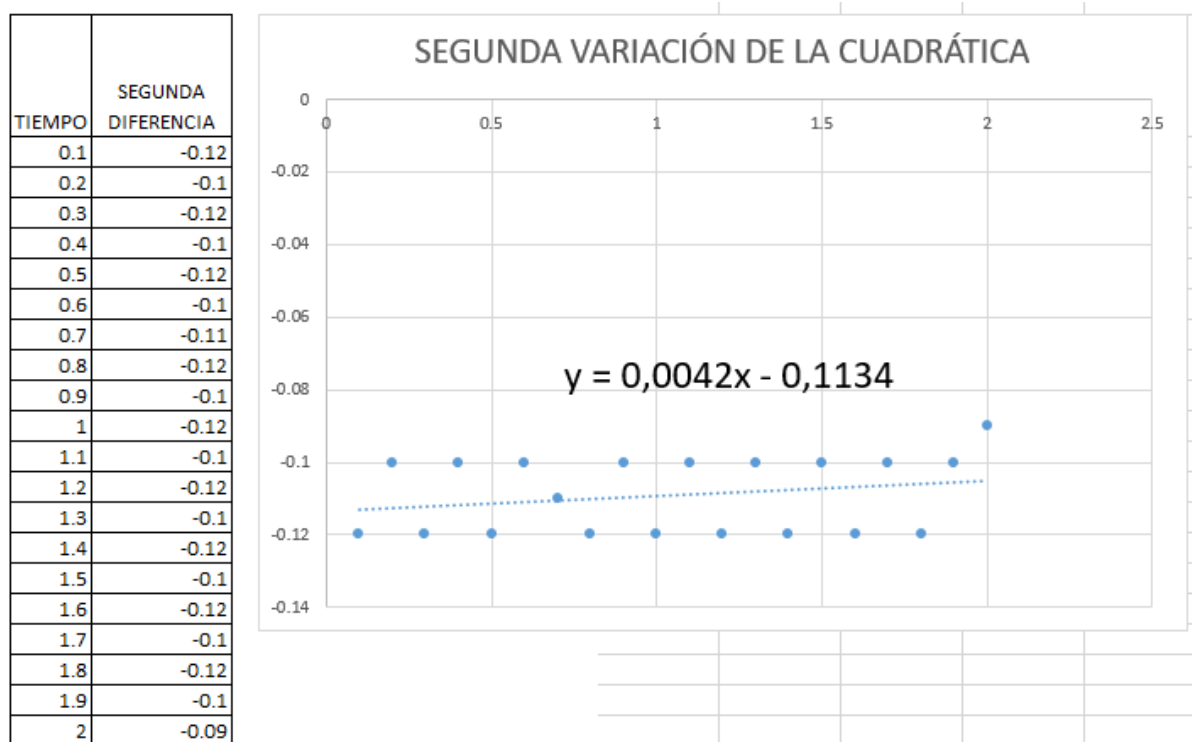
En el ítem 6 y 7 se seleccionan las columnas tiempo y primera diferencia y luego se hace el gráfico de dispersión que corresponde a estos datos, por último, se le asigna el nombre de primera variación de la cuadrática.

Figura 273. Tabla de datos y gráfico de dispersión de la primera variación de la cuadrática



En el ítem 8 y 9 se seleccionan las columnas tiempo y segunda diferencia y luego se hace el gráfico de dispersión que corresponde a estos datos, por último, se le asigna el nombre de segunda variación de la cuadrática.

Figura 274. Tabla de datos y gráfico de dispersión de la segunda variación de la cuadrática



Anexo I. Talleres Entregados a los Estudiantes

TALLER EDUCATIVO N°2

Nombre 1: _____

Nombre 2: _____

Nombre 3: _____

PRIMERA Y SEGUNDA VARIACIÓN DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

“EXPERIMENTOS REALES”

1. Se usa la tabla de valores obtenida en el experimento real con una altura de 10 cm.

[illegible]

2. Se agrega una columna a la derecha de tal manera que sea la diferencia entre el valor; B_3 y B_2 luego B_4 y B_3 y B_n y B_{n-1} . Para esto se selecciona la parte inferior de la celda de la tercera columna (Flecha azul) y se arrastra hacia abajo para que automáticamente se obtengan los demás resultados.



5. Se selecciona las columnas $t(s)$ y *primera diferencia*, se elimina la celda B1.

[illegible]

6. Luego, se realiza el gráfico de dispersión “se da insertar gráficos, se elige el de dispersión”.

	EXPERIMENTO REAL 10 CM	EXPERIMENTO REAL 20 CM	EXPERIMENTO REAL 30 CM
PRIMERA VARIACIÓN			
SEGUNDA VARIACIÓN			

12. ¿Qué puede concluir de la primera y segunda variación de la función cuadrática?

TALLER EDUCATIVO N° 3

Nombre 1: _____

Nombre 2: _____

Nombre 3: _____

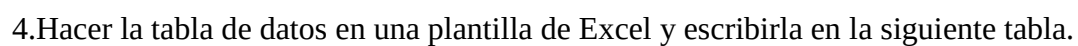
EXPERIMENTO SIMULADO 1. TIRO PARABÓLICO

TIEMPO - ALTURA

1. Ingresar al siguiente link y selecciona la pestaña **Laboratorio**:

https://phet.colorado.edu/sims/html/projectile-motion/latest/projectile-motion_all.html?locale=es

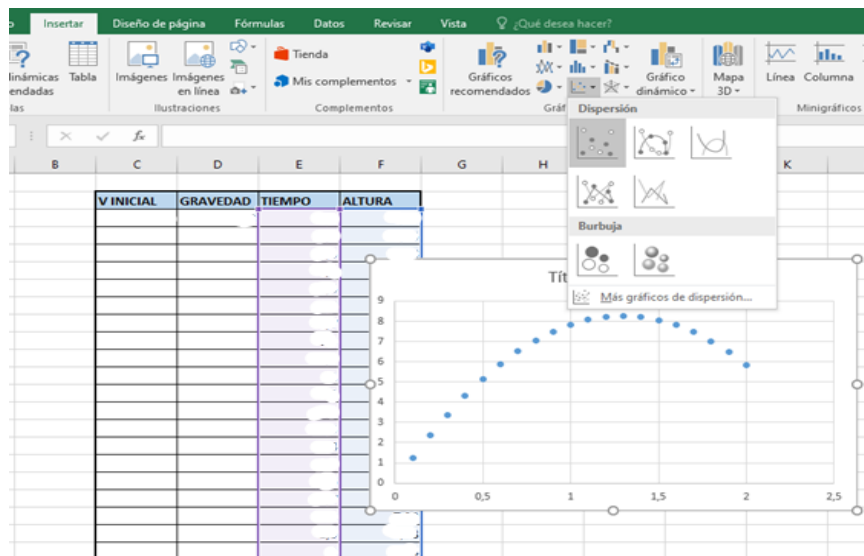
2. Se elige un ángulo de 45° , una velocidad inicial de 18 m/s y una gravedad de $9,81 \text{ m/s}^2$, luego se hace el lanzamiento del proyectil.

[illegible]

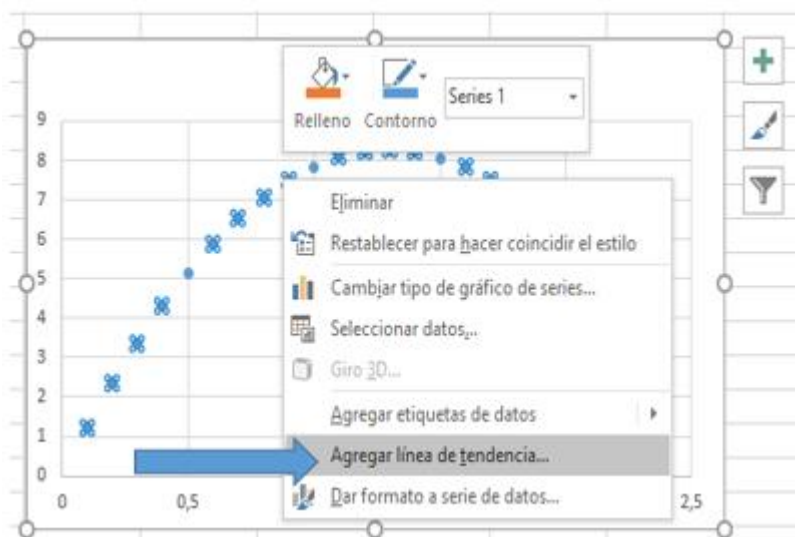
5. Se seleccionan las columnas tiempo y altura.

[illegible]

6. Se selecciona la pestaña insertar, luego gráfico de dispersión y se da clic.

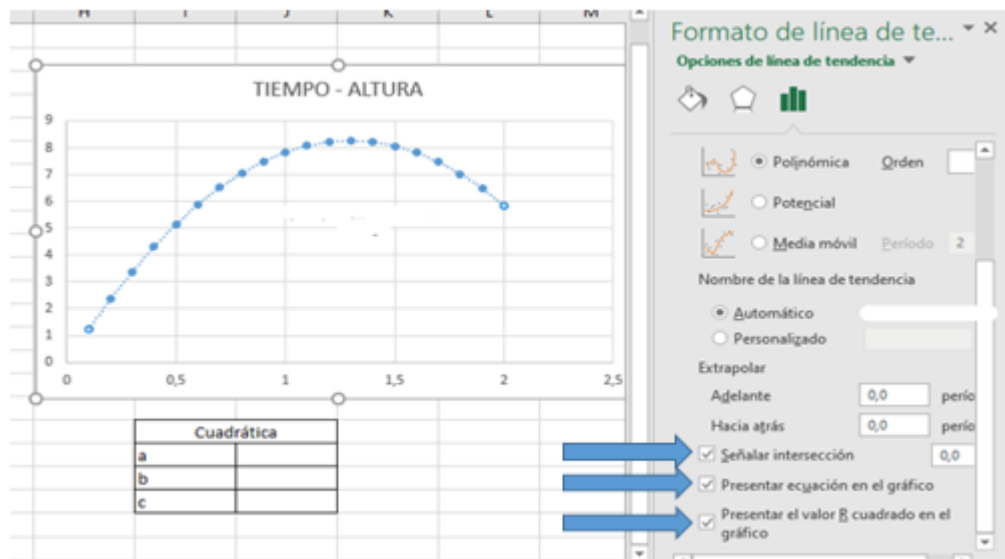


7. Se da doble clic sobre un punto en la gráfica y se selecciona la opción agregar línea de tendencia central.

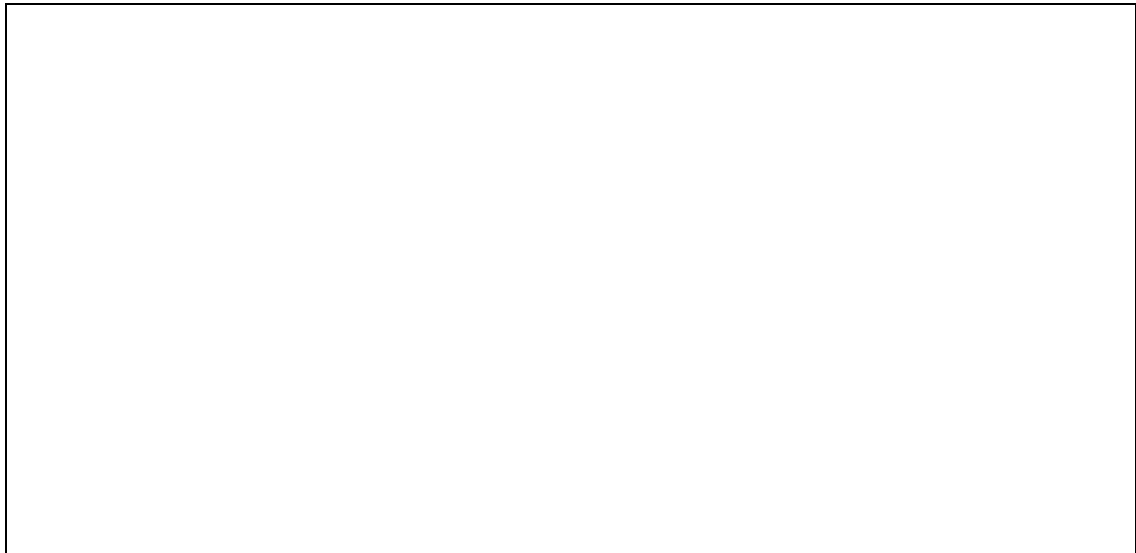


8. Seleccionar la opción que más se ajuste al modelo. Tener presente que deben elegir la polinómica y deben analizar cuál es el grado que permite que el valor de R sea aproximadamente o igual a 1 (recordar como se hizo en el taller de refuerzo de Excel).

Luego dar clic en “señalar intersección, presentar ecuación del gráfico y presentar el valor de R cuadrado”).



9. Realice el gráfico de dispersión.



10. ¿Qué forma tiene la gráfica del punto 9.

11. Escribir los datos iniciales escritos en el simulador para el experimento I

$v_0 =$ _____ $y_0 =$ _____

$g =$ _____ $\alpha_0 =$ _____

12. Escribir la ecuación que da el programa Excel y el valor de R :

13. Tener en cuenta que la ecuación de posición contra tiempo es:

$$y(t) = y_0 + v_{0y} \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2 ,$$

para este caso $y_0 = 0 \text{ m}$

14. Tener en cuenta que la expresión algebraica de la función cuadrática es:

$$y = ax^2 + bx + c$$

donde a es el coeficiente cuadrático, b el coeficiente lineal, c el término independiente y x es la variable independiente e y la dependiente.

15. Para el experimento I, ¿cuál es la variable dependiente e independiente?

16. Establezca relaciones entre:

- El coeficiente cuadrático, lineal, el término independiente y algún elemento de la ecuación de posición contra el tiempo.

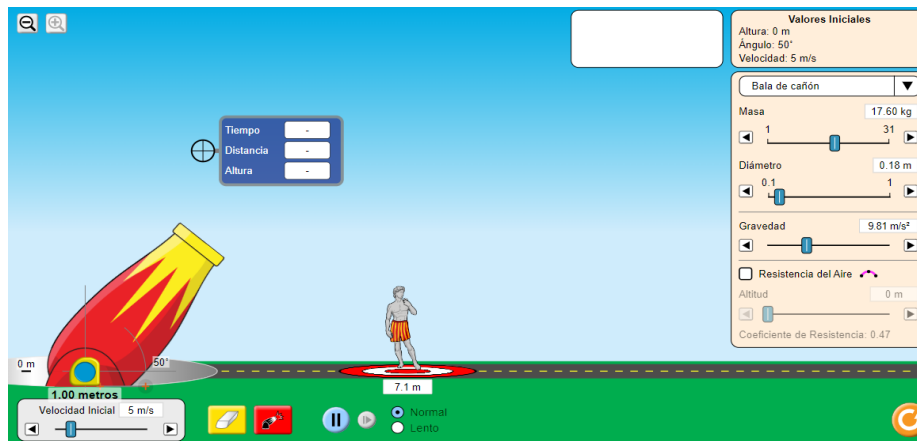
17. ¿Qué puede concluir acerca de los parámetros a , b y c de la función cuadrática con respecto a los elementos de la ecuación de posición contra el tiempo?

EXPERIMENTO SIMULADO 2. TIRO PARABÓLICO VELOCIDAD INICIAL – DISTANCIA HORIZONTAL

1. Ingresar al siguiente link y selecciona la pestaña **Laboratorio**:

https://phet.colorado.edu/sims/html/projectile-motion/latest/projectile-motion_all.html?locale=es

2. Se elige un ángulo de 50° , una velocidad inicial de 5 m/s y la gravedad de $9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$



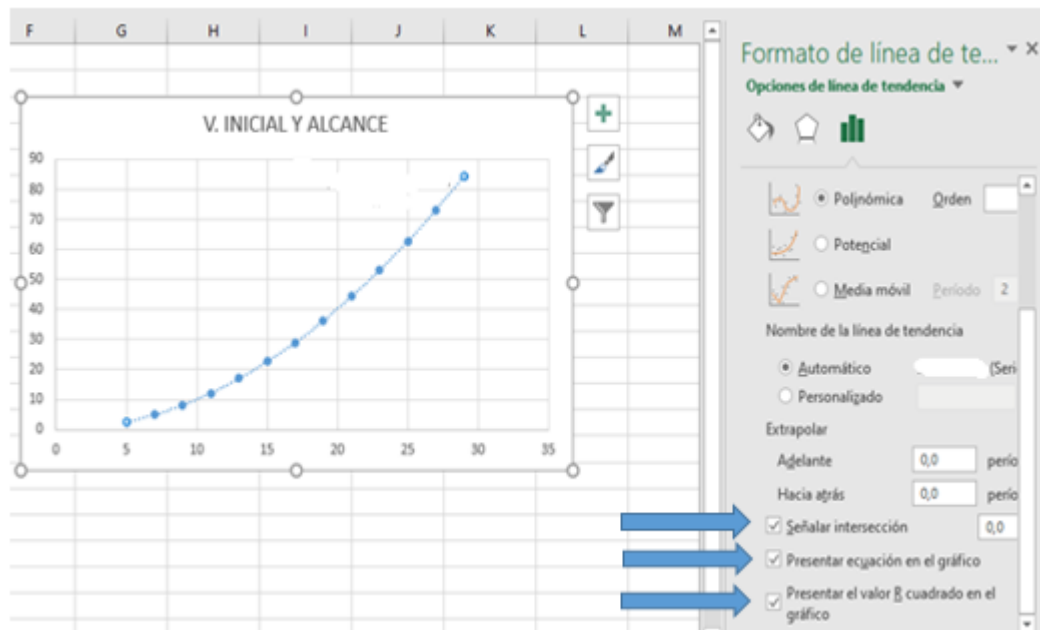
3. Se realizan los lanzamientos de proyectil dejando fijo el valor de la gravedad y el ángulo, el único valor a variar es la velocidad inicial empezando en 5 m/s y aumentando de dos en dos.



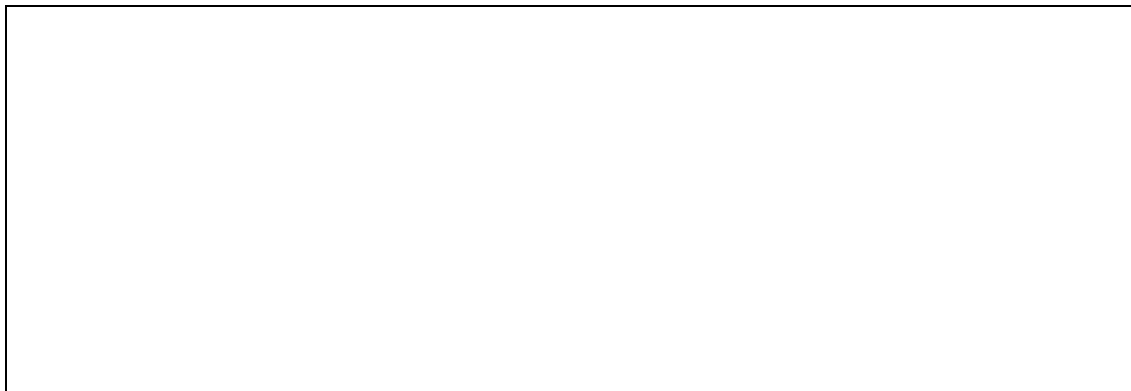
4. Se selecciona el dispositivo para tomar medidas. Las medidas que se toman son la velocidad inicial y el alcance horizontal.



5. Hacer la tabla de datos en una plantilla de Excel y escribirla en la siguiente tabla.



9. Realice el gráfico de dispersión.



10. ¿Qué forma tiene la gráfica del punto 9.

11. Escribir los datos iniciales escritos en el simulador para el experimento I

$g =$ _____ $\alpha_0 =$ _____

12. Escribir la ecuación que da el programa Excel y el valor de R :

13. Tener en cuenta que la ecuación de posición contra tiempo es:

$$y(t) = y_0 + v_{oy} \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

y la ecuación de alcance máximo es:

$$x_{\text{máx}} = \frac{v_0^2 \cdot \sin(2\alpha)}{g}$$

para este caso $y_0 = 0 \text{ m}$

14. Tener en cuenta que la expresión algebraica de la función cuadrática es:

$$y = ax^2 + bx + c$$

donde a es el coeficiente cuadrático, b el coeficiente lineal, c el término independiente y x es la variable independiente e y la dependiente.

15. Para el experimento II, ¿cuál es la variable dependiente e independiente?,

SUGERENCIA: aquí debe hacer una sustitución conveniente según las variables para determinar quién es el valor constante.

16. Establezca relación entre:

- El coeficiente cuadrático y algún elemento de la ecuación de posición contra el tiempo.

17. ¿Qué puede concluir acerca del parámetro a de la función cuadrática con respecto a los elementos de la ecuación de posición contra el tiempo?

EXPERIMENTO SIMULADO 3. LANZAMIENTO VERTICAL TIEMPO – ALTURA

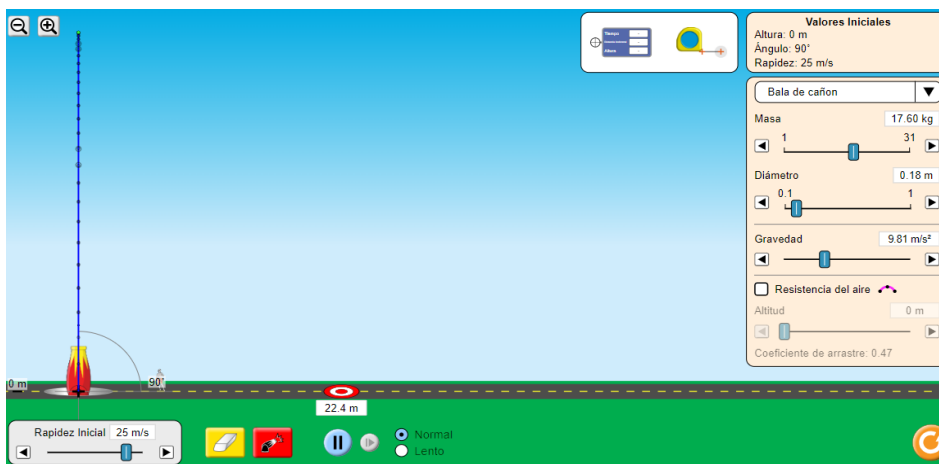
1. Ingresar al siguiente link y selecciona la pestaña LABORATORIO.

https://phet.colorado.edu/sims/html/projectile-motion/latest/projectile-motion_all.html?locale=es

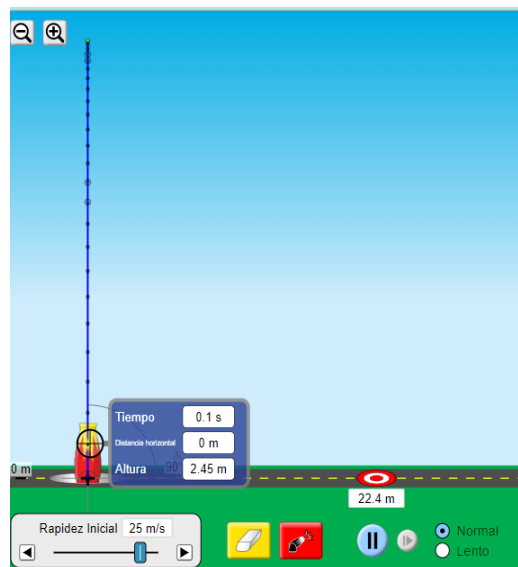
2. Se elige un ángulo de 90° , una velocidad inicial de 25 m/s y la gravedad de $9,81 \frac{m}{s^2}$



3. Se realiza el lanzamiento del proyectil.



4. Se selecciona el dispositivo para tomar medidas. Las medidas que se toman son el tiempo y la altura en cada punto.



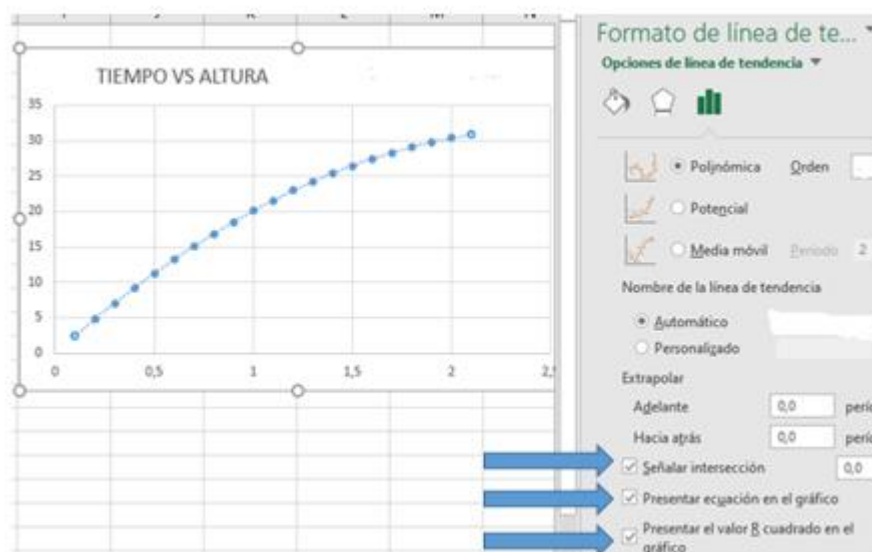
5. Hacer la tabla de datos en una plantilla de Excel y escribirla en la siguiente tabla.

[illegible]

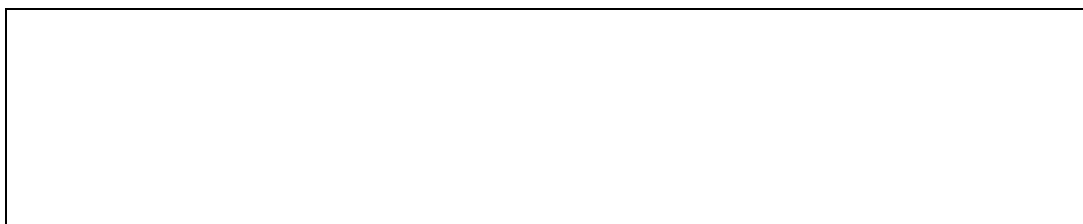
7. Se da doble clic sobre un punto en la gráfica y se selecciona la opción agregar línea de tendencia central.



8. Seleccionar la opción que más se ajuste al modelo. Tener presente que deben elegir la polinómica y deben analizar cuál es el grado que permite que el valor de R sea aproximadamente o igual a 1 (recordar como se hizo en el taller de refuerzo de Excel). Luego dar clic en “señalar intersección, presentar ecuación del gráfico y presentar el valor de R cuadrado)”.



9. Realice el gráfico de dispersión.



10. Qué forma tiene la gráfica del punto 9.

11. Escribir los datos iniciales escritos en el simulador para el experimento III

$$v_0 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$g = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\alpha_0 = \underline{\hspace{2cm}}$$

12. Escribir la ecuación que da el programa Excel y el valor de R :

13. Tener en cuenta que la ecuación de posición contra tiempo es:

$$y(t) = y_0 + v_{0y} \cdot t + \frac{1}{2}g \cdot t^2 ,$$

para este caso $y_0 = 0 \text{ m}$

14. Tener en cuenta que la expresión algebraica de la función cuadrática es:

$$y = ax^2 + bx + c$$

donde a es el coeficiente cuadrático, b el coeficiente lineal, c el término independiente y x es la variable independiente e y la dependiente.

15. Para el experimento III, ¿cuál es la variable dependiente e independiente?

16. Establezca relaciones entre:

- El coeficiente cuadrático, lineal, el término independiente y algún elemento de la ecuación de posición contra el tiempo.

17. ¿Qué puede concluir acerca de los parámetros a , b y c de la función cuadrática con respecto a los elementos de la ecuación de posición contra el tiempo?

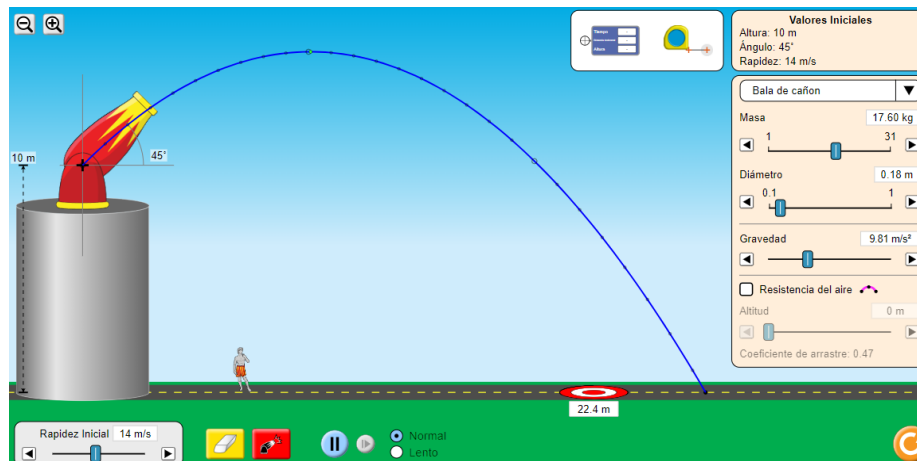
EXPERIMENTO SIMULADO 4. TIRO PARABÓLICO

TIEMPO –ALTURA INICIAL

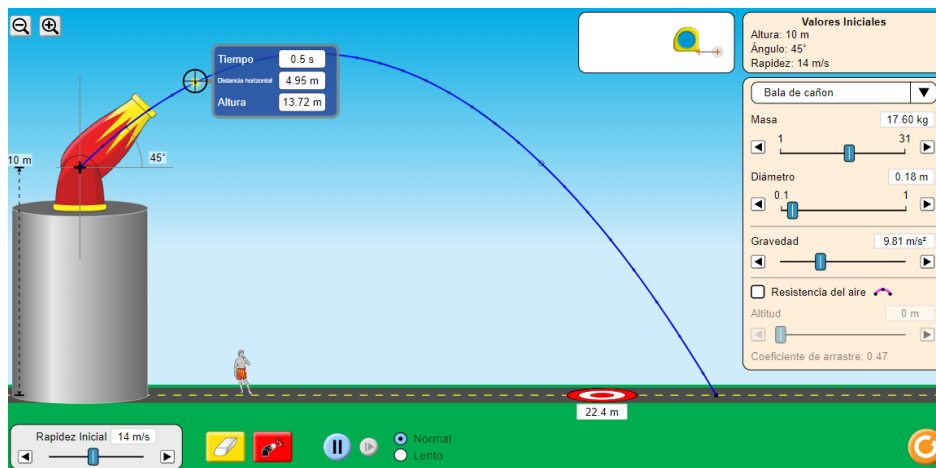
1. Ingresar al siguiente link y selecciona la pestaña **Laboratorio**.

https://phet.colorado.edu/sims/html/projectile-motion/latest/projectile-motion_all.html?locale=es

2. Se elige un ángulo de 45° , una velocidad inicial de 14 m/s , una gravedad de $9,81 \text{ m/s}^2$ y una altura inicial de 10 m , luego se hace el lanzamiento del proyectil.

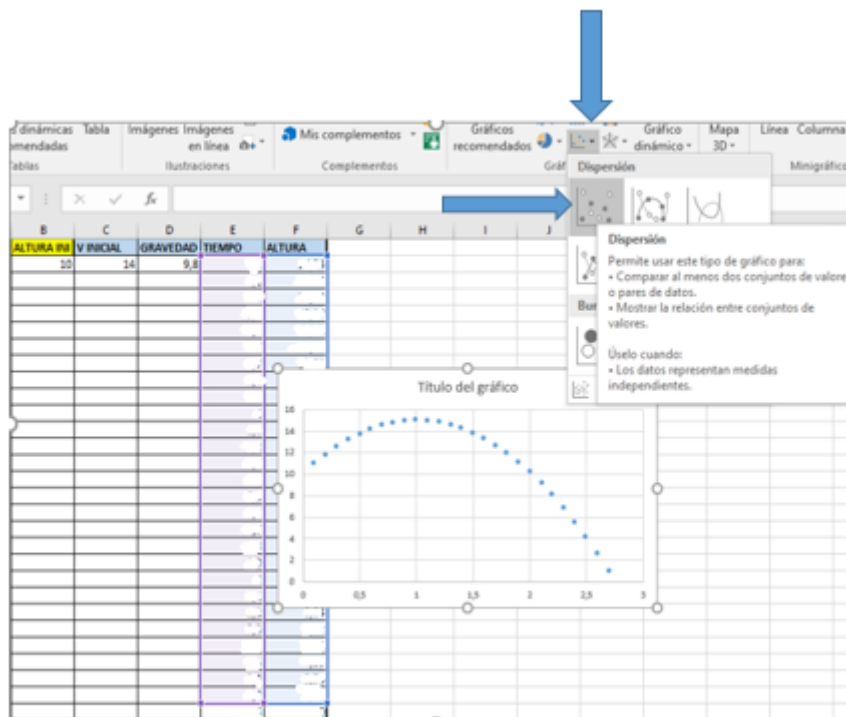


3. Se selecciona el dispositivo para tomar medidas. Las medidas que se toman son el tiempo de vuelo y la altura.



4. Hacer la tabla de datos en una plantilla de Excel y escribirla en la siguiente tabla.

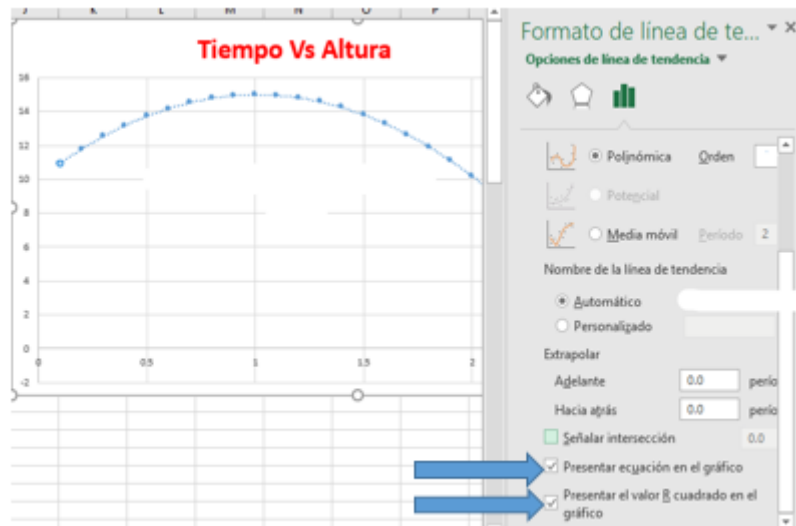
[illegible]



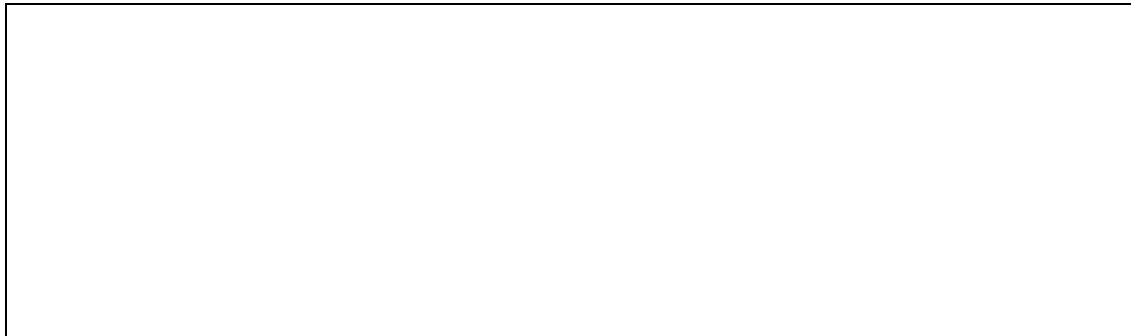
6. Se da doble clic sobre un punto en la gráfica y se selecciona la opción agregar línea de tendencia central.



7. Seleccionar la opción que más se ajuste al modelo. Tener presente que deben elegir la polinómica y deben analizar cuál es el grado que permite que el valor de R sea aproximadamente o igual a 1 (recordar como se hizo en el taller de refuerzo de Excel). Luego dar clic en “señalar intersección, presentar ecuación del gráfico y presentar el valor de R cuadrado”.



8.Realice el gráfico de dispersión.



9.Qué forma tiene la gráfica del punto 8.

10.Escribir los datos iniciales escritos en el simulador para el experimento IV:

$v_0 =$ _____ $y_0 =$ _____

$g =$ _____ $\alpha_0 =$ _____

11.Escribir la ecuación que da el programa Excel y el valor de R :

12.Tener en cuenta que la ecuación de posición contra tiempo es:

$$y(t) = y_0 + v_{0y} \cdot t + \frac{1}{2}g \cdot t^2 ,$$

13.Tener en cuenta que la expresión algebraica de la función cuadrática es:

$$y = ax^2 + bx + c$$

donde a es el coeficiente cuadrático, b el coeficiente lineal, c el término independiente y x es la variable independiente e y la dependiente.

14.Para el experimento IV, ¿cuál es la variable dependiente e independiente?

15. Establezca relaciones entre:

- El coeficiente cuadrático, lineal, el término independiente y algún elemento de la ecuación de posición contra el tiempo.

16. ¿Qué puede concluir acerca de los parámetros a , b y c de la función cuadrática con respecto a los elementos de la ecuación de posición contra el tiempo?

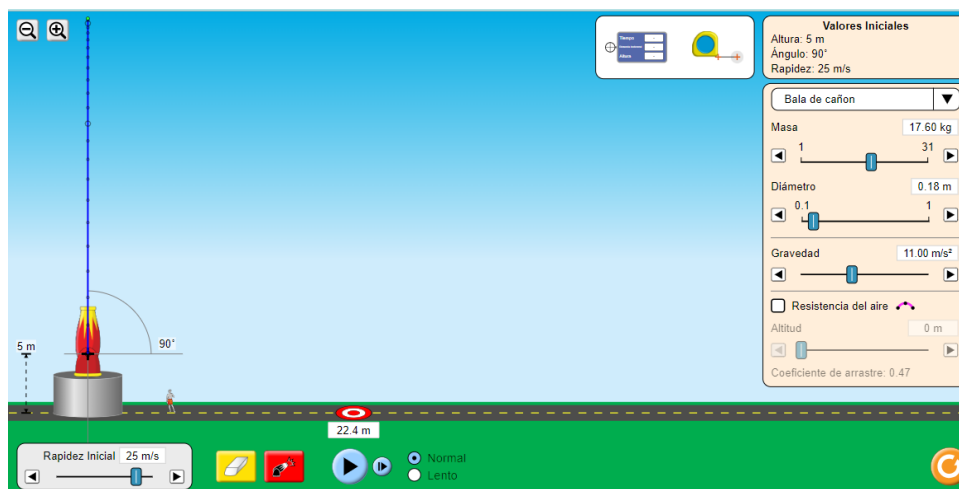
EXPERIMENTO SIMULADO 5. LANZAMIENTO VERTICAL

TIEMPO – ALTURA INICIAL

1. Ingresar al siguiente link y selecciona la pestaña **Laboratorio**.

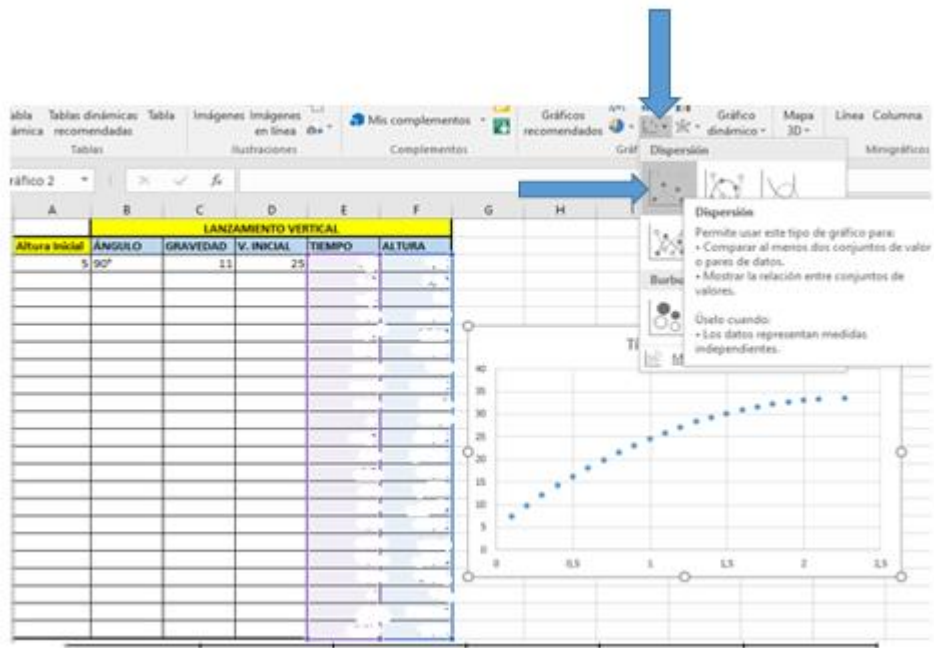
https://phet.colorado.edu/sims/html/projectile-motion/latest/projectile-motion_all.html?locale=es

2. Se elige un ángulo de 90° , una velocidad inicial de 25 m/s , la gravedad de $11 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ y una altura inicial de 5 m .

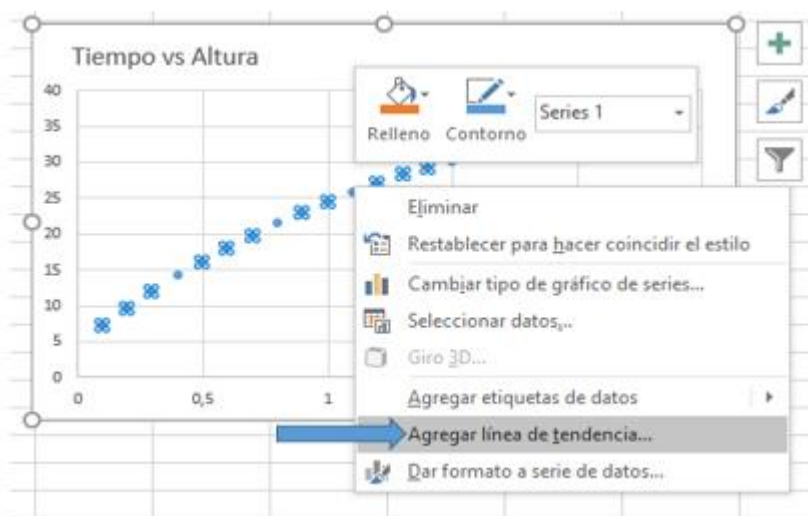


The image shows a screenshot of a web-based simulation titled "Balas de cañón" (Cannon Balls). The simulation is set in a 2D environment with a blue sky and a green ground. A cannon is positioned on the left, firing a blue cannonball upwards. A vertical dashed line indicates the path of the ball. A data box on the left displays the following values: Tiempo: 0.4 s, Distancia horizontal: 0 m, and Altura: 14.12 m. A small figure of a person stands near the cannon. A red target is visible on the ground at a distance of 22.4 m. The right panel, titled "Valores Iniciales" (Initial Values), contains several sliders and input fields for configuring the simulation: Masa (17.60 kg), Diámetro (0.18 m), Gravedad (11.00 m/s²), and Altitud (0 m). There are also checkboxes for "Resistencia del aire" (Air Resistance) and "Coeficiente de arrastre: 0.47". The bottom panel features a "Rapidez Inicial" (Initial Speed) slider set to 25 m/s and buttons for "Normal" and "Lento" (Slow) modes. A Google logo is located in the bottom right corner.

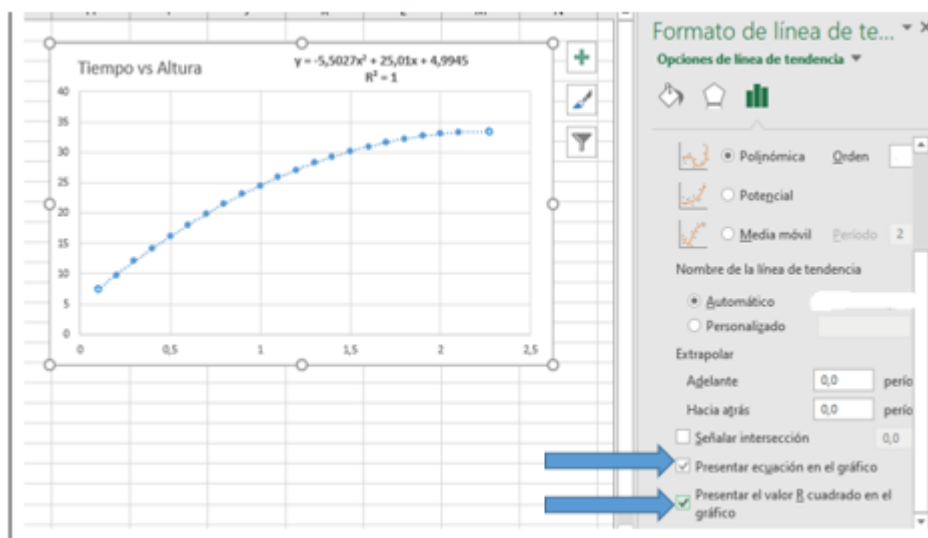
[illegible]



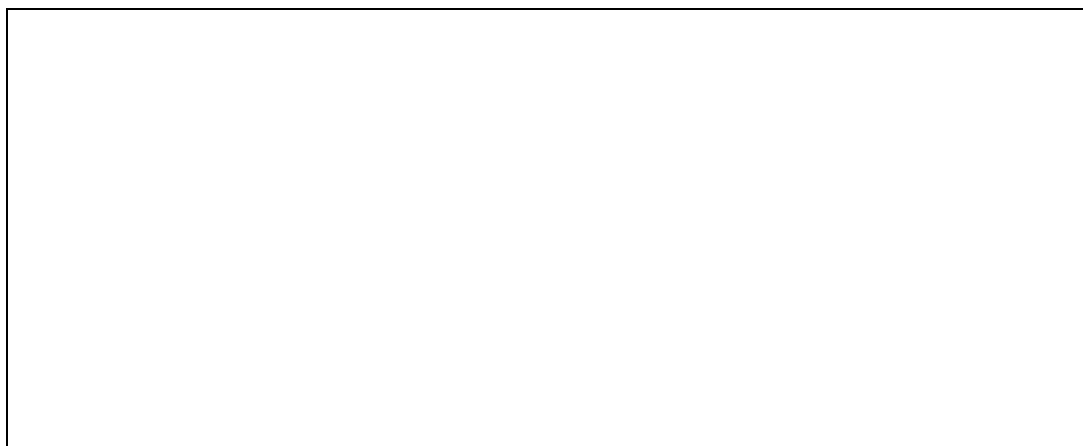
6. Se da doble clic sobre un punto en la gráfica y se selecciona la opción agregar línea de tendencia central.



7. Seleccionar la opción que más se ajuste al modelo. Tener presente que deben elegir la polinómica y deben analizar cuál es el grado que permite que el valor de R sea aproximadamente o igual a 1 (recordar como se hizo en el taller de refuerzo de Excel). Luego dar clic en “señalar intersección, presentar ecuación del gráfico y presentar el valor de R cuadrado”.



8. Realice el gráfico de dispersión.



9. Qué forma tiene la gráfica del punto 8.

10. Escribir los datos iniciales escritos en el simulador para el experimento IV:

$v_0 =$ _____

$y_0 =$ _____

$g =$ _____

$\alpha_0 =$ _____

11. Escribir la ecuación que da el programa Excel y el valor de R :

12. Tener en cuenta que la ecuación de posición contra tiempo es:

$$y(t) = y_0 + v_{0y} \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2,$$

13. Tener en cuenta que la expresión algebraica de la función cuadrática es:

$$y = ax^2 + bx + c$$

donde a es el coeficiente cuadrático, b el coeficiente lineal, c el término independiente y x es la variable independiente e y la dependiente.

14. Para el experimento V, ¿cuál es la variable dependiente e independiente?

15. Establezca relaciones entre:

- El coeficiente cuadrático, lineal, el término independiente y algún elemento de la ecuación de posición contra el tiempo.

16. ¿Qué puede concluir acerca de los parámetros a , b y c de la función cuadrática con respecto a los elementos de la ecuación de posición contra el tiempo?

TALLER EDUCATIVO N°4
PRIMERA Y SEGUNDA VARIACIÓN DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA
“SIMULADOR PHET”

EXPERIMENTO I:

1. Se usa la tabla de valores obtenida en el experimento simulado I.

			x	y			
ALTURA INI	V INICIAL	GRAVEDAD	TIEMPO	ALTURA	PRIMERA DIFERENCIA	SEGUNDA DIFERENCIA	ULTIMA DIFERENCIA
0	18	9,8	0,1	1,22			
			0,2	2,35	1,13		
			0,3	3,38	1,03	-0,10	
			0,4	4,31	0,93	-0,10	0,00
			0,5	5,14	0,83	-0,10	0,00
			0,6	5,87	0,73	-0,10	0,00
			0,7	6,51	0,64	-0,09	0,01
			0,8	7,04	0,53	-0,11	-0,02
			0,9	7,48	0,44	-0,09	0,02
			1	7,82	0,34	-0,10	-0,01
			1,1	8,07	0,25	-0,09	0,01
			1,2	8,21	0,14	-0,11	-0,02
			1,3	8,26	0,05	-0,09	0,02
			1,4	8,21	-0,05	-0,10	-0,01
			1,5	8,06	-0,15	-0,10	0,00
			1,6	7,81	-0,25	-0,10	0,00
			1,7	7,46	-0,35	-0,10	0,00
			1,8	7,02	-0,44	-0,09	0,01
			1,9	6,48	-0,54	-0,10	-0,01
			2	5,84	-0,64	-0,10	0,00

2. Se agrega una columna a la derecha de tal manera que sea la diferencia entre el valor; E_4 y E_3 y E_n y E_{n-1} . Para esto se selecciona la parte inferior de la celda de la sexta columna (Flecha azul) y se arrastra hacia abajo para que automáticamente se obtengan los demás resultados.

			x	y	
ALTURA INICIAL	VELOCIDAD INICIAL	GRAVEDAD	TIEMPO	ALTURA	PRIMERA DIFERENCIA
0	18	9.8	0.1	1.22	
			0.2	2.35	=E4-E3
			0.3	3.38	
			0.4	4.31	
			0.5	5.14	
			0.6	5.87	
			0.7	6.51	
			0.8	7.04	
			0.9	7.48	
			1	7.82	
			1.1	8.07	
			1.2	8.21	
			1.3	8.26	
			1.4	8.21	
			1.5	8.06	
			1.6	7.81	
			1.7	7.46	
			1.8	7.02	
			1.9	6.48	
			2	5.84	

3. Se agrega otra columna a la derecha de tal manera que sea la diferencia entre y ; $F5 - F4$ y F_n y F_{n-1} . Para esto se selecciona la parte inferior de la celda (Flecha azul) y se arrastra hacia abajo para que automáticamente se obtengan los demás resultados.

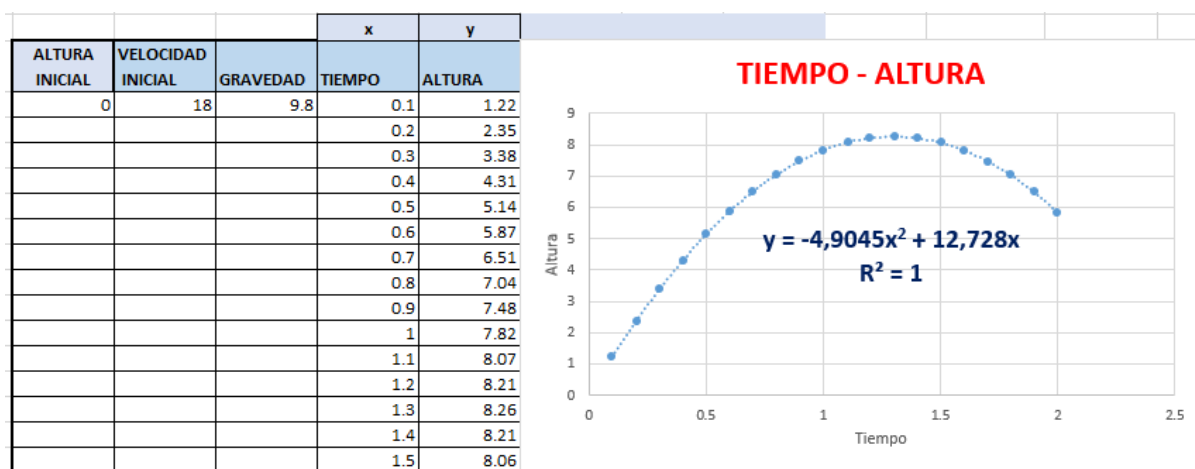
			x	y		
ALTURA INICIAL	VELOCIDAD INICIAL	GRAVEDAD	TIEMPO	ALTURA	PRIMERA DIFERENCIA	SEGUNDA DIFERENCIA
0	18	9.8	0.1	1.22		
			0.2	2.35	1.13	
			0.3	3.38	1.03	=F5-F4
			0.4	4.31	0.93	
			0.5	5.14	0.83	
			0.6	5.87	0.73	
			0.7	6.51	0.64	
			0.8	7.04	0.53	
			0.9	7.48	0.44	
			1	7.82	0.34	
			1.1	8.07	0.25	
			1.2	8.21	0.14	
			1.3	8.26	0.05	
			1.4	8.21	-0.05	
			1.5	8.06	-0.15	
			1.6	7.81	-0.25	
			1.7	7.46	-0.35	
			1.8	7.02	-0.44	
			1.9	6.48	-0.54	
			2	5.84	-0.64	



4. Se agrega otra columna a la derecha de tal manera que sea la diferencia entre $G6$ y $G5$; y G_n y G_{n-1} . Para esto se selecciona la parte inferior de la celda y se arrastra hacia abajo para que automáticamente se obtengan los demás resultados.

			x	y			
ALTURA INICIAL	VELOCIDAD INICIAL	GRAVEDAD	TIEMPO	ALTURA	PRIMERA DIFERENCIA	SEGUNDA DIFERENCIA	TERCERA DIFERENCIA
0	18	9.8	0.1	1.22			
			0.2	2.35	1.13		
			0.3	3.38	1.03	-0.10	
			0.4	4.31	0.93	-0.10	=G6-G5
			0.5	5.14	0.83	-0.10	
			0.6	5.87	0.73	-0.10	
			0.7	6.51	0.64	-0.09	
			0.8	7.04	0.53	-0.11	
			0.9	7.48	0.44	-0.09	
			1	7.82	0.34	-0.10	
			1.1	8.07	0.25	-0.09	
			1.2	8.21	0.14	-0.11	
			1.3	8.26	0.05	-0.09	
			1.4	8.21	-0.05	-0.10	
			1.5	8.06	-0.15	-0.10	
			1.6	7.81	-0.25	-0.10	
			1.7	7.46	-0.35	-0.10	
			1.8	7.02	-0.44	-0.09	
			1.9	6.48	-0.54	-0.10	
			2	5.84	-0.64	-0.10	

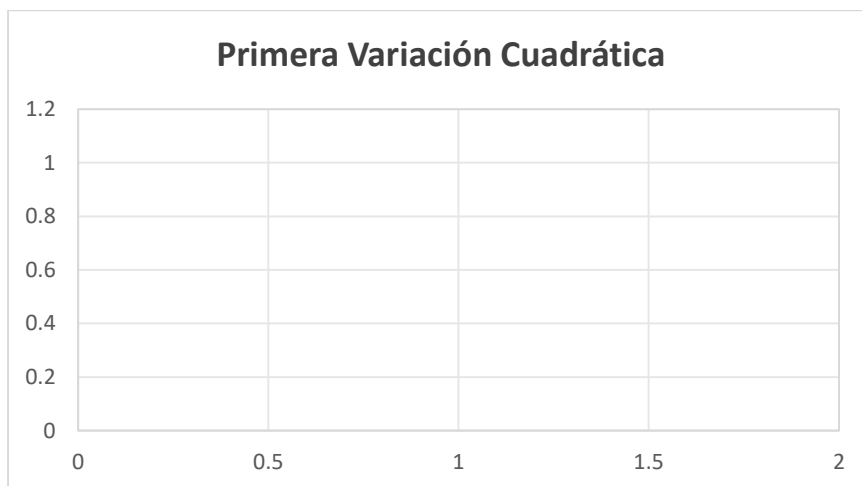
5. Se selecciona las tiempo y altura y se realiza el gráfico de dispersión.



6. Seleccionar las columnas tiempo y primera diferencia.

TIEMPO	PRIMERA DIFERENCIA
0.1	
0.2	
0.3	
0.4	
0.5	
0.6	
0.7	
0.8	
0.9	
1	
1.1	
1.2	
1.3	
1.4	
1.5	
1.6	
1.7	
1.8	
1.9	
2	

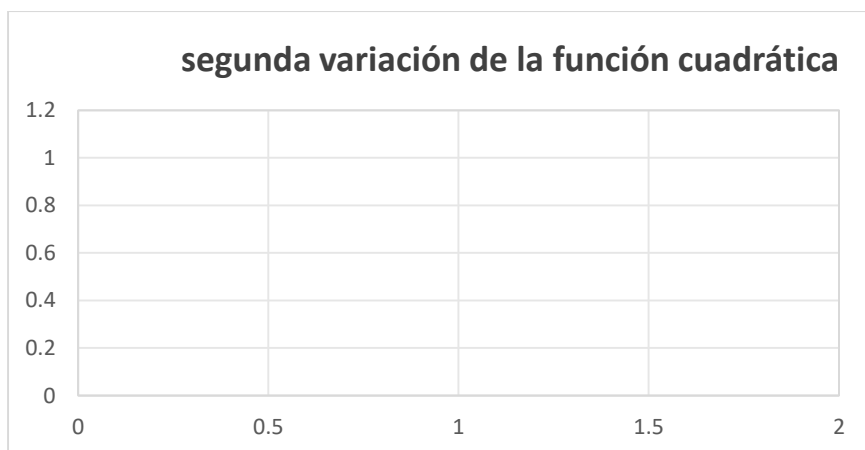
7. Hacer el gráfico de dispersión que corresponde a los datos del ítem 9, por último nómbrela como primera variación cuadrática.



8. Seleccionar las columnas tiempo y segunda diferencia.

TIEMPO	SEGUNDA DIFERENCIA
0.1	
0.2	
0.3	
0.4	
0.5	
0.6	
0.7	
0.8	
0.9	
1	
1.1	
1.2	
1.3	
1.4	
1.5	
1.6	
1.7	
1.8	
1.9	
2	

9. Hacer el gráfico de dispersión que corresponde a los datos del ítem 8, por último nómbrela segunda variación de la función cuadrática.



10. Para los experimentos simulados II, III, IV y V seguir los pasos del 1 al 9.
11. Escriba la expresión algebraica de la primera y segunda variación de los experimentos simulados I; II ;III ; IV y V.

EXPERIMENTO	PRIMERA VARIACIÓN	SEGUNDA VARIACIÓN
SIMULADO I		
SIMULADO II		

SIMULADO III		
SIMULADO IV		
SIMULADO V		

12. ¿Qué puede concluir de la primera y segunda variación de la función cuadrática?
