PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN A LA LUZ DE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS EN EL CURRÍCULO ESCOLAR

María Fernanda Ramos Beltrán

Nury Andrea Rodríguez Pardo

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA

BOGOTÁ D.C. 2018

PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN A LA LUZ DE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS EN EL CURRÍCULO ESCOLAR

María Fernanda Ramos Beltrán

Nury Andrea Rodríguez Pardo

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de Magíster en Docencia de la Matemática

MODALIDAD DEL TRABAJO: Asociada a un grupo de investigación. Historia de las Matemáticas – Educación Matemática (Grupo RE-MATE)

Director:

Harry Augusto Gómez Espinosa

Docente del Departamento de Matemáticas

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA

BOGOTÁ D.C. 2018

Dedicatoria

Principalmente, a mi mamá y mi hermana Nelly puesto que siempre me han apoyado a lo largo de mi formación profesional y me han enseñado a no rendirme frente a los obstáculos que se presenten en el camino. A mis hermanos Martha y Javier quienes me han mostrado que juntos somos más fuertes y que el amor de familia nos ayuda a superar las dificultades en nuestra vida.

María Fernanda Ramos Beltrán

Este trabajo está dedicado a mi familia quienes me han apoyado, con su amor y paciencia, a lo largo de mi formación profesional y a lo largo de mi vida.

Nury Andrea Rodríguez Pardo

Agradecimientos

Agradecemos principalmente a Dios por su bendición y dirección al permitirnos llegar a este punto en nuestra formación profesional. También al profesor Harry Gómez por su paciencia, dedicación y contribución en la formulación y ejecución de este proyecto; a cada uno de los profesores de la Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional por sus valiosos aportes a lo largo del desarrollo de este trabajo.

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ACTA DE VALORACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado ***Problemas de Optimización a la luz de la Historia de las Matemáticas en el currículo escolar***, presentado por las estudiantes:

María Fernanda Ramos Beltrán, Cód. 2017185019, CC. 1032458836
Nury Andrea Rodríguez Pardo, Cód. 2017185021, CC. 1073512506

como requisito parcial para optar al título de **Magister en Docencia de la Matemática**, analizado el proceso seguido por las estudiantes en la elaboración del trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigna la calificación de **Aprobada,** con 44 puntos.

Observaciones:

En constancia se firma a los 18 días del mes de febrero de 2019.

JURADOS

Director del Trabajo: Profesor: Harry A Gomez E.
HARRY AUGUSTO GÓMEZ (UPN)

Jurados:

Profesor: Orlando Aya C.
ORLANDO AYA CORREDOR (UPN)

Profesora: Nora Rojas
NORA YAMILE ROJAS (Escuela Nacional de Ingeniería)

"*Para todos los efectos, declaramos que el presente trabajo es original y de nuestra total autoría: en aquellos casos en los cuales hemos requerido del trabajo de otros autores o investigadores, hemos dado los respectivos créditos*".

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado en maestría de profundización
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Problemas de Optimización a la luz de la Historia de las Matemáticas en el currículo escolar
Autor(es)	Ramos Beltrán, María Fernanda; Rodríguez Pardo, Nury Andrea
Director	Gómez Espinosa, Harry Augusto
Publicación	Bogotá, D.C. Universidad Pedagógica Nacional, 2018. 277 p
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	OPTIMIZACIÓN; HISTORIA DE LA MATEMÁTICA; PROBLEMAS; TECNOLOGÍA; GEOGEBRA; VARIACIÓN

2. Descripción

Trabajo de grado de la modalidad de profundización, asociado al grupo de investigación Historia de las Matemáticas – Educación Matemática (Grupo RE-MATE) de la Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional, el cual surge a partir de observar la dificultad que tienen estudiantes de educación media de una institución educativa de Cota, Cundinamarca para abordar y solucionar problemas de optimización, como una de las aplicaciones de la derivada. Como posible solución a esta dificultad se propone una estrategia diferente para abordar problemas tomados de la Historia de las Matemáticas y adaptados para ser llevados al aula como actividades que promuevan el desarrollo del proceso de optimización en la educación básica secundaria y la educación media, en la que los estudiantes se puedan valer, no sólo de conceptos algebraicos, sino geométricos, utilizando herramientas tecnológicas (software GeoGebra), con el propósito de favorecer algunas competencias matemáticas.

3. Fuentes

Aldana, E. y Gallego, L. (2013). Análisis de la concepción de la actividad de optimizar, desde una ingeniería didáctica. En Gallego, Adriana P. (Ed.), *Revista Científica (pp. 225-228)*. Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/6630/1/Aldana2013Analisis.pdf

Alsina, C. (2010). Matemáticas para la ciudadanía. En Callejo, M.L y Goñi, J.M. (coords.) *Educación matemática y ciudadanía*, 89-102. Barcelona: Graó.

Arya, J. y Lardner, R. (2009). Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía. Quinta edición.

México: Pearson Educación.

Ávila, R., Ibarra, S. y Grijalva, A. (2010). El contexto y el significado de los objetos matemáticos. *Relime* 13(4-II): 337-354

Ávila, P., Ruiz, M., y Villa-Ochoa, J. (2013). Uso de GeoGebra como herramienta didáctica dentro del aula de matemáticas. En F. Córdoba, y J. Cardeño et al. (Eds.), Desarrollo y uso didáctico de GeoGebra. Conferencia Latinoamericana Colombia 2012 y XVII Encuentro Departamental de Matemáticas, 446-454. Medellín: Fondo Editorial ITM.

Banquela, E. y Redchuck, A. (2013). Optimización Matemática con R. Volumen I: Introducción al modelado y resolución de problemas. España: Bubok publishing S.L. Recuperado de https://cran.r-project.org/doc/contrib/Optimizacion_Matematica_con_R_Volumen_I.pdf

Barahona, F., Barrera, O., Hidalgo, B., & Vaca, B. (2015). GeoGebra para la enseñanza de la matemática y su incidencia en el rendimiento académico estudiantil. *Revista Tecnológica ESPOL*, 121-132.

Barbin, É. (1991). The experience of history in mathematics education: The Reading of original texts: how and why to introduce a historical perspective. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education*, 11(2), 12-13.

Barrera, E., Falcón, R., Ramírez, R. y Ríos, R. (2011). Presentación y resolución de problemas mediante GeoGebra. Unión. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 25, 161-174.

Bezout, E. (1764). *Cours de mathématique*. Avignon: Imp. H. Offray.

Camargo, L. (s.f.). *Estrategias cualitativas de investigación en Educación Matemática. Recursos para la captura de información y para el análisis*. Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional.

Chevallard, Y. (1998). *La transposición didáctica: Del Saber Sabio al Saber Enseñado*. AIQUE, Buenos Aires.

Collette, Y. y Siarry, P. (2002). Optimisation multiobjectif. [Versión Adobe Digital Reader].

Encinas, Á. y Ávila, R. (2012). La gestión metacognitiva en el proceso de resolución de problemas de optimización y su relación con la competencia del resolutor. En Flores, Rebeca (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 151-159). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.* Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/4169/1/EscalonaResoluci%C3%B3nALME2012.pdf

Erazo, J. (2016). Categorías de uso de la Historia de las Matemáticas en la educación en Matemáticas (tesis de maestría). Recuperada del Repositorio Universidad Pedagógica Nacional.

Ernest, P. (1998). The history of mathematics in the classroom. *Mathematics in School*, 27(4), 25-31.

Esteves, A. (2008). Evolução histórica dos problemas de optimização e o seu tratamento no Ensino

Secundário português nos séculos XX e XXI (tesis doctoral). Recuperada de https://gredos.usal.es/jspui/bitstream/10366/18419/1/DDMCE_Evoluao%20historica%20problemas%20optimizaao.pdf.

Fauvel, J. (1991). Using History in Mathematics Education. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education*, 11(2), 3-6.

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. Educational Studies in Mathematics, 82, pp. 97-124. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/eos/emergence_mathematical_objects.pdf.

Font, V. y Rubio, N. V. (2017). Procesos matemáticos en el enfoque ontosemiótico. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Tomado de https://www.researchgate.net/publication/314195166_Procesos_matematicos_en_el_enfoque_ontosemiotico

Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 22 (2/3), 237-284

González, P. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Revista SUMA*, 45, 17-28.

Guacaneme, A. (2016). *Potencial formativo de la historia de la teoría euclidiana de la proporción en la constitución del conocimiento del profesor de matemáticas.* (Tesis doctoral) Universidad del Valle, Colombia. Recuperada de http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/xmlui/handle/10893/10093

Lacasta, E., Malaspina, U., Pascual, J. R., Wilhelmi M. R. (2009). Análisis a priori de una situación de optimización en segundo de Educación Primaria. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII (pp. 259-271)*. Santander: SEIEM. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/1652/1/305_Lacasta2009Analisis_SEIEM13.pdf

L'Hôpital, G. (1988). *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes*. Paris: ACL – editions.

Lupiáñez, J. (2002). Reflexiones didácticas sobre la Historia de la Matemática. *Revista SUMA*, 40, 59-63.

Malaspina, U. (2002). Optimización matemática. En Crespo, Cecilia (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 43-48).* México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/6320/1/MalaspinaOptimizacionALME2002.pdf

Malaspina, U. (2008). Intuición y rigor en la resolución de problemas de optimización. Un análisis desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (tesis doctoral). Recuperado de http://irem.pucp.edu.pe/wp-content/uploads/2012/05/Tesis_Doctoral_Uldarico_Malaspina_Jurado.pdf

Marshall, G. L., & Rich, B. S. (2000). The role of history in a mathematics class. *Mathematics Teacher*, 93(8), 704-706.

Ministerio de Educación Nacional (1951). Decreto 0075 de enero 17 1951. Colombia. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-103400_archivo_pdf.pdf

Ministerio de Educación Nacional (1962). Decreto 0045 de enero 11 de 1962. Colombia. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-103679_archivo_pdf.pdf

Ministerio de Educación Nacional (1974). Decreto 080 de enero 22 de 1974. Colombia. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-104657_archivo_pdf.pdf

Ministerio de Educación Nacional (1975). Resolución 277 de 1975. Colombia.

Ministerio de Educación Nacional (1998). Lineamientos Curriculares en el área de Matemáticas. Colombia. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

Ministerio de Educación Nacional (2004). Estándares Básicos de Competencias Ciudadanas. Colombia. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-75768_archivo_pdf.pdf

Ministerio de Educación Nacional (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Colombia. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Ministerio de Educación Nacional (2017). Derechos Básicos de Aprendizaje Matemáticas. Colombia. http://www.santillana.com.co/www/pdf/dba_mat.pdf

Navarro, L., Robles, A., Ansaldo, J. y Castro, F. (2016). Secuencia didáctica apoyada en tecnología para la construcción del concepto de derivada en problemas de optimización. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, (46), 171- 187.

Niss, M (2003). Quantitative literacy and Mathematical Competencies. En NCED (Eds.), Quantitative Literacy: Why Numeracy Matters for Schools and Colleges (pp. 215-220). Recuperado de https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/QL/WhyNumeracyMatters.pdf

Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (2013). Enfoques estratégicos sobre las TICS en educación en América Latina y el Caribe. UNESCO Santiago.

Perkins, P. (1991). Using History to Enrich Mathematics Lessons in a Girls' School. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education*, 11(2), 9-10.

Real Academia Española [RAE] (2018). Optimizar. Edición Tricentenario. Rae.es. Recuperado de http://dle.rae.es/?id=R7YxPPp

Ramírez, R. (2005). Aproximación al concepto de transposición didáctica. Folios. Segunda época. Primer semestre de 2005. No. 21. Bogotá: UPN. pp. 33-45. Recuperado de https://doi.org/10.17227/01234870.21folios33.45

Rico, L. (2004). Evaluación de Competencias Matemáticas. Proyecto PISA/OCDE 2003. Actas del VIII Simposio de la SEIEM. Recuperado de http://ruc.udc.es/dspace/bitstream/handle/2183/11280/CC-75%20art%206.pdf?sequence=1

Rico, L. (2006). La competencia matemática en PISA. PNA, 1(2), 47-66. Recuperado de http://cimm.ucr.ac.cr/ciaem/articulos/universitario/conocimiento/La%C2%A0Competencia%C2%A0Matem%C3%A1tica%C2%A0en%C2%A0Pisa*Rico,%20Luis*competencia%20en%20PISA.pdf

Serret, J. (1879). *Cours de Calcul Différentiel et Intégral*. Paris: Gauthier Villars.

Sfard, A. (1991) On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics* 22: 1-36. Kluwer Academic Publisher.

Soares, J (2005). Optimização Matemática. [Versión Adobe Digital Reader]. Recuperado de http://www.mat.uc.pt/~jsoares/research/opti_2005_05_06.pdf.

Sorando, J. (2005). Matemáticas e Historia. *Revista SUMA*, 49(1), 125-137.

Stewart, J. (2007). Cálculo diferencial e integral. 2a. ed. México: Internacional Thomson Editores, S.A.

Sturm, J. (1884). *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*. Paris: Gauthier Villars.

Vasco, C. (2002). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. Congreso Internacional: Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas (8-10 May 2002). Bogotá, Colombia. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/10178/1/Vasco2002El.pdf

Vega, L. (1991). Introducción General. En (M. L. Puertas Castaños, Trad.). Elementos. Vol. 1. Madrid, España: Gredos.

Ver Eecke, P. (1933). Pappus D'alexandrie. La Collection Mathématique.

Villa, J. y Ruiz M. (2010). Pensamiento variacional: seres-humanos-con-GeoGebra en la visualización de nociones variacionales. Educação Matemática Pesquisa, 12(3). 514-528.

Wilson, P. y Chauvot, J. (2000). Who? How? What? A strategy for using history to teach mathematics. *Mathematics Teacher*, 93(8), 642-645.

4. Contenidos

Este trabajo se divide en cuatro grandes partes. En la primera, se presenta un constructo teórico sobre el proceso de optimización y se relaciona con las directrices educativas colombianas, el pensamiento variacional, la Historia de las Matemáticas, la Educación Matemática, el desarrollo de competencias matemáticas y la tecnología. En la segunda parte se describe la estrategia investigativa de este trabajo bajo un paradigma cualitativo descriptivo. Además, se presenta el estudio realizado de algunos problemas de optimización extraídos de la Historia de las Matemáticas. La tercera parte presenta las actividades propuestas para llevar al aula y el respectivo análisis de los resultados que se obtuvieron de su aplicación. Y finalmente, la cuarta sección se dedica a las conclusiones y consideraciones finales.

5. Metodología

El desarrollo metodológico de este trabajo se realiza bajo un paradigma cualitativo de tipo descriptivo, donde se propone detallar, caracterizar y evaluar una alternativa para la enseñanza de la optimización, analizando las respuestas dadas por estudiantes a unos determinados problemas, los cuales fueron extraídos de la Historia de las Matemáticas y adaptados para poder ser explorados usando tecnología en el aula, con el propósito de promover el desarrollo de competencias matemáticas y del proceso de optimización en la educación básica secundaria. Adicionalmente, se realizan las siguientes cinco fases que fueran establecidas como la ruta metodológica: establecimiento del marco de referencia, identificación de problemas, reconocimiento de las acciones básicas, transposición didáctica e implementación y análisis de los resultados.

6. Conclusiones

Los problemas de la Historia de las Matemáticas que permitieron incluir el proceso de optimización en el aula sin necesidad de un desarrollo algebraico, son aquellos problemas cuya solución se puede abordar con un análisis desde la geometría plana, pues para solucionar los demás problemas analizados los estudiantes no cuentan con las suficientes bases matemáticas.

El uso del software GeoGebra fue pertinente para desarrollar las actividades, permitiendo que los estudiantes contaran con herramientas más detalladas para realizar la exploración del applet y buscar una posible solución para cada pregunta. Sin embargo, al realizar la aplicación de las actividades propuestas se reflexionó sobre el uso de la tecnología, aspectos positivos y negativos, puesto que si no se es consciente de las deficiencias que trae consigo, en este caso el software GeoGebra, se pueden cometer errores conceptuales al no tener claro que dicho software maneja un sistema axiomático diferente al que se imparte en el aula.

Durante el desarrollo de la secuencia de actividades en el aula se evidenció que se potenciaron constantemente algunas competencias matemáticas y se reforzaron algunos conocimientos matemáticos que los estudiantes ya habían visto en cursos anteriores. Además, durante la implementación en el aula de los problemas seleccionados y adaptados, se pudo evidenciar que era necesario que los estudiantes realizaran las cuatro acciones básicas para poder concluir lo que se esperaba con cada una de las actividades, de acuerdo con las demostraciones presentadas por los matemáticos.

Respecto a las competencias matemáticas. la exploración de los applets y la construcción de algunos de ellos por parte de los estudiantes permitió que se desarrollara el proceso de optimización y, a su vez, se evidenció que se potenciaron constantemente algunas de dichas competencias durante el desarrollo de la secuencia de actividades como:

- Razonar y argumentar matemáticamente, debido a que siempre se les hacía argumentar, en un contexto geométrico, todas sus conclusiones e inferencias respecto a los problemas abordados.
- Manejo de símbolos y formalismo matemáticos en el momento de responder las preguntas que se les hizo con base en los problemas.
- Comunicar, tanto escrita como oralmente sus ideas y métodos de resolución de las actividades propuestas.
- Usar de manera adecuada las herramientas tecnológicas, en este caso los applets para comprender y determinar la existencia o no existencia de los máximos y los mínimos en las diferentes actividades.

Elaborado por:	Ramos Beltrán, María Fernanda; Rodríguez Pardo, Nury Andrea
Revisado por:	Gómez Espinosa, Harry Augusto

Fecha de elaboración del Resumen:	05	12	2018

Contenido

INTRODUCCIÓN ... 1

JUSTIFICACIÓN ... 2

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA ... 4

OBJETIVOS ... 5

Objetivo general ... 5

Objetivos específicos ... 6

ANTECEDENTES ... 7

OPTIMIZACIÓN ... 9

Proceso matemático ... 9

Objeto matemático ... 10

La Optimización en las directrices educativas en Colombia ... 12

Optimización y pensamiento variacional ... 19

Historia de las Matemáticas - Optimización ... 21

Historia de las Matemáticas y Educación Matemática ... 22

La Optimización y el desarrollo de competencias ... 25

Optimización y Tecnología ... 28

METODOLOGÍA ... 30

Fase 1: Establecimiento del marco de referencia ... 30

Fase 2: Identificación de problemas ... 30

Fase 3: Reconocimiento de las acciones básicas ... 30

Fase 4: Transposición didáctica ... 31

Fase 5: Implementación y análisis de las actividades ... 32

Estudio de los problemas ... 33

Elementos de Euclides ... 35

La Collection Mathematique de Pappus d'Alexandrie ... 40

Cours de Mathématique de Bézout ... 44

Cours D'Analyse de L'École polytechnique de Sturm ... 48

DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS ... 50

Selección de los problemas ... 50

Actividad Piloto ... 51

PROPUESTA DE ACTIVIDADES "OPTIMIZACIÓN E HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS" ... 53

Sesión 1 (Euclides de Alejandría) 55
Sesión 2 (Pappus de Alejandría) 73
Sesión 3 (Bezout, Sturm, Pappus) 82
Sesión 4 (Euclides, Pappus) 94
CONCLUSIONES 100
REFERENCIAS 102
ANEXOS 108
ANEXO 1: Estudio de los problemas 108
ANEXO 2: Actividades propuestas en el aula 141
ANEXO 3: Applets 161
ANEXO 4: Resultados de los estudiantes 163

LISTA DE TABLAS

Tabla 1: Acciones básicas ______ *21*
Tabla 2: Problemas analizados ______ *51*
Tabla 3: AB1 y 2, Sesión 1, Actividad 1 ______ *59*
Tabla 4: AB3 y 4, Sesión 1, Actividad 1 ______ *61*
Tabla 5: AB1 y 2, Sesión 1, Actividad 2 ______ *65*
Tabla 6: AB3 y 4, Sesión 1, Actividad 2 ______ *68*
Tabla 7: AB1 y 2, Sesión 1, Actividad 3 ______ *71*
Tabla 8: AB3 y 4, Sesión 1, Actividad 3 ______ *73*
Tabla 9: AB1 y 2, Sesión 2, Actividad 1 ______ *78*
Tabla 10: AB3 y 4, Sesión 2, Actividad 1 ______ *82*
Tabla 11: AB1 y 2 Sesión 3 Actividad 1 ______ *84*
Tabla 12: AB 3 y 4, Sesión 3, Actividad 1 ______ *86*
Tabla 13: AB1 y 2, Sesión 3, Actividad 2 ______ *89*
Tabla 14: AB3 y 4, Sesión 3, Actividad 2 ______ *90*
Tabla 15: AB1 y 2, Sesión 3, Actividad 3 ______ *92*
Tabla 16: AB3 y 4, Sesión 3, Actividad 3 ______ *93*
Tabla 17: AB1 y 2, Sesión 4, Actividad 1 ______ *95*
Tabla 18: AB3 y 4, Sesión 4, Actividad 1 ______ *96*
Tabla 19: AB1 y 2, Sesión 4, Actividad 2 ______ *98*
Tabla 20: AB3 y 4, Sesión 4, Actividad 2 ______ *98*

INTRODUCCIÓN

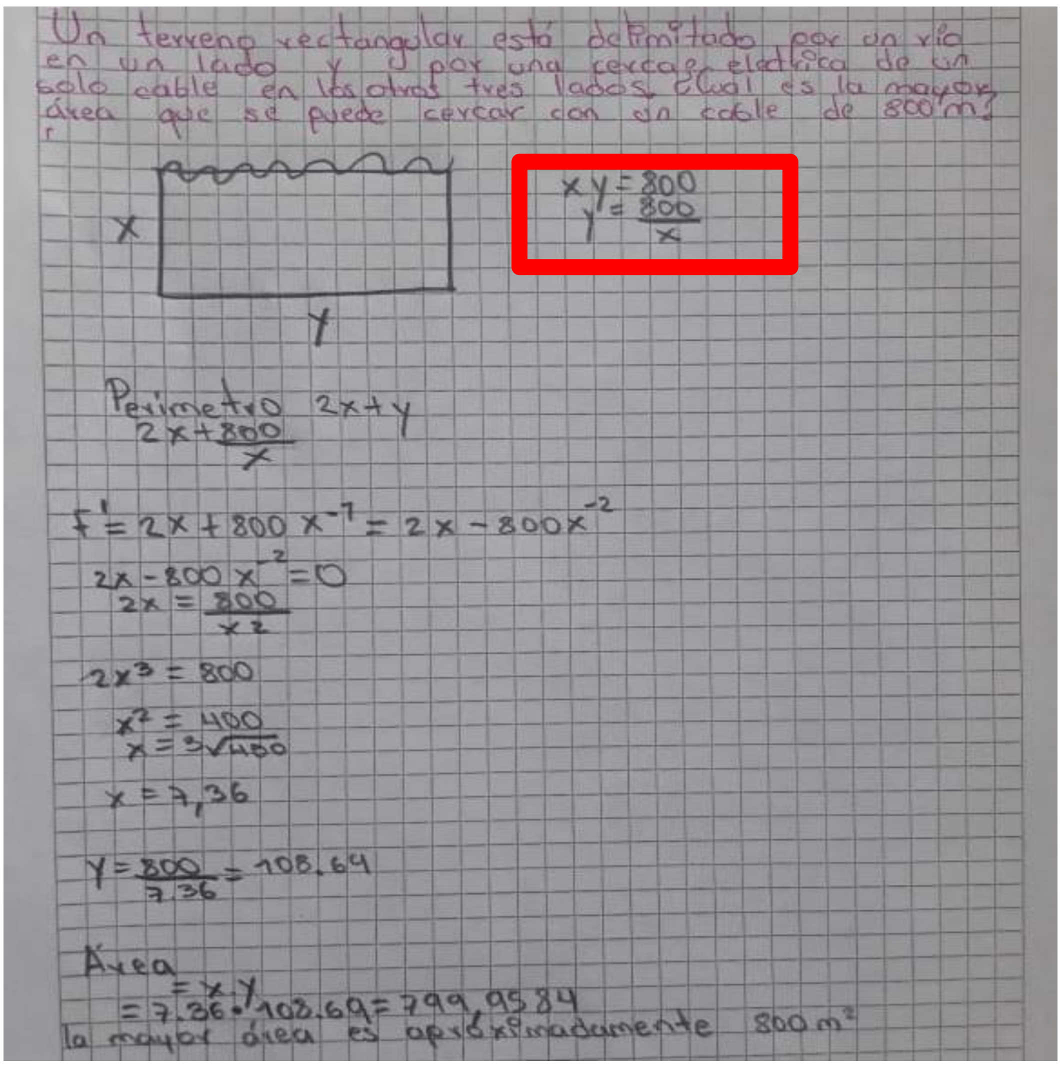
En el estudio de la Historia de las Matemáticas (HM) se pueden reconocer diferentes autores que han trabajado y construido proposiciones y problemas alrededor de la optimización, la mayoría de ellos con distinto grado de dificultad y en diferentes contextos, tanto matemáticos como reales. En el campo de la educación matemática, específicamente en las prácticas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, no ha sucedido de la misma manera, debido a que la optimización suele verse explícitamente bajo una visión netamente algebraica en la asignatura de cálculo, como una aplicación de la derivada al determinar los valores extremos de una función.

Al observar esto, surge una inquietud por comprobar de qué manera es posible trabajar problemas y actividades que favorezcan el desarrollo del proceso de optimización en grados y asignaturas anteriores a los cursos de cálculo, de tal forma que permitan el afianzamiento de conocimientos previos y la adquisición de nuevos.

Este trabajo se divide en cuatro grandes partes. La primera parte titulada Optimización, en la que se presenta un constructo teórico sobre este proceso y que además relaciona la optimización con las directrices educativas colombianas, el pensamiento variacional, la Historia de las Matemáticas, la Educación Matemática, el desarrollo de competencias matemáticas y la tecnología. En la segunda parte denominada Metodología, se describe la estrategia investigativa emergente de este trabajo basado en el paradigma cualitativo descriptivo, teniendo en cuenta elementos de transposición didáctica y experimento de enseñanza. Además, se presenta una interpretación de las soluciones dadas a algunos problemas de optimización tomados de la Historia de las Matemáticas. La tercera parte titulada Descripción y análisis de los resultados obtenidos, presenta las actividades propuestas para llevar al aula y el respectivo análisis de los resultados que se obtuvieron de su aplicación. Y finalmente, se encuentra la cuarta sección dedicada a las conclusiones y consideraciones finales.

JUSTIFICACIÓN

En el ejercicio profesional docente de las autoras del presente trabajo, se ha podido observar que a los estudiantes de cursos de cálculo se les dificulta abordar y solucionar problemas de optimización. Esto sucede principalmente en el momento de establecer las relaciones existentes entre las variables implícitas del problema. Además, a los estudiantes se les complica entender e interpretar que, en este tipo de problemas, se está en la búsqueda de aquel valor de una de las variables que hace máximo o mínimo el valor de la otra variable. A continuación, se puede observar una imagen en la cual los estudiantes presentan una dificultad para determinar cuál es la función a optimizar, a pesar de que identifican las variables inmersas en la situación.



Un terreno rectangular está delimitado por un río en un lado y por una cerca eléctrica de un solo cable en los otros tres lados ¿Cuál es la mayor área que se puede cercar con un cable de 800 m?

x y

$xy = 800$

$y = \frac{800}{x}$

Perimetro $2x + y$

$2x + \frac{800}{x}$

$f' = 2x + 800x^{-1} = 2x - 800x^{-2}$

$2x - 800x^{-2} = 0$

$2x = \frac{800}{x2}$

$2x^3 = 800$

$x^2 = 400$

$x = \sqrt[3]{400}$

$x = 7{,}36$

$y = \frac{800}{7.36} = 108.69$

Área $= x \cdot y$

$= 7.36 \cdot 108.69 = 799{,}9584$

la mayor área es aproximadamente $800\ m^2$

Imagen 1: Evidencia de la problemática

Es por esto que surge un interés particular en promover una estrategia diferente para abordar este tipo de problemas desde los primeros grados de la educación básica secundaria, en la que los estudiantes se puedan valer, no sólo de conceptos algebraicos, sino geométricos o numéricos con ayuda de recursos tecnológicos. Vasco (2002) afirma:

> El pensamiento variacional puede describirse aproximadamente como una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad. (p.63)

Por lo que se considera que el proceso de optimización apoya dicho pensamiento, puesto que los problemas asociados a este proceso permiten el dinamismo en la estructura mental de los estudiantes, en los que deben determinar la relación de covariación existente entre las variables involucradas en el problema.

Por lo anterior, se considera que es pertinente potenciar y desarrollar el proceso de optimización en la educación básica secundaria y media. Para esto, en la HM se puede encontrar algunos ejemplos de problemas de optimización, no resueltos de manera algebraica, que brindan herramientas conceptuales y didácticas para potenciar la optimización como un proceso en la escuela. Según lo planteado por Erazo (2016), la HM permite realizar el estudio de un determinado objeto o proceso matemático, abordando cuestiones relacionadas, entre otras cosas, con procesos y conceptos asociados, recursos y formas de resolución. Para el caso de este trabajo, se reconoce la HM como un recurso de estudio de problemas de optimización y los procesos asociados a su solución.

De acuerdo con Navarro, Robles, Ansaldo y Castro (2016) el proceso de optimización también puede ser introducido gracias a la potencialidad que tiene la tecnología, puntualmente al uso del software GeoGebra. Al disponer de un programa como GeoGebra es posible potenciar el desarrollo de las conceptualizaciones sugeridas por diferentes autores en la solución o demostración a problemas de optimización tomados de la HM, pues facilita recrear un ambiente dinámico que permite la visualización y representación de las relaciones de covariación mencionadas (Ávila et al., 2013). En este sentido, GeoGebra permite que los estudiantes puedan explorar, identificar variables, establecer relaciones, proponer y verificar conjeturas; con este software se pueden identificar las relaciones y cambios entre los elementos de la construcción correspondiente a un problema de optimización tomado de la HM.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Este proyecto surge a partir de observar la dificultad que tienen los estudiantes de grado décimo de una institución educativa de Cota, Cundinamarca para abordar y solucionar problemas de optimización, en un curso de cálculo, como una de las aplicaciones de la derivada. Dicha dificultad se presenta en el momento en que los estudiantes intentan identificar, relacionar y comparar las variables implícitas en el problema.

La realidad expuesta en este caso tiene al menos dos antecedentes que deberían ser de especial atención para la configuración y desarrollo del currículo en matemáticas. Por un lado, los problemas de optimización surgen frecuentemente en diferentes situaciones de la cotidianidad; el ser humano siempre está en la búsqueda de construir algo con la menor cantidad de material posible, obtener la máxima ganancia en un negocio, ir a un determinado lugar en el menor tiempo posible, etc. Por otro lado, en un desafortunado contraste, tradicionalmente los problemas de optimización son abordados en un corto período escolar en el cual no se alcanzan a estudiar detenidamente y en profundidad, a pesar que en algunos casos se evidencia un gusto e interés en los estudiantes por trabajarlos.

Con el fin de aportar a la solución de la problemática, se decidió realizar una búsqueda de este proceso en diferentes directrices curriculares[1] colombianas. En esta revisión se evidenció que en el currículo de matemáticas no se reconoce a la optimización como un proceso necesario a ser trabajado desde la educación básica, mientras que su inclusión se limita para la educación media, debido a que se asocia el concepto exclusivamente a las aplicaciones de la derivada. Esta realidad repercute en que la optimización no sea comprendida como un proceso relacionado a situaciones cotidianas, no se desarrolle desde la educación básica y que se dificulte su comprensión, principalmente, debido a la tecnicidad con la cual se asume en la educación media y al escaso tiempo que se asigna para su estudio.

En consecuencia, se reconoce la necesidad de incluir en el currículo escolar la optimización como

[1] Una revisión inicial se realizó durante la formulación del ante proyecto para esta propuesta; posteriormente, se profundizó la indagación y estudio de dichas directrices, atendiendo a la necesidad de tener como referente los estándares curriculares en Colombia al momento de validar la pertinencia de los problemas que se seleccionaron y las actividades que se diseñaron. Esta revisión se presenta en uno de los apartados del siguiente capítulo.

un proceso a desarrollar, ya sea desde las directrices institucionales o desde los microcurrículos que gestiona cada profesor en su aula; asociando este proceso a la resolución de problemas particulares que surgen en distintas ramas de las matemáticas. De esta manera, se estima que es posible prevenir o afrontar, desde el desarrollo escolar temprano y medio, algunas dificultades que los estudiantes encuentran al intentar resolver este tipo de problemas durante los cursos finales de la educación básica y media, así como profundizar en estrategias para abordarlos.

En la necesidad de reconocer diferentes estrategias para la enseñanza de la optimización en la educación básica y media, la HM se identifica como un elemento que puede favorecer dicha enseñanza e inclusión, no solo como una base documental, sino como fuente de herramientas didácticas y conceptuales para potenciar la optimización como un proceso en la escuela. De manera puntual, se ha encontrado que en trabajos antecedentes como los de Guacaneme (2016) y Erazo (2016) en los que se reporta que la HM brinda la posibilidad de encontrar problemas matemáticos que pueden ser abordados en el aula. De acuerdo con esto y con el fin de favorecer el uso de esta estrategia de trabajo para el desarrollo de la optimización en la escuela, surge la necesidad de indagar sobre ***¿Qué problemas extraídos de la Historia de las Matemáticas permiten incluir en el aula el desarrollo del proceso de optimización, favoreciendo el fortalecimiento de competencias matemáticas?*** A la que se pretende dar respuesta reconociendo algunos problemas de optimización en la historia, estudiando su proceso de solución mediante su reconstrucción a la luz de herramientas conceptuales y tecnológicas actuales, analizando su pertinencia en función del currículo escolar colombiano y generando una propuesta de actividades para la implementación de estos problemas en la educación básica secundaria y media, en donde se logre potenciar el desarrollo de procesos matemáticos asociados a la optimización.

OBJETIVOS

Objetivo general

Determinar qué problemas extraídos de la Historia de las Matemáticas y adaptados al currículo escolar, permiten potenciar la optimización como un proceso para el desarrollo de algunas competencias matemáticas en la educación básica secundaria y media.

Objetivos específicos

1. A partir de fuentes históricas, reconstruir e interpretar el proceso de solución de problemas matemáticos asociados al proceso de optimización y seleccionar algunos problemas pertinentes para su uso en el aula.
2. Diseñar una propuesta de actividades para el uso de los problemas de optimización en la educación básica y media.
3. Analizar la pertinencia de los problemas de optimización y de las actividades propuestas en función del desarrollo de procesos matemáticos asociados a la optimización.

ANTECEDENTES

Al realizar una búsqueda de autores que hacen referencia a la inclusión de la optimización en el aula, se evidenció que son pocos los trabajos que se han realizado con estudiantes de la educación básica primaria y secundaria. A continuación, se presenta una breve descripción de algunos de estos.

Uno de los investigadores que ha promovido la inclusión del proceso de optimización desde los primeros grados escolares es Uldarico Malaspina (2002), quien afirma que la optimización puede desarrollarse a partir de la visualización y la perspectiva intuitiva para fortalecer la transición entre las matemáticas elementales y las matemáticas avanzadas. Lacasta, Malaspina, Pascual y Wilhelmi (2009) presentan y analizan una propuesta para introducir problemas de optimización en un contexto adecuado para un curso de segundo de primaria, utilizando una metodología de transposición didáctica. Los problemas tenían como propósito favorecer el tránsito del número natural a la medida, produciendo conocimiento sobre la forma en la que los problemas de optimización se construyen y se comunican en una edad infantil.

Además, Malaspina (2008) hace su tesis doctoral enfocada en realizar un aporte teórico sobre la "intuición optimizadora" en el marco del enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática, en la que hace una propuesta para la inclusión de problemas de optimización desde la educación básica, de modo que en la niñez se estimule una intuición optimizadora sin descuidar el rigor, como parte de una formación científica integral; esto le aporta al proyecto en la forma de ver y abordar las situaciones problema que se llevan al aula en la educación secundaria, sin que pierdan el potencial matemático e histórico de fondo.

Por otra parte, Elisa Esteves (2008) realiza su tesis doctoral con base en dos grandes aspectos; el primero de ellos, un análisis de libros históricos a través del cual puede identificar los tipos de problemas de optimización presentes en estas obras y la forma en que fueron resueltos; el segundo aspecto, un análisis de libros escolares de matemáticas que contemplan el estudio de la derivada y de manuales educativos oficiales de Portugal en los siglos XX y XXI, identificando de esta manera cómo surgen los problemas de optimización y cómo fueron abordados en Portugal. Ella al final de su trabajo doctoral plantea algunas sugerencias para futuras investigaciones, de las cuales se resalta la siguiente: "Desarrollar investigaciones semejantes a nuestra investigación para otro tipo de cuestiones matemáticas" (Esteves, 2008, p.285); esta da un sustento teórico para, a partir del análisis histórico-matemático que ella realiza, hacer una profundización de dichas situaciones y determinar cuáles de ellas son potentes para ser abordadas o adaptadas en la educación escolar, fomentando el desarrollo de la optimización como un proceso en el aula.

Asimismo, Encinas y Ávila (2012) en su ponencia para el Comité Latinoamericano de Matemática Educativa relatan cómo el uso de la tecnología permite que se aborden los problemas de optimización sin el uso de límites ni derivadas. Es de resaltar que su investigación fue realizada con 10 estudiantes universitarios considerados exitosos por sus profesores en un curso de cálculo. Uno de los resultados que arrojó esta investigación fue que estos estudiantes de ingeniería mostraron un desempeño bajo en los procesos de modelar, planear, supervisar, regular y verificar cuando no tienen acompañamiento del profesor. Además, se observó que, en la ejercitación de procedimientos algebraicos, los estudiantes se desenvolvieron de una mejor manera.

En el artículo de Aldana y Gallego (2013) se muestra cómo algunos estudiantes universitarios presentan dificultades para resolver problemas de optimización en contextos específicos que no sean de tipo algorítmico, porque la definición formal que ellos tienen presente de optimización no permite que comprendan de una manera significativa.

Se puede ver en dos de los trabajos mencionados, que en el proceso de enseñanza de la optimización se está favoreciendo la ejercitación algorítmica, donde no se da relevancia a los contextos en donde el proceso surge, ni a las competencias que se pueden potenciar mediante la resolución de problemas de este tipo. Además, en los proyectos indagados se identificó que la mayoría de ellos se desarrollan con estudiantes de los últimos grados escolares o con estudiantes universitarios en cursos de cálculo.

OPTIMIZACIÓN

Inicialmente se realiza una indagación sobre el término optimización, encontrando que *optimizar* está formada por las raíces latinas “optimus” (lo más bueno) e “izar*e”* (convertir en). Por lo que optimizar, según la Real Academia Española (RAE) significa buscar la mejor manera de realizar una actividad.

Al hacer la búsqueda de la definición de optimización, no se encontraron autores que la definan de manera explícita. Sin embargo, existen trabajos como el de Arya y Lardner (2009), quienes en su libro de Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía dedican un capítulo para el estudio de conceptos y problemas, proponiendo algunos relacionados con la optimización y el bosquejo de curvas. En la sección denominada Máximos y mínimos enuncian que: “El precio óptimo (o mejor precio) se obtiene por medio de un proceso llamado maximización u optimización de la función de utilidad” (p.535). Se observa que estos autores aluden a la optimización como un proceso. De esta manera surge la pregunta ¿la optimización es un proceso o un objeto matemático? Atender esta inquietud resulta fundamental para el desarrollo de esta propuesta puesto que de la acepción de optimización y la naturaleza con la que se identifique dependerá la selección de los problemas matemáticos en la Historia, así como el análisis de la pertinencia de dichos problemas y de las actividades propuestas en el aula para su desarrollo. Para resolver la inquietud plateada, conviene clarificar lo que se comprende en esta propuesta como un proceso y un objeto matemático.

Proceso matemático

De acuerdo con la Real Academia de la Lengua Española [RAE] (2018), un proceso se define como “conjunto de las fases sucesivas de un fenómeno natural o de una operación artificial.”. Además, Font y Rubio (2017) afirman que las investigaciones no se han preocupado por desarrollar un marco teórico general sobre procesos matemáticos, sino que se han dedicado a realizar otro tipo de investigaciones, es por esto que ellos proponen la siguiente definición de proceso matemático en el marco del enfoque ontosemiótico:

> “se considera que un proceso matemático es lo que podemos inferir que ha causado una cierta respuesta a una demanda dada. Es una secuencia de acciones que es activada o desarrollada, durante un cierto tiempo, para conseguir un objetivo, generalmente una respuesta (salida) ante la propuesta de una tarea matemática (entrada)” (p.2)

Del mismo modo, Sfard (1991) menciona que “interpretar una noción como un proceso implica considerarla como una entidad potencial más que como entidad real, la cual llega a existir bajo el cumplimiento de una secuencia de acciones”[2].

De acuerdo con las definiciones de la RAE, Font y Sfard, es posible considerar la optimización matemática como un proceso matemático, porque al solucionar problemas, en contextos tanto matemáticos como reales, siempre se está trabajando una secuencia de pasos o acciones con el fin de obtener un resultado, que, en este caso, es determinar cuál es el óptimo de una determinada situación.

Objeto matemático

Los objetos matemáticos dependen del idioma y la cultura (Font, Godino y Gallardo, 2013), debido a que emergen de un sistema de prácticas humanas, construidas progresivamente, dentro de contextos, comunidades, culturas o instituciones particulares y mediados por herramientas lingüísticas que pueden ser dotados por diferentes significados a partir de la actividad reflexiva. Cabe señalar que para Godino (2002) un objeto matemático es todo lo que puede ser indicado, señalado o de lo cual se puede hacer referencia, cuando se hace, comunica o aprende matemáticas. Asimismo, Ávila, Ibarra y Grijalva (2010), conciben un objeto matemático como herramientas conceptuales que surgen y se desarrollan a través de su uso. Además, para Sfard (1991) un objeto significa poder hacer referencia a él como si fuera una cosa real, reconocer la idea y manipularla como una totalidad.

De lo anterior, se concluye que un objeto matemático es un ente del que se puede hacer referencia y que se puede manipular como algo real cuando se realiza una actividad matemática. Por lo tanto, la optimización no es un objeto matemático, debido a que no es posible usarla como si fuera algo real, puesto que implica una secuencia de pasos para encontrar la solución a un determinado problema.

Retomando la construcción teórica de la optimización, en la cual se reconoce que la mayoría de los autores que trabajan sobre optimización definen los **Problemas de Optimización.** En primer lugar, Pinto Carvalho (2003) citado por Malaspina (2008) hace referencia a la optimización como “los tipos de problemas que involucran la elección de la mejor opción entre un conjunto de

[2] Traducido de Sfard, A. (1991) On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. (p. 4)

alternativas"[3], donde se hace referencia a la necesidad de acudir a una función que debe ser maximizada o minimizada para dar solución a una determinada situación. En segundo lugar, Soares (2005) afirma que:

> "La optimización (matemática), también conocida como programación matemática, es un área de matemáticas que ha tenido un crecimiento explosivo a pesar de poseer una historia relativamente reciente. Básicamente, esta área se refiere a la caracterización y demanda de mínimos, o máximos, de una cierta función en un determinado conjunto, generalmente definido por ecuaciones e inecuaciones algebraicas"[4]

Refiriéndose a la optimización como la caracterización de puntos mínimos y máximos de una función. En tercer lugar, Stewart (2007) en su libro Cálculo diferencial e integral dedica una sección titulada Problemas de optimización, para explorar y proponer diferentes situaciones donde menciona que:

> "Los métodos para hallar valores extremos que hemos aprendido en este capítulo tienen aplicaciones prácticas en muchas áreas de la vida. Una persona de negocios quiere minimizar los costos y maximizar las utilidades. El principio de Fermat, en óptica, afirma que la luz sigue la trayectoria que le toma menos tiempo. En esta sección y en la siguiente resolveremos problemas como los de maximizar áreas, volúmenes y utilidades, y minimizar distancias, tiempos y costos". (p. 306)

En esta descripción se puede observar que establece una relación directa entre el concepto de optimización y la acción de maximizar o minimizar una función. En cuarto lugar, según Collete y Siarry (2002) un problema de optimización se define como:

> "la búsqueda del mínimo o máximo (del óptimo) de una función dada. También podemos encontrar problemas de optimización para los cuales las variables de la función a optimizar están obligadas a evolucionar en una cierta parte del espacio de búsqueda. En este caso, hay una forma particular de lo que se llama un problema de optimización de restricciones."[5]

En esta definición centran la atención en la búsqueda del mínimo o máximo de una determinada función.

---

[3] Malaspina, U. (2008). *Intuición y rigor en la resolución de problemas de optimización. Un análisis desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática.* (p.17). Traducción libre realizada por María Fernanda Ramos y Nury Andrea Rodríguez en el marco del desarrollo del trabajo de grado

[4] Traducido de Soares, J (2005). Optimização Matemática. (p.1)

[5] Traducido de Collette, Y. y Siarry, P. (2002). Optimisation multiobjectif. (p.15)

Teniendo en cuenta las diferentes definiciones encontradas en la literatura y el análisis realizado respecto a los procesos y los objetos matemáticos, para este trabajo se define la optimización como un proceso que implica la búsqueda de la solución de un problema relacionado con maximizar o minimizar el valor de uno de los elementos que presentan una variación o cambio en una situación en contextos matemáticos o reales. Para esa búsqueda es conveniente que los problemas se presenten, no sólo de manera algebraica (funciones, ecuaciones e inecuaciones), sino de manera geométrica (estática o dinámica) o numérica (estimación o tanteo).

La Optimización en las directrices educativas en Colombia

Si bien, en Colombia no hay un único currículo que deba ser atendido por todas las instituciones educativas, existen los Lineamientos y Estándares Curriculares emanados por el Ministerio de Educación Nacional (MEN), además de los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA); los cuales deben orientar las prácticas educativas y sirven como punto de referencia para la construcción de los currículos en escuelas y colegios.

En una revisión preliminar a este trabajo, se encontró una poca inclusión del proceso de optimización en las políticas educativas y en consecuencia en las prácticas de enseñanza y aprendizaje. Esta revisión se profundizó con el fin de identificar algunas directrices asociadas a dicho proceso y de esta manera, contar con un marco de referencia que permita identificar algunos momentos en el currículo en los cuales es posible desarrollar procesos asociados a la optimización. Tras realizar esta búsqueda de manera cronológica, se encontraron las siguientes directrices establecidas por el MEN:

1. Decreto 0075 de 1951, en el cual, se adopta el Plan de Estudios para la enseñanza secundaria y se dictan otras disposiciones. Se describe la intensidad horaria de cada una de las materias que se deben orientar en cada grado escolar.

AÑO SEXTO

I- Para bachillerato (todos):		
Física	4	
Química	4	
Filosofía	4	
Castellano Superior	4	
Literatura Colombiana	2	
Historia de Colombia (curso superior)	4	
Inglés	4	
	26	26
Los alumnos que van para Derecho, Filología o Filosofía y Letras, cursarán 4 horas semanales de latín	4	
II- Para intensificación de materias, consulta de bibliotecas, Estudio organizado, etc.	5	5
	35	35

Figura 1. Plan de estudios sexto año. Tomado de MEN (1951)

Es de resaltar que en sexto año de bachillerato (grado once) no se tiene en cuenta el área de matemáticas, a pesar de que si está establecida para los grados anteriores.

2. Decreto 45 de 1962, por el cual se establece el ciclo básico de educación media, se determina el plan de estudios para el bachillerato y se fijan el calendario y las normas para evaluar el trabajo escolar.

1º y 2º Cursos:	Aritmética y nociones de Geometría.
3º y 4º Cursos:	Álgebra y Geometría.
5º Cursos:	Trigonometría y elementos de Geometría Analítica.
6º Cursos:	Iniciativa al análisis matemático.

Figura 2. Plan de estudios bachillerato. Tomado de MEN (1962)

En este decreto no se menciona qué temáticas se deben abordar en cada asignatura, solamente se establece las áreas de las matemáticas que se deben profundizar en cada uno de los cursos.

3. Decreto 080 de 1974, mediante el cual se deroga el Decreto 045 de 1962 y se establecen disposiciones para la Educación Media (básica secundaria y media), sus propósitos y un plan mínimo fundamental de educación.

Areas Asignaturas	Grados (Horas – clase) I	II	III	IV	V	VI
Ciencias Naturales	3	3	3	3		
Química					3	3
Física					3	3
Matemáticas	5	5	5	5	3	3
Educación Física	2	2	2	2	2	2
Educación Estética	2	2	2	2	2	2
Vocacionales y Técnicas	4	4	4	4	5	5
Intensificaciones (Optativas)	5	5	5	4	4	4
	35	35	35	35	35	35

Figura 3. Plan mínimo fundamental para la Educación Media. Tomado MEN (1974)

En este plan se puede ver como las matemáticas tienen una intensidad horaria importante en todos grados, aunque no se hacen explícitas las temáticas a trabajar.

4. Resolución 277 de 1975, en la cual se adopta un programa de estudio en la educación media, para las áreas de matemáticas, estudios sociales, idiomas, ciencias, educación estética y educación física.

Unidad Nº 4 - Cálculo Diferencial

4.1. Objetivos Específicos:

4.1.1. Que el alumno se capacite en el estudio del Cálculo Diferencial, para abordar problemas en las diferentes ramas de la Ciencia

4.1.2. Que desarrolle la capacidad de abstracción y razonamiento lógico

4.1.3. Que interprete los principios fundamentales del Análisis

4.1.4. Que se prepare adecuadamente para el estudio superior de los problemas científicos y técnicos

4.2. Contenido:

4.2.1. Introducción histórica
4.2.2. Un problema relativo a la velocidad instantanea
4.2.3. Derivada de una Función
4.2.4. Algebra de derivadas
4.2.5. Interpretación geométrica de la derivada
4.2.6. Diferentes notaciones para la derivada
4.2.7. Derivadas para las Funciones trigonométricas
4.2.8. Regla de la Cadena para derivar. Funciones compuestas
4.2.9. Cálculo de ecuaciones de tangentes y normales

4.2.10. Aplicaciones de la Regla de la Cadena. Coeficientes de variación ligados, y diferenciación implícita

4.2.11. Derivada de la Función logarítmica
4.2.12. Derivada de la Función exponencial.

4.2.13. Aplicación de la derivada para cálculo de valores extremos de Funciones

4.2.14. Criterio de la segunda derivada para cálculo de valores extremos. Puntos de inflexión y concavidad

4.2.15. Derivada de las Funciones trigonométricas inversas

Figura 4. Programa de estudio Calculo Diferencial. Tomado de MEN (1975)

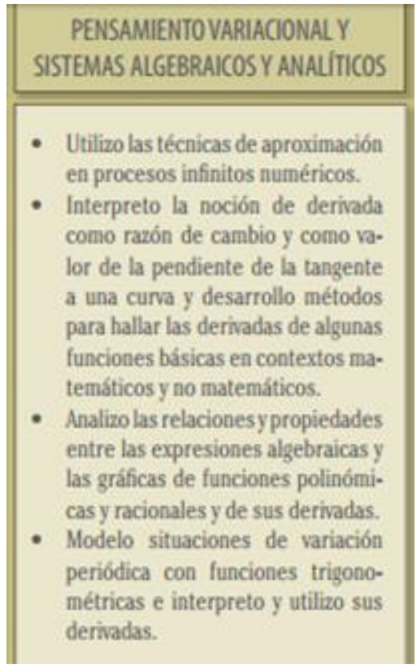
En cuanto al programa de matemáticas se establecen grupos de objetivos y de contenidos para abordar en cada uno de los grados de sexto a undécimo. Cabe resaltar que para el curso VI (undécimo) denominado Análisis Matemático en la unidad No.4 que se encarga de estudiar el cálculo diferencial, aparece un contenido denominado "Aplicación de la derivada para valores extremos de Funciones", el cual se considera como un estudio de la optimización al encontrar los valores máximos o mínimos de una función.

5. Lineamientos Curriculares para el área de matemáticas (1998), estos pretenden atender la necesidad de orientaciones y criterios nacionales sobre los currículos, sobre la función de las áreas y sobre nuevos enfoques para comprenderlas y enseñarlas. Estos lineamientos consideran tres grandes aspectos para organizar el currículo de matemáticas, que se describen a continuación:

- Procesos generales, en el que se encuentran el razonamiento, resolución de problemas, comunicación, modelación y elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos.
- Conocimientos básicos, estos son aquellos que intervienen con procesos específicos que desarrollan el pensamiento matemático y los sistemas propios de las matemáticas. Estos son, el pensamiento numérico y sistemas numéricos, el pensamiento espacial y sistemas geométricos, pensamiento métrico y sistemas de medidas, pensamiento aleatorio y los sistemas de datos y por último el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.
- Contexto, este tiene que ver con los ambientes que rodean al estudiante y que le dan sentido a las matemáticas que aprende, puede ser de las mismas matemáticas, de la vida diaria o de las otras ciencias.

6. Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006), son una guía diseñada para los docentes donde se plantea lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden en las áreas fundamentales del conocimiento de Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Un estándar es un criterio que permite determinar si un estudiante, una institución o el sistema educativo cumple con unas expectativas comunes de calidad, y evalúa los niveles de desarrollo de las competencias que van alcanzando los estudiantes a lo largo de la vida escolar.

   Una competencia bajo la visión de los estándares se define como el “conjunto de conocimientos, habilidades, actitudes, comprensiones y disposiciones cognitivas, socioafectivas y psicomotoras apropiadamente relacionadas entre sí para facilitar el desempeño flexible, eficaz y con sentido de una actividad en contextos relativamente nuevos y retadores” (MEN, 2006, p.49). Es por esto que las competencias matemáticas requieren de diversos ambientes y estrategias de aprendizaje donde se aborden situaciones problema significativas y comprensivas para los estudiantes asegurando su avance.



PENSAMIENTO VARIACIONAL Y SISTEMAS ALGEBRAICOS Y ANALÍTICOS

- Utilizo las técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos.
- Interpreto la noción de derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente de la tangente a una curva y desarrollo métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos.
- Analizo las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales y de sus derivadas.
- Modelo situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas e interpreto y utilizo sus derivadas.

Figura 5. Estándares para el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos. Grado 11. Tomado de MEN (2006)

Los estándares están organizados por grupos de grados y de acuerdo con los tipos de pensamiento matemático. Cada estándar está formulado de acuerdo con los procesos generales, los conceptos y procedimientos matemáticos, y los contextos. En el grupo de estándares establecidos al terminar el grado undécimo se puede identificar en el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos como la optimización apunta al trabajo de la interpretación de la derivada como una razón de cambio de algunas funciones en diferentes contextos.

7. Derechos Básicos de Aprendizaje Matemáticas (MEN, 2017), son una cartilla mediante la cual se dan a conocer los aprendizajes estructurantes para cada grado de la educación escolar y en unas determinadas áreas; entendiendo los aprendizajes como el conjunto de conocimientos, habilidades y actitudes en un contexto cultural e histórico. Cada Derecho Básico de Aprendizaje se estructura mediante un enunciado, unas evidencias de aprendizaje y algunos ejemplos de lo que se espera trabajar.

8. Encuentra derivadas de funciones, reconoce sus propiedades y las utiliza para resolver problemas.

Evidencias de aprendizaje

- Utiliza la derivada para estudiar la variación y relaciona características de la derivada con características de la función.
- Relaciona características algebraicas de las funciones, sus gráficas y procesos de aproximación sucesiva.
- Calcula derivadas de funciones.

Figura 6. DBA para el grado 11. Tomado de MEN (2017)

Para grado 11° el octavo enunciado hace referencia al uso de la derivada y de sus propiedades en la resolución de problemas, aquí se puede identificar como la derivada se utiliza para determinar propiedades de una situación matemática o real (máximos y mínimos de una función).

De acuerdo con lo establecido en cada una de las directrices educativas en Colombia, se reconoce que el proceso de optimización no es incluido de manera explícita en ninguno de estos documentos. Sin embargo, se hace alusión al cálculo de puntos máximos y mínimos asociado a una de las aplicaciones de la derivada.

Cabe recordar que en los lineamientos curriculares (actualmente vigentes) se presentan tres grandes aspectos para organizar el currículo: procesos generales, conocimientos básicos y contextos; teniendo en cuenta estos aspectos se puede afirmar que la optimización es un proceso importante en la escuela y se debe incluir no solo implícitamente, como se ha venido haciendo, sino de manera explícita por tres razones. La primera de ellas es porque la optimización desarrolla los cinco procesos generales de las matemáticas, debido a que en la búsqueda de la solución a una determinada situación en contextos matemáticos o reales es necesario que el estudiante razone de manera adecuada para interpretar el problema de optimización al cual se está enfrentando, para darle solución a través de la modelación, elaboración y comparación de procedimientos, comunicando de manera correcta su proceso de resolución. La segunda porque el proceso de optimización desarrolla el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos debido a que, en este tipo de problemas, sin importar el contexto en que se den, existe dependencia entre las variables involucradas. Además, según los lineamientos “el significado y sentido acerca de la variación puede establecerse a partir de las situaciones problemáticas cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de cambio y variación de la vida práctica” (MEN, 1998, p. 51), como lo hacen los problemas de optimización. En tercer lugar, la optimización y sus diferentes tipos de problemas apoyan la diversidad de contextos en los mismos.

Optimización y pensamiento variacional

El pensamiento variacional está relacionado con reconocer, percibir, identificar y caracterizar la variación y el cambio en diferentes contextos, además de describir, modelar y representar en distintos sistemas o registros simbólicos (MEN, 2006). Este pensamiento tiene como propósito principal la modelación debido que al resolver problemas se debe hacer primero un modelo de la situación donde las variables covaríen en forma semejante a las de la situación problemática (Vasco, 2002).

Por otro lado, la optimización es un proceso que desarrolla el pensamiento variacional, puesto que para solucionar problemas asociados a este proceso es necesario determinar aspectos de la variación como lo que cambia y lo que permanece constante, las variables que intervienen en la solución del problema, las posibles relaciones entre esas variables y el momento en que una de las variables hace máximo o mínimo el valor de otra. Según el MEN (2006), este pensamiento es lento y complejo de desarrollar, pero es indispensable que se realice una caracterización de los elementos que presentan una variación o cambio, el campo de variación de cada uno y las relaciones que se presentan entre las variables.

Además, la geometría es uno de los escenarios de las matemáticas para reconocer y describir regularidades o patrones presentes en las situaciones problemáticas. Este escenario permite introducir procesos infinitos en contextos geométricos, explorando y describiendo la relación existente entre las magnitudes que intervienen en la situación por medio de gráficas y modelos, puesto que hace posible el estudio dinámico de la variación, con el fin abordar los aspectos de la dependencia entre variables, gestando la noción de función como dependencia.

Con lo anterior, se decide abordar y desarrollar el proceso de optimización a partir de problemas cuya solución está ligada a la geometría plana, pues así, se pueden incorporar actividades donde el estudiante explore y modele una determinada situación con el fin de potenciar el proceso de optimización en la educación básica secundaria y media, sin hacer uso, de manera explícita, de conceptos propios de cálculo y haciendo énfasis en la variación y el cambio.

El desarrollo de la variación y el cambio se puede iniciar de manera temprana en el currículo de matemáticas debido a que “el significado y sentido acerca de la variación puede establecerse a partir de las situaciones problemáticas cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de cambio y variación de la vida práctica” (MEN, 1998, p.50). Además, en el estudio de la variación es necesario la identificación de variables, reconociendo las magnitudes y medidas de las cantidades asociadas; esta variación se encuentra en contextos de dependencia entre variables o en contextos donde una misma cantidad varía. Estos conceptos promueven en el estudiante actitudes de observación, registro y utilización del lenguaje matemático.

Al estar la modelación contenida en el pensamiento variacional, Vasco (2002) esquematiza varias fases o momentos, no necesariamente secuenciales y con muchos caminos de realimentación, para evidenciar el proceso de modelar.

- Momento de captación de patrones de variación: lo que cambia y lo que permanece
- Momento de creación de un modelo mental
- Momento de echar a andar el modelo
- Momento de comparar los resultados con el proceso modelado
- Momento de revisión del modelo

Lo anterior se puede resumir en tres grandes acciones que se deben realizar para desarrollar el pensamiento variacional. La primera acción es la identificación de las variables involucradas en la situación problémica. La segunda, implica establecer las relaciones que existen entre las variables y finalmente, la tercera acción que se debe desarrollar es la comparación de los valores que toma cada una de las variables y la dependencia que existe entre las mismas.

En concordancia con la definición dada en este trabajo sobre optimización, proceso que implica la búsqueda de la solución de un problema relacionado con maximizar o minimizar el valor de uno de los elementos que presentan una variación o cambio en una situación en contextos matemáticos o reales, se puede afirmar que el pensamiento variacional está inmerso en el desarrollo del proceso de optimización, debido a que las tres acciones descritas en el párrafo anterior se deben desarrollar para poder dar solución a un problema de optimización. Adicionalmente, se añade una cuarta acción básica necesaria para poder encontrar un valor máximo o mínimo de alguna de las variables inmersas en el problema, esta acción básica se puede sintetizar como: determinar el momento donde una de las variables hace máximo o mínimo el valor de otra. En la siguiente tabla se plasman las cuatro acciones del proceso de optimización en relación con los momentos que se deben transitar para desarrollar pensamiento variacional mediante la resolución de problemas:

<table>
<tr><th>Momentos</th><th>Acciones básicas</th></tr>
<tr><td>Momento de captación de patrones de variación</td><td>Identificar las variables involucradas en el problema</td></tr>
<tr><td>Momento de creación de un modelo mental</td><td rowspan="2">Establecer las relaciones entre dichas variables</td></tr>
<tr><td>Momento de echar a andar el modelo</td></tr>
<tr><td>Momento de comparar los resultados con el proceso modelado</td><td rowspan="2">Comparar los diferentes valores que puede tomar cada una de las variables</td></tr>
<tr><td>Momento de revisión del modelo</td></tr>
<tr><td>(Momento propio del proceso de optimización)</td><td>Determinar el momento donde una de las variables hace máximo o mínimo el valor de otra</td></tr>
</table>

Tabla 1: Acciones básicas

Historia de las Matemáticas - Optimización

La HM juega un papel muy importante en el desarrollo de este trabajo, debido a que, según Guacaneme (2016) existen cuatro ámbitos de interpretación de la relación Historia de las Matemáticas - Educación Matemática (HM-EM) desde la producción del campo de la Educación Matemática, estos cuatro ámbitos son: la Historia de las Matemáticas en la enseñanza de las Matemáticas, la Historia de las Matemáticas en las investigaciones del campo de la Educación Matemática, la Historia de las Matemáticas en la educación del profesor de Matemáticas y la Historia de la enseñanza de las Matemáticas. La presente propuesta apunta al primer ámbito, donde la HM interviene en la enseñanza de las matemáticas, centrando la atención en dos aspectos. El primero de ellos, hace referencia a cómo la HM puede ser usada con el fin de abordar el proceso de optimización; de tal forma, se seleccionan problemas de la historia para ser adaptados e incluidos en las clases de matemáticas aportando al desarrollo y fortalecimiento de competencias matemáticas asociadas a la variación, el cambio y la optimización.

Teniendo en cuenta los usos específicos de la HM en la educación en Matemáticas propuestos por Erazo (2016), en este trabajo se usa la HM para:

- Incorporar acciones específicas en el aula de clase, debido a que se propondrán actividades específicas para aplicar en un determinado grado escolar.
- Ampliar la comprensión de los objetos matemáticos, puesto que se pretende brindar una herramienta que favorezca la comprensión del proceso de optimización en los estudiantes.

El segundo aspecto en el que la HM interviene en la enseñanza de las matemáticas hace referencia a cómo la HM "permea" (Guacaneme, 2016) la educación en matemáticas al emplearla como un criterio orientador en la estructuración de una propuesta de innovación curricular, en el caso de este trabajo, es el introducir una dimensión histórica al desarrollo del proceso de optimización en el aula.

Historia de las Matemáticas y Educación Matemática

En el campo de la educación matemática se han realizado diferentes investigaciones alrededor del uso de la HM como un instrumento mediador de los procesos de enseñanza y aprendizaje en el aula. De acuerdo con Sorando (2005), una perspectiva histórica enriquece el aprendizaje de las matemáticas en el momento de relacionar la Historia y las Matemáticas bajo tres enfoques diferentes. El primero es la HM, que consiste en recrear procesos de pensamiento que llevaron a la solución de algún problema o el origen de un concepto. El segundo enfoque hace referencia a cómo las matemáticas han estado presentes en la Historia, puesto que el avance de las Matemáticas ha influenciado la transformación y el desarrollo de la sociedad. El tercer enfoque que relaciona las Matemáticas con la Historia, consiste en presentar la historia de los matemáticos a los estudiantes pues esto permite mostrar su lado humano y las anécdotas de cada una de sus vidas.

Según González (2004) la HM permite enriquecer la enseñanza de las matemáticas y su integración con otras ciencias que constituyen la cultura. Además, permite brindar una visión panorámica de los problemas, favoreciendo la comprensión profunda de estos, mostrando el contexto del que provienen, las cuestiones que resuelven, las reformulaciones que sufren y todas las fuentes de información que la historia pueda dar. Además, Lupiañez (2002) afirma que rescatar problemas que estuvieron abiertos durante muchos años o que aún no se han logrado resolver amplía la visión que se tiene de las matemáticas como un ente cerrado e inmutable, puesto que los problemas históricos dan lugar a distintos conceptos que se trabajan en clase.

Se puede observar como los tres autores anteriormente mencionados aluden a la importancia de incluir problemas de la historia en las clases de matemáticas, porque no solo permiten profundizar contenidos y procesos, sino que permiten enlazar con los contextos donde surgieron, los matemáticos que los abordaron y las diferentes soluciones que se les han dado a lo largo de la historia.

Otros autores también destacan el uso de la HM como un elemento importante en el aula, como Barbin (1991) quien argumenta que la lectura de textos originales permite al profesor o al alumno estudiar la naturaleza de la actividad matemática en sus diversas facetas: analizar el papel de los problemas, de las pruebas, de las conjeturas, de los errores en la construcción del conocimiento matemático, etc. Además, la lectura de textos antiguos también es una manera de acceder a los conceptos epistemológicos y filosóficos que impregnan los textos matemáticos. Menciona que es posible estudiar el contexto científico, filosófico, cultural y social en el que se elaboró el conocimiento matemático, y ver los aspectos culturales del conocimiento matemático mediante un enfoque interdisciplinario. En este artículo también se presenta un apartado en el que se hace referencia a la integración de la Historia y Filosofía de las Matemáticas en el Currículo Central de los Cursos de Matemáticas desde un punto de vista cultural y humanístico.

También Fauvel (1991) presenta algunas razones para usar la historia en la educación matemática, como: ayudar a aumentar la motivación para aprender, dar a las matemáticas un rostro humano, tomar la evolución histórica para ordenar la presentación de temas en el currículo, mostrar a los alumnos cómo el desarrollo de los conceptos ayuda a su comprensión, cambiar la percepción de los alumnos sobre las matemáticas, comparar lo antiguo y lo moderno estableciendo el valor de las técnicas modernas, ayuda a desarrollar un enfoque multicultural, proporcionar oportunidades para las investigaciones, estudiar los obstáculos del pasado dando explicación a lo que hoy en día los estudiantes encuentran difícil, ayudar a que los alumnos se sientan cómodos al darse cuenta de que no son los únicos con problemas, animar a los estudiantes más rápidos a mirar más allá, ayudar a explicar el papel de las matemáticas en la sociedad, hacer que las matemáticas sean menos atemorizantes, explorar la historia manteniendo el propio interés y entusiasmo por las matemáticas y brindar la oportunidad de trabajar en forma interdisciplinaria con otros maestros o materias.

Adicionalmente, Perkins (1991) concluye que la historia de las matemáticas tiene mucho que ofrecer, proporcionando oportunidades para desarrollar la creatividad de los estudiantes y el buen estilo en la solución de problemas. Además, considera que con la Historia de las Matemáticas se pueden hacer clases más interesantes y exitosas.

Asimismo, Ernest (1998) expone algunas razones por las cuales el usar la HM en las clases es una buena idea, puesto que ayuda a incrementar la motivación para aprender en los estudiantes, hace que las matemáticas sean menos atemorizantes y cambia su perspectiva y recepción hacia las mismas. También la HM muestra que las matemáticas son una disciplina multicultural y que la resolución de problemas es una herramienta muy importante en el aprendizaje y en la historia, porque introduce a los estudiantes en una teoría de redes y abre sus ojos para que reconozcan el valor de las matemáticas.

Al mismo tiempo, Marshall y Rich (2000) muestran el papel de la historia en una clase de matemáticas, junto con los puntos de vista de algunos autores y grupos de investigación, basados en experiencias de aula. El uso de la historia muestra que las matemáticas son creaciones humanas, y promueve actitudes positivas en los estudiantes hacia las clases, motivando su aprendizaje, expandiendo su concepción de las matemáticas, e impulsando la comunicación, conexión y valoración de información matemática histórica. Además, los autores muestran diferentes caminos o estrategias para incluir la HM en el aula, como lo son juegos, biografías, fuentes originales, entre otros.

Paralelamente, Wilson y Chavout (2000) se encargan de mostrar una estrategia para usar la historia en la enseñanza de las matemáticas y exponen algunos beneficios que trae el integrar la historia y la instrucción matemática. Algunos de estos beneficios son: agudiza habilidades de resolución de problemas, brinda bases para una mejor comprensión, ayuda al establecimiento de conexiones matemáticas, y destaca la interacción entre las matemáticas y la sociedad. La HM puede brindar diferentes herramientas para la resolución de problemas, variedad de algoritmos y técnicas de solución. También contribuye a la comprensión de conceptos en los estudiantes, por medio de conexiones entre tópicos, culturas, regiones, épocas y diferentes disciplinas.

Finalmente proponen una estrategia para ayudar a los profesores a integrar la historia en sus prácticas de aula, la cual se basa en tres preguntas que están muy conectadas: ¿Quién hace matemáticas? ¿Cómo se hacen las matemáticas? y ¿Qué son las matemáticas?

Teniendo en cuenta los aportes realizados por cada uno de los autores mencionados anteriormente, se puede concluir, en primer lugar, que la HM aporta los elementos necesarios para el desarrollo de este trabajo, como lo son los problemas, sus demostraciones y los posibles errores que esas puedan tener para comprender por qué los estudiantes presentan dificultades al abordar la optimización. Además, la HM permite realizar intervenciones en el aula interesantes y exitosas.

En segundo lugar, la HM posibilita un cambio en la visión que tienen los estudiantes hacia las matemáticas y en las actitudes hacia el aprendizaje, debido a que fortalece su comprensión y las estrategias que emplean al resolver un problema.

La Optimización y el desarrollo de competencias

La resolución de problemas de optimización en el ámbito educativo es una actividad matemática que aporta al desarrollo de competencias matemáticas, y estas a su vez contribuyen al desarrollo de competencias ciudadanas. Esta relación se evidencia a partir del estudio de las conexiones existentes entre Educación Matemática y ciudadanía. Algunos autores como Rico (2006), Niss (2003) y Alsina (2010) reconocen a las competencias matemáticas como parte esencial de la formación ciudadana, dentro de estas competencias se encuentra la resolución de problemas, la cual actualmente es reconocida como parte fundamental de la educación matemática escolar.

Inicialmente se presentan diferentes definiciones sobre los términos competencia matemática y competencia ciudadana. En primer lugar, el Ministerio de Educación Nacional (2006) define ser competente matemáticamente como “el saber qué, el saber qué hacer y el saber cómo, cuándo y por qué hacerlo” (p. 50), esto implica tener la capacidad de usar los conocimientos para la realización de una acción o producto (abstracto o concreto) en un momento determinado. Además, el MEN (2004) relacionando las competencias con la ciudadanía, define las competencias ciudadanas como “el conjunto de conocimientos y de habilidades cognitivas, emocionales y comunicativas que, articulados entre sí, hacen posible que el ciudadano actúe de manera constructiva en la sociedad democrática” (p. 8). De acuerdo con estas definiciones ser matemáticamente competente implica el desarrollo de algunas competencias ciudadanas, puesto que, al saber qué, cómo y cuándo realizar una acción en una determinada situación matemática y/o real, se ponen en juego conocimientos matemáticos, y habilidades afectivas y comunicativas, que aportan al crecimiento cooperativo en la sociedad, demandando la participación activa del ciudadano dentro de su comunidad.

A esto se añade la definición de competencia matemática o alfabetización matemática de los escolares de acuerdo con el proyecto PISA/OCDE que presenta Luis Rico (2006): “capacidad individual para identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios bien fundados, utilizar las matemáticas y comprometerse con ellas, y satisfacer las necesidades de la vida personal como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo” (p.49). Complementando así la noción que se tiene de la relación entre las competencias matemáticas con las ciudadanas, ya que se evidencia que la dimensión personal también es un factor importante en la formación del ciudadano, que es capaz de justificar y reflexionar, a través de las matemáticas, las posturas y decisiones que toma en su vida.

Por otro lado, Niss (2003) afirma que una competencia matemática es “la habilidad de entender, juzgar, hacer y usar las matemáticas en una variedad de intra y extra-contextos matemáticos” (p.218). Niss propone ocho competencias, basadas en lo establecido en el proyecto PISA/OCDE, para formar ciudadanos alfabetizados matemáticamente. Estas competencias, que se describen a continuación, hacen referencia a procesos mentales, físicos o comportamentales de lo que el estudiante es capaz de hacer con sus conocimientos y destrezas matemáticas:

1. *Pensar matemáticamente*: Esta competencia se refiere a los modos matemáticos de pensamiento, aplicación de la forma del pensamiento cuantitativo y lógico en la vida cotidiana. Comprender conceptos y enunciados, abstraer, intuir, relacionar conceptos, generalizar propiedades, criticar, plantear y resolver preguntas.
2. *Plantear y resolver problemas matemáticos*: Los problemas ofrecen un genuino entrenamiento para ser competentes matemáticamente, ya que es una actividad implícita o explícita en la vida social, es una oportunidad para relacionar la matemática escolar con la vida cotidiana; esta competencia hace referencia a que se identifiquen, planteen, especifiquen y resuelvan diferentes tipos de problemas en diferentes contextos.

3. *Modelar matemáticamente (construcción y análisis de modelos):* Esta competencia tiene que ver con realizar, validar, analizar y criticar modelos de una determinada situación, es decir, ir del modelo a la realidad modelada y de la realidad al modelo (matematizar).
4. *Razonar y argumentar matemáticamente:* Comprender los conceptos, argumentos y declaraciones a través de las propias demostraciones, con la capacidad de traspasar el rigor disciplinar y el sentido crítico a los razonamientos cotidianos; desarrollar argumentos matemáticos formales e informales.
5. *Representación:* Entender y utilizar diferentes tipos de representaciones de objetos, fenómenos y situaciones matemáticas, comprendiendo las relaciones entre dichas representaciones.
6. *Manejo de símbolos y formalismo matemáticos:* Usar, interpretar y manejar el lenguaje matemático simbólico y formal, estableciendo relaciones con el lenguaje natural.
7. *Comunicación:* Comprender diferentes registros lingüísticos sobre un asunto matemático; saber explicar ideas y métodos, usando diferentes recursos expresivos (orales, visuales o escritos).
8. *Uso adecuado de ayudas y herramientas:* Conocer las características, propiedades, alcances y limitaciones de diferentes tipos de herramientas y ayudas para la actividad matemática, y ser capaz de usarlos reflexivamente.

De esta manera al considerar la optimización como el proceso de resolución de problemas relacionados con maximizar o minimizar, se evidencia que se potencia directamente la segunda competencia que hace referencia a la actividad de plantear y resolver problemas en diferentes contextos, y a partir de esta se favorecen las demás competencias. El *pensar matemáticamente* se promueve al comprender y relacionar conceptos y enunciados de los problemas; el *modelar situaciones*, al validar y analizar las situaciones presentadas y poder establecer un modelo para resolverlas; el *razonar y argumentar matemáticamente*, al comprender el problema y establecer argumentos válidos en contextos matemáticos y cotidianos; el *representar,* al utilizar diferentes representaciones de un enunciado; el *manejar símbolos y formalismos matemáticos,* al usar notación para pasar del lenguaje natural a un lenguaje matemático; el *comunicar*, al usar recursos orales, visuales y/o escritos para exponer ideas que están involucradas en el proceso de solución de los problemas de optimización; el *usar adecuadamente ayudas y herramientas*, al recurrir a distintos instrumentos para establecer la estrategia de resolución de la situación presentada.

Es así que los problemas de optimización aportan al desarrollo de la ciudadanía y de las competencias matemáticas, porque en su proceso de solución se ponen en juego las diferentes competencias para ser matemáticamente competente; además se favorece el pensamiento matemático crítico y la formación de ciudadanos que reconocen, asumen y toman una posición frente a las diversas situaciones y cambios en las distintas esferas de una sociedad.

Optimización y Tecnología

En la actualidad, la tecnología día a día va evolucionando y posesionándose con más fuerza, el aula de clase no es ajena a estos cambios. Según la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (2013) las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) han tenido un desarrollo prominente en los últimos años, planteando un desafío al sistema educativo de reformular prácticas y currículos que respondan a estas actualizaciones tecnológicas de la denominada "Sociedad del Conocimiento", en el que se innove y se inspire a las nuevas generaciones. Por esto, se hace necesario que tanto profesores como estudiantes desarrollen habilidades tecnológicas que les permitan desenvolverse en las diferentes esferas de la sociedad y que aporten a la construcción de sus conocimientos.

La escuela debe propiciar el desarrollo de nuevas competencias para que los jóvenes pueden enfrentarse a cualquier reto laboral que se les presente en el futuro y sean capaces de renovar constantemente sus conocimientos, para que aporten activamente a la sociedad. En concordancia con lo anterior, la UNESCO propone el desarrollo de las siguientes competencias tecnológicas: habilidades de manejo de la información, comunicación, resolución de problemas, pensamiento crítico, creatividad, innovación, autonomía, colaboración y trabajo en equipo.

La resolución de problemas es el eje central del proceso de optimización, por tanto, surge la necesidad de utilizar una herramienta que posibilite la comprensión y el desarrollo de los problemas de optimización, esta herramienta es el uso de la tecnología y particularmente el software GeoGebra. Como lo describen Barrera, Falcón, Ramírez y Ríos (2011) los programas de geometría dinámica diseñados en los últimos años permiten la resolución de problemas matemáticos, puesto que la manipulación e interacción con los elementos que intervienen en el proceso de solución es esencial y fundamental para asimilar, relacionar y profundizar procesos o conceptos matemáticos.

Un colectivo de investigadores realizó una interacción con GeoGebra para determinar algunas estrategias que potencian el desarrollo del pensamiento variacional y la visualización de nociones variacionales (Villa y Ruiz, 2010); afirman que la representación matemática proporcionada por este software se puede considerar como una unidad donde los elementos están dinámicamente relacionados, promoviendo la comprensión y construcción de conocimientos matemáticos. Al ser GeoGebra un software de geometría dinámica que permite tanto el diseño de applets como la exploración de los mismos, es una herramienta que juega un papel muy importante en la implementación de las actividades en el aula, porque facilita la visualización de diferentes elementos, variables y dependencia entre las mismas.

Barahona, Barrera, Hidalgo y Vaca (2015) manifiestan que GeoGebra facilita procesos de abstracción y variación, mostrando diferentes representaciones de una determinada situación, y posibilita encontrar soluciones de manera visual. Además, este software permite establecer relaciones de covariación por medio de un ambiente dinámico, motivando a los estudiantes a interesarse por solucionar los problemas de optimización. También, GeoGebra favorece la exploración dinámica de las construcciones realizadas, ampliando las posibles estrategias de solución y permitiendo que los estudiantes practiquen aquellos conocimientos previos que ya han logrado interiorizar.

Por lo anterior, se considera que GeoGebra es una herramienta que puede potenciar el desarrollo del proceso de optimización en el aula, puesto que brinda herramientas dinámicas para que el estudiante identifique las variables por medio de la exploración y comparación de los diferentes elementos de una construcción. Además, permite abstraer soluciones y visualizar de forma más exacta las características o relaciones presentes en esta.

METODOLOGÍA

El desarrollo metodológico de este trabajo se realiza bajo un paradigma cualitativo de tipo descriptivo, puesto que se propone detallar, caracterizar y evaluar una alternativa para la enseñanza de la optimización, analizando las respuestas dadas por estudiantes a unos determinados problemas, los cuales fueron extraídos de la HM y adaptados para poder ser explorados usando tecnología en el aula, con el propósito de promover el desarrollo de competencias matemáticas y del proceso de optimización en la educación básica secundaria. A continuación, se describen las cinco fases que fueran establecidas como la ruta metodológica del presente trabajo:

Fase 1: Establecimiento del marco de referencia

Inicialmente fue necesario establecer un marco de referencia pertinente, con el propósito de aproximar una definición al proceso de optimización en la escuela, reconocer su lugar en el currículo escolar colombiano, comprender la noción de competencias matemáticas y ciudadanas y reconocer las relaciones entre estos elementos.

Fase 2: Identificación de problemas

Para atender la necesidad de abordar el proceso de optimización en distintos grados de escolaridad, se realiza un estudio de algunos problemas de optimización presentes en la HM basado en el trabajo doctoral de Esteves (2008), la cual hace una revisión de diferentes fuentes documentales de la historia, extrae problemas, proposiciones o enunciados relacionados con la optimización, muestra las demostraciones realizadas por cada uno de los matemáticos y clasifica los problemas de acuerdo con su época, autor y contextos en los que se proponen. Debido a que desde el inicio del trabajo se tenía este referente no fue necesario definir criterios para la búsqueda de los problemas, únicamente se analizaron los problemas previamente identificados por esta autora.

Fase 3: Reconocimiento de las acciones básicas

En el estudio y comprensión de las diferentes demostraciones de los problemas de la HM relacionados con el proceso de optimización y en el establecimiento de la relación entre el pensamiento variacional y este proceso, se pudieron determinar cuatro acciones básicas (AB) que estuvieron presentes en todas las soluciones propuestas por los matemáticos a los diferentes problemas:

1. AB1: Identificar las variables que están involucradas en el problema.
2. AB2: Establecer la relación entre dichas variables.
3. AB3: Comparar los valores de las variables.
4. AB4: Determinar el momento donde una de las variables hace máximo o mínimo el valor de otra.

Estas acciones se utilizan posteriormente para analizar el trabajo realizado por los estudiantes. Además, en esta fase surge la necesidad de incluir la tecnología como una herramienta que ayuda a tener una mayor comprensión de las demostraciones. También se reconoce su importancia para mostrar y explorar los problemas en el aula de una manera diferente y llamativa.

Fase 4: Transposición didáctica

Luego de haber estudiado y analizado los problemas de optimización y sus demostraciones, se realiza un proceso de transposición didáctica, que de acuerdo con Chevallard (1998) consiste en el trabajo de transformar un objeto del saber en un objeto de enseñanza que, en este caso, se realiza mediante el uso de herramientas tecnológicas como el software GeoGebra, en el que cada problema sufre ciertas adaptaciones teniendo en cuenta los saberes previos y necesidades de los estudiantes. Para realizar una adecuada transposición didáctica se realizan las operaciones que, según Ramírez (2005), son selección, reducción, simplificación y reformulación.

En primer lugar, se *seleccionan* los problemas que se llevan al aula, a partir de tres criterios. El primero, que la prueba o demostración de los problemas seleccionados no tengan un desarrollo netamente algebraico, puesto que uno de los principales propósitos de este trabajo es el de mover la optimización del lugar en el que se trabaja de manera explícita en la escuela, solamente como una aplicación de la derivada. El segundo, que los problemas tengan una estrecha relación con algunos contenidos trabajados en algún grado de la educación básica secundaria, por ello se debía tener claridad de los estándares y derechos básicos de aprendizaje en la educación matemática colombiana. El tercer criterio surge en el camino, no está considerado inicialmente en el proyecto, pero se hace necesario el uso de la tecnología como una fuente y recurso para lograr una mayor comprensión de las demostraciones y problemas por parte de las autoras; en ese uso se reconoció que la tecnología, específicamente el software GeoGebra, favorecía el desarrollo de conocimiento matemático y era pertinente para adoptar como un recurso en el aula al momento de presentar los problemas.

En segundo lugar, se realiza una *reducción* en la cual se examinó con más detalle los problemas seleccionados y se detectaron aquellos contextos aptos para los estudiantes, a los cuales va dirigida la secuencia de actividades. Aunque se identificaron problemas de optimización en diferentes ramas de las matemáticas, cada uno de ellos necesitaba una debida transposición para poder ser llevado al aula, por ello la tecnología medió esta reducción y se determinó que aquellos problemas cuya solución y análisis se realiza desde la geometría plana, son los adecuados debido a que pueden ser modelados por medio de GeoGebra permitiendo una mayor exploración e interacción con los problemas extraídos de la HM.

En tercer lugar, se realiza una *simplificación* de cada uno de los problemas para poder desarrollar, de manera efectiva, el proceso de optimización en los estudiantes. Se analiza cada problema y su solución para poder determinar las estrategias y la forma de hacerlos más sencillos y accesibles a los estudiantes. Se identifica que la mejor manera de hacer comprensible cada problema, además de la construcción de los applets, es realizar preguntas con el fin de orientar al estudiante a una aproximación a las proposiciones de los diferentes matemáticos abordados.

Por último, se hace una *reformulación*, de manera implícita, de los problemas de tal manera que los estudiantes puedan acceder y desarrollar el proceso de optimización. Esta reformulación se hace por medio de las actividades propuestas.

Según Ramírez (2005), las anteriores operaciones no se pueden desarrollar de manera independiente y aunque se diferencien, estas se complementan permitiendo que la transposición didáctica sea un proceso integral que tiene en cuenta desde las directrices educativas colombianas hasta las necesidades y expectativas de los estudiantes.

Fase 5: Implementación y análisis de las actividades

Finalmente se llevan al aula los problemas ya modificados y se realiza un análisis de las respuestas de los estudiantes, en relación con el trabajo realizado por cada matemático en sus demostraciones, y con las acciones básicas identificadas en la Fase 2. En esta última fase se toman algunos elementos de la estrategia investigativa “experimento de enseñanza”, porque se diseña, implementa y evalúa una secuencia de actividades organizada por momentos de la HM alrededor del proceso de optimización. En relación con el esquema investigativo sugerido por

Camargo (s.f.) para esta estrategia, se considera que en el presente trabajo fue necesario realizar una fundamentación conceptual sobre la construcción del contenido específico (optimización), la planeación de una secuencia de enseñanza, la experimentación de las tareas de la secuencia, el análisis retrospectivo y la producción de conclusiones y principales resultados. A pesar de que estas acciones no fueron cíclicas, como es el caso de todo el ciclo de un experimento de enseñanza, sino fue lineal, si se puede afirmar que se adoptaron varios requisitos pertenecientes a esta estrategia investigativa.

Respecto a la muestra seleccionada para aplicar las actividades propuestas, luego de una prueba piloto realizada con estudiantes de grado octavo, se extendió una invitación libre a 57 estudiantes de los grados sexto, séptimo, octavo, noveno, décimo y undécimo para que, de manera voluntaria, participaran en las diferentes sesiones para aplicación de las actividades aquí propuestas. De los cuales, en la primera sesión participaron 11 estudiantes (dos de sexto, uno de séptimo, dos de octavo, tres de noveno, dos de décimo y uno de undécimo); en la segunda sesión participaron 9 de estos estudiantes; la tercera sesión contó con la participación de 3 estudiantes y finalmente sólo se contó con dos de estos estudiantes.

La disminución de la muestra se dio porque la institución tenía otras actividades simultáneas, de carácter obligatorio para los estudiantes, lo cual hizo que los estudiantes no tuvieran la oportunidad de continuar en la implementación de las actividades.

Estudio de los problemas

Esteves (2008) en su tesis doctoral titulada "Evolução histórica dos problemas de optimização e o seu tratamento no Ensino Secundário português nos séculos XX e XXI" realiza un análisis de cuatro obras sobre historia de las matemáticas, las cuales son:

- A history of Mathematics, de Katz (1993)
- História Concisa das Matemáticas, de Struik (1989)
- The Historical Developmet of the Calculus, de Edwards (1979)
- The History of the Calculus and its Conceptual Development, de Boyer (1959)

En estos libros identifica problemas de optimización, los analiza y clasifica en tablas, de acuerdo con la forma de su enunciado (proposición, ejemplo, problema, aplicación, ejercicio), el tipo de problema (geometría plana, geometría espacial, aritmética, física, astronomía), el tipo de optimización (distancia, área, volumen, producto, ángulo, razón, tiempo), y el tipo de solución (demostración, resolución).

Además, identifica cuatro grandes periodos en la Historia de las Matemáticas, a través de los cuales hace la revisión de los diferentes libros de HM:

- Período Griego: Siglos IV a.C. a IV D.C.
- Nacimiento: Siglos XVI y XVII
- Consolidación: Siglo XVIII
- Institucionalización: Siglo XIX

A continuación, se presentan dos imágenes tomadas de la tesis, para mostrar las obras de los diferentes autores, de donde fueron extraídos los problemas.

A. OBRAS ACERCA DO AUTOR

SÉC.	OBRA SOBRE:	AUTOR	TITULO	ANO E LOCAL DE PUBLICAÇÃO	EDIÇÃO
IV a.C.	**EUCLIDES (330-260 a.C.)**	**Thomas L Heath.**	**Elementos de Euclides** **The thirteen books of Euclid's Elements.**	**Lisboa: 1768** **New York: 1956**	 **2ª Ed.**
IV	**PAPPUS, A (290-350)**	**Paul Ver Eecke**	**La collection mathématique / Pappus d'Alexandrie**	**1933 ; Paris**	
XIX	LACROIX,S.F. (1765-1843)	M. Hermité e J. A. Serret	Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral	1874 ; Paris: Gauthier-Villars	8ª Ed

Figura 7. Obras de los autores. Tomado de Esteves (2008, p.12)

B . OBRAS DO AUTOR

SÉC.	AUTOR	TITULO	ANO E LOCAL DE PUBLICAÇÃO	EDIÇÃO
XVII	BERNOULLI, J. (1667-1748)	Johannis Bernoulli opera omnia. - 4 vols.	1742; Lausannae & Genevae	
	L'HÔPITAL, G. (1661-1704)	**Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes**	**1716 ; Paris**	**2ª Ed.**
XVIII	**BEZOUT, E. (1730-1783)**	**Cours de mathématique** **Elementos de analyse**	**1775; Paris** **1793; Coimbra**	 **2ª ed.**
	EULER, L. (1707-1783)	Introduction à l'analyse infinitésimale ; 2 v	Paris: 1987-1988	
	LAGRANGE, J. L. (1736-1813)	Théorie des fonctions analytiques, contenant les principes du calcul différentiel Leçons sur le calcul des fonctions, servant de commentaire et de supplément à la théorie des fonctions analytiques. Theorica das funções analyticas, que contem os principios do calculo	Paris: 1847 Paris: 1808 Lisboa: 1798	3ª Ed
XIX	LACROIX, S. F. (1765-1843)	Traité élélentaire de calcul differentiel et calcul intégral		
	CAUCHY, A. L. (1789-1875)	Résumé des leçons données Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy	Paris: 1987 Paris: 1882-1938	
	STURM, J. C. F. (1803 – 1855)	**Cours D'Analyse de L'École Polytechnique**	**Paris: 1884**	**7ª Ed**
	SERRET, J. A. (1819-1885)	**Cours de Calcul Differenciel et Integral**	**Paris: 1878**	
	RIEMANN, B. (1826-1866)	Oeuvres mathématiques de Riemann	Paris: 1898	
	LEBESGUE, H. (1875-1941)	Oeuvres scientifiques	Genève : 1972	

Figura 8. Obras de los autores. Tomado de Esteves (2008, p.13)

Aunque se realizó la reconstrucción e interpretación de las soluciones de todos los problemas identificados por Esteves en las diferentes obras de la HM, en esta sección solo se presentan los enunciados y la interpretación de la resolución de los problemas seleccionados para ser adaptados y llevados al aula; los demás se pueden encontrar en el anexo 1. Además, en los problemas que se presentan a continuación se señala en su demostración o resolución los momentos en que en cada uno de ellos se realizan las acciones básicas.

Elementos de Euclides

Todos los problemas de optimización presentados por Euclides son de Geometría Plana, problemas sobre áreas, distancias y ángulos; estos se presentan a continuación:

Libro III - Proposición 7

> "Si se toma un punto en el diámetro de un círculo que no sea el centro del círculo y desde él hasta el círculo caen algunas rectas, será la mayor aquella en la que está el centro, y la menor la que queda y de las demás la más cercana a la que pasa por el centro es siempre mayor que la más lejana, y sólo caerán dos iguales del punto al círculo a uno y otro lado de la más pequeña" (Vega, 1991, p. 299).

Reconstrucción de la proposición:

Dada una circunferencia, un punto sobre ella y un punto sobre uno de sus diámetros. De todos los segmentos que se pueden formar, el que tiene mayor longitud es aquel segmento sobre dicho diámetro.

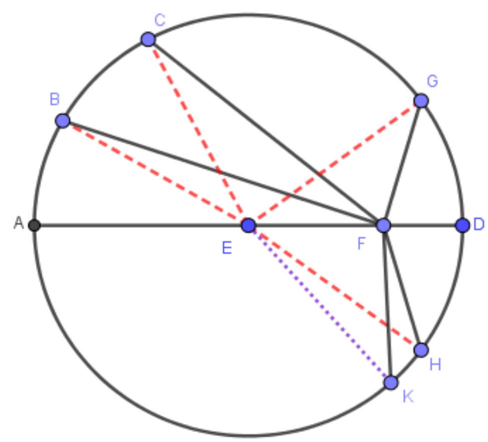


Figura 9. Construcción Proposición 7 - Libro III de Euclides

Para la demostración de esta proposición Euclides la divide en tres partes. En la primera parte compara las distancias entre los segmentos FA, FB, FC, FG y FD teniendo en cuenta las desigualdades triangulares para afirmar que el segmento FA es mayor que el segmento FB, el segmento FB es mayor que el segmento FC, el segmento FC es mayor que el segmento FG y el segmento FG es mayor que el segmento FD ***(AB1, AB2, AB3)***. En la segunda parte se construye el ángulo FEH congruente al ángulo GEF para probar que los tres lados de los triángulos FEH y GEF son congruentes ***(AB3)***. En la tercera parte él se ocupa de mostrar que no va a existir otro segmento congruente a al segmento FG que sea diferente al segmento FH y que pase por el punto F ***(AB4)***.

Libro III - Proposición 8

> "Si se toma un punto exterior a un círculo y del punto al círculo se dibujan algunas rectas, una de las cuales pasa por el centro y las demás al azar, de las rectas que caen en la parte cóncava de la circunferencia, la mayor es la que pasa por el centro, y de las demás siempre la más próxima a la que pasa por el centro es mayor que la más lejana; pero de las que caen en la parte convexa de la circunferencia la menor es la que está entre el punto y el diámetro, y de las demás la más próxima a la más pequeña es siempre menor que la más lejana, y sólo caen dos de iguales del punto al círculo a uno y otro lado de la más pequeña" (Vega, 1991, p. 300).

Reconstrucción de la proposición:

Dada una circunferencia y un punto en su exterior. Si se construyen segmentos desde el punto exterior hasta un punto sobre la circunferencia, el segmento cuya longitud es mayor es aquél que contiene un diámetro de la circunferencia y el segmento con menor longitud es aquel que es colineal con dicho diámetro.

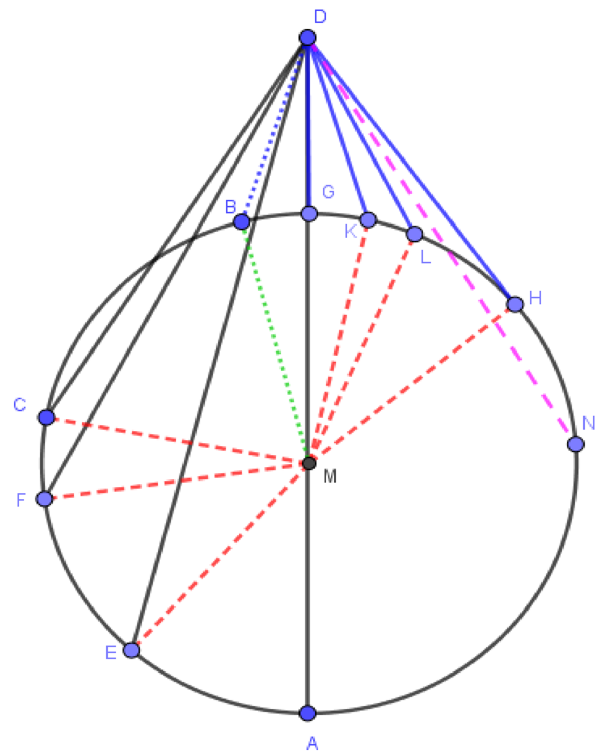


Figura 10- Construcción Proposición 8 - Libro III de Euclides

Para la demostración de esta proposición Euclides la divide en tres partes. En la primera parte compara las distancias entre los segmentos DA, DE, DF, y DC teniendo en cuenta las desigualdades triangulares para afirmar que DA (que contiene el centro) es el segmento más grande de los segmentos que se pueden construir en la parte cóncava de la circunferencia, y que a su vez el segmento DE es mayor que el segmento DF, el segmento DF es mayor que el segmento DC; además, compara los segmentos DH, DL, DK y DG, usando la desigualdad triangular se puede concluir que el segmento DG (que está contenido en la recta que pasa por el centro) es el menor de los segmentos que se pueden construir en la parte convexa de la circunferencia y a su vez el segmento DK es menor que el segmento DL y el segmento DL es menor que el segmento DH ***(AB1, AB2, AB3)***. En la segunda parte se construye el ángulo DMB congruente al ángulo KMD para probar que los segmentos DK y DB son congruentes ***(AB3)***. En la tercera parte él se ocupa de mostrar que no va a existir otro segmento más pequeño que el segmento DG que tenga uno de sus extremos sobre la circunferencia que contiene los puntos A, B y C y el otro sea el punto D ***(AB4)***.

Libro III - Proposición 15

“En un círculo el diámetro es la recta mayor y de las demás, la más próxima al centro es siempre mayor que la más lejana” (Vega, 1991, p. 310).

Reconstrucción de la proposición:

De todas las cuerdas de una circunferencia, la que tiene mayor longitud es aquella que contiene el centro de la circunferencia.

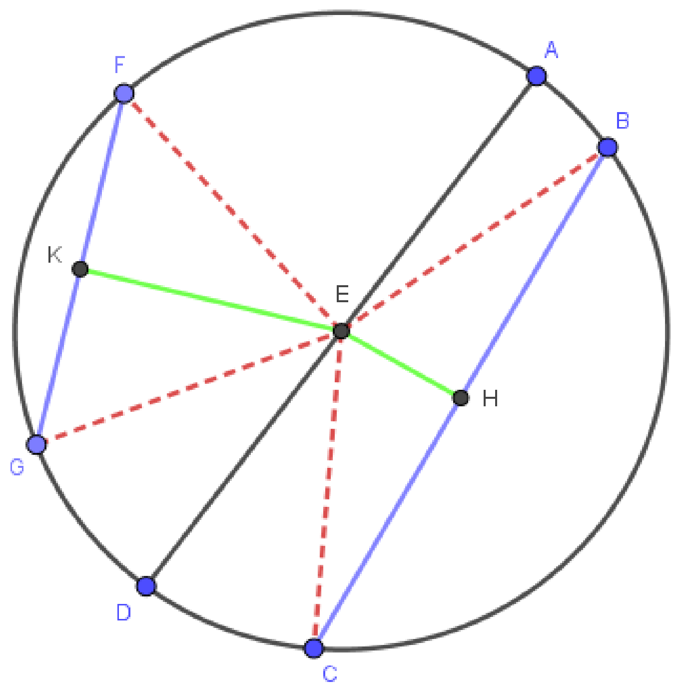


Figura 11. Construcción Proposición 15 - Libro III de Euclides

Para la demostración de esta proposición Euclides la divide en dos partes. En la primera parte se encarga de demostrar, a partir de desigualdades triangulares, que el segmento AD es la cuerda más grande que se puede construir (diámetro) en la circunferencia que contiene los puntos A, B y C, y a su vez muestra que el segmento BC es más grande que el segmento FG ***(AB1, AB2, AB3)***. En la segunda parte se encarga de mostrar que como la cuerda FG es menor que el segmento BC entonces se cumple que el segmento FG está más lejos del diámetro AD, es decir que el segmento KE es más grande que el segmento EH ***(AB3)***. Por lo tanto, se concluye que mientras más cerca esté una cuerda del centro de la circunferencia su distancia va a ser mayor que la otra cuerda que se encuentre más lejos del centro ***(AB4)***.

La Collection Mathematique de Pappus d'Alexandrie

Los problemas demostrados por Pappus son problemas de Geometría Plana y Geometría Espacial, donde optimizan áreas, volúmenes y ángulos; estos son:

Libro V - Proposición 5

> "Entre los triángulos isoperimétricos[6] y con la misma base, el triángulo isósceles es el mayor, y el que más se aproxima al triángulo isósceles es continuamente mayor" [7].

Reconstrucción de la proposición:

De todos los triángulos que se pueden formar con la misma base y el mismo perímetro, aquel que tiene área mayor es el triángulo isósceles.

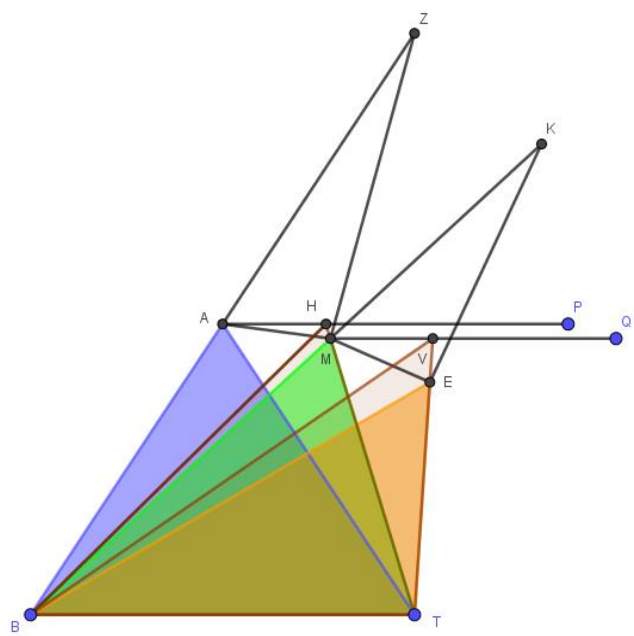


Figura 12. Construcción Proposición 5 - Libro V de Pappus

Para la demostración de esta proposición Pappus optimiza el área de un triángulo, dados su perímetro y la medida de su base; para ello a lo largo de su demostración utiliza construcciones auxiliares para comparar segmentos, ángulos y triángulos.

Sobre el segmento BT se construyen tres triángulos isoperimétricos, el triángulo ABT isósceles y

[6] Triángulos con el mismo perímetro

[7] Traducido de Ver Eecke, P. (1933). Pappus D'alexandrie. La Collection Mathématique. (p. 247).

el triángulo BMT que es el que más se aproxima al isósceles a comparación del triángulo BET ***(AB1)***. Se construye la semirrecta BA iniciando en el punto B y sobre esta semirrecta se construye el segmento AZ congruente al segmento TA, se trazan los segmentos ZM y MA. Por desigualdad triangular se tiene que la medida del segmento ZM más la medida del segmento MB es mayor a la medida del segmento BZ, entonces los segmentos ZM y MB también son mayores que los segmentos BA y AT. Los segmentos BA y TA son congruentes con los segmentos BM y MT ***(AB2)***. Por el teorema de ángulos alternos se concluye que el segmento AH es paralelo al segmento BT; extendiendo el segmento TM hasta el punto H y trazando el segmento BH, se puede afirmar que el área del triángulo ABT es más grande que el área del triángulo BMT, puesto que el triángulo BAT es congruente al triángulo BHT ***(AB3)***.

Se extiende el segmento BM hasta el punto K, donde el segmento MK es congruente al segmento MT, y se unen los puntos K y E y los puntos M y E. Por desigualdad triangular se tiene que los segmentos la medida del segmento BE más la medida del segmento EK es mayor a la medida del segmento BK, lo mismo sucede con las medidas de los segmentos BM más la medida del MT y las medidas de los segmentos BE más la medida del segmento ET, se deduce que las medidas de los segmentos BE y EK son mayores que la del segmento ET. Los segmentos KM y ME son respectivamente congruentes a los segmentos TM y ME, y el segmento KE es más grande que el segmento ET, por lo tanto, el ángulo KME es mayor que el ángulo TME; por lo tanto, el ángulo KMT es mayor que el doble del ángulo TME. Además, el ángulo KMT es más pequeño que el doble del ángulo MTB (porque el ángulo MTB es mayor que el ángulo MBT, porque los ángulos ABT y ATB son iguales); por lo tanto, el ángulo MTB es mayor que el ángulo TME. Se ubica sobre el segmento MT y en el punto M, un ángulo TMV igual al ángulo MTB. Ahora, por el teorema de ángulos alternos el segmento MV es paralelo al segmento BT y está situada entre los segmentos ME y MK; por lo tanto, si el segmento TE se prolonga hasta la paralela MV que se encuentran en el punto V, y si se traza el segmento BV, el triángulo BTM será congruente al triángulo BVT; de tal manera que el triángulo ABT es más grande que el triángulo BET que a su vez es más pequeño que el triángulo BMT ***(AB4)***.

Libro V - Proposición 10

"Entre las figuras rectilíneas con el mismo perímetro y el mismo número de lados, la mayor es la que es equilátera y equiangular[8][,][9]

Reconstrucción de la proposición:

De todos los polígonos con el mismo perímetro y el mismo número de lados, aquél con mayor área es el regular.

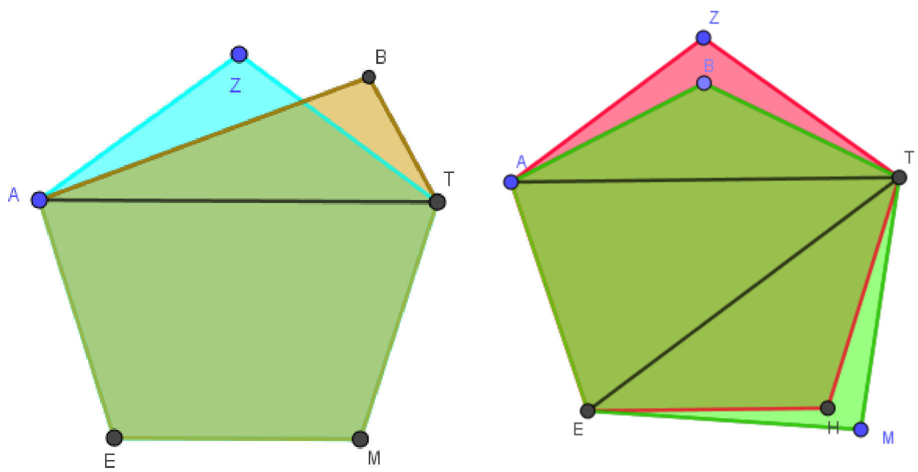


Figura 13. Construcción Proposición 10 - Libro V de Pappus

Para la demostración de esta proposición Pappus optimiza el área de un polígono dado su perímetro; para ello recurre al método de reducción al absurdo trabajando con la descomposición de las figuras en triángulos. Inicialmente se demuestra que el polígono con mayor área tiene que ser equilátero, luego se muestra que el mismo debe ser equiangular.

Sea el polígono ABTME el más grande de todos los plurilaterales que tienen el mismo perímetro y el mismo número de lados que él; debe ser equilátero. Se va a suponer que no lo es; los segmentos AB y BT, si es posible, son desiguales, se traza el segmento AT sobre el cual se establece el triángulo isósceles AZT, de modo que la suma de las medidas de los segmentos AZ y ZT es igual a la suma de los segmentos AB y BT ***(AB1, AB2)***. De acuerdo con la proposición 5, el triángulo isósceles es el que tiene un área mayor de todos los triángulos isoperimétricos establecidos sobre una misma base, entonces el triángulo AZT tiene un área mayor que el triángulo ABT ***(AB3)***. Se agrega a ambos triángulos el cuadrilátero ATME; debe existir un área ZTMEA más grande que el área ABTME, del mismo perímetro y con el mismo número de lados;

---

[8] Polígono cuyos ángulos de vértice son congruentes.
[9] Traducido de Ver Eecke, P. (1933). Pappus D'alexandrie. La Collection Mathématique. (p. 259).

lo cual es contradictorio. Por lo tanto, el polígono ABTME es equilátero; el plurilateral equilátero es el que tiene el área más grande; porque, como ya se ha mostrado, el triángulo isósceles también es el que tiene el área mayor ***(AB4)***.

<u>Libro VII - Proposición 73</u>

> "Consideremos la recta BA igual a la recta AT, y cortemos la recta BT en dos partes iguales en el punto M; yo digo que la recta BT, es la más pequeña de todas las rectas que pasan por el punto M"[10]

Reconstrucción de la proposición:

Dados dos segmentos congruentes AB y AT, el punto medio M del segmento BT. Si se ubica un punto Z en la semirrecta AB, entonces el segmento ZM de menor longitud es aquel que están contenido en el segmento BT.

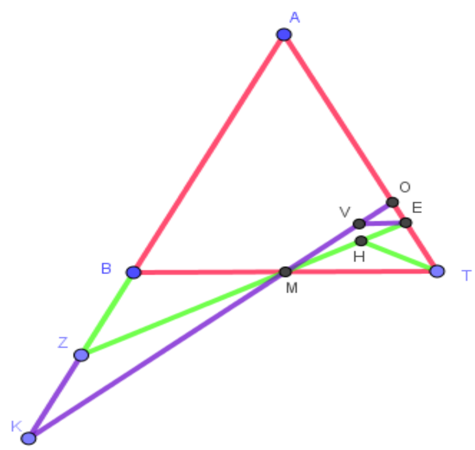


Figura 14. Construcción Proposición 73 - Libro VII de Pappus

Pappus con la demostración de esta proposición optimiza la distancia entre un punto y una recta, realizando construcciones auxiliares y comparando medidas de segmentos y de ángulos, para comprobar que BT es el segmento más pequeño de todos los que pasan por el punto M, y que el segmento más cercano a BT es más pequeño que el que está más alejado.

Se traza un segmento EZ que pase por el punto M, tal que el punto E esta sobre el segmento AT y el punto Z sobre la semirrecta AB; se puede afirmar que el segmento EZ es más grande que el

[10] Traducido de Ver Eecke, P. (1933). Pappus D'alexandrie. La Collection Mathématique. (p. 608).

segmento TB. El ángulo ABT, es decir, el ángulo T es mayor que el ángulo BZE, es posible restar del ángulo T a ángulo igual al ángulo BZE ***(AB1)***. Sea el ángulo MTH igual a este último ángulo. A partir de esto, el segmento TM está a la derecha del segmento MH, como el segmento ZM está a la derecha del segmento MB. Ahora, el segmento ZM es mayor que el segmento MB; por lo tanto, el segmento TM también es más grande que el segmento MH. En consecuencia, dado que el segmento ZM es más grande que el segmento MB, es decir, el segmento MT, pero el segmento MT es mayor que el segmento MH, [porque el segmento ZM es más grande que el segmento MH que es la más pequeña] ***(AB2)***. Entonces, los cuatro segmentos ZM, MB, MT, MH son proporcionales, el segmento ZM es el más grande y el segmento MH el más pequeño, se deduce que el segmento ZH es mayor que el segmento BT; de modo que el segmento BT, es más pequeño que el segmento ZH, es, a su vez, más pequeño que el segmento EZ. También el segmento BT es más pequeño que todos los segmentos que pasan por el punto M. Se afirma ahora que el segmento que está más cerca de BT es más pequeño que el que está más lejos ***(AB3)***.

Se traza de forma trasversal el segmento OK, y se establece el ángulo MEV igual al ángulo K (como sea posible). El segmento KM es nuevamente más grande que el segmento ZM y el segmento EM más grande que el segmento MV; de modo que todo segmento KV es más grande que el segmento EZ. En consecuencia, el segmento OK es mayor que el segmento EZ; de modo que el segmento ZE es más pequeño que el segmento OK. Por lo tanto, el segmento BT es más pequeño que todos los segmentos que pasan por el punto M, y la que está más cerca a este es más pequeño que el que está más lejos ***(AB4)***.

Cours de Mathématique de Bézout

Etienne Bézout en su obra compuesta por 6 libros que abarcan distintas áreas de las matemáticas, como lo son aritmética, geometría, trigonometría, álgebra, cálculo diferencial e integral, además de algunas aplicaciones de la mecánica y la navegación. En el libro cuatro que hace referencia al cálculo diferencial en la cual se presenta una sección denominada “problemas de máximos y mínimos”; uno de estos problemas será presentado junto con su demostración a continuación:

<u>Problema V:</u>

"Hallar entre los cuadriláteros isoperimétricos, cuál es el que tiene la mayor superficie"[11]

Reconstrucción de problema:

De todos los cuadriláteros que se pueden formar con el mismo perímetro, aquel que tiene área mayor es el cuadrado.

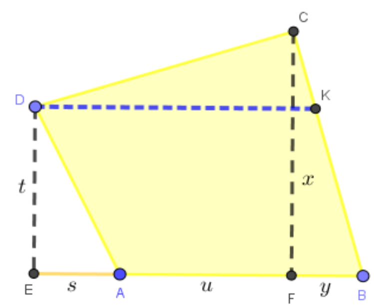


Figura 15. Construcción Problema V de Bézout

Se tiene un cuadrilátero $ABCD$ en el cual se traza el segmento DE perpendicular a la recta que contiene al segmento AB, el segmento CF perpendicular al segmento AB y el segmento DK paralelo al segmento AB, donde K es el punto de intersección entre el segmento paralelo y el segmento BC. Luego se nombran las medidas de los segmentos $AE = s$, $AF = u$, $DE = t$, $CF = x$, $BF = y$ y el perímetro del cuadrilátero $ABCD = a$, se calculan las medidas de otros segmentos haciendo uso del teorema de Pitágoras ***(AB1)***.

$$DA^2 = ss + tt$$

$$DA = \sqrt{s^2 + t^2} \qquad (1)$$

$$DC^2 = (s + u)^2 + (x - t)^2$$

$$DC = \sqrt{(s + u)^2 + (x - t)^2} \qquad (2)$$

$$CB^2 = xx + yy$$

$$CB = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (3)$$

Ahora las ecuaciones que determinan el perímetro a del cuadrilátero $ABCD$ y la superficie de este, serían: ***(AB2)***

$$a = u + y + \sqrt{s^2 + t^2} + \sqrt{(s + u)^2 + (x - t)^2} + \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (4)$$

[11] traducido de Esteves, A. (2008). Evolução histórica dos problemas de optimização e o seu tratamento no Ensino Secundário português nos séculos XX e XXI. (p. 62)

$$ABCD = DEFC + CFB - DAE$$

$$ABC = (t + x)\frac{s + u}{2} + \frac{xy}{2} - \frac{st}{2} \qquad (5)$$

Se halla el diferencial de las cinco ecuaciones anteriormente enumeradas; pero en la ecuación 5 que determina el perímetro del cuadrilátero las cantidades radicales hacen que el cálculo sea muy complicado, para evitar esa dificultad, se suponen las tres cantidades radicales como constantes.

$$d\left(\sqrt{ss + tt}\right) = 0$$

$$\frac{s\,ds + t\,dt}{\sqrt{ss + tt}} = 0$$

$$s\,ds + t\,dt = 0$$

$$s\,ds = -t\,dt$$

$$ds = \frac{-t\,dt}{s}$$

$$d(\sqrt{(s + u)^2 + (x - t)^2})$$

$$\frac{(s + u)(ds + du) + (x - t)(dx - dt)}{\sqrt{(s + u)^2 + (x - t)^2}} = 0$$

$$(s + u)(ds + du) + (x - t)(dx - dt) = 0$$

$$d(\sqrt{x^2 + y^2})$$

$$\frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

$$x\,dx + y\,dy = 0$$

$$x\,dx = -y\,dy$$

$$dx = \frac{-y\,dy}{x}$$

$$d(u + y + \sqrt{s^2 + t^2} + \sqrt{(s + u)^2 + (x - t)^2} + \sqrt{x^2 + y^2})$$

$$du + dy = 0$$

$$du = -dy$$

Como se está buscando el máximo del área (superficie) se tiene que:

$$d\left((t + x)\frac{s + u}{2} + \frac{xy}{2} - \frac{st}{2}\right)$$

$$(s + u)(dt + dx) + (t + x)(ds + du) - t\,ds - s\,dt + x\,dy + y\,dx = 0$$

$$u\,dt + s\,dx + u\,dx + t\,du + x\,ds + x\,du + x\,dy + y\,dx = 0$$

Sustituyendo los valores de *ds*, *dx* y *du* se obtiene:

$$-(t\ dt + s\ dy)(u + s)x - (y\ dy + x\ dt)(x - t)s = 0$$
$$sux\ dt - suy\ dy - ssy\ dy - tsx\ dy - xxt\ dt - syy\ dy = 0$$

Al despejar esta ecuación se obtiene que $s = 0$, lo que implica que el ángulo DAB es recto. Por lo que las nuevas ecuaciones del perímetro y de la superficie del cuadrilátero son:

$$a = u + y + t + \sqrt{u^2 + (x - t)^2} + \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$ABCD = (t + x)\frac{u}{2} + \frac{xy}{2}$$

Se hallan los diferenciales de las ecuaciones teniendo en cuenta que las expresiones radicales se toman como constantes.

$$u\ du + (x - t)(dx - dt) = 0$$
$$x\ dx + y\ dy = 0$$
$$dy = \frac{-x\ dx}{y}$$
$$dt + du + dy = 0$$
$$dt = -du - dy$$
$$dt = \frac{x\ dx - y\ du}{y}$$
$$u(dt + dx) + (t + x)\ du + x\ dy + y\ dx = 0$$

Sustituyendo se obtiene:

$$yu\ du + (x - t)(y\ dx - x\ dx + y\ du) = 0$$
$$u(x\ dx - y\ du + y\ dx) + (t + x)y\ du - x^2 dx + y^2 dx = 0$$

Al despejar estas ecuaciones se obtiene que $y = 0$, lo que implica que el ángulo CBA es recto. Por lo que las nuevas ecuaciones del perímetro y de la superficie del cuadrilátero son:

$$a = t + u + x + \sqrt{u^2 + (x - t)^2}$$
$$ABCD = (t + x)\frac{u}{2}$$

Se encuentra el diferencial de estas dos ecuaciones y se sustituyen algunos valores ***(AB3)***.

$$u\ du + (x - t)(dx - dt) = 0$$

$$dt + du + dx = 0$$
$$dt = -dx - du$$
$$u(dt + dx) + (t + x)du = 0$$
$$x = t$$

De esta manera la ecuación del perímetro y el área se reducen, y se halla nuevamente el diferencial:

$$a = 2t + 2u$$
$$ABCD = ut$$
$$dt + du = 0$$
$$u\,dt + t\,du = 0$$
$$t = u$$

Lo que permite concluir que todos los lados del cuadrilátero tienen la misma medida y el ángulo A es recto. Por lo tanto el cuadrilátero isoperimétrico $ABCD$ con la mayor superficie es un cuadrado ***(AB4)***.

En la obra de Bézout los problemas de optimización son aritméticos, de geometría plana y de geometría espacial, donde se optimizan áreas, volúmenes y productos, haciendo uso del cálculo diferencial para determinar los máximos o mínimos de una función.

Cours D'Analyse de L'École polytechnique de Sturm

Jacques Charles François Sturm autor de esta obra utilizada como un manual escolar, la cual está dividida en dos partes que hacen referencia al cálculo diferencial e integral. En una de las lecciones se trabajan algunos problemas de máximos y mínimos como una aplicación del cálculo. A continuación, se muestra uno.

Cuarta Aplicación:

"Determinar la distancia mínima de un punto dado $M(a, b)$ a una curva de la cual conocemos la ecuación"[12]

Para la demostración de esta aplicación el autor utiliza la fórmula de la distancia entre dos puntos

[12] Traducido de Esteves, A. (2008). Evolução histórica dos problemas de optimização e o seu tratamento no Ensino Secundário português nos séculos XX e XXI. (p. 70)

para plantear la ecuación del problema. La ecuación de la curva será determinada por $y = f(x)$, cuyo dominio no está restringido, y por el punto dado M cuya coordenada es (a, b) y se toma un punto $K = (x, y)$ cualquiera sobre la curva; así la distancia entre los puntos M y K estará definida por la ecuación:

$$\overline{MK}^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$$

Hallando el diferencial de esta ecuación e igualándola a cero se obtiene: ***(AB1)***

$$2(x-a)\,dx + 2(y-b)\,dy = 0$$
$$2(y-b)\,dy = -2(x-a)\,dx$$
$$2(y-b)\,dy = -1 \cdot (2(x-a)\,dx)$$
$$\frac{2(y-b)}{2(x-a)}\frac{dy}{dx} = -1$$

$$\frac{y-b}{x-a} \cdot \frac{dy}{dx} + 1 = 0$$

La relación entre $\frac{dy}{dx}$ como el coeficiente angular de la recta tangente a la curva dada en el punto K y entre $\frac{y-b}{x-a}$ como el coeficiente angular del segmento MK, muestra que son perpendiculares. De esta manera el segmento mínimo debe cortar a la curva dada formando un ángulo recto.

Se considera una circunferencia cuya ecuación es $x^2 + y^2 = r^2$. Se halla su diferencial, se iguala a 0 y se despeja la ecuación:

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Se reemplaza esta última expresión en $\frac{y-b}{x-a} \cdot \frac{dy}{dx} + 1 = 0$ y se obtiene: ***(AB2)***

$$1 - \frac{y-b}{x-a} \cdot \frac{x}{y} = 0$$

Para determinar los valores de x y y, tenemos las ecuaciones de la circunferencia y $y = \frac{b}{a}x$, las cuales representan los puntos de intersección del círculo con la recta MO; entonces mediante las derivadas se puede verificar que KM será la mínima distancia, y $K'M$ la distancia máxima ***(AB3)***.

Ahora si el punto dado es un punto N cualquiera sobre el eje de las abscisas y a una distancia a del centro de la circunferencia, el cuadrado de la distancia NH está representado por la ecuación $y^2 + (x-a)^2$ que es equivalente a la expresión $r^2 - 2ax + a^2$. Pero la derivada de esta ecuación es una cantidad constante $(-2a)$, por lo tanto no puede ser igualada a 0. Entonces, así como existe una distancia mínima NA no se puede obtener de la misma manera que en el caso anterior. Si NH es considerado como una función de *x*, NA no es más un mínimo, porque esta función real para los valores de *x* menores que *r* se tornan imaginarios para los valores mayores ***(AB4)***.

DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS

Selección de los problemas

Para la selección de los problemas, que se llevan al aula para determinar si permiten desarrollar el proceso de optimización, se tuvo en cuenta en primer lugar, la dificultad de los problemas puesto que estos se aplicarían con estudiantes de grado sexto a once. En segundo lugar, se tuvo en cuenta los conceptos previos que deberían tener los estudiantes para abordar los diferentes problemas. A continuación, se muestra una tabla en el que se relacionan la cantidad de problemas abordados y los que fueron luego modificados para aplicar en el aula, teniendo en cuenta el contexto del problema y su tipo de solución.

Autor	Contexto del problema	Tipo de solución	Cantidad problemas estudiados	Problemas aplicados
Euclides de Alejandría	Geometría plana	Geometría plana	3	3
	Geometría espacio	Geometría espacio	2	0

Pappus de Alejandría	Geometría plana	Geometría plana	3	3
	Geometría espacio	Geometría espacio	2	0
L'Hopital	Algebraico	Cálculo	2	0
	Geometría Espacio	Geometría Espacio	3	0
	Real	Geometría plana	1	0
	Físico		1	0
Bezout	Aritmético	Algebraico	1	0
	Geometría plana	Geometría plana	3	3
	Geometría espacio	Geometría espacio	1	0
Sturm	Geometría espacio	Geometría espacio	1	0
	Cálculo	Cálculo	1	1
Serret	Geometría espacio	Geometría espacio	1	0
	Cálculo	Cálculo	1	1
Total			**26**	**11**

Tabla 2: Problemas analizados

De los 26 problemas se seleccionan 11, de los cuales un par de ellos corresponden al mismo enunciado, sólo que se demuestran de diferente manera por autores distintos. Por lo que al unir esos problemas, se presentan únicamente 9 para hacer la respectiva trasposición didactica. Los links para acceder a los applets construidos de cada uno de los problemas se presentan en el Anexo 3.

Actividad Piloto

En el desarrollo del trabajo de grado se toma como referencia la proposición 5 del libro V de Pappus para realizar un ejercicio analítico de una actividad piloto, este ejercicio se realiza con el propósito de verificar que el formato de preguntas con el cual se había diseñado la actividad les permitía a los estudiantes la exploración de todos los elementos de la construcción y el adecuado trance entre las acciones básicas para desarrollar el proceso de optimización.

La proposición seleccionada se adapta como un problema que pueda ser explorado por estudiantes a través de un applet en GeoGebra. El problema se proporcionó a once estudiantes entre 12 y 14 años, de grado octavo, de un colegio en Cota, Cundinamarca; en los grados anteriores no habían trabajado optimización de manera explícita. La docente que orientó la actividad pidió a los estudiantes que explorarán el applet y en una hoja registraron las observaciones y las respuestas.

La situación problema propuesta a los estudiantes fue la siguiente:

De todos los triángulos isoperimétricos (que tienen el mismo perímetro) y con la misma base.

- Explorar la construcción: Pappus, Libro V - Proposición 5
- ¿Existe un triángulo que tenga la mayor área?
- ¿Existe un triángulo que tenga la menor área? ¿Por qué?

La construcción de triángulos isoperimétricos en el applet les permitía a los estudiantes modificar el valor del perímetro y la base. Además, por medio de un deslizador llamado "Triángulos" se puede cambiar la posición del vértice C del triángulo, y a su vez la medida de los lados AC y BC, sin afectar el perímetro ni la medida de la base AB del triángulo.

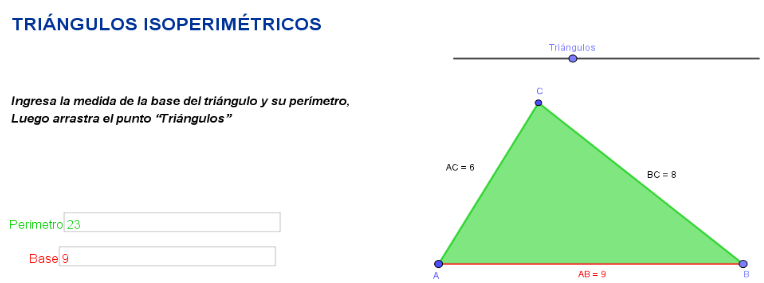


Figura 16. Applet diseñado en GeoGebra

Con el análisis del trabajo de los estudiantes sobre el problema piloto se pudo evidenciar que hubo una dificultad en la manera de plantear la primera pregunta, debido a que en ésta ya se da por hecho que hay un triángulo con un área máxima. Lo anterior debería ser descubierto por los mismos estudiantes, permitiendo que exploren más la construcción y logren evidenciar mejor el cambio y la variación en los diferentes elementos del triángulo, dando paso a que conjeturen y verifiquen de alguna manera lo que afirmaban.

Respecto al applet se vio la necesidad de modificarlo pues, debido a la cantidad de cifras decimales que GeoGebra maneja, algunos estudiantes creían que efectivamente existe un triángulo con menor área. Esto se debe a que el sistema axiomático que maneja dicho software es diferente al utilizado en el aula de clase, puesto que en GeoGebra sí se pueden construir polígonos de área cero mientras que, por definición, en la axiomática del aula no se puede construir. Para ello, conviene generar discusiones con los estudiantes durante la aplicación de las actividades, de tal manera que cada quien pueda dar sus argumentos y así, el profesor pueda orientarlos para que se percaten de esta dificultad del applet.

PROPUESTA DE ACTIVIDADES "OPTIMIZACIÓN E HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS"

Para cada una de las actividades implementadas en el aula se diseñaron tres grupos de preguntas (fases), con el propósito de que un grupo de estudiantes de básica secundaria y media pudieran realizar las cuatro acciones básicas mostradas anteriormente al cabo de cuatro sesiones. En la fase de exploración se espera que el estudiante efectúe las acciones básicas 1 y 2 (AB1 y AB2), identificando las variables inmersas en el problema y las relaciones existentes entre estas. En las fases de análisis y argumentación la principal intención es que los estudiantes puedan comparar los valores de las variables (AB3) y determinar el momento en que una de ellas hace máximo o mínimo el valor de la otra variable (AB4).

Teniendo en cuenta lo anterior se realiza la descripción y el análisis de cada una de las sesiones, en la que se muestran las tareas planteadas en cada una de las fases para guiar el proceso de solución de cada una de las actividades propuesta en el aula.

Los problemas abordados en cada una de las sesiones se presentan en el siguiente esquema:

Sesión 1 Euclides de Alejandría

- Ambientación sobre la historia de Euclides
- Lectura del resumen de la historia del matemático
- Actividad 1: Proposición 7 del libro III
- Actividad 2: Proposición 15 del libro III
- Actividad 3: Proposición 27 del libro IV

Sesión 2 Pappus de Alejandría

- Ambientación sobre la historia Pappus
- Lectura del resumen de la historia del matemático
- Actividad 1: Proposición 5 del libro V (Triángulos isoperimétricos)

Sesión 3 Sturm, Bezout, Pappus

- Ambientación sobre la historia Sturm
- Lectura del resumen de la historia del matemático
- Actividad 1: Cuarta aplicación de Sturm
- Ambientación sobre la historia Bezout
- Lectura del resumen de la historia del matemático
- Actividad 2: Problema V de Bezout (Cuadrilateros isoperimétricos)
- Actividad 3: Adaptación de la proposición 10 del libro V (Pentágonos isoperimétricos)

Sesión 4 Euclides, Pappus

- Actividad 1: Proposición 8 del libro III de Euclides
- Actividad 2: Proposición 73 del libro VII de Pappus

Imagen 2. Estructura de las sesiones

Cada una de las sesiones giró en torno a uno o varios matemáticos que demostraron en su momento los problemas que fueron seleccionados para llevar al aula de clase. Estos matemáticos fueron Euclides de Alejandría, Pappus de Alejandría, Etienne Bézout y Jacques Charles François Sturm. Los demás autores no se seleccionaron porque se consideró que no todos los problemas eran apropiados para abordar en la educación básica secundaria y media, debido al nivel de dificultad que tenían los problemas y a los conceptos previos que debían tener los estudiantes para entenderlos.

Al inicio de cada sesión se hizo una introducción de cada autor, donde los estudiantes tenían que buscar, en distintas fuentes de internet, algunos datos relevantes del matemático o matemáticos que se abordaban en esa sesión. Luego de ello, se hacía una socialización de la información obtenida para determinar entre todos los aportes cuáles eran los más significativos de cada uno de ellos. Finalmente, se proporcionaba la guía con las actividades que se planificaron para ese día, la cual, empezaba con una descripción breve de la vida y aportes de los diferentes matemáticos abordados. Las guías de las actividades propuestas en el aula se pueden apreciar en el Anexo 2 y los links de los applets realizados en geogebra se podrán ver en el Anexo 3.

A continuación, se presentan sesión a sesión, las actividades propuestas y el análisis de los resultados obtenidos en cada una de ellas. Adicionalmente, en el Anexo 4, se presentan las guías resueltas por cada uno de los estudiantes las cuales son evidencia del trabajo realizado en el aula.

Sesión 1 (Euclides de Alejandría)

En la HM se pueden encontrar diferentes personas que trabajaron algunos de sus problemas enfocados en la optimización, uno de ellos es el matemático ***Euclides de Alejandría*** (325 – 265 a.C.) quien fue un matemático y geómetra griego, considerado uno de los grandes matemáticos de la antigüedad y el padre de la geometría. Este personaje es el autor de “Los Elementos” una de las obras matemáticas más conocidas del mundo que ha tenido más de 1.000 traducciones desde su primera publicación en 1.482, compuesta por trece libros y resultado de la compilación del conocimiento de la matemática en los años anteriores, poniendo orden a muchos teoremas de Eudoxo, perfeccionando muchos de estos, dando demostraciones irrefutables para hechos probados sin rigor por sus predecesores y fundando el método axiomático. En esta obra se presentan 465 proposiciones, 93 problemas y 372 teoremas de la geometría plana y espacial, junto con cinco postulados; algunas de estas proposiciones están relacionadas con el proceso de optimizar magnitudes.

Actividad 1: Libro III, Proposición 7

En su tercer libro, en la proposición 7, Euclides plantea que, al tomar un punto sobre el diámetro de un círculo, el segmento de mayor longitud que se determina desde dicho punto hasta un punto cualquiera sobre la circunferencia, va a ser el que está en el centro; además mientras más lejos este el punto del centro, el segmento va a tener una menor longitud. De acuerdo con esto a los estudiantes se les proporcionó una construcción en GeoGebra donde encontraban una circunferencia con centro E, diámetro AD, radio ED y un segmento FB, donde el punto F está sobre el diámetro y el punto B sobre la circunferencia.

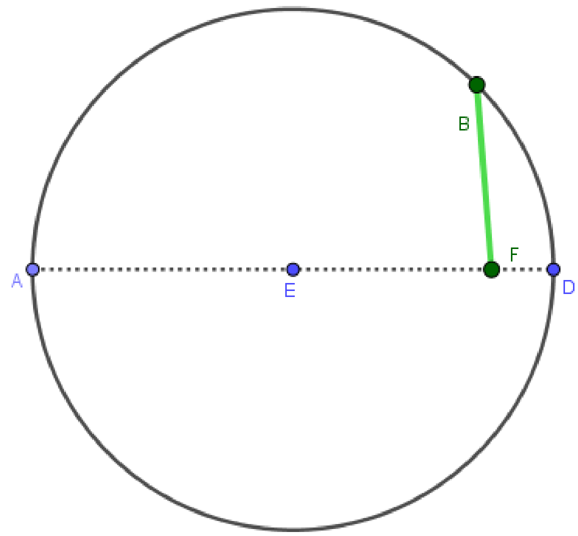


Figura 17: Applet Actividad 1, Sesión 1

Esta primera actividad se proporcionó a siete estudiantes, dos estudiantes de grado sexto (E1, E2), una de séptimo (E3), tres de noveno (E4, E5, E6) y uno de undécimo (E7). A continuación, se presentan las preguntas que guiaban el desarrollo de la actividad.

Link: https://www.geogebra.org/m/sdugjzqt

En esta construcción se encuentra:

- ✓ Una circunferencia con centro E y radio ED.
- ✓ El segmento FB, donde F está sobre el diámetro AD y B está sobre la circunferencia.

Fase de exploración

- Mueve el punto F, ¿qué sucede con el segmento FB?
- Mueve el punto B que se encuentra sobre la circunferencia, ¿qué pasa con el segmento BF?

Fase de Análisis

- ¿Existe un segmento BF con la máxima longitud? ¿Por qué?
- Si existe, menciona qué condiciones deben cumplir los puntos B y F para que sea la máxima.
- ¿Existe un segmento BF con la mínima longitud? ¿Por qué?
- Si existe, menciona qué condiciones deben cumplir los puntos B y F para que la longitud del segmento sea la mínima.

Fase de argumentación (Trabajo en equipo)

- Compara tus respuestas con las de tus compañeros.
- ¿Qué pueden generalizar respecto a los segmentos de la máxima y la mínima longitud y la ubicación de los puntos B y F?
- Socializa la(s) conjetura(s) de tu equipo con todos los demás, luego escribe la conclusión final a la que llegas.

En la solución dada a este problema por cada uno de los estudiantes y en relación con la demostración dada por Euclides a esta proposición, se espera que ellos logren observar que sí existe un segmento BF de máxima longitud, el cual se determina al ser uno de los diámetros de la circunferencia; pero que no es posible encontrar un segmento de mínima longitud, puesto que siempre va a existir otro más pequeño.

En la fase de exploración de este problema se realizan dos preguntas al estudiante, con las cuales se esperaba que pudieran identificar las variables del problema y establecer una relación entre las mismas.

A continuación, se presenta una tabla con las acciones básicas y una breve descripción de las respuestas dadas por cada uno de los estudiantes, determinando que acciones realizó cada uno de ellos.

Acciones Básicas 1 y 2 (AB1 – AB2) Se hace una tabla de estas dos acciones debido a que, por lo general, siempre ocurren las dos al tiempo.		
Estudiante	**Grado**	**Descripción**
E1	Sexto	El estudiante identifica las variables involucradas en el problema, fijando su atención no solo en la variación de la longitud del segmento, sino en el ángulo que se forma entre este y el radio de la circunferencia, puesto que menciona que en la medida en que mueve los puntos se determinan ángulos agudos, rectos y obtusos. Además logra establecer las relaciones entre los segmentos y la ubicación de los puntos al identificar que se pueden formar diferentes tipos de ángulos.

E2	Sexto	El estudiante identifica que las variables implícitas en el problema son la longitud del segmento BF, la posición de los puntos B y F y el ángulo que se forma entre el radio y el segmento determinado por estos puntos. Observa que en la medida en que puntos B y F cambian su posición, el segmento determinado se extiende o cambia su tamaño.
E3	Séptimo	Las variables identificadas por la estudiante en el proceso de solución de este problema son la posición de los puntos B y F, la longitud del segmento que estos puntos determinan y el ángulo que se forma con el radio. También observa que las relaciones entre estas variables son el cambio en el tamaño del segmento y del ángulo que se forma.
E4	Noveno	El estudiante en su proceso de exploración observa que las variables inmersas en la situación son la posición de los puntos B y F y el tamaño del segmento que determinan; cuando los puntos cambian de posición la longitud del segmento aumenta o disminuye.
E5	Noveno	Las variables identificadas por la estudiante son la longitud del segmento BF, la ubicación de los puntos B y F y el ángulo que se determina con el radio de la circunferencia. Cuando los puntos se mueven tanto el ángulo como la longitud del segmento aumentan o disminuyen.
E6	Noveno	La estudiante observa dos variables involucradas en el problema, la posición de los puntos B y F, el tamaño y ubicación de la cuerda determinada por estos puntos. Cuando realiza el arrastre de los puntos la cuerda se mueve alrededor de la circunferencia y cambia su tamaño, en ocasiones en más larga y en otras es más corta.
E7	Undécimo	Cuando el estudiante realiza la exploración de esta situación identifica que las variables son la longitud del segmento BF y la

		posición de los puntos que lo determinan. Al mover estos puntos el segmento aumenta o disminuye su longitud.

Tabla 3: AB1 y 2, Sesión 1, Actividad 1

Como se observa en la tabla anterior, todos los estudiantes lograron identificar diferentes variables inmersas en el problema, al igual que las relaciones existentes entre estas, cómo el movimiento de uno de los puntos afecta la medida de un segmento o de un ángulo.

En las fases de análisis y argumentación se realiza una serie de preguntas al estudiante, con el propósito de que él comparará los valores de las variables identificadas y asimismo estableciera cuando una hace máximo o mínimo el valor de la otra variable.

Acciones Básicas 3 y 4 (AB3 – AB4) Se hace una tabla de estas dos acciones debido a que, por lo general, siempre ocurren las dos al tiempo.		
Estudiante	**Grado**	**Descripción**
E1	Sexto	Al comparar las variables identificadas, el estudiante logra observar que existe un segmento BF de máxima longitud cuando forma un ángulo de 180°, el punto B debe estar sobre el extremo A y el punto F sobre el extremo D; cabe resaltar que E1 nunca afirma que este segmento es un diámetro de la circunferencia. También afirma que no existe un segmento BF de mínima longitud, más no da su justificación.
E2	Sexto	Cuando el estudiante compara las variables inicialmente afirma que no existe un segmento de máxima longitud, pues siempre que se cambie la posición de los puntos B y F el segmento se va a extender. Luego dice que el segmento de máxima longitud se determina cuando el punto F esta sobre el punto D y el B sobre el punto A, es decir, es el diámetro. Posteriormente menciona que si puede existir un segmento de mínima longitud, cuando los dos puntos B y F se encuentran; pero al realizar la última fase de argumentación observa que no existe el mínimo, pues al estar un punto sobre el otro no se determina un segmento.

E3	Séptimo	Al desarrollar las fases de análisis y argumentación se observa que la estudiante encuentra el segmento BF más grande, al colocar al punto F en un extremo del diámetro y al punto B en el otro extremo. También observa que no existe el de mínima longitud, pues la circunferencia tiene infinitos puntos y dentro de un segmento siempre se puede encontrar otro más pequeño.
E4	Noveno	El estudiante realiza la comparación de los valores de las variables identificadas y observa que, si los puntos B y F se posicionan de una determinada manera, se puede alcanzar una longitud máxima. Esto ocurre cuando el punto F se posiciona sobre el extremo del radio que está en la circunferencia y el punto B en el extremo contrario a la posición de F, es decir, la longitud máxima se representa en un diámetro. Para la mínima longitud menciona algo similar a E2, en la fase de análisis afirma que el segmento de mínima longitud existe cuando F se ubica en uno de los límites del radio y B en el límite contrario; pero en la fase de argumentación menciona que no existe un segmento mínimo, más no explica porque cambio o clarificó su idea anterior.
E5	Noveno	Cuando la estudiante compara las variables, identifica que existe un segmento de máxima longitud, pues ella afirma que al ser el segmento BF una distancia siempre va a existir una mayor y una menor; si los puntos B y F están sobre el diámetro y la circunferencia al mismo tiempo se determina la mayor longitud. Al buscar un segmento de mínima longitud alude a dos respuestas diferentes; en la primera afirma que si existe una mínima longitud cuando ambos puntos están en el mismo lugar (punto sobre punto), en la segunda menciona que no hay un segmento mínimo, pero no da una explicación de su respuesta.
E6	Noveno	La estudiante al realizar la comparación de las variables observa

		que si existen segmentos de longitudes máxima y mínima, la máxima cuando el punto B está en un extremo de la circunferencia y el punto F en el extremo contrario, cuando equivale al diámetro; la mínima cuando el punto B se ubica en cualquier posición y el F se ubica sobre este, pero en la argumentación descarta esta idea afirmando que no existe lo mínimo porque siempre habrá un segmento con menor longitud que otro.
E7	Undécimo	Cuando el estudiante realiza las fases de análisis y argumentación ocurre algo muy similar a las respuestas de los estudiantes E5 y E6, pues él menciona que existe tanto el segmento de máxima longitud como el de mínima longitud. Se determina el máximo, en primer lugar, porque la longitud de los segmentos no es infinita y en segundo lugar porque el segmento BF se encuentra limitado por la circunferencia, cuando este segmento es el diámetro se encuentra la medida más larga. El mínimo existe cuando el punto B y F están en el mismo lugar, uno sobre el otro; sin embargo, en la fase de argumentación corrige su respuesta afirmando que no hay una longitud mínima, pues lo que ya había mencionado conformaría un punto y no un segmento.

Tabla 4: AB3 y 4, Sesión 1, Actividad 1

Es importante resaltar que los siete estudiantes que abordaron este primer problema logran realizar las cuatro acciones básicas, aunque algunos de ellos lo hacen de una manera más rápida que los otros; los estudiantes E1 y E3 desde la fase de análisis identifican cual es el segmento de la máxima longitud y la no existencia de un segmento de mínima longitud. Mientras que los cinco estudiantes restantes clarifican esta segunda idea (no existencia de un segmento de mínima longitud) en la fase de argumentación y socialización de sus hallazgos con los demás compañeros y la docente que oriento la sesión.

Actividad 2: Libro III, Proposición 15

En la proposición 15 del libro III de Euclides, él demuestra que el diámetro de una circunferencia es la cuerda de mayor longitud y que la más cercana al centro siempre es más grande que el más lejano. De esta manera en el applet de GeoGebra se construyó una circunferencia con centro C y una cuerda AB, donde los puntos A y B se podían mover libremente sobre la circunferencia.

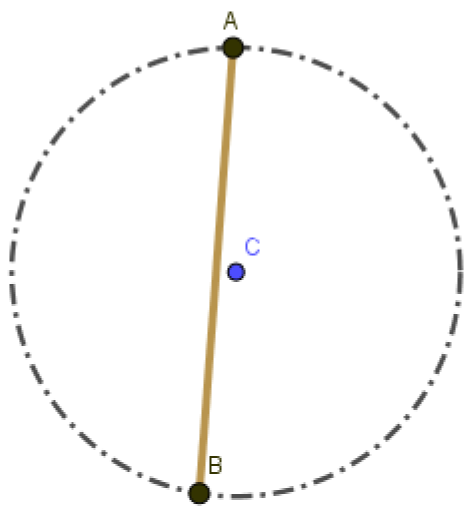


Figura 18: Applet Actividad 2, Sesión 1

La actividad se proporcionó a diez estudiantes, un estudiante de grado sexto (E1), una de séptimo (E2), dos de octavo (E3, E4), tres de noveno (E5, E6, E7), dos de décimo (E8, E9) y uno de undécimo (E10). En seguida se presentan las preguntas que guiaron el proceso de solución.

Link: https://ggbm.at/evgxc3a6

En esta construcción se encuentra:

- ✓ Una circunferencia con centro C.
- ✓ La cuerda AB.

Fase de exploración

- Mueve el punto A, ¿qué pasa con la cuerda AB?
- Mueve el punto B, ¿qué pasa con la cuerda AB?
- ¿Por qué crees que sucede esto?

Fase de interpretación

- ¿Existe una cuerda que tenga la máxima longitud?

- Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir la cuerda para que la longitud sea máxima.
- ¿Existe una cuerda que tenga la mínima longitud? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir la cuerda para que la longitud sea mínima.

Fase de análisis (Trabajo en equipo)

- Compara tus respuestas con las de tus compañeros
- ¿Qué pueden generalizar respecto a la longitud de la cuerda? (formulen una conjetura)
- Socializa la(s) conjetura(s) de tu equipo con todos los demás, luego escribe la conclusión final a la que llegas.

En la solución dada a este problema por cada uno de los estudiantes y en relación con la demostración dada por Euclides a esta proposición, se espera que ellos logren observar que si es posible encontrar una cuerda AB de longitud máxima, cuando esta es uno de los diámetros de la circunferencia; pero que no es posible encontrar una cuerda de mínima longitud, puesto que siempre va a existir otro más pequeño.

A continuación, se presentan dos tablas con las descripciones de lo realizado por cada uno de los estudiantes en cada acción básica y fase del problema.

Acciones Básicas 1 y 2 (AB1 – AB2)		
Estudiante	**Grado**	**Descripción**
E1	Sexto	En la fase de exploración el estudiante identifica la variación de los puntos AB sobre la circunferencia y de la misma manera de la longitud del segmento determinado por estos puntos. Dependiendo de la localización de los puntos la cuerda AB se agranda o empequeñece, mientras más cerca este el punto A del B la cuerda es más pequeña y cuando A se aleja de B la cuerda es más grande.
E2	Séptimo	La estudiante identifica que las variables involucradas en la situación son la posición de los puntos A y B y la longitud de la cuerda. Cuando mueve cualquiera de estos dos puntos la cuerda se hace más larga o más corta, porque al desplazar los puntos sobre la circunferencia, estos se alejan o se acercan modificando la

		longitud de la cuerda.
E3	Octavo	Al realizar la exploración del problema la estudiante identifica como variables la posición de los puntos y el tamaño de la cuerda, porque al mover los puntos A y B la cuerda AB que se interseca con el punto C, que representa el diámetro, se vuelve más pequeña.
E4	Octavo	La estudiante observa que las variables inmersas en el problema son la ubicación de los puntos y la medida de la cuerda; cuando se mueve alguno de los puntos A o B la cuerda se vuelve más grande o más pequeña.
E5	Noveno	Durante la fase de exploración de la situación el estudiante identifica que las variables son la posición de los puntos y el tamaño del segmento que este determina. Al estar la cuerda determinada por la posición de los puntos su distancia también cambia en la medida en que se ubiquen a B y A.
E6	Noveno	La estudiante identifica que las variables involucradas en la situación explorada son la longitud de la cuerda y la ubicación de los puntos A y B. Cuando los puntos se mueven la media de la cuerda aumenta o disminuye, puesto que estos dos puntos son los que definen esta longitud.
E7	Noveno	Al realizar la exploración del problema la estudiante observa que la longitud de la cuerda cambia en la medida en que los puntos A y B se mueven sobre la circunferencia, cuando se separan la longitud se hace más grande.
E8	Décimo	En la fase de exploración de la situación presentada la estudiante identifica que las variables inmersas son la longitud de la cuerda y la ubicación de los puntos A y B, cuando los puntos se aproximan, el tamaño de la cuerda disminuye y cuando los puntos se alejan aumenta su longitud.
E9	Décimo	La estudiante observa que las variables involucradas en el

		problema presentado son la posición de los puntos A y B y el tamaño de la cuerda AB, entre más cerca estén los puntos la cuerda es más pequeña y cuando esta interseca al punto C representa al diámetro de la circunferencia. Cuando se cambia la posición de un punto se altera el valor (longitud) de la cuerda.
E10	Undécimo	En la fase de exploración el estudiante identifica que las variables de la situación son la ubicación de los puntos A y B y la longitud de la cuerda AB. El tamaño de la cuerda cambia en la medida en que los puntos se mueven sobre la circunferencia, porque cuando la cuerda se aleja del centro existe una mayor diferencia entre la longitud de los arcos que determinan los puntos A y B sobre la circunferencia.

Tabla 5: AB1 y 2, Sesión 1, Actividad 2

De acuerdo con las respuestas dadas por los estudiantes a las preguntas planteadas en el problema se puede concluir que los estudiantes que realizaron esta actividad lograron pasar satisfactoriamente por las acciones básicas 1 y 2, identificando las variables y estableciendo relaciones entre las mismas. Todos observaron que la posición de los puntos A y B sobre la circunferencia modifican la longitud de la cuerda.

Acciones Básicas 3 y 4 (AB3 – AB4)		
Estudiante	**Grado**	**Descripción**
E1	Sexto	Al realizar la comparación de las variables identificadas, el estudiante observa la existencia de un segmento de máxima longitud cuando la cuerda es un diámetro, al ser la mayor distancia (más lejana) entre los puntos A y B. Pero al analizar la existencia de una cuerda de mínima longitud, el estudiante menciona dos ideas; inicialmente afirma que sí existe puesto que el segmento se puede hacer cada vez más pequeño, luego observa y refuta su idea diciendo que no existe una cuerda de mínima longitud porque siempre va a tender a un valor más pequeño cada vez que los puntos se

		acercan.
E2	Séptimo	La estudiante realiza la comparación entre los valores de las variables observando que la cuerda alcanza una longitud máxima cuando pasa por el punto central de la circunferencia, formando un diámetro. También menciona que no existe una cuerda de mínima distancia puesto que siempre se puede encontrar una de menor longitud dentro de otra.
E3	Octavo	Al realizar la comparación entre los valores de las variables identificadas la estudiante observa que el diámetro es la cuerda de máxima longitud, porque está limitada por dos puntos extremos de la circunferencia. Además, menciona que no existe una cuerda de longitud mínima porque siempre va a existir una cuerda más pequeña.
E4	Octavo	La estudiante realiza la comparación entre las variables encontrando que si existe una cuerda de máxima longitud, la cual es el diámetro, en el momento en que esta atraviesa la circunferencia y pasa por el centro. Cuando busca una cuerda de mínima longitud nota que no existe, puesto que hay infinitas longitudes y siempre se va a encontrar una más pequeña que la anterior.
E5	Noveno	Cuando el estudiante compara las variables identificadas nota que el diámetro, o la cuerda que pasa por el centro de la circunferencia, es la de mayor longitud; pero no existe una cuerda de mínima longitud porque entre más alejada este del centro más pequeño será el segmento.
E6	Noveno	Al realizar la comparación entre los valores de las variables la estudiante observa que existe una cuerda de máxima longitud, cuando está por el punto central y los puntos A y B están en ambos extremos de la circunferencia [haciendo

		referencia a los puntos extremos del diámetro], la cuerda es el diámetro. Además menciona que no existe una cuerda que tenga la mínima longitud, porque siempre existirá otra longitud más pequeña en cualquier segmento que se encuentre.
E7	Noveno	La estudiante indica que sí existe una cuerda de máxima longitud, cuando los puntos A y B se encuentran en los extremos de la circunferencia y la cuerda pasa por el centro, determinando así un diámetro; también afirma que no existe una cuerda de mínima longitud, pero no explica porque.
E8	Décimo	Al realizar la comparación de las variables y la fase de interpretación la estudiante alude a dos posiciones muy diferentes a las de sus compañeros; ella afirma que si podría llegar a existir una cuerda de máxima longitud cuando los puntos están limitados por una figura cerrada, porque de esta manera los puntos se pueden ubicar de tal manera que se obtenga la máxima longitud posible dentro de la figura. Al indagar sobre la existencia de una cuerda de mínima longitud ella menciona que, si podría existir cuando la cuerda este dentro de una figura, sin que ambos puntos estén en el mismo lugar porque de esta manera no se determinaría una cuerda. Luego en la fase de análisis y socialización la estudiante llega a la observación de que la cuerda de máxima longitud es el diámetro dentro de la circunferencia, pero no existe una de mínima longitud porque siempre se va a tender a una más pequeña.
E9	Décimo	La estudiante compara los valores de las variables identificadas y concluye que la cuerda de máxima longitud es el diámetro, el cual consta de dos puntos extremos sobre la circunferencia y pasa por el centro de la misma. Además

		afirma que no existe una cuerda de longitud mínima porque siempre se tiende a una cuerda de longitud cada vez más pequeña.
E10	Undécimo	En el momento de realizar la comparación de las variables el estudiante encuentra que existe una cuerda de máxima longitud, puesto que esta se encuentra limitada por una circunferencia y al pasar por el centro de la circunferencia llega a su máxima longitud, siendo el diámetro de la misma. Sin embargo, no es posible encontrar una cuerda de longitud mínima, porque al ser un segmento cuyos puntos de inicio y final están sobre la circunferencia, no se puede determinar una longitud mínima. Cuando la cuerda está lejos del centro su longitud disminuye, pero cuando se encuentra cerca del centro de la circunferencia la longitud de la cuerda es mayor.

Tabla 6: AB3 y 4, Sesión 1, Actividad 2

En esta segunda actividad se puede ver como los estudiantes tuvieron un mayor acercamiento a la solución brindada por Euclides para su proposición, antes de realizar la socialización y la fase de argumentación la mayoría de los estudiantes ya tenían claro la existencia de la cuerda de máxima longitud y la no existencia de la mínima, de igual manera ya podían justificar el por qué sucedía esto. Esto se debe a la relación de esta actividad con la primera que se propuso en el aula. En conclusión, los estudiantes lograron transitar por las cuatro acciones básicas en el proceso de solución de la actividad propuesta.

Actividad 3: Libro IV, Proposición 27

Euclides en su tercer libro, en la proposición 27 alude a que de todos los paralelogramos semejantes a uno dado y construidos de manera semejante a partir de la mitad del segmento, el paralelogramo de mayor área es aquel que abarca la mitad del paralelogramo inicial.

En la solución dada a este problema por cada uno de los estudiantes y en relación con la demostración dada por Euclides a esta proposición, se espera que ellos logren observar que no existe un paralelogramo AZ [notación usada por Euclides] semejante a AC con la mínima área posible y que el paralelogramo AZ que es semejante a AC con la mayor área posible se determina cuando el punto W coincide con el punto Z, siendo este el punto medio del segmento DC. El área del paralelogramo AZ ocupa la mitad del área del paralelogramo AC.

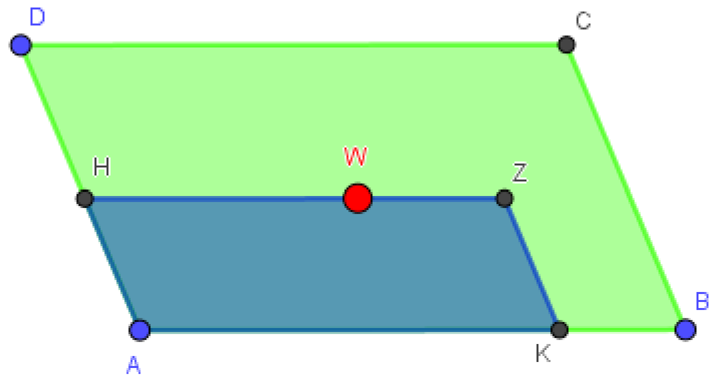


Figura 19: Applet Actividad 3, Sesión 1

La actividad se proporcionó a nueve estudiantes, un estudiante de grado sexto (E1), una de séptimo (E2), una de octavo (E3), tres de noveno (E4, E5, E6), dos de décimo (E7, E8) y uno de undécimo (E9). A continuación, se presentan las preguntas abordadas por los estudiantes.

Link: https://ggbm.at/pn4arvrk

En esta construcción se encuentra:

- Paralelogramo AC
- Paralelogramo AZ (semejante al paralelogramo AC).

Contesta las siguientes preguntas:

- ¿Qué puntos puedes mover y cuál es la función de cada uno de estos puntos?
- ¿Existe un paralelogramo AZ semejante a AC con la mínima área posible? Si existe, menciona las condiciones que debe cumplir el paralelogramo AZ para que el área sea mínima.
- ¿Existe un paralelogramo AZ semejante a AC con la máxima área posible? Si existe, menciona las condiciones que debe cumplir el paralelogramo AZ para que el área sea máxima.

A continuación, se presentan dos tablas con las descripciones de lo realizado por cada uno de los estudiantes y de las respuestas dadas a las tres preguntas planteadas.

Acciones Básicas 1 y 2 (AB1 – AB2)

Estudiante	Grado	Descripción
E1	Sexto	El estudiante observa que en la medida en que el punto A se mueve gira los vértices del paralelogramo, el punto B modifica la longitud de un lado y el punto D gira el lado superior de la figura.
E2	Séptimo	En esta primera fase la estudiante identifica que al mover el punto W cambia el tamaño del paralelogramo AZ, al mover los puntos A, D y B cambia la orientación de los paralelogramos. Cabe resaltar que ella afirma que aunque se muevan los puntos, estos dos paralelogramos siguen siendo semejantes.
E3	Octavo	La estudiante observa que si se mueve el punto W hacia la derecha se forman dos paralelogramos exactamente iguales [paralelogramos congruentes]. También que al mover los puntos libres de la construcción, la suma de los ángulos tiende a ser el mismo valor.
E4	Noveno	Al realizar la exploración el estudiante observa que los puntos que puede mover son A, B, W y D, que a su vez modifican las longitudes de los segmentos $DC, DH, WZ, WH, WK, BK, CK$, AK y HA.
E5	Noveno	La estudiante identifica que el punto W hace que el paralelogramo AZ sea más grande o pequeño, modifica su altura; el punto B cambia la anchura de los dos paralelogramos; el punto D modifica la altura y la inclinación de ambas figuras, y el punto A cambia la longitud de los paralelogramos.
E6	Noveno	En la exploración de este problema la estudiante observa que puede mover los puntos W, D, A y B; cuando mueve a B cambia la forma horizontal de los paralelogramos y su tamaño; al mover D modifica su inclinación diagonal; cuando se mueve A se hace más pequeño, y al mover W cambia la altura del paralelogramo AZ.
E7	Décimo	La estudiante identifica que se pueden mover los puntos A, B y D

		que se encuentran en los vértices del paralelogramo AC y le dan forma a este, el punto W que esta sobre un segmento del paralelogramo AZ y modifica la forma de esta figura.
E8	Décimo	Al explorar el problema propuesto la estudiante observa que al mover el punto W completamente hacia la derecha, se determinan dos paralelogramos iguales [congruentes] y que la suma de los ángulos tiende a ser siempre la misma.
E9	Undécimo	El estudiante identifica que el punto D contrae o extiende verticalmente a los paralelogramos, el punto B permite mover el segmento CB y cambia la forma del paralelogramo, el punto A contrae o extiende de manera diagonal los paralelogramos y el punto W contrae o extiende tanto vertical como horizontalmente y de manera inversamente proporcional al paralelogramo interno.

Tabla 7: AB1 y 2, Sesión 1, Actividad 3

En este tercer problema se puede ver que todos los estudiantes logran identificar los puntos que modifican algún atributo en la construcción, determinando que es lo que cambia en cada caso. De esta manera es posible afirmar que los nueve estudiantes logran realizar las acciones básicas 1 y 2.

Acciones Básicas 3 y 4 (AB3 – AB4)		
Estudiante	**Grado**	**Descripción**
E1	Sexto	Al realizar la búsqueda del paralelogramo AZ con la mínima área posible, el estudiante afirma que no existe porque AZ solo se puede extender hasta la recta CD y si el paralelogramo AC se hace más pequeño, siempre se va a cumplir que su área es mayor que la de AZ. Además, afirma que como el paralelogramo AZ solo se extiende hacia arriba nunca va a ser semejante al paralelogramo AC, es decir, que tampoco es posible determinar un paralelogramo semejante con área máxima.
E2	Séptimo	La estudiante expresa que no existe un paralelogramo AZ con área mínima y semejante a AC, porque se puede seguir

		encogiendo de manera infinita tendiendo a ser un segmento. De igual manera enuncia que si existe un paralelogramo AZ con máxima área, cuando el punto W se ubica sobre CD y cubre la mitad del paralelogramo AC.
E3	Octavo	Cuando la estudiante realiza la búsqueda de un paralelogramo AZ con el área mínima, encuentra que este debe estar tendiendo al segmento AB; también observa que no existe uno con área máxima semejante a AC, para que esto sucediera deberían tener la misma área.
E4	Noveno	Al realizar la búsqueda del paralelogramo AZ con área mínima el estudiante afirma que no existe, puesto que sin importar la posición del punto B, [la distancia] del punto [K] que separa [al punto B] es existente [siempre existirá, por tanto no es posible determinar tal paralelogramo]. En cuanto a la existencia de un paralelogramo AZ con la máxima área el estudiante no da ninguna respuesta.
E5	Noveno	El estudiante alude a la no existencia de un paralelogramo AZ con área mínima, puesto que siempre es posible encontrar un área menor a la anterior. Además, enuncia que si existe uno de máxima área, cuando el punto W se coloca exactamente sobre el segmento DC, el paralelogramo AZ será exactamente la mitad del paralelogramo AC, refiriéndose al valor numérico de sus áreas.
E6	Noveno	Cuando la estudiante busca un paralelogramo AZ con la mínima área posible encuentra que no existe, porque nunca se va a llegar a un paralelogramo más pequeño, siempre va a existir uno de diferencia. También afirma que no es posible determinar un paralelogramo AZ con la mayor área posible, puesto que el más pequeño no va a superar a otro, pero se puede dar el caso de que tenga la misma área.

E7	Décimo	La estudiante enuncia que no existe un paralelogramo AZ con área mínima, porque siempre es posible determinar un área más pequeña que nunca va a ser cero. Además expresa que no existe un paralelogramo AZ con área máxima porque nunca va a tener un área mayor a la del paralelogramo AC.
E8	Décimo	La estudiante observa que el paralelogramo AZ con la mínima área posible debe estar tendiendo al segmento AB y que no existe un paralelogramo AZ de área máxima que sea semejante a AC, pero que pueden llegar a tener la misma área.
E9	Undécimo	Al realizar la búsqueda del paralelogramo AZ con área mínima el estudiante afirma que esta se encuentra cuando W es el punto central entre A y B, sin embargo, no es semejante a AC. Además enuncia que el de área máxima se determina cuando el punto W se encuentra en el mismo punto con Z, el paralelogramo AZ determina un área igual a la del paralelogramo AC, pero no es semejante a este paralelogramo sino a KC.

Tabla 8: AB3 y 4, Sesión 1, Actividad 3

Como se puede ver en la tabla anterior todos los estudiantes lograr realizar una comparación entre las variables identificadas para buscar el área máxima o el área mínima (AB3); pero no todos logran determinar la no existencia de un paralelogramo AZ con la mínima área posible semejante a la del paralelogramo AC, y el momento en que se determina el área máxima. Solo E2 y E5, pueden observar estas dos características del problema. Los primeros ocho estudiantes identifican la no existencia de un área de mínima, puesto que siempre es posible determinar otra más pequeña.

Sesión 2 (Pappus de Alejandría)

El segundo matemático es **Pappus de Alejandría**, quien fue precursor de la geometría moderna y autor de la Colección Matemática, una obra compuesta de ocho libros en la que presenta un panorama histórico de la matemática clásica, incluyendo algunas demostraciones alternativas del trabajo de otros matemáticos famosos de su época y proponiendo nuevas proposiciones geométricas entorno a las cónicas, superficies y volúmenes de sólidos de revolución, algunas de ellas relacionadas con el cálculo de máximos y mínimos.

En esta sesión se abordó uno de los problemas de Pappus de Alejandría en la que participaron nueve estudiantes entre los grados sexto y undécimo de básica secundaria; una estudiante de grado sexto (E1), dos de séptimo (E2, E3), uno de octavo (E4), tres de noveno (E5, E6, E7), una de décimo (E8) uno de undécimo (E9).

Actividad 1: Libro V, Proposición 5

Al abordar esta actividad, se pretende que los estudiantes lleguen a una aproximación de la proposición 5 del libro V de Pappus, la cual dice que entre los triángulos isoperimétricos y con la misma base, el triángulo isósceles es el mayor, y el que más se aproxima al triángulo isósceles es continuamente mayor.

Esta actividad se compone de dos partes. En la parte I (fase de exploración) se pide que encuentren diferentes triángulos con el mismo perímetro y se les hace las siguientes preguntas: ¿tienen la misma área? ¿Por qué? Con las respuestas a estas preguntas se observa si efectivamente cada estudiante realiza implícitamente las acciones básicas 1 y 2. En la parte II, se realizan diferentes preguntas en las fases de análisis y de argumentación, cuyo objetivo es que los estudiantes reconozcan que el triángulo isósceles es el que tiene máxima área y que no existe el que tiene área mínima.

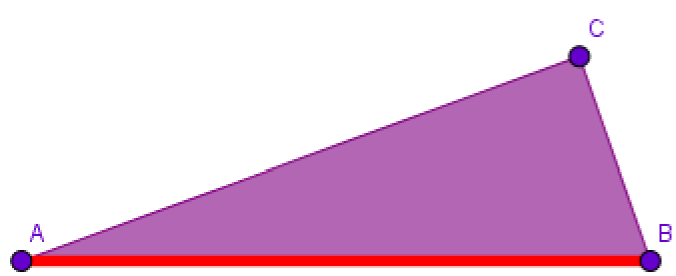


Figura 20: Applet Actividad 1, Sesión 2

Parte I

En GeoGebra sigue las siguientes instrucciones:

- Construye un triángulo ΔABC cualquiera. (con la opción polígono)

- Toma uno de los lados del triángulo como la base del mismo. (Cámbiale el color)
- Construye una de las alturas del triángulo. (Ten en cuenta que la altura es el segmento perpendicular a la recta que contiene la base que pasa por el vértice opuesto)
- Determina la medida de los lados del triángulo y de la altura. (usa la opción "Distancia o longitud")
- Encuentra el perímetro del triángulo y su área. (Usando opciones "Distancia o longitud" y "área")
- Mueve el punto A.

  ¿Qué cambia? ____

  ¿Qué permanece fijo? ____
- Mueve el punto B.

  ¿Qué cambia? ____

  ¿Qué permanece fijo? ____
- Mueve el punto C.

  ¿Qué cambia? ____

  ¿Qué permanece fijo? ____
- Encuentra tres triángulos diferentes, que tengan el mismo perímetro. ¿Tienen la misma área? ¿Por qué?

Parte II

Abre el archivo "Triángulos Isoperimétricos"

Link: https://ggbm.at/f3dxd5cy

En esta construcción encontrarás:

  ✓ Un triángulo ABC.

- ¿Qué tipo de triángulos se pueden formar al mover el punto C?
- ¿Existe un triángulo que tenga el área máxima? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir este triángulo.
- ¿Existe un triángulo que tenga el área mínima? ¿Por qué? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir este triángulo.

Fase de argumentación (Trabajo en equipo)

- Compara tus respuestas con las de tus compañeros
- ¿Qué pueden generalizar respecto al área de los triángulos?

- Socializa la(s) conjetura(s) de tu equipo con todos los demás, luego escribe la conclusión final a la que llegas.

A continuación, se presenta una tabla con la descripción de las respuestas dadas por los estudiantes y su tránsito por las acciones básicas, determinando cuáles acciones pudo realizar cada uno de ellos con respecto a la actividad propuesta.

Acción Básica 1 y 2 (AB1 y AB2)		
Estudiante	**Grado**	**Descripción**
E1	Sexto	El estudiante menciona que los triángulos con el mismo perímetro que encontró, no tienen la misma área, no coinciden sus áreas porque la longitud entre los puntos cambia y su vez la altura del triángulo. De lo anterior se infiere que efectivamente el estudiante identifica las variables involucradas en el problema (área y altura). Además, reconoce una relación de cambio entre la altura del triángulo y su área, logrando establecer que, aunque los triángulos tengan el mismo perímetro y la misma base, los triángulos siempre tendrán diferente área, argumentándolo con la fórmula del área de un triángulo.
E2	Séptimo	Se observa que al igual que el E1, esta estudiante a partir de la fórmula para determinar el área de un triángulo, también logra identificar que las variables inmersas en el problema son la altura y el área. A su vez, identifica la relación que hay entre las mismas, debido a que menciona que el área es "base por la altura sobre dos" reconociendo, implícitamente, la independencia de la variable altura.
E3	Séptimo	Este estudiante identifica las variables involucradas (altura y área), debido a que menciona que al mover cualquier segmento la altura cambia, reconociendo que existe una relación de cambio entre ellas. Sin embargo, no se hace explicita cuál es esa relación.

E4	Octavo	La estudiante reconoce que los triángulos que encontró con el mismo perímetro, tenían valores de área diferentes, estableciendo la existencia de una relación cambio entre la altura y el área de los diferentes triángulos isoperimétricos. Lo anterior se evidencia al mencionar que "en todos los casos la altura cambiaba afectando el área". Además, reconoce que el área cambia dependiendo de la altura.
E5	Noveno	La estudiante menciona que sólo hay un caso donde dos triángulos diferentes, con el mismo perímetro y base, pueden tener el área igual [haciendo referencia a dos triángulos que encontró con la misma altura] y expresa que en los demás casos la altura siempre cambia, lo que hace que tengan diferente área. Además, hace explícito que evidencia una relación de cambio entre el área y la altura del triángulo, diferenciando la variable dependiente y la independiente.
E6	Noveno	Esta estudiante reconoce que no necesariamente los triángulos, por tener el mismo perímetro, tienen la misma área. Argumenta que el perímetro es la suma de todos los lados lo que hace que no necesariamente tengan la misma área, debido a que la altura y la base pueden variar al igual que la hipotenusa [haciendo referencia al lado más largo del triángulo, que no necesariamente es rectángulo].
E7	Noveno	Solo una de las variables inmersas en el problema (el área) es identificada por este estudiante de manera explícita, ya que reconoce que el tener el mismo perímetro no hace que los triángulos tengan la misma área. Sin embargo, establece una relación entre el área con algunos valores numéricos que arroja el programa que hacen referencia a los lados del triángulo. El estudiante realiza una comparación entre la forma de determinar el perímetro del triángulo con la fórmula para encontrar el área al decir que hay dígitos diferentes [haciendo referencia a los valores de los lados del triángulo], que al sumarlos dan el mismo resultado, pero al

		multiplicarlos da diferente.
E8	Décimo	Al igual que E5, esta estudiante determina que la altura y el área son las variables involucradas en el problema, estableciendo una relación de cambio entre las mismas. Puntualiza que sólo en un caso hay dos triángulos diferentes que tienen la misma área y lo describe como el “inverso al original”.
E9	Undécimo	Al igual que E1 y E2, este estudiante menciona que el área de los triángulos no es igual porque la altura cambia, lo que evidencia que él identifica y establece una relación de cambio entre la altura y el área del triángulo cambia. Además, argumenta que como la fórmula del área es $\frac{bh}{2}$, cuando h cambia, también cambiará su área.

Tabla 9: AB1 y 2, Sesión 2, Actividad 1

De la tabla anterior se puede inferir que, para esta actividad, ocho de los nueve estudiantes lograron desarrollar efectivamente las acciones básicas 1 y 2, determinando que la relación de covariación está dada entre la altura y el área de los triángulos isoperimétricos con la misma base.

A continuación, se presenta una tabla que une las acciones básicas 3 y 4 del problema que hace referencia a la proposición 5 del libro V de Pappus. Respecto a la acción básica 3 (AB3), se considera que emerge de manera inmediata debido a la forma en que se les presenta a los estudiantes el problema. Esto se presenta por la naturaleza del Applet, los estudiantes comparan los valores de las áreas de los diferentes triángulos isoperimétricos.

Acción Básica 3 y 4 (AB3 y AB4)		
Estudiante	**Grado**	**Descripción**
E1	Sexto	Por un lado, se evidencia que el estudiante efectivamente encuentra el triángulo que, para él tiene área máxima. Sin embargo, después de realizar una comparación entre las diferentes áreas de los triángulos menciona que el que tiene mayor área es escaleno, debido a que él identifica que los lados del triángulo son

		$3{,}1\ cm$, $3{,}33\ cm$ y su base es $5\ cm$. Se observa que el estudiante cumple la AB4, además, se concluye que hay dificultad con el applet de Geogebra, ya que este no permite que se manejen más de dos cifras decimales. En la fase de argumentación, este estudiante a partir de la discusión con sus compañeros, identifica que el triángulo que tiene área máxima es el triángulo isósceles. Por otro lado, respecto a la búsqueda del área mínima, se logra ver que este estudiante logra identificar que dicha área no existe, ya que reconoce que para que exista el triángulo su área debe ser mayor a cero. Además, menciona que "siempre van a existir una infinidad de áreas más pequeñas".
E2	Séptimo	Respecto al área máxima, la estudiante reconoce la existencia del triángulo, identificando que la condición es que la "altura del triángulo cruce la mitad de la base del triángulo". Es evidente que la estudiante está dando una característica propia del triángulo isósceles. En cuanto al área mínima, una herramienta importante para su búsqueda fue el zoom, ya que permitió que la estudiante pudiera encontrar un triángulo cada vez menor.
E3	Séptimo	Inicialmente el estudiante, en la fase análisis, identifica que el triángulo que tiene mayor área es aquél con $5.06\ cm^2$, mencionando que es un triángulo isósceles. Luego de discutir con uno de sus compañeros, en la fase de argumentación, logra ver que el dicho triángulo se puede obtener al ubicar el vértice sobre "una línea en el eje" [haciendo referencia a la mediatriz de la base del triángulo]. Despues, el estudiante en la primera fase, determina que si existe un triángulo con el área mínima, estableciendo el valor numérico más pequeño que arroja el applet. Sin embargo, luego de que los

		compañeros mencionan que se puede hacer zoom para encontrar más, se da cuenta que no puede encontrar un área mínima. Finalmente, con la discusión que hubo frente a los resultados de cada uno, este estudiante menciona que el área mínima no existe ya que el valor del área debe ser mayor a cero.
E4	Octavo	La estudiante al comparar las áreas de los diferentes triángulos isoperimétricos que se pueden formar con la misma base, encuentra que si existe un triángulo cuya área es máxima con una medida de $5.06\ cm^2$ y analiza que la característica del triángulo es que tenga los lados $\overline{CA}$ y $\overline{BC}$ iguales [congruentes]. Además, considera que el área mínima es $0\ cm^2$. Sin embargo, después de analizar con sus compañeros que si el área es cero, entonces el triángulo deja de existir. Despues menciona que no existe dicha área mínima debido a que al usar la herramienta “zoom” ya puede determinar siempre un valor diferente para el área.
E5	Noveno	Al igual que E4, esta estudiante identifica que el área máxima es aquel con un área de $5.06\ cm^2$, $\overline{CA}$ y $\overline{BC}$ iguales [congruentes] y menciona que el triángulo debe ser isósceles. Respecto al área mínima, esta estudiante identifica que no existe debido a que al realizar zoom puede encontrar un triángulo con un área menor. Además menciona que hay infitos puntos, haciendo referencia a uno de los vertices del triángulo. En la fase de argumentación, la estudiante concluye la relación funcional entre el área y la altura del triángulo.
E6	Noveno	Al igual que el E2, esta estudiante despues de comparar las áreas de los diferentes triángulos, llega a la conclusión de que el triángulo debe ser el isóceles. Además, descubre que no existe el triángulo con la mínima área ya que siempre puede encontrar una más pequeña que la enterior.

E7	Noveno	Inicialmente este estudiante, al igual que varios estudiantes, dice él área más grande es quel que tiene $5.06\ cm^2$. Luego de buscar las características de este triángulo, se da cuenta que es un triángulo isósceles. Después de observar que sus compañeros utilizan la herramienta zoom, él la usa para determinar la inexistencia del triángulo cuya área es mínima.
E8	Décimo	Se evidencia que el estudiante efectivamente encuentra el triángulo que tiene área máxima pero dice que el que cumple esta condición es un triángulo escaleno, debido a que él identifica que los lados del triángulo son $3{,}32\ cm$, $3{,}12\ cm$ y su base es $5\ cm$. En la fase de argumentación, este estudiante a partir de la discusión con sus compañeros, identifica que el triángulo que tiene área máxima es el triángulo isósceles. Respecto a la mínima área, menciona que este triángulo sí podría existir, sin embargo, no meciona cuál es, pero luego de realizar la socialización con su compañeros puede observar que no existe un triángulo que tenga la mínima área y que los valores del área tienen que ser mayores que cero. Además, agrega que una condición que debe tener el triángulo con máxima área es que el "eje" haciendo referencia a la mediatríz de la base, debe pasar por el centro de la elipse generada por el vertice de los triángulos isoperimétricos. Cabe resaltar que dicha elipse no contiene dos de sus puntos, pues en el caso en que los tres vertices del triángulo son colineales dicha figura no existe. Sin embargo, Geogebra, al utilizar otro sistema axiomático que el usado en clase, genera la elipse completa.
E9	Undécimo	El estudiante identifica con facilidad el área máxima entre los triángulos, debido a que luego de realizar la comparación entre los triángulos hace explícito que el triángulo máximo es el isósceles.

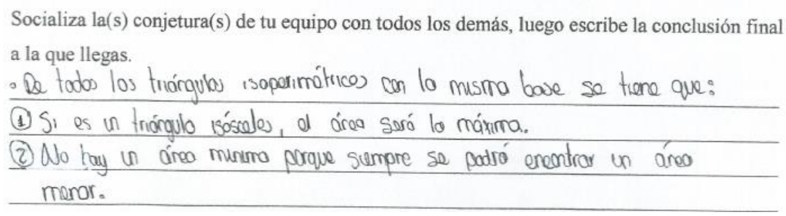
		Además, reconoce que no existe el triángulo de área mínima, porque menciona que siempre se podrá encontrar un área menor.  Socializa la(s) conjetura(s) de tu equipo con todos los demás, luego escribe la conclusión final a la que llegas. • De todos los triángulos isoperimétricos con la misma base se tiene que: ① Si es un triángulo isósceles, el área será la máxima. ② No hay un área mínima porque siempre se podrá encontrar un área menor. *Figura 21: Respuesta sesión 2 E9*

Tabla 10: AB3 y 4, Sesión 2, Actividad 1

Respecto a las acciones básicas 3 y 4 que se desarrollaron en la solución de las preguntas propuestas en esta actividad, se evidencia que se cumplió con lo que se esperaba. Sin embargo, se considera que nuevamente se debe realizar una modificación al applet en cuanto a las cifras decimales que arroja GeoGebra para que no haya dificultades en el momento de identificar cuál es el triángulo que tiene área máxima o mínima.

Sesión 3 (Bezout, Sturm, Pappus)

El tercer matemático es **Jacques Charles François Sturm** (1803 - 1855), quien fue un matemático francés, nacido en Ginebra. En el año 1840 fue nombrado profesor de mecánica de la Facultad de Ciencias de París. Autor de la obra matemática denominada Cours D'Analyse de L'École Polytechnique, la cual años más adelante fue utilizada como un manual escolar, está dividida en dos partes que hacen referencia al cálculo diferencial e integral. En una de las lecciones se trabajan algunos problemas de máximos y mínimos como una aplicación del cálculo, por lo que se han adaptado en applets construidos en GeoGebra y reestructurado en forma de problemas. A continuación, se presenta la primera actividad de esta sesión.

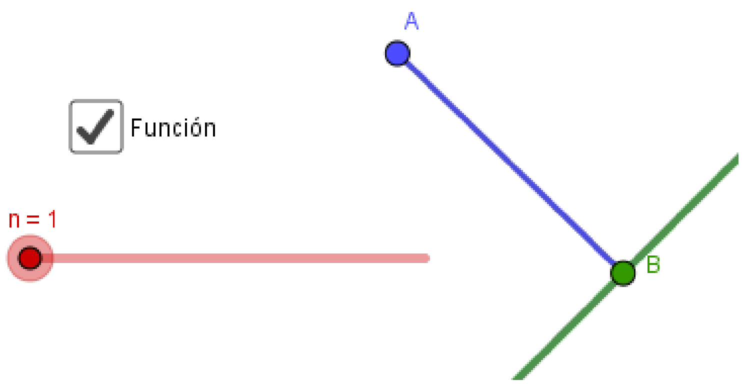


Figura 22: Applet Actividad 1, Sesión 3

Actividad 1: Cuarta Aplicación

Abre el archivo “Sturm, Cuarta Aplicación”

Link: https://www.geogebra.org/m/mnh2g75a/pe/286229

En esta construcción encontrarás:

- ✓ Segmento AB
- ✓ Gráfica de una función f(x).
- ✓ Un deslizador “Función” para modificar el tipo de función.

- Mueve el punto B sobre la recta, ¿Qué sucede con el segmento?
- ¿Existe un segmento que tenga la longitud máxima? ¿Por qué? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir.
- ¿Existe un segmento que tenga la longitud mínima? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir.
- Selecciona la opción función y modifica el valor de n, ¿qué sucede con la gráfica y con el segmento?
- Con el valor de $n = 4$, ¿existe un segmento que tenga la longitud máxima? ¿Por qué? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir.
- ¿Existe un segmento que tenga la longitud mínima? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir.

Fase de argumentación (Trabajo en equipo)

- Compara tus respuestas con las de tus compañeros
- ¿Qué pueden generalizar respecto la longitud del segmento AB?

- Socializa la(s) conjetura(s) de tu equipo con todos los demás, luego escribe la conclusión final a la que llegas.

Al abordar esta actividad, se quiere que los estudiantes lleguen a una aproximación a la solución a la cuarta aplicación de Sturm, en la cual se plantea que se debe determinar la distancia mínima de un punto dado $M\ (a, b)$ a una curva de la cual conocemos la ecuación. Sin embargo, en este problema se toman funciones de la forma $f(x) = x^n$ en su representación gráfica.

Esta actividad inicia con la determinación de la existencia del segmento máximo y el segmento mínimo a una recta, es decir, cuando $n = 1$ en la función. Luego de ello, se le da diferentes valores a n para finalizar con una generalización de dicha existencia y de las características del segmento.

A continuación, se presenta una tabla con la descripción de las respuestas dadas por los estudiantes y del alcance en cada una de las acciones básicas.

Acción Básica 1 y 2 (AB1 y AB2)		
Estudiante	**Grado**	**Descripción**
E1	Sexto	Las variables identificadas por el estudiante son la medida del segmento y la ubicación del punto B en la función, ya que menciona que su tamaño cambia dependiendo de la distancia entre los puntos, ya que si el punto está más lejos el segmento es más grande y si está más cerca el segmento será más pequeño.
E2	Séptimo	La estudiante identifica el segmento AB y la posición del punto B como variables del problema, debido a que resalta que el segmento AB cambia de tamaño al desplazar el punto B sobre la recta.
E3	Undécimo	Al igual que E1 y E2, este estudiante logra identificar que la longitud del segmento depende la ubicación que el punto B pueda tener, puesto que entre más lejos esté el punto B del punto A, la medida del segmento será mayor.

Tabla 11: AB1 y 2 Sesión 3 Actividad 1

De la tabla anterior se puede inferir que, para esta actividad, los tres estudiantes lograron desarrollar efectivamente las acciones básicas 1 y 2, determinando que la relación de covariación está dada entre la posición del punto B y la longitud del segmento AB.

A continuación, se presenta una tabla que une las acciones básicas 3 y 4 del problema que hace referencia a la cuarta aplicación de Sturm. En la parte II de la actividad, tanto en la fase de análisis como en la de argumentación, se realizan preguntas respecto a la existencia de un segmento máximo o mínimo teniendo un punto fijo (A) y una función (f).

Acción Básica 3 y 4 (AB3 y AB4)		
Estudiante	**Grado**	**Descripción**
E1	Sexto	Respecto a la longitud máxima del segmento, el estudiante concluye que no existe debido a que la recta es infinita, por esta razón se puede continuar moviendo el punto B indefinidamente para que haya una mayor distancia. En cuanto a la distancia mínima este estudiante determina, inicialmente, que no existe porque siempre va a tender a cero (haciendo referencia a la medida del segmento) pero no puede ser cero porque dejaría de ser un segmento. Sin embargo, luego de analizar las respuestas de sus compañeros concluye que dicho segmento si existe y menciona que tiene que ser la menor distancia entre A y B, cuyo valor numérico es 5 cm cuando la función tiene $n = 1$ y la variación dependerá de la función.
E2	Séptimo	Por un lado, la estudiante luego de comparar y de analizar los posibles segmentos que se pueden formar, concluye que el segmento con longitud máxima no existe porque el punto está ubicado en una recta y como estas son infinitas entonces siempre se podrá “agrandar” el segmento cada vez más. Por otro lado, la estudiante menciona que sí existe un segmento con la mínima longitud al tener al punto A fijo y esto depende de la ubicación del punto B. Además, concluye que el segmento con

		la mínima longitud se forma cuando se forma un ángulo recto entre el segmento y la recta, la estudiante aclara que esto se da cuando la función es una recta.
E3	Undécimo	Al igual que E2, este estudiante menciona que no existe un segmento con la mínima longitud gracias a que B puede alargarse (haciendo referencia al segmento) todo lo que se desee. Además, determina que el segmento AB que es mínimo existe, en el caso de la función lineal, cuando el segmento forma un ángulo de 90º con la recta. Luego el estudiante concluye, después de analizar diferentes valores que toma n en la función, que a pesar de que la función es curva, sigue siendo infinita, así que se extiende de manera infinita sin encontrar un máximo. Además, que el segmento con longitud mínima de un punto fijo a una función si existe cuando el punto B se acerque al punto A, menciona que el segmento debe ser "lo más perpendicular posible" para que se encuentre la longitud mínima.

Tabla 12: AB 3 y 4, Sesión 3, Actividad 1

De la tabla anterior, se puede concluir que los tres estudiantes lograron desarrollar las acciones básicas 3 y 4 puesto que determinaron, por medio de comparaciones, la existencia del segmento mínimo y sus características respecto a la función y la no existencia del segmento cuya longitud es máxima.

El cuarto matemático es **Bézout** (1730 - 1783), un matemático francés nacido en Nemours, en 1973 encabezó la instrucción de la marina real y fue profesor del cuerpo de artillería, donde redactó su famosa obra C*ours de mathématiques à l'usage del marine et de l'artillerie*. En esta obra compuesta por 6 volúmenes abarca distintas áreas de las matemáticas, como lo son aritmética, geometría, trigonometría, álgebra, cálculo diferencial e integral, aplicaciones de la mecánica y navegación. En el libro cuatro que hace referencia al cálculo diferencial y una sección se denomina problemas de máximos y mínimos, por lo que se han adaptado en applets construidos en GeoGebra y reestructurado en forma de problemas. A continuación, se presenta la actividad propuesta a los estudiantes.

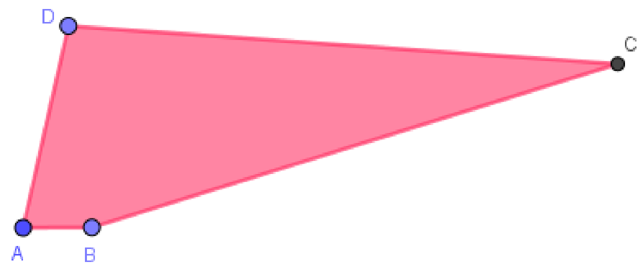


Figura 23: Applet Actividad 2, Sesión 3

Actividad 2: Cuadriláteros Isoperimétricos

- ¿Qué es un cuadrilátero? En GeoGebra sigue las siguientes instrucciones:
- Construye un cuadrilátero ABCD cualquiera. (con la opción polígono)
- Encuentra el perímetro del cuadrilátero y su área. (Usando opciones "Distancia o longitud" y "área")
- Encuentra otros dos cuadriláteros diferentes, que tengan el mismo perímetro.
- ¿Qué características tienen en común los tres cuadriláteros que has construido?
- ¿Tienen la misma área? ¿Por qué?

Abre el archivo "Cuadriláteros Isoperimétricos"

Link: https://www.geogebra.org/m/nsjeuhrx/pe/286187

En esta construcción encontrarás:

- ✓ Un cuadrilátero ABCD
- ✓ Un deslizador "Lado AD" para modificar la longitud de ese lado del cuadrilátero.
- ✓ Un deslizador "Lado AB" para modificar la longitud de ese lado del cuadrilátero.
- ✓ Un deslizador "Lado BC" para modificar la longitud de ese lado del cuadrilátero.

- ¿Qué sucede si mueves el punto A? ¿Cambia el tipo de cuadrilátero?
- ¿Qué sucede si mueves el punto B? ¿Cambia el tipo de cuadrilátero?
- ¿Qué sucede si mueves el punto D? ¿Cambia el tipo de cuadrilátero?
- ¿Existe un cuadrilátero que tenga el área máxima? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir.
- ¿Existe un cuadrilátero que tenga el área mínima? ¿Por qué? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir.

Fase de argumentación (Trabajo en equipo)

- Compara tus respuestas con las de tus compañeros
- ¿Qué pueden generalizar respecto al área de los cuadriláteros?
- Socializa la(s) conjetura(s) de tu equipo con todos los demás, luego escribe la conclusión final a la que llegas.

Al abordar esta actividad, se quiere que los estudiantes lleguen a una aproximación a la solución del V problema de Bezout, el cual indica que se debe encontrar, entre todos los cuadriláteros isoperimétricos, cuál es el que tiene mayor superficie. En la demostración de este problema se determina que el cuadrilátero con mayor superficie es aquel que tiene todos sus lados congruentes y sus ángulos rectos, es decir, un cuadrado.

A continuación, se presentan dos tablas en las que se describen las acciones básicas alcanzadas por cada uno de los estudiantes, de acuerdo con la solución brindada a las preguntas planteadas.

Acción Básica 1 y 2 (AB1 y AB2)		
Estudiante	**Grado**	**Descripción**
E1	Sexto	Las variables identificadas son la longitud de los lados (base y altura) y el área, debido a que el estudiante menciona que la fórmula del área es $base * altura$ y los diferentes cuadriláteros que se forman tienen diferentes valores para la base y la altura, por esto, concluye que el área no será la misma.
E2	Séptimo	Esta estudiante menciona que la fórmula del área es diferente a la del perímetro, por esta razón el área cambiará en todos los casos. De lo anterior, se infiere que las variables identificadas por la estudiante, de manera implícita, es la longitud de los lados y el área.
E3	Undécimo	Al igual que E1 y E2 éste estudiante reconoce que las variables involucradas en esta actividad son las medidas de los lados y el área, puesto que se hace referencia a los diferentes valores que pueden tomar la base y la altura de los rectángulos y la relación de cambio que estas magnitudes tienen con el área.

Tabla 13: AB1 y 2, Sesión 3, Actividad 2

De la tabla anterior se puede inferir que, para esta actividad los tres estudiantes desarrollan las acciones básicas 1 y 2, determinando que la relación de covariación está dada entre las medidas de los lados del triángulo (perímetro) y el área de los cuadriláteros isoperimétricos.

A continuación, se presenta una tabla que une las acciones básicas 3 y 4 del problema V de Bezout.

Acción Básica 3 y 4 (AB3 y AB4)		
Estudiante	**Grado**	**Descripción**
E1	Sexto	Al realizar una búsqueda del cuadrilátero isoperimétrico cuya superficie sea máxima, este estudiante reconoce que debe ser aquél cuyos valores numéricos son $AD = 5$, $BC = 5$, $AB = 5$ y cuya área es $25\,u^2$. Condiciones que para los cuadriláteros del applet corresponde a un cuadrado. Luego, al comparar los diferentes cuadriláteros para encontrar aquel que tiene menor superficie el estudiante concluye que, si existe y es aquél cuando los puntos A, B y D son colineales (formándose una recta). Además, el estudiante aclara que “se debe recordar que puede llegar a ser infinito porque siempre tiende a ser cero”. De lo anterior, se puede evidenciar que este estudiante reconoce que una similitud entre los problemas anteriormente propuestos, sin embargo, el applet realizado para apoyar esta actividad en ninguna ocasión ni el área ni la longitud de los lados puede llegar a ser infinito.
E2	Séptimo	Respecto al área máxima, esta estudiante reconoce que se da cuando el cuadrilátero es un cuadrado, puesto que la medida de los lados es igual [congruente]. Para el área mínima se evidencia que la estudiante identifica que no existe este cuadrilátero en el que argumenta que siempre se podrá encontrar un polígono cada vez más pequeño.

E3	Undécimo	Por un lado, el estudiante evidencia que, si existe un cuadrilátero con área máxima de todos los cuadriláteros isoperimétricos, será aquel que sea un paralelogramo y a su vez un cuadrado. Por otro lado, determina que el cuadrilátero con menor área no existe ya que dejaría de existir.

Tabla 14: AB3 y 4, Sesión 3, Actividad 2

Se puede ver, respecto a la tabla anterior, que en esta actividad todos los estudiantes logran establecer la existencia o no existencia de un área máxima y una mínima de todos los cuadriláteros isoperimétricos. De esta manera es posible afirmar que los nueve estudiantes logran realizar las acciones básicas 3 y 4.

Actividad 3: Pentágonos Isoperimétricos (Pappus De Alejandría)

Para la última actividad propuesta en esta tercera sesión se relaciona nuevamente el trabajo del matemático Pappus de Alejandría. Seguidamente se presenta la actividad propuesta a los estudiantes.

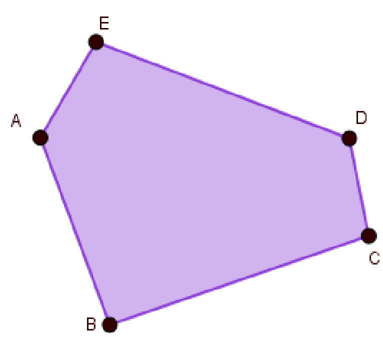


Figura 24: Applet Actividad 3, Sesión 3

En GeoGebra sigue las siguientes instrucciones:

- Construye un pentágono ABCDE cualquiera. (con la opción polígono)
- Encuentra el perímetro del pentágono y su área. (Usando opciones “Distancia o longitud” y “área”)
- Mueve cualquiera de los vértices del polígono.

  ¿Qué cambia? ____

  ¿Qué permanece fijo? ____

- Construye otros dos pentágonos diferentes, que tengan el mismo perímetro del pentágono ABCDE. ¿Tienen la misma área? ¿Por qué?

Abre el archivo "Pentágonos Isoperimétricos"

Link: https://www.geogebra.org/m/s6eswsvh/pe/286227

En esta construcción encontrarás:

- ✓ Un pentágono ABCDE.

- ¿Existe un pentágono que tenga el área máxima? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir.
- ¿Existe un pentágono que tenga el área mínima? ¿Por qué? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir.

Fase de argumentación (Trabajo en equipo)

- Compara tus respuestas con las de tus compañeros
- ¿Qué pueden generalizar respecto al área de los pentágonos?
- Socializa la(s) conjetura(s) de tu equipo con todos los demás, luego escribe la conclusión final a la que llegas.
- Teniendo en cuenta las soluciones dadas a los problemas de triángulos, cuadriláteros y pentágonos isoperímetros, ¿qué puedes concluir respecto al área máxima y mínima de un polígono isoperimétrico?

Al abordar este problema, se quiere que los estudiantes lleguen a una aproximación de la proposición 10 del libro V de Pappus, la cual dice que, entre las figuras rectilíneas con el mismo perímetro y el mismo número de lados, la mayor es la que es equilátera y equiangular. Para esta actividad, se realiza sólo para el caso de los pentágonos.

Este problema se compone de dos partes. En la parte I del problema (fase de exploración) se pide que encuentren diferentes pentágonos con el mismo perímetro y se les hace las siguientes preguntas: ¿tienen la misma área? ¿Por qué? Con las respuestas a estas preguntas se observa si efectivamente cada estudiante realiza implícitamente las acciones básicas 1 y 2. En la parte II, se realizan diferentes preguntas en las fases de análisis y de argumentación, cuyo objetivo es que los estudiantes reconozcan que el pentágono regular es el que tiene máxima área y que no existe el que tiene área mínima.

A continuación, se presenta una tabla por estudiante y las acciones básicas, determinando qué acciones pudo realizar cada uno de ellos con respecto a la actividad propuesta.

Acción Básica 1 y 2 (AB1 y AB2)		
Estudiante	**Grado**	**Descripción**
E1	Sexto	Las variables identificadas por el estudiante son el área y la longitud de los lados del pentágono, pues menciona que las medidas de los lados deben ser “parecidos” para que el área sea la misma.
E2	Séptimo	Al igual que E1, esta estudiante reconoce que las variables que están involucradas en el problema son el área respecto a la longitud de los lados.
E3	Undécimo	Este estudiante identifica que las variables son el área y la forma que tiene el pentágono, determinando que el área será distinta y abarcará menor espacio.

Tabla 15: AB1 y 2, Sesión 3, Actividad 3

De la tabla anterior se puede inferir que, para este problema dos de los tres estudiantes lograron desarrollar efectivamente las acciones básicas 1 y 2, determinando que la relación de covariación está dada entre la medida de los lados de los pentágonos y su área. En la parte II del problema, tanto en la fase de análisis como en la de argumentación, se realizan preguntas respecto a la existencia de un pentágono máximo o mínimo de todos los pentágonos isoperimétricos.

Acción Básica 3 y 4 (AB3 y AB4)		
Estudiante	**Grado**	**Descripción**

E1	Sexto	Respecto a la existencia de un pentágono cuya área es máxima, este estudiante reconoce que sí existe debido a que al realizar una búsqueda y comparación de las áreas de los diferentes pentágonos que se forman, encuentra que es aquel cuya área es $49{,}64\ u^2$. Sin embargo, las condiciones que menciona el estudiante para que el área sea máxima es que $AB = 2$, $BC = 5.14$, $CD = 10.26$, $DE = 5{,}7$ y $EA = 5{,}9$. De lo anterior se observa que el estudiante no logró identificar que le pentágono que tiene mayor área es el regular. El estudiante, respecto a la existencia del mínimo pentágono, menciona que si existe. Sin embargo, se contradice al argumentar que el área mínima va a tender a ser cero, pero no puede ser cero. Se evidencia que hay una gran influencia de las respuestas a las actividades trabajadas anteriormente.
E2	Séptimo	En primer lugar, la estudiante reconoce y menciona que el máximo pentágono se debe "convertir" en un pentágono regular. En segundo lugar, identifica que no existe uno mínimo debido a que siempre habrá un pentágono más pequeño.
E3	Undécimo	Este estudiante identifica que, sí existe un pentágono con área máxima argumentando que para generarlo se debe mover los puntos E, B y C de tal manera que el pentágono sea regular. Además, menciona que no existe un pentágono con el área mínima porque para que existiera, se forma una recta (haciendo referencia a un segmento) pero el estudiante reconoce que dicha recta no cumple con la definición de pentágono.

Tabla 16: AB3 y 4, Sesión 3, Actividad 3

De la tabla anterior se logra evidenciar que, en primer lugar, con la actividad los tres estudiantes logran establecer la existencia del área máxima y mínima de todos los pentágonos isoperimétricos. De esta manera es posible afirmar que los tres estudiantes logran realizar las acciones básicas 3 y 4. En segundo lugar, se observa que, al realizar diferentes actividades con la misma estructura de las preguntas, los estudiantes identifican de una mejor manera la existencia del pentágono máximo y el mínimo, cuyo perímetro es el mismo.

Sesión 4 (Euclides, Pappus)

Actividad 1: Proposición 8, Libro III (Euclides)

En GeoGebra sigue las siguientes instrucciones:

Fase de construcción

a. Traza una circunferencia con centro en A y radio AB.
b. Ubica un punto C en el exterior de la circunferencia.
c. Selecciona el punto C y fija el punto con la opción "fijar objeto".
d. Oculta el punto B.
e. Ubica un punto D, sobre la circunferencia.
f. Construye el segmento DC.

- Mueve el punto D. ¿Qué sucede con la longitud del segmento?

Fase de Exploración

- ¿Existe el segmento DC que tenga la máxima longitud? ¿Por qué? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir este segmento.
- ¿Existe el segmento DC que tenga la mínima longitud? ¿Por qué? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir este segmento.

Fase de argumentación (Trabajo en equipo)

- Compara tus respuestas con las de tus compañeros
- ¿Qué pueden generalizar respecto a la longitud del segmento DC?
- Socializa la(s) conjetura(s) de tu equipo con todos los demás, luego escribe la conclusión final a la que llegas.

Al abordar este problema, se quiere que los estudiantes lleguen a una aproximación a la solución de la proposición 8 del libro III de Euclides, en la cual se plantea que si se toma un punto exterior a un círculo y del punto al círculo se dibujan algunas rectas, una de las cuales pasa por el centro y las demás al azar, de las rectas que caen en la parte cóncava de la circunferencia, la mayor es la que pasa por el centro, y de las demás siempre la más próxima a la que pasa por el centro es mayor que la más lejana; pero de las que caen en la parte convexa de la circunferencia la menor es la que está entre el punto y el diámetro, y de las demás la más próxima a la más pequeña es siempre menor que la más lejana, y sólo caen dos de iguales del punto al círculo a uno y otro lado de la más pequeña.

Esta actividad inicia con la creación, por parte de los estudiantes, del applet el cual debe contener una circunferencia con centro en A, un punto D en su exterior y un segmento cuyos extremos son D y un punto C sobre la circunferencia.

A continuación, se presenta una tabla por estudiante y las acciones básicas, determinando qué acciones pudo realizar cada uno de ellos con respecto a la actividad propuesta.

Acción Básica 1 y 2 (AB1 y AB2)		
Estudiante	**Grado**	**Descripción**
E1	Sexto	Las variables identificadas por el estudiante son la longitud del segmento CD y la ubicación del punto C, esto se evidencia cuando el estudiante menciona que la longitud máxima y mínima se determina y se verifica al mover el punto D.
E2	Séptimo	La estudiante identifica que la longitud de segmento CD y la posición del punto D como variables del problema, debido a que resalta que el segmento AB cambia de tamaño al desplazar el punto C sobre la circunferencia.

Tabla 17: AB1 y 2, Sesión 4, Actividad 1

De la tabla anterior se puede inferir que, para este problema, ambos estudiantes lograron desarrollar efectivamente las acciones básicas 1 y 2, determinando que la relación de covariación está dada entre la posición del punto D y la longitud del segmento DC.

A continuación, se presenta una tabla que une las acciones básicas 3 y 4 de esta actividad.

Acción Básica 3 y 4 (AB3 y AB4)		
Estudiante	**Grado**	**Descripción**

E1	Sexto	Respecto a la longitud máxima del segmento, el estudiante concluye que sí existe el segmento máximo es el que mide $8.66\,cm$, además de corresponder con el diámetro de la circunferencia. Además, el estudiante menciona que también existe un segmento mínimo que sería el segmento DE que es el resultado de la división del segmento DC y diámetro EC.
E2	Séptimo	En primer lugar, la estudiante luego de comparar y de analizar los posibles segmentos que se pueden formar, concluye que el segmento con longitud máxima es aquel que atraviesa el punto central (haciendo referencia al centro de la circunferencia). En segundo lugar, la estudiante menciona que sí existe un segmento con la mínima longitud y es aquel que surge de restarle el tamaño del diámetro de la circunferencia, de esta forma se genera un nuevo segmento llamado DE.

Tabla 18: AB3 y 4, Sesión 4, Actividad 1

De la tabla anterior, se puede concluir que los dos estudiantes lograron desarrollar las acciones básicas 3 y 4 puesto que determinaron, por medio de comparaciones, la existencia del segmento máximo y el mínimo, determinando sus características respecto a la posición del punto C en la circunferencia.

Actividad 2: Proposición 73, Libro VII (Pappus)

En GeoGebra sigue las siguientes instrucciones:

Fase de construcción

a. Construye una semirrecta AB.
b. Traza una circunferencia con centro en A y radio AB.
c. Ubica un punto F sobre la recta AB.
d. Ubica un punto T sobre la circunferencia.
e. Construye la cuerda BT.
f. Traza el segmento AT.
g. Ubica el punto M sobre BT, de tal manera que $BM = MT$.

h. Construye la semirrecta FM.

i. Construir punto G, intersección entre $\overrightarrow{FM}$ y $\overline{AT}$.

j. Oculta las semirrectas $\overrightarrow{AB}$ *y* $\overrightarrow{FM}$ y la circunferencia.

k. Traza el segmento FG. Cámbiale el color.

- Mueve el punto F. ¿Qué sucede con la longitud del segmento?
- Mueve el punto G. ¿Qué sucede con la longitud del segmento?

Fase de Exploración

- ¿Existe el segmento FG que tenga la máxima longitud? ¿Por qué? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir este segmento.
- ¿Existe el segmento FG que tenga la mínima longitud? ¿Por qué? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir este segmento.

Fase de argumentación (Trabajo en equipo)

- Compara tus respuestas con las de tus compañeros
- ¿Qué pueden generalizar respecto a la longitud del segmento FG?
- Socializa la(s) conjetura(s) de tu equipo con todos los demás, luego escribe la conclusión final a la que llegas.

Al abordar este problema, se quiere que los estudiantes lleguen a una aproximación a la solución de la proposición 73 del libro V de Pappus, el cual indica que al considerar el segmento BA igual al segmento AT y al cortar al segmento BT en dos partes iguales en el punto M; se concluye que el segmento BT, es el más pequeño de todos los segmentos que pasan por el punto M.

A continuación, se presenta una tabla por estudiante y las acciones básicas 1 y 2, determinando qué acciones pudo realizar cada uno de ellos con respecto a la actividad propuesta.

Acción Básica 1 y 2 (AB1 y AB2)		
Estudiante	**Grado**	**Descripción**
E1	Sexto	El estudiante no menciona, de manera explícita, cuáles son las variables involucradas en esta actividad. Sin embargo, se evidencia que el estudiante hace referencia a una de las variables que es la

		longitud del segmento FG.
E2	Séptimo	Esta estudiante identifica las variables involucradas, debido a menciona que la longitud del segmento FG depende de la posición del punto F que está sobre la recta.

Tabla 19: AB1 y 2, Sesión 4, Actividad 2

De la tabla anterior se puede inferir que, para este problema los dos estudiantes desarrollan las acciones básicas 1 y 2, determinando que la relación de covariación está dada entre la posición del punto F y la longitud del segmento FG.

A continuación, se presenta una tabla que une las acciones básicas 3 y 4 que desarrolla la actividad 2, asociada a la proposición 73 del libro V de Pappus:

Acción Básica 3 y 4 (AB3 y AB4)		
Estudiante	**Grado**	**Descripción**
E1	Sexto	Al realizar una búsqueda del segmento cuya longitud sea máxima, el estudiante determinó que no existe debido a que la recta que contiene el punto F es infinita, por lo que siempre podrá determinar una longitud cada vez más grande. Luego, al comparar los diferentes segmentos el estudiante identificó que el segmento con longitud mínima es aquel cuya medida es $5{,}42\ cm$ generando así, un triángulo isósceles.
E2	Séptimo	Respecto a la longitud máxima, la estudiante identifica que no existe debido a que el punto F está sobre la recta AB (que es infinita), por lo que siempre se puede agrandar el segmento más y más. Además, menciona sí existe un segmento que es mínimo y se forma cuando el segmento es una cuerda de la circunferencia que contiene los puntos A y B [haciendo referencia a la circunferencia que se construyó en la fase de construcción].

Tabla 20: AB3 y 4, Sesión 4, Actividad 2

De la tabla anterior se evidencia que los dos estudiantes logran establecer la existencia de un mínimo y la inexistencia del segmento máximo de todos los segmentos que pasa por el punto M. De esta manera es posible afirmar que ambos estudiantes logran realizar las acciones básicas 3 y 4.

CONCLUSIONES

Respecto a los 26 problemas que fueron extraidos de la HM, estudiados y analizados teniendo en cuenta su forma de resolución y demostración, los que permitieron incluir el proceso de optimización en el aula son aquellos problemas cuya solución se puede abordar con un análisis desde la geometría plana, debido a que los demás problemas abordados se desarrollan a partir de conceptos propios del cálculo diferencial o de la geometría del espacio, por lo que no son adecuados para los estudiantes a los cuales va dirigida la secuencia de actividades, pues no tienen las suficientes bases matemáticas para poder desarrollarlos.

La transposición didáctica de los nueve problemas seleccionados para llevar al aula se realizó a partir del uso del software GeoGebra, el cual fue pertinente para desarrollar las actividades, puesto que permitió que los estudiantes contaran con herramientas más detalladas para realizar la exploración del applet y buscar una posible solución para cada pregunta.

La exploración de los applets y la construcción de algunos de ellos por parte de los estudiantes permitió que se desarrollara el proceso de optimización y, a su vez, se evidenció que se potenciaron constantemente algunas competencias matemáticas durante el desarrollo de la secuencia de actividades como:

- Razonar y argumentar matemáticamente, debido a que siempre se les hacía argumentar, en un contexto geométrico, todas sus conclusiones e inferencias respecto a los problemas abordados.
- Manejo de símbolos y formalismo matemáticos en el momento de responder las preguntas que se les hizo con base en los problemas.
- Comunicar, tanto escrita como oralmente sus ideas y métodos de resolución de las actividades propuestas.
- Usar de manera adecuada las herramientas tecnológicas, en este caso los applets para comprender y determinar la existencia o no existencia de los máximos y los mínimos en las diferentes actividades.

Durante la implementación en el aula de los problemas seleccionados y adaptados, se pudo evidenciar que era necesario que los estudiantes realizaran las cuatro acciones básicas para poder concluir lo que se esperaba con cada una de las actividades, de acuerdo con las demostraciones presentadas por los matemáticos.

En cada una de las cuatro sesiones hubo diferentes casos en cómo abordaron los estudiantes las acciones básicas. El primer caso se da en estudiantes que no lograron identificar correctamente las variables inmersas en el problema y por lo tanto la relación establecida y la comparación realizada entre los valores para determinar un máximo o mínimo no se logró realizar para una actividad específica. En el segundo caso, se observan algunos estudiantes que aunque identificaron las variables adecuadas no las relacionaron apropiadamente, ni compararon de manera correcta sus valores, por lo que no pudieron visualizar el máximo o mínimo. El tercer caso se presenta cuando los estudiantes en algunas sesiones identificaron las variables inmersas en la exploración de la actividad, establecieron la relación entre estas variables, pero en la comparación de sus valores no pudieron establecer el momento cuando una de las variables hace máximo o mínimo el valor de la otra. Finalmente, el cuarto caso se da cuando los estudiantes que lograron realizar acertadamente las cuatro acciones básicas, en sus conclusiones del trabajo realizado lograron tener un acercamiento a las proposiciones, afirmaciones o resultados encontrados en la HM.

Respecto al proceso de formación profesional de las autoras, se considera que hubo aportes significativos durante el desarrollo de este trabajo, en diferentes aspectos. En primer lugar, se tuvo que realizar un estudio juicioso y dedicado de las diferentes demostraciones de los problemas abordados lo que desarrolló habilidades propias del campo del saber matemático. En segundo lugar, se realizaron traducciones directamente de los textos, en los que primaba el francés, el inglés y el portugués, lo cual las hizo más competentes a la hora de interpretar un texto matemático en otros idiomas. En tercer lugar, al realizar la aplicación de las actividades propuestas se reflexionó sobre el uso de la tecnología, aspectos positivos y negativos, puesto que si no se es consciente de las deficiencias que trae consigo, en este caso el software GeoGebra, se pueden cometer errores conceptuales al no tener claro que dicho software maneja un sistema axiomático diferente al que se imparte en el aula. Finalmente, este trabajo aportó en gran medida a comprender más a fondo el proceso de optimización y cómo es posible abordarlo en la escuela usando problemas no usuales para su enseñanza.

REFERENCIAS

Aldana, E. y Gallego, L. (2013). Análisis de la concepción de la actividad de optimizar, desde una ingeniería didáctica. En Gallego, Adriana P. (Ed.), *Revista Científica (pp. 225-228)*. Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/6630/1/Aldana2013Analisis.pdf

Alsina, C. (2010). Matemáticas para la ciudadanía. En Callejo, M.L y Goñi, J.M. (coords.) *Educación matemática y ciudadanía*, 89-102. Barcelona: Graó.

Arya, J. y Lardner, R. (2009). Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía. Quinta edición. México: Pearson Educación.

Ávila, R., Ibarra, S. y Grijalva, A. (2010). El contexto y el significado de los objetos matemáticos. *Relime* 13(4-II): 337-354

Ávila, P., Ruiz, M., y Villa-Ochoa, J. (2013). Uso de GeoGebra como herramienta didáctica dentro del aula de matemáticas. En F. Córdoba, y J. Cardeño et al. (Eds.), Desarrollo y uso didáctico de GeoGebra. Conferencia Latinoamericana Colombia 2012 y XVII Encuentro Departamental de Matemáticas, 446-454. Medellín: Fondo Editorial ITM.

Banquela, E. y Redchuck, A. (2013). Optimización Matemática con R. Volumen I: Introducción al modelado y resolución de problemas. España: Bubok publishing S.L. Recuperado de https://cran.r-project.org/doc/contrib/Optimizacion_Matematica_con_R_Volumen_I.pdf

Barahona, F., Barrera, O., Hidalgo, B., & Vaca, B. (2015). GeoGebra para la enseñanza de la matemática y su incidencia en el rendimiento académico estudiantil. *Revista Tecnológica ESPOL*, 121-132.

Barbin, É. (1991). The experience of history in mathematics education: The Reading of original texts: how and why to introduce a historical perspective. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education*, 11(2), 12-13.

Barrera, E., Falcón, R., Ramírez, R. y Ríos, R. (2011). Presentación y resolución de problemas mediante GeoGebra. Unión. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 25, 161-174.

Bezout, E. (1764). *Cours de mathématique*. Avignon: Imp. H. Offray.

Camargo, L. (s.f.). *Estrategias cualitativas de investigación en Educación Matemática. Recursos* *para la captura de información y para el análisis.* Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional.

Chevallard, Y. (1998). *La transposición didáctica: Del Saber Sabio al Saber Enseñado*. AIQUE, Buenos Aires.

Collette, Y. y Siarry, P. (2002). Optimisation multiobjectif. [Versión Adobe Digital Reader].

Encinas, Á. y Ávila, R. (2012). La gestión metacognitiva en el proceso de resolución de problemas de optimización y su relación con la competencia del resolutor. En Flores, Rebeca (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 151-159). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.* Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/4169/1/EscalonaResoluci%C3%B3nALME2012.pdf

Erazo, J. (2016). Categorías de uso de la Historia de las Matemáticas en la educación en Matemáticas (tesis de maestría). Recuperada del Repositorio Universidad Pedagógica Nacional.

Ernest, P. (1998). The history of mathematics in the classroom. *Mathematics in School*, 27(4), 25-31.

Esteves, A. (2008). Evolução histórica dos problemas de optimização e o seu tratamento no Ensino Secundário português nos séculos XX e XXI (tesis doctoral). Recuperada de https://gredos.usal.es/jspui/bitstream/10366/18419/1/DDMCE_Evoluao%20historica%20problemas%20optimizaao.pdf.

Fauvel, J. (1991). Using History in Mathematics Education. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education*, 11(2), 3-6.

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. Educational Studies in Mathematics, 82, pp. 97-124. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/eos/emergence_mathematical_objects.pdf.

Font, V. y Rubio, N. V. (2017). Procesos matemáticos en el enfoque ontosemiótico. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Tomado de https://www.researchgate.net/publication/314195166_Procesos_matematicos_en_el_enfoque_ontosemiotico

Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 22 (2/3), 237-284

González, P. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Revista SUMA*, 45, 17-28.

Guacaneme, A. (2016). *Potencial formativo de la historia de la teoría euclidiana de la proporción en la constitución del conocimiento del profesor de matemáticas.* (Tesis doctoral) Universidad del Valle, Colombia. Recuperada de http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/xmlui/handle/10893/10093

Lacasta, E., Malaspina, U., Pascual, J. R., Wilhelmi M. R. (2009). Análisis a priori de una situación de optimización en segundo de Educación Primaria. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII (pp. 259-271).* Santander: SEIEM. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/1652/1/305_Lacasta2009Analisis_SEIEM13.pdf

L'Hôpital, G. (1988). *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes*. Paris: ACL – editions.

Lupiáñez, J. (2002). Reflexiones didácticas sobre la Historia de la Matemática. *Revista SUMA*, 40, 59-63.

Malaspina, U. (2002). Optimización matemática. En Crespo, Cecilia (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 43-48).* México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/6320/1/MalaspinaOptimizacionALME2002.pdf

Malaspina, U. (2008). Intuición y rigor en la resolución de problemas de optimización. Un análisis desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (tesis doctoral). Recuperado de http://irem.pucp.edu.pe/wp-content/uploads/2012/05/Tesis_Doctoral_Uldarico_Malaspina_Jurado.pdf

Marshall, G. L., & Rich, B. S. (2000). The role of history in a mathematics class. *Mathematics Teacher*, 93(8), 704-706.

Ministerio de Educación Nacional (1951). Decreto 0075 de enero 17 1951. Colombia. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-103400_archivo_pdf.pdf

Ministerio de Educación Nacional (1962). Decreto 0045 de enero 11 de 1962. Colombia. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-103679_archivo_pdf.pdf

Ministerio de Educación Nacional (1974). Decreto 080 de enero 22 de 1974. Colombia. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-104657_archivo_pdf.pdf

Ministerio de Educación Nacional (1975). Resolución 277 de 1975. Colombia.

Ministerio de Educación Nacional (1998). Lineamientos Curriculares en el área de Matemáticas. Colombia. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

Ministerio de Educación Nacional (2004). Estándares Básicos de Competencias Ciudadanas. Colombia. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-75768_archivo_pdf.pdf

Ministerio de Educación Nacional (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Colombia. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Ministerio de Educación Nacional (2017). Derechos Básicos de Aprendizaje Matemáticas. Colombia. http://www.santillana.com.co/www/pdf/dba_mat.pdf

Navarro, L., Robles, A., Ansaldo, J. y Castro, F. (2016). Secuencia didáctica apoyada en tecnología para la construcción del concepto de derivada en problemas de optimización. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, (46), 171- 187.

Niss, M (2003). Quantitative literacy and Mathematical Competencies. En NCED (Eds.), Quantitative Literacy: Why Numeracy Matters for Schools and Colleges (pp. 215-220). Recuperado de https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/QL/WhyNumeracyMatters.pdf

Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (2013). Enfoques estratégicos sobre las TICS en educación en América Latina y el Caribe. UNESCO Santiago.

Perkins, P. (1991). Using History to Enrich Mathematics Lessons in a Girls' School. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education*, 11(2), 9-10.

Real Academia Española [RAE] (2018). Optimizar. Edición Tricentenario. Rae.es. Recuperado de http://dle.rae.es/?id=R7YxPPp

Ramírez, R. (2005). Aproximación al concepto de transposición didáctica. Folios. Segunda época. Primer semestre de 2005. No. 21. Bogotá: UPN. pp. 33-45. Recuperado de https://doi.org/10.17227/01234870.21folios33.45

Rico, L. (2004). Evaluación de Competencias Matemáticas. Proyecto PISA/OCDE 2003. Actas del VIII Simposio de la SEIEM. Recuperado de http://ruc.udc.es/dspace/bitstream/handle/2183/11280/CC-75%20art%206.pdf?sequence=1

Rico, L. (2006). La competencia matemática en PISA. PNA, 1(2), 47-66. Recuperado de http://cimm.ucr.ac.cr/ciaem/articulos/universitario/conocimiento/La%C2%A0Competencia%C2%A0Matem%C3%A1tica%C2%A0en%C2%A0Pisa*Rico,%20Luis*competencia%20en%20PISA.pdf

Serret, J. (1879). *Cours de Calcul Différentiel et Intégral*. Paris: Gauthier Villars.

Sfard, A. (1991) On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics* 22: 1-36. Kluwer Academic Publisher.

Soares, J (2005). Optimização Matemática. [Versión Adobe Digital Reader]. Recuperado de http://www.mat.uc.pt/~jsoares/research/opti_2005_05_06.pdf.

Sorando, J. (2005). Matemáticas e Historia. *Revista SUMA*, 49(1), 125-137.

Stewart, J. (2007). Cálculo diferencial e integral. 2a. ed. México: Internacional Thomson Editores, S.A.

Sturm, J. (1884). *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*. Paris: Gauthier Villars.

Vasco, C. (2002). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. Congreso

Internacional: Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas (8-10 May 2002). Bogotá, Colombia. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/10178/1/Vasco2002El.pdf

Vega, L. (1991). Introducción General. En (M. L. Puertas Castaños, Trad.). Elementos. Vol. 1. Madrid, España: Gredos.

Ver Eecke, P. (1933). Pappus D'alexandrie. La Collection Mathématique.

Villa, J. y Ruiz M. (2010). Pensamiento variacional: seres-humanos-con-GeoGebra en la visualización de nociones variacionales. Educação Matemática Pesquisa, 12(3). 514-528.

Wilson, P. y Chauvot, J. (2000). Who? How? What? A strategy for using history to teach mathematics. *Mathematics Teacher*, 93(8), 642-645.

ANEXOS

ANEXO 1: Estudio de los problemas

Elementos de Euclides

Libro III - Proposición 16

La recta dibujada por el extremo del diámetro de un círculo formando ángulos rectos con el diámetro, caerá fuera del círculo, y no se interpondrá otra recta al espacio entre la recta y la circunferencia; y el ángulo del semicírculo es mayor y el que queda es menor que cualquier ángulo rectilíneo agudo.

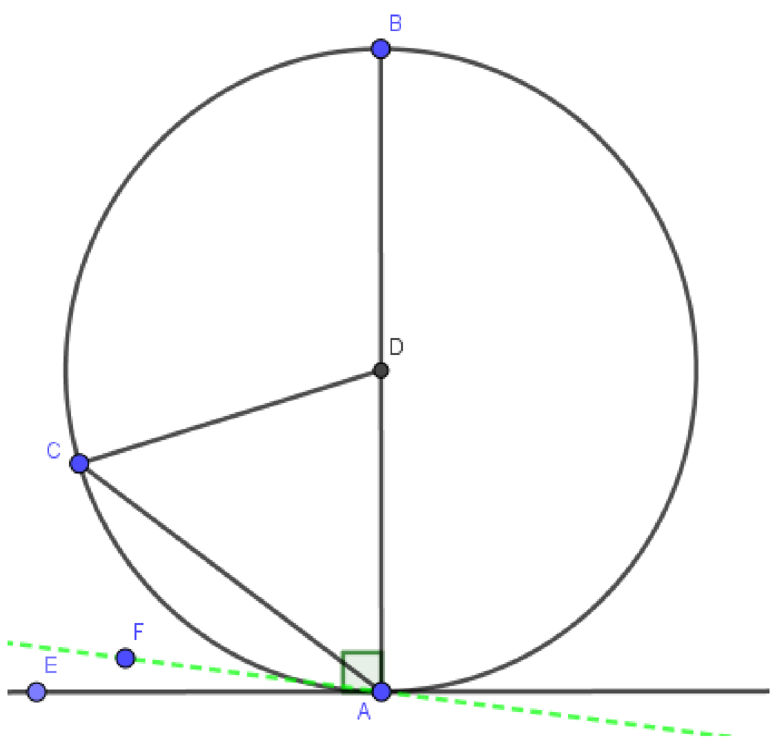


Figura 25. Construcción Proposición 16 - Libro III de Euclides

Para la demostración de esta proposición Euclides la divide en tres partes. En la primera parte él se encarga de mostrar por reducción al absurdo que no es posible encontrar un punto sobre la circunferencia de manera tal que forme dos ángulos rectos con el diámetro AB, este punto se podrá determinar fuera de la circunferencia ***(AB1, AB2)***. En la segunda parte demuestra que no se puede encontrar otra recta en el espacio entre la recta AE y la circunferencia que contiene los puntos A, B y C, de tal manera que esa recta determine un ángulo recto ***(AB3)***. En la tercera parte se demuestra que no existe ningún ángulo agudo contenido entre las rectas que sea mayor que el ángulo contenido entre la recta BA y la circunferencia que contiene los puntos C, H y A, tampoco existe ningún ángulo agudo contenido entre las rectas que sea menor que el ángulo contenido entre la circunferencia que contiene los puntos C, H y A y la recta AE ***(AB4)***.

Libro VI - Proposición 27

De todos los paralelogramos aplicados a una misma recta y deficientes en figuras paralelogramas semejantes y situadas de forma semejante al construido a partir de la mitad de la recta, el paralelogramo mayor es el que es aplicado a la mitad de la recta y es semejante al defecto.

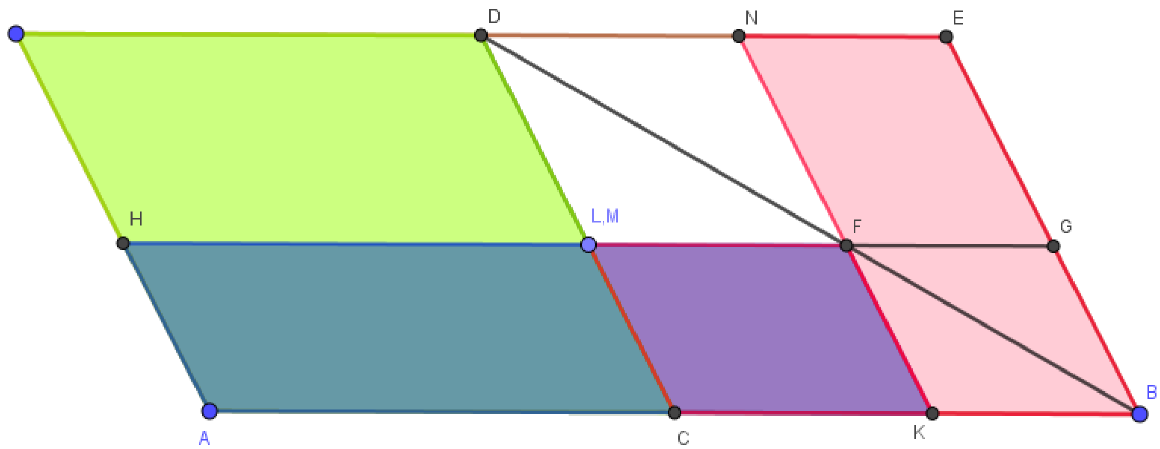


Figura 26. Construcción Proposición 27 - Libro VI de Euclides

Para demostración de esta proposición Euclides la divide en dos partes. En la primera parte se muestra que el paralelogramo AKFH tiene la misma área que el gnomon LMN[13] y como este último es menor que el paralelogramo DCBE, se concluye que el paralelogramo CBED es mayor al paralelogramo AKFH. Además, cómo el paralelogramo ACDI es congruente con el paralelogramo CBED, debido a que C es punto medio del segmento AB, se concluye que el paralelogramo ACDI es mayor al AKFH ***(AB1, AB2)***.

En la segunda parte, como C es punto medio del segmento AB, entonces el paralelogramo DLHI es congruente con DLGE, por tanto, el segmento HM es igual al segmento MG, además, el segmento HD es mayor al segmento HM y el segmento DG es mayor al segmento MG; por lo anterior, el segmento DH es menor que el segmento LG. El paralelogramo DLGE es congruente con DNKC[14], por transitividad se tiene que el paralelogramo DLHI es igual a DNKC, por tanto, el segmento DK es mayor que el segmento LG ***(AB3)***.

[13] Un gnomon es cualquier figura que, añadida a una figura original, produce una figura semejante a la original. es decir, el área del paralelogramo AF es igual al polígono LCBENF.
[14] Por la proposición 43 de libro I.

Si se añade a los paralelogramos HLDI y LFKC el paralelogramo ACLH, como el paralelogramo HLDI es mayor que el paralelogramo LFKC, entonces podemos concluir que el paralelogramo ACDI es mayor que el paralelogramo AKFH ***(AB4)***.

La Collection Mathematique de Pappus d'Alexandrie

Libro V - Proposición 18

Consideremos una esfera con centro en A, y consideremos una de los cinco sólidos platónicos, con la superficie total equivalente a la de la esfera; yo digo que la esfera es mayor.

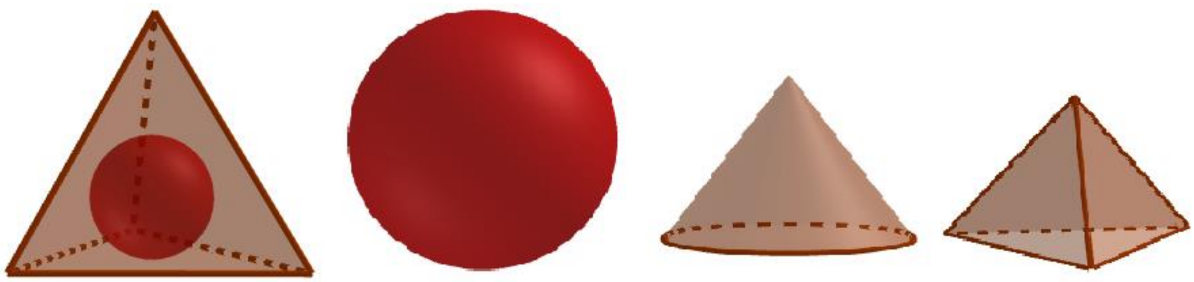


Figura 27. Construcción Proposición 18 - Libro V de Pappus

Pappus en su demostración prueba que la esfera es el sólido con mayor volumen, comparado con el volumen de los cinco sólidos platónicos con la misma área; para ello construye una esfera circunscrita en un poliedro, de donde se tiene que la superficie del poliedro es mayor que la superficie de la esfera circunscrita en él ***(AB1)***. También se construye una esfera A, cuya superficie es equivalente a la superficie del poliedro, además es mayor que la superficie y el radio de la esfera inscrita en el poliedro ***(AB2)***. Por otro lado, se construye un cono cuya base es el círculo equivalente a la superficie de la esfera A y altura igual al radio de la esfera A; el volumen de este cono es mayor que el de la pirámide cuya base es rectilínea y equivalente a la superficie del poliedro, y cuya altura es el radio de la esfera inscrita en el poliedro ***(AB3)***. Pero el volumen del cono es equivalente al volumen de la esfera A, el volumen de la pirámide es equivalente al del poliedro; por lo tanto, el volumen de la esfera A es mayor que el del poliedro propuesto ***(AB4)***.

Libro VI - Proposición 44

De un punto alto A, tracemos sobre el plano subyacente un segmento AB no perpendicular a ese plano, y tracemos desde el punto A una perpendicular a ese plano, que lo intersecta en el punto T, también tracemos el segmento TB. Se dice que el ángulo comprendido entre los segmentos AB y BT es menor que todos los que son están comprendidos entre el segmento AB y cualquiera de los segmentos que pasen en B contenidos en el plano subyacente; y el ángulo más cercano de este ángulo es continuamente más pequeño que el que está más alejado, y que dos ángulos iguales no se establecen de uno y de otro lado del ángulo.

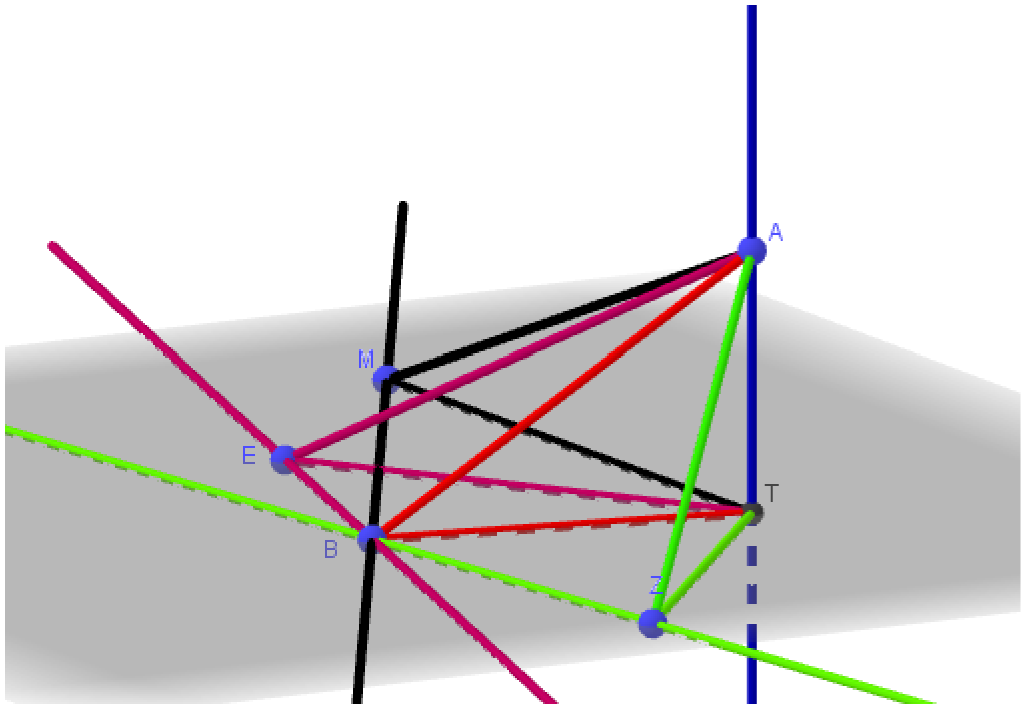


Figura 28. Construcción Proposición 44 - Libro VI de Pappus

Para la demostración de esta proposición Pappus encuentra el ángulo mínimo entre una recta y un plano a partir de una construcción donde utiliza perpendiculares y compara ángulos y rectas.

Se traza cualquier segmento BM en el plano subyacente; en el punto T el segmento TM perpendicular a este segmento y se une el segmento AM. El segmento AM es, por lo tanto, perpendicular al segmento BM debido a lo que se ha demostrado anteriormente. El ángulo ATM es recto, el segmento MA es más grande que el segmento AT; en consecuencia, la relación del segmento BA al segmento AT es más grande que la relación del segmento BA al segmento AM. Los ángulos TBA y BMA son rectos; por lo tanto, el ángulo BAT es mayor que el ángulo BAM en correlación con lo que se ha demostrado en el penúltimo lema; de modo que el ángulo restante

ABT es más pequeño que el ángulo ABM. Se demuestra igualmente que el ángulo ABT es más pequeño que todos los otros; por lo tanto, el ángulo de ABT es el más pequeño. También se dice que el ángulo más cercano a este ángulo es continuamente más pequeño que el que está más lejos.

En efecto, se traza un segmento BE en el plano subyacente; desde el punto T la perpendicular TE y se unen los puntos AE. El segmento AE también es perpendicular al segmento BE. Por esto, el ángulo recto BMT es igual al ángulo recto TEB; pero que el ángulo BTM también es mayor que el ángulo BTE, se deduce que la relación del segmento ET al segmento TB es mayor que la relación de los segmentos MT al segmento TB; por lo tanto, el segmento ET es mayor que el segmento TM. El segmento TA está en ángulo recto MTE; por lo tanto, el segmento EA también es mayor que el segmento AM; por lo tanto, la relación de los segmentos BA al segmento AM es más grande que su relación con el segmento AE. Los ángulos ubicados en los puntos M y E son rectos; entonces, el ángulo BAM es mayor que el ángulo BAE. En consecuencia, el ángulo ABM es más pequeño que el ángulo ABE. De manera similar, el ángulo más cercano al ángulo a ABT es continuamente más pequeño que el que está más lejos. Finalmente, solo se establecen dos ángulos iguales en cada lado del ángulo.

Se establece en el segmento TB, en su punto B, en el plano subyacente, un ángulo TBZ igual al ángulo MBT; trazar en el punto T la perpendicular TZ al segmento BZ y el segmento AZ. Dado que el ángulo TBM es igual al ángulo TBZ; el ángulo TMB es igual al ángulo recto TZB, y que el segmento TB es el lado común de los triángulos, se deduce que el segmento BM es igual al segmento BZ, y el segmento TM es igual al segmento TZ. Ahora el segmento AT es perpendicular a cada una de los segmentos AT y TZ; por lo tanto, el segmento AM también es igual al segmento AZ. A partir de esto, el segmento MB es igual al segmento BZ; el segmento BA es común y la base MA es igual a la base AZ, se deduce que el ángulo ABM es igual al ángulo ABZ. Asimismo, se demuestra que ningún otro ángulo es igual al ángulo ABM.

El ángulo ABT es, por lo tanto, el más pequeño, el ángulo más cercano a él es continuamente más pequeño que el que está más alejado de él, y solo se establecen dos ángulos iguales en ambos lados de este ángulo.

Analyse des infiniment petits, pour líntelligence des lignes courbes de L'Hôpital

L'Hôpital en su obra dedica una sección al análisis de máximos y mínimos, en la cual presenta algunos ejemplos dentro de los cuales se pueden identificar problemas de optimización de una variable:

Ejemplo IV:

Cortar el segmento dado AB en un punto E, de forma que el producto del cuadrado de una de las partes AE por la otra EB, sea el más grande que todos los demás productos formados de la misma manera.

En este problema se quiere optimizar el producto de la medida de dos partes de un segmento, escribiendo la ecuación correspondiente (utilizando nociones de distancia) y calculando los ceros de la derivada para encontrar el resultado.

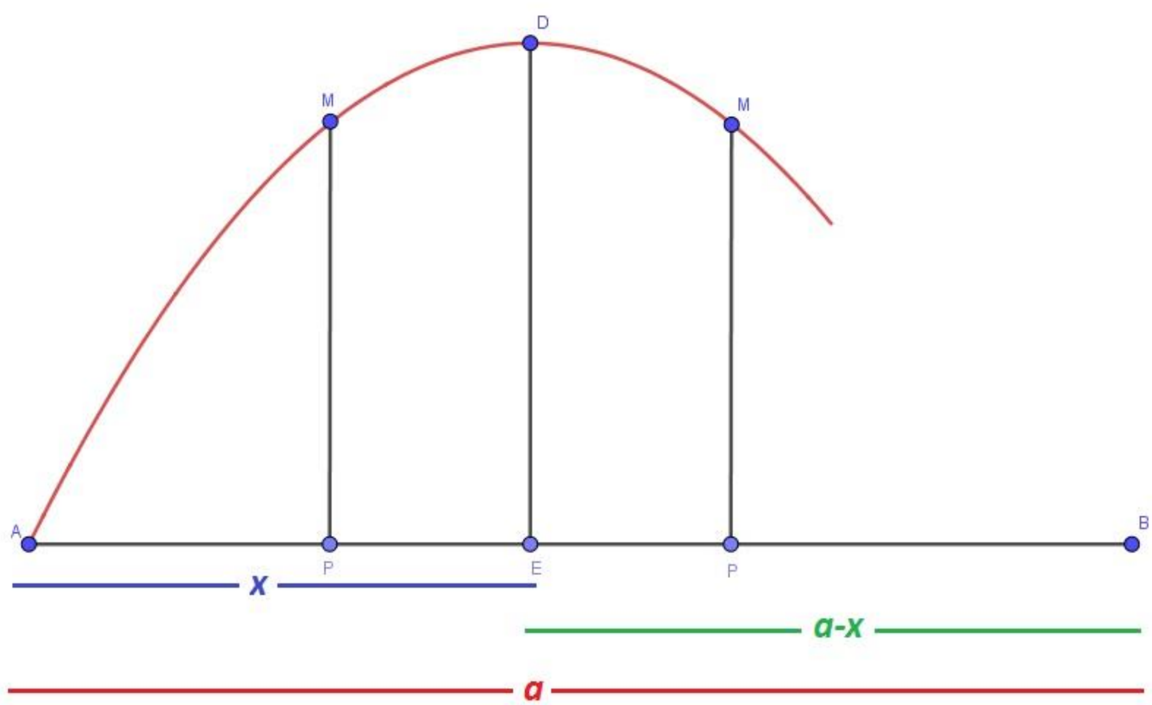


Figura 29. Construcción Ejemplo IV de L'Hôpital

A la medida desconocida AE se le denomina x y a AB se le denomina a, de manera tal que el producto $AE^2 \times EB$ es equivalente a $x^2(a - x) = axx - x^3$, expresión que deberá tener un máximo ***(AB1)***.

Para encontrar este punto máximo se traza una línea curva MDM, tal que la relación de aplicar $MP(y)$ a $AP(x)$ será expresada por la ecuación $y = \frac{axx - x^3}{aa}$. Ahora para encontrar un punto E tal que la cantidad ED sea la mayor de todas las cantidades semejantes PM, para ello se deriva la ecuación $dy = \frac{2ax\,dx - 3xx\,dx}{aa}$ y se iguala a *0*, obteniendo $\frac{2ax - 3xx}{aa} = 0$.

$$2ax - 3xx = 0$$
$$x(2a - 3x) = 0$$
$$x = 0 \qquad \wedge \qquad 2a - 3x = 0$$
$$x = 0 \qquad \wedge \qquad 2a = 3x$$
$$x = 0 \qquad \wedge \qquad x = \frac{2a}{3}$$

Por lo tanto $AE(x) = \frac{2}{3}a$ ***(AB2)***.

De manera general se tendría que la expresión $x^m \times (a - x)^n; \quad m, n \in Z$ representa al máximo, al derivar se obtiene:

$$\left(mx^{m-1}(a - x)^n + x^m n(a - x)^{n-1}(-1)\right) dx$$
$$(mx^{m-1}(a - x)^n - x^m n(a - x)^{n-1})\, dx$$

Si se divide entre $x^{m-1}(a - x)^{n-1}$ e igualar a *0* se tiene:

$$\frac{mx^{m-1}(a - x)^n - x^m n(a - x)^{n-1}}{x^{m-1}(a - x)^{n-1}} = 0$$
$$\frac{x^{m-1}(a - x)^{n-1}(m(a - x) - xn)}{x^{m-1}(a - x)^{n-1}} = 0$$
$$ma - mx - nx = 0$$
$$ma = mx + nx$$
$$ma = x(m + n)$$
$$x = \frac{ma}{m + n}$$

De lo que se deduce de manera general que $AE(x) = \frac{m}{m+n}a$.

Si $m = 2$ y $n = -1$, se tiene que $AE(x) = 2a$, por tanto, el problema se enuncia de la siguiente manera:

Al prolongar un segmento AB al lado de B hasta un punto E, de tal forma que $\frac{AE^2}{BE}$ es mínimo y no un máximo, debido a que la ecuación de la curva MDM es $y = \frac{xx}{x-a}$ ***(AB3)***.

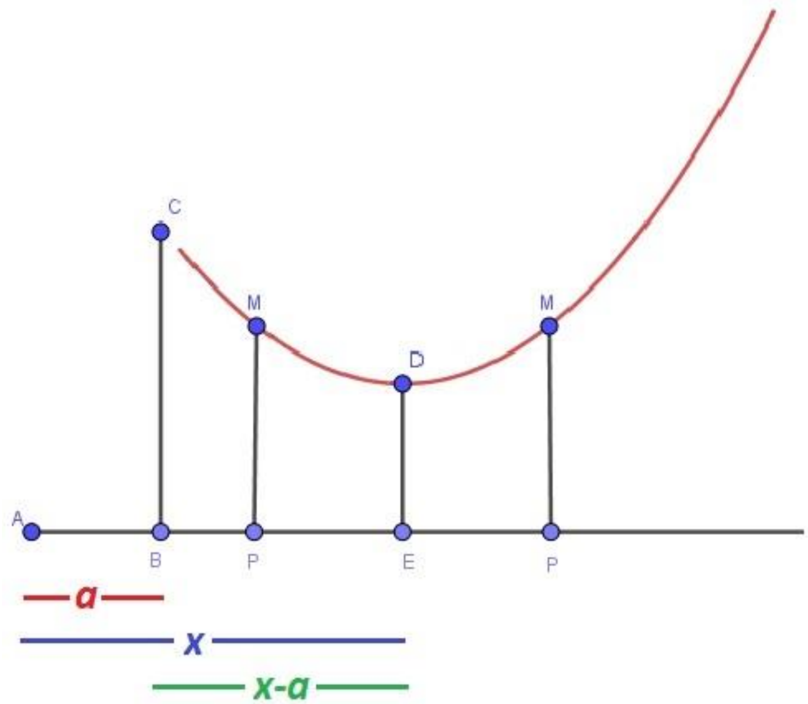


Figura 30. Construcción 2 Ejemplo IV de L'Hôpital

Si suponemos que $x = a$ en la aplicación de PM que divide a BC, será $\frac{aa}{0}$, es decir infinito, si suponemos que x es infinito entonces $y = x$ que también en la aplicación es infinito. Si $m = 1$ y $n = -2$, se tiene $AE(x) = -a$, de donde sacamos que el problema deberá ser enunciado de esta forma:

Al prolongar la recta dada AB desde el punto A hasta el punto E, la cantidad $\frac{AE \times AB^2}{BE^2}$es la mayor de todas las cantidades semejantes $\frac{AP \times AB^2}{BP^2}$ ***(AB4)***.

<u>Ejemplo V:</u>

El segmento AB se divide en tres partes AC, CF, FB, se corta al segmento CF en el punto medio E, de forma que la razón del rectángulo $AE \times EB$ por el rectángulo $CE \times EF$ sea la más pequeña que todas las otras razones formadas de la misma manera.

Para la demostración de este problema es similar al anterior, el autor desea optimizar una razón en lugar de un producto. La resolución se realiza de manera idéntica a la del problema anterior.

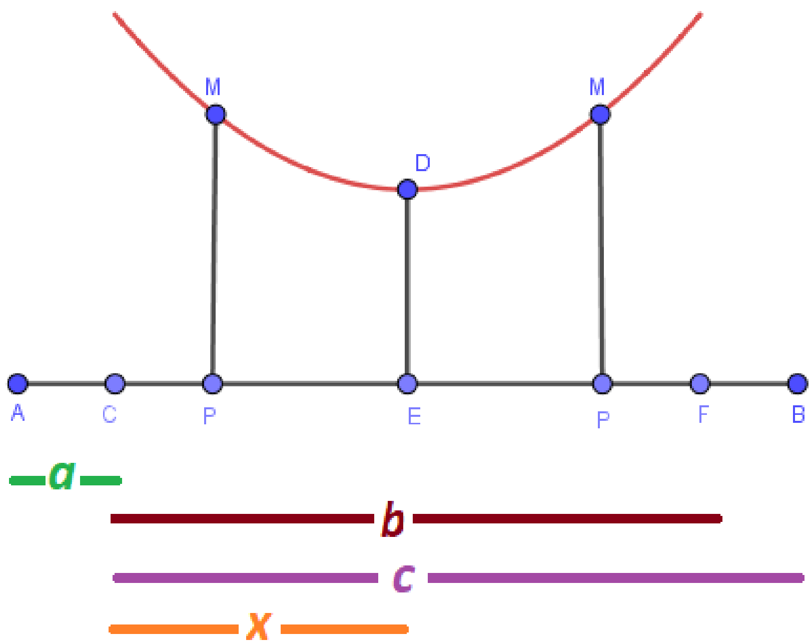


Figura 31. Construcción Ejemplo V de L'Hôpital

Sea $AC = a$, $CF = b$, $CB = c$ y si $CE = x$ entonces se tiene que $AE = a + x$, $EB = c - x$, $EF = b - x$, por lo que ahora, la razón de $\frac{AE \times EB}{CE \times EF}$ es $\frac{(a+x)(c-x)}{x(b-x)}$, es decir, $\frac{ac+cx-ax-xx}{xb-xx}$ tiene que ser un mínimo ***(AB1, AB2)***.

Supongamos la curva MDM, tal que la relación de la aplicación $PM(y)$ con la cortada $CP(x)$ es expresada con la siguiente ecuación $y = \frac{aac+acx-aax-axx}{xb-xx}$ la cuestión se reduce a encontrar el valor de x para CE, tal que la aplicación ED sea la mínima de todas las parejas PM ***(AB3)***. Luego se forma la igualdad $cxx - axx - bxx + 2acx - abc = 0$, calculando las diferencias y dividimos por $a\,dx$, reduciendo la cuestión a un cálculo de raíces. Si $c = a + b$, se tiene $x = \frac{1}{2}b$ ***(AB4)***.

<u>Ejemplo VI:</u>

Entre todos los conos que se pueden insertar en una esfera, determinar el que tiene la mayor superficie convexa.

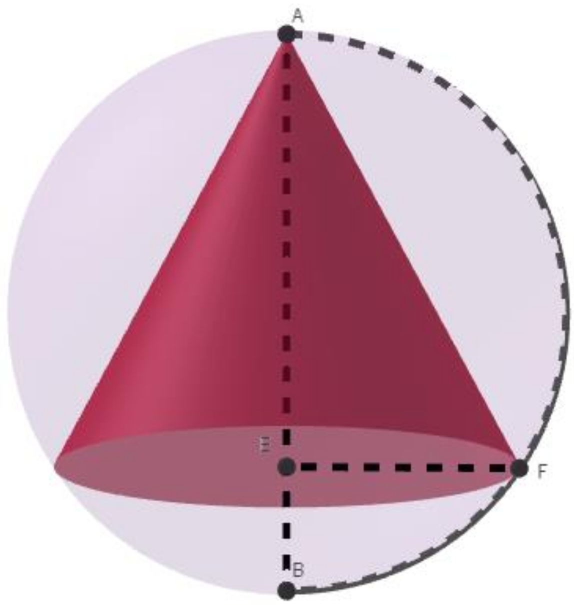


Figura 32. Construcción Ejemplo VI de L'Hôpital

En este problema de Geometría Espacial, se pretende optimizar el área de un cono inscrito en una esfera. para ello, se determina el área máxima del triángulo formado por el radio, altura y generatriz del cono, de la siguiente manera:

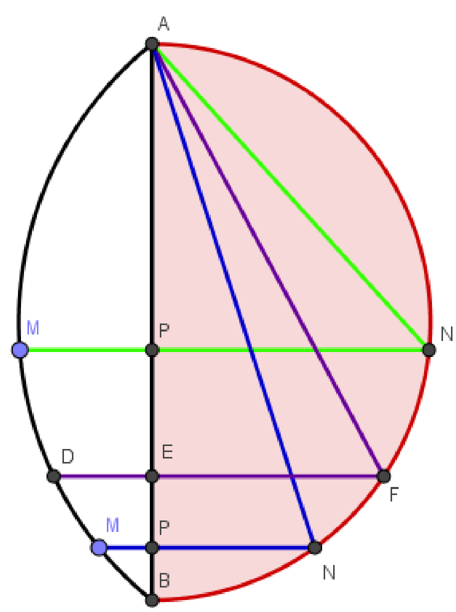


Figura 33. Construcción 2 Ejemplo VI de L'Hôpital

Sean AB el diámetro del semicírculo AFB y el punto E, de forma que trazando la perpendicular EF al segmento AF, el rectángulo $AF \times FE$ sea el más grande de todos los similares $NA \times NP$ ***(AB1)***. Si se considera que el semicírculo AFB hace una revolución entera alrededor del diámetro AB, queda claro que va a describir una esfera, y que los triángulos rectángulos AEF, APN describen los conos inscritos en esta esfera, así, las superficies convexas descritas por las cuerdas AE, NA, son entre ellas como los rectángulos $AF \times FE$, $NA \times NP$ ***(AB2)***.

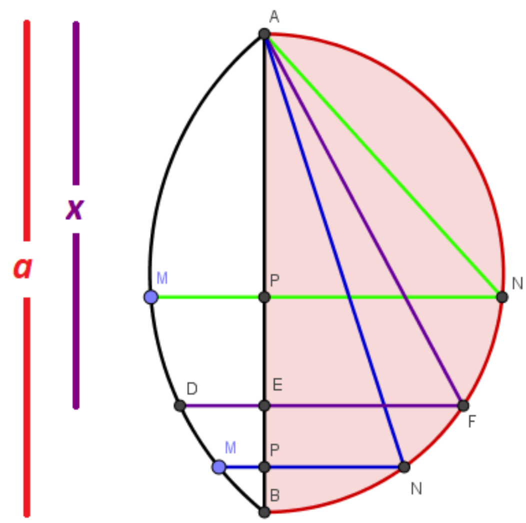


Figura 34. Construcción 3 Ejemplo VI de L'Hôpital

Por lo tanto, la incógnita $AE = x$, el valor conocido de $AB = a$, se tiene por la propiedad del círculo, $AF = \sqrt{ax}$, $EF = \sqrt{ax - xx}$; entonces, $AF \times EF = \sqrt{ax} \times \sqrt{ax - xx} = \sqrt{aaxx - ax^3}$ deberá ser un máximo, debido a que si imaginamos una línea curva MDM tal que la relación de la aplicación MP (y) con la cortada AP (x) es expresada por la ecuación $y = \frac{\sqrt{aaxx - ax^3}}{a}$; y tomamos el punto E, porque la aplicación ED es mayor que todas las parejas PM. Tenemos la diferencia $\frac{2ax\,dx - 3xx\,dx}{2\sqrt{aaxx - ax^3}} = 0$, de donde obtiene que $AE(x) = \frac{2}{3}a$ ***(AB3, AB4)***.

Ejemplo VII:

Se busca entre todos los paralelepípedos iguales a un cubo dado a^3, y que uno de sus lados es la recta dada b, aquel que tiene la menor superficie.

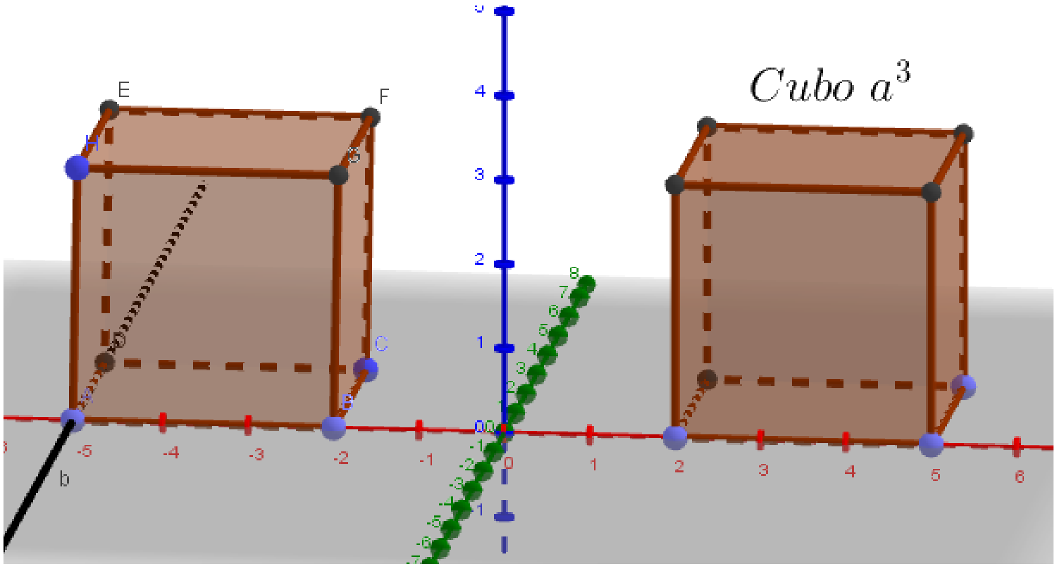


Figura 35. Construcción Ejemplo VII de L'Hôpital

En este problema de Geometría Espacial se pretende optimizar la superficie de un paralelepípedo, de tal manera que sea igual al cubo dado a^3y pase por la recta b; para ello a uno de los lados que se busca se nombrará como x, y otro será $\frac{a^3}{bx}$; tomando los planos alternativos correspondientes a los lados $b, x, \frac{a^3}{bx}$ del paralelepípedo, la suma de las áreas de las tres caras será $bx + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{b}$, la cual equivale a la mitad de la superficie total del paralelepípedo ***(AB1, AB2)***.

Esta genera una línea curva que tiene la ecuación $\frac{bx}{a} + \frac{aa}{x} + \frac{aa}{b} = y$, la cual se deriva para determinar el mínimo, obteniendo que $\frac{b\,dx}{a} + \frac{aa\,dx}{xx} = 0$, lo que es equivalente a $x = \sqrt{\frac{a^3}{b}}$ ***(AB3)***.

Por estos los tres lados del paralelepípedo serán $b, \sqrt{\frac{a^3}{b}}, \sqrt{\frac{a^3}{b}}$; donde podemos observar que existe un par de lados congruentes ***(AB4)***.

<u>Ejemplo VIII:</u>

Se busca entre todos los paralelepípedos iguales a un cubo dado a^3, aquel que tiene la menor superficie.

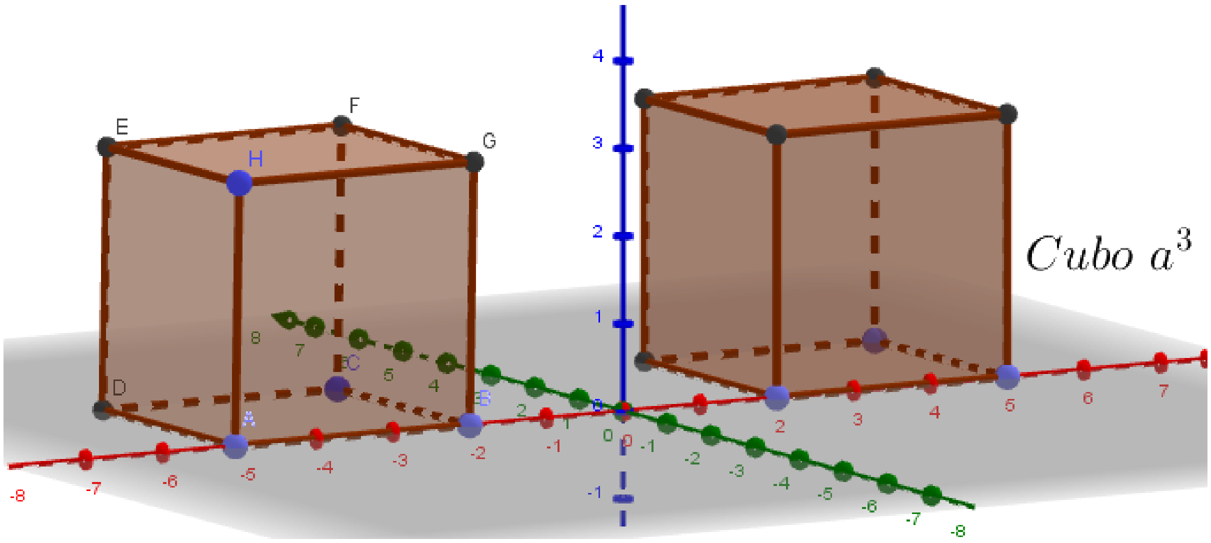


Figura 36. Construcción Ejemplo VIII de L'Hôpital

Para encontrar el paralelepípedo con menor superficie y que sea igual a un cubo dado a^3se nombra con x a uno de los lados desconocidos, por lo realizado en el anterior ejemplo se sabe que los otros dos lados son iguales a $\sqrt{\frac{a^3}{b}}$ ***(AB1)***. Si se suman las áreas de las tres caras en los planos alternativos, está es equivalente a la mitad de la superficie total del paralelepípedo se tendrá $\frac{a^3}{x} - 2\sqrt{a^3x}$, la cual deberá ser un mínimo ***(AB2)***.

Derivando se obtiene que $-\frac{a^3\,dx}{xx} + \frac{a^3dx}{\sqrt{a^3x}} = 0$, y despejando el valor desconocido se tiene que $x = a$. En consecuencia, los otros dos lados también serán congruentes a a ***(AB3)***.

En los ejemplos 7 y 8 L'Hôpital busca entre todos los paralelepípedos con el mismo volumen aquellos con menor área, para su demostración se determinan las funciones equivalentes a la mitad del área total, sumando el área de cada una de las tres caras distintas, finalmente se deriva para encontrar los valores desconocidos ***(AB4)***.

<u>Ejemplo XI:</u>

Un viajero parte de un lugar C para ir al lugar F, debe atravesar dos campos separados por una línea recta AEB. Supongamos que él recorre dentro del campo del lado de C el espacio a en el tiempo c, y en el otro lado de F el espacio b en el mismo tiempo c: buscamos por cuál punto E en la recta AEB él debe pasar, a fin de emplear el menor tiempo posible para llegar desde C a F.

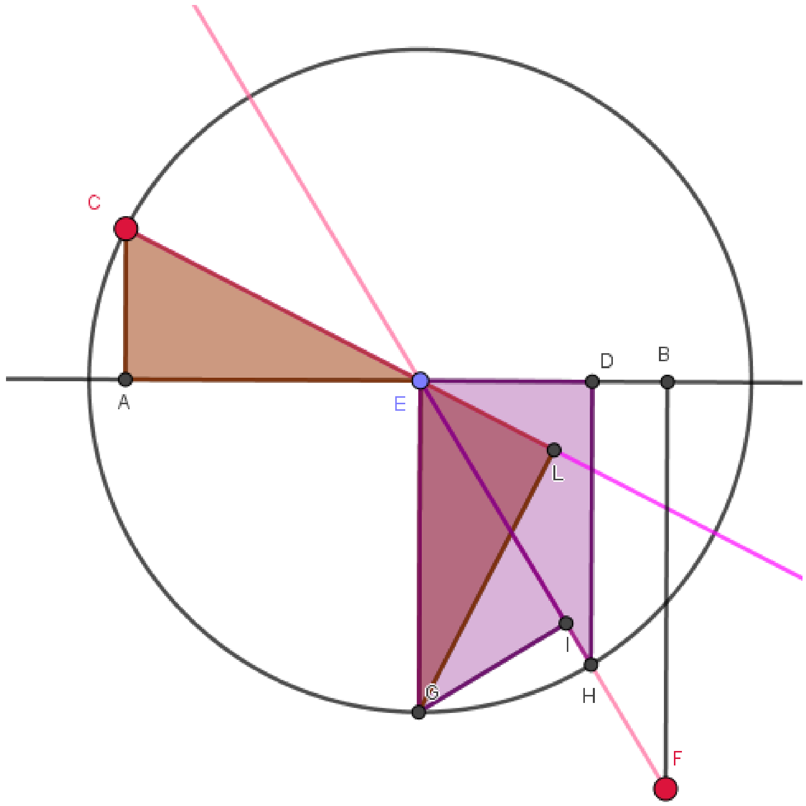


Figura 37. Construcción Ejemplo XI de L'Hôpital

Si hacemos

$$\frac{a}{CE} = \frac{c}{\frac{cu}{a}}$$

Donde $u = CE$ y $\frac{cu}{a}$ representa los tiempos que el viajero emplea en recorrer CE ***(AB1)***

Del mismo modo,

$$\frac{b}{EF} = \frac{c}{\frac{cz}{b}}$$

Donde $z = EF$ y $\frac{cz}{b}$ representa los tiempos que el viajero emplea en recorrer EF

Entonces la siguiente expresión debe ser mínimo,

$$\frac{cu}{a} + \frac{cz}{b}.$$

De donde se sigue (por el ejemplo IX) que colocando la recta EG perpendicular a la recta AB; el seno del ángulo GEC debe estar para el seno del ángulo GEF, como a está para b. Es decir, ***(AB2)***

$$\frac{sen(\angle GEC)}{sen(\angle GEF)} = \frac{a}{b}.$$

Para esto, se traza la recta EG perpendicular a la recta AB. Luego se construye la circunferencia con centro en E y radio EC, de tal forma que G es el punto de intersección de la recta EG con esta circunferencia, obteniendo así el punto H (intersección de esta circunferencia con el segmento EF). Si se traza sobre la recta AB las perpendiculares CA, HD y FB. Además, el segmento GL perpendicular a CE y GI perpendicular a EF se tiene que

$$\frac{a}{b} = \frac{GL}{GI}$$

Ahora bien, $GL = AE$ y $GI = ED$ porque $\Delta GEL \cong \Delta ECA$ y $\Delta GEI \cong \Delta EHD$, además estos triángulos son rectángulos, como es fácil de verificar ***(AB3)***.

Asignando como x el valor desconocido al segmento AE se tiene que

$$\frac{a}{b} = \frac{GL}{GI} = \frac{AE}{ED}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{ED}$$

$$ED = \frac{bx}{a}$$

y designando a $AB = f$, $AC = g$ y $BF = h$.

De la construcción también se deduce que

$$\Delta EBF \sim \Delta EDH$$

por tanto,

$$\frac{EB}{BF} = \frac{ED}{DH}$$

$$\frac{f - x}{h} = \frac{\frac{bx}{a}}{DH}$$

$$DH = \frac{bhx}{a(f - x)}$$

$$DH = \frac{bhx}{af - ax}$$

$\Delta EDH\ y\ \Delta EAC$ son rectángulos, además $EH = CE$ (por ser radios de la misma circunferencia), y como estos segmentos son las hipotenusas se obtiene que

$$\frac{a}{CE} = \frac{c}{\frac{cu}{a}}$$

$$\frac{a}{u} = \frac{ac}{cu}$$

$$\frac{a}{\sqrt{g^2 + x^2}} = \frac{ac}{c\sqrt{g^2 + x^2}}$$

$$\overline{ED}^2 + \overline{DH}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{AE}^2$$

$$\left(\frac{bx}{a}\right)^2 + \left(\frac{bhx}{af - ax}\right)^2 = g^2 + x^2$$

$$\frac{b^2x^2}{a^2} + \frac{b^2h^2x^2}{(af - ax)^2} = g^2 + x^2$$

$$\frac{b^2x^2(f - x)^2}{a^2(f - x)^2} + \frac{b^2h^2x^2}{(af - ax)^2} = g^2 + x^2$$

$$\frac{b^2x^2(f - x)^2 + b^2h^2x^2}{(af - ax)^2} - \frac{g^2(af - ax)^2}{(af - ax)^2} - \frac{x^2(af - ax)^2}{(af - ax)^2} = 0$$

$$\frac{b^2x^2(f - x)^2 + b^2h^2x^2 - g^2(af - ax)^2 - x^2(af - ax)^2}{(af - ax)^2} = 0$$

$$b^2x^2(f - x)^2 + b^2h^2x^2 - g^2(af - ax)^2 - x^2(af - ax)^2 = 0$$

$$b^2x^4 - a^2x^4 - 2fb^2x^3 + 2a^2fx^3 + b^2f^2x^2 + b^2h^2x^2 + g^2a^2x^2 - a^2f^2x^2 + 2a^2g^2fx - a^2g^2f^2 = 0$$

Otra forma de determinar esta ecuación sin usar el ejemplo IX es de la siguiente manera:

Denominemos los conocidos $AB = f, AC = g, BF = h$ y el desconocido $AE = x$. Se tiene que

$$\frac{a}{CE} = \frac{c}{\frac{cu}{a}}$$

Donde $u = CE$ y $\frac{cu}{a}$ representa los tiempos que el viajero emplea en recorrer CE, además $u = \sqrt{g^2 + x^2}$ resultando

$$\frac{cu}{a} = \frac{c\sqrt{g^2 + x^2}}{a}$$

Del mismo modo,

$$\frac{b}{EF} = \frac{c}{\frac{cz}{b}}$$

Donde $z = EF$, $\frac{cz}{b}$ representa los tiempos que el viajero emplea en recorrer EF y $z = \sqrt{(f - x)^2 + h^2}$, por tanto

$$\frac{cz}{b} = \frac{c\sqrt{(f-x)^2 + h^2}}{b}$$

$$\frac{cz}{b} = \frac{c\sqrt{f^2 - 2fx + x^2 + h^2}}{b}$$

Como ya se había dicho antes, la expresión

$$\frac{cu}{a} + \frac{cz}{b} \text{ debe ser mínimo}$$

Reemplazando se obtiene la expresión que se minimizará

$$\frac{c\sqrt{g^2 + x^2}}{a} + \frac{c\sqrt{f^2 - 2fx + x^2 + h^2}}{b}$$

Encontrando su derivada e igualando a cero

$$\frac{2cx}{a\sqrt{g^2 + x^2}} + \frac{c(-2f + 2x)}{b\sqrt{f^2 - 2fx + x^2 + h^2}} = 0$$

$$\frac{2cx}{a\sqrt{g^2 + x^2}} + \frac{2c(-f + x)}{b\sqrt{f^2 - 2fx + x^2 + h^2}} = 0$$

$$\frac{x}{a\sqrt{g^2 + x^2}} + \frac{x - f}{b\sqrt{f^2 - 2fx + x^2 + h^2}} = 0$$

Donde al operar se obtendrá la misma ecuación de arriba, entonces una de las raíces proporcionará el valor de AE que se busca ***(AB4)***.

Ejemplo XII:

Sea una rueda F que está colgada libremente en el extremo de una cuerda CF fija en C, con un peso D suspendido de la cuerda DFB que pasa por encima de la rueda F, y que está fija en B, de forma que los puntos C, B situados en la zona de la misma línea horizontal CB. Supongamos que la polea y las cuerdas no sufren ninguna gravedad, preguntamos en qué punto el peso D o la polea F debe detenerse.

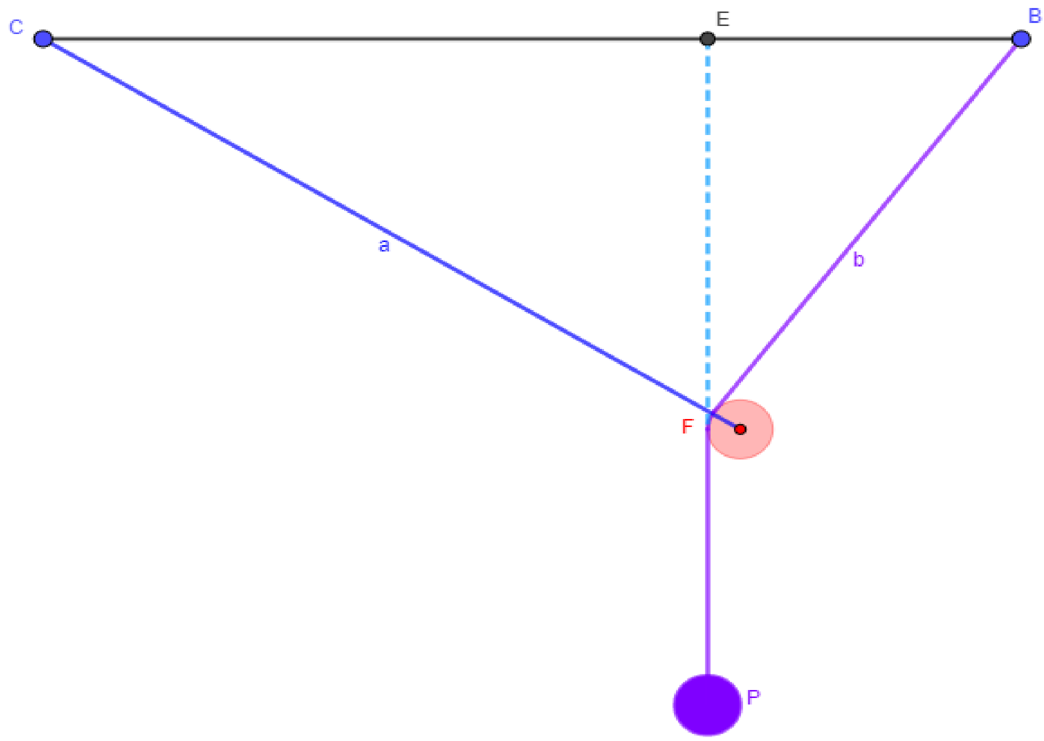


Figura 38. Construcción Ejemplo XII de L'Hôpital

Es claro, por los principios de la Mecánica que el peso D bajará lo más bajo que le sea posible, debajo de la horizontal CB, de donde se deduce que la recta DE que tiene el peso debe tener un máximo.

Denominando $CF = a, DFB = b;\ CB = c$ y el desconocido $CE = x$ ***(AB1)***.

Por el Teorema de Pitágoras se tiene que

$$EF = \sqrt{a^2 - x^2}\ y\ FB = \sqrt{(c-x)^2 + \left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)^2}$$

$$FB = \sqrt{c^2 - 2cx + x^2 + a^2 - x^2}$$

$$FB = \sqrt{c^2 - 2cx + a^2}$$

Por tanto, $DFE = DF + EF$

$$DFE = b - \sqrt{c^2 - 2cx + a^2} + \sqrt{a^2 - x^2} \text{ que debe tener un máximo}$$

Derivando se obtiene

$$-\frac{-2c}{\sqrt{c^2-2cx+a^2}}+\frac{-2x}{\sqrt{a^2-x^2}}=0$$

$$2\left(\frac{c}{\sqrt{c^2-2cx+a^2}}-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)=0$$

$$\frac{c}{\sqrt{c^2-2cx+a^2}}-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}=0$$

Y operando

$$\frac{c\sqrt{a^2-x^2}-x\sqrt{c^2-2cx+a^2}}{\sqrt{c^2-2cx+a^2}\sqrt{a^2-x^2}}=0$$

$$c\sqrt{a^2-x^2}-x\sqrt{c^2-2cx+a^2}=0$$

$$\left(c\sqrt{a^2-x^2}-x\sqrt{c^2-2cx+a^2}\right)^2=0^2$$

$$\left(c\sqrt{a^2-x^2}\right)^2-2xc\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{c^2-2cx+a^2}+\left(x\sqrt{c^2-2cx+a^2}\right)^2=0$$

$$c^2(a^2-x^2)-2xc\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{c^2-2cx+a^2}+x^2(c^2-2cx+a^2)=0$$

$$c^2a^2-c^2x^2-2xc\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{c^2-2cx+a^2}+c^2x^2-2cx^3+a^2x^2=0$$

Tomando ***(AB3)***

$$c^2a^2-c^2x^2+c^2x^2-2cx^3+a^2x^2=0$$

$$-2cx^3+a^2x^2+c^2a^2=0$$

$$2cx^3-a^2x^2-c^2a^2=0$$

De lo que resulta

$$2cx^3-2c^2x^2-a^2x^2+a^2c^2=0$$

factorizando

$$2cx^2(x-c)-a^2(x^2-c^2)=0$$

$$2cx^2(x-c)-a^2(x-c)(x+c)=0$$

$$(x-c)\big(2cx^2-a^2(x+c)\big)=0$$

$$(x-c)(2cx^2-a^2x-a^2c)=0$$

Dividiendo por $(x-c)$

$$2cx^2-a^2x-a^2c=0$$

Es aquí donde una de las raíces proporciona a la CE un valor tal que la perpendicular ED pasa por la polea F y el peso D que están en reposo ***(AB4)***.

Cours de Mathématique de Bézout

Problema I:

Dividir un número dado en dos partes tales, que su producto sea un máximo.

Para la demostración de este problema se denomina a al número, x a una de las partes y $a-x$ a la otra parte ***(AB1)***. Se pretende que al multiplicar estas dos partes su producto sea el máximo, por lo que al multiplicar obtenemos $x(a-x)=ax-xx$, y a partir de esta nueva expresión se puede conseguir un máximo, derivando ***(AB2)***.

$$y=ax-x^2$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{a-2x}$$

Al igualar esta expresión a 0 se tiene que $1=0$, lo cual es una contradicción. Así que tomamos únicamente el denominador y despejamos *x* ***(AB3)***.

$$\frac{1}{a-2x}=0$$

$$a-2x=0$$

$$-2x=-a$$

$$x=\frac{1}{2}a$$

$$a-x=\ a-\frac{1}{2}a=\frac{1}{2}a$$

Por lo que se tiene que la manera de dividir un número dado en dos partes tal que su producto sea el máximo, es por la mitad. Las dos partes son iguales y su producto será ***(AB4)***:

$$y = \frac{1}{2}a\left(\frac{1}{2}a\right) = \frac{1}{4}a^2$$

<u>Problema II:</u>

Hallar entre todas las líneas que se pueden tomar de un mismo punto D, dentro de un ángulo conocido ABC, cuál es la que forma con los lados del ángulo el menor triángulo posible.

Para la demostración de este problema se realizan algunas construcciones auxiliares.

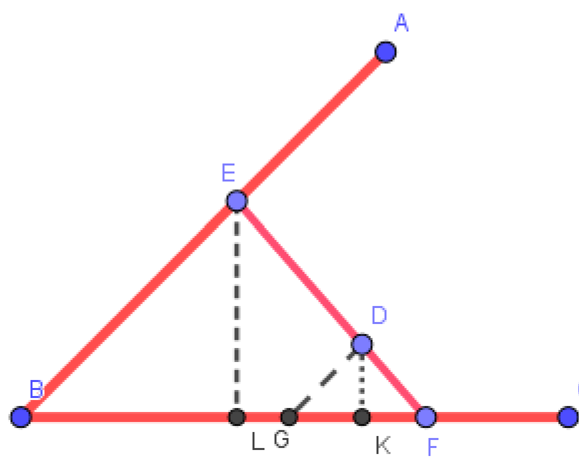


Figura 39. Construcción Problema II de Bézout

Se construye el ángulo *ABC*, un punto *E* sobre el lado *AB* y un punto *F* sobre el lado *BC*, para tener el triángulo *BEF*. Luego se ubica un punto *D* sobre el segmento *EF*, posteriormente se construye en segmento *DG* paralelo a *AB*, también el segmento *DK* perpendicular a *BC*, y el segmento *EL* paralelo a *DK* ***(AB1)***.

Se denomina *a* al segmento *BG*, *b* a *DK* y *x* a *BF*. Se observa que mientras más crece *BF* más grande es el triángulo, y mientras más pequeño se hace *BF* más pequeño es el triángulo ***(AB2)***.

Por la manera como fue construido se tiene:

$$\triangle BEF \sim \triangle GDF \leftrightarrow \frac{GF}{BF} = \frac{DF}{EF}$$

$$\triangle DKF \sim \triangle ELF \leftrightarrow \frac{DF}{EF} = \frac{DK}{EL}$$

Como se tiene que

$$\frac{GF}{BF}=\frac{DK}{EL}$$

$$BG = a$$

$$DK = b$$

$$BF = x$$

$$GF = BF - BG$$

$$\frac{GF}{BF}=\frac{DK}{EL} \leftrightarrow \frac{x-a}{x}=\frac{b}{EL}$$

$$EL = \frac{bx}{x-a}$$

Teniendo esto se puede determinar el área del triángulo *BEF* ***(AB3)***.

$$\frac{EL \times BF}{2}=\frac{bx}{x-a}\times\frac{x}{2}=\frac{bx^2}{2(x-a)}$$

Antes de derivar se suprime la constante por proposición 52 (demostrada en el libro) y se deriva.

$$y=\frac{x^2}{(x-a)}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x(x-a)-x^2(1)}{(x-a)^2}$$

$$\frac{2x(x-a)-x^2}{(x-a)^2}=0$$

$$2x^2-2xa-x^2=0$$

$$x^2-2xa=0$$

$$x(x-2a)=0$$

$$x=2a$$

Y reemplazando x y a se obtiene $BF = 2BG$. Lo que lleva a concluir que la línea FDE que se toma por D, dará el menor triángulo $EBF = 2ab$ ***(AB4)***.

El anterior problema de Geometría Plana tiene como objetivo optimizar el área de un triángulo utilizando semejanza de triángulos para escribir una ecuación que se deriva para encontrar la solución.

Problema III:

Hallar el mayor paralelepípedo de todos los que tienen la misma superficie y la misma altura.

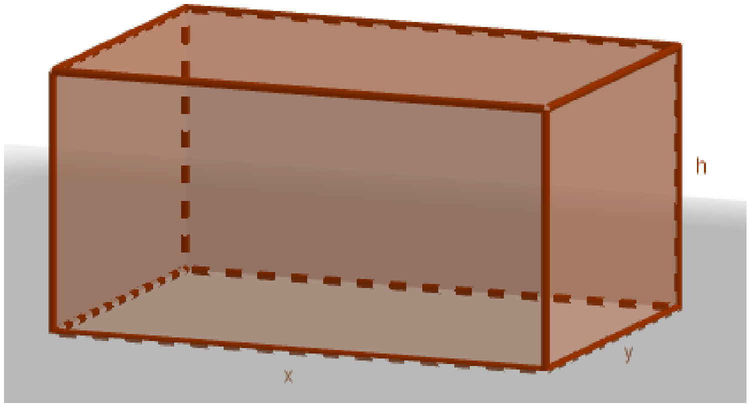


Figura 40. Construcción Problema III de Bézout

Se denomina h a la altura del paralelepípedo, cc el área superficial, x y y a los lados de su base rectangular ***(AB1)***. El área superficial está compuesta por seis rectángulos, dos con altura h y base y, otros dos con altura h y base x, y dos más con altura y y base x. De esta manera el área superficial total es constante y se puede expresar como $2hx + 2hy + 2xy = cc$. ***(AB2)*** El volumen del paralelepípedo se determina con hxy, el cual siempre es mayor que toda el área superficial, y derivando se obtiene que:

$$hy\,dx + hx\,dy = 0$$
$$h(y\,dx + x\,dy) = 0$$
$$y\,dx + x\,dy = 0$$

Despejando dx en la anterior expresión y reemplazando en la derivada de la ecuación del área superficial se tiene:

$$dx = \frac{-x\,dy}{y}$$
$$2h\,dx + 2y\,dx + 2h\,dy + 2x\,dy = 0$$
$$2h\left(\frac{-x\,dy}{y}\right) + 2y\left(\frac{-x\,dy}{y}\right) + 2h\,dy + 2x\,dy = 0$$
$$-2hx\,dy - 2xy\,dy + 2hy\,dy + 2xy\,dy = 0$$
$$2h(-x\,dy + y\,dy) = 0$$
$$y\,dy = x\,dy$$

$$y = x$$

Ahora al encontrar que $x = y$ significa que la base del paralelepípedo debe ser un cuadrado, entonces se reemplaza la y por x en la ecuación del área superficial y se despeja x ***(AB3).***

$$2hx + 2hx + 2x^2 = cc$$
$$2x^2 + 4hx - cc = 0$$
$$x = \frac{-4h \pm \sqrt{16hh + 8cc}}{4}$$
$$x = -h \pm \sqrt{hh + {}^1\!/_2\, cc}$$
$$x = -h + \sqrt{hh + {}^1\!/_2\, cc}$$

Para este problema el autor quiere optimizar el volumen de un paralelepípedo dadas su área y su altura, utilizando el área superficial para determinar la medida de la base mediante la derivación y el despeje de ecuaciones.

Ahora se quiere determinar la altura h para el paralelepípedo tenga el mayor volumen entre todos los que tiene la misma área superficial. Como ya se sabe que el área debe ser un cuadrado, entonces el volumen se determina por hxx, se deriva, se despeja dh y se reemplaza en la ecuación del área superficial.

$$xx\,dh + 2xh\,dx = 0$$
$$dh = \frac{-2xh\,dx}{xx} = \frac{-2h\,dx}{x}$$
$$2xh + 2xh + 2xx = 4xh + 2x^2$$
$$4h\,dx + 4x\,dx + 4x\,dh = 0$$
$$4h\,dx + 4x\,dx + 4x\left(\frac{-2h\,dx}{x}\right) = 0$$
$$4h\,dx + 4x\,dx - 8h\,dx = 0$$
$$-4h\,dx + 4x\,dx = 0$$
$$4x\,dx = 4h\,dx$$
$$x = h$$

Por lo cual el paralelepípedo debe ser un cubo porque la altura es igual al lado de la base cuadrada. Finalmente se determina el lado de ese cubo, reemplazando x por h en la ecuación del área superficial y despejando.

$$4xh + 2x^2 = cc$$
$$4x^2 + 2x^2 = cc$$
$$6x^2 = cc$$
$$x^2 = \frac{cc}{6}$$
$$x = \sqrt{\frac{cc}{6}}$$

En conclusión, entre todos los paralelepípedos de área superficial constante, el que tiene mayor volumen es el cubo, cuyo lado es la raíz cuadrada de la sexta parte del área superficial ***(AB4)***.

Problema IV:

Hallar entre todos los triángulos del mismo perímetro y base, cuál es el que tiene la mayor superficie.

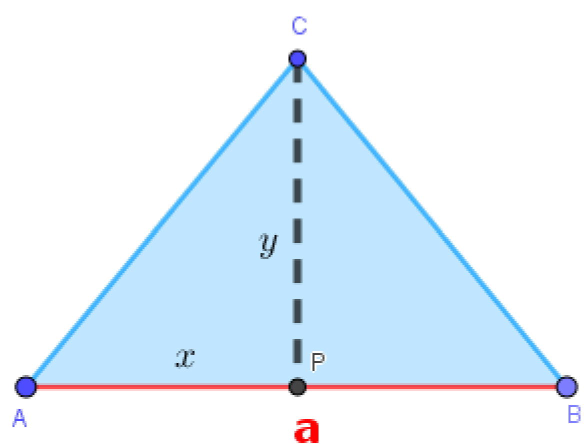


Figura 41. Construcción Problema IV de Bézout

En el triángulo ABC se construye CP perpendicular a la base $AB = a$, el perímetro del triángulo se denomina c, $AP = x$, $CP = y$, por lo que $PB = a - x$. Usando el teorema de Pitágoras en los triángulos ACP y BCP se determinan las longitudes de los lados AC y BC. ***(AB1)***

$$AC^2 = xx + yy$$
$$AC = \sqrt{xx + yy}$$
$$CB^2 = yy + (a - x)^2$$

$$CB = \sqrt{yy + (a - x)^2}$$

Al tener la medida de los tres lados del triángulo se determina su perímetro y área, y se derivan. ***(AB2)***

$$c = a + \sqrt{xx + yy} + \sqrt{yy + (a - x)^2}$$

$$\left[\frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-1/2} \cdot 2x\,dx + 2y\,dy\right] + \left[\frac{1}{2}(y^2 + (a - x)^2)^{-1/2} \cdot 2y\,dy - 2(a - x)\,dx\right] = 0$$

$$\frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y\,dy - (a - x)\,dx}{\sqrt{y^2 + (a - x)^2}} = 0$$

$$Área = \frac{ay}{2}$$

$$\frac{a\,dy}{2} = 0$$

Se despeja dy en el diferencial del área y se reemplaza en el diferencial del perímetro, para despejar x. ***(AB3)***

$$\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{(a - x)\,dx}{\sqrt{y^2 + (a - x)^2}} = 0$$

$$\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{(a - x)\,dx}{\sqrt{y^2 + (a - x)^2}}$$

$$x\sqrt{y^2 + (a - x)^2} = (a - x)\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x^2(y^2 + (a - x)^2) = (a - x)^2(x^2 + y^2)$$

$$x^2y^2 + x^2(a - x)^2 = x^2(a - x)^2 + y^2(a - x)^2$$

$$x^2y^2 = y^2(a - x)^2$$

$$x^2 = a^2 - 2ax + x^2$$

$$2ax = a^2$$

$$x = \frac{a}{2}$$

Al encontrar este valor para *x* significa que el triángulo debe ser isósceles. Si se traza una perpendicular a AB desde su punto medio y se construye un arco de circunferencia con centro en B y radio igual a la mitad de la diferencia entre el perímetro c y la base a del triángulo, este arco corta la perpendicular en C. Si tomamos CB y CA, tendremos el triángulo de mayor área entre todos los triángulos isoperimétricos con la misma base ***(AB4)***.

Cours D'Analyse de L'École polytechnique de Sturm

<u>Segunda Aplicación:</u>

Se dan dos puntos A y B, situados en dos medios diferentes y separados por una superficie plana P. Un móvil se mueve en el primer medio con una velocidad uniforme u, y en el segundo medio con una velocidad uniforme v; buscamos el camino AHB que el móvil debe hacer para ir de A a B en el tiempo más corto.

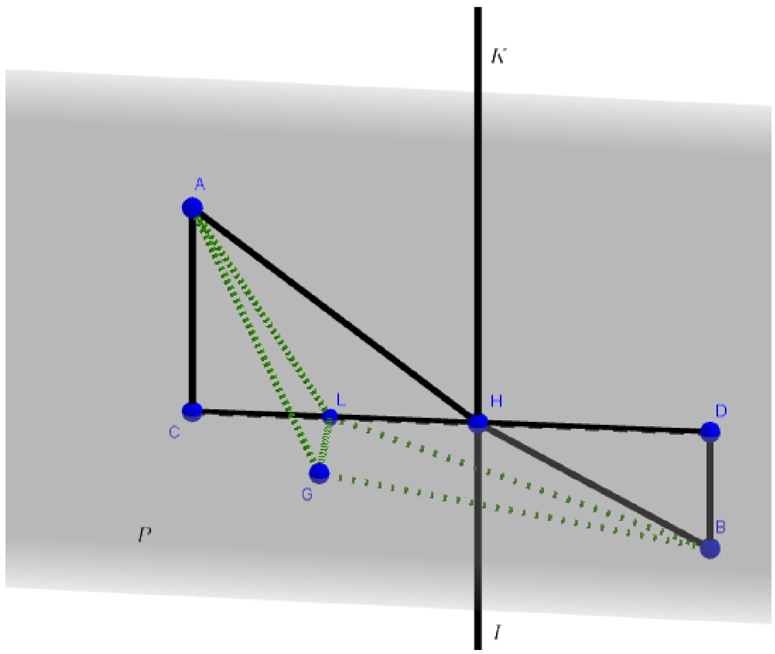


Figura 42. Construcción Segunda Aplicación de Sturm

El camino buscado debe estar compuesto por líneas rectas. Sturm dice que la línea cortada que resuelve este problema debe estar en el plano $ABCD$, determinado por las rectas perpendiculares AC y BD al plano P ***(AB1)***. Supongamos que el camino es AGB y que interseca al plano P en el punto G situado fuera del plano $ABCD$. Tracemos GL perpendicular a CD y tracemos los segmentos AL y BL; los triángulos AGL y BGL son rectángulos en L, por lo cual se tiene que $AL < AG$ y $BL < BG$, de esta manera el móvil va más rápidamente del punto A al punto B siguiendo el camino ALB que por el camino AGB.

Busquemos en el plano $ABCD$ perpendicular al plano P, la línea AHB, tal que la distancia recorrida por el móvil sea en el menor tiempo posible ***(AB2)***. Sean $AC = a, BD = b, CH = x$ y el tiempo que el móvil tarda para ir de A hasta H es:

$$\frac{AH}{u} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{u}$$

Y el tiempo que emplea para ir de H hasta B está determinado por la ecuación:

$$\frac{HB}{v} = \frac{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}{v}$$

De esta manera la función a partir de la cual se determinará el mínimo es:

$$f(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{u} + \frac{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}{v}$$

Calculando la derivada e igualando a 0 se obtiene:

$$f'^{(x)} = \frac{x}{u\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{c - x}{v\sqrt{b^2 + (c - x)^2}} = 0$$

$$\frac{x}{u\sqrt{a^2 + x^2}} = -\frac{c - x}{v\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}$$

Si se quiere resolver esta ecuación en torno a *x*, se debe elevar al cuadrado y resolver la ecuación resultante, de cuarto grado ***(AB3)***. También se tiene que:

$$\frac{x}{u\sqrt{a^2 + x^2}} = \sin CAH = \sin AHK$$

$$\frac{c - x}{v\sqrt{b^2 + (c - x)^2}} = \sin HBD = \sin BHI$$

En el caso de buscar el mínimo (puesto que la función *f(x)* no tiene un máximo), se obtiene:

$$\frac{\sin AHK}{u} = \frac{\sin BHI}{v}$$

$$\frac{\sin AHK}{\sin BHI} = \frac{u}{v}$$

La cantidad resultante $\frac{u}{v}$, es la razón entre las dos velocidades de la luz en los dos medios, y el índice de refracción de la luz en el paso del primer al segundo medio ***(AB4)***.

Cours de Calcul Differentiel et Integral de Serret

Joseph Alfred Serret construye una obra dedicada a las reglas del cálculo diferencial e integral y las aplicaciones desde el cálculo a la geometría. Se divide en dos tomos, en el primero uno de sus capítulos hace referencia a la teoría de máximos y mínimos, y presenta algunos ejemplos y problemas.

<u>Ejemplo III (Problema de Fermat)</u>

Dos medios están separados por un plano P, buscamos el camino que debe seguir un móvil para ir, en el tiempo más corto, de un punto A del primer medio a un punto B el segundo. El móvil se mueve en el primer medio a una velocidad constante u, y en el segundo medio a una velocidad constante v.

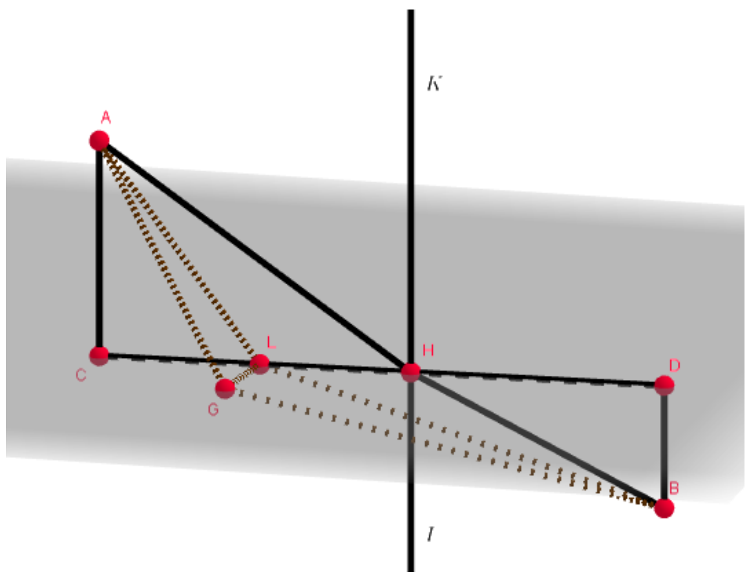


Figura 43. Construcción Ejemplo III de Serret

El camino buscado está compuesto de dos líneas rectas, pues el espacio recorrido por el móvil, en uno u otro móvil, es proporcional al tiempo empleado. También este camino está en el plano $ACDB$ perpendicular al plano P por los puntos A y B y que lo corta en el segmento CD ***(AB1)***. Consideremos la línea AGB situada fuera del plano $ACDB$, del punto G donde encuentra al plano P, trazamos GL perpendicular a CD, las rectas AL y LB serán respectivamente menores que AG y

GB; por lo tanto, el tiempo para recorrer el camino ALB será menor que el tiempo empleado por el camino AGB ***(AB2)***.

A las perpendiculares AC y BD las nombramos *a* y *b* respectivamente, trazadas de los puntos A y B sobre el plano P, a la distancia AC la llamamos c y x a la distancia desde el punto C hasta un punto cualquiera H de CD. Obtenemos:

$$AH = \sqrt{x^2 + a^2}, \quad BH = \sqrt{(c-x)^2 + b^2}$$

Así el tiempo t que el móvil empleará para ir desde A hasta B, por el camino AHB será:

$$t = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{u} + \frac{\sqrt{(c-x)^2 + b^2}}{v}$$

Esta es la función de *x* a partir de la cual se determinará el mínimo. Es claro que no se comporta como un máximo, igualando a 0 la derivada de la función *t* es:

$$\frac{1}{u}\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{1}{v}\frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2 + b^2}} = 0$$

Elevando al cuadrado para eliminar los radicales se obtiene:

$$(v^2 - u^2)x^2(c-x)^2 + b^2v^2x^2 - a^2u^2(c-x)^2 = 0$$

De esta manera la incógnita *x* depende de una ecuación de cuarto grado. Pero, sin resolver esta ecuación, podemos obtener como se deduce de la propiedad geométrica que caracteriza a la línea buscada ***(AB3)***. Colocamos la recta KI perpendicular en H al plano P, nombramos *i* al ángulo AHK y *r* al ángulo IHB:

$$\sin r = \frac{DH}{BH} = \frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2 + b^2}}$$

$$\sin i = \frac{CH}{AH} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

En consecuencia, la ecuación que expresa la condición de mínimo es:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{u}{v}$$

Resulta que el seno del ángulo de incidencia *i* esta para el seno del ángulo de refracción *r* en razón de las velocidades *u* y *v* con las cuales el móvil se puede desplazar del primero al segundo medio, respectivamente ***(AB4)***.

Para solucionar el problema Serret descompone la figura en triángulos rectángulos utilizando el Teorema de Pitágoras y las funciones trigonométricas para relacionar los lados de los triángulos. La función que se obtiene es una función irracional.

Ejemplo IV:

Determinar los máximos y mínimos de la distancia entre un punto dado y una curva dada.

Nombramos x_0 y y_0 a las coordenadas del punto dado relativas a dos ejes rectangulares, *x* y *y* las coordenadas de la curva dada ***(AB1)***. La ordenada *y* es una función dada de *x*, y el cuadrado de la distancia del punto (x_0, y_0) al punto (x, y) es:

$$V = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$$

Se quieren calcular los valores máximo y mínimo de las funciones de *x* representada por *V* ***(AB2)***. Se obtiene:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{dV}{dx} = (x - x_0) + (y - y_0)\frac{dy}{dx} \\ \frac{1}{2}\frac{d^2V}{dx^2} = \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right) + (y - y_0)\frac{d^2y}{dx^2} \end{cases}$$

Teniendo en cuenta la condición $\frac{dV}{dx} = 0$ del máximo o el mínimo, se tiene:

$$(x - x_0) + (y - y_0)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{y - y_0}{x - x_0}\frac{dy}{dx} = -1$$

Donde $\frac{y-y_0}{x-x_0}$ es el coeficiente de inclinación de la recta que une al punto dado M_0 con el punto buscado *M* de la curva dada, $\frac{dy}{dx}$ es el coeficiente de inclinación de la recta tangente en *M* a la misma curva. Así la ecuación anterior expresa que la recta que une el punto dado al punto buscado es normal a la curva.

Sea *M* uno de los puntos determinados por la ecuación igualada a 0, ese punto corresponderá a un mínimo o a un máximo, dependiendo si $\frac{d^2V}{dx^2}$ sea positiva o negativa. Si $\frac{d^2V}{dx^2}$ es nula, se deben analizar las derivadas de orden superior para decidir si se tiene un mínimo o un máximo, o si no es uno ni otro. Este último caso es particular si $\frac{d^2V}{dx^2}$ fuera nula en el punto *M*, el valor de $\frac{d^3V}{dx^3}$ es diferente a 0 ***(AB3)***.

La recta M_0M será colocada suponiendo que el punto dado M_0 toma todas las posiciones posibles sobre esta normal, existirá una posición *M'* del punto M_0 para la cual la derivada $\frac{d^2V}{dx^2}$ sea nula; en consecuencia, si tomamos *x'* y *y'* como las coordenadas de *M'* se tiene:

$$1 + \frac{dy^2}{dx^2} + (y - y')\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

Y la segunda ecuación presentada se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2V}{dx^2} = \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)\frac{y_0 - y'}{y - y'}$$

Esto muestra que el valor de M_0M será un mínimo o un máximo dependiendo si $y_0 - y'$ y $y - y'$ están en la misma recta o en rectas contrarias. Es decir, existirá un mínimo cuando el punto dado M_0 este situado entre *M'* y *M*, y existirá un máximo en el caso contrario. El punto *M'* es el centro de la curvatura de la curva dada en el punto M ***(AB4)***.

ANEXO 2: Actividades propuestas en el aula

SESIÓN 1. EUCLIDES DE ALEJANDRÍA

Euclides (325 – 265 a.C.) fue un matemático y geómetra griego, considerado uno de los grandes matemáticos de la antigüedad y el padre de la geometría. Es el autor de "***Los Elementos***" una de las obras matemáticas más conocidas del mundo que ha tenido más de 1.000 traducciones desde su primera publicación en 1.482, compuesta por trece libros y es el resultado de la compilación del conocimiento de la matemática en los años anteriores, poniendo orden a muchos teoremas de Eudoxo, perfeccionando muchos de estos, dando demostraciones irrefutables para hechos probados sin rigor por sus predecesores y fundando el método axiomático. En esta obra se presentan 465 proposiciones, 93 problemas y 372 teoremas de la geometría plana y espacial, junto con cinco postulados.

En *Los Elementos*, Euclides presenta algunas proposiciones que tiene que desarrollan el proceso de optimización, por lo que se han adaptado en applets construidos en GeoGebra y reestructurado en forma de problemas. A continuación, se presentan 3 de estos problemas.

PROBLEMA 1: LIBRO III, PROPOSICIÓN 7

Link: https://www.geogebra.org/m/sdugjzqt

En esta construcción encontrarás:

- Una circunferencia con centro E y radio ED.
- El segmento FB, donde F está sobre el diámetro AD y B está sobre la circunferencia.

Nota: Es necesario que escribas todo lo que logres encontrar y las conclusiones a las que llegues.

Fase de exploración

1. Mueve el punto F, ¿qué sucede con el segmento FB?

____

____

____

2. Mueve el punto B que se encuentra sobre la circunferencia, ¿qué pasa con el segmento BF?

Fase de Análisis

1. ¿Existe un segmento BF con la máxima longitud? ¿Por qué?

2. Si existe, menciona qué condiciones deben cumplir los puntos B y F para que sea la máxima.

3. ¿Existe un segmento BF con la mínima longitud? ¿Por qué?

4. Si existe, menciona qué condiciones deben cumplir los puntos B y F para que sea la mínima.

Fase de argumentación (Trabajo en equipo)

- Compara tus respuestas con las de tus compañeros.

- ¿Qué pueden generalizar respecto a los segmentos de la máxima y la mínima longitud y la ubicación de los puntos B y F?

- Socializa la(s) conjetura(s) de tu equipo con todos los demás, luego escribe la conclusión final a la que llegas.

PROBLEMA 2: LIBRO III, PROPOSICIÓN 15

Link: https://ggbm.at/evgxc3a6

En esta construcción encontrarás:

- Una circunferencia con centro C.
- La cuerda AB.

Fase de exploración

1. Mueve el punto A, ¿qué pasa con la cuerda AB?

2. Mueve el punto B, ¿qué pasa con la cuerda AB?

3. ¿Por qué crees que sucede esto?

____

____

____

____

Fase de interpretación

1. ¿Existe una cuerda que tenga la máxima longitud?

____

____

____

____

2. Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir la cuerda para que la longitud sea máxima.

____

____

____

____

3. ¿Existe una cuerda que tenga la mínima longitud? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir la cuerda para que la longitud sea mínima.

____

____

____

____

Fase de análisis (Trabajo en equipo)

4. Compara tus respuestas con las de tus compañeros
5. ¿Qué pueden generalizar respecto a la longitud de la cuerda? (formulen una conjetura)

____

____

____

____

6. Socializa la(s) conjetura(s) de tu equipo con todos los demás, luego escribe la conclusión final a la que llegas.

____
____
____
____

PROBLEMA 3: LIBRO VI, PROPOSICIÓN 27

Link: https://ggbm.at/pn4arvrk

En esta construcción encontrarás:

- Paralelogramo AC
- Paralelogramo AZ (semejante al paralelogramo AC).

Contesta las siguientes preguntas:

1. ¿Qué puntos puedes mover y cuál es la función de cada uno de estos puntos?

____
____
____
____

2. ¿Existe un paralelogramo AZ semejante a AC con la mínima área posible? Si existe, menciona las condiciones que debe cumplir el paralelogramo AZ para que el área sea mínima.

____
____
____
____

3. ¿Existe un paralelogramo AZ semejante a AC con la máxima área posible? Si existe, menciona las condiciones que debe cumplir el paralelogramo AZ para que el área sea máxima.

SESIÓN 2. PAPPUS DE ALEJANDRÍA

Pappus (250 - 350 d.C.) fue un matemático y geómetra griego nacido en Alejandría, escribió comentarios de los Elementos de Euclides y de Almagesto de Ptolomeo. Fue precursor de la geometría moderna, maestro en Alejandría y autor de la ***"Colección Matemática"***, una obra compuesta de ocho libros en la que presenta un panorama histórico de la matemática clásica, incluyendo algunas demostraciones alternativas del trabajo de otros matemáticos famosos de su época, y proponiendo nuevas proposiciones geométricas entorno a las cónicas, polígonos, poliedros, superficies y volúmenes de sólidos de revolución.

En la *Colección Matemática*, Pappus presenta algunas proposiciones que desarrollan el proceso de optimización, por lo que se han adaptado en applets construidos en GeoGebra y reestructurado en forma de problemas. A continuación, se presentan 3 de estos problemas.

PROBLEMA I: LIBRO V, PROPOSICIÓN 5

Parte 1

Nota: Es necesario que escribas todo lo que logres encontrar y las conclusiones a las que llegues.

En GeoGebra sigue las siguientes instrucciones:

- Construye un triángulo ∆ABC cualquiera. (con la opción polígono)
- Toma uno de los lados del triángulo como la base del mismo. (Cámbiale el color)
- Construye una de las alturas del triángulo. (Ten en cuenta que la altura es el segmento perpendicular a la base que pasa por el vértice opuesto)

- Determina la medida de los lados del triángulo y de la altura. (usa la opción "Distancia o longitud")
- Encuentra el perímetro del triángulo y su área. (Usando opciones "Distancia o longitud" y "área")
- Mueve el punto A.
  ¿Qué cambia? ____
  ¿Qué permanece fijo? ____
- Mueve el punto B.
  ¿Qué cambia? ____
  ¿Qué permanece fijo? ____
- Mueve el punto C.
  ¿Qué cambia? ____
  ¿Qué permanece fijo? ____
- Encuentra tres triángulos diferentes, que tengan el mismo perímetro. ¿Tienen la misma área? ¿Por qué?
  ____
  ____
  ____

Parte 2

Abre el archivo "Triángulos Isoperimétricos"

Link: https://ggbm.at/f3dxd5cy

En esta construcción encontrarás:

- ✓ Un triángulo ABC.

- ¿Qué tipo de triángulos se pueden formar al mover el punto C?
  ____
  ____
  ____
  ____

- ¿Existe un triángulo que tenga el área máxima? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir este triángulo.

- ¿Existe un triángulo que tenga el área mínima? ¿Por qué? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir este triángulo.

Fase de argumentación (Trabajo en equipo)

- Compara tus respuestas con las de tus compañeros

- ¿Qué pueden generalizar respecto al área de los triángulos?

- Socializa la(s) conjetura(s) de tu equipo con todos los demás, luego escribe la conclusión final a la que llegas.

JACQUES CHARLES FRANÇOIS STURM

Sturm (1803 - 1855) fue un matemático francés, nacido en Ginebra. En el año 1840 fue nombrado profesor de mecánica de la Facultad de Ciencias de París. Autor de la obra matemática denominada Cours D'Analyse de L'École polytechnique, la cual años más adelante fue utilizada como un manual escolar, está dividida en dos partes que hacen referencia al cálculo diferencial e integral. En una de las lecciones se trabajan algunos problemas de máximos y mínimos como una aplicación del cálculo, por lo que se han adaptado en applets construidos en GeoGebra y reestructurado en forma de problemas. A continuación, se presenta uno de estos problemas.

PROBLEMA I: Cuarta Aplicación

Nota: Es necesario que escribas todo lo que logres encontrar y las conclusiones a las que llegues.

Abre el archivo "Sturm, Cuarta Aplicación"

Link: https://www.geogebra.org/m/mnh2g75a/pe/286229

En esta construcción encontrarás:

- ✓ Segmento AB
- ✓ Gráfica de una función f(x).
- ✓ Un deslizador "Función" para modificar el tipo de función.

- Mueve el punto B sobre la recta, ¿Qué sucede con el segmento?

  ____

  ____

  ____

  ____

- ¿Existe un segmento que tenga la longitud máxima? ¿Por qué? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir.

  ____

  ____

- ¿Existe un segmento que tenga la longitud mínima? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir.

- Selecciona la opción función y modifica el valor de n, ¿qué sucede con la gráfica y con el segmento?

- Con el valor de n=4, ¿existe un segmento que tenga la longitud máxima? ¿Por qué? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir.

- ¿Existe un segmento que tenga la longitud mínima? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir.

Fase de argumentación (Trabajo en equipo)

- Compara tus respuestas con las de tus compañeros

- ¿Qué pueden generalizar respecto la longitud del segmento AB?

- Socializa la(s) conjetura(s) de tu equipo con todos los demás, luego escribe la conclusión final a la que llegas.

SESIÓN 3. ETIENNE BEZOUT

Bézout (1730 - 1783) fue un matemático francés nacido en Nemours, en 1973 encabezó la instrucción de la marina real y fue profesor del cuerpo de artillería, donde redactó su famosa obra C*ours de mathématiques à l'usage de la marine et de l'artillerie*. En esta obra compuesta por 6 volúmenes abarca distintas áreas de las matemáticas, como lo son aritmética, geometría, trigonometría, álgebra, cálculo diferencial e integral, aplicaciones de la mecánica y navegación. En el libro cuatro que hace referencia al cálculo diferencial y una sección se denomina problemas de máximos y mínimos, por lo que se han adaptado en applets construidos en GeoGebra y reestructurado en forma de problemas. A continuación, se presenta uno de estos problemas.

PROBLEMA II: CUADRILÁTEROS ISOPERIMÉTRICOS

Nota: Es necesario que escribas todo lo que logres encontrar y las conclusiones a las que llegues.

- ¿Qué es un cuadrilátero?

En GeoGebra sigue las siguientes instrucciones:

- Construye un cuadrilátero ABCD cualquiera. (con la opción polígono)

- Encuentra el perímetro del cuadrilátero y su área. (Usando opciones “Distancia o longitud” y “área”)
- Encuentra otros dos cuadriláteros diferentes, que tengan el mismo perímetro.
- ¿Qué características tienen en común los tres cuadriláteros que has construido?

____

____

____

- ¿Tienen la misma área? ¿Por qué?

____

____

____

Abre el archivo “Cuadriláteros Isoperimétricos”

Link: https://www.geogebra.org/m/nsjeuhrx/pe/286187

En esta construcción encontrarás:

- ✓ Un cuadrilátero ABCD
- ✓ Un deslizador “Lado AD” para modificar la longitud de ese lado del cuadrilátero.
- ✓ Un deslizador “Lado AB” para modificar la longitud de ese lado del cuadrilátero.
- ✓ Un deslizador “Lado BC” para modificar la longitud de ese lado del cuadrilátero.

- ¿Qué sucede si mueves el punto A? ¿Cambia el tipo de cuadrilátero?

____

____

____

____

- ¿Qué sucede si mueves el punto B? ¿Cambia el tipo de cuadrilátero?

____

____

- ¿Qué sucede si mueves el punto D? ¿Cambia el tipo de cuadrilátero?

- ¿Existe un cuadrilátero que tenga el área máxima? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir.

- ¿Existe un cuadrilátero que tenga el área mínima? ¿Por qué? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir.

Fase de argumentación (Trabajo en equipo)

- Compara tus respuestas con las de tus compañeros

- ¿Qué pueden generalizar respecto al área de los cuadriláteros?

- Socializa la(s) conjetura(s) de tu equipo con todos los demás, luego escribe la conclusión final a la que llegas.

____

____

____

____

PROBLEMA III: PENTAGONOS ISOPERIMETRICOS
(PAPPUS DE ALEJANDRIA)

Nota: Es necesario que escribas todo lo que logres encontrar y las conclusiones a las que llegues.

En GeoGebra sigue las siguientes instrucciones:

- Construye un pentágono ABCDE cualquiera. (con la opción polígono)
- Encuentra el perímetro del pentágono y su área. (Usando opciones “Distancia o longitud” y “área”)
- Mueve cualquiera de los vértices del polígono.
  ¿Qué cambia? ____
  ¿Qué permanece fijo? ____
- Construye otros dos pentágonos diferentes, que tengan el mismo perímetro del pentágono ABCDE. ¿Tienen la misma área? ¿Por qué?

  ____

  ____

  ____

Abre el archivo “Pentágonos Isoperimétricos”

Link: https://www.geogebra.org/m/s6eswsvh/pe/286227

En esta construcción encontrarás:

✓ Un pentágono ABCDE.

- ¿Existe un pentágono que tenga el área máxima? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir.

____

____

- ¿Existe un pentágono que tenga el área mínima? ¿Por qué? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir.

Fase de argumentación (Trabajo en equipo)

- Compara tus respuestas con las de tus compañeros
- ¿Qué pueden generalizar respecto al área de los pentágonos?

- Socializa la(s) conjetura(s) de tu equipo con todos los demás, luego escribe la conclusión final a la que llegas.

- Teniendo en cuenta las soluciones dadas a los problemas de triángulos, cuadriláteros y pentágonos isoperímetros, ¿qué puedes concluir respecto al área máxima y mínima de un polígono isoperimétrico?

SESIÓN 3. PROBLEMA I: Proposición 8 del libro III de Euclides

Nota: Es necesario que escribas todo lo que logres encontrar y las conclusiones a las que llegues.

En GeoGebra sigue las siguientes instrucciones:

Fase de construcción

g. Traza una circunferencia con centro en A y radio AB.
h. Ubica un punto C en el exterior de la circunferencia.
i. Selecciona el punto C y fija el punto con la opción "fijar objeto".
j. Oculta el punto B.
k. Traza la recta AC.
l. Construye el punto D, intersección entre la circunferencia y la recta.
m. Oculta la recta AC.
n. Construye el $\overline{DC}$.

- Mueve el punto D. ¿Qué sucede con la longitud del segmento?

Fase de Exploración

- ¿Existe el segmento DC que tenga la máxima longitud? ¿Por qué? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir este segmento.

- ¿Existe el segmento DC que tenga la mínima longitud? ¿Por qué? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir este segmento.

____

____

____

Fase de argumentación (Trabajo en equipo)

- Compara tus respuestas con las de tus compañeros
- ¿Qué pueden generalizar respecto a la longitud del segmento DC?

____

____

____

____

- Socializa la(s) conjetura(s) de tu equipo con todos los demás, luego escribe la conclusión final a la que llegas.

____

____

____

____

PROBLEMA II: Proposición 73 del libro VII de Pappus

Nota: Es necesario que escribas todo lo que logres encontrar y las conclusiones a las que llegues.

En GeoGebra sigue las siguientes instrucciones:

Fase de construcción

l. Construye una semirrecta AB.
m. Traza una circunferencia con centro en A y radio AB.

n. Ubica un punto F sobre la recta AB.
o. Ubica un punto T sobre la circunferencia.
p. Construye la cuerda BT.
q. Traza el segmento AT.
r. Ubica el punto M sobre BT, de tal manera que $BM = MT$.
s. Construye la semirrecta FM.
t. Construir punto G, intersección entre $\overrightarrow{FM}$ y $\overline{AT}$.
u. Oculta las semirrectas $\overrightarrow{AB}\ y\ \overrightarrow{FM}$ y la circunferencia.
v. Traza el segmento FG. Cámbiale el color.

- Mueve el punto F. ¿Qué sucede con la longitud del segmento?

  ____

  ____

- Mueve el punto G. ¿Qué sucede con la longitud del segmento?

  ____

  ____

Fase de Exploración

- ¿Existe el segmento FG que tenga la máxima longitud? ¿Por qué? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir este segmento.

  ____

  ____

  ____

  ____

- ¿Existe el segmento FG que tenga la mínima longitud? ¿Por qué? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir este segmento.

  ____

  ____

  ____

Fase de argumentación (Trabajo en equipo)

- Compara tus respuestas con las de tus compañeros
- ¿Qué pueden generalizar respecto a la longitud del segmento FG?

- Socializa la(s) conjetura(s) de tu equipo con todos los demás, luego escribe la conclusión final a la que llegas.

ANEXO 3: Applets

APPLETS

Los applets usados en las diferentes actividades propuestas se relacionan en la siguiente tabla:

Sesión	Actividad	Problema	Link
1	1	Proposición 7 del libro III de Euclides	https://ggbm.at/sdugjzqt
	2	Proposición 15 del libro III de Euclides	https://ggbm.at/evgxc3a6
	3	Proposición 27 del libro IV Euclides	https://ggbm.at/pn4arvrk
2	1	Proposición 5 del libro V de Pappus (Triángulos isoperimétricos)	https://ggbm.at/f3dxd5cy
3	1	Cuarta aplicación de Sturm	https://ggbm.at/mnh2g75a
	2	Problema V de Bezout (Cuadriláteros isoperimétricos)	https://ggbm.at/nsjeuhrx
	3	Proposición 10 del libro V (Pentágonos isoperimétricos)	https://ggbm.at/s6eswsvh
4	1	Proposición 8 del libro III de Euclides	https://ggbm.at/cr6uqng5
	2	Proposición 73 del libro VII de Pappus	https://ggbm.at/mpduxxgh

ANEXO 4: Resultados de los estudiantes

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

"PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN A LA LUZ DE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS"

NURY ANDREA RODRÍGUEZ – MARÍA FERNANDA RAMOS

SESIÓN 1. 04/AGOSTO/2018

NOMBRE: Andrés Muñoz Velandia **GRADO:** 6to

EUCLIDES DE ALEJANDRÍA

Euclides (325 – 265 a.C.) fue un matemático y geómetra griego, considerado uno de los grandes matemáticos de la antigüedad y el padre de la geometría. Es el autor de "***Los Elementos***" una de las obras matemáticas más conocidas del mundo que ha tenido más de 1.000 traducciones desde su primera publicación en 1.482, compuesta por trece libros y es el resultado de la compilación del conocimiento de la matemática en los años anteriores, poniendo orden a muchos teoremas de Eudoxo, perfeccionando muchos de estos, dando demostraciones irrefutables para hechos probados sin rigor por sus predecesores y fundando el método axiomático. En esta obra se presentan 465 proposiciones, 93 problemas y 372 teoremas de la geometría plana y espacial, junto con cinco postulados.

En *Los Elementos*, Euclides presenta algunas proposiciones que tiene que desarrollan el proceso de optimización, por lo que se han adaptado en applets construidos en GeoGebra y reestructurado en forma de problemas. A continuación, se presentan 3 de estos problemas.

PROBLEMA 1: LIBRO III, PROPOSICIÓN 7

Link: https://www.geogebra.org/m/sdugjzqt

En esta construcción encontrarás:

- Una circunferencia con centro E y radio ED.
- El segmento FB, donde F está sobre el diámetro AD y B está sobre la circunferencia.

Nota: Es necesario que escribas todo lo que logres encontrar y las conclusiones a las que llegues.

Fase de exploración

1. Mueve el punto F, ¿qué sucede con el segmento FB?

Forma un Angulo Agudo

- Forma un Angulo Agodo, Recto, olotolso
- ofotoso y Agodo a la vez

2. Mueve el punto B que se encuentra sobre la circunferencia, ¿qué pasa con el segmento BF?

Forma un Angulo Recto $\frac{2}{3}$

Fase de Análisis

1. ¿Existe un segmento BF con la máxima longitud? ¿Por qué?

Si por que cuando forma un angulo de 180°

2. Si existe, menciona qué condiciones deben cumplir los puntos B y F para que sea la máxima.

Que el B esta al extremo A y el F Al extremo D

3. ¿Existe un segmento BF con la mínima longitud? ¿Por qué?

No existe.

4. Si existe, menciona qué condiciones deben cumplir los puntos B y F para que sea la mínima.

Fase de argumentación (Trabajo en equipo)

1. Compara tus respuestas con las de tus compañeros.

2. ¿Qué pueden generalizar respecto a los segmentos de la máxima y la mínima longitud y la ubicación de los puntos B y F?

Se puede cambiar un la longitud, llegando a una maxima

3. Socializa la(s) conjetura(s) de tu equipo con todos los demás, luego escribe la conclusión final a la que llegas.

PROBLEMA 2: LIBRO III, PROPOSICIÓN 15

Link: https://ggbm.at/evgxc3a6

En esta construcción encontrarás:

- Una circunferencia con centro C.
- La cuerda AB.

Fase de exploración

1. Mueve el punto A, ¿qué pasa con la cuerda AB?

2. Mueve el punto B, ¿qué pasa con la cuerda AB?

"PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN A LA LUZ DE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS"
NURY ANDREA RODRÍGUEZ – MARÍA FERNANDA RAMOS
SESIÓN 1. 04/AGOSTO/2018

NOMBRE: Tomas Alejandro Sierra Band. **GRADO:** Sexto

EUCLIDES DE ALEJANDRÍA

Euclides (325 – 265 a.C.) fue un matemático y geómetra griego, considerado uno de los grandes matemáticos de la antigüedad y el padre de la geometría. Es el autor de "***Los Elementos***" una de las obras matemáticas más conocidas del mundo que ha tenido más de 1.000 traducciones desde su primera publicación en 1.482, compuesta por trece libros y es el resultado de la compilación del conocimiento de la matemática en los años anteriores, poniendo orden a muchos teoremas de Eudoxo, perfeccionando muchos de estos, dando demostraciones irrefutables para hechos probados sin rigor por sus predecesores y fundando el método axiomático. En esta obra se presentan 465 proposiciones, 93 problemas y 372 teoremas de la geometría plana y espacial, junto con cinco postulados.

En *Los Elementos*, Euclides presenta algunas proposiciones que tiene que desarrollan el proceso de optimización, por lo que se han adaptado en applets construidos en GeoGebra y reestructurado en forma de problemas. A continuación, se presentan 3 de estos problemas.

PROBLEMA 1: LIBRO III, PROPOSICIÓN 7

Link: https://www.geogebra.org/m/sdugjzqt

En esta construcción encontrarás:

- Una circunferencia con centro E y radio ED.
- El segmento FB, donde F está sobre el diámetro AD y B está sobre la circunferencia.

Nota: Es necesario que escribas todo lo que logres encontrar y las conclusiones a las que llegues.

Fase de exploración

1. Mueve el punto F, ¿qué sucede con el segmento FB?

El segmento se extiende y queda más cerca al punto E; y puede cambiar su tamaño.

2. Mueve el punto B que se encuentra sobre la circunferencia, ¿qué pasa con el segmento BF?

Toma un angulo de 261.27° grados y queda ubicado bajo el punto E y puede seguir variando.

Fase de Análisis

1. ¿Existe un segmento BF con la máxima longitud? ¿Por qué?

No, porque depende de donde se ubique el punto B y F y en este caso se extendio, pero si puede ocurrir.

2. Si existe, menciona qué condiciones deben cumplir los puntos B y F para que sea la máxima.

El punto F debe estar en el punto D y el B en el a (sigue el diametro)

3. ¿Existe un segmento BF con la mínima longitud? ¿Por qué?

La minima longitud que puede existir es el segmento BF en el punto D porque es donde estos 2 se encuentran

4. Si existe, menciona qué condiciones deben cumplir los puntos B y F para que sea la mínima.

Estos 2 se deben encontrar

Fase de argumentación (Trabajo en equipo)

1. Compara tus respuestas con las de tus compañeros.

2. ¿Qué pueden generalizar respecto a los segmentos de la máxima y la mínima longitud y la ubicación de los puntos B y F?

Al mover el segmento BF se puede llegar a formar uno máximo y uno mínimo pero es difícil llegar al mínimo.

• Se puede volver igual de grande a diametro y lo minimo no existe.
~~puede ser 0 (Punto sobre Punto) tiene que ser mas de 0 para formar un segmento y dentro de cada segmento hay varios puntos. Por esta razon el segmento más pequeño es muy difícil de hallar.~~ no existe.

3. Socializa la(s) conjetura(s) de tu equipo con todos los demás, luego escribe la conclusión final a la que llegas.

Depende de la ubicación de los puntos para la variación de tamaño.

PROBLEMA 2: LIBRO III, PROPOSICIÓN 15

Link: https://ggbm.at/evgxc3a6

En esta construcción encontrarás:

- Una circunferencia con centro C.
- La cuerda AB.

Fase de exploración

1. Mueve el punto A, ¿qué pasa con la cuerda AB?

Se agranda o se empequeña dependiendo a la localización de estos puntos, si esta más cerca el punto A al B y del B al A es mas chiquito y si estan mas lejos es más grande.

2. Mueve el punto B, ¿qué pasa con la cuerda AB?

Sucede lo mismo que cuando muevo el punto A.

3. ¿Por qué crees que sucede esto?

Por la distancia que hay entre los puntos entre más cerca mas pequeños y entre mas lejos más grande.

Fase de interpretación

1. ¿Existe una cuerda que tenga la máxima longitud?

Si tiene que ser del tamaño de un diametro. porque es la distancia más lejana entre los puntos.

2. Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir la cuerda para que la longitud sea máxima.

Tiene que ser igual a un diametro ya que el diametro forma la mayor distancia entre dos puntos del la circunferencia.

3. ¿Existe una cuerda que tenga la mínima longitud? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir la cuerda para que la longitud sea mínima.

Si existe ya que cada vez se va a enchiquitar más el segmento.

Fase de análisis (Trabajo en equipo)

4. Compara tus respuestas con las de tus compañeros
5. ¿Qué pueden generalizar respecto a la longitud de la cuerda? (formulén una conjetura)

Existe un maximo de la longitud de la cuerda la cual es el diametro, que representa los puntos externos de una circunferencia sin embargo no existe un punto minimo ya que siempre va tender a un valor más pequeño.

6. Socializa la(s) conjetura(s) de tu equipo con todos los demás, luego escribe la conclusión final a la que llegas. de la cuerda.
El maximo 'es el diametro y no existe un minimo ya que se enpequeña ilimitadamente cada vez que los puntos se acercan.

PROBLEMA 3: LIBRO VI, PROPOSICIÓN 27

Link: https://ggbm.at/pn4arvrk

En esta construcción encontrarás:

- Paralelogramo AC
- Paralelogramo AZ (semejante al paralelogramo AC).

Contesta las siguientes preguntas:

1. ¿Qué puntos puedes mover y cuál es la función de cada uno de estos puntos?
Solo se pueden mover los puntos W, D,B y A. El A sirbe para girar las esquinas de la figura, la B para mover un lado de la figura y la D gira la parte de arriba.

2. ¿Existe un paralelogramo AZ semejante a AC con la mínima área posible? Si existe, menciona las condiciones que debe cumplir el paralelogramo AZ para que el área sea mínima.
No porque AZ solo se puede extender hasta la recta DC pero y si la cachiquitamos simpre va a ser mas grande a AC.

3. ¿Existe un paralelogramo AZ semejante a AC con la máxima área posible? Si existe, menciona las condiciones que debe cumplir el paralelogramo AZ para que el área sea máxima.
Como solo se extiende arriba nunca va a tener un Area semejante.

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

"PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN A LA LUZ DE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS"

NURY ANDREA RODRÍGUEZ – MARÍA FERNANDA RAMOS

SESIÓN 1. 04/AGOSTO/2018

NOMBRE: Maria Catalina Casallas B **GRADO:** 7°

EUCLIDES DE ALEJANDRÍA

Euclides (325 – 265 a.C.) fue un matemático y geómetra griego, considerado uno de los grandes matemáticos de la antigüedad y el padre de la geometría. Es el autor de "***Los Elementos***" una de las obras matemáticas más conocidas del mundo que ha tenido más de 1.000 traducciones desde su primera publicación en 1.482, compuesta por trece libros y es el resultado de la compilación del conocimiento de la matemática en los años anteriores, poniendo orden a muchos teoremas de Eudoxo, perfeccionando muchos de estos, dando demostraciones irrefutables para hechos probados sin rigor por sus predecesores y fundando el método axiomático. En esta obra se presentan 465 proposiciones, 93 problemas y 372 teoremas de la geometría plana y espacial, junto con cinco postulados.

En *Los Elementos*, Euclides presenta algunas proposiciones que tiene que desarrollan el proceso de optimización, por lo que se han adaptado en applets construidos en GeoGebra y reestructurado en forma de problemas. A continuación, se presentan 3 de estos problemas.

PROBLEMA 1: LIBRO III, PROPOSICIÓN 7

Link: https://www.geogebra.org/m/sdugjzqt

En esta construcción encontrarás:

- Una circunferencia con centro E y radio ED.
- El segmento FB, donde F está sobre el diámetro AD y B está sobre la circunferencia.

Nota: Es necesario que escribas todo lo que logres encontrar y las conclusiones a las que llegues.

Fase de exploración

1. Mueve el punto F, ¿qué sucede con el segmento FB?

El segmento FB al mover el punto F cambia el tamaño del segmento y del angulo que se forma por el segmento y por el diametro.

2. Mueve el punto B que se encuentra sobre la circunferencia, ¿qué pasa con el segmento BF?

Igual que al mover el punto F al mover el punto B cambia el tamaño del segmento y del angulo que se forma con este y con el diametro.

Fase de Análisis

1. ¿Existe un segmento BF con la máxima longitud? ¿Por qué?

Si existe, porque BF es un segmento y se puede crear un segmento más grande que los demas

2. Si existe, menciona qué condiciones deben cumplir los puntos B y F para que sea la máxima.

Las condiciones para que sea el más grande es colocar el punto F en un extremo del diametro y el B en el otro para formar el tamaño del diametro que es el segmento más grande

3. ¿Existe un segmento BF con la mínima longitud? ¿Por qué?

No existe porque en una circunferencia hay puntos infinitos

4. Si existe, menciona qué condiciones deben cumplir los puntos B y F para que sea la mínima.

Fase de argumentación (Trabajo en equipo)

1. Compara tus respuestas con las de tus compañeros.

2. ¿Qué pueden generalizar respecto a los segmentos de la máxima y la mínima longitud y la ubicación de los puntos B y F?

Al mover los puntos B y F se cambia el tamaño del segmento llegando hasta la forma del segmento màs grande pero no hay uno màs pequeño

3. Socializa la(s) conjetura(s) de tu equipo con todos los demás, luego escribe la conclusión final a la que llegas.

la longitud maxima de un segmento es el diametro pero no existe uno minimo ya que dentro de un segmento podemos encontrar otro segmento.

PROBLEMA 2: LIBRO III, PROPOSICIÓN 15

Link: https://ggbm.at/evgxc3a6

En esta construcción encontrarás:

- Una circunferencia con centro C.
- La cuerda AB.

Fase de exploración

1. Mueve el punto A, ¿qué pasa con la cuerda AB?

Al mover el punto A la cuerda se hace màs larga o màs corta.

2. Mueve el punto B, ¿qué pasa con la cuerda AB?

Al mover el punto B la cuerda se hace màs corta o màs larga.

3. ¿Por qué crees que sucede esto?

porque al desplazar los puntos se alejan o se hacer can y entre más lejos los puntos la cuerda es màs larga pero entre menos distancia màs corta

Fase de interpretación

1. ¿Existe una cuerda que tenga la máxima longitud?

la cuerda con màxima longitud es la que atraveza el punto central formando el diametro

2. Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir la cuerda para que la longitud sea máxima.

Para que se cumpla la cuerda tiene que atravezar el punto central para formar un diametro

3. ¿Existe una cuerda que tenga la mínima longitud? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir la cuerda para que la longitud sea mínima.

No existe porque al formar una cuerda siempre podremos encontrar otra màs pequeña

Fase de análisis (Trabajo en equipo)

4. Compara tus respuestas con las de tus compañeros

5. ¿Qué pueden generalizar respecto a la longitud de la cuerda? (formulen una conjetura)

La maxima cuerda posible es el diametro y no existe una minima ya que siempre habra otra màs pequeña en medio esto pasa porque la circunferencia es infinita

6. Socializa la(s) conjetura(s) de tu equipo con todos los demás, luego escribe la conclusión final a la que llegas.

la maxima longitud posible de una cuerda es el diametro pero no hay una minima ya que siempre habra una cuerda menor dentro de otra

PROBLEMA 3: LIBRO VI, PROPOSICIÓN 27

Link: https://ggbm.at/pn4arvrk

En esta construcción encontrarás:

- Paralelogramo AC
- Paralelogramo AZ (semejante al paralelogramo AC).

Contesta las siguientes preguntas:

1. ¿Qué puntos puedes mover y cuál es la función de cada uno de estos puntos?

Se mueve el punto w que controla el tamaño del paralelogramo AZ
Se mueve el punto ~~D~~ B que cambia la orientación delos paralelogramos (aunque se muevan los puntos siguen siendo semejantes)

2. ¿Existe un paralelogramo AZ semejante a AC con la mínima área posible? Si existe, menciona las condiciones que debe cumplir el paralelogramo AZ para que el área sea mínima.

No existe ya que si no se vuelve segmento lo podremos seguir encogiendo

3. ¿Existe un paralelogramo AZ semejante a AC con la máxima área posible? Si existe, menciona las condiciones que debe cumplir el paralelogramo AZ para que el área sea máxima.

Si existe.
las condiciones es mover el punto w hasta que el paralelogramo AZ cubra la mitad del paralelogramo AC

NOMBRE: Sofi Carrillo **GRADO:** octavo

EUCLIDES DE ALEJANDRÍA

Euclides (325 – 265 a.C.) fue un matemático y geómetra griego, considerado uno de los grandes matemáticos de la antigüedad y el padre de la geometría. Es el autor de "***Los Elementos***" una de las obras matemáticas más conocidas del mundo que ha tenido más de 1.000 traducciones desde su primera publicación en 1.482, compuesta por trece libros y es el resultado de la compilación del conocimiento de la matemática en los años anteriores, poniendo orden a muchos teoremas de Eudoxo, perfeccionando muchos de estos, dando demostraciones irrefutables para hechos probados sin rigor por sus predecesores y fundando el método axiomático. En esta obra se presentan 465 proposiciones, 93 problemas y 372 teoremas de la geometría plana y espacial, junto con cinco postulados.

En *Los Elementos*, Euclides presenta algunas proposiciones que tiene que desarrollan el proceso de optimización, por lo que se han adaptado en applets construidos en GeoGebra y reestructurado en forma de problemas. A continuación, se presentan 3 de estos problemas.

PROBLEMA 1: LIBRO III, PROPOSICIÓN 7

Link: https://www.geogebra.org/m/sdugjzqt

En esta construcción encontrarás:

- Una circunferencia con centro E y radio ED.
- El segmento FB, donde F está sobre el diámetro AD y B está sobre la circunferencia.

Nota: Es necesario que escribas todo lo que logres encontrar y las conclusiones a las que llegues.

Fase de exploración

1. Mueve el punto F, ¿qué sucede con el segmento FB?

2. ¿Qué pueden generalizar respecto a los segmentos de la máxima y la mínima longitud y la ubicación de los puntos B y F?

3. Socializa la(s) conjetura(s) de tu equipo con todos los demás, luego escribe la conclusión final a la que llegas.

PROBLEMA 2: LIBRO III, PROPOSICIÓN 15

Link: https://ggbm.at/evgxc3a6

En esta construcción encontrarás:

- Una circunferencia con centro C.
- La cuerda AB.

Fase de exploración

1. Mueve el punto A, ¿qué pasa con la cuerda AB?

Cuando el punto A se mueve el punto B y su diametro se vuelve más pequeño, y la cuerda AB intersecan con el punto c y representa el diametro

2. Mueve el punto B, ¿qué pasa con la cuerda AB?

Pasa lo mismo que en el Primer Punto, Pero cambian las letras ya que se cambia el Punto elegido

3. ¿Por qué crees que sucede esto?

Porque el punto escogido cambia de posición y esto hace que al ir cambiando poco a poco su diametro cambia

Fase de interpretación

1. ¿Existe una cuerda que tenga la máxima longitud?

Yo creo quel diametro

2. Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir la cuerda para que la longitud sea máxima.

Es el diametro ya que este consta de dos puntos a los extremos de la circunferencia que atraviesan a la misma

3. ¿Existe una cuerda que tenga la mínima longitud? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir la cuerda para que la longitud sea mínima.

No, porque siempre se va a tender cada vez a una cuerda más pequeña.

Fase de análisis (Trabajo en equipo)

4. Compara tus respuestas con las de tus compañeros
5. ¿Qué pueden generalizar respecto a la longitud de la cuerda? (formulen una conjetura)

6. Socializa la(s) conjetura(s) de tu equipo con todos los demás, luego escribe la conclusión final a la que llegas.

la conclución a la que se llego fue que enste una cuerda con longitud maxima llamada diametro, pero nunca habra una minima ya que siempre habran muchas minimas.

PROBLEMA 3: LIBRO VI, PROPOSICIÓN 27

Link: https://ggbm.at/pn4arvrk

En esta construcción encontrarás:

- Paralelogramo AC
- Paralelogramo AZ (semejante al paralelogramo AC).

Contesta las siguientes preguntas:

1. ¿Qué puntos puedes mover y cuál es la función de cada uno de estos puntos?

2. ¿Existe un paralelogramo AZ semejante a AC con la mínima área posible? Si existe, menciona las condiciones que debe cumplir el paralelogramo AZ para que el área sea mínima.

3. ¿Existe un paralelogramo AZ semejante a AC con la máxima área posible? Si existe, menciona las condiciones que debe cumplir el paralelogramo AZ para que el área sea máxima.

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

"PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN A LA LUZ DE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS"

NURY ANDREA RODRÍGUEZ – MARÍA FERNANDA RAMOS

SESIÓN 1. 04/AGOSTO/2018

NOMBRE: Yoed Daniela Sánchez Arrea GRADO: Octavo

EUCLIDES DE ALEJANDRÍA

Euclides (325 – 265 a.C.) fue un matemático y geómetra griego, considerado uno de los grandes matemáticos de la antigüedad y el padre de la geometría. Es el autor de "***Los Elementos***" una de las obras matemáticas más conocidas del mundo que ha tenido más de 1.000 traducciones desde su primera publicación en 1.482, compuesta por trece libros y es el resultado de la compilación del conocimiento de la matemática en los años anteriores, poniendo orden a muchos teoremas de Eudoxo, perfeccionando muchos de estos, dando demostraciones irrefutables para hechos probados sin rigor por sus predecesores y fundando el método axiomático. En esta obra se presentan 465 proposiciones, 93 problemas y 372 teoremas de la geometría plana y espacial, junto con cinco postulados.

En *Los Elementos*, Euclides presenta algunas proposiciones que tiene que desarrollan el proceso de optimización, por lo que se han adaptado en applets construidos en GeoGebra y reestructurado en forma de problemas. A continuación, se presentan 3 de estos problemas.

PROBLEMA 1: LIBRO III, PROPOSICIÓN 7

Link: https://www.geogebra.org/m/sdugjzqt

En esta construcción encontrarás:

- Una circunferencia con centro E y radio ED.
- El segmento FB, donde F está sobre el diámetro AD y B está sobre la circunferencia.

Nota: Es necesario que escribas todo lo que logres encontrar y las conclusiones a las que llegues.

Fase de exploración

1. Mueve el punto F, ¿qué sucede con el segmento FB?

2. ¿Qué pueden generalizar respecto a los segmentos de la máxima y la mínima longitud y la ubicación de los puntos B y F?

3. Socializa la(s) conjetura(s) de tu equipo con todos los demás, luego escribe la conclusión final a la que llegas.

PROBLEMA 2: LIBRO III, PROPOSICIÓN 15

Link: https://ggbm.at/evgxc3a6

En esta construcción encontrarás:

- Una circunferencia con centro C.
- La cuerda AB.

Fase de exploración

1. Mueve el punto A, ¿qué pasa con la cuerda AB?

Cuando movemos el punto A, la cuerda B y su diametro se vuelve mas pequeño

2. Mueve el punto B, ¿qué pasa con la cuerda AB?

Cuando movemos el punto B, la cuerda A y su diametro se vuelve mas pequeño

3. ¿Por qué crees que sucede esto?

Porque estamos cambiando de posición el punto seleccionado, volviendo la cuerda mas pequeña o mas grande.

Fase de interpretación

1. ¿Existe una cuerda que tenga la máxima longitud?

Sí, en este caso seria el diametro.

2. Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir la cuerda para que la longitud sea máxima.

Dos puntos que atraviesan la circunferencia los cuales pasan por toda la mitad, generando una longitud maxima.

3. ¿Existe una cuerda que tenga la mínima longitud? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir la cuerda para que la longitud sea mínima.

No porque aparte de la que escogimos siempre va a ver una mas pequeña que la otra. Hay infinitas longitudes.

Fase de análisis (Trabajo en equipo)

4. Compara tus respuestas con las de tus compañeros

5. ¿Qué pueden generalizar respecto a la longitud de la cuerda? (formulen una conjetura)

La maxima longitud sera la que pasa por el centro de la circunferencia (diametro)

La minima longitud no se puede dar ya que se dice que la circunferencia es infinita.

6. Socializa la(s) conjetura(s) de tu equipo con todos los demás, luego escribe la conclusión final a la que llegas.

Existe una cuerda con longitud maxima llamada diametro, pero no existe una cuerda con longitud minima ya que hay muchas longitudes minimas.

PROBLEMA 3: LIBRO VI. PROPOSICIÓN 27

Link: https://ggbm.at/pn4arvrk

En esta construcción encontrarás:

- Paralelogramo AC
- Paralelogramo AZ (semejante al paralelogramo AC).

Contesta las siguientes preguntas:

1. ¿Qué puntos puedes mover y cuál es la función de cada uno de estos puntos?

La suma de sus angulos tenderian a ser la misma.
Podemos concluir que si movemos el punto a completamente hacia la derecha se formaran 2 paralelogramos exactamente iguales.

2. ¿Existe un paralelogramo AZ semejante a AC con la mínima área posible? Si existe, menciona las condiciones que debe cumplir el paralelogramo AZ para que el área sea mínima.

Para lograr eso debe estar tendiendo al sector AB.

3. ¿Existe un paralelogramo AZ semejante a AC con la máxima área posible? Si existe, menciona las condiciones que debe cumplir el paralelogramo AZ para que el área sea máxima.

No aun area semejante a la maxima area al AC, para el pueden llegar a tener la misma area.

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

Educadora de educadores

"PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN A LA LUZ DE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS"

NURY ANDREA RODRÍGUEZ – MARÍA FERNANDA RAMOS

SESIÓN 1. 04/AGOSTO/2018

NOMBRE: Ian Leonardo Perdomo **GRADO:** 9°

EUCLIDES DE ALEJANDRÍA

Euclides (325 – 265 a.C.) fue un matemático y geómetra griego, considerado uno de los grandes matemáticos de la antigüedad y el padre de la geometría. Es el autor de "***Los Elementos***" una de las obras matemáticas más conocidas del mundo que ha tenido más de 1.000 traducciones desde su primera publicación en 1.482, compuesta por trece libros y es el resultado de la compilación del conocimiento de la matemática en los años anteriores, poniendo orden a muchos teoremas de Eudoxo, perfeccionando muchos de estos, dando demostraciones irrefutables para hechos probados sin rigor por sus predecesores y fundando el método axiomático. En esta obra se presentan 465 proposiciones, 93 problemas y 372 teoremas de la geometría plana y espacial, junto con cinco postulados.

En *Los Elementos*, Euclides presenta algunas proposiciones que tiene que desarrollan el proceso de optimización, por lo que se han adaptado en applets construidos en GeoGebra y reestructurado en forma de problemas. A continuación, se presentan 3 de estos problemas.

PROBLEMA 1: LIBRO III, PROPOSICIÓN 7

Link: https://www.geogebra.org/m/sdugjzqt

En esta construcción encontrarás:

- Una circunferencia con centro E y radio ED.
- El segmento FB, donde F está sobre el diámetro AD y B está sobre la circunferencia.

Nota: Es necesario que escribas todo lo que logres encontrar y las conclusiones a las que llegues.

Fase de exploración

1. Mueve el punto F, ¿qué sucede con el segmento FB?

Al mover el punto F el segmento FB cambia y según su posición el mismo se amplia/alarga

2. Mueve el punto B que se encuentra sobre la circunferencia, ¿qué pasa con el segmento BF?

Así mismo al mover el punto B este recorre la circunferencia ampliando y disminuyendo el tamaño del segmento según su posición

Fase de Análisis

1. ¿Existe un segmento BF con la máxima longitud? ¿Por qué?

Si, asi es ya que si se posicionan de la manera correcta, que es bastante especifica, en el circulo y circunferencia lograras que el segmento se amplie a su maximo

2. Si existe, menciona qué condiciones deben cumplir los puntos B y F para que sea la máxima.

el punto F debe estar en uno de los dos limites del radio de la circunferencia y el B debe posicionarse en el extremo contrario a la posición del F, en la circunferencia

3. ¿Existe un segmento BF con la mínima longitud? ¿Por qué?

Si, ya que el punto B y el F se pueden ubicar de tal manera que la distancia sea minima

4. Si existe, menciona qué condiciones deben cumplir los puntos B y F para que sea la mínima.

El punto F debe ubicarse en el limite del ~~la~~ radio y así mismo el punto B tiene que ubicarse en la misma posición pero en la circunferencia

Fase de argumentación (Trabajo en equipo)

1. Compara tus respuestas con las de tus compañeros.

2. ¿Qué pueden generalizar respecto a los segmentos de la máxima y la mínima longitud y la ubicación de los puntos B y F?

Que la maxima longitud se representa en un diametro y en la minima (es un punto) Mal

3. Socializa la(s) conjetura(s) de tu equipo con todos los demás, luego escribe la conclusión final a la que llegas.

Mientras el punto maximo es el diametro de la circunferencia el minimo (es un) (segmento mas no un punto) no existe

PROBLEMA 2: LIBRO III. PROPOSICIÓN 15

Link: https://ggbm.at/evgxc3a6

En esta construcción encontrarás:

- Una circunferencia con centro C.
- La cuerda AB.

Fase de exploración

1. Mueve el punto A, ¿qué pasa con la cuerda AB?

Al moverlo el segmento de la circunferencia se amplia o disminuye según su posición

2. Mueve el punto B, ¿qué pasa con la cuerda AB?

Al moverlo el segmento cambia de tamaño según la posición de los puntos

3. ¿Por qué crees que sucede esto?

Portue al ser una cuerda depende de la posición de los puntos para poder determinarse sua distancia

Fase de interpretación

1. ¿Existe una cuerda que tenga la máxima longitud?

Si, el diametro

2. Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir la cuerda para que la longitud sea máxima.

Que sea el centro / se ubique en el centro

3. ¿Existe una cuerda que tenga la mínima longitud? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir la cuerda para que la longitud sea mínima.

No existe una de minima longitud.

Fase de análisis (Trabajo en equipo)

4. Compara tus respuestas con las de tus compañeros

5. ¿Qué pueden generalizar respecto a la longitud de la cuerda? (formulén una conjetura)

Maximo es representado con un diametro sin embargo la minima distancia no existe ya que entre más alejado este del centro más pequeño se verá, sin embargo el minimo está indeterminado

6. Socializa la(s) conjetura(s) de tu equipo con todos los demás, luego escribe la conclusión final a la que llegas.

El diametro es la recta mayor mientras que el minimo no existe.

PROBLEMA 3: LIBRO VI. PROPOSICIÓN 27

Link: https://ggbm.at/pn4arvrk

En esta construcción encontrarás:

- Paralelogramo AC
- Paralelogramo AZ (semejante al paralelogramo AC).

Contesta las siguientes preguntas:

1. ¿Qué puntos puedes mover y cuál es la función de cada uno de estos puntos?

Se pueden mover los puntos A - B - W - D
DC / DH / W~~Z~~Z / WH / WK / BK / CK / AK / HA /

2. ¿Existe un paralelogramo AZ semejante a AC con la mínima área posible? Si existe, menciona las condiciones que debe cumplir el paralelogramo AZ para que el área sea mínima.

No es posible pues sin importar el punto B y su posición en punto que separa es existente

3. ¿Existe un paralelogramo AZ semejante a AC con la máxima área posible? Si existe, menciona las condiciones que debe cumplir el paralelogramo AZ para que el área sea máxima.

“PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN A LA LUZ DE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS”

NURY ANDREA RODRÍGUEZ – MARÍA FERNANDA RAMOS

SESIÓN 1. 04/AGOSTO/2018

NOMBRE: Laura Valentina Ortiz GRADO: 9°

EUCLIDES DE ALEJANDRÍA

Euclides (325 – 265 a.C.) fue un matemático y geómetra griego, considerado uno de los grandes matemáticos de la antigüedad y el padre de la geometría. Es el autor de “***Los Elementos***” una de las obras matemáticas más conocidas del mundo que ha tenido más de 1.000 traducciones desde su primera publicación en 1.482, compuesta por trece libros y es el resultado de la compilación del conocimiento de la matemática en los años anteriores, poniendo orden a muchos teoremas de Eudoxo, perfeccionando muchos de estos, dando demostraciones irrefutables para hechos probados sin rigor por sus predecesores y fundando el método axiomático. En esta obra se presentan 465 proposiciones, 93 problemas y 372 teoremas de la geometría plana y espacial, junto con cinco postulados.

En *Los Elementos*, Euclides presenta algunas proposiciones que tiene que desarrollan el proceso de optimización, por lo que se han adaptado en applets construidos en GeoGebra y reestructurado en forma de problemas. A continuación, se presentan 3 de estos problemas.

PROBLEMA 1: LIBRO III, PROPOSICIÓN 7

Link: https://www.geogebra.org/m/sdugjzqt

En esta construcción encontrarás:

- Una circunferencia con centro E y radio ED.
- El segmento FB, donde F está sobre el diámetro AD y B está sobre la circunferencia.

Nota: Es necesario que escribas todo lo que logres encontrar y las conclusiones a las que llegues.

Fase de exploración

1. Mueve el punto F, ¿qué sucede con el segmento FB?

la longitud del segmento FB aumenta o disminuye de acuerdo a cómo se mueve el punto F. El ángulo aumenta o disminuye.

2. Mueve el punto B que se encuentra sobre la circunferencia, ¿qué pasa con el segmento BF?

El ángulo cambia al igual que su longitud

Fase de Análisis

1. ¿Existe un segmento BF con la máxima longitud? ¿Por qué?

Sí existe, porque, ~~aunque~~ las 2 condiciones siempre estén presentes, El segmento BF ~~es~~ una distancia, y siempre va a haber una distancia mayor. no es lo mismo un ~~BF~~ en donde B esté a 90° del radio que uno ~~en~~ donde esté a 135°

2. Si existe, menciona qué condiciones deben cumplir los puntos B y F para que sea la máxima.

ambos puntos deben tocar el diametro y parte de la circunferencia al mismo tiempo. Debe ser el diámetro ya que esa es la longitud mayor de toda la circunferencia.

3. ¿Existe un segmento BF con la mínima longitud? ¿Por qué?

Sí, porque siempre va a haber una distanca menor entre cierto punto de la circunferenca y el diámetro.

4. Si existe, menciona qué condiciones deben cumplir los puntos B y F para que sea la mínima.

Ambos deben estar en el mismo lugar en un punto de intersección entre el diametro y la circunferencia.

Fase de argumentación (Trabajo en equipo)

1. Compara tus respuestas con las de tus compañeros.

2. ¿Qué pueden generalizar respecto a los segmentos de la máxima y la mínima longitud y la ubicación de los puntos B y F?

La máxima es un diámetro q la mínima es un punto.

3. Socializa la(s) conjetura(s) de tu equipo con todos los demás, luego escribe la conclusión final a la que llegas.

Podemos observar que el ~~punto~~ Segmento máximo es el diametro pero no hay ~~punto~~ Segmento mínimo.

PROBLEMA 2: LIBRO III, PROPOSICIÓN 15

Link: https://ggbm.at/evgxc3a6

En esta construcción encontrarás:

- Una circunferencia con centro C.
- La cuerda AB.

Fase de exploración

1. Mueve el punto A, ¿qué pasa con la cuerda AB?

la longitud aumenta o disminuye. se aleja del punto central o se acerca

2. Mueve el punto B, ¿qué pasa con la cuerda AB?

Su longitud aumenta o disminuye al igual que su distancia del punto central

3. ¿Por qué crees que sucede esto?

porque se necesitan 2 ~~ambos~~ puntos para definir una longitud, depende de las ubicación de los puntos se definen las longitudes.

Fase de interpretación

1. ¿Existe una cuerda que tenga la máxima longitud?

Sí, el diámetro.

2. Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir la cuerda para que la longitud sea máxima.

Debe pasar por el punto central y sus 2 puntos debe estar en ambos extremos de la circunferencia.

3. ¿Existe una cuerda que tenga la mínima longitud? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir la cuerda para que la longitud sea mínima.

No existe, porque siempre habrá una longitud ~~menor~~ más pequeña en cada segmento que encontremos.

Fase de análisis (Trabajo en equipo)

4. Compara tus respuestas con las de tus compañeros
5. ¿Qué pueden generalizar respecto a la longitud de la cuerda? (formulen una conjetura)

Si la cuerda se encuentra lejos del punto central, se hace más corta la longitud. Por el contrario, si se encuentra cerca del centro de la circunferencia, se hará más larga su longitud.

6. Socializa la(s) conjetura(s) de tu equipo con todos los demás, luego escribe la conclusión final a la que llegas.

Entre más cerca está la cuerda del punto central más grande es la cuerda y es más pequeña de acuerdo a su distancia. El ~~punto~~ segmento ~~más~~ mayor largo es el diámetro y no hay uno mínimo.

PROBLEMA 3: LIBRO VI. PROPOSICIÓN 27

Link: https://ggbm.at/pn4arvrk

En esta construcción encontrarás:

- Paralelogramo AC
- Paralelogramo AZ (semejante al paralelogramo AC).

Contesta las siguientes preguntas:

1. ¿Qué puntos puedes mover y cuál es la función de cada uno de estos puntos?

W, hace el paralelogramo AZ más pequeño o grande. Cambia su altura. B, cambia la anchitud de ambas figuras. D, cambia la altura y la inclinación de ambas figuras. A, longitud de ambas figuras.

2. ¿Existe un paralelogramo AZ semejante a AC con la mínima área posible? Si existe, menciona las condiciones que debe cumplir el paralelogramo AZ para que el área sea mínima.

No existe ya que siempre habrá una cantidad menor a la anterior.

3. ¿Existe un paralelogramo AZ semejante a AC con la máxima área posible? Si existe, menciona las condiciones que debe cumplir el paralelogramo AZ para que el área sea máxima.

Sí existe ya que si el punto W se pone en el segmento BC, la figura AZ será exactamente la mitad de la ~~segme~~ figura AC.

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

Educadora de educadores

"PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN A LA LUZ DE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS"

NURY ANDREA RODRÍGUEZ – MARÍA FERNANDA RAMOS

SESIÓN 1. 04/AGOSTO/2018

NOMBRE: Daniela Velandia Cantor **GRADO:** Noveno

EUCLIDES DE ALEJANDRÍA

Euclides (325 – 265 a.C.) fue un matemático y geómetra griego, considerado uno de los grandes matemáticos de la antigüedad y el padre de la geometría. Es el autor de "***Los Elementos***" una de las obras matemáticas más conocidas del mundo que ha tenido más de 1.000 traducciones desde su primera publicación en 1.482, compuesta por trece libros y es el resultado de la compilación del conocimiento de la matemática en los años anteriores, poniendo orden a muchos teoremas de Eudoxo, perfeccionando muchos de estos, dando demostraciones irrefutables para hechos probados sin rigor por sus predecesores y fundando el método axiomático. En esta obra se presentan 465 proposiciones, 93 problemas y 372 teoremas de la geometría plana y espacial, junto con cinco postulados.

En *Los Elementos*, Euclides presenta algunas proposiciones que tiene que desarrollan el proceso de optimización, por lo que se han adaptado en applets construidos en GeoGebra y reestructurado en forma de problemas. A continuación, se presentan 3 de estos problemas.

PROBLEMA 1: LIBRO III, PROPOSICIÓN 7

Link: https://www.geogebra.org/m/sdugjzqt

En esta construcción encontrarás:

- Una circunferencia con centro E y radio ED.
- El segmento FB, donde F está sobre el diámetro AD y B está sobre la circunferencia.

Nota: Es necesario que escribas todo lo que logres encontrar y las conclusiones a las que llegues.

Fase de exploración

1. Mueve el punto F, ¿qué sucede con el segmento FB?

Se meve en la linea trazada horizontalmente que es el diametro, la cuerda cambia su tamaño, aveces más grande, aveces mas corta

2. Mueve el punto B que se encuentra sobre la circunferencia, ¿qué pasa con el segmento BF?

la cuerda da vueltas, se mueve al rededor de la circunrencia, la cuerda cambia su tamaño a medida que se mueve

Fase de Análisis

1. ¿Existe un segmento BF con la máxima longitud? ¿Por qué?

yo creeria que si, seria cuando el Punto F se encuentre en un extremo y el Punto B en el extremo contrario u opuesto, cuando los puntos se encuentran en otros puntos la longitud es más corta

2. Si existe, menciona qué condiciones deben cumplir los puntos B y F para que sea la máxima.

el Punto B debe estar en un extremo y el Punto F debe encontrarse en el extremo opuesto de B

3. ¿Existe un segmento BF con la mínima longitud? ¿Por qué?

Si, ya porque la longitud puede ser tan pequeña que no haya una distancia sino que se encuentren en el mismo punto

4. Si existe, menciona qué condiciones deben cumplir los puntos B y F para que sea la mínima.

Si B se pone en un Punto cualquiera y F se ubica encima del B se llega a la longitud minima

Fase de argumentación (Trabajo en equipo)

1. Compara tus respuestas con las de tus compañeros.

2. ¿Qué pueden generalizar respecto a los segmentos de la máxima y la mínima longitud y la ubicación de los puntos B y F?

el maximo es el diametro y lo minimo no existe.

3. Socializa la(s) conjetura(s) de tu equipo con todos los demás, luego escribe la conclusión final a la que llegas.

• Si la longitud ~~equivale~~ equivale al diametro, el segmento $\overline{BF}$ estara en su maxima longitud.
• No hay una longitud minima del segmento $\overline{BF}$ ya qe siempre habria una longitud menor a la anterior

PROBLEMA 2: LIBRO III. PROPOSICIÓN 15

Link: https://ggbm.at/evgxc3a6

En esta construcción encontrarás:

- Una circunferencia con centro C.
- La cuerda AB.

Fase de exploración

1. Mueve el punto A, ¿qué pasa con la cuerda AB?

la longitud de la cuerda cambia a medida qe el punto A se mueve atravez de la circunferencia

2. Mueve el punto B, ¿qué pasa con la cuerda AB?

ocurre lo mismo solo qe en este caso el punto qe se mueve es el punto B

3. ¿Por qué crees que sucede esto?

Esto sucede pq los 2 puntos se encuentran sobre la circunferencia así que a medida que se separan la longitud se hace más grande

Fase de interpretación

1. ¿Existe una cuerda que tenga la máxima longitud?

Si, cuando cada punto se encuentra a un extremo y se forma el diametro

2. Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir la cuerda para que la longitud sea máxima.

que sea el diametro, que pase ~~pose~~ por el centro

3. ¿Existe una cuerda que tenga la mínima longitud? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir la cuerda para que la longitud sea mínima.

No existe una cuerda de minimo longitud ya que

Fase de análisis (Trabajo en equipo)

4. Compara tus respuestas con las de tus compañeros
5. ¿Qué pueden generalizar respecto a la longitud de la cuerda? (formulen una conjetura)

El maximo es el diametro sin embargo la minima longitud de cuerda no existe

6. Socializa la(s) conjetura(s) de tu equipo con todos los demás, luego escribe la conclusión final a la que llegas.

• El diametro es la longitud mayor de la cuerda y la minima no existe

PROBLEMA 3: LIBRO VI. PROPOSICIÓN 27

Link: https://ggbm.at/pn4arvrk

En esta construcción encontrarás:

- Paralelogramo AC
- Paralelogramo AZ (semejante al paralelogramo AC).

Contesta las siguientes preguntas:

1. ¿Qué puntos puedes mover y cuál es la función de cada uno de estos puntos?

Se Pueden mover el Punto W, D, A y B
B= lo mueve de forma horizontal y lo hace más grande o pequeño
D= lo hace estar diagonal A= lo hacemos Pequeño en diagonal
W= cambia la altura de Paralelogramo más pequeño

2. ¿Existe un paralelogramo AZ semejante a AC con la mínima área posible? Si existe, menciona las condiciones que debe cumplir el paralelogramo AZ para que el área sea mínima.

No Posible Pq nunca el mas pequeño va a llegar a la misma del otro por culPa del Segmento de diferencia

3. ¿Existe un paralelogramo AZ semejante a AC con la máxima área posible? Si existe, menciona las condiciones que debe cumplir el paralelogramo AZ para que el área sea máxima.

No es posible pq nuca el más pequeño va a llegar a superar el otro pero pueden llegar a la misma

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

"PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN A LA LUZ DE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS"

NURY ANDREA RODRÍGUEZ – MARÍA FERNANDA RAMOS

SESIÓN 1. 04/AGOSTO/2018

NOMBRE: Angela Patricia Garcia Lugo **GRADO:** Decimo

EUCLIDES DE ALEJANDRÍA

Euclides (325 – 265 a.C.) fue un matemático y geómetra griego, considerado uno de los grandes matemáticos de la antigüedad y el padre de la geometría. Es el autor de "***Los Elementos***" una de las obras matemáticas más conocidas del mundo que ha tenido más de 1.000 traducciones desde su primera publicación en 1.482, compuesta por trece libros y es el resultado de la compilación del conocimiento de la matemática en los años anteriores, poniendo orden a muchos teoremas de Eudoxo, perfeccionando muchos de estos, dando demostraciones irrefutables para hechos probados sin rigor por sus predecesores y fundando el método axiomático. En esta obra se presentan 465 proposiciones, 93 problemas y 372 teoremas de la geometría plana y espacial, junto con cinco postulados.

En *Los Elementos*, Euclides presenta algunas proposiciones que tiene que desarrollan el proceso de optimización, por lo que se han adaptado en applets construidos en GeoGebra y reestructurado en forma de problemas. A continuación, se presentan 3 de estos problemas.

PROBLEMA 1: LIBRO III, PROPOSICIÓN 7

Link: https://www.geogebra.org/m/sdugjzqt

En esta construcción encontrarás:

- Una circunferencia con centro E y radio ED.
- El segmento FB, donde F está sobre el diámetro AD y B está sobre la circunferencia.

Nota: Es necesario que escribas todo lo que logres encontrar y las conclusiones a las que llegues.

Fase de exploración

1. Mueve el punto F, ¿qué sucede con el segmento FB?

2. ¿Qué pueden generalizar respecto a los segmentos de la máxima y la mínima longitud y la ubicación de los puntos B y F?

3. Socializa la(s) conjetura(s) de tu equipo con todos los demás, luego escribe la conclusión final a la que llegas.

PROBLEMA 2: LIBRO III. PROPOSICIÓN 15

Link: https://ggbm.at/evgxc3a6

En esta construcción encontrarás:

- Una circunferencia con centro C.
- La cuerda AB.

Fase de exploración

1. Mueve el punto A, ¿qué pasa con la cuerda AB?

La cuerda AB cambia su longitud en la primera parte de la circunferencia disminuye y al llegar al punto B desaparece la cuerda y luego al avanzar hacia la otra parte de la circunferencia vuelve a aumentar la longitud.

2. Mueve el punto B, ¿qué pasa con la cuerda AB?

Al igual que en el punto anterior la cuerda AB cambia su longitud y cumple las mismas características que cuando se mueve el punto A solo que ya no queda en cero en el punto B sino en el A.

3. ¿Por qué crees que sucede esto?

Fase de interpretación

1. ¿Existe una cuerda que tenga la máxima longitud?

Si Podria llegar a existir Pero siempre y cuando cumpla que los Puntos tengan un limite del cual no se Pueden salir

2. Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir la cuerda para que la longitud sea máxima.

Que tenga un limite, es decir que los Puntos que conforman la cuerda estan ubicados dentro de una figura, Por ejemplo una circunferencia, cuadrado ect, de esta modo la cuerda Puede obtener la maxima longitud Posible dentro de la figura

3. ¿Existe una cuerda que tenga la mínima longitud? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir la cuerda para que la longitud sea mínima.

Al igual que en la Pregunta anterior si Puede llegar a tener la minima longitud si la cuerda esta dentro de una figura, Pero cabe mencionar que no se Puede Poner ambos Puntos sobre el mismo lugar Porque ya no habria cuerda.

Fase de análisis (Trabajo en equipo)

4. Compara tus respuestas con las de tus compañeros
5. ¿Qué pueden generalizar respecto a la longitud de la cuerda? (formulen una conjetura)

Existe un punto maximo pero no uno minimo ya que siempre va a tender a un punto más pequeño. el punto maximo se llama diametro

6. Socializa la(s) conjetura(s) de tu equipo con todos los demás, luego escribe la conclusión final a la que llegas.

Existe un segmento o cuerda maximo denominado diametro dentro de una circunferencia pero no va a existir un segmento minimo ya que siempre va a tender a un punto más pequeña.

PROBLEMA 3: LIBRO VI, PROPOSICIÓN 27

Link: https://ggbm.at/pn4arvrk

En esta construcción encontrarás:

- Paralelogramo AC
- Paralelogramo AZ (semejante al paralelogramo AC).

Contesta las siguientes preguntas:

1. ¿Qué puntos puedes mover y cuál es la función de cada uno de estos puntos?

Se pueden mover los puntos A, B y D que se encuentran en los extremos de la figura y el punto w que esta en un segmento de la figura azul. El punto A, B y D dan la forma a la figura verde y el punto w le da la forma a la figura azul

2. ¿Existe un paralelogramo AZ semejante a AC con la mínima área posible? Si existe, menciona las condiciones que debe cumplir el paralelogramo AZ para que el área sea mínima.

No porque siempre va a haber un area más pequeña ya que nunca va a ser cero.

3. ¿Existe un paralelogramo AZ semejante a AC con la máxima área posible? Si existe, menciona las condiciones que debe cumplir el paralelogramo AZ para que el área sea máxima.

No porque el chiquito no va a tener la maxima area del grande pero en algun punto si van a tener la misma area

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

"PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN A LA LUZ DE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS"
NURY ANDREA RODRÍGUEZ – MARÍA FERNANDA RAMOS
SESIÓN 1. 04/AGOSTO/2018

NOMBRE: Juliana valentina Martínez Bandera **GRADO:** Decimo

EUCLIDES DE ALEJANDRÍA

Euclides (325 – 265 a.C.) fue un matemático y geómetra griego, considerado uno de los grandes matemáticos de la antigüedad y el padre de la geometría. Es el autor de "***Los Elementos***" una de las obras matemáticas más conocidas del mundo que ha tenido más de 1.000 traducciones desde su primera publicación en 1.482, compuesta por trece libros y es el resultado de la compilación del conocimiento de la matemática en los años anteriores, poniendo orden a muchos teoremas de Eudoxo, perfeccionando muchos de estos, dando demostraciones irrefutables para hechos probados sin rigor por sus predecesores y fundando el método axiomático. En esta obra se presentan 465 proposiciones, 93 problemas y 372 teoremas de la geometría plana y espacial, junto con cinco postulados.

En *Los Elementos*, Euclides presenta algunas proposiciones que tiene que desarrollan el proceso de optimización, por lo que se han adaptado en applets construidos en GeoGebra y reestructurado en forma de problemas. A continuación, se presentan 3 de estos problemas.

PROBLEMA 1: LIBRO III, PROPOSICIÓN 7

Link: https://www.geogebra.org/m/sdugjzqt

En esta construcción encontrarás:

- Una circunferencia con centro E y radio ED.
- El segmento FB, donde F está sobre el diámetro AD y B está sobre la circunferencia.

Nota: Es necesario que escribas todo lo que logres encontrar y las conclusiones a las que llegues.

Fase de exploración

1. Mueve el punto F, ¿qué sucede con el segmento FB?

2. ¿Qué pueden generalizar respecto a los segmentos de la máxima y la mínima longitud y la ubicación de los puntos B y F?

____

____

____

____

3. Socializa la(s) conjetura(s) de tu equipo con todos los demás, luego escribe la conclusión final a la que llegas.

____

____

____

____

PROBLEMA 2: LIBRO III. PROPOSICIÓN 15

Link: https://ggbm.at/evgxc3a6

En esta construcción encontrarás:

- Una circunferencia con centro C.
- La cuerda AB.

Fase de exploración

1. Mueve el punto A, ¿qué pasa con la cuerda AB?

- Entre más cerca esté el punto A al punto B el diámetro de la cuerda se vuelve más pequeño
- La cuerda AB queda intersectando el punto C, representa el diámetro

2. Mueve el punto B, ¿qué pasa con la cuerda AB?

- Entre más cerca esté el punto B al punto A, el diámetro de la cuerda se vuelve más pequeño
- La cuerda AB queda intersectando el punto C, representa el diámetro

3. ¿Por qué crees que sucede esto?

Porque el punto seleccionado cambió su posición, por lo que al alterar un punto, se cambian los valores

Fase de interpretación

1. ¿Existe una cuerda que tenga la máxima longitud?

Considero que el diametro

2. Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir la cuerda para que la longitud sea máxima.

Si, como menciono en la pregunta anterior el diametro es aquella cuerda, que consta de 2 puntos sobre la circunferencia, los cuales pasan por el centro de esta marcando los 2 extremos del circulo

3. ¿Existe una cuerda que tenga la mínima longitud? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir la cuerda para que la longitud sea mínima.

No, ya que siempre se va tender a una cuerda cada vez más pequeña

Fase de análisis (Trabajo en equipo)

4. Compara tus respuestas con las de tus compañeros

5. ¿Qué pueden generalizar respecto a la longitud de la cuerda? (formulen una conjetura)

Existe un maximo de la longitud de la cuerda, la cual es el diametro, que representa los puntos extremos de la circunferencia, sin embargo no existe un punto minimo ya que siempre se va a tender a un valor mas pequeño

6. Socializa la(s) conjetura(s) de tu equipo con todos los demás, luego escribe la conclusión final a la que llegas.

se llega a una conclusión general, la cual hace referencia a la existencia de un longitud maxima la cual es el diametro. sin embargo no existe uno minimo, ya que siempre se va a tender a una longitud más pequeña

PROBLEMA 3: LIBRO VI, PROPOSICIÓN 27

Link: https://ggbm.at/pn4arvrk

En esta construcción encontrarás:

- Paralelogramo AC
- Paralelogramo AZ (semejante al paralelogramo AC).

Contesta las siguientes preguntas:

1. ¿Qué puntos puedes mover y cuál es la función de cada uno de estos puntos?

-cuando se mueve el punto w completamente hacia la derecha se formaran 2 paralelogramos exactamente iguales.

-la suma de sus angulos tenderan a ser la misma

2. ¿Existe un paralelogramo AZ semejante a AC con la mínima área posible? Si existe, menciona las condiciones que debe cumplir el paralelogramo AZ para que el área sea mínima.

Debe estar tendiendo al sector AB

3. ¿Existe un paralelogramo AZ semejante a AC con la máxima área posible? Si existe, menciona las condiciones que debe cumplir el paralelogramo AZ para que el área sea máxima.

No hay area semejante a la maxima area al AC, pero si pueden llegar a tener la misma area

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

"PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN A LA LUZ DE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS"

NURY ANDREA RODRÍGUEZ – MARÍA FERNANDA RAMOS

SESIÓN 1. 04/AGOSTO/2018

NOMBRE: Gabriel Ramírez Larrarte **GRADO:** Undécimo

EUCLIDES DE ALEJANDRÍA

Euclides (325 – 265 a.C.) fue un matemático y geómetra griego, considerado uno de los grandes matemáticos de la antigüedad y el padre de la geometría. Es el autor de "***Los Elementos***" una de las obras matemáticas más conocidas del mundo que ha tenido más de 1.000 traducciones desde su primera publicación en 1.482, compuesta por trece libros y es el resultado de la compilación del conocimiento de la matemática en los años anteriores, poniendo orden a muchos teoremas de Eudoxo, perfeccionando muchos de estos, dando demostraciones irrefutables para hechos probados sin rigor por sus predecesores y fundando el método axiomático. En esta obra se presentan 465 proposiciones, 93 problemas y 372 teoremas de la geometría plana y espacial, junto con cinco postulados.

En *Los Elementos*, Euclides presenta algunas proposiciones que tiene que desarrollan el proceso de optimización, por lo que se han adaptado en applets construidos en GeoGebra y reestructurado en forma de problemas. A continuación, se presentan 3 de estos problemas.

PROBLEMA 1: LIBRO III, PROPOSICIÓN 7

Link: https://www.geogebra.org/m/sdugjzqt

En esta construcción encontrarás:

- Una circunferencia con centro E y radio ED.
- El segmento FB, donde F está sobre el diámetro AD y B está sobre la circunferencia.

Nota: Es necesario que escribas todo lo que logres encontrar y las conclusiones a las que llegues.

Fase de exploración

1. Mueve el punto F, ¿qué sucede con el segmento FB?

El segmento $\overline{BF}$ empezo a aumentar mientras más se vaya acercando al centro y al extremo izquierdo de la circunferencia.

2. Mueve el punto B que se encuentra sobre la circunferencia, ¿qué pasa con el segmento BF?

Al igual que el caso anterior, el segmento $\overline{BF}$ empieza a enlongarse entre más lejos se encuentre del punto F en el diámetro

Fase de Análisis

1. ¿Existe un segmento BF con la máxima longitud? ¿Por qué?

Sí existe, pues no puede haber un segmento con una longitud infinita. Esto se debe a que el segmento BF se encuentran limitados por la circunferencia.

2. Si existe, menciona qué condiciones deben cumplir los puntos B y F para que sea la máxima.

Es máximo cuando el segmento $\overline{BF}$ equivale al diámetro de la circunferencia, pues es la medida más larga que alcanza a tener el segmento (por su limitación). B debe estar al otro lado de F en la circunferencia.

3. ¿Existe un segmento BF con la mínima longitud? ¿Por qué?

Sí existen, pues un segmento es la prolongación de muchos puntos consecutivos. La mínima longitud debe ser un punto.

4. Si existe, menciona qué condiciones deben cumplir los puntos B y F para que sea la mínima.

Para que sea la mínima, B y F deben encontrarse en el mismo punto de la circunferencia, donde B y F puedan encontrarse.

Fase de argumentación (Trabajo en equipo)

1. Compara tus respuestas con las de tus compañeros.

2. ¿Qué pueden generalizar respecto a los segmentos de la máxima y la mínima longitud y la ubicación de los puntos B y F?

La máxima longitud es el diámetro y ~~la mínima longitud es el punto en el que convergen~~ No hay una longitud mínima entre los puntos, pues sería un punto y no un segmento

3. Socializa la(s) conjetura(s) de tu equipo con todos los demás, luego escribe la conclusión final a la que llegas.

- Si la longitud equivale al diámetro, el segmento $\overline{BF}$ estará en su máxima longitud
- Si los puntos B y F conforman un segmento, el segmento $\overline{BF}$ no tendrá una longitud mínima

PROBLEMA 2: LIBRO III. PROPOSICIÓN 15

Link: https://ggbm.at/evgxc3a6

En esta construcción encontrarás:

- Una circunferencia con centro C.
- La cuerda AB.

Fase de exploración

1. Mueve el punto A, ¿qué pasa con la cuerda AB?

El punto A empieza a acortar o enlongar la longitud de la cuerda. Como ella divide la circunferencia, la longitud del arco también varía dependiendo de la cuerda.

2. Mueve el punto B, ¿qué pasa con la cuerda AB?

Como es un punto de la circunferencia, al igual que A, tiene el mismo efecto.

3. ¿Por qué crees que sucede esto?

Porque mientras más lejos se encuentre la cuerda del centro de la circunferencia, más diferencia habrá entre la longitud de ambos arcos creados por la cuerda.

Fase de interpretación

1. ¿Existe una cuerda que tenga la máxima longitud?

Sí, porque la longitud de la cuerda se encuentra limitada por una circunferencia.

2. Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir la cuerda para que la longitud sea máxima.

Siempre que la cuerda pase sobre el punto C en el centro de la circunferencia, llegará a la máxima longitud (pues equivaldrá al diámetro).

3. ¿Existe una cuerda que tenga la mínima longitud? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir la cuerda para que la longitud sea mínima.

No, porque la cuerda es un segmento cuyos puntos se encuentran sobre la circunferencia. Al ser un segmento $\overline{AB}$, no habrá una longitud mínima.

Fase de análisis (Trabajo en equipo)

4. Compara tus respuestas con las de tus compañeros
5. ¿Qué pueden generalizar respecto a la longitud de la cuerda? (formulen una conjetura)

Si la cuerda se encuentra lejos del centro de la circunferencia se hace más corta su longitud. Por el contrario, si se encuentra cerca del centro de la circunferencia, se hará mas larga su longitud.

6. Socializa la(s) conjetura(s) de tu equipo con todos los demás, luego escribe la conclusión final a la que llegas.

La distancia de la cuerda al centro de curvatura es inversamente proporcional a su longitud. Cuando su distancia al centro de curvatura es 0, llega a su longitud máxima (diámetro), pero al ser un segmento no tiene una distancia mínima.

PROBLEMA 3: LIBRO VI. PROPOSICIÓN 27

Link: https://ggbm.at/pn4arvrk

En esta construcción encontrarás:

- Paralelogramo AC
- Paralelogramo AZ (semejante al paralelogramo AC).

Contesta las siguientes preguntas:

1. ¿Qué puntos puedes mover y cuál es la función de cada uno de estos puntos?

D= Contrae o extiende verticalmente los paralelogramos; B= Permite mover la recta $\overline{CB}$ y la conexión con los demás puntos cambia la forma; A= Contrae o extiende diagonalmente los paralelogramos; W= Contrae o extiende de vertical u horizontalmente (de manera inversamente proporcional) el paralelogramo interno.

2. ¿Existe un paralelogramo AZ semejante a AC con la mínima área posible? Si existe, menciona las condiciones que debe cumplir el paralelogramo AZ para que el área sea mínima.

El área mínima se encuentra cuando W es el punto central entre A y B, pues su área es la más pequeña que se puede. Sin embargo, no es semejante a AC

3. ¿Existe un paralelogramo AZ semejante a AC con la máxima área posible? Si existe, menciona las condiciones que debe cumplir el paralelogramo AZ para que el área sea máxima.

El punto W debe encontrarse en el mismo punto con Z. Así, el paralelogramo azul adquirirá un área igual al área del otro paralelogramo. Sin embargo, no es semejante a AC, sino a KC

"PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN A LA LUZ DE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS"

NURY ANDREA RODRÍGUEZ – MARÍA FERNANDA RAMOS

SESIÓN 2. 13/AGOSTO/2018

NOMBRE: Tomás Alejandro Sierra Band **GRADO:** 6°

PAPPUS DE ALEJANDRÍA

Pappus (250 - 350 d.C.) fue un matemático y geómetra griego nacido en Alejandría, escribió comentarios de los Elementos de Euclides y de Almagesto de Ptolomeo. Fue precursor de la geometría moderna, maestro en Alejandría y autor de la ***"Colección Matemática"***, una obra compuesta de ocho libros en la que presenta un panorama histórico de la matemática clásica, incluyendo algunas demostraciones alternativas del trabajo de otros matemáticos famosos de su época, y proponiendo nuevas proposiciones geométricas entorno a las cónicas, polígonos, poliedros, superficies y volúmenes de sólidos de revolución.

En la *Colección Matemática*, Pappus presenta algunas proposiciones que desarrollan el proceso de optimización, por lo que se han adaptado en applets construidos en GeoGebra y reestructurado en forma de problemas. A continuación, se presentan 3 de estos problemas.

PROBLEMA I: LIBRO V, PROPOSICIÓN 5

Parte 1

Nota: Es necesario que escribas todo lo que logres encontrar y las conclusiones a las que llegues.

En GeoGebra sigue las siguientes instrucciones:

1. Construye un triángulo ΔABC cualquiera. (con la opción polígono)
2. Toma uno de los lados del triángulo como la base del mismo. (Cámbiale el color)
3. Construye una de las alturas del triángulo. (Ten en cuenta que la altura es el segmento perpendicular a la base que pasa por el vértice opuesto)

4. Determina la medida de los lados del triángulo y de la altura. (usa la opción "Distancia o longitud")
5. Encuentra el perímetro del triángulo y su área. (Usando opciones "Distancia o longitud" y "área")
6. Mueve el punto A.
   ¿Qué cambia? La longitud entre AC y AB, Además la altura, igual el Área y Perímetro
   ¿Qué permanece fijo? CB permanece fijo (7,21)
7. Mueve el punto B.
   ¿Qué cambia? La longitud entre CB, AB y la altura. Igual el Área y el perímetro.
   ¿Qué permanece fijo? AC se mantiene fijo. (7,21)
8. Mueve el punto C.
   ¿Qué cambia? La longitud entre AC, CB y la altura. Igual el Área y el Perímetro
   ¿Qué permanece fijo? AB sem mantiene. (8)
9. Encuentra tres triángulos diferentes, que tengan el mismo perímetro. ¿Tienen la misma área? ¿Por qué?

- ~~AB=9,75 AC=5,66 CB=7,01)=22.42~~
- AB=8 AC=7.76 CB=6.66)=22.42, no coinside porque la longitud entre los puntos cambia y también la altura y como el Area tiene como formula $\frac{b \cdot h}{2}$ también cambia.

Parte 2

Abre el archivo "Triángulos Isoperimétricos"

Link: https://ggbm.at/f3dxd5cy

En esta construcción encontrarás:

- Un triángulo ABC.

1. ¿Qué tipo de triángulos se pueden formar al mover el punto C?
   Triángulo equilatero (3 lados iguales), triángulo escaneno (3 lados desiguales), acutángulo y obstusángulo.

2. ¿Existe un triángulo que tenga el área máxima? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir este triángulo.

Si es un triangulo con un Área de 5.06, este seria un triangulo escaleno y tiene que tener 3.1 en CB 3.33 en AC, 5 en la base.

3. ¿Existe un triángulo que tenga el área mínima? ¿Por qué? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir este triángulo.

El Área minima tiene que ser mayor a 0 pero simpre van a existir una infinidad de Áreas más pequeñas. Por esta razón no existe un Área minima.

Fase de argumentación (Trabajo en equipo)

4. Compara tus respuestas con las de tus compañeros

5. ¿Qué pueden generalizar respecto al área de los triángulos?

El Área maxima va a ser un triangulo isósceles y Área minima va a ser infinitia ya que siempre va a tender a ser a cero, pero no puede ser cero. Esto es porque esta limitado a su altura que es limitada por el elipse.

6. Socializa la(s) conjetura(s) de tu equipo con todos los demás, luego escribe la conclusión final a la que llegas.

Si, de todos los triangulos isoperimetricos con la misma base se tiene que si es un triangulo isoceles el Área sera maxima mientras que el Área minima va a tender a cero, pero no puede ser cero, así que no existe.

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

"PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN A LA LUZ DE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS"

NURY ANDREA RODRÍGUEZ – MARÍA FERNANDA RAMOS

SESIÓN 2. 13/AGOSTO/2018

NOMBRE: Maria Catalina Casallas **GRADO:** 7º

PAPPUS DE ALEJANDRÍA

Pappus (250 - 350 d.C.) fue un matemático y geómetra griego nacido en Alejandría, escribió comentarios de los Elementos de Euclides y de Almagesto de Ptolomeo. Fue precursor de la geometría moderna, maestro en Alejandría y autor de la ***"Colección Matemática"***, una obra compuesta de ocho libros en la que presenta un panorama histórico de la matemática clásica, incluyendo algunas demostraciones alternativas del trabajo de otros matemáticos famosos de su época, y proponiendo nuevas proposiciones geométricas entorno a las cónicas, polígonos, poliedros, superficies y volúmenes de sólidos de revolución.

En la *Colección Matemática*, Pappus presenta algunas proposiciones que desarrollan el proceso de optimización, por lo que se han adaptado en applets construidos en GeoGebra y reestructurado en forma de problemas. A continuación, se presentan 3 de estos problemas.

PROBLEMA I: LIBRO V, PROPOSICIÓN 5

Parte 1

Nota: Es necesario que escribas todo lo que logres encontrar y las conclusiones a las que llegues.

En GeoGebra sigue las siguientes instrucciones:

1. Construye un triángulo ΔABC cualquiera. (con la opción polígono)
2. Toma uno de los lados del triángulo como la base del mismo. (Cámbiale el color)
3. Construye una de las alturas del triángulo. (Ten en cuenta que la altura es el segmento perpendicular a la base que pasa por el vértice opuesto)

4. Determina la medida de los lados del triángulo y de la altura. (usa la opción "Distancia o longitud")
5. Encuentra el perímetro del triángulo y su área. (Usando opciones "Distancia o longitud" y "área")
6. Mueve el punto A.
   ¿Qué cambia? cambia el perimetro, área, segmento ac: a,b y la altura
   ¿Qué permanece fijo? el segmento C,B
7. Mueve el punto B.
   ¿Qué cambia? perimetro, área, segmento ab, bc, altura
   ¿Qué permanece fijo? segmento ac
8. Mueve el punto C.
   ¿Qué cambia? perimetro, área, segmento ac, CB, altura
   ¿Qué permanece fijo? segmento ab
9. Encuentra tres triángulos diferentes, que tengan el mismo perímetro. ¿Tienen la misma área? ¿Por qué?
   no tienen el mismo area, ya que la altura cambia y la formula parasacar el área de un triangulo es base por altura sobre 2

Parte 2

Abre el archivo "Triángulos Isoperimétricos"

Link: https://ggbm.at/f3dxd5cy

En esta construcción encontrarás:

- Un triángulo ABC.

1. ¿Qué tipo de triángulos se pueden formar al mover el punto C?
   rectangular, acutángulo, obtuso, escaleno e isoceles

2. ¿Existe un triángulo que tenga el área máxima? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir este triángulo.

si, la condicion es que la altura del triangulo cruce la mitad de la base del triangulo

3. ¿Existe un triángulo que tenga el área mínima? ¿Por qué? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir este triángulo.

no existe un área minima ya que siempre se podra encontrar una más pequeña

Fase de argumentación (Trabajo en equipo)

4. Compara tus respuestas con las de tus compañeros

5. ¿Qué pueden generalizar respecto al área de los triángulos?

El área maxima es cuando formamos un triangulo isoceles, alejando lo más posible la altura del triangulo y no existe una minima

6. Socializa la(s) conjetura(s) de tu equipo con todos los demás, luego escribe la conclusión final a la que llegas.

el área maxima esta conformada por triangulo isoceles pero el area minima no existe ya que siempre habra una mas pequeña

si, de todos los triangulos isoperimetricos con la misma base se tiene que:

·si es un triangulo isoceles el area sera la maxima mientras que no existe un area minima ya que siempre existira una más pequeña

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

Educadora de educadores

"PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN A LA LUZ DE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS"

NURY ANDREA RODRÍGUEZ – MARÍA FERNANDA RAMOS

SESIÓN 2. 13/AGOSTO/2018

NOMBRE: Gabriel Gutierrez fonseca **GRADO:** 7°

PAPPUS DE ALEJANDRÍA

Pappus (250 - 350 d.C.) fue un matemático y geómetra griego nacido en Alejandría, escribió comentarios de los Elementos de Euclides y de Almagesto de Ptolomeo. Fue precursor de la geometría moderna, maestro en Alejandría y autor de la ***"Colección Matemática"***, una obra compuesta de ocho libros en la que presenta un panorama histórico de la matemática clásica, incluyendo algunas demostraciones alternativas del trabajo de otros matemáticos famosos de su época, y proponiendo nuevas proposiciones geométricas entorno a las cónicas, polígonos, poliedros, superficies y volúmenes de sólidos de revolución.

En la *Colección Matemática*, Pappus presenta algunas proposiciones que desarrollan el proceso de optimización, por lo que se han adaptado en applets construidos en GeoGebra y reestructurado en forma de problemas. A continuación, se presentan 3 de estos problemas.

PROBLEMA I: LIBRO V, PROPOSICIÓN 5

Parte 1

Nota: Es necesario que escribas todo lo que logres encontrar y las conclusiones a las que llegues.

En GeoGebra sigue las siguientes instrucciones:

1. Construye un triángulo ΔABC cualquiera. (con la opción polígono)
2. Toma uno de los lados del triángulo como la base del mismo. (Cámbiale el color)
3. Construye una de las alturas del triángulo. (Ten en cuenta que la altura es el segmento perpendicular a la base que pasa por el vértice opuesto)

4. Determina la medida de los lados del triángulo y de la altura. (usa la opción "Distancia o longitud")
5. Encuentra el perímetro del triángulo y su área. (Usando opciones "Distancia o longitud" y "área")
6. Mueve el punto A.

   ¿Qué cambia? las medidas de AC - AB, Area, Perimetro, halturo

   ¿Qué permanece fijo? la medida del CB
7. Mueve el punto B.

   ¿Qué cambia? las ~~medidas~~ segmentos del CB - AB -, Perimetro, Área, haltura

   ¿Qué permanece fijo? la ~~medida~~ segmento AC
8. Mueve el punto C.

   ¿Qué cambia? las ~~medidas~~ segmento del CB-AC, haltura, Área, Perimetro

   ¿Qué permanece fijo? la ~~medida~~ segmento del AB
9. Encuentra tres triángulos diferentes, que tengan el mismo perímetro. ¿Tienen la misma área? ¿Por qué?

   No, por que al mover cualguier segmento la altura del triangulo cambia

Parte 2

Abre el archivo "Triángulos Isoperimétricos"

Link: https://ggbm.at/f3dxd5cy

En esta construcción encontrarás:

- Un triángulo ABC.

1. ¿Qué tipo de triángulos se pueden formar al mover el punto C?

   Escaleno, isoceles, acutangulo

2. ¿Existe un triángulo que tenga el área máxima? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir este triángulo.

el area máxima es 5.06 y el triangulo es un isoceles

3. ¿Existe un triángulo que tenga el área mínima? ¿Por qué? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir este triángulo.

el area minima no existe

escales

Fase de argumentación (Trabajo en equipo)

4. Compara tus respuestas con las de tus compañeros

5. ¿Qué pueden generalizar respecto al área de los triángulos?

trasando una linea en el eje y se puede obtener la are maxima y el area minima no existe sin embargo debe ser un valor donde x (valor del area) sea < 0

6. Socializa la(s) conjetura(s) de tu equipo con todos los demás, luego escribe la conclusión final a la que llegas.

todos los triangulos isoperimetricos con la misma base van a tener un area maxima mientras que el area minimo no existe ya que siempre va haber una area mas pequeña que la anterior.

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

"PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN A LA LUZ DE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS"
NURY ANDREA RODRÍGUEZ – MARÍA FERNANDA RAMOS
SESIÓN 2. 13/AGOSTO/2018

NOMBRE: Daniela Sánchez Auza **GRADO:** Octavo

PAPPUS DE ALEJANDRÍA

Pappus (250 - 350 d.C.) fue un matemático y geómetra griego nacido en Alejandría, escribió comentarios de los Elementos de Euclides y de Almagesto de Ptolomeo. Fue precursor de la geometría moderna, maestro en Alejandría y autor de la ***"Colección Matemática"***, una obra compuesta de ocho libros en la que presenta un panorama histórico de la matemática clásica, incluyendo algunas demostraciones alternativas del trabajo de otros matemáticos famosos de su época, y proponiendo nuevas proposiciones geométricas entorno a las cónicas, polígonos, poliedros, superficies y volúmenes de sólidos de revolución.

En la *Colección Matemática*, Pappus presenta algunas proposiciones que desarrollan el proceso de optimización, por lo que se han adaptado en applets construidos en GeoGebra y reestructurado en forma de problemas. A continuación, se presentan 3 de estos problemas.

PROBLEMA I: LIBRO V, PROPOSICIÓN 5

Parte 1

Nota: Es necesario que escribas todo lo que logres encontrar y las conclusiones a las que llegues.

En GeoGebra sigue las siguientes instrucciones:

1. Construye un triángulo ΔABC cualquiera. (con la opción polígono)
2. Toma uno de los lados del triángulo como la base del mismo. (Cámbiale el color)
3. Construye una de las alturas del triángulo. (Ten en cuenta que la altura es el segmento perpendicular a la base que pasa por el vértice opuesto)

4. Determina la medida de los lados del triángulo y de la altura. (usa la opción “Distancia o longitud”)
5. Encuentra el perímetro del triángulo y su área. (Usando opciones “Distancia o longitud” y “área”)
6. Mueve el punto A.
   ¿Qué cambia? Altura perimetro - AC - AB - CC - el area cambia
   ¿Qué permanece fijo? La longitud CB
7. Mueve el punto B.
   ¿Qué cambia? Altura - perimetro - Area - longitud CB y AB
   ¿Qué permanece fijo? la longitud AC
8. Mueve el punto C.
   ¿Qué cambia? Altura - perimetro - Area - longitud CB y AC
   ¿Qué permanece fijo? la longitud BC
9. Encuentra tres triángulos diferentes, que tengan el mismo perímetro. ¿Tienen la misma área? ¿Por qué?
   Todos tenian diferente ya que en todos los casos la altura cambiaba, afectando el area.

Parte 2

Abre el archivo “Triángulos Isoperimétricos”

Link: https://ggbm.at/f3dxd5cy

En esta construcción encontrarás:

- Un triángulo ABC.

1. ¿Qué tipo de triángulos se pueden formar al mover el punto C?

Todos los triangulos a equilatero - todos su lados iguales → NO
Rectangulo Isosceles 2 lados iguales → Si
Acutangulo Escaleno - todos sus lados desiguales
Obstusangulo

2. ¿Existe un triángulo que tenga el área máxima? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir este triángulo.

Si, su medida es de 5.06 y se cumple cuando el Isoceles y los lados $\overline{CA}$ y $\overline{BC}$ son iguales.

3. ¿Existe un triángulo que tenga el área mínima? ¿Por qué? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir este triángulo.

Si su minima medida es 0.
No existe porque no hay una medida exacta ya que cuando le hacemos zoo su area cambia

Fase de argumentación (Trabajo en equipo)

4. Compara tus respuestas con las de tus compañeros

5. ¿Qué pueden generalizar respecto al área de los triángulos?

Cambia dependiendo la altura
No hay area minima pero si maxima

6. Socializa la(s) conjetura(s) de tu equipo con todos los demás, luego escribe la conclusión final a la que llegas.

No hay area minima
El area esta relacionada con la Altura.

LICEO DE LOS ANDES
Afectividad, Intelecto y Trabajo

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

"PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN A LA LUZ DE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS"

NURY ANDREA RODRÍGUEZ – MARÍA FERNANDA RAMOS

SESIÓN 2. 13/AGOSTO/2018

NOMBRE: Daniela Velandia Cantor **GRADO:** Noveno

PAPPUS DE ALEJANDRÍA

Pappus (250 - 350 d.C.) fue un matemático y geómetra griego nacido en Alejandría, escribió comentarios de los Elementos de Euclides y de Almagesto de Ptolomeo. Fue precursor de la geometría moderna, maestro en Alejandría y autor de la ***"Colección Matemática"***, una obra compuesta de ocho libros en la que presenta un panorama histórico de la matemática clásica, incluyendo algunas demostraciones alternativas del trabajo de otros matemáticos famosos de su época, y proponiendo nuevas proposiciones geométricas entorno a las cónicas, polígonos, poliedros, superficies y volúmenes de sólidos de revolución.

En la *Colección Matemática*, Pappus presenta algunas proposiciones que desarrollan el proceso de optimización, por lo que se han adaptado en applets construidos en GeoGebra y reestructurado en forma de problemas. A continuación, se presentan 3 de estos problemas.

PROBLEMA I: LIBRO V, PROPOSICIÓN 5

Parte 1

Nota: Es necesario que escribas todo lo que logres encontrar y las conclusiones a las que llegues.

En GeoGebra sigue las siguientes instrucciones:

1. Construye un triángulo $\triangle ABC$ cualquiera. (con la opción polígono)
2. Toma uno de los lados del triángulo como la base del mismo. (Cámbiale el color)
3. Construye una de las alturas del triángulo. (Ten en cuenta que la altura es el segmento perpendicular a la base que pasa por el vértice opuesto)

4. Determina la medida de los lados del triángulo y de la altura. (usa la opción "Distancia o longitud")
5. Encuentra el perímetro del triángulo y su área. (Usando opciones "Distancia o longitud" y "área")
6. Mueve el punto A.
   ¿Qué cambia? Altura, perimetro, Area, la longitud de C-A y $\overline{AB}$
   ¿Qué permanece fijo? la longitud de C-B
7. Mueve el punto B.
   ¿Qué cambia? Altura Perimetro Area la longitud de $\overline{CB}$ y $\overline{AB}$
   ¿Qué permanece fijo? la longitud $\overline{AC}$
8. Mueve el punto C.
   ¿Qué cambia? Altura, Perimetro Area la longitud CB y $\overline{AC}$
   ¿Qué permanece fijo? la longitud de $\overline{BC}$
9. Encuentra tres triángulos diferentes, que tengan el mismo perímetro. ¿Tienen la misma área? ¿Por qué?
   El area solo la tiene igual en una ocación por en el resto la Altura cambia por lo tanto el Area

Parte 2

Abre el archivo "Triángulos Isoperimétricos"

Link: https://ggbm.at/f3dxd5cy

En esta construcción encontrarás:

- Un triángulo ABC.

1. ¿Qué tipo de triángulos se pueden formar al mover el punto C?
   Todos los tipos de triangulos = menos equilatero
   - Isosceles = 2 lados iguales
   - Escaleno = Todos diferentes
   - Rectangulo
   - acutangulo
   - obtusangulo
   - acutangulo

2. ¿Existe un triángulo que tenga el área máxima? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir este triángulo.

Si existe, su medida es de 5.06 y se comple cuando el triangulo es isoceles y los lados $\overline{CA}$ y $\overline{BC}$ son iguales

3. ¿Existe un triángulo que tenga el área mínima? ¿Por qué? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir este triángulo.

No existe, porque el hay infinitos puntos que cada vez que se hace zoom aparece menor, Area.

Fase de argumentación (Trabajo en equipo)

4. Compara tus respuestas con las de tus compañeros

5. ¿Qué pueden generalizar respecto al área de los triángulos?

- Cambia dependiendo la altura
- No hay Area minima

6. Socializa la(s) conjetura(s) de tu equipo con todos los demás, luego escribe la conclusión final a la que llegas.

- No hay Area Minima
- El Area esta relacionada con la Altura, Por lo tanto Si la Altura cambia el Area tambien

"PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN A LA LUZ DE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS"

NURY ANDREA RODRÍGUEZ – MARÍA FERNANDA RAMOS

SESIÓN 2. 13/AGOSTO/2018

NOMBRE: Laura Valentina Ortiz **GRADO:** 9º

PAPPUS DE ALEJANDRÍA

Pappus (250 - 350 d.C.) fue un matemático y geómetra griego nacido en Alejandría, escribió comentarios de los Elementos de Euclides y de Almagesto de Ptolomeo. Fue precursor de la geometría moderna, maestro en Alejandría y autor de la ***"Colección Matemática"***, una obra compuesta de ocho libros en la que presenta un panorama histórico de la matemática clásica, incluyendo algunas demostraciones alternativas del trabajo de otros matemáticos famosos de su época, y proponiendo nuevas proposiciones geométricas entorno a las cónicas, polígonos, poliedros, superficies y volúmenes de sólidos de revolución.

En la *Colección Matemática*, Pappus presenta algunas proposiciones que desarrollan el proceso de optimización, por lo que se han adaptado en applets construidos en GeoGebra y reestructurado en forma de problemas. A continuación, se presentan 3 de estos problemas.

PROBLEMA I: LIBRO V, PROPOSICIÓN 5

Parte 1

Nota: Es necesario que escribas todo lo que logres encontrar y las conclusiones a las que llegues.

En GeoGebra sigue las siguientes instrucciones:

1. Construye un triángulo ΔABC cualquiera. (con la opción polígono)
2. Toma uno de los lados del triángulo como la base del mismo. (Cámbiale el color)
3. Construye una de las alturas del triángulo. (Ten en cuenta que la altura es el segmento perpendicular a la base que pasa por el vértice opuesto)

4. Determina la medida de los lados del triángulo y de la altura. (usa la opción "Distancia o longitud")
5. Encuentra el perímetro del triángulo y su área. (Usando opciones "Distancia o longitud" y "área")
6. Mueve el punto A.
   ¿Qué cambia? La altura del triángulo y el tamaño de AB
   ¿Qué permanece fijo? El segmento BC
7. Mueve el punto B.
   ¿Qué cambia? Altura y distancia AB, Área y perímetro
   ¿Qué permanece fijo? AC
8. Mueve el punto C.
   ¿Qué cambia? Altura, segmento AC y CB, Área y perímetro.
   ¿Qué permanece fijo? AB
9. Encuentra tres triángulos diferentes, que tengan el mismo perímetro. ¿Tienen la misma área? ¿Por qué?
   No, porque el perímetro es la suma de todos los lados y no necesariamente tiene la misma área ya que la altura y la base pueden variar al igual que la hipotenusa

Parte 2

Abre el archivo "Triángulos Isoperimétricos"

Link: https://ggbm.at/f3dxd5cy

En esta construcción encontrarás:

- Un triángulo ABC.

1. ¿Qué tipo de triángulos se pueden formar al mover el punto C?
   Isósceles y escaleno, equilátero en algunos casos pero no todos.

2. ¿Existe un triángulo que tenga el área máxima? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir este triángulo.

El triangulo debe ser isósceles, osea, que debe tener 2 lados iguales, esos lados deben ser distintos a la base

3. ¿Existe un triángulo que tenga el área mínima? ¿Por qué? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir este triángulo.

No hay minima ya que siempre habrá algo más pequeña, son figuras infinitas.

Fase de argumentación (Trabajo en equipo)

4. Compara tus respuestas con las de tus compañeros

5. ¿Qué pueden generalizar respecto al área de los triángulos?

No existe área minima mientras que el área máxima le pertenece a un triangulo ~~es~~ isósceles.

6. Socializa la(s) conjetura(s) de tu equipo con todos los demás, luego escribe la conclusión final a la que llegas.

de todos los triángulos isoperimetricos con la misma base se tiene que: si es un triangulo isósceles, el área es la máxima. No hay área mínima ya que siempre va a haber una más pequeña que la anterior.

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

"PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN A LA LUZ DE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS"

NURY ANDREA RODRÍGUEZ – MARÍA FERNANDA RAMOS

SESIÓN 2. 13/AGOSTO/2018

NOMBRE: Iao Leonardo Perdomo Q. **GRADO:** 9°

PAPPUS DE ALEJANDRÍA

Pappus (250 - 350 d.C.) fue un matemático y geómetra griego nacido en Alejandría, escribió comentarios de los Elementos de Euclides y de Almagesto de Ptolomeo. Fue precursor de la geometría moderna, maestro en Alejandría y autor de la ***"Colección Matemática"***, una obra compuesta de ocho libros en la que presenta un panorama histórico de la matemática clásica, incluyendo algunas demostraciones alternativas del trabajo de otros matemáticos famosos de su época, y proponiendo nuevas proposiciones geométricas entorno a las cónicas, polígonos, poliedros, superficies y volúmenes de sólidos de revolución.

En la *Colección Matemática*, Pappus presenta algunas proposiciones que desarrollan el proceso de optimización, por lo que se han adaptado en applets construidos en GeoGebra y reestructurado en forma de problemas. A continuación, se presentan 3 de estos problemas.

PROBLEMA I: LIBRO V, PROPOSICIÓN 5

Parte 1

Nota: Es necesario que escribas todo lo que logres encontrar y las conclusiones a las que llegues.

En GeoGebra sigue las siguientes instrucciones:

1. Construye un triángulo ΔABC cualquiera. (con la opción polígono)
2. Toma uno de los lados del triángulo como la base del mismo. (Cámbiale el color)
3. Construye una de las alturas del triángulo. (Ten en cuenta que la altura es el segmento perpendicular a la base que pasa por el vértice opuesto)

4. Determina la medida de los lados del triángulo y de la altura. (usa la opción "Distancia o longitud")
5. Encuentra el perímetro del triángulo y su área. (Usando opciones "Distancia o longitud" y "área")
6. Mueve el punto A.
   ¿Qué cambia? Segmento AB, AC, la altura, Perimetro, Area
   ¿Qué permanece fijo? El segmento BC
7. Mueve el punto B.
   ¿Qué cambia? Los segmentos AB y BC y la altura, su Perimetro y Ar
   ¿Qué permanece fijo? el segmento AC
8. Mueve el punto C.
   ¿Qué cambia? Los segmentos AC y BC, la altura, Perimetro Are
   ¿Qué permanece fijo? El segmento AB
9. Encuentra tres triángulos diferentes, que tengan el mismo perímetro. ¿Tienen la misma área? ¿Por qué?
   No, Porque si bien al llegar al mismo perimetro el area no es la misma ya que hay varios digitos diferentes que al sumarlos dan el mismo resultado al multiplicarlos da algo diferente

Parte 2

Abre el archivo "Triángulos Isoperimétricos"

Link: https://ggbm.at/f3dxd5cy

En esta construcción encontrarás:

- Un triángulo ABC.

1. ¿Qué tipo de triángulos se pueden formar al mover el punto C?
   Rectangulo, Escaleno, Isosceles, recto, obtusangulo

2. ¿Existe un triángulo que tenga el área máxima? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir este triángulo.

Si, Tiene que ser un triangulo isosceles (solo 2 lados iguales) el area es 5,06

3. ¿Existe un triángulo que tenga el área mínima? ¿Por qué? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir este triángulo.

No existe minima area pues siempre habrá un area más pequeña si hacemos zoom

Fase de argumentación (Trabajo en equipo)

4. Compara tus respuestas con las de tus compañeros

5. ¿Qué pueden generalizar respecto al área de los triángulos?

Al trazar un segmento con respecto a la linea Y en el medio de la elipse, podemos calcular el area maxima dandonos como resultado un triangulo isosceles y el area minima no existe como tal ya que siempre habra un area más pequeña.

6. Socializa la(s) conjetura(s) de tu equipo con todos los demás, luego escribe la conclusión final a la que llegas.

Si un triangulo isoperimetrico con la misma base:
⊥ si es un triangulo isosceles, su area sera la maxima mientras que el area minima no es determinable como tal ya que siempre habra una altura que se asemeje a cero pero no puede ser cero

"PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN A LA LUZ DE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS"

NURY ANDREA RODRÍGUEZ – MARÍA FERNANDA RAMOS

SESIÓN 2. 13/AGOSTO/2018

NOMBRE: Juliana Valentina Martinez Bandera **GRADO:** Décimo

PAPPUS DE ALEJANDRÍA

Pappus (250 - 350 d.C.) fue un matemático y geómetra griego nacido en Alejandría, escribió comentarios de los Elementos de Euclides y de Almagesto de Ptolomeo. Fue precursor de la geometría moderna, maestro en Alejandría y autor de la ***"Colección Matemática"***, una obra compuesta de ocho libros en la que presenta un panorama histórico de la matemática clásica, incluyendo algunas demostraciones alternativas del trabajo de otros matemáticos famosos de su época, y proponiendo nuevas proposiciones geométricas entorno a las cónicas, polígonos, poliedros, superficies y volúmenes de sólidos de revolución.

En la *Colección Matemática*, Pappus presenta algunas proposiciones que desarrollan el proceso de optimización, por lo que se han adaptado en applets construidos en GeoGebra y reestructurado en forma de problemas. A continuación, se presentan 3 de estos problemas.

PROBLEMA I: LIBRO V, PROPOSICIÓN 5

Parte 1

Nota: Es necesario que escribas todo lo que logres encontrar y las conclusiones a las que llegues.

En GeoGebra sigue las siguientes instrucciones:

1. Construye un triángulo ΔABC cualquiera. (con la opción polígono)
2. Toma uno de los lados del triángulo como la base del mismo. (Cámbiale el color)
3. Construye una de las alturas del triángulo. (Ten en cuenta que la altura es el segmento perpendicular a la base que pasa por el vértice opuesto)

A - C = 7.21
C - D = 6
A - B = 8
C - B = 7.21
P = 22.42
A = 24

4. Determina la medida de los lados del triángulo y de la altura. (usa la opción "Distancia o longitud")
5. Encuentra el perímetro del triángulo y su área. (Usando opciones "Distancia o longitud" y "área")
6. Mueve el punto A.

   ¿Qué cambia? El valor de = AC, BA y CD, independientemente de la dirección, el Área y el perímetro

   ¿Qué permanece fijo? La medida de CB (El lado opuesto)
7. Mueve el punto B.

   ¿Qué cambia? Los valores de = BA, BC y CD, independientemente de la dirección, el A y P.

   ¿Qué permanece fijo? La medida de AC. (El lado opuesto)
8. Mueve el punto C.

   ¿Qué cambia? Los valores de = AC, CD y BC, independientemente de la dirección, el A y P.

   ¿Qué permanece fijo? La medida de AB (El lado opuesto)
9. Encuentra tres triángulos diferentes, que tengan el mismo perímetro. ¿Tienen la misma área? ¿Por qué?

   Solo una opción mantenía el área, aquel que se encontraba inverso al original; de resto su área cambiaba ya que a pesar que su ~~el~~ base fuera la misma, la altura era diferente, por ende su área cambia.

Parte 2

Abre el archivo "Triángulos Isoperimétricos"

Link: https://ggbm.at/f3dxd5cy

En esta construcción encontrarás:

- Un triángulo ABC.

1. ¿Qué tipo de triángulos se pueden formar al mover el punto C?

   Se pueden formar tanto un triángulo = recto, isósceles, escaleno, un acutángulo, un ~~obto~~ obtusángulo.

2. ¿Existe un triángulo que tenga el área máxima? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir este triángulo.

Existe, pero es un triangulo escaleno, donde su base = 5 (AB)
AC = 3.32 y CB = 3.12, donde el valor del área es
5.06.

3. ¿Existe un triángulo que tenga el área mínima? ¿Por qué? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir este triángulo.

→ el área
mínimo debe ser mayor a 0 $(0 < X)$. El triangulo
si puede existir.

Fase de argumentación (Trabajo en equipo)

4. Compara tus respuestas con las de tus compañeros

5. ¿Qué pueden generalizar respecto al área de los triángulos?

trazando una línea respecto al eje y que pasa por el
centro de la elipse, podemos calcular el área máxima
dando como resultado un triangulo isoceles, y el
área mínima no existe, sin embargo, debe ser un valor
donde x (valor del área) sea < 0.

6. Socializa la(s) conjetura(s) de tu equipo con todos los demás, luego escribe la conclusión final a la que llegas.

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

"PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN A LA LUZ DE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS"
NURY ANDREA RODRÍGUEZ – MARÍA FERNANDA RAMOS
SESIÓN 2. 13/AGOSTO/2018

NOMBRE: Gabriel Ramírez Lamarte **GRADO:** Undécimo

PAPPUS DE ALEJANDRÍA

Pappus (250 - 350 d.C.) fue un matemático y geómetra griego nacido en Alejandría, escribió comentarios de los Elementos de Euclides y de Almagesto de Ptolomeo. Fue precursor de la geometría moderna, maestro en Alejandría y autor de la ***"Colección Matemática"***, una obra compuesta de ocho libros en la que presenta un panorama histórico de la matemática clásica, incluyendo algunas demostraciones alternativas del trabajo de otros matemáticos famosos de su época, y proponiendo nuevas proposiciones geométricas entorno a las cónicas, polígonos, poliedros, superficies y volúmenes de sólidos de revolución.

En la *Colección Matemática*, Pappus presenta algunas proposiciones que desarrollan el proceso de optimización, por lo que se han adaptado en applets construidos en GeoGebra y reestructurado en forma de problemas. A continuación, se presentan 3 de estos problemas.

PROBLEMA I: LIBRO V, PROPOSICIÓN 5

Parte 1

Nota: Es necesario que escribas todo lo que logres encontrar y las conclusiones a las que llegues.

En GeoGebra sigue las siguientes instrucciones:

1. Construye un triángulo ΔABC cualquiera. (con la opción polígono)
2. Toma uno de los lados del triángulo como la base del mismo. (Cámbiale el color)
3. Construye una de las alturas del triángulo. (Ten en cuenta que la altura es el segmento perpendicular a la base que pasa por el vértice opuesto)

4. Determina la medida de los lados del triángulo y de la altura. (usa la opción "Distancia o longitud")
5. Encuentra el perímetro del triángulo y su área. (Usando opciones "Distancia o longitud" y "área")
6. Mueve el punto A.
   ¿Qué cambia? Su altura, el segmento $\overline{AC}$ y el segmento $\overline{AB}$
   ¿Qué permanece fijo? El segmento $\overline{BC}$
7. Mueve el punto B.
   ¿Qué cambia? Su altura, el segmento $\overline{BC}$ y el segmento $\overline{AB}$
   ¿Qué permanece fijo? El segmento $\overline{AC}$
8. Mueve el punto C.
   ¿Qué cambia? Su altura, el segmento $\overline{AC}$ y el segmento $\overline{BC}$
   ¿Qué permanece fijo? El segmento $\overline{AB}$
9. Encuentra tres triángulos diferentes, que tengan el mismo perímetro. ¿Tienen la misma área? ¿Por qué?
   No, porque su altura cambia. Como la fórmula del área es $\frac{b \cdot h}{2}$, cuando h cambia, también cambiará su área (por más que el perímetro sea el mismo).

Parte 2

Abre el archivo "Triángulos Isoperimétricos"

Link: https://ggbm.at/f3dxd5cy

En esta construcción encontrarás:

- Un triángulo ABC.

1. ¿Qué tipo de triángulos se pueden formar al mover el punto C?
   Según sus lados, se puede formar un triángulo isósceles y un triángulo escaleno. Según sus ángulos, pueden formarse triángulos acutángulos, rectángulos y obtusángulos

2. ¿Existe un triángulo que tenga el área máxima? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir este triángulo.

El triángulo con el área máxima debe ser un triángulo isósceles, donde sus lados adyacentes a la base concuerdan entre sí. Esto sucede porque los tres puntos abarcan todo el espacio posible, mientras que la altura se aleja lo que más se puede de 0.

3. ¿Existe un triángulo que tenga el área mínima? ¿Por qué? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir este triángulo.

El triángulo con una mínima área es aquel en el que su altura limite a 0, pues su área también tenderá a ser 0. Sin embargo, como no hay un número exacto que se acerque más a 0, no existe

Fase de argumentación (Trabajo en equipo)

4. Compara tus respuestas con las de tus compañeros

5. ¿Qué pueden generalizar respecto al área de los triángulos?

- El área del triángulo es directamente proporcional a su altura. Tiene un área máxima al estar limitado por un elipse, pero no existe una altura mínima y, por lo tanto, tampoco un área mínima.

6. Socializa la(s) conjetura(s) de tu equipo con todos los demás, luego escribe la conclusión final a la que llegas.

- De todos los triángulos isoperimétricos con la misma base se tiene que:

① Si es un triángulo isósceles, el área será la máxima.

② No hay un área mínima porque siempre se podrá encontrar un área menor.

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

"PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN A LA LUZ DE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS"
NURY ANDREA RODRÍGUEZ – MARÍA FERNANDA RAMOS
SESIÓN 3. 18/AGOSTO/2018

NOMBRE: Maria Catalina Casallas GRADO: 7°

JACQUES CHARLES FRANÇOIS STURM

Sturm (1803 - 1855) fue un matemático francés, nacido en Ginebra. En el año 1840 fue nombrado profesor de mecánica de la Facultad de Ciencias de París. Autor de la obra matemática denominada Cours D'Analyse de L'École polytechnique, la cual años más adelante fue utilizada como un manual escolar, está dividida en dos partes que hacen referencia al cálculo diferencial e integral. En una de las lecciones se trabajan algunos problemas de máximos y mínimos como una aplicación del cálculo, por lo que se han adaptado en applets construidos en GeoGebra y reestructurado en forma de problemas. A continuación, se presenta uno de estos problemas.

PROBLEMA I: Cuarta Aplicación

Nota: Es necesario que escribas todo lo que logres encontrar y las conclusiones a las que llegues.

Abre el archivo "Sturm, Cuarta Aplicación"

Link: https://www.geogebra.org/m/mnh2g75a/pe/286229

En esta construcción encontrarás:

- Segmento AB
- Gráfica de una función f(x).
- Un deslizador "Función" para modificar el tipo de función.

1. Mueve el punto B sobre la recta, ¿Qué sucede con el segmento?

El segmento AB cambia de tamaño al dezplasar el punto B sobre la recta.

2. ¿Existe un segmento que tenga la longitud máxima? ¿Por qué? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir.

no existe porque como el punto esta ubicado en una recta y las crectas son infinitas siempre se podra agrandar más.

3. ¿Existe un segmento que tenga la longitud mínima? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir.

si existe ya que al tener el punto a fijo depende el punto B. el más pequeño seria cuando se forma angulo recto entre el segmento y la recta (cuando es una recta)

4. Selecciona la opción función y modifica el valor de n, ¿qué sucede con la gráfica y con el segmento?

cambia la forma de la figura y esto hace que cambie el segmento.

5. Con el valor de $n = 4$, ¿existe un segmento que tenga la longitud máxima? ¿Por qué? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir.

no porque el punto B esta sobre una linea infinita

6. ¿Existe un segmento que tenga la longitud mínima? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir.

si en cuanto el punto B este lo mas cerca posible del A y que los angulos de ambos lados del segmento con la linea sean lo más similares posibles.

Fase de argumentación (Trabajo en equipo)

7. Compara tus respuestas con las de tus compañeros

8. ¿Qué pueden generalizar respecto la longitud del segmento AB?

no se puede dar una longitud maxima porque una recta es infinita pero si minima, cuando se forma un angulo de 90° con es segmento y la recta.

9. Socializa la(s) conjetura(s) de tu equipo con todos los demás, luego escribe la conclusión final a la que llegas.

no existe una maxima longitud del segmento sobre una funcion pero si hay una minima y se da cuando formamos un angulo parecido a 90° entre el segmento y la funcion.

ETIENNE BEZOUT

Bézout (1730 - 1783) fue un matemático francés nacido en Nemours, en 1973 encabezó la instrucción de la marina real y fue profesor del cuerpo de artillería, donde redactó su famosa obra *Cours de mathématiques à l'usage de la marine et de l'artillerie*. En esta obra compuesta por 6 volúmenes abarca distintas áreas de las matemáticas, como lo son aritmética, geometría, trigonometría, álgebra, cálculo diferencial e integral, aplicaciones de la mecánica y navegación. En el libro cuatro que hace referencia al cálculo diferencial y una sección se denomina problemas de máximos y mínimos, por lo que se han adaptado en applets construidos en GeoGebra y reestructurado en forma de problemas. A continuación, se presenta uno de estos problemas.

PROBLEMA II: CUADRILÁTEROS ISOPERIMÉTRICOS

Nota: Es necesario que escribas todo lo que logres encontrar y las conclusiones a las que llegues.

1. ¿Qué es un cuadrilátero?

un poligono de 4 lados

En GeoGebra sigue las siguientes instrucciones:

2. Construye un cuadrilátero ABCD cualquiera. (con la opción polígono)
3. Encuentra el perímetro del cuadrilátero y su área. (Usando opciones "Distancia o longitud" y "área")
4. Encuentra otros dos cuadriláteros diferentes, que tengan el mismo perímetro.
5. ¿Qué características tienen en común los tres cuadriláteros que has construido?

ninguno es un cuadrado ni un rectangulo, todos tienen por lo menos un lado de longitud con un numero entero

6. ¿Tienen la misma área? ¿Por qué?

no porque las operaciones para sacar el área son distintas.

Abre el archivo "Cuadriláteros Isoperimétricos"

Link: https://www.geogebra.org/m/nsjeuhrx/pe/286187

En esta construcción encontrarás:

- Un cuadrilátero ABCD
- Un deslizador "Lado AD" para modificar la longitud de ese lado del cuadrilátero.
- Un deslizador "Lado AB" para modificar la longitud de ese lado del cuadrilátero.
- Un deslizador "Lado BC" para modificar la longitud de ese lado del cuadrilátero.

7. ¿Qué sucede si mueves el punto A? ¿Cambia el tipo de cuadrilátero?

cuando se mueve el punto A el cuadrilatero se mantiene igual pero cambia la ubicacion del cuadrilatero.

8. ¿Qué sucede si mueves el punto B? ¿Cambia el tipo de cuadrilátero?

cuando se mueve el punto B cambia el sentido del cuadrilatero

9. ¿Qué sucede si mueves el punto D? ¿Cambia el tipo de cuadrilátero?

al mover el punto D si cambia el cuadrilatero y al cambiar este no se modifica el perimetro pero si el area.

10. ¿Existe un cuadrilátero que tenga el área máxima? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir.

si seda cuando lo volvemos un cuadrado al igualar sus lados.

11. ¿Existe un cuadrilátero que tenga el área mínima? ¿Por qué? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir.

no porque un poligono siempre podra ser mas pequeño que otro

Fase de argumentación (Trabajo en equipo)

12. Compara tus respuestas con las de tus compañeros

13. ¿Qué pueden generalizar respecto al área de los cuadriláteros?

____

____

____

____

14. Socializa la(s) conjetura(s) de tu equipo con todos los demás, luego escribe la conclusión final a la que llegas.

____

____

____

____

PROBLEMA III: PENTAGONOS ISOPERIMETRICOS
(PAPPUS DE ALEJANDRIA)

Nota: Es necesario que escribas todo lo que logres encontrar y las conclusiones a las que llegues.

En GeoGebra sigue las siguientes instrucciones:

1. Construye un pentágono ABCDE cualquiera. (con la opción polígono)
2. Encuentra el perímetro del triángulo y su área. (Usando opciones "Distancia o longitud" y "área")
3. Mueve cualquiera de los vértices del polígono.
   ¿Qué cambia? so área, perimetro y dos segmentos
   ¿Qué permanece fijo? los segmentos opuestos
4. Construye otros dos pentágonos diferentes, que tengan el mismo perímetro del pentágono ABCDE. ¿Tienen la misma área? ¿Por qué?
   NO porque al implementar la formula para sacar el area depende de los lados.

Abre el archivo "Pentágonos Isoperimétricos"

Link: https://www.geogebra.org/m/s6eswsvh/pe/286227

En esta construcción encontrarás:

- Un pentágono ABCDE.

5. ¿Existe un pentágono que tenga el área máxima? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir.

si debe convertirse en un pentagono regolar.

6. ¿Existe un pentágono que tenga el área mínima? ¿Por qué? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir.

no existe ya que siempre habra un pentagono mas pequeño.

Fase de argumentación (Trabajo en equipo)

7. Compara tus respuestas con las de tus compañeros
8. ¿Qué pueden generalizar respecto al área de los pentágonos?

9. Socializa la(s) conjetura(s) de tu equipo con todos los demás, luego escribe la conclusión final a la que llegas.

10. Teniendo en cuenta las soluciones dadas a los problemas de triángulos, cuadriláteros y pentágonos isoperimetros, ¿qué puedes concluir respecto al área máxima y mínima de un polígono isoperimétrico?

en los programas dados si es posible encontrar un área maxima pero no se puede dar uno minimo ya que siempre habra uno mas pequeño

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

"PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN A LA LUZ DE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS"
NURY ANDREA RODRÍGUEZ – MARÍA FERNANDA RAMOS
SESIÓN 3. 18/AGOSTO/2018

NOMBRE: Tomás Alejandro Sierra Bernal GRADO: Sexto

JACQUES CHARLES FRANÇOIS STURM

Sturm (1803 - 1855) fue un matemático francés, nacido en Ginebra. En el año 1840 fue nombrado profesor de mecánica de la Facultad de Ciencias de París. Autor de la obra matemática denominada Cours D'Analyse de L'École polytechnique, la cual años más adelante fue utilizada como un manual escolar, está dividida en dos partes que hacen referencia al cálculo diferencial e integral. En una de las lecciones se trabajan algunos problemas de máximos y mínimos como una aplicación del cálculo, por lo que se han adaptado en applets construidos en GeoGebra y reestructurado en forma de problemas. A continuación, se presenta uno de estos problemas.

PROBLEMA I: Cuarta Aplicación

Nota: Es necesario que escribas todo lo que logres encontrar y las conclusiones a las que llegues.

Abre el archivo "Sturm, Cuarta Aplicación"

Link: https://www.geogebra.org/m/mnh2g75a/pe/286229

En esta construcción encontrarás:

- Segmento AB
- Gráfica de una función f(x).
- Un deslizador "Función" para modificar el tipo de función.

1. Mueve el punto B sobre la recta, ¿Qué sucede con el segmento?

Se agranda o se empequeña dependiendo de la distancia entre los puntos, si esta mas lejos más grande y si esta mas cerca mas pequeña.

2. ¿Existe un segmento que tenga la longitud máxima? ¿Por qué? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir.

No debido a que la recta es infinita y se va a poder continuar moviendo el punto B infinitamente para que haya una mayor distancia.

3. ¿Existe un segmento que tenga la longitud mínima? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir.

No existe, porque siempre va a tender a ser cero pero no puede ~~tender~~ a ser cero porque dejaría de ser un segmento, así que sería infinito. -Corrección por atrás de la hoja.

4. Selecciona la opción función y modifica el valor de n, ¿qué sucede con la gráfica y con el segmento?

La recta se transforma cada vez en una curva y va a iniciar a variar la distancia del segmento y longitud

5. Con el valor de $n = 4$, ¿existe un segmento que tenga la longitud máxima? ¿Por qué? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir.

No existe, porque la recta va a continuar siendo infinita

6. ¿Existe un segmento que tenga la longitud mínima? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir.

Fase de argumentación (Trabajo en equipo)

7. Compara tus respuestas con las de tus compañeros

8. ¿Qué pueden generalizar respecto la longitud del segmento AB?

No hay una longitud maxima porque la recta es infinita, pero si hay un punto minimo cuando entre el segmento AB y la función fx hay un angulo de 90°, es decir es perpendicular. O lo más parecido

9. Socializa la(s) conjetura(s) de tu equipo con todos los demás, luego escribe la conclusión final a la que llegas.

En este caso no existe una maxima longitud del segmento y si hay una minima que es entre el segmento AB y un angulo recto en la tangente sobre la función.

ETIENNE BEZOUT

Bézout (1730 - 1783) fue un matemático francés nacido en Nemours, en 1973 encabezó la instrucción de la marina real y fue profesor del cuerpo de artillería, donde redactó su famosa obra *Cours de mathématiques à l'usage de la marine et de l'artillerie*. En esta obra compuesta por 6 volúmenes abarca distintas áreas de las matemáticas, como lo son aritmética, geometría, trigonometría, álgebra, cálculo diferencial e integral, aplicaciones de la mecánica y navegación. En el libro cuatro que hace referencia al cálculo diferencial y una sección se denomina problemas de máximos y mínimos, por lo que se han adaptado en applets construidos en GeoGebra y reestructurado en forma de problemas. A continuación, se presenta uno de estos problemas.

PROBLEMA II: CUADRILÁTEROS ISOPERIMÉTRICOS

Nota: Es necesario que escribas todo lo que logres encontrar y las conclusiones a las que llegues.

1. ¿Qué es un cuadrilátero?

Un poligono de 4 lados

En GeoGebra sigue las siguientes instrucciones:

2. Construye un cuadrilátero ABCD cualquiera. (con la opción polígono)
3. Encuentra el perímetro del cuadrilátero y su área. (Usando opciones "Distancia o longitud" y "área")
4. Encuentra otros dos cuadriláteros diferentes, que tengan el mismo perímetro.
5. ¿Qué características tienen en común los tres cuadriláteros que has construido?

Todos son deforme y no se asimilan a un cuadrado, también todos tienen una forma similar. y son trapezoides

6. ¿Tienen la misma área? ¿Por qué?

No porque la formula del Área es base · Altura y como cada cuadrilatero tiene una base y Altura diferente no sera la misma Área

Abre el archivo "Cuadriláteros Isoperimétricos"

Link: https://www.geogebra.org/m/nsjeuhrx/pe/286187

En esta construcción encontrarás:

- Un cuadrilátero ABCD
- Un deslizador "Lado AD" para modificar la longitud de ese lado del cuadrilátero.
- Un deslizador "Lado AB" para modificar la longitud de ese lado del cuadrilátero.
- Un deslizador "Lado BC" para modificar la longitud de ese lado del cuadrilátero.

7. ¿Qué sucede si mueves el punto A? ¿Cambia el tipo de cuadrilátero?

No cambia, solo se mueve el cuadrilátero, es decir cambia de lugar

8. ¿Qué sucede si mueves el punto B? ¿Cambia el tipo de cuadrilátero?

El cuadrilátero inicia a rotar sobre el punto A sin la necesidad de cambiar su forma.

9. ¿Qué sucede si mueves el punto D? ¿Cambia el tipo de cuadrilátero?

La figura se empieza a inclinar y va a cambiar la forma (el tipo de cuadrilátero) ya que también lo deforma

10. ¿Existe un cuadrilátero que tenga el área máxima? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir.

25.

Si existe pero el lado BC = 5, lado AD = 5 y el lado AB = 5 para que tenga como Área 25.

11. ¿Existe un cuadrilátero que tenga el área mínima? ¿Por qué? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir.

Si existe pero sin embargo tiene o puede tener las mismas medidas el punto D tiene que que estar alineado con A y B, pero recordemos que puede llegar a ser infinito porque siempre tiende a ser cero.

Fase de argumentación (Trabajo en equipo)

12. Compara tus respuestas con las de tus compañeros

13. ¿Qué pueden generalizar respecto al área de los cuadriláteros?

14. Socializa la(s) conjetura(s) de tu equipo con todos los demás, luego escribe la conclusión final a la que llegas.

PROBLEMA III: PENTAGONOS ISOPERIMETRICOS (PAPPUS DE ALEJANDRIA)

Nota: Es necesario que escribas todo lo que logres encontrar y las conclusiones a las que llegues.

En GeoGebra sigue las siguientes instrucciones:

1. Construye un pentágono ABCDE cualquiera. (con la opción polígono)
2. Encuentra el perímetro del triángulo y su área. (Usando opciones "Distancia o longitud" y "área")
3. Mueve cualquiera de los vértices del polígono.

   ¿Qué cambia? El Área y el perimetro, aparte la longitud entre los puntos.

   ¿Qué permanece fijo? No Cambia lo que no esta directamente conectado con el punto que se mueve
4. Construye otros dos pentágonos diferentes, que tengan el mismo perímetro del pentágono ABCDE. ¿Tienen la misma área? ¿Por qué?

   No porque la formula del Área es base · Altura pero tendria que ser parecido a las mismas medidas.

Abre el archivo "Pentágonos Isoperimétricos"

Link: https://www.geogebra.org/m/s6eswsvh/pe/286227

En esta construcción encontrarás:

- Un pentágono ABCDE.

5. ¿Existe un pentágono que tenga el área máxima? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir.

   Si existe y es 49.69 y para que se cumpla debe ser:
   AB = 2 BC = 5.14 CD = 10.26 DE = 5,7 ~~EA~~ EA = 5.9.

6. ¿Existe un pentágono que tenga el área mínima? ¿Por qué? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir.

   Si existe pero como ya lo e. dicho siempre va tender a ser cero pero no puede ser cero.

Fase de argumentación (Trabajo en equipo)

7. Compara tus respuestas con las de tus compañeros
8. ¿Qué pueden generalizar respecto al área de los pentágonos?

9. Socializa la(s) conjetura(s) de tu equipo con todos los demás, luego escribe la conclusión final a la que llegas.

Gabriel Ramirez 11

2. ¿Existe un segmento que tenga la longitud máxima? ¿Por qué? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir.

No existe un segmento con la máximo longitud gracias a que B puede alargarse todo lo que uno desee. Al ser la función f(x) lineal, es infinita.

3. ¿Existe un segmento que tenga la longitud mínima? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir.

Si existe, y el segmento AB con mínimo longitud es aquella que hay cuando B se encuentre más cerca del punto A. Tiene que formarse un ángulo de 90° entre el segmento y la función

4. Selecciona la opción función y modifica el valor de n, ¿qué sucede con la gráfica y con el segmento?

El segmento AB se mantiene, pero la gráfica cambia su grado, es decir, cambia de lineal (n = 1) a cuadrática (n = 2), a cúbica (n = 3), etc.

5. Con el valor de $n = 4$, ¿existe un segmento que tenga la longitud máxima? ¿Por qué? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir.

No existe porque la gráfica, a pesar de ser curva, sigue siendo infinita, así que se extiende de manera infinita (sin encontrar un máximo)

6. ¿Existe un segmento que tenga la longitud mínima? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir.

Si existe, y es el punto de la función que se acerque más al punto A. También tiene que ser lo más perpendicular posible para que se llegue a la longitud mínima.

Fase de argumentación (Trabajo en equipo)

7. Compara tus respuestas con las de tus compañeros

8. ¿Qué pueden generalizar respecto la longitud del segmento AB?

Nunca habrá una longitud máxima gracias a que la longitud f(x) es infinita, pero sí hay un punto mínimo, cuando entre el segmento AB y la función f(x) hay un ángulo de 90°, es decir que es perpendicular. (o lo más parecido)

9. Socializa la(s) conjetura(s) de tu equipo con todos los demás, luego escribe la conclusión final a la que llegas.

• Si el punto de un segmento se encuentra dentro de una función, no existe una máxima longitud del segmento
• Si el segmento AB es perpendicular con la tangente del punto B sobre la función, la longitud del segmento es mínima

ETIENNE BEZOUT

Bézout (1730 - 1783) fue un matemático francés nacido en Nemours, en 1973 encabezó la instrucción de la marina real y fue profesor del cuerpo de artillería, donde redactó su famosa obra *Cours de mathématiques à l'usage de la marine et de l'artillerie*. En esta obra compuesta por 6 volúmenes abarca distintas áreas de las matemáticas, como lo son aritmética, geometría, trigonometría, álgebra, cálculo diferencial e integral, aplicaciones de la mecánica y navegación. En el libro cuatro que hace referencia al cálculo diferencial y una sección se denomina problemas de máximos y mínimos, por lo que se han adaptado en applets construidos en GeoGebra y reestructurado en forma de problemas. A continuación, se presenta uno de estos problemas.

PROBLEMA II: CUADRILÁTEROS ISOPERIMÉTRICOS

Nota: Es necesario que escribas todo lo que logres encontrar y las conclusiones a las que llegues.

1. ¿Qué es un cuadrilátero?

Un cuadrilátero es un polígono (figura cerrada unida por sus vértices) de cuatro lados

En GeoGebra sigue las siguientes instrucciones:

2. Construye un cuadrilátero ABCD cualquiera. (con la opción polígono)
3. Encuentra el perímetro del cuadrilátero y su área. (Usando opciones "Distancia o longitud" y "área")
4. Encuentra otros dos cuadriláteros diferentes, que tengan el mismo perímetro.
5. ¿Qué características tienen en común los tres cuadriláteros que has construido?

Los vértices A de los cuadriláteros crean rectas lineales entre sí. De igual manera sucede con los demás vértices. Cuando se estira verticalmente, se contrae horizontalmente (y viceversa)

6. ¿Tienen la misma área? ¿Por qué?

No, porque las bases y alturas de los rectángulos fueron construidas con diferentes valores.

Abre el archivo "Cuadriláteros Isoperimétricos"

Link: https://www.geogebra.org/m/nsjeuhrx/pe/286187

En esta construcción encontrarás:

- Un cuadrilátero ABCD
- Un deslizador "Lado AD" para modificar la longitud de ese lado del cuadrilátero.
- Un deslizador "Lado AB" para modificar la longitud de ese lado del cuadrilátero.
- Un deslizador "Lado BC" para modificar la longitud de ese lado del cuadrilátero.

7. ¿Qué sucede si mueves el punto A? ¿Cambia el tipo de cuadrilátero?

Se mueve todo el cuadrilátero, pero no cambia el tipo de cuadrilátero.

8. ¿Qué sucede si mueves el punto B? ¿Cambia el tipo de cuadrilátero?

Cuando se mueve B, se rota el cuadrilátero, pero no cambia el tipo de cuadrilátero.

9. ¿Qué sucede si mueves el punto D? ¿Cambia el tipo de cuadrilátero?

23,07
24,56
24,9
24,98
24,99.
25

El cuadrilátero se convierte en un triángulo cuando entra en la "recta" de AB. Sin embargo, su tipo de cuadrilátero cambia constantemente a otros cuadriláteros.

10. ¿Existe un cuadrilátero que tenga el área máxima? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir.

El cuadrilátero con máxima área es un paralelogramo que sea un cuadrado, siempre y cuando su perímetro sea el mismo

11. ¿Existe un cuadrilátero que tenga el área mínima? ¿Por qué? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir.

Fase de argumentación (Trabajo en equipo)

12. Compara tus respuestas con las de tus compañeros

13. ¿Qué pueden generalizar respecto al área de los cuadriláteros?

14. Socializa la(s) conjetura(s) de tu equipo con todos los demás, luego escribe la conclusión final a la que llegas.

PROBLEMA III: PENTAGONOS ISOPERIMETRICOS
(PAPPUS DE ALEJANDRIA)

Nota: Es necesario que escribas todo lo que logres encontrar y las conclusiones a las que llegues.

En GeoGebra sigue las siguientes instrucciones:

1. Construye un pentágono ABCDE cualquiera. (con la opción polígono)
2. Encuentra el perímetro del triángulo y su área. (Usando opciones "Distancia o longitud" y "área")
3. Mueve cualquiera de los vértices del polígono.
   ¿Qué cambia? El área y el perímetro
   ¿Qué permanece fijo? Los demás vértices y sus longitudes con otros que no sean los que moví
4. Construye otros dos pentágonos diferentes, que tengan el mismo perímetro del pentágono ABCDE. ¿Tienen la misma área? ¿Por qué?
   No, puesto que la forma del pentágono, por más que tenga un mismo perímetro, será distinta y abarcará un menor espacio.

Abre el archivo "Pentágonos Isoperimétricos"

Link: https://www.geogebra.org/m/s6eswsvh/pe/286227

En esta construcción encontrarás:

- Un pentágono ABCDE.

5. ¿Existe un pentágono que tenga el área máxima? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir.

Sí existe, y se genera cuando se intenta crear un pentágono regular. Una vez se haya logrado moviendo los puntos E, B y C (manteniendo su perímetro, obviamente), se encontrará el área máxima.

6. ¿Existe un pentágono que tenga el área mínima? ¿Por qué? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir.

No existe, porque para que su área llegara a ser mínima debería llegar a ser una recta. Sin embargo, una recta no cuenta como pentágono y entre un pentágono cualquiera y la recta habrá infinitas áreas cada vez más pequeñas.

Fase de argumentación (Trabajo en equipo)

7. Compara tus respuestas con las de tus compañeros

8. ¿Qué pueden generalizar respecto al área de los pentágonos?

9. Socializa la(s) conjetura(s) de tu equipo con todos los demás, luego escribe la conclusión final a la que llegas.

10. Teniendo en cuenta las soluciones dadas a los problemas de triángulos, cuadriláteros y pentágonos isoperimetros, ¿qué puedes concluir respecto al área máxima y mínima de un polígono isoperimétrico?

El área máxima puede encontrarse gracias a que se encuentra limitada por un polígono, pero el área mínima no puede encontrarse gracias a que nos toparemos con infinitas posibilidades

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

"PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN A LA LUZ DE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS"
NURY ANDREA RODRÍGUEZ – MARÍA FERNANDA RAMOS
SESIÓN 4. 25/AGOSTO/2018

NOMBRE: Maria Catalina casallas **GRADO:** 7°

PROBLEMA I: Proposición 8 del libro III de Euclides

Nota: Es necesario que escribas todo lo que logres encontrar y las conclusiones a las que llegues.

En GeoGebra sigue las siguientes instrucciones:

Fase de construcción

a. Traza una circunferencia con centro en A y radio AB.
b. Ubica un punto C en el exterior de la circunferencia.
c. Selecciona el punto C y fija el punto con la opción "fijar objeto".
d. Oculta el punto B.
e. Traza la recta AC.
f. Construye el punto D, intersección entre la circunferencia y la recta.
g. Oculta la recta AC.
h. Construye el $\overline{DC}$.

1. Mueve el punto D. ¿Qué sucede con la longitud del segmento?

el sgmento cambia su tamaño

Fase de Exploración

2. ¿Existe el segmento DC que tenga la máxima longitud? ¿Por qué? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir este segmento.

Si, Se necesita que el Punto ubicado en la circunferencia se desplace hasta que el segmento atraviesa el punto central

3. ¿Existe el segmento *DC* que tenga la mínima longitud? ¿Por qué? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir este segmento.

Si para lograrlo hay que restarle el tamaño del diametro de esta forma creando un nuevo segmento llamado DE

Fase de argumentación (Trabajo en equipo)

4. Compara tus respuestas con las de tus compañeros

5. ¿Qué pueden generalizar respecto a la longitud del segmento *DC*?

la Mayor longitud del segmento DC se da cuando este pasa por el punto central de la circunferencia dentro del segmento

6. Socializa la(s) conjetura(s) de tu equipo con todos los demás, luego escribe la conclusión final a la que llegas.

PROBLEMA II: Proposición 73 del libro VII de Pappus

Nota: Es necesario que escribas todo lo que logres encontrar y las conclusiones a las que llegues.

En GeoGebra sigue las siguientes instrucciones:

Fase de construcción

a. Construye una semirrecta AB.
b. Traza una circunferencia con centro en A y radio AB.
c. Ubica un punto F sobre la recta AB.
d. Ubica un punto T sobre la circunferencia.
e. Construye la cuerda BT.
f. Traza el segmento AT.
g. Ubica el punto M sobre BT, de tal manera que $BM = MT$.
h. Construye la semirrecta FM.
i. Construir punto G, intersección entre $\overline{FM}$ y $\overline{AT}$.
j. Oculta las semirrectas $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{FM}$ y la circunferencia.
k. Traza el segmento FG. Cámbiale el color.

1. Mueve el punto F. ¿Qué sucede con la longitud del segmento?

Cambia

2. Mueve el punto G. ¿Qué sucede con la longitud del segmento?

se queda quieto

Fase de Exploración

3. ¿Existe el segmento FG que tenga la máxima longitud? ¿Por qué? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir este segmento.

No, ya que el punto F esta sobre la recta AB y siempre la podemos agrandar más porque una recta es infinita

4. ¿Existe el segmento FG que tenga la mínima longitud? ¿Por qué? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir este segmento.

Si, Se forma cuando creamos una cuerda en la circunferencia AB

Fase de argumentación (Trabajo en equipo)

5. Compara tus respuestas con las de tus compañeros
6. ¿Qué pueden generalizar respecto a la longitud del segmento FG?

7. Socializa la(s) conjetura(s) de tu equipo con todos los demás, luego escribe la conclusión final a la que llegas.

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

"PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN A LA LUZ DE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS"
NURY ANDREA RODRÍGUEZ – MARÍA FERNANDA RAMOS
SESIÓN 4. 25/AGOSTO/2018

NOMBRE: Andres muñoz **GRADO:** 6to

PROBLEMA I: Proposición 8 del libro III de Euclides

Nota: Es necesario que escribas todo lo que logres encontrar y las conclusiones a las que llegues.

En GeoGebra sigue las siguientes instrucciones:

Fase de construcción

a. Traza una circunferencia con centro en A y radio AB.
b. Ubica un punto C en el exterior de la circunferencia.
c. Selecciona el punto C y fija el punto con la opción "fijar objeto".
d. Oculta el punto B.
e. Traza la recta AC.
f. Construye el punto D, intersección entre la circunferencia y la recta.
g. Oculta la recta AC.
h. Construye el $\overline{DC}$.

1. Mueve el punto D. ¿Qué sucede con la longitud del segmento?

El segmento cambia de Tamaño

Fase de Exploración

2. ¿Existe el segmento DC que tenga la máxima longitud? ¿Por qué? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir este segmento.

Si existe a la conclusion que llegue fue que el segmento DC es un diametro con longitud de 0,66 pasando por el Punto A

3. ¿Existe el segmento DC que tenga la mínima longitud? ¿Por qué? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir este segmento.

sí existe una menor longitud ya que al $\overline{DE}$ es el resultado de la division del Diametro del $\overline{DC}$ generando la menor longitud en este caso 1.4 se puede comprobar moviendo el •C para generar la menor longitud.

Fase de argumentación (Trabajo en equipo)

4. Compara tus respuestas con las de tus compañeros

5. ¿Qué pueden generalizar respecto a la longitud del segmento DC?

6. Socializa la(s) conjetura(s) de tu equipo con todos los demás, luego escribe la conclusión final a la que llegas.

PROBLEMA II: Proposición 73 del libro VII de Pappus

Nota: Es necesario que escribas todo lo que logres encontrar y las conclusiones a las que llegues.

En GeoGebra sigue las siguientes instrucciones:

Fase de construcción

a. Construye una semirrecta AB.

b. Traza una circunferencia con centro en A y radio AB.

c. Ubica un punto F sobre la recta AB.

d. Ubica un punto T sobre la circunferencia.

e. Construye la cuerda BT.

f. Traza el segmento AT.

g. Ubica el punto M sobre BT, de tal manera que $BM = MT$.

h. Construye la semirrecta FM.

i. Construir punto G, intersección entre $\overline{FM}$ y $\overline{AT}$.

j. Oculta las semirrectas $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{FM}$ y la circunferencia.

k. Traza el segmento FG. Cámbiale el color.

1. Mueve el punto F. ¿Qué sucede con la longitud del segmento?

   El segmento Cambia

2. Mueve el punto G. ¿Qué sucede con la longitud del segmento?

   El segmento se queda quieto.

Fase de Exploración

3. ¿Existe el segmento FG que tenga la máxima longitud? ¿Por qué? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir este segmento.

   No Tiene longitud Maxima por que la ~~RECTA~~ es infinita

4. ¿Existe el segmento FG que tenga la mínima longitud? ¿Por qué? Si existe, menciona qué condiciones debe cumplir este segmento.

sí. es el que mide 5.42 que se genera un Δ isoceles

Fase de argumentación (Trabajo en equipo)

5. Compara tus respuestas con las de tus compañeros
6. ¿Qué pueden generalizar respecto a la longitud del segmento FG?

7. Socializa la(s) conjetura(s) de tu equipo con todos los demás, luego escribe la conclusión final a la que llegas.