



**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA  
NACIONAL**

*Educadora de educadores*

**ANÁLISIS GEOMÉTRICO DEL CAMPO  
GRAVITACIONAL CLÁSICO MEDIANTE EL USO  
ANALOGÍAS ENTRE VECTORES Y FORMAS  
DIFERENCIALES.**

Dayron Javier Agudelo Jiménez

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL.

Facultad de ciencia y tecnología

Departamento de física

Colombia, Bogotá D.C



ANÁLISIS GEOMÉTRICO DEL CAMPO GRAVITACIONAL CLÁSICO  
MEDIANTE EL USO DE ANALOGÍAS ENTRE VECTORES Y  
FORMAS DIFERENCIALES.

Dayron Javier Agudelo Jiménez

**Director:**

Msc Yesid Javier Cruz Bonilla

Linea de profundización:

*La enseñanza de la física y su relación físico-matemática*

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL.

Facultad de ciencia y tecnología

Departamento de física

Colombia, Bogotá D.C

Noviembre de 2018

*A Él por ser la luz de mi  
camino.*

*Al abuelo que se fue y no me vio  
en concierto.*

*A mis papas y mi hermano por  
el inefable amor...*

---

Él les dijo: ¿Por qué teméis  
hombres de poca fe? Entonces,  
levantándose, reprendió a los  
vientos y el mar; y se hizo  
grandes en bonanza

---

Mateo 8: 26

Así que cualquiera que se  
humille como este niño, ése es el  
mayor en el reino de los cielos

---


Mateo 18:4

## Agradecimientos

Deseo expresar mi agradecimiento a la Universidad Pedagógica Nacional y en especial al departamento de física por acogerme, formarme y apoyarme a lo largo de este camino. A los profesores por cada una de las charlas y las enseñanzas. A los docentes Yesid Cruz e Ignacio Monroy por sus aportes para la construcción y desarrollo de la presente monografía.

De igual manera, agradezco a mi familia por cada uno de los esfuerzos realizados para culminar este proceso, por la paciencia, la ternura y el apoyo incondicional. A Camila, por enseñarme el valor de la amistad. A Miguel, por los consejos y por los infinitos aportes a lo largo de la pregrado.


Agradezco a todos y cada uno de los compañeros y profesores que aportaron de una u otra manera...GRACIAS TOTALES.

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>República de Colombia</small>	<b>FORMATO</b>	
	<b>RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE</b>	
<b>Código: FOR020GIB</b>	<b>Versión: 01</b>	
<b>Fecha de Aprobación: 10-10-2012</b>	<b>Página 1 de 4</b>	

<b>1. Información General</b>	
<b>Tipo de documento</b>	Trabajo de grado
<b>Acceso al documento</b>	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
<b>Título del documento</b>	Análisis geométrico del campo gravitacional clásico mediante el uso analogías entre vectores y formas diferenciales.
<b>Autor(es)</b>	Agudelo Jiménez, Dayron Javier
<b>Director</b>	Cruz, Yesid
<b>Publicación</b>	Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional, 2018, 64 p.
<b>Unidad Patrocinante</b>	Universidad Pedagógica Nacional
<b>Palabras Claves</b>	FORMAS DIFERENCIALES, VECTORES, TEORÍA DE CAMPOS, GRAVITACIÓN CLÁSICA.

<b>2. Descripción</b>
<p>El presente trabajo de grado pretende realizar una reflexión acerca de la relación entre geometría - física, y su importancia en la interpretación de fenómenos físicos. Por tal motivo, el trabajo en mención pretende realizar una representación alternativa al campo gravitacional clásico mediante el uso de las formas diferenciales, resaltando el amplio potencial geométrico de las mismas. Para el desarrollo de esta reflexión el autor realiza una contextualización historia de la ley de gravitación universal, en ella se reconocen los cambios conceptuales suscitados a lo largo de los siglos XVI y XVII. Posterior a esto, se realiza un formulación rigurosa de las formas diferenciales y su relación con el cálculo vectorial, siendo las formas diferenciales una generalización de este último. Finalmente, el autor muestra los resultados de la teoría clásica de campos aplicada al caso de la gravitación, realizado un paralelo entre la representación vectorial y la representación a partir de las formas diferenciales.</p>

<b>3. Fuentes</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Alonso, M. and Finn, E. (1970). <i>Física Volumen 1 Mecánica</i>. México: Fondo Educativo Interamericano.</li> <li>- Apóstol, T. M. (1973). <i>Calculo con funciones de varias variables y algebra lineal, con aplicaciones a las ecuaciones diferenciales y las probabilidades-</i>. Reverte.</li> <li>- Barragán Parra, J. (2005). Presentación de la mecánica Hamiltoniana con formas diferenciales, estudio de caso: péndulo esférico. <i>Universidad Pedagógica Nacional</i>.</li> <li>- Chao Rebolledo, C. and Díaz Barriga Arceo, F. (2014). Análisis comparativo del aprendizaje de los conceptos de calor y temperatura utilizando una simulación digital interactiva y un texto ilustrado. <i>Revista electrónica de investigación en educación en ciencias</i>,</li> <li>- Euler, L. and Pérez, C. M. (1990). <i>Cartas a una princesa de Alemania sobre diversos temas de Física y Filosofía</i>, volumen 4. Universidad de Zaragoza.</li> <li>- Feynman, R. P., Leighton, R. B., and Sands, M. (1963). <i>The Feynman lectures on physics, Vol. I: The new millennium edition: mainly mechanics, radiation, and heat</i>, volume 1. Addison-Wesley Publishing.</li> </ul>

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>República de Colombia</small>	<b>FORMATO</b>	
	<b>RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE</b>	
<b>Código: FOR020GIB</b>	<b>Versión: 01</b>	
<b>Fecha de Aprobación: 10-10-2012</b>	<b>Página 2 de 4</b>	


- Flanders, H. (1963). *Differential Forms with Applications to the Physical Sciences by Harley Flanders*, volume 11. Elsevier.
- Garay, F. R. (2011). Perspectivas de historia y contexto cultural en la enseñanza de las ciencias: discusiones para los procesos de enseñanza y aprendizaje. *Ciencia & Educación*,
- Granés, J. (2005). *Isaac Newton: obra y contexto: una introducción*. Univ. Nacional de Colombia.
- Grossman, S. I. (1996). *Algebra lineal*. McGraw-hill.
- Hacyan, S. (2012). *Los hoyos negros y la curvatura del espacio tiempo*. Fondo de Cultura Económica.
- Hawking, S. (2010). *Historia del tiempo. Del big bang a los agujeros negros*. Espasa.
- Hayt, W. H., Buck, J. A., and Pedraza, C. R. C. (2006). *Teoría electromagnética*. McGraw-Hill.
- Holton, G. J. and Brush, S. G. (1996). *Introducción a los conceptos y teorías de las ciencias físicas*. Reverte
- Malakhaltsev, M. and Artega Bejarano, J. R. (2013). *Calculo vectorial*. Cengage Learning Editores, primera edition.
- Marsden, J. E., Tromba, A. J., and Muñiz, P. C. (1991). *Cálculo vectorial*, volume 69. AddisonWesley Iberoamericana.
- Misner, C. W., Thorne, K. S., and Wheeler, J. A. (1973). *Gravitation*. Princeton University Press.
- Pacheco Sarmiento, E. (2016). Interpretación geométrica desde las formas diferenciales: ecuación de continuidad y ecuación de vorticidad. *Universidad Pedagógica Nacional*.
- Peña Moreno, R. (2008). Contextualización de las ecuaciones de maxwell empleando formas diferenciales. *Universidad Pedagógica Nacional*.
- Sagan, C. (1980). *Cosmos*. Planeta Pub Corp.
- Stewart, I. (2015). 17 ecuaciones que cambian el mundo
- Stewart, J. (2008). *Calculo de varias variables. Trascendentes tempranas*. Cengage Learning.
- Tejeiro, J. M. (2005). *Apuntes de relatividad general*. Universidad Nacional de Colombia, primera edition.
- Vélez, F. (2012). *Apuntes de Relatividad*. Universidad Pedagógica Nacional.
- Warnick, K. F., Selfridge, R. H., and Arnold, D. V. (1997). Teaching electromagnetic field theory using differential forms. *IEEE Transactions on education*, 40(1):53-68.
- Young, H., Freedman, R., Sears, F., and Zemansky, M. (2009). Física universitaria, vol. 2. *México DF: Pearson*.

#### 4. Contenidos

El presente trabajo de grado cuenta con tres capítulos.

##### 1. Aproximación historia al concepto de gravitación universal clásica.

A lo largo del primer capítulo se realiza una descripción histórica de los sistemas planetarios a lo largo de la historia y del concepto de gravitación clásica. En este orden de ideas se recogen las ideas desde Aristóteles hasta Newton, teniendo en cuenta el principio de continuidad en cada una de los aportes realizados por los diferentes pensadores. Por otro lado, en este capítulo también se evidencia el desarrollo del campo gravitacional, y en sentido riguroso se establece la fuerza gravitacional, permitiendo así realizar una distinción entre lo que se entiende por masa y peso.

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>República de Colombia</small>	<b>FORMATO</b>	
	<b>RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE</b>	
<b>Código: FOR020GIB</b>	<b>Versión: 01</b>	
<b>Fecha de Aprobación: 10-10-2012</b>	<b>Página 3 de 4</b>	

## 2. Introducción a las formas diferenciales.

A lo largo del segundo capítulo se estructuran las formas diferenciales. En este orden de ideas se desarrollan algunos conceptos básicos como los campos vectoriales y las transformaciones lineales. Posterior a esto, se estructura el espacio vectorial dual y con esto se formulan las formas diferenciales. Finalmente, se estructuran las operaciones entre formas diferenciales y se realizan las generalizaciones del cálculo vectorial a partir del álgebra de formas diferenciales. A lo largo de este capítulo se presente resaltar algunos aspectos geométricos propios de las formas diferenciales, por tal motivo es usual encontrar un paralelo entre los vectores y las formas diferenciales al momento de mostrar los teoremas diferenciales e integrales propios del cálculo vectorial

## 3. Análisis geométrico del campo gravitacional


A lo largo del tercer capítulo se realizan la construcción de la ley de gravitación y la teoría de campos para la gravitación en formas diferenciales. Para esto, se realiza una interpretación geométrica de las leyes de Kepler, dichas leyes permiten reconstruir la *ley de gravitación universal*. A partir de dicha ley, se desarrolla la teoría clásica de campos para la gravitación a partir de las ideas del cálculo vectorial. Finalmente, se estructura la teoría de campos para la gravitación desde el lenguaje de las formas diferenciales, realizando una representación gráfica en dicho lenguaje y resaltando el potencial de tales representaciones para la comprensión de la idea de campo.

## 5. Metodología

Finalmente, la metodología de investigación usada para el desarrollo de la presente monografía es de carácter *deductivo*. De acuerdo con lo anterior, el autor recopila información acerca de las formas diferenciales, y explica tales objetos matemáticos mediante analogías con el cálculo vectorial. Posterior a esto, compara los dos objetos geométricos en estudio, en sus representaciones geométricas y algebraicas, con el propósito de estructurar la teoría de campos aplicada a la gravitación mediante una analogía de los dos lenguajes. De esta manera el autor pretende resaltar dos aspectos importantes de tal proceso investigativo; el primero, lo compacto de la notación en formas diferenciales para el análisis de campos y el segundo, el potencial de tal en su representación geométrica a partir de superficies orientadas.

## 6. Conclusiones

- a) En primer lugar es posible reconocer el principio de continuidad en la historia de las ciencias. En este orden de ideas, se evidencia como a lo largo de la historia es posible transitar desde un sistema planetario geocéntrico hacia un sistema heliocéntrico, reconociendo los postulados propuestos por diferentes pensadores y las relaciones entre dichos postulados. De acuerdo con lo anterior, es posible evidenciar como el modelo heliocéntrico se estructura a partir de la continua modificación de las diferentes hipótesis propuestas por pensadores previos a Newton, y como este último es quien propone una solución al problema del movimiento de los cuerpos bajo la acción de una fuerza central.
- b) En segundo lugar, resulta posible evidenciar como algunos pensadores post-Newtonianos caracterizan el campo gravitacional a partir del reconocimiento de la ley de gravitación

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>República de Colombia</small>	<b>FORMATO</b>	
	<b>RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE</b>	
<b>Código: FOR020GIB</b>	<b>Versión: 01</b>	
<b>Fecha de Aprobación: 10-10-2012</b>	<b>Página 4 de 4</b>	

universal. De acuerdo con lo anterior, es evidente el proceso de continuidad mencionado anteriormente. Además, resulta posible mencionar que mediante los barridos históricos es posible caracterizar y conceptualizar las síntesis físico-matemáticas que usualmente se transmiten en la enseñanza de la ciencia.

- c) En tercer lugar, es importante inferir el potencial geométrico de las formas diferenciales para la representación físico-geométrica de un fenómeno particular. De acuerdo con esto, las formas diferenciales pueden ser superficies apiladas y orientadas en una dirección, o formar tubos por donde se puede pensar que “fluyen” campos. Tales representaciones contribuyen a estructurar una representación, diferente a la vectorial, de los fenómenos físicos, donde las superficies orientadas podrían incentivar en el lector una comprensión tridimensional de los fenómenos físicos en estudio.
- d) En cuarto lugar, al realizar un análisis geométrico de la gravitación clásica, es importante reconocer la importancia de la geometría en la estructuración de las leyes de Kepler y en la misma ley de gravitación universal. En este orden de ideas, para comprender de una manera más sutil algunas leyes físicas es importante atribuirle un carácter geométrico a las mismas. Por otro lado, el carácter vectorial es adecuado para la representación de las ideas de campo, sin embargo, es posible recurrir a otras formas de representación con características diferentes, que contribuyan a una comprensión espacial de los fenómenos.
- e) En quinto lugar es importante destacar que no todas las ecuaciones son susceptibles de una representación geométrica. En este orden de ideas, el rotacional de un campo conservativo en el lenguaje de las formas diferenciales o en el lenguaje vectorial carece de representación geométrica. Sin embargo de acuerdo con el análisis algebraico realizado sobre dicho operador es posible constatar la conservación del campo a partir de los resultados obtenidos.

<b>Elaborado por:</b>	Agudelo Jiménez, Dayron Javier
<b>Revisado por:</b>	Cruz Yesid.

<b>Fecha de elaboración del Resumen:</b>	26	11	2018
--	----	----	------

# Índice general

<b>Presentación</b>	<b>9</b>
<b>1. Caracterización de la gravitación desde una perspectiva histórica</b>	<b>12</b>
1.1. De Aristoteles a Newton: El inicio de una revolución . . . . .	13
1.2. Campo gravitacional: Aproximación histórica y características . . . . .	17
<b>2. Introducción a las formas diferenciales</b>	<b>22</b>
2.1. Espacios vectoriales . . . . .	24
2.2. Transformaciones lineales y espacios duales . . . . .	27
2.2.1. Espacios Vectoriales Duales . . . . .	28
2.3. Formas Diferenciales en $\mathbb{R}^3$ . . . . .	29
2.3.1. Uno-formas diferenciales . . . . .	30
2.3.2. Dos-formas diferenciales . . . . .	33
2.3.3. Tres-forma diferencial . . . . .	33
2.4. Operadores sobre formas diferenciales . . . . .	34
2.4.1. Producto Exterior . . . . .	34
2.4.2. Derivada Exterior . . . . .	35
2.4.3. Operadores vectoriales desde las formas diferenciales . . . . .	35
2.4.4. Operador Pull-Back . . . . .	41
2.4.5. Operador Hodge Star . . . . .	41
2.5. Teoremas de integración en formas diferenciales . . . . .	42
2.5.1. Teorema de Stokes . . . . .	42
2.5.2. Teorema de la divergencia . . . . .	42
<b>3. Análisis geométrico del campo gravitacional</b>	<b>44</b>
3.1. Reconstrucción de la ley de gravitación universal . . . . .	44
3.1.1. Deducción de la velocidad y la aceleración en coordenadas polares . . . . .	45
3.1.2. Matematización de los principios de Kepler . . . . .	46
3.1.3. Deducción de la ley de gravitación universal . . . . .	48
3.2. Teoría de clásica de campo gravitacional en forma vectorial . . . . .	49
3.3. Teoría clásica de campo gravitacional desde las formas diferenciales . . . . .	55
3.3.1. Teoría de campos desde las formas diferenciales . . . . .	55

---

<b>Conclusiones</b>	<b>62</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>63</b>
<b>Anexo 1</b>	<b>64</b>
Teorema de representación de Ritz . . . . .	65
Suma de uno formas diferenciales. . . . .	66
Propiedades del producto exterior sobre k-formas diferenciales. . . . .	67
Propiedades de las derivada exterior sobre k-formas diferenciales. . . . .	69
Operadores diferenciales. . . . .	71
Propiedades del pullback sobre k-formas diferenciales . . . . .	72
Integrales sobre formas . . . . .	74
<b>Anexo 2</b>	<b>76</b>
Deducción de la ley de gravitación clásica . . . . .	77
Deducción del gradiente en coordendas esfericas. . . . .	80
Deducción del rotacional de un gradiente en coordendas esfericas. . . . .	80
Demostracion del laplaciano en coordenadas esfericas. . . . .	81

# Índice de figuras

1.1.	Concepción de las antípodas. Tomado de Euler and Pérez (1990) . . . . .	19
1.2.	Lineas de caída de los cuerpos. Tomado de Euler and Pérez (1990) . . . . .	20
1.3.	Nociones acerca del campo gravitacional. Tomado de Euler and Pérez (1990) . . . . .	20
2.1.	Representación de los vectores velocidad para el flujo de un liquido en una tubería. Tomado y adaptado de Malakhaltsev and Artega Bejarano, 2013 . . . . .	23
2.2.	Representación geometrica de la independencia lineal.Elaboración propia Reproducido en Corel Draw X7 . . . . .	25
2.3.	Representación de los vectores base y de la combinación lineal de vectores base en forma de paralelepípedo. Elaboración propia. Reproducido en Corel Draw X7 . . . . .	26
2.4.	Campo Vectorial para la función $\mathbf{F}(x, y) = \text{Sin}(xy)\hat{i} + \text{Cos}(xy)\hat{j}$ . Elaboración propia. Reproducido en Wolfram Mathematica 11 . . . . .	27
2.5.	Representación del plano tangente y del plano cotangente. Elaboración propia. Reproducido en Corel Draw X7. . . . .	29
2.6.	Representación de uno formas de la función $\omega(p) = \sum (x^2 + c) dz$ . Elaboración propias. Reproducido en MatLab. . . . .	31
2.7.	Representación geometrica de la suma de formas diferenciales. Tomado y adaptado de Misner et al. (1973) . . . . .	31
2.8.	Representación geométrica de la intersección entre superficies orientadas a lo largo de los ejes dy y dz, generan tubos en la dirección de dx. Tomado de Misner et al. (1973) . . . . .	33
2.9.	Representación geométrica de una triple intersección entre superficies orientadas a lo largo de dx, dy, dz.Tomado de Warnick et al. (1997) . . . . .	34
2.10.	Orientación del producto cuña de acuerdo a la simetría o antisimetría de los diferenciales.Elaboración Propia. Reproducido en Corel Draw X7 . . . . .	35
2.11.	Diagrama para la deducción del gradiente a partir de una función escalar o cero formas	36
2.12.	Diagrama para la deducción del rotacional y la divergencia a partir de uno formas y dos formas . . . . .	36
2.13.	Representación vectorial del gradiente.Elaboración propia. Reproducido en Matlab .	37
2.14.	Representacion del gradiente a partir de las formas diferenciales. Elaboración Propia. Reproducido en Matlab . . . . .	38

---

2.15. Representación vectorial del rotacional. Elaboración propia. Reproducido en Wolfram Mathematica . . . . .	39
2.16. Representación gráfica del rotacional en formas diferenciales. Tomado y modificado de Warnick et al. (1997) . . . . .	39
2.17. Divergencia del campo $\vec{F} = x+0,5\hat{i}+y+0,5\hat{j}+z+0,5\hat{k}$ sobre una superficie cilíndrica. Elaboración propia. Reproducido en Wolfram Mathematica 11 . . . . .	40
2.18. Representacion de la divergencia en formas diferenciales, coordenadas cartesianas. Elaboración propia. Reproducido en Wolfram Mathematica 11 . . . . .	40
2.19. Representación geometrica del operador Pull-Back. Tomado de Warnick et al. (1997)	41
2.20. Representación geometrica del teorema de Stokes, Tomado de Warnick et al. (1997)	42
2.21. Representación geometrica del teorema de la divergencia Tomado de Warnick et al. (1997) . . . . .	43
3.1. Condiciones para convertir la elipse de coordenadas cartesianas a polares.Elaboración propia. Reproducida en Corel Draw X7 . . . . .	46
3.2. Conservación del momentum angular mediante tubos constantes.Elaboración Propia. Reproducida en Corel Draw X7 . . . . .	48
3.3. Trabajo en un campo gravitacional. Tomado y modificado de Young et al. (2009) . .	50
3.4. Campo gravitacional para un planeta esférico. Elaboración propia. Reproducido en Wolfram Mathematica 11. . . . .	52
3.5. Teorema de Gauss aplicado a la gravitación. Elaboración propia. Reproducido en Corel Draw X7 . . . . .	53
3.6. Representacion del campo gravitacional con una superficie encerrada. lejos de cero, el potencial tiende a cero, mientras que en el cero el potencial tiende al infinito. Elaboración propia. Reproducido en Wolfram Mathematica 11 . . . . .	54
3.7. Representacion geometrica de la integral de trabajo para la uno-forma $\mathbb{F}_g^*$ . Elaboración propia. Reproducido en Wolfram Mathematica 11 . . . . .	56
3.8. Representacion de la uno-forma $d_{(\rho,\theta,\varphi)}\phi$ que muestra el campo gravitacional en un planeta con simetría esférica. Elaboración propia. Reproducido en Wolfram Alpha 11	57
3.9. Representacion gráfica de la ecuación $^*d_{(\rho,\theta,\varphi)}\phi$ . Elaboración propia. Reproducido en Wolfram Alpha 11 . . . . .	58
3.10. Relación entre las dos formas y el campo gravitacional vectorial. Elaboración propia. Reproducido en Wolfram Alpha 11 . . . . .	59
3.11. Teorema de la divergencia en formas. Elaboración propia. Reproducido en Wolfram Alpha 11 . . . . .	61
3.12. Representación geometrica de las integrales de uno-forma . . . . .	75
3.13. Representación geometrica de las integrales de dos-formas . . . . .	76

# Presentación

El presente trabajo de grado titulado “*Análisis geométrico del campo gravitacional clásico mediante el uso de analogías entre vectores y formas diferenciales*” tiene como propósito representar desde una perspectiva geométrica el concepto de campo gravitacional clásico, empleando en primer lugar vectores y en segundo lugar formas diferenciales. De acuerdo con esto, el autor pretende comparar las representaciones geométricas y los resultados algebraicos de los objetos geométricos en mención, con la finalidad de resaltar el amplio potencial geométrico de las formas diferenciales y como tales representaciones son congruentes con las características de campo enunciadas por filósofos de la naturaleza entre los siglos XVI y XVII. No obstante, en la presente investigación también se pretende sugerir que las representaciones gráficas resultado del análisis mediante formas diferenciales pueden ser una alternativa para la enseñanza de campo, ya que dichos objetos geométricos implican el uso de superficies tridimensionales, convirtiéndose así en “prótesis sensoriales que permiten representar procesos que escapan de la percepción natural, y por lo tanto ayudan a ampliar las capacidades perceptuales y cognitivas a través de una acción de mediación” (Chao Rebolledo and Díaz Barriga Arceo, 2014, p.41).

Esta monografía de grado se enmarca en la línea de investigación “*la enseñanza de la física y su relación físico-matemática*” de la Licenciatura en física de la Universidad Pedagógica Nacional, pues la problemática expuesta tiene su origen en las discusiones realizadas a lo largo de los seminarios que ofrece dicha línea de investigación. Vale la pena resaltar que en el marco local existen algunas investigaciones realizadas en torno a las formas diferenciales, donde se resalta la relación física – geometría y que en cierto grado aportan a la presente monografía. Dichas investigaciones se exponen a continuación:

En primer lugar es posible mencionar el trabajo de Peña Moreno (2008), en dicha investigación se realiza un análisis geométrico de las ecuaciones de Maxwell para el electromagnetismo mediante el uso de formas diferenciales. De esta manera, el autor propone recontextualizar tales ecuaciones desde las representaciones geométricas construidas mediante las formas diferenciales, resaltando la importancia de las mismas para acercar al estudiante a los conceptos de intensidad, flujo y densidad, propios del electromagnetismo. Tal monografía aporta a la presente investigación en cuanto a la interpretación de ecuaciones físicas en formas diferenciales.

En segundo lugar se resalta el trabajo de Barragan Parra (2005). Dicha monografía presenta el

---

estudio del péndulo esférico a partir de la relación entre mecánica Hamiltoniana y formas diferenciales. En consecuencia, los resultados obtenidos a lo largo de este proceso de formalización permiten describir el sistema mecánico en estudio mediante formas diferenciales, ampliando así la información y la comprensión del sistema en mención.

Finalmente, se destaca el trabajo de Pacheco Sarmiento (2016). En este trabajo el autor realiza un estudio de la mecánica de fluidos mediante formas diferenciales. Para desarrollar dicho propósito, el autor interpreta las ecuaciones de continuidad y vorticidad a partir del formalismo en mención. A lo largo de dicha investigación es evidente que el autor en primer lugar caracteriza las formas diferenciales, luego de esto aplica dichos objetos sobre las ecuaciones en mención. Como resultado de lo anterior el autor resalta el potencial geométrico de las formas diferenciales para la representación de las ecuaciones de vorticidad y continuidad.

De acuerdo con lo anterior, el lector podrá evidenciar hasta el momento, en el marco local no se ha realizado una monografía de investigación orientada a la interpretación geométrica del campo gravitacional a partir de la comparación entre las ideas vectoriales y las ideas de formas diferenciales. Por tal motivo la presente monografía pretende responder a la siguiente pregunta.

*¿De qué manera un análisis geométrico del campo gravitacional Newtoniano a partir de la comparación entre formas diferenciales y vectores, permite formular sugerencias para una comprensión alternativa del concepto de campo gravitacional clásico en cuerpos celestes con simetría esférica?*

Para responder tal pregunta de investigación se establece como objetivo general:

- Comparar las representaciones geométricas del campo gravitacional clásico generadas por los vectores y por las formas diferenciales.

Dicho objetivo general será desarrollado mediante los siguientes objetivos específicos:

- Caracterizar las ideas clásicas de gravitación y la estructuración del modelo planetario heliocéntrico a partir de un estudio historiográfico.
- Explicar el lenguaje de las formas diferenciales mediante analogías con el cálculo vectorial, contrastando y resaltando el potencial geométrico de ambos lenguajes geométricos.
- Interpretar desde la teoría clásica de campos la ley de gravitación universal mediante una perspectiva geométrica, de esta manera será posible establecer diferencias y semejanzas entre las representaciones vectoriales y las representaciones generadas mediante formas diferenciales.
- Explicar las representaciones geométricas generadas mediante formas diferenciales con el propósito de realizar algunas sugerencias para la enseñanza del concepto de campo.

---

Finalmente, la metodología de investigación usada para el desarrollo de la presente monografía es de carácter *deductivo*. De acuerdo con lo anterior, el autor recopila información acerca de las formas diferenciales, y explica tales objetos matemáticos mediante analogías con el cálculo vectorial. Posterior a esto, compara los dos objetos geométricos en estudio, en sus representaciones geométricas y algebraicas, con el propósito de estructurar la teoría de campos aplicada a la gravitación mediante una analogía de los dos lenguajes. De esta manera el autor pretende resaltar dos aspectos importantes de tal proceso investigativo; el primero, lo compacto de la notación en formas diferenciales para el análisis de campos y el segundo, el potencial de tal en su representación geométrica a partir de superficies orientadas.

# Capítulo 1

## Caracterización de la gravitación desde una perspectiva histórica

Para el 340 a.C, los griegos habían establecido un modelo planetario el cual pretendía explicar el movimiento de todos los cuerpos celestes. En su libro *De los cielos* el filósofo griego Aristóteles exponía el primer modelo planetario riguroso, en este la tierra se encontraba en el centro y los demás cuerpos celestes orbitaban alrededor de este en esferas concéntricas a la tierra (Hawking, 2010).

No obstante, este no es el principio de la observación astronómica. De acuerdo con Sagan (1980), es posible observar que los primeros pobladores de la tierra realizaron los primeros registros de la bóveda celestes. Tales registros en principio contribuyeron al desarrollo de la agricultura, pues las primeras civilizaciones registraron recurrentemente la posición de los astros en las diferentes épocas del año, de esta manera lograron establecer cuando sembrar y cuando cosechar de manera pertinente. Posteriormente, mediante las observaciones celestes los primeros pobladores establecieron una conexión mitológica con cielo atribuyéndole características particulares a los diversos fenómenos celestes y encontrando en estos un canal de comunicación entre los habitantes de la tierra y las diversas deidades a quienes rendían culto.

Ahora bien, para el propósito de caracterizar algunos aspectos de la gravitación desde la historia, es necesario definir el sistema planetario de Aristóteles como el punto de partida del presente estudio Granés (2005). De esta manera es posible observar que de acuerdo con autores como Holton and Brush (1996) ; Jammer (1999) ; Sagan (1980), el modelo Aristotélico ha sufrido reformas a lo largo de la historia de las ciencias, siendo en un principio geocentrista y convirtiéndose al final en un modelo heliocentrista. En el cambio conceptual mencionado anteriormente existe una pieza angular para este proceso, esta es la ley de gravitación universal desarrollada por Isaac Newton entre 1666 y 1687. De acuerdo con esto, la idea del presente capítulo es estudiar historiográficamente como se estructura la ley de gravitación teniendo en cuenta los pensadores pre-Newtonianos, es decir reconocer los aportes realizados por filósofos de la naturaleza previos a Newton. Luego, se buscara resaltar las características más importantes de dicha ley, pues tales características serán necesarias

para estructurar el modelo matemático que se trabajara en un capítulo posterior. Finalmente, se buscara establecer algunas características a la idea de campo gravitacional siguiendo esta línea historiográfica, pues dicho concepto también será fundamental para explicar las representaciones geométricas del capítulo 3

## 1.1. De Aristoteles a Newton: El inicio de una revolución

El modelo geocéntrico propuesto por Aristóteles propone unas condiciones particulares para la concepción del universo y la descripción del movimiento de los planetas. En primer lugar Aristóteles presenta un modelo planetario donde la tierra adquiere un papel fundamental. Además de esto, no existe una relación entre las leyes físicas que rigen la tierra y las que regulan el cosmos. De acuerdo con lo anterior se tiene que:

El cosmos es finito y esférico. El centro de la esfera es el lugar natural del elemento tierra. Por esa razón nuestro planeta tierra yace inmóvil en el centro. La cosmología aristotélica establece una escisión radical entre lo terrestre que se extiende hasta la esfera de la Luna y el cielo que comprende todos los cuerpos celestes que podemos observar en el firmamento. (Granés, 2005, p.90)

De acuerdo con lo anterior es posible bosquejar algunas particularidades del modelo Aristotélico. En primer lugar, Aristóteles le asigna a la tierra un lugar fijo y central en su sistema planetario. Dicha condición es fundamental, pues permite formular la mecánica de los cuerpos celestes en torno al planeta tierra, permitiendo así postular que los cuerpos celestes describen órbitas circulares alrededor de la tierra. Esto se conoce como geocentrismo. En segundo lugar, Aristóteles creía firmemente que los elementos naturales regresaban siempre a su estado natural. En este orden de ideas, los elementos más densos –pesados– como la tierra o el agua siempre buscaban regresar a la superficie terrestre, siendo esta su lugar de estado natural. Por otro lado, elementos menos densos como el fuego o el aire buscaban regresar a los cielos, siendo este su lugar natural. Teniendo en cuenta dichas particularidades, este modelo propone que los cuerpos no están sometidos a fuerzas o atracciones, solo poseen una tendencia intrínseca de regresar a su estado natural. Por último, Aristóteles también afirmaba que las leyes del mundo terrestre eran totalmente diferentes a las leyes del mundo terrestres. De acuerdo con el sabio griego, los cuerpos celestes estaban compuestos por una sustancia totalmente distinta a los cuatro elementos, cuyas características principales era ser incorruptible e inmodificable, denominándose así *éter*.(Granés, 2005)

Posterior a la formulación del modelo aristotélico, se evidencia un prolongado silencio en cuanto a los avances de la astronomía y la observación de cuerpos celestes, pues pocos pensadores cuestionaron el modelo planetario en mención. De acuerdo con Stewart (2015) únicamente la voz solitaria de Aristarco de Samos, filósofo de la naturaleza contemporáneo a Aristóteles, decidió poner en tela de juicio el modelo geocéntrico. Hacia el 270 a.C, Aristarco propone un modelo heliocéntrico, después de calcular las dimensiones de la Luna, la Tierra y el Sol. Su teoría cayó prontamente debido a la falta de pruebas experimentales. Siguiendo la línea investigativa de Stewart, es posible resaltar

que, mientras la ciencia Europea está inmersa en la oscuridad, debido a las ideas radicales de la iglesia católica, en diversos lugares del mundo, alejados de la Europa central, diferentes pensadores cuestionaban los postulados del sistema planetario Aristotélico. En concreto es posible destacar las siguientes hipótesis que buscaban oponerse al modelo geocéntrico:

En el 499, el astrónomo hindú Aryabhata expuso un modelo matemático para el Sistema Solar en el cual la Tierra giraba sobre su eje y los períodos de órbitas planetarias se establecían en relación con el Sol. En el mundo islámico, Alhazen escribió una crítica punzante a la teoría ptolemaica, aunque esta probablemente no se centraba en su naturaleza geocéntrica. Alrededor del año 1000, Abu Rayhan Biruni aportó reflexiones serias sobre la posibilidad de un Sistema Solar heliocéntrico, con la Tierra girando sobre su eje, pero finalmente optó por la ortodoxia de la época, una Tierra fija. Alrededor del 1300, Najm al-Din al-Qazwini al-Katibi propuso una teoría heliocéntrica, pero pronto cambió de opinión. (Stewart, 2015, p.70)

El silencio sobre el modelo geocéntrico se prolongó hasta mediados del siglo XVI. Hacia 1543, en su célebre obra *De Revolutionibus Orbium Coelestium* «Sobre la revolución de las esferas celestes» el ilustre monje polaco Nicolás Copérnico, quien tenía como oficio la astronomía, propone un modelo heliocéntrico, en donde el astro solar tomaba el papel principal, siendo este el centro del sistema planetario. Además de esto, Copérnico plantea una nueva visión del movimiento de los cuerpos celestes, pues según el modelo heliocéntrico propuesto en su obra, los planetas describen trayectorias circulares alrededor del astro rey; donde la tierra y su satélite natural «la luna» también describen este tipo de trayectorias.

La obra desarrollada por Copernico resulta escéptica para lo ojos de los científicos contemporáneos, sin embargo es puesta en circulación. Diferentes historiadores de la ciencia, como Thomas Kuhn, consideran que este es el inicio de la revolución científica, puesto que algunos contemporáneos a Copernico adoptan su obra y deciden defendela ante las fuertes acusaciones de herejía por parte de la iglesia católica, tales acciones inducen a un cambio de paradigma en la concepción de los sistemas planetarios. Uno de los principales defensores de la teoría Copernicana fue el astrónomo italiano Galileo Galilei. De acuerdo con Hacyan (2012) es posible resaltar que, Galileo además de defender dicha teoría, también realiza aportes como la construcción de el primer telescopio y el registro riguroso de observaciones a la bóveda celestes, los cuales permiten corroborar en términos experimentales las ideas Copernicanas, siendo la vía experimental una defensa al heliocentrismo

La obra de Copérnico fue defendida y promovida apasionadamente por Galileo Galilei. Además de divulgar la hipótesis heliocéntrica, Galileo encontró nuevas evidencias a su favor realizando las primeras observaciones astronómicas con un telescopio; su descubrimiento de cuatro pequeños astros que giran alrededor de Júpiter lo convenció de que la Tierra no es el centro del Universo. Galileo también fue uno de los primeros científicos que estudiaron la caída de los cuerpos, pero es una ironía de la historia el que nunca sospechara la relación entre la gravedad y el movimiento de los cuerpos celestes. Al contrario, creía que los planetas se movían en círculos por razones más estéticas que

físicas: el movimiento circular le parecía perfecto y estable por ser idéntico a sí mismo en cada punto.(Hacyan, 2012, p.17)

Galileo Galilei es juzgado por la iglesia, es encarcelado por su fuerte defensa del sistema planetario heliocéntrico, pues la rebeldía y la herejía eran castigadas de formas drásticas para esta época. Su consigna de lucha se resumen en una pequeña frase, “...*Eppur si muove* ” cuya traducción del latín es “... *y todavía se mueve*”. Posterior a los aportes realizados por Galileo, se destaca la obra de un astrónomo Alemán, Johannes Kepler, quien empieza a modelar en forma geométrica el modelo heliocéntrico, esto se realiza hacia finales del siglo XVI. Los aportes de Kepler se sintetizan en tres principios físicos, los cuales son piedra angular para el desarrollo de la teoría Newtoniana.

Los primeros aportes realizados por J. Kepler surgen después del trabajo en conjunto con el astrónomo Danes Tycho Brane, quien para esta época tiene un gran reconocimiento debido al registro sistemático de sus observaciones. Kepler recopila los datos astronómicos registrados por Brahe, con relación al desplazamiento de Marte a través la bóveda celeste, y a partir de la modelación matemática intenta construir la trayectoria orbital que sigue el planeta Marte. Kepler tenía una fuerte fundamentación matemática en lo que a su época concierne, él creía que era necesario encontrar un orden matemático que le permitiera descifrar el mensaje divino a partir de las claves que Dios ha sembrado en el mundo. Tales habilidades le permitieron realizar una de las acciones más audaces en el campo de la astronomía, pues Kepler rompe el paradigma de que los cuerpos celestes orbitan en forma circular y propone que estos siguen una trayectoria elíptica.<sup>1</sup> A partir de dicha trayectoria y algunas consideraciones geométricas, Kepler consagrando sus dos primeras leyes en su obra *Astronomía Nova* en 1603. Finalmente su tercera ley es formulada en 1609 en su obra *Harmonices Mundi*, esta ley le permite solventar su preocupación por encontrar una relación entre el periodo de los planetas y las dimensiones radiales de la órbita (Granés, 2005).

De acuerdo con Holton and Brush (1996) resulta importante señalar que Newton puede formular la ley de gravitación universal gracias a la contribución de algunos de sus antecesores. Hasta el momento se ha observado como Copérnico, Galileo y Kepler realizan aportes a la ciencia, y de manera indirecta a Newton, gracias a las ideas desarrolladas sobre los sistemas planetarios heliocéntricos, tales aportes son determinantes para que el pensador inglés desarrollara de forma acertada su obra. Sin embargo, Newton tiene una gran deuda a nivel intelectual con Rene Descartes y Robert Hooke, pues tales pensadores también aportaron en gran medida a la construcción de dicha ley.

Siguiendo a Granés (2005) para Descartes no existe el vacío, pues el universo está lleno en su totalidad por una sustancia extremadamente sutil, denominada *éter*. De acuerdo con Descartes es posible pensar en un universo que se compone de varios cielos, donde cada cuerpo celeste tiene un cielo propio, dichos cielos se encuentran alrededor del sol, flotando en el éter y arrastrados por los torbellinos de éter se encuentran los planetas. Otros cuerpos celestes, como un cometa, también

---

<sup>1</sup>Se tiene datación acerca de las trayectorias elípticas en el 240 a.C. con el cono de Apolonio. Hypatia de Alejandría quien también indago en temas relacionados con astronomía realizó uso de este cono para intentar dar una explicación diferente al modelo astronómico propuesto por Aristóteles.

son arrastrados por torbellinos de *éter*<sup>2</sup> que atraviesan los diferentes cielos de los planetas. El pensamiento de Descartes se sintetiza en un universo que se extiende de manera indefinida y donde el componente principal de su tejido es el éter.

La deuda intelectual de Newton con Descartes se evidencia cuando el sabio inglés desarrolla su primera obra "*De Gravitationes et Aequipondio Floridum et Solidorum in Fluidis* " «De la gravitación y equilibrio de los fluidos y los sólidos en fluidos» en 1666. En esta obra Newton conserva algunas ideas acerca del movimiento de planetas en "fluidos", pues como se evidencio anteriormente, previo a Newton, el movimiento planetario estaba explicado a partir de torbellinos de éter, siendo esta la imagen de universo dominante. Sin embargo, es importante destacar que Newton a lo largo de esta obra, pretende diferenciar sus propias concepciones acerca del espacio, los cuerpos, el movimiento y la fuerza con la de sus contemporáneos, además de hacer una fuerte crítica al cartesianismo (Granés, 2005).

Por otro lado, de acuerdo con Holton and Brush (1996) es posible evidenciar una deuda intelectual de Newton frente a Hooke. Previo a la publicación de los principios el sabio inglés mantiene una correspondencia con Hooke, en esta es evidente que Hooke muestra frente a Newton una preocupación por el movimiento de los cuerpos celestes debido a una fuerza central. Lo anterior tiene validez mediante:

De mi parte consideraré un favor que usted aceptará hacerme conocer por carta sus objeciones a cualquiera de mis hipótesis y opiniones; muy particularmente si usted quisiese dejarme saber lo que piensa en la hipótesis según la cual *los movimientos celestes de los planetas se compondrían del movimiento rectilíneo por la tangente y del movimiento de atracción hacia un cuerpo central.*(Granés, 2005, p.90)

De acuerdo con lo anterior, resulta importante resaltar que Hooke<sup>3</sup> propone un sistema planetario heliocéntrico donde destaca en gran medida la acción de una fuerza central para explicar los movimientos planetarios. En este orden de ideas algunos aspectos desarrollados en "*Attemp to prove the motion of the earth by observation* " son evidenciados en más adelante en la obra cumbre de Newton. Sin embargo, Hooke nunca logro describir de una manera matemática cual era la relación entre que describía las fuerzas atractivas entre cuerpos celestes, siendo este el gran aporte de Newton en los *principia* de 1687.

Por último, regresando a Holton and Brush (1996) cabe mencionar que Newton fue disruptivo frente a sus antecesores en su metodología investigativa. Vale la pena que Newton se encuentra entre los filósofos de la naturaleza pioneros en realizar experimentación, puesto que fue un hombre ingenioso para comprobar experimentalmente teorías físicas. Por otro lado es notorio que el desarrollo

---

<sup>2</sup>Las características del éter son estudiadas por diferentes teóricos. Eventualmente este concepto toma más fuerza para explicar las relaciones entre electricidad y magnetismo del siglo XIX. Finalmente, se puede decir a muy groso modo que el éter cuenta es una sustancia extremadamente sutil y con propiedades de densidad y elasticidad difíciles de compaginar. (Vélez, 2012)

<sup>3</sup>El lector podrá ampliar la información acerca de la correspondencia entre Hooke y Newton en (Granés, 2005, p.194)

matemático propuesto por el, la invención del cálculo, permitió desarrollar en Newton habilidades para asumir los problemas físicos desde una nueva perspectiva, de acuerdo con lo anterior se tiene que:

... simplificaciones a veces drásticas, convirtiendo un campo de problemas para la física - por ejemplo los problemas relacionados con el movimiento de los cuerpos - en un sistema matemático, de tal manera que, partiendo de ciertos principios generales, evidentes por si mismo o con una base argumentativa fuerte, se pueda proceder de manera demostrativa por deducción matemática. (Granés, 2005, p.188)

Hasta el momento se han evidenciado los aportes sobre los cuales Newton formula su ley de gravitación. Ahora bien, en las siguientes líneas se procede a explicar como de que manera se formula la ley en estudio. Hacia 1687 Sir Isaac Newton revoluciona el mundo de las ciencias al publicar los principios, un compendio de libros donde el sabio inglés desarrolla de manera geométrica algunos los principales postulados sobre la fuerza, tanto en el mundo celeste como en el mundo terrestres. En el libro III de dicha obra, Newton explica como varia la fuerza de gravedad con respecto a la distancia entre los cuerpos celestes. Observe:

### **Coralorio II**

La fuerza de gravedad que tiende hacia cualquier planeta es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de los lugares al centro de dicho planeta.(Granés, 2005, p.230)

Pero Newton no solo se queda en este aspecto de reconocer la proporción inversa al cuadrado de la distancia de los radios, avanzando un poco más en el libro III, se logra evidencia que:

### **Proposición VI Teorema VI**

Que todos los cuerpos gravitan hacia todos los planetas, y que los pesos de los cuerpos hacia cualquier planeta, a distancias iguales del centro del planeta, son proporcionales a las cantidades de materia que respectivamente contienen.(Granés, 2005, p.230)

De acuerdo con lo anterior, es posible resaltar la primera característica de la gravitación clásica, en esta se observa que la fuerza será proporcional a las masas y que esta será inversamente proporcional a la distancia que los separa. La anterior construcción historiográfica tendrá importancia en el capítulo tres, pues allí se deberá formular en un lenguaje matemático de la relación anteriormente, descrita. También se debe tener en cuenta que para construir tal relación como una igualdad es necesario ajustar una constante, dicha constante fue medida experimentalmente por Henry Cavendish en 1798 mediante la balanza de torsión<sup>4</sup>.

## **1.2. Campo gravitacional: Aproximación histórica y características**

Para exponer algunas características asociadas al campo gravitacional clásico será fundamental analizar la obra escrita por el matemático Suizo Leonard Euler, en su texto «*Cartas a una princesa*

---

<sup>4</sup>Para obtener más información acerca de esto, el lector podrá dirigirse a (Holton and Brush, 1996, Cap 11.3)

## 1. 1.2. CAMPO GRAVITACIONAL: APROXIMACIÓN HISTÓRICA Y CARACTERÍSTICAS

*alemana, acerca de diversas cuestiones de física y filosofía*» escrito en 1768. En este texto es posible discutir algunas ideas, en primera instancia previas, para describir el campo gravitacional. En primer lugar Euler propone que la pesantez o la gravedad es la tendencia de los cuerpos, independiente del estado en que estos se encuentren. En el texto en mención, el matemático Suizo describe un experimento pertinente para mostrar esta propiedad. De acuerdo con lo anterior, Euler analiza el humo y los vapores, pues de acuerdo con el pensamiento aristotélico y en consecuencia con las observaciones cotidianas, la tendencia natural del vapor es ascender. Sin embargo, si este vapor se sometiera a una máquina neumática que expulsara todo el aire en su vecindad, se observaría que el vapor, al igual que cualquier piedra, desciende. Euler avanza en su caracterización de la pesantez de los cuerpos, y propone que, a pesar que existan fuerzas externas que lancen hacia arriba el cuerpo o lo sostengan en una altura diferente, en el momento en que estas fuerzas externas disminuyan o desaparezcan, la tendencia natural de los cuerpos es descender. Finalmente, Euler afirma que “. . . La propiedad general de todos aquellos [cuerpos] que conocemos es la pesantez en virtud de la cual todos tienen una inclinación a caer, y caen de hecho cuando no hay nada que se les oponga”. (Euler and Pérez, 1990, p.56)

Por otro lado, el sabio Suizo pretende ir de lo particular a lo general, en este orden de ideas, Euler le atribuye otra característica a la pesantez, proponiendo que esta propiedad permite medir la fuerza, ya sea extrínseca o intrínseca, con la que los cuerpos caen sobre la superficie terrestre. De este modo Euler direcciona su investigación con el propósito de mostrar la diferencia entre pesantez, medida de una fuerza, y la masa, propiedad particular de cada uno de los cuerpos. Para esto el matemático Suizo destaca la siguiente experiencia mental:

Piense V.A en varias masas de diferentes materias, que sean todas del mismo tamaño o extensión y que tengan cada uno de ellas las figuras, por ejemplo; de un cubo cuya longitud y altura sean de un pie. Tal volumen si fuera de oro pesaría 1330 libras, si fuera de plata 770 libras, si fuera de hierro 500 libras, si fuera de agua 70 libras, y si fuera de aire pesaría no más una doceava parte de libra, de donde V.A puede observar que las diferentes materias de las que están compuestas los cuerpos son algo muy diferente de su pesantez.(Euler and Pérez (1990), Pg 58).

Del fragmento anterior, es posible deducir una clara diferenciación entre el peso, que es la medida de una fuerza con la que los objetos caen, y la masa que es la medida de las cantidades de materia en cierta extensión de cuerpo. Tal diferencia es pertinente de señalar, pues posteriormente, como se vera en el capítulo 3, la pesantez de un cuerpo, y la masa del mismo tendrán una relación importante para describir el concepto de campo gravitacional desde una perspectiva analítica.<sup>5</sup>

Ahora bien, después de señalar las diferencias entre masa y peso, Euler decide atribuirle un sentido geométrico a la pesantez. De acuerdo con Euler and Pérez (1990) se puede tomar como punto de partida la caída de los cuerpos para intentar establecer las concepciones de arriba y

---

<sup>5</sup>Resulta importante enunciar el problema de las masas inerciales y gravitacionales, propuesto por E.Mach como una inconsistencia al modelo de gravitación Newtoniano. De acuerdo con Mach debería existir una razón igual a la unidad entre ambas masas, es decir la masa gravitacional no debe diferir en nada de la masa inercial, por tal motivo lo que conocemos como inercia guarda una seria relación con el peso.

abajo. Siguiendo las ideas del matemático Suizo, experimentalmente todos los cuerpos caen hacia abajo, siguiendo una trayectoria recta, a esta se le denomina línea vertical, la cual siempre es trazada de arriba hacia abajo Euler and Pérez (1990). Ahora bien, esta línea vertical siempre garantizara que es perpendicular a una línea horizontal, o superficie. La línea horizontal puede estar nivelada, como en una llanura, o no, como en el curso de un río. Establecer esta línea vertical, la cual modernamente se conoce como geodesica, permitió resolver un problema importante, *las antípodas*<sup>6</sup>

Para solucionar dicho problema, Euler destaca la forma de la tierra, donde teóricamente se piensa en un esfera perfecta, pero finalmente se habla de una esfera achatada<sup>7</sup> en sus polos. Comprobar la simetría de esférica de la tierra tiene lugar las primeras exploraciones marítimas, pues los primeros navegantes aseguraron la existencias de pobladores en lugares opuestos a los que habitaban, y con sus pies dirigidos hacia los nuestros, a estos lugares se les denomino antípodas. Para entender un poco mejor este concepto observe la figura 1.1

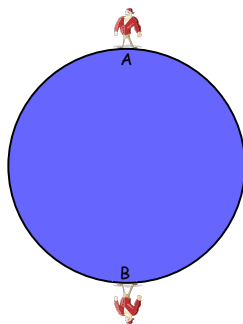


Figura 1.1: Concepción de las antípodas. Tomado de Euler and Pérez (1990)

Esta figura recrea, en cierto sentido como nos encontramos ubicados sobre la superficie terrestre, destacando así una interesante pregunta, porque no caen los habitantes que se encuentran en el punto B. Las primeras hipótesis afirmaron que estos habitantes deben estar agarrados al suelo mediante algún mecanismo, o que estos habitantes tienen la cabeza en el suelo. Sin embargo, los viajes marítimos revelaron que ninguna de las hipótesis mencionadas anteriormente son ciertas, puesto que al igual que los habitantes que se encuentran en el punto A, sus antípodas que se encuentran en el punto B tienen los pies pegados a tierra, y experimentan la caída de los cuerpos hacia abajo, o sea hacia el centro de la tierra. Euler concluye que

Esta ilusión no es más que de una falsa idea que hemos vinculado a los términos de arriba y abajo. En cualquier sitio en el que nos encontramos sobre la tierra, abajo es aquel al que caen los cuerpos, y arriba es el sitio contrario (Euler and Pérez, 1990, p.65).

<sup>6</sup>Se entiende por antípoda como el lugar sobre la superficie terrestre que es diametralmente opuesto al establecer un punto cualesquiera sobre la superficie terrestre. Por ejemplo al estar sobre Galicia su antípoda sería Nueva Zelanda

<sup>7</sup>Finalmente esta afirmación se comprueba de manera teórica al momento de solucionar la ecuación de Laplace para la gravitación clásica, pues esta solución conlleva al uso de armónicos esféricos que muestran la forma de un Geiode para la tierra.

Profundizando un poco más en el problema de los antípodas, Euler generaliza la dirección de caer, o de ser atraído por el fenómeno gravitacional. Sin tener muy en cuenta la forma que tiene la tierra, sea un esfera achatada o sea un geiode, siempre sera posible trazar líneas verticales en dirección perpendicular a la superficie, las cuales describen la caída de un cuerpo. Observe en detalle la figura 1.2.

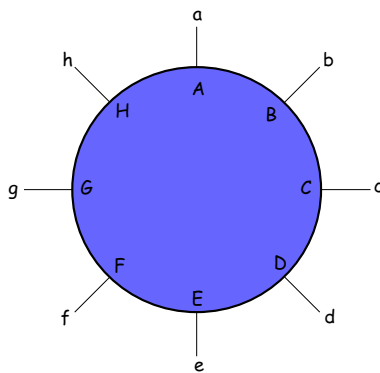


Figura 1.2: Líneas de caída de los cuerpos. Tomado de Euler and Pérez (1990)

De acuerdo con la ilustración anterior, en cualquier punto sobre la superficie de la tierra los cuerpos describen una trayectoria de caída en línea recta. Ya sea en el punto  $a$  siguiendo el segmento de línea  $\overline{aA}$  o ya sea en el punto  $e$  siguiendo el segmento de línea  $\overline{eE}$ . De esto es posible deducir que todos los objetos, sobre cualquier punto de la tierra, deben caer en línea recta y hacia la superficie de la misma. Un análisis mas profundo y general permite observar que si todos los cuerpos caen hacia la superficie de la tierra, al final los cuerpos caerán hacia el centro de la tierra, por lo tanto la dirección hacia *abajo* se encuentra definida a lo largo de la línea recta que describe el radio de la tierra. Tal conclusión resulta importante, pues en los análisis geométricos que se realizaran en el capítulo tres, se observara que la ideas de campo, representada mediante vectores o mediante formas diferenciales, resalta esta particularidad del campo, la tendencia a moverse en dirección radial del planeta esférico en estudio.

Finalmente, Euler destaca la importancia de que la fuerza varié con dirección al inverso cuadrado de la distancia, noción propuesta por Newton anteriormente. Para describir dicha importancia será importante estudiar en detalle la figura propuesta a continuación.

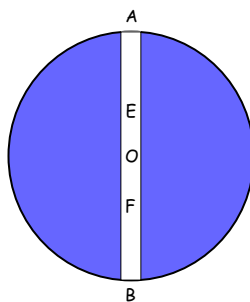


Figura 1.3: Nociones acerca del campo gravitacional. Tomado de Euler and Pérez (1990)

Ahora bien, de acuerdo con la 1.3 es posible observar que si tenemos un cuerpo situado en A, mientras más se acerca a O mayor será el valor de su pesantez. Euler describe que mientras el cuerpo se acerca al centro de la tierra, su radio será menor, por tal motivo la fuerza será mayor, siguiendo la proporción formulado por Newton. En este caso en el punto E como esta en la vecindad sentirá una mayor atracción en comparación con el punto A. Por otro lado, mientras que el cuerpo se aleja de las vecindades del centro de la tierra, por ejemplo si el cuerpo se mueve desde E hacia A, su radio será mayor, por lo tanto menor será el valor de la pesantez, es más si tuviéramos la capacidad de levantar un cuerpo hasta cercanías de la luna y medir su pesantez observaríamos que sería una milésima parte del peso que tiene en la tierra (Euler and Pérez, 1990).

De acuerdo con lo anterior, es importante evidenciar que al tomar como referente la ley de gravitación universal es posible describir algunos aspectos particulares de la idea de campo gravitacional, en este ultimo caso la importancia de la variación del inverso cuadrado para describir el valor de la pesantez mediante un radio, la cual es ve manifestada geoméricamente el capítulo tres. A lo largo del texto es posible observar que mediante los barridos históricos realizados es posible acercar al lector a la evolución de conceptos fundamentales mediante el reconocimiento de las ideas propuestas por diversos autores hasta llegar a Newton, y como tales ideas continúan en evolución mediante un proceso de continuidad.

En conclusión, el proceso de caracterizar los conceptos asociados a la gravitación desde una perspectiva histórica, además de explicar al lector el sentido físico de las ecuaciones que se mostrarán más adelante, le permitirán evidenciar que las construcciones científicas no son ajenas a lo cotidiano, más bien es un “ proceso dinámico y cíclico, en el sentido de que parte de una u otra y retorna, con modificaciones, reestructuraciones o nuevas demandas y necesidades.” (Garay, 2011, p.53). De acuerdo con lo anterior, resulta pertinente pensar que en los procesos de enseñanza es importante recrear desde los aspectos históricos las características más importantes de las síntesis matemáticas a trabajar o analizar, con el propósito de mostrar al aprendiz que las grandes ideas en la ciencia son el resultado de reconocer al otro, además de que cualquiera, quien interactúe con las ciencias en su cotidianidad, puede contribuir a dicha empresa, tal como lo menciona Newton, quien había visto más lejos al subir sobre hombros de gigantes (Holton and Brush, 1996)

## Capítulo 2

# Introducción a las formas diferenciales

Con frecuencia, muchos de los fenómenos físicos que se observan en la naturaleza pueden ser explicados a partir de modelos físico-matemáticos, esta perspectiva le permite al observador estructurar un conjunto de interpretaciones analíticas sobre el fenómeno en estudio. Dichas interpretaciones pueden ser sintetizadas mediante uno o una serie de principios, los cuales se encuentran sustentados en relaciones de carácter matemático. Una característica particular de los modelos físico-matemáticos es su invarianza frente a traslaciones y rotaciones, esto quiere decir que el fenómeno físico debe desarrollarse de la misma manera, sin importar la ubicación espacial del marco de referencia desde el cual se observa y/o se mide el fenómeno en estudio. De acuerdo con esto, el observador debe elegir una serie de herramientas matemáticas que cumplan con la condición de invarianza mencionada anteriormente. En principio, las herramientas matemáticas más generales, que cumplen las características de invarianza, se denominan *tensores*.

Ahora bien, para desarrollar la idea de tensor, es importante comprender un par de cantidades esenciales para la física, y que son más conocidas en el lenguaje de las ciencias, estos se denominan *vectores* y *escalares*. Tales cantidades también cumplen con las condiciones de invarianza mencionadas, además que son la base para la construcción de los *tensores*. En este orden de ideas, a lo largo de los siguientes párrafos se desarrollará la idea de vectores, se analizarán dichas cantidades desde una perspectiva geométrica y además, se estudiarán estas cantidades con el propósito de llegar a generalizarlas al punto de los tensores, en especial a los tensores que describen las formas diferenciales. Se realiza tal introducción con el propósito que el lector pueda comprender mediante analogías con el cálculo vectorial el sentido de las formas diferenciales, contrastando que ambos objetos matemáticos pueden ser usados para la representación geométrica de fenómenos físicos.

De acuerdo con el físico norteamericano Richard P Feynman, las cantidades *escalares*, son cantidades ordinarias, como la cantidad de papas en un saco o como la medida de la temperatura en una habitación, tales cantidades carecen de una dirección y solo dan cuenta de una magnitud<sup>1</sup>. Mientras tanto, los *vectores* son cantidades especiales para la física. Un claro ejemplo de esto se observa al analizar la velocidad de una partícula, puesto que esta cantidad física depende de la dirección del movimiento y de una magnitud asociada a la rapidez con que se desplaza la partícula. Por

---

<sup>1</sup>Vale la pena resaltar que las cantidades escalares también son consideradas como vectores de orden cero

lo tanto los vectores son cantidades que, además de dar cuenta de una medida de magnitud, también dan cuenta de las direcciones en que se desarrollan los fenómenos físicos. (Feynman et al., 1963)

De igual manera, resulta importante destacar la relación entre los vectores, *cantidades orientadas en el espacio que expresan la medida de una magnitud física*, y la geometría, *rama de las matemáticas que estudia las propiedades de las figuras y la relación de estas con el espacio donde se ubican*. Suponga entonces que se desea analizar el flujo de cierto líquido X en una tubería, para esto decide colocar vectores, representados por flechas, en la dirección del flujo del líquido X, observe la figura 2.1. De acuerdo con esto, podemos atribuirle un sentido físico a los vectores, por ejemplo la medida de la velocidad en cada punto del fluido. Además, es posible asignarle un carácter geométrico a estos vectores, pues indican la dirección en que se orienta el flujo. De esta manera, el ejemplo anteriormente expuesto pretende destacar un punto de convergencia entre la geometría y la física a partir del uso de dichas cantidades. Finalmente, es posible generalizar las representaciones vectoriales y atribuirles un potencial más amplio, por ejemplo, el uso de superficies orientadas en lugar de flechas.

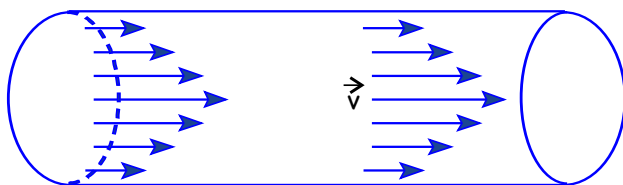


Figura 2.1: Representación de los vectores velocidad para el flujo de un líquido en una tubería. Tomado y adaptado de Malakhaltsev and Artega Bejarano, 2013

Desde lenguaje matemático, un vector puede definirse como una *n*-pleta de números definida sobre un campo de números reales. Restringiendo esto a tres dimensiones  $\mathbb{R}^3$ , los vectores se definen como una tripleta de números sobre un campo de números reales. Generalmente los vectores se encuentran definidos en un sistema coordenado, el cual tiene asociado una métrica, por tal motivo, la aplicación más intuitiva de los vectores se asocia a la medida de distancias desde el origen del sistema coordenado a cualquier tres puntos del espacio. Matemáticamente es posible definir diferentes sistemas coordenados con métricas particulares para cada uno, por lo tanto los vectores pueden sufrir transformaciones con el propósito de migrar a diferentes sistemas coordenados, tales transformaciones respetan las condiciones de invarianza de rotación y translación; además de esto le añaden una condición, ser invariante en la medida frente al cambio de coordenadas, por lo tanto la métrica o las medidas brindadas por los vectores, deben conservarse en cualquier sistema coordenado.

Así mismo, al considerar los vectores como cantidades matemáticas, los cuales pueden operarse aplicando las reglas de operación usuales bajo ciertas condiciones particulares. Para definir operaciones entre vectores es necesario estudiar la estructura interna de este conjunto de cantidades, la cual se encuentra sustentada en una serie de axiomas que pretenden construir un espacio abstracto que

contenga vectores y genere vectores a partir de la suma y la multiplicación. Tal espacio abstracto se denomina *espacio vectorial* y es posible generarlo a partir de ocho axiomas.

## 2.1. Espacios vectoriales

De acuerdo con Tejeiro (2005) es posible definir los espacios vectoriales como:

**Definición 1:** los espacios vectoriales se definen como un conjunto de elementos  $\mathcal{V}$  compuesto por vectores ( $v \in \mathcal{V}$ ) con una operación interna definida como *suma de vectores*  $+$ . Este conjunto de vectores se define sobre un campo de números reales  $K$ . La suma de vectores cumple con los siguientes axiomas:

1. La suma de vectores debe ser conmutativa. Es decir para todo  $a, b \in \mathcal{V}$ , se cumple que:  
 $a + b = b + a$ .
2. La suma de vectores debe ser asociativa. Es decir para todo  $a, b, c \in \mathcal{V}$  se cumple que:  $a + (b + c) = (a + b) + c$
3. Existe un vector nulo (modulo)  $v_0 \in \mathcal{V}$  de tal forma que para todos los elementos  $a, b, \dots, n \in \mathcal{V}$  se cumple que:  $v_0 + a = a$
4. Para todos los elementos  $a, b, \dots, n \in \mathcal{V}$  existe un elemento inverso que pertenece a  $\mathcal{V}$  de tal forma que:  $a + (-a) = 0^2$

Ahora bien, sobre el grupo de vectores  $\mathcal{V}$  define una operación externa con el cuerpo de los reales  $K$ , el cual se denomina el campo de los escalares. La operación entre el conjunto de vectores  $\mathcal{V}$  y el cuerpo  $K$  se denomina multiplicación por escalar, y se mediante una función de la forma:

$$\begin{aligned} \circ : K \times \mathcal{V} &\longrightarrow \mathcal{V} \\ \alpha v &\longrightarrow w = v\alpha \end{aligned}$$

Donde  $\alpha$  pertenece a los reales. Por otro lado, la función anteriormente mencionada cumple con los siguientes axiomas:

5. Propiedad distributiva frente a la suma de vectores, de modo que  $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$  para todo par de vectores  $a, b \in \mathcal{V}$  y para todo  $\lambda \in K$ .
6. Propiedad distributiva frente a la suma de escalares, de modo que  $(\lambda + \beta)a = \lambda a + \beta a$ , para todo vector  $a \in \mathcal{V}$  y para todo escalar  $\lambda, \beta \in K$ .
7. Propiedad asociativa frente a la multiplicación escalar - vector, de modo que  $\lambda(\beta a) = (\lambda\beta)a$ , para todo vector  $a \in \mathcal{V}$  y para todo escalar  $\lambda, \beta \in K$ .

---

<sup>2</sup>Como el lector puede observar, el conjunto de vectores  $\mathcal{V}$  estructura un grupo de la forma  $(\mathcal{V}, +)$ . El lector también puede comprobar que el grupo  $(\mathcal{V}, +)$  tiene una estructura de grupo Abelian.

8. Existencia del modulo escalar, de modo que  $I \cdot a = a$  para todo vector  $a \in \mathcal{V}$  y para todo escalar identidad de la forma  $I = 1 \in K$ .

Los axiomas descritos anteriormente no son un condición suficiente para generar un espacio vectorial, también es necesario estudiar y definir una condición geométrica, puesto que los vectores son cantidades con representación espacial, dicha condición se denomina *independencia lineal*. En sentido analítico, un vector es *independientemente lineal*, cuando este no puede ser escrito como una combinación lineal de otros n-vectores. En el aspecto geométrico, la independencia lineal esta sujeta a la orientación de los vectores, en el caso de  $\mathbb{R}^2$  los vectores son linealmente independientes si están orientados en diferentes direcciones y forman entre ellos un ángulo recto. Mientras que, en el caso de  $\mathbb{R}^3$ , tres vectores son independientemente lineales si y solo si no están contenidos en el mismo plano. Por lo tanto, un conjunto de vectores linealmente independientes y que cumplan con los axiomas descritos, generan un espacio vectorial. De acuerdo con esto, observe la figura 2.2 donde se representan las condiciones mencionadas anteriormente.

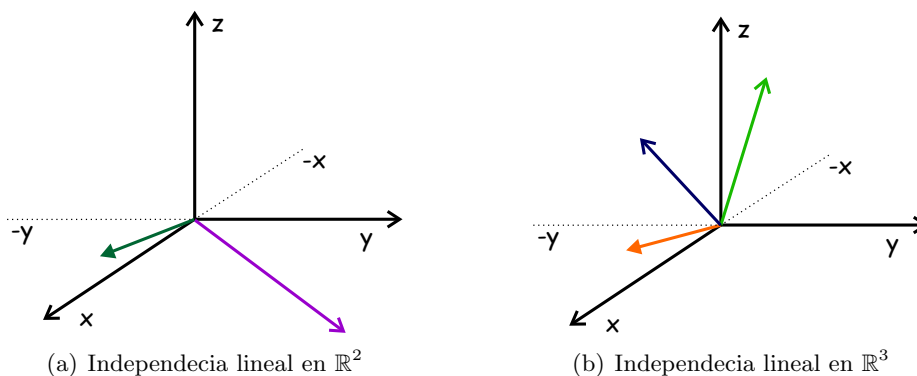


Figura 2.2: Representación geométrica de la independencia lineal. Elaboración propia Reproducido en Corel Draw X7

Seguindo a Tejeiro (2005), es posible formular matemáticamente la definición de independencia lineal. Además, resulta importante mencionar que a partir de esta definición, es posible bosquejar los conceptos de base y dimensión para los espacios vectoriales. Luego, de manera analítica se tiene que:

**Definición 2:** Dado un conjunto  $\mathcal{Q} = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_q\}$  de  $Q$  vectores pertenecientes a  $\mathcal{V}$ , donde  $v_q \neq 0$  y  $\forall q = \{1, 2, 3, \dots, q\}$ . Se puede definir la independencia lineal como:

$$\sum_{i=1}^q \alpha_i v_i = 0$$

Esto implica que para cualquier combinación lineal su resultado debe ser cero. Por lo tanto, todo  $\alpha_i$  es igual a cero. Por otro lado los vectores  $v_i$  pueden ser vectores cero, cumpliendo igualmente la independencia lineal, esto se conoce como trivialidad.<sup>3</sup>

<sup>3</sup>Resulta pertinente aclarar que para la dependencia lineal se cumple la condición de  $\sum_{i=1}^q \alpha_i v_i = 0$ , solo que en este caso se cumple que para algunos valores  $\alpha_i \neq 0$ .

**Definición 3:** El conjunto de los vectores linealmente independientes  $\mathcal{L}_{ind}$  que hacen parte del conjunto de vectores  $\mathcal{V}$  se denominan bases del espacio vectorial. En sentido geométrico es posible mencionar que para el caso de  $\mathbb{R}^2$  las bases son ortonormales, mientras que el caso de  $\mathbb{R}^3$  las bases son ortogonales.

El convenio para notar una base es  $e^i$  donde para todo  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ . Observe que cualquier vector del conjunto  $\mathcal{V}$  se puede escribir a partir de una combinación lineal de la siguiente manera:

$$v = v_1e^1 + v_2e^2 + v_3e^3 + \dots + v_n e^n$$

**Nota:** Es importante mencionar que las bases vectoriales son ortonormales, si y solo si satisfacen la siguiente relación:

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

De acuerdo con la definición anterior, es posible visualizar los vectores base como lo muestra la figura 2.3. Luego, observe que se denominan base porque a partir de la combinación de estos, es posible generar un volumen, mejor conocido como paralelepípedo, el cual permite deducir cualquier punto en el espacio como combinación lineal de vectores base, tal como lo expresa la definición anterior. De esta manera, los vectores base, generan espacios vectoriales.

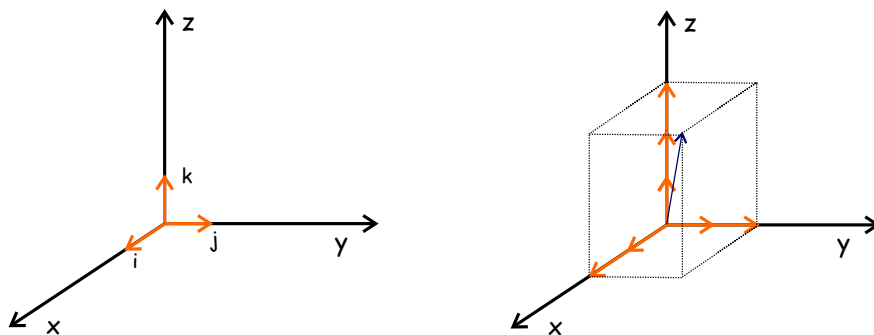


Figura 2.3: Representación de los vectores base y de la combinación lineal de vectores base en forma de paralelepípedo. Elaboración propia. Reproducido en Corel Draw X7

**Definición 4:** Se entiende por dimensión del espacio vectorial como el número máximo de vectores linealmente independientes pertenecientes al conjunto de vectores  $\mathcal{V}$ . En otras palabras, la dimensión de un espacio vectorial está relacionada con la cantidad de elementos pertenecientes a  $\mathcal{L}_{ind}$

## 2.2. Transformaciones lineales y espacios duales

En el análisis matemático, se entiende por transformación lineal como el conjunto de funciones cuyo dominio e imagen son subconjuntos de espacios lineales. Apostol (1973) En un lenguaje más coloquial, las transformaciones lineales se conocen como operadores lineales. Las transformaciones lineales se denotan como:

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : V &\longrightarrow W \\ v &\longmapsto w = T(v) \end{aligned}$$

De acuerdo con Grossman (1996), una transformación lineal entre dos espacios vectoriales  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{W}$  es posible si y solo si se satisfacen las siguientes propiedades, las cuales son válidas para cualquier espacio lineal.

**Definición 5:** Es posible afirmar que la función  $\mathcal{T}$  es una transformación lineal para dos espacios lineales si cumple con las siguientes propiedades:

1. Para todo  $x, y \in V$  se cumple que:  $T(x + y) = T(x) + T(y)$
2. Para todo  $x \in V$  y para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$  se cumple que:  $T(\alpha x) = \alpha T(x)$ .

Finalmente, se define al conjunto de transformaciones lineales entre dos espacios vectoriales como:

$$\mathcal{T}_l(V, W) : \{T : V \longmapsto W \mid T \text{ es lineal}\}$$

Siguiendo a Malakhaltsev and Artega Bejarano (2013), es posible ejemplificar las transformaciones lineales mediante una función campo vectorial  $\mathbf{F}(x, y)$ . Geométricamente una función campo vectorial  $\mathbf{F}(x, y)$  es la trayectoria de un punto móvil en  $\mathbb{R}^2$ , en donde para cada valor de  $[x, y \in \mathbb{R}]$  obtenemos el vector  $\vec{v}(x, y) = \mathbf{F}(x, y)$  para cada valor asociado a  $x, y$ . Gráficamente se tiene:

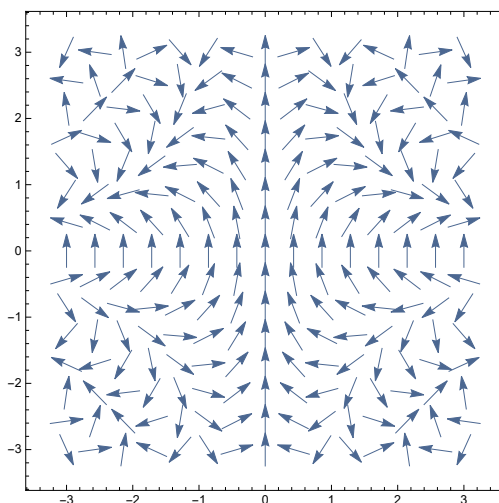


Figura 2.4: Campo Vectorial para la función  $\mathbf{F}(x, y) = \text{Sin}(xy)\hat{i} + \text{Cos}(xy)\hat{j}$ . Elaboración propia. Reproducido en Wolfram Mathematica 11

### 2.2.1. Espacios Vectoriales Duales

En el conjunto de las transformaciones lineales entre espacios vectoriales, existe una transformación lineal cuya particularidad vale la pena resaltar. Esta transformación se define como:

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \alpha = T(v) \end{aligned}$$

De acuerdo con la definición anterior, es posible observar que este tipo de transformaciones lineales toma vectores como dominio y los envía a un número real (escalar) como imagen. Lo anterior es la definición de un *espacio vectorial dual*, tales espacios se denotan como  $\mathcal{V}^*$ . Vale la pena resaltar que los espacios vectoriales duales siguen los mismos axiomas de los espacios vectoriales usuales.

El conjunto de transformaciones lineales de los vectores sobre los números reales (escalares) se define como:

$$\mathcal{T}_{dual}(V, \mathbb{R}) : \{f : V \longmapsto \mathbb{R} \mid f \text{ es lineal}\}$$

Las funciones que permiten este tipo de transformaciones, de vectores a números reales, guardan las siguientes propiedades.

1. Suma de funciones:

$$(f + g)(v) = f(v) + g(v) \quad \forall f, g \in \mathcal{T}_{dual}(V, \mathbb{R})$$

2. Multiplicación por escalar de un función

$$(\alpha f)(v) = \alpha f(v) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Ahora bien, para detallar un poco en como actúan estas funciones de transformación dual, vale la pena resaltar el *teorema de representación de Ritz*, el cual asume que para cada función perteneciente al conjunto de transformaciones  $\mathcal{T}_{dual}$ , existe un vector  $w \in \mathcal{V}$ , el cual cumple con la siguiente condición  $f(v) = \langle w, v \rangle$ , donde  $\langle w, v \rangle$  es el producto punto entre vectores. Esto permite pensar que existe una base  $e_i$  para cada uno de los vectores de  $\mathcal{V}$ ; mientras que para el vector asociado a la función de transformación dual la base se define como  $\langle e_i, \cdot \rangle = e_i^*$ . Finalmente, debido a que los espacios duales guardan una estructura similar al espacio vectorial usual, se debe garantizar la siguiente relación:

$$\langle e_i, e_j^* \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

De acuerdo con esto, se define que para cada vector que entre como dominio a la función  $f(v)$  se generará un número real, satisfaciendo así la condición puntual de esta tipo de transformaciones particulares.<sup>4</sup>

---

<sup>4</sup>Para una mayor claridad acerca del teorema de representación de Ritz, este se encuentra demostrado en detalle

### 2.3. Formas Diferenciales en $\mathbb{R}^3$

Seguindo a Tejeiro (2005), es posible caracterizar las uno-formas en  $\mathbb{R}^3$  como un caso especial de las uno-formas sobre variedades diferenciables<sup>5</sup>. Entonces, Sea  $\mathcal{E}$  un espacio de  $\mathbb{R}^3$  y sea  $\mathcal{P}_{tg}$  un plano con estructura de espacio vectorial el cual es tangente al origen de  $\mathcal{E}$ . Las uno formas diferenciales, sobre el origen, se definen como una transformación lineal de vectores a números reales en el plano tangente  $\mathcal{P}_{tg}$ . De acuerdo con esto se tiene:

$$\begin{aligned} \omega &: \mathcal{P}_{tg} \longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \omega(v) = \langle \omega, v \rangle \equiv \langle \omega, v \rangle \end{aligned}$$

De acuerdo con lo anterior. las uno-formas definidas sobre  $\mathcal{P}_{tg}$  pertenecen al conjunto de  $\mathcal{D}(\mathcal{E}, \mathbb{R})$ , el cual es generado por las transformaciones lineales de la forma  $\mathcal{T}_{dual}(v, \mathbb{R})$ . Mientras tanto, las uno formas diferenciales  $\omega$  pertenecen al espacio dual  $\mathcal{P}_{tg}^*$  del plano tangente. Esto significa que, dada una base  $e_a$  para el plano tangente  $\mathcal{P}_{tg}$ , existe una única base dual  $e^b$  del plano tangente dual  $\mathcal{P}_{tg}^*$ , donde este será denominado plano cotangente, pues su estructura está definida por un espacio vectorial dual. Finalmente, Las relaciones entre bases cumplen con la ortonormalidad:

$$\langle e_a, e^b \rangle = \delta_a^b$$

De igual manera, al cumplir las relaciones entre bases ortonormales, se cumple con la relación de linealidad entre un vector definido como  $\chi = \chi^a e_a$  y una uno forma  $\omega = \omega_b e^b$ . Observe:

$$\langle \chi, \omega \rangle = \langle \chi^a e_a, \omega_b e^b \rangle \implies \langle \chi, \omega \rangle = \chi^a \omega_a$$

Dicha relación es importante, pues es importante resaltar que a lo largo del análisis gravitacional sera posible encontrar un punto de convergencia entre vectores y formas diferenciales. Por otro lado, con el proposito de que el lector tenga una idea mas amplia sobre la visualización de vectores tangentes y cotangentes en términos generales, se propone la siguiente ilustración:

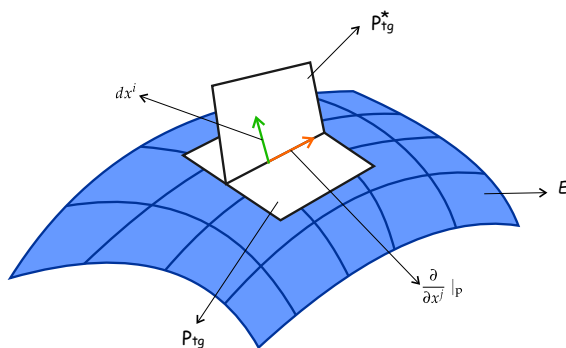


Figura 2.5: Representación del plano tangente y del plano cotangente. Elaboración propia. Reproducido en Corel Draw X7.

en el anexo 1

<sup>5</sup>Se entiende por *variedad diferenciable* como una espacio topológico especial, es decir un espacio con estructura de  $\mathbb{R}^n$  sobre el cual se extienden las ideas del calculo diferencial

Observe que en la figura 2.5 es posible destacar el plano tangente al punto de origen, el cual contiene a los vectores que pueden ser expresados como los razones de cambio parciales sobre el espacio  $\mathcal{E}$ . Luego, es posible observar el plano cotangente los vectores, el cual contiene las uno-formas, observe que las uno formas pueden definirse como diferenciales normales al vector tangente, esto permite pensar que es posible manipular las bases de vectores y uno-formas diferenciales a partir del uso de las derivadas y de los diferenciales de las funciones de transformación de vector a real. Observe.

**Definición 6:** Para cada una de las funciones  $f \in \mathcal{D}(\mathcal{E}, \mathbb{R})$  existe una uno forma  $df$  en un punto  $p$  cualesquiera definido por:

$$\langle df, X \rangle = Xf \quad \forall X \in \mathcal{E}$$

la uno forma  $df$  la denominamos diferencial de  $f$  en  $P$ .

Ahora, sea  $\phi_a(p) = x^1, x^2, x^3, \dots, x^n$  la función que nos da cuenta de las coordenadas locales, entonces las diferenciales  $(dx^1, dx^2, dx^3, \dots, dx^n)$  en el punto  $P$ , forman la base de uno - formas dual respecto a la base coordenada  $\frac{\partial}{\partial x^1} |_P, \frac{\partial}{\partial x^2} |_P, \frac{\partial}{\partial x^3} |_P, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} |_P$  del plano  $\mathcal{P}_{tg}$ . Por lo tanto es posible verificar que:

$$\langle dx^i, \frac{\partial}{\partial x^j} |_P \rangle = \delta_j^i$$

### 2.3.1. Uno-formas diferenciales

Se entiende por una uno-forma diferencial sobre un punto de  $\mathbb{R}^3$  como una función  $\omega(p)$  que pertenece al conjunto de funciones de transformación lineal definido por  $\mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ . Analíticamente se definen como:

$$\omega(p) = \sum_{i=1}^3 a_i(p) dx_i = a_1(p) dx_1 + a_2(p) dx_2 + a_3(p) dx_3$$

De acuerdo con Misner et al. (1973), el sentido geométrico de las formas diferenciales está asociado a superficies apiladas, que se encuentran orientadas en una dirección, en donde las funciones  $a_i(p)$  permiten inferir si las superficies son planos, es decir cuando  $a_i(p) = cte$  o cuando son superficies diferentes al plano  $a_i(p) \neq cte$ . Observe:

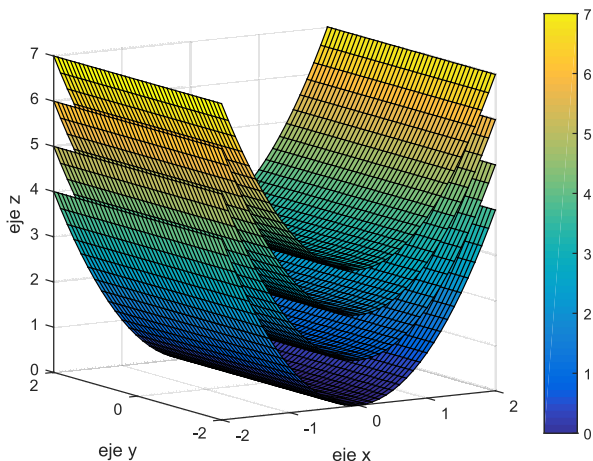


Figura 2.6: Representación de una forma de la función  $\omega(p) = \sum (x^2 + c) dz$ . Elaboración propias. Reproducido en MatLab.

Observe que existe una cierta relación entre los vectores y las formas diferenciales, en el caso de los vectores, los coeficientes  $v_0$  estructuraban el vector, mientras que la base estaba dada por  $e_i$ . Ahora bien, en las formas diferenciales, los coeficientes están dados por las funciones  $a(p)$ , mientras que las bases están dadas por los diferenciales  $dx_i$ . Por otro lado, es posible definir la primera operación entre formas diferenciales. Esta es la suma y resta de una forma, y en modo generalizado de  $k$ -formas.

De acuerdo con esto, sean  $\alpha$  y  $\beta$  dos uno-formas, la suma y resta de formas diferenciales se define como:

$$\alpha \pm \beta = \sum_{i=1}^3 a_i(p) dx_i \pm \sum_{i=1}^3 b_i(p) dx_i = \sum_{i=1}^3 (a_i(p) \pm b_i(p)) dx_i$$

Finalmente, la figura 2.7 ilustra el proceso geométrico de la suma de uno-formas diferenciales, donde de acuerdo a los  $dx$  se modifica la orientación de las superficies, observe:

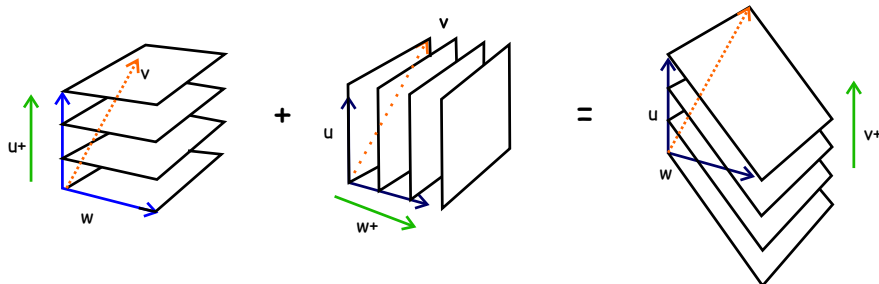


Figura 2.7: Representación geométrica de la suma de formas diferenciales. Tomado y adaptado de Misner et al. (1973)

De la misma forma, es posible hablar de formas diferenciales de grado mayor a uno. Para cons-

truir una definición formal de dos – formas, tres- formas y de k-formas es necesario discutir un par de conceptos de gran importancia en la geometría diferencial, estos son: las funciones bilineales y las formas bilineales. De manera breve es posible definir la forma Bilineal como una aplicación que recibe espacios vectoriales o espacios duales en producto cartesiano como imagen y lo transforma en un numero real, de acuerdo con esto es posible definir el producto tensorial, importante parra definir las dos formas y en general las k-formas.

**Definición 8:** El producto cuña o producto exterior entre uno formas diferenciales se define como un aplicación del producto tensorial. En el caso mas sencillo, esta aplicación tiene como argumento dos campos de uno - formas, el resultado es aumentar en una unidad el grado de la forma diferencial a operar. Observe:

$$\wedge : \wedge^1(\mathbb{R}_p^3)^* \otimes \wedge^1(\mathbb{R}_p^3)^* \mapsto \wedge^2(\mathbb{R}_p^3)^*$$

Luego, con el proposito de mostrar en detalle la aplicación de las formas lineales, es posible calcular el producto cuña como el calculo del determinante entre un espacio vectorial dual, definido por las bases  $dx^1 \wedge dx^2$  y un espacio vectorial, definido por las bases  $e_1, e_2$ . De acuerdo con esto se tiene que:

$$\det [(dx^1 \wedge dx^2) (e_1, e_2)] = \begin{bmatrix} dx^1 e_1 & dx^1 e_2 \\ dx^2 e_1 & dx^2 e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det [(dx^1 \wedge dx^2) (e_1, e_2)] = 1$$

Luego, haciendo el calculo del determinante al alternar las bases del espacio vectorial dual obtenemos que:

$$\det [(dx^2 \wedge dx^1) (e_1, e_2)] = -1$$

Luego, de acuerdo con los resultados anteriormente encontrados se puede deducir que:

$$dx^1 \wedge dx^2 = -dx^2 \wedge dx^1$$

Generalizando lo anterior para cualquier producto alternado se tiene que:

$$dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$$

Finalmente, se puede deducir que:

$$dx^i \wedge dx^i = 0$$

En conclusión, esto permite enunciar a las formas diferenciales de orden mayor a uno como un tensor antisimétrico, pues al aplicar la forma bilinear mediante el determinante se observa la alternación de signos.

### 2.3.2. Dos-formas diferenciales

Se entiende por dos-forma diferencial sobre un punto de  $\mathbb{R}^3$  como una función multilinear alternada  $\Theta(p)$  la cual pertenece al conjunto de las transformaciones de la forma  $\mathcal{L}_{bl}(V \times V, \mathbb{R})$ . Analíticamente se define como:

$$\Theta(p) = \sum_{i < j=1}^3 a_{ij}(p) dx_i \wedge dx_j = a_{12}(p) dx_1 \wedge dx_2 + a_{13}(p) dx_1 \wedge dx_3 + a_{23}(p) dx_2 \wedge dx_3$$

El conjunto de funciones cuya estructura algebraica sea similar a  $\Theta(p)$  se definen como el conjunto de dos formas sobre el espacio vectorial dual del plano tangente que se sitúa en un punto determinado, este conjunto se denota como  $\wedge^2(\mathbb{R}_p^3)^*$ .

Geoméricamente hablando, las dos – forma diferencial se entienden como una intersección entre superficies orientadas, generando algo similar a “tubos”, los cuales tienen una orientación que permite direccionar los flujos. Observe la figura 2.8:

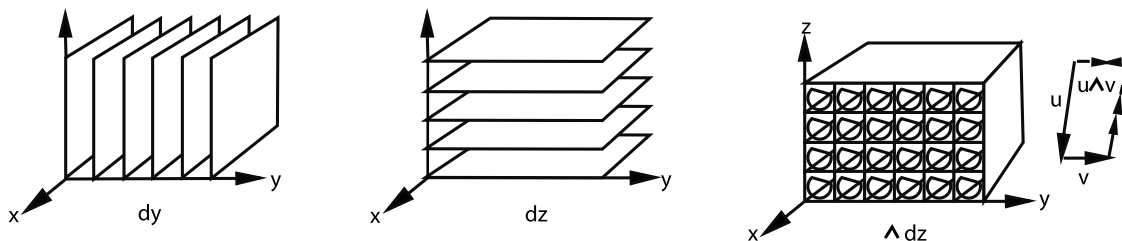


Figura 2.8: Representación geométrica de la intersección entre superficies orientadas a lo largo de los ejes  $dy$  y  $dz$ , generan tubos en la dirección de  $dx$ . Tomado de Misner et al. (1973)

### 2.3.3. Tres-forma diferencial

Se entiende por tres-forma diferencial sobre un punto de  $\mathbb{R}^3$  como una función multilinear alternada  $\Psi(p)$  la cual pertenece al conjunto de las transformaciones de la forma  $\mathcal{L}_{tl}(V \times V \times V, \mathbb{R})$ . Analíticamente se define como:

$$\Psi(p) = a_{ijk}(p) dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k$$

El conjunto de funciones cuya estructura algebraica sea similar a  $\Psi(p)$  se definen como el conjunto de tres formas sobre el espacio vectorial dual del plano tangente que se sitúa en un punto determinado, este conjunto se denota como  $\wedge^3(\mathbb{R}_p^3)^*$ .

Geoméricamente hablando, las tres formas diferenciales se entienden como una triple intersección de los planos. Estas intersecciones generan un volumen, en un lenguaje físico una densidad. Cabe resaltar que las tres formas no tienen orientación alguna. Observe la figura 2.9:

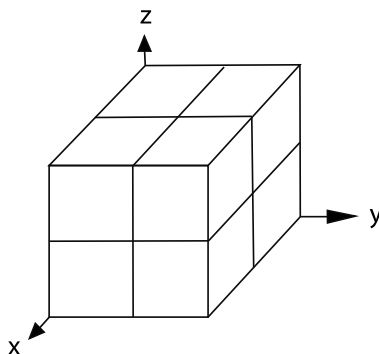


Figura 2.9: Representación geométrica de una triple intersección entre superficies orientadas a lo largo de  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ . Tomado de Warnick et al. (1997)

## 2.4. Operadores sobre formas diferenciales

### 2.4.1. Producto Exterior

A lo largo del aparte 2.3 se había realizado una pequeña reseña acerca del producto exterior. Ahora bien, de manera más general el producto exterior entre  $k$ -formas diferenciales se define como una aplicación del producto tensorial, cuyo dominio son campos de  $k$ -formas diferenciales y su imagen es un campo de formas diferenciales cuyo grado<sup>6</sup> es la suma de los grados de las  $k$ -formas que hacen parte del dominio. Observe:

$$\wedge : \wedge^k(\mathbb{R}_p^n)^* \otimes \wedge^s(\mathbb{R}_p^n)^* \mapsto \wedge^{k+s}(\mathbb{R}_p^n)^*$$

Ahora bien, sean  $\omega$  una  $k$ -forma,  $\varphi$  una  $s$ -forma  $\theta$  una  $r$ -forma, el producto exterior cumple con las siguientes propiedades Flanders (1963), las cuales se demuestran en detalle en el anexo uno.

1.  $(\omega \wedge \varphi) \wedge \theta = \omega \wedge (\varphi \wedge \theta)$
2.  $\omega \wedge \varphi = (-1)^{kr} \omega \wedge \varphi$
3.  $\omega \wedge (\varphi + \theta) = \omega \wedge \varphi + \omega \wedge \theta$       donde  $s = r$

Por otro lado, observe que el producto exterior tiene un impacto en la orientación de los flujos en los tubos, relacionado las dos formas con el producto cruz de dos vectores, es posible observar que de acuerdo a la simetría o antisimetría del producto exterior, el flujo tiene una orientación. Para hacer más clara esta afirmación, el lector podrá observar la figura 2.10 donde se muestra la orientación del flujo de acuerdo al producto exterior

<sup>6</sup>De acuerdo con (Flanders,1963) resulta importante mencionar que el grado del campo de formas diferenciales resultantes después de aplicar el producto exterior, no puede superar el grado de la dimensión de  $\mathbb{R}^n$ . Por lo tanto  $k + s < n$

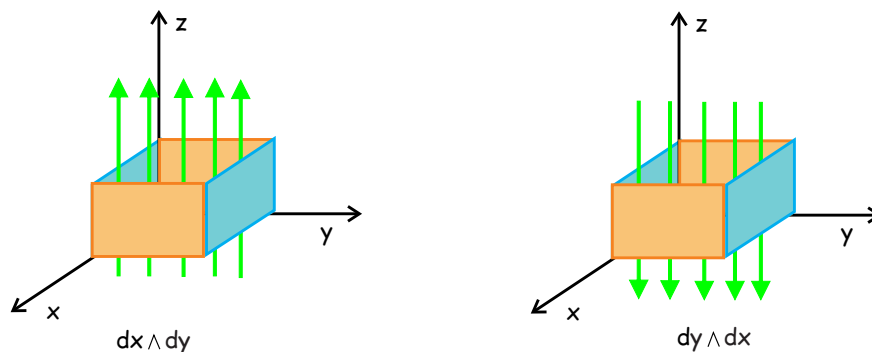


Figura 2.10: Orientación del producto cuña de acuerdo a la simetría o antisimetría de los diferenciales. Elaboración Propia. Reproducido en Corel Draw X7

Finalmente, es posible mostrar la relación existente entre el producto exterior para formas diferenciales y los productos vectoriales y escalares, propios del calculo vectorial. Tal demostración se encuentra en el anexo 1 del presente trabajo

### 2.4.2. Derivada Exterior

El operador derivada exterior es un operador aplicado a k-formas diferenciales con el propósito hallar las razones de cambio en funciones de varias variable, ademas de esto, permite aumentar en uno el grado de la k-forma sobre la que se aplica. Luego, el operador derivada se define como:

$$d : \wedge^k(\mathbb{R}_p^n)^* \longrightarrow \wedge^{k+1}(\mathbb{R}_p^n)^*$$

$$\omega \longrightarrow d\omega$$

Por otro lado, siguiendo a Flanders (1963), La derivada exterior cumple con las siguientes propiedades, las cuales se demuestran paso a paso en el anexo uno.

1.  $d(\omega + \varphi) = d\omega + d\varphi \quad \forall \omega, \varphi \in \wedge^k(\mathbb{R}_p^n)^*$
2.  $d(\omega \wedge \varphi) = d\omega \wedge \varphi + (-1)^k \omega \wedge d\varphi \quad \text{donde } \omega = k - \text{forma y } \varphi = s - \text{forma}$
3.  $d(d\Omega) = d^2\Omega = 0 \quad \text{Para cualquier } k - \text{forma diferencial}$

### 2.4.3. Operadores vectoriales desde las formas diferenciales

En estricto sentido, algunos autores orientan la teoría de formas diferenciales como una generalización del calculo vectorial con un alto potencial geométrico. Las representaciones geométricas que surgen pueden ser utilizadas para la enseñanza de problemas físicos, como el caso del electromagnetismo, desde una perspectiva mas amigable para el estudiante Warnick et al. (1997); optando por el uso de superficies orientadas como el aspecto mas relevante de esta teoría. De acuerdo con Marsden et al. (1991) se puede afirmar que:

La teoría de formas diferenciales proporciona una manera conveniente y elegante de expresar los teoremas de Green Stokes y Gauss. De hecho el uso de formas diferenciales

muestra que todos estos teoremas son manifestaciones de una sola teoría matemática subyacente y proporciona el lenguaje para generalizarlo a  $n$  dimensiones. (Marsden et al., 1991, p.566)

De acuerdo con lo anterior, es posible deducir los operadores *Gradiente*, *rotacional* y *divergencia* al hacer uso del operador derivada exterior. Observe el siguiente diagrama que orientara la construcción de los operadores vectoriales, los cuales se demuestran en detalle en el anexo uno.

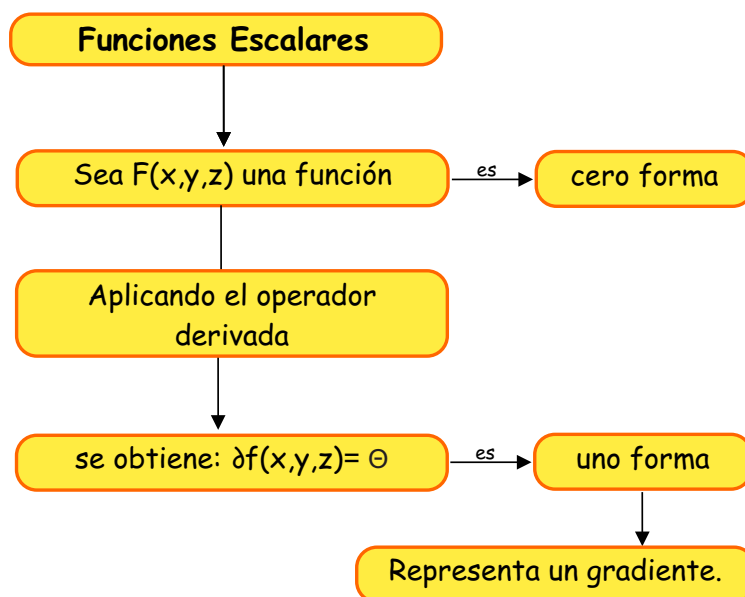


Figura 2.11: Diagrama para la deducción del gradiente a partir de una función escalar o cero formas

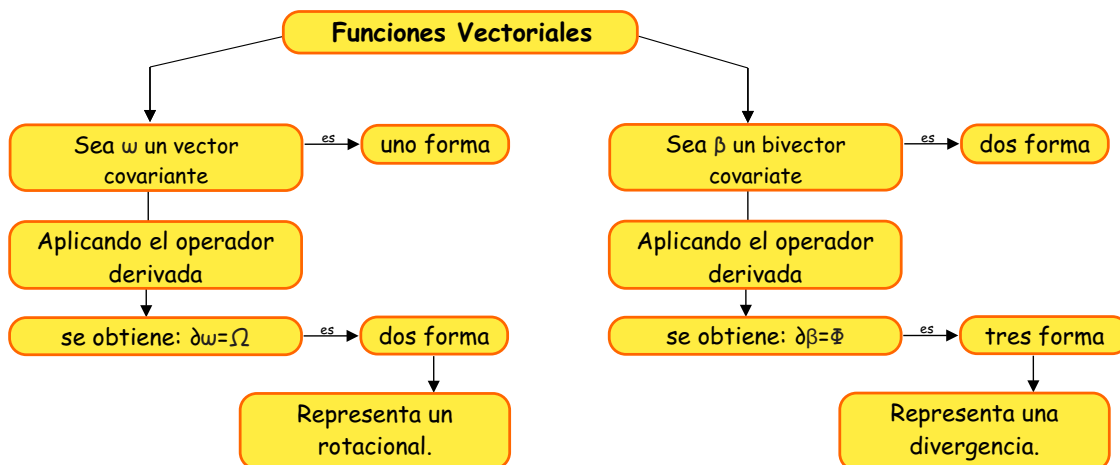


Figura 2.12: Diagrama para la deducción del rotacional y la divergencia a partir de uno formas y dos formas

Ahora bien, es posible establecer una comparación entre las representaciones de los operadores en el lenguaje vectorial y la representación de los operadores en el lenguaje de las formas diferen-

ciales. Vale la pena resaltar que el proposito de presentar los operadores vectoriales en coordenadas cartesianas esta orientado a introducir al lector a estos objetos desde el lenguaje mas básico, a lo largo del capitulo 3 se probaran los diferentes operadores en coordenadas esféricas<sup>7</sup>. Por otro lado, también es importante que las representaciones se realizan en coordenadas cartesianas para que el lector pueda contrastar fácilmente las representaciones en ambos lenguajes.

### Gradiente

La representación vectorial del gradiente se define como la derivada direccionada sobre una superficie definida por una función  $f(x, y, z)$ . Esta variación direccionada tiene grandes aplicaciones en diversos campos de la física. El ejemplo mas usual esta dado para la construcción de la ley de Fourier, pues en esta ley asumimos la temperatura como un función escalar, sobre la cual es posible aplicar el operador nabla, permitiendo así calcular el gradiente de temperatura, es decir la variación orientada de la temperatura a lo largo de una superficie. De manera analítica el gradiente vectorial se define como:

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \hat{e}_x + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} \hat{e}_y + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \hat{e}_z$$

Mientras tanto, la representación del gradiente en formas diferenciales esta definida a partir de uno formas, las cuales son el resultado de calcular el cambio direccionado de un campo escalar o cero formas. Analíticamente se representa como:

$$df = \partial_x [f(x, y, z)] dx + \partial_y [f(x, y, z)] dy + \partial_z [f(x, y, z)] dz$$

Desde la perspectiva vectorial, el gradiente se representa como el campo vectorial que es normal a las curvas de contorno generadas por la superficie. Observe la figura 2.13 :

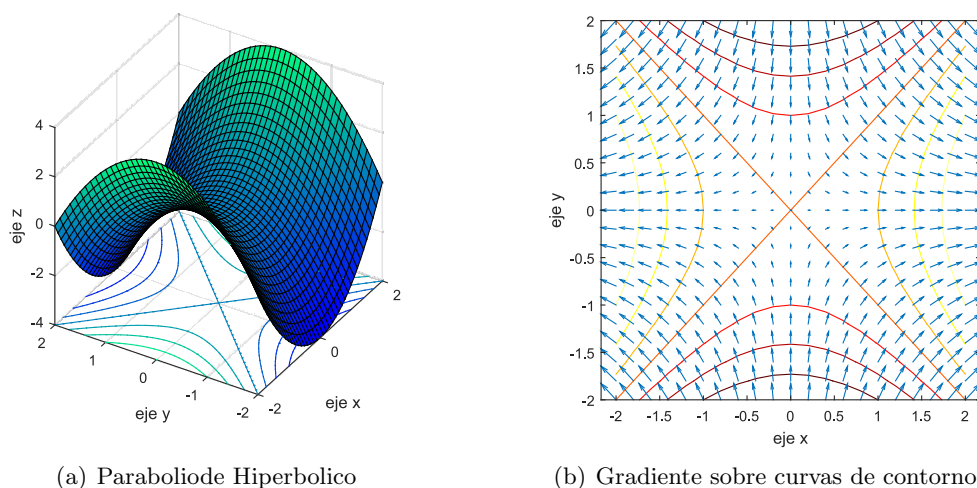


Figura 2.13: Representación vectorial del gradiente. Elaboración propia. Reproducido en Matlab

<sup>7</sup>Esta idea surge a partir de las discusiones realizadas con el asesor a lo largo del periodo de 2016II-2018II y que tuvieron lugar en las instalaciones de la Universidad Pedagógica Nacional

Mientras tanto, en el desde las formas diferenciales el gradiente se define como una serie de superficies apiladas en dirección normal a uno de los planos, observe la figura 2.14.

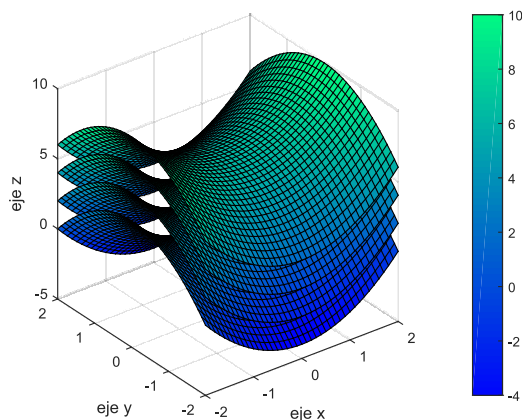


Figura 2.14: Representación del gradiente a partir de las formas diferenciales. Elaboración Propia. Reproducido en Matlab

### Rotacional

La representación vectorial del rotacional se define como el producto cruz o producto vectorial entre el operador nabla, que da cuenta de derivadas parciales en dirección de las bases unitarias, y un campo vectorial  $\mathbf{F}(x, y, z)$ . Analíticamente se define como:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \mathbf{F}_x & \mathbf{F}_y & \mathbf{F}_z \end{bmatrix} = [\partial_y \mathbf{F}_z - \partial_z \mathbf{F}_y] \hat{x} - [\partial_x \mathbf{F}_z - \partial_z \mathbf{F}_x] \hat{y} + [\partial_x \mathbf{F}_y - \partial_y \mathbf{F}_x] \hat{z}$$

Mientras tanto, en el lenguaje de las formas diferenciales, el rotacional se define a partir de la derivada de una uno-forma, es decir su resultado es una dos-forma. Analíticamente se representa como:

$$d\omega = [\partial_y f_z - \partial_z f_y] dx \wedge dy + [\partial_z f_x - \partial_x f_z] dz \wedge dx + [\partial_x f_y - \partial_y f_x] dx \wedge dy$$

De manera gráfica, el rotacional se puede representar en el lenguaje vectorial como un campo vectorial que puede rotarse, generando un nuevo campo vectorial en dirección del producto vectorial, observe la figura 2.15:

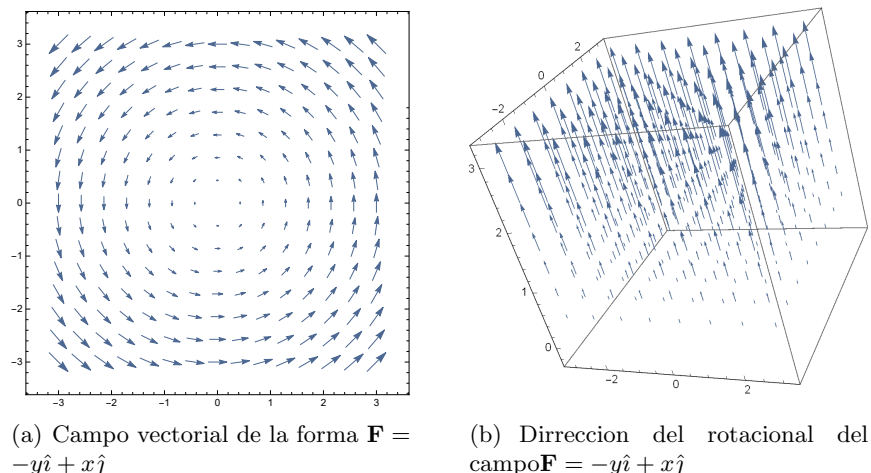


Figura 2.15: Representación vectorial del rotacional. Elaboración propia. Reproducido en Wolfram Mathematica

Luego, el rotacional en el lenguaje de las formas diferenciales se representa como un conjunto de «tubos» en la dirección resultante del producto cuña. De acuerdo con esto, observe la figura 2.16.

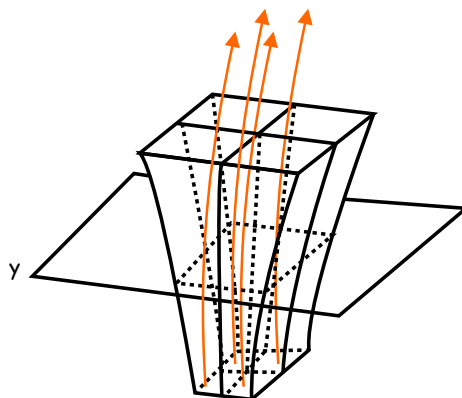


Figura 2.16: Representación gráfica del rotacional en formas diferenciales. Tomado y modificado de Warnick et al. (1997)

### Divergencia

Se entiende por divergencia, como el calculo de la razón de cambio entre un flujo de campo vectorial entrante y flujo de cambio vectorial saliente en un volumen encerrado en una superficie de control. Luego, la divergencia también permite medir la forma en como sale el material de la superficie, brindando información acerca de las fuentes o sumideros del campo vectorial en análisis; finalmente si no se evidencia diferencia en los flujos permite concluir que el sistema en ese espacio de análisis carece de fuente y/o sumideros. Analíticamente, desde la perspectiva vectorial se representa como:

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{F}}(x, y, z) = [F_x \hat{e}_x + F_y \hat{e}_y + F_z \hat{e}_z] \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial x} \hat{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \hat{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \hat{e}_z \right] \implies \frac{\partial^2 F_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial z^2}$$

Por otro lado, desde las formas diferenciales, la expresion algebraica para la divergencia esta dada por:

$$d\theta = \left[ \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \right] dx \wedge dy \wedge dz$$

Geomericamente, la divergencia desde una perspectiva vectorial se representa como un campo el campo vectorial que atraviesa una superficie de control, observe la figura 2.17.

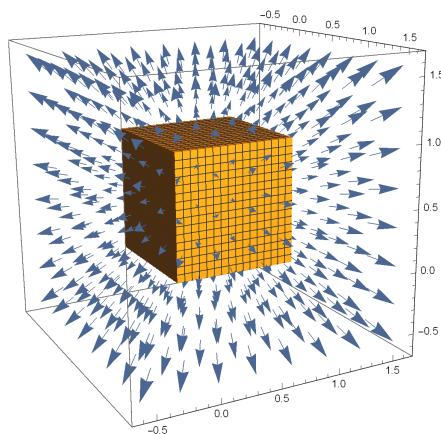


Figura 2.17: Divergencia del campo  $\vec{\mathbf{F}} = x + 0,5\hat{i} + y + 0,5\hat{j} + z + 0,5\hat{k}$  sobre una superficie cilíndrica. Elaboración propia. Reproducido en Wolfram Mathematica 11

Por otro lado, la representación en formas diferenciales para la divergencia esta dada por un volumen, que al final representa la tasa de cambio de la divergencia. Como representación de esto se encuentra la figura 2.18

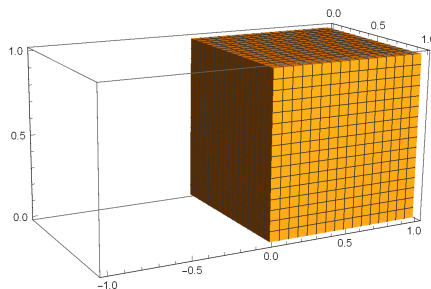


Figura 2.18: Representacion de la divergencia en formas diferenciales, coordenadas cartesianas. Elaboración propia. Reproducido en Wolfram Mathematica 11

### 2.4.4. Operador Pull-Back

El operador pull back se define como un difeomorfismo sobre las formas diferenciales. En otras palabras, el operador pull-back permite realizar un mapeo desde un sistema coordenado  $u$  hacia un sistema coordenado  $v'$ . El operador pull-back se representa con una estrella  $[\star]$ . Observe que la estrella se ubica después de la letra asignada para representar la forma diferencial.

$$\phi^* = \alpha(u) \implies \alpha(v')$$

Finalmente, de acuerdo con (Flanders, 1963), el operador pull back cumple con las siguientes propiedades.

1.  $\phi^*(\alpha + \beta) = \phi^*(\alpha) + \phi^*(\beta)$
2.  $\phi^*(\alpha \wedge \beta) = \phi^*(\alpha) \wedge \phi^*(\beta)$
3.  $d(\phi^*(\alpha)) = \phi^*(d\alpha)$

### 2.4.5. Operador Hodge Star

Se entiende por el operador hodge star como una transformación lineal entre los  $k$ -grados de la  $k$ -forma diferencial. Este operador tiene una gran potencial puesto que permite variar el grado de la  $k$ -forma sin necesidad de realizar una derivada, o de realizar un producto cuña. El operador hodge star se define como una  $[\star]$  la cual se ubica antes de la letra que representa la  $k$ -forma diferencial. Observe:

$$\star\phi = \bigwedge \mathbb{R}^k \implies \bigwedge \mathbb{R}^{k-n}$$

Por ultimo, de acuerdo con Warnick et al. (1997) el operador hodge star tiene una representación geométrica. Observe que de acuerdo a la figura 1.15, se tienen planos en una dirección, pero además se tienen tubos en la misma dirección de los planos. Esto permite interpretar que el operador hodge star mantiene la orientación de la representación a transformar, a pesar de que se varíe la representación entre planos, tubos y cajas, observe la figura 2.19.

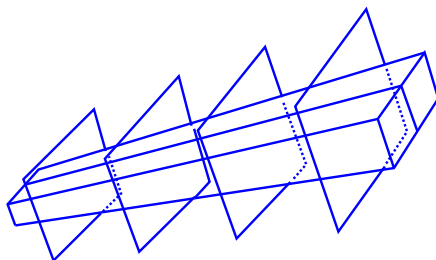


Figura 2.19: Representación geométrica del operador Pull-Back. Tomado de Warnick et al. (1997)

## 2.5. Teoremas de integración en formas diferenciales

### 2.5.1. Teorema de Stokes

El teorema de Stokes es considerado como una generalización del teorema de Green en tres dimensiones. Vectorialmente el teorema de Stokes enuncia que la integral de trayectoria para un campo vectorial para encerrado en un región  $D$ , donde esta está determinada por una curva en el espacio, sera igual a la integral de superficie del rotacional de dicho campo en una superficie determinada por la región  $D$ . Observe que el teorema de Stokes se enuncia como:

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_s \nabla \times \mathbf{F} \, dA$$

Luego, el teorema de Stokes en formas diferenciales se puede enunciar como, la relación entre la integral de una uno forma<sup>8</sup>  $\beta$  a lo largo de una curva cerrada y la integral de superficie para  $d\beta$ . Observe:

$$\int_{\partial s} \beta = \iint_s d\beta$$

Geoméricamente es posible relacionar el teorema de Stokes mediante la siguiente ilustración, donde en primer lugar es posible observar las superficies encerradas por la curva. Luego, en la misma curva es posible observar los tubos que salen. Observe que la cantidad de superficies cortadas es igual a la cantidad de tubos que salen. Observe la figura 2.20

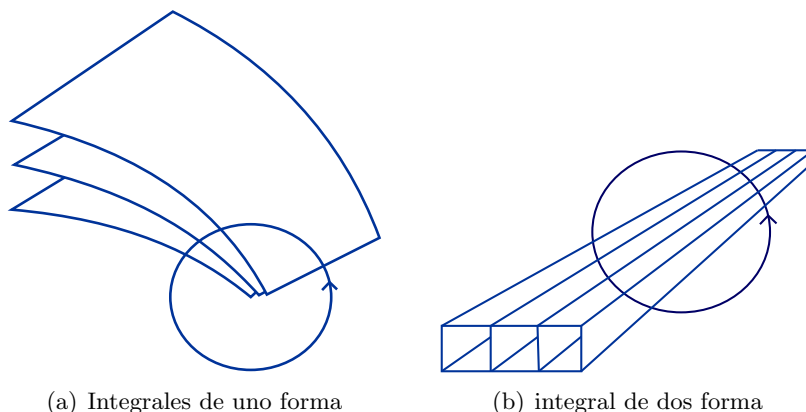


Figura 2.20: Representación geométrica del teorema de Stokes, Tomado de Warnick et al. (1997)

### 2.5.2. Teorema de la divergencia

Vectorialmente, el teorema de la divergencia relaciona la integral de superficie para un campo vectorial al rededor de una superficie delimitada por una curva  $D$ , con la triple integral de volumen para la divergencia de un campo vectorial. Analíticamente se enuncia como:

<sup>8</sup>Las integrales de uno formas y de dos formas se muestran en el anexo 1

$$\iint_s \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \iiint_v \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV$$

Luego, en terminos de formas diferenciales, se enuncia como la relación entre la integral para un dos forma  $\tau$  al rededor de una superficie, y la integral de volumen para  $d\tau^9$  que encierra a los tubos generados. por  $\tau$ . Analiticamente se tiene:

$$\iiint_v d\tau = \iint_{\partial v} \tau$$

Geomericamente se representa lo anterior como la cantidad de tubos que divergen en un punto particular y forman un volumen medible.

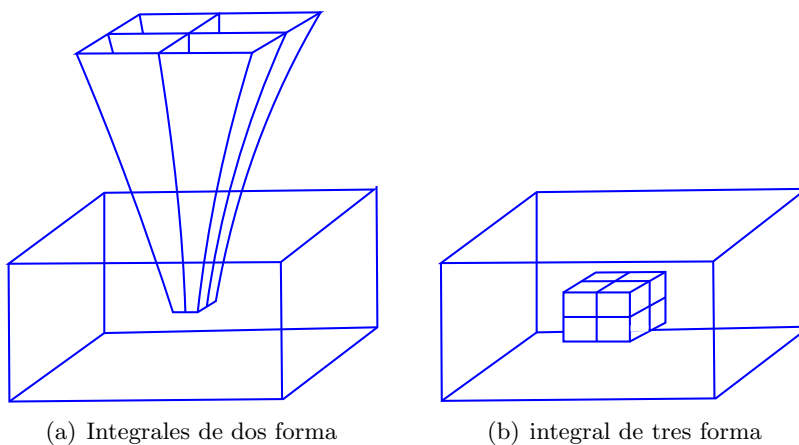


Figura 2.21: Representación geométrica del teorema de la divergencia Tomado de Warnick et al. (1997)

---

<sup>9</sup>Recuerde que al derivar una dos forma se obtiene el la divergencia, en términos de formas diferenciales

## Capítulo 3

# Análisis geométrico del campo gravitacional

¿Cómo puede ser que las matemáticas, siendo «después de todo» un producto del pensamiento humano que es independiente de la experiencia, sea tan admirablemente apropiada para los objetos de la realidad?

---

*Albert Einstein*

Hasta el momento, a lo largo de la presente investigación se ha realizado una caracterización histórica acerca de la ley de gravitación universal, sin profundizar en proceso matemático y geométrico que se requiere para reconstruir dicha ley. Con el propósito de analizar desde una perspectiva geométrica la ley de gravitación, a partir del contraste entre vectores y formas diferenciales, a lo largo de las siguientes líneas se enfatizarán en varios aspectos. En primer lugar se formulará matemáticamente la ley de gravitación clásica a partir de las leyes de Kepler y algunos supuestos matemáticos. En segundo lugar, se realizará un análisis de dicha ley mediante la teoría clásica de campos, este análisis será en primer lugar mediante el uso de nociones vectoriales. En tercer lugar se realizará un contraste de los resultados obtenidos anteriormente, con los resultados y las representaciones obtenidas a partir de análisis geométrico mediante formas diferenciales. Finalmente, al explicar las figuras resultantes del tercer aspecto en mención, será posible sugerir algunas recomendaciones de carácter pedagógico para la enseñanza de campo.

### 3.1. Reconstrucción de la ley de gravitación universal

Con el propósito de reconstruir la ley de gravitación universal, resulta pertinente recordar las leyes de Kepler, las cuales brindan una serie de consideraciones físicas y matemáticas que

permiten deducir una expresión analítica que resulte consistente con los aspectos conceptuales de la gravitación clásica. De acuerdo con Granés (2005) las leyes de Kepler se enuncian como:

- **Primer Principio:** Las órbitas de los planetas son elipses. El sol se encuentra en uno de los focos de la elipse.
- **Segundo principio:** La velocidad de un planeta en su órbita es tal que las áreas barridas por la línea que une el sol con el planeta son iguales en tiempos iguales.
- **Tercer Principio:** La proposición entre los tiempos periódicos de dos planetas cualesquiera es de manera precisa la proporción sesquialtera de sus distancias medias.

De acuerdo con lo anterior, es posible observar que, para matematizar de manera sencilla las leyes de Kepler, será necesario recurrir a un sistema coordenado que permita aprovechar la simetría del problema. Por ejemplo, la primera ley enuncia que los planetas describen órbitas elípticas, las cuales resultarían dispendiosas de analizar desde un sistema cartesiano. En relación con lo anterior, se eligen las coordenadas polares como un sistema coordenado que permite analizar de una manera más simétrica el sistema físico en cuestión. De acuerdo con lo anterior, el par ordenado de coordenadas cartesianas  $\{x, y\}$ , se escribe en términos del sistema coordenado polar, en términos del par ordenado  $\{r, \theta\}$ . Por otro lado, vale la pena resaltar que los vectores unitarios en coordenadas polares<sup>1</sup> para ampliar este aspecto definen como:

- $\hat{e}_r = \cos(\theta)\hat{i} + \sin(\theta)\hat{j}$
- $\hat{e}_\theta = -\sin(\theta)\hat{i} + \cos(\theta)\hat{j}$

Finalmente, para formular el concepto de fuerza gravitacional será necesario encontrar una expresión de la aceleración en términos del sistema coordenado polar. Para cumplir con esto, se define cualquier punto (*posición*) sobre el plano polar como  $\vec{r} = r\hat{e}_r$ <sup>2</sup>

#### 3.1.1. Deducción de la velocidad y la aceleración en coordenadas polares

Para calcular la velocidad de una partícula en un sistema coordenado polar basta con diferenciar el vector  $\vec{r} = r\hat{e}_r$  que nos da cuenta de la posición en el plano. De acuerdo con esto tenemos que:

$$\frac{d\vec{r}\hat{e}_r}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{e}_r + r\frac{d\hat{e}_r}{dt}$$

Siguiendo las reglas de derivación y aplicando la regla de la cadena cuando sea pertinente se tiene que :

---

<sup>1</sup>En este sentido el lector recordará las ecuaciones de transformación entre coordenadas cartesianas y polares. Sin embargo se recomienda revisar Malakhaltsev and Artega Bejarano (2013)

<sup>2</sup>El lector podrá recordar que en el sistema cartesiano las bases al ser derivadas no varían, pues estas son constantes. Sin embargo, en el sistema polar las bases están variando con respecto al tiempo, más específicamente el ángulo está variando con el tiempo.

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}\hat{e}_r + \vec{r}\left[\frac{d\theta}{dt}\hat{e}_\theta\right] \quad (3.1)$$

Ahora bien, para encontrar la aceleración de una partícula en un sistema coordenado, derivamos la ecuación (3.1), de acuerdo con esto se tiene que:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{d\vec{r}}{dt}\hat{e}_r + \vec{r}\left[\frac{d\theta}{dt}\hat{e}_\theta\right]\right]$$

Siguiendo las reglas de derivación y aplicando la regla de la cadena cuando sea pertinente se tiene que la aceleración esta dada por:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} = \left[\frac{d^2\vec{r}}{dt} + \vec{r}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\hat{e}_r + \left[2\frac{d\vec{r}}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \vec{r}\frac{d^2\theta}{dt}\right]\hat{e}_\theta \quad (3.2)$$

### 3.1.2. Matematización de los principios de Kepler

El primer principio de Kepler enuncia que los planetas describen órbitas elípticas. Para describir las órbitas planetarias se toma como punto de partida la ecuación de la elipse en coordenadas cartesianas, esta se define como:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Luego, observando la figura 3.1 es posible inferir algunas consideraciones con el proposito de reescribir la ecuación de la elipse en términos de coordenadas polares:

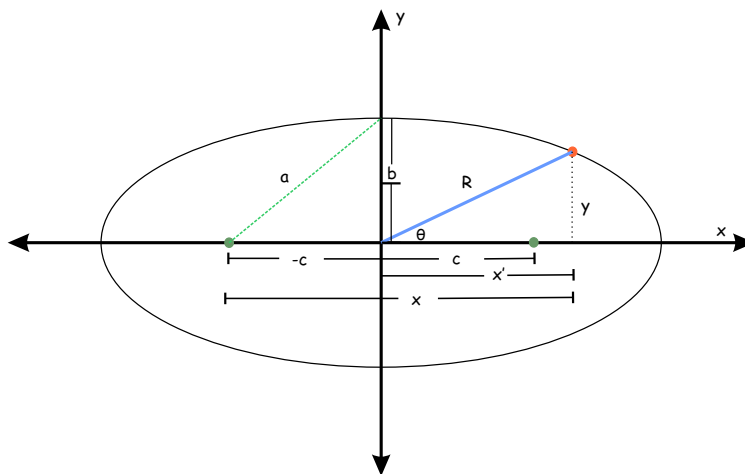


Figura 3.1: Condiciones para convertir la elipse de coordenadas cartesianas a polares. Elaboración propia. Reproducida en Corel Draw X7

Teniendo en cuenta las ecuaciones de transformación entre coordenadas cartesianas y coordenadas polares, de figura 3.1 se deduce que:

- $x = x' + c = r\cos(\theta) + c$

- $y = y' = r \sin(\theta)$

Finalmente, remplazando las consideraciones realizadas bajo coordenadas polares en la ecuación cartesiana de elipse y realizando el álgebra correspondiente es posible expresar la ecuación de la elipse en coordenadas polares como:

$$r = \frac{r_0}{1 + e \cos(\theta)} \quad (3.3)$$

Donde  $r_0$  se define como el *latus rectus* de una elipse y  $e$  es el valor de la excentricidad que se encuentra entre  $0 \leq e \leq 1$ .

El segundo principio enuncia una relación entre el radio vector de un planeta respecto al sol, el área barrida en un tiempo  $t$  y su relación con la velocidad, donde el planeta barre áreas iguales en tiempos iguales. Este principio se puede analizar matemáticamente a partir de algunos aspectos de las formas diferenciales.

Para calcular el área de una región, es posible realizar el producto cuña entre dos uno formas diferenciales, las cuales también pueden entenderse como bivectores. De acuerdo con lo anterior se define  $f(r)$  y  $f(r) + \Delta f(r)$ . Luego, esto nos da el área de un paralelogramo. El lector podrá recordar que para hallar la de un triángulo dividimos entre dos el área del paralelogramo. Observe:

$$[f(r)] \wedge [f(r) + \Delta f(r)] = 2A_{\Delta}$$

Operando esto, y realizando el álgebra obtenemos:

$$A_{\Delta} = \frac{f(r) \wedge \Delta f(r)}{2}$$

Para calcular la variación de esta área con respecto al tiempo, se tiene que:

$$\frac{\Delta A_{Triang}}{\Delta t} = \tau$$

La anterior expresión se iguala a una constante de acuerdo con la segunda ley de Kepler. Luego, Aplicando el límite a la expresión inmediatamente anterior se obtiene que:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \left[ \frac{\Delta A_{Triang}}{\Delta t} \right] = \frac{1}{2} [f(r) \wedge \dot{f}(r)] \quad (3.4)$$

Luego, remplazando los valores de  $f(r)$  y  $\dot{f}(r)$  en la expresión anterior y realizando el álgebra adecuada tenemos que:

$$r^2 \dot{\theta} \hat{e}_r \wedge \hat{e}_{\theta} = 2\tau \quad (3.5)$$

donde  $\tau$  representa una constante que muestra las áreas que barre el radio vector en tiempos iguales es constante.

### 3. 3.1. RECONSTRUCCIÓN DE LA LEY DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL

Es posible analizar con mas detenimiento el resultado de la ecuación (3.4), observe que el resultado obtenido puede denominarse como velocidad areolar. Ahora bien, realizando un poco de álgebra es posible obtener que:

$$v_a = \frac{1}{2} [f(r) \wedge \dot{f}(r)] = \frac{1}{2m} [f(r) \wedge g(P)] \quad (3.6)$$

La ecuación 3.6 muestra en cierto detalle la relación entre velocidad areolar y el momentum angular. Esto implica que el momentum angular debe conservarse en las órbitas elípticas de un cuerpo celeste. En otras palabras, el grado de inclinación de una orbita debe ser un valor constante. Teniendo en cuenta la rigurosidad de las formas diferenciales, es posible representar la conservación del momentum angular como:

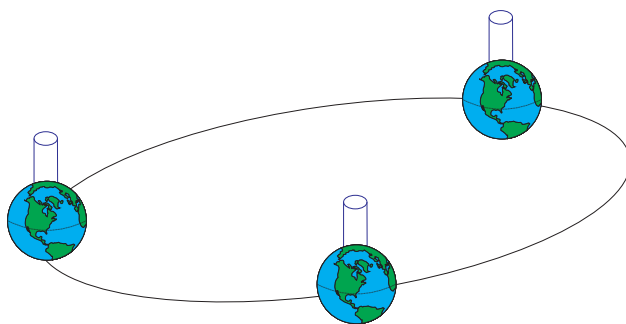


Figura 3.2: Conservación del momentum angular mediante tubos constantes. Elaboración Propia. Reproducida en Corel Draw X7

Analíticamente se tiene que:

$$\frac{1}{2m} [f(r) \wedge g(P)] = 2\tau$$

Por ultimo, el tercer principio es una relación deducida por Kepler con base en sus observaciones y en los datos usados para la construcción de la orbita de marte. Matemáticamente la tercera ley se expresa como la siguiente relación:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{a'^3}{T'^2} = \frac{a''^3}{T''^2} = \lambda \quad (3.7)$$

#### 3.1.3. Deducción de la ley de gravitación universal

Ahora bien, a lo largo de las siguientes lineas se tomarán las leyes de Kepler y los análisis matemáticos realizado sobre las mismas como un insumo para la formulación matemática de la ley de gravitación universal<sup>3</sup>. En primer lugar, recordando el segundo principio Newtoniano, el cual se ha descrito anteriormente, en el sistema coordenado elegido se obtiene que:

$$\vec{F}_{12} = m\vec{a} = m \left[ (\ddot{r} + \dot{r}\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + \ddot{\theta}r)\hat{e}_\theta \right]$$

<sup>3</sup>Observe que se reemplaza el valor de la aceleración que se obtuvo en la ecuación 2, para hacer esta mas compacta se utiliza la notación de Newton

Luego, derivando el modulo de la expresión (3.5) con respecto al tiempo obtenemos que:

$$\frac{d(2\tau)}{dt} = \frac{d(\dot{r}^2 \dot{\theta})}{dt}$$

$$0 = 2\dot{r} \ddot{r} + \dot{r}^2 \ddot{\theta} \implies 0 = 2\dot{r}\ddot{r} + \dot{r}^2 \ddot{\theta}$$

Por lo tanto, de acuerdo con la expresión hallada anteriormente, la fuerza queda expresada como:

$$\vec{F}_{12} = m \left[ \ddot{r} + \dot{r}^2 \ddot{\theta} \right] \hat{e}_r \quad (3.8)$$

Observe que la ecuación (3.8) presenta algunos indicios sobre la dirección de la ley de gravitación, pues esta queda en términos de la componente radial del sistema coordenado. Esto es importante de resaltar, puesto que fue uno de los grandes aportes propuesto por Newton, quien enunció que las fuerzas gravitacionales tienen una dirección radial. Resolviendo en detalle<sup>4</sup> la ecuación (3.8) se llega a la ecuación

$$F_{12} = -\frac{GMm}{r^2} \hat{e}_r \quad (3.9)$$

Donde la ecuación (3.9) se conoce como la ley de gravitación universal clásica. Esta ley expresa que la fuerza de atracción gravitacional es proporcional al producto de las masas, donde  $M$  es la masa que genera el campo gravitacional atrayente y  $m$  es la masa u objeto atraído. Además de esto, la expresión anterior indica que la fuerza gravitacional es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia radial de los dos planetas. Por último, es importante resaltar el carácter vectorial, donde la fuerza de gravitación siempre está dirigida hacia el centro de la tierra, debido a la orientación de la componente radial.

## 3.2. Teoría de clásica de campo gravitacional en forma vectorial

Con el objetivo de realizar un tratamiento adecuado de la teoría clásica de campos aplicada a la ley de gravitación universal, es necesario desarrollar algunos conceptos que pueden resultar beneficioso para enriquecer el análisis geométrico propuesto. En primer lugar es necesario deducir una función escalar que permita caracterizar *el potencial gravitacional* generado por una distribución de masa uniforme. Para hallar, esto es necesario recurrir al cálculo del trabajo necesario para desplazar una masa  $m$  una distancia  $r$ . Para realizar este cálculo, el lector podrá apoyarse en la figura 3.3.

---

<sup>4</sup>La solución de la ecuación 3.8 se encuentra en el anexo 2 del presente trabajo

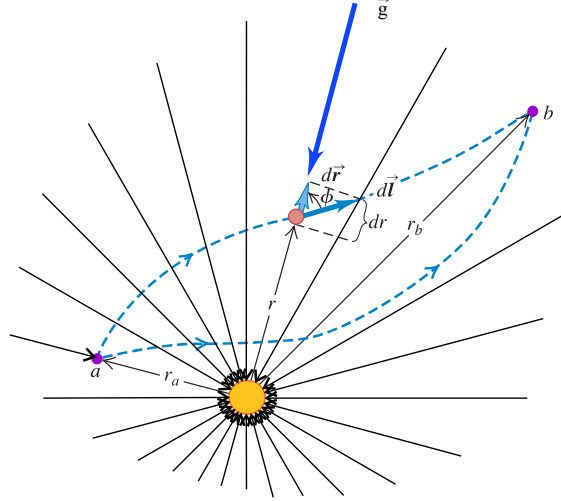


Figura 3.3: Trabajo en un campo gravitacional. Tomado y modificado de Young et al. (2009)

Luego, desde la mecánica clásica el trabajo se define como:

$$W = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_a^b F dl \cos(\theta)$$

Aplicando la definición anterior sobre la fuerza gravitacional<sup>5</sup> se obtiene<sup>6</sup> que:

$$W = \int_{r_a}^{r_b} \frac{GMm}{r^2} dl \cos(\theta) \Rightarrow \int_{r_a}^{r_b} \frac{GMm}{r^2} dr = -GMm \left( \frac{1}{r} \right)_{r_a}^{r_b}$$

Finalmente el trabajo evaluado termina definido como:

$$W = -GMm \left( \frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} \right)$$

Por otro lado, si  $r_b \rightarrow \infty$  y  $r_a = r$  entonces:

$$W = U_{grav} = \frac{GMm}{r} \tag{3.10}$$

La ecuación (3.10) da cuenta del calculo de la energía potencial gravitacional, es decir la energía necesaria para realizar el trabajo de desplazar una masa  $m$  una cierta distancia. Ahora bien, *el potencial gravitacional*  $[\phi]$  se define matemáticamente como la energía potencial gravitacional por unidad de masa. Siguiendo esta definición se obtiene que:

$$\phi = \frac{U_{grav}}{m} = \frac{GM}{r} \tag{3.11}$$

<sup>5</sup>En sentido riguroso la magnitud de la fuerza debería ser  $\frac{GMm}{r^2}$ . Pero en realidad debe agregarse un signo menos, puesto que de acuerdo con la figura 3.3 la dirección de las líneas de campo son de manera radial y hacia el centro

<sup>6</sup>Observe que a partir de la figura 4 es posible deducir que  $dl = \frac{dr}{\cos(\theta)}$ , por lo tanto es posible reescribir el  $dr$  como se encuentra en la integral

### 3. 3.2. TEORÍA DE CLÁSICA DE CAMPO GRAVITACIONAL EN FORMA VECTORIAL

---

Luego de esto, es posible mostrar que el potencial gravitación es posible escribirlo en termino coordenadas esféricas, conservando su sentido físico y sin necesidad de términos adicionales. Para esto tenemos que el valor de  $r$  en coordenadas esféricas se define como:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Remplazando las ecuaciones de transformación entre coordenadas esféricas y coordenadas cartesianas, y realizando el álgebra implícita se tiene que se tiene que<sup>7</sup>:

$$r = \sqrt{(\rho \sin(\theta) \cos(\varphi))^2 + (\rho \sin(\theta) \sin(\varphi))^2 + (\rho \cos(\theta))^2} \implies r = \rho$$

Finalmente el potencial gravitacional en términos de coordenadas esféricas se define como:

$$\phi = \frac{GM}{\rho} \quad (3.12)$$

Luego, la teoría clásica de campos permite mostrar que la variación negativa del potencial es igual al campo gravitacional. Para calcular la variación total del potencial se aplica el operador Nabla  $\nabla$  en coordenadas esféricas sobre el potencial gravitacional. Siguiendo a Hayt et al. (2006) se deduce el operador Nabla en las coordenadas requeridas. Finalmente, al aplicar el dicho operador sobre el potencial gravitacional se obtiene que:

$$\nabla\phi = \left[ \frac{\partial}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{e}_\varphi \right] \left[ \frac{GMm}{\rho} \right]$$

Finalmente el gradiente de potencial se define como:

$$\nabla\phi = -\frac{GM}{\rho^2} \hat{e}_r + 0 \hat{e}_\theta + 0 \hat{e}_\varphi \quad (3.13)$$

Luego, recordando la teoría del potencial, es posible pensar que el campo gravitacional se puede definir como:

$$\vec{g} = -\nabla\phi$$

La representación vectorial de este campo vectorial gradiente se muestra a continuación, Observe:

---

<sup>7</sup>Realizar esta transformación es posible puesto que las coordenadas esféricas son una extensión de las coordenadas polares en 3 dimensiones

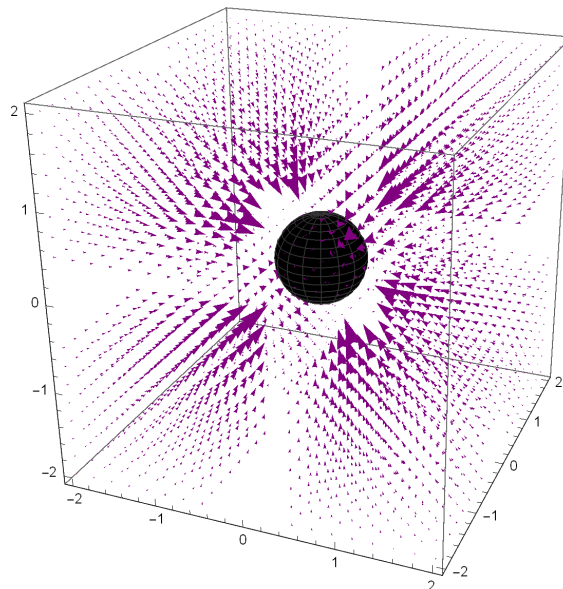


Figura 3.4: Campo gravitacional para un planeta esférico. Elaboración propia. Reproducido en Wolfram Mathematica 11.

Observe que la figura 3.4 muestra un campo vectorial que describe perfectamente el campo gravitacional de un planeta esférico, como el lector puede detallar que los vectores se dirigen hacia el centro, debido a que este campo es netamente atrayente. Otro detalle que tiene gran importancia es la magnitud de los vectores, pues lejos del centro los vectores se hacen mas cortos, cerca del centro los vectores se hacen mas largos, mostrando que a medida que el radio es menor el campo gravitacional es mayor. Esta es una consecuencia que se había discutido en el capítulo uno y es concordante con la representación geométrica expuesta. Por último observe que este campo presenta una indeterminación (*Singularidad*) en las vecindades del centro, esta indeterminación tendrá una consideración importantes en líneas posteriores.

Ahora bien, Es posible probar que el campo gradiente del potencial gravitacional es conservativo, es decir, que el campo gravitacional es irrotacional y por ende, esto es condición suficiente para enunciar que es conservativo. Para mostrar esto se aplica el rotacional en coordenadas esféricas<sup>8</sup> al gradiente de potencial hallado anteriormente. Siguiendo esto se obtiene que:

$$\nabla \times \nabla \phi = \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \begin{bmatrix} \hat{e}_r & \hat{e}_\theta & \hat{e}_\varphi \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_\varphi \\ \frac{GMm}{r^2} & r(0) & r \sin(\theta)(0) \end{bmatrix} = 0 \hat{e}_r + 0 \hat{e}_\theta + 0 \hat{e}_\varphi$$

La representación geométrica de un campo irrotacional no se encuentra definida en cuanto a los vectores se refiere. En este aspecto simplemente no es posible hablar en detalle sobre el análisis geométrico del rotor cuando es aplicado al campo gravitacional de un planeta con simetría esférica.

<sup>8</sup>La expresión del rotacional en coordenadas esféricas es tomada de (Hayt et al., 2006)

### 3. 3.2. TEORÍA DE CLÁSICA DE CAMPO GRAVITACIONAL EN FORMA VECTORIAL

Sin embargo, es posible discutir que este campo es conservativo, ya que al realizar el trabajo entre dos puntos  $a$  y  $b$  el valor del trabajo sera el mismo, sin importar la trayectoria que se elija.

Finalmente, es posible encontrar el sumidero que genera el campo gravitacional para un planeta con simetría esférica. para lograr deducir esto es necesario aplicar el teorema de la divergencia, el cual permitirá encontrar el sumidero en mención. Además de esto, al aplicar este teorema bajo ciertas condiciones, el lector podrá evidenciar que sucede con el potencial en el centro y que sucede con el potencial cuando el valor es diferente de cero. Ahora bien, Recordando el teorema de la divergencia tenemos que:

$$\oint_s \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \iiint_v \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV$$

Aplicando este teorema al campo gradiente de la ecuacion (3.10) se obtiene

$$\oint_s \nabla\phi \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds = \int_v \nabla \cdot (\nabla\phi) \, dV$$

En primer lugar se desarrollara la parte derecha de la expresion. El lector podrá recordar que cuando se aplica la divergencia sobre un campo gradiente, se obtiene el operador laplaciano de la función. En este orden de ideas aplicando el laplaciano en coordenadas esféricas Hayt et al. (2006) se tiene que:

$$\nabla^2\phi = 0$$

Como el lector podrá recordar, la ecuación (3.12) solo depende de  $\rho$ .

De acuerdo con lo anterior, la integral del lado derecho tendría como resultado cero. Ahora bien, debemos garantizar que la integral del lado derecho sea igual a la del lado izquierdo. Para resolver la integral del lado izquierdo recordamos la ley de Gauss. El lector podra observar la figura con el proposito de entender las operaciones siguientes.

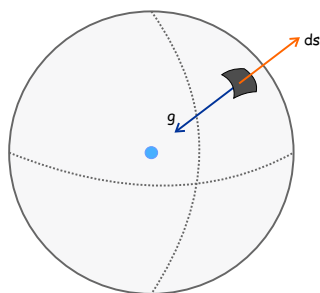


Figura 3.5: Teorema de Gauss aplicado a la gravitación. Elaboración propia. Reproducido en Corel Draw X7

Resolviendo el producto de la forma  $\nabla\phi \cdot \hat{\mathbf{n}}$  se obtiene:

$$\nabla\phi \cdot \hat{\mathbf{n}} = \left[ \frac{GM}{\rho^2} \right] [1] \cos(180) \implies -\frac{GM}{\rho^2}$$

Ahora bien, después de resolver el producto interno, la integral del lado izquierdo puede escribirse como:

$$\iiint -\frac{GM}{\rho^2} ds = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[ -\frac{GM}{\rho^2} \right] \rho^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi = -4\pi GM$$

Como el lector podrá observar, existe una diferencia entre los resultados de las integrales trabajadas sobre el teorema de la divergencia. Con el proposito de solucionar tal diferencia es posible aplicar la función delta de Dirac para realizar las correcciones pertinentes. Observe que es posible escribir el laplaciano aplicado al campo gravitacional como:

$$\nabla^2\phi = -4\pi GM\delta(r) \quad \delta(r) = \begin{cases} 0 & \rho \neq 0 \\ \infty & \rho = 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

Geoméricamente, es posible representar el sumidero del campo gravitacional y su relación con el delta de Dirac. En esta figura se observa que en el punto  $\rho \rightarrow 0$  encontramos el sumidero, mientras que en puntos  $\rho \neq 0$  no existen fuentes. Observe la figura 3.6

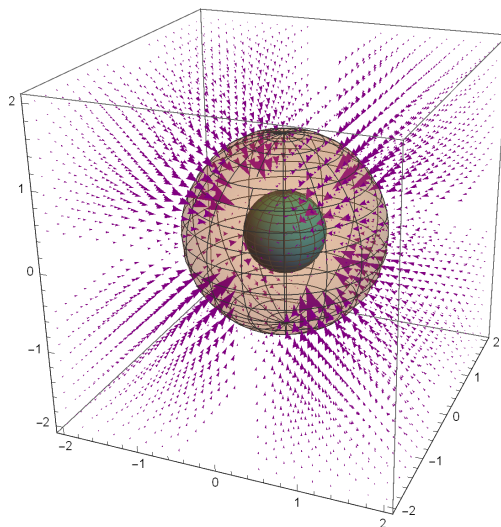


Figura 3.6: Representacion del campo gravitacional con una superficie encerrada. lejos de cero, el potencial tiende a cero, mientras que en el cero el potencial tiende al infinito. Elaboración propia. Reproducido en Wolfram Mathematica 11

Hasta el momento se ha realizado un análisis vectorial del campo gravitacional. Como el lector podrá observar, las representaciones geométricas que surgen son consecuentes con lo descrito en el capítulo uno. Ahora bien, en las siguientes líneas se buscara usar el formalismo descrito en el capítulo 2, con el proposito de mostrar al lector la aplicacion de las formas diferenciales y su relación la física.

### 3.3. Teoría clásica de campo gravitacional desde las formas diferenciales

En primer Lugar, para trabajar sobre formas diferenciales debemos reescribir la ley de gravitación universal en términos de este lenguaje geométrico, para esto tenemos que la uno-forma  $\mathbb{F}_g$  esta dada por:

$$\mathbb{F}_g = \frac{-GMm}{r^2} dr \quad (3.15)$$

Observe que la ley de gravitación de la ecuación (1.15) se encuentra escrita en términos de coordenadas cartesianas. De acuerdo con esto se tiene que:

$$\mathbb{F}_g = -\frac{GMm}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dx + dy + dz \quad (3.16)$$

Con el proposito de analizar la ecuación (1.16) desde las coordenadas esféricas, es necesario aplicar el operador pull-back sobre dicha ecuación, para esto tenemos las siguientes ecuaciones de transformación

$$\rho, \theta, \varphi = \begin{cases} x = \rho \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ y = \rho \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ z = \rho \cos(\theta) \end{cases}$$

Realizando las debidas derivadas y el álgebra necesaria sobre la ecuación (1.16) se obtiene que:

$$\mathbb{F}_g^* = -\frac{GMm}{\rho^3} \hat{r} dr + \rho \sin(\theta) \hat{\varphi} d\varphi + \rho \hat{\theta} d\theta$$

El lector podrá observar que desde el vectorial se tiene la siguiente relación:

$$d\rho = \hat{r} d\rho + \rho \sin(\theta) \hat{\varphi} d\varphi + \rho \hat{\theta} d\theta$$

En este orden de ideas, cualquier posición sobre la esfera se encuentra definido mediante la relación  $\rho = \rho \hat{\rho}$ . Por lo tanto, cualquier cambio infinitesimal en la posición esta dado por  $d\rho = \rho d\hat{\rho}$ . De acuerdo con esto, es posible definir que el diferencial unitario de la posición es  $d\hat{\rho} = \frac{d\rho}{\rho}$ . En relación con lo descrito anteriormente se tiene que:

$$\mathbb{F}_g^*(\rho, \theta, \varphi) = -\frac{GMm}{\rho^2} d\hat{\rho} \quad (3.17)$$

#### 3.3.1. Teoría de campos desde las formas diferenciales

Para calcular el potencial gravitacional, es necesario calcular el trabajo necesario para desplazar una masa una distancia particular. En este orden de ideas, se recurre a la integral de uno-formas para calcular dicho trabajo. De acuerdo con esto tenemos que:

### 3. 3.3. TEORÍA CLÁSICA DE CAMPO GRAVITACIONAL DESDE LAS FORMAS DIFERENCIALES

$$\int_c \omega = \int_{[a;b]} \omega^* \implies \int_c \mathbb{F}_g = \int_{[a;b]} \mathbb{F}_g^*$$

Desarrollando la integral se obtiene que:

$$\mathbf{W} = \int_{[a;b]} \mathbb{F}_g^* = \int_a^b \frac{GMm}{\rho^2} d\hat{\rho}$$

Luego, el trabajo se define como:

$$W = -GMm \left( \frac{1}{\rho_b} - \frac{1}{\rho_a} \right)$$

Luego, si  $r_b \rightarrow \infty$  y  $\rho_a = \rho$  entonces:

$$W(\rho, \theta, \varphi) = U_{grav} = \frac{GMm}{\rho}$$

De acuerdo con este resultado, es posible representar gráficamente el concepto de trabajo, como la integral de uno-formas. Observe la figura 3.7 , en ella se puede observar como una trayectoria atraviesa los cascarones esféricos de la uno forma  $\mathbb{F}_g^*$ . Gráficamente, mientras más superficies equipotenciales (cascarones esféricos) atraviere mayor debe ser el valor del trabajo para desplazar una masa u objeto en el campo gravitacional generado por una planeta atractor. En este orden de ideas la figura en análisis podría presentar en forma tridimensional las superficies equipotenciales que usualmente mencionan los textos clásicos como Alonso and Finn (1970) , pero que siempre son representadas en dos dimensiones, cuando se analiza un campo físico desde una perspectiva clásica, no solo el gravitacional.

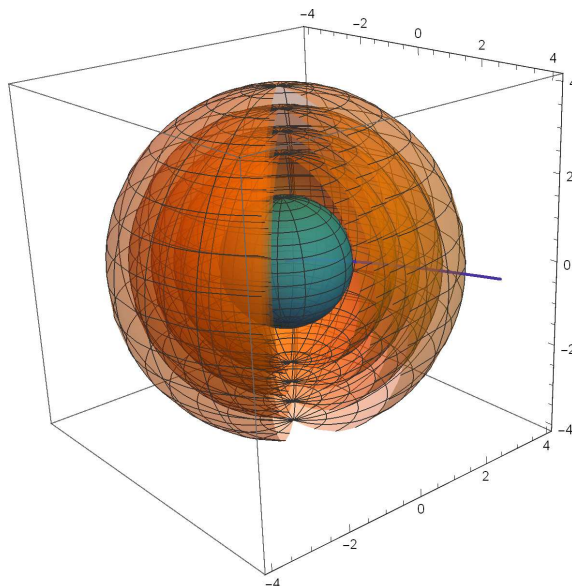


Figura 3.7: Representación geométrica de la integral de trabajo para la uno-forma  $\mathbb{F}_g^*$ . Elaboración propia. Reproducido en Wolfram Mathematica 11

### 3. 3.3. TEORÍA CLÁSICA DE CAMPO GRAVITACIONAL DESDE LAS FORMAS DIFERENCIALES

Luego, es posible mencionar que la cero forma potencial gravitacional, dicha función estará en términos de coordenadas esféricas. Nuevamente, definimos el potencial como el trabajo por unidad de masa, en ese orden de ideas tenemos que la cero forma  $\phi(\rho, \theta, \varphi)$  como:

$$\phi(\rho, \theta, \varphi) = \frac{U_{grav}}{m} = \frac{GM}{\rho^2} \quad (3.18)$$

Ahora bien, a partir de la ecuación (3.18) es posible calcular el gradiente de potencial y con esto poder formular la teoría de campos mediante las formas diferenciales. De acuerdo con lo anterior al aplicar la derivada exterior a la cero forma  $\phi(\rho, \theta, \varphi)$  se obtiene lo siguiente.

$$d_{(\rho, \theta, \varphi)}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial\rho}d\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}d\theta + \frac{1}{\rho\sin(\theta)}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}d\varphi = -\frac{GM}{\rho^2}d\rho$$

Luego, a partir del valor de  $d_{(\rho, \theta, \varphi)}\phi$ , es posible escribir el campo gravitacional clásico en términos de formas diferenciales, como consecuencia de lo anterior se obtiene:

$$\mathbf{g} = d_{(\rho, \theta, \varphi)}\phi = -\frac{GM}{\rho^2}d\rho \quad (3.19)$$

La representación gráfica del campo gravitacional en formas diferenciales esta dada por cascarones esféricos cuya opacidad de color disminuye a medida que el radio crece, representando en cierto modo, como disminuye la magnitud del campo gravitacional a medida que el radio crece. En este orden de ideas tenemos que la figura 3.8 representa el valor de  $\mathbf{g}$  desde las formas diferenciales. Por otro lado, a figura en análisis podrá mostrar al estudiante desde una perspectiva tridimensional como cambia el campo gravitacional en relación al radio, tal como lo describen los autores clásicos trabajados en el capítulo 1.

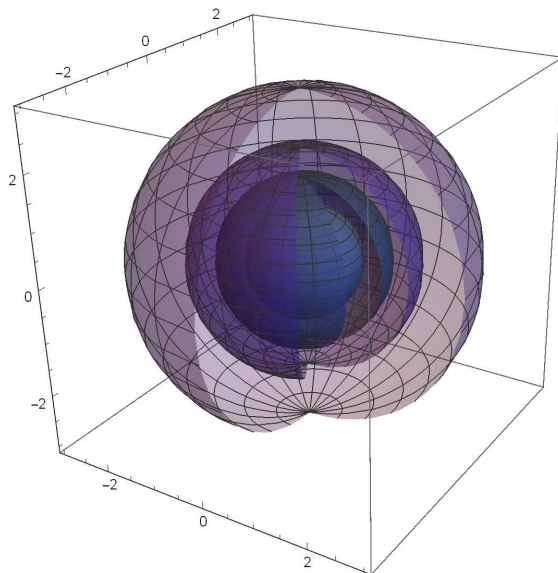


Figura 3.8: Representación de la uno-forma  $d_{(\rho, \theta, \varphi)}\phi$  que muestra el campo gravitacional en un planeta con simetría esférica. Elaboración propia. Reproducido en Wolfram Alpha 11

Luego, es posible encontrar otra relación entre el campo gravitacional y las formas diferenciales.

### 3. 3.3. TEORÍA CLÁSICA DE CAMPO GRAVITACIONAL DESDE LAS FORMAS DIFERENCIALES

Aplicando el operador hodge star sobre la uno forma  $-d_{(\rho,\theta,\varphi)}\phi$ , De acuerdo con esto es posible mostrar que:

$$*d_{(\rho,\theta,\varphi)}\phi = -\frac{GM}{\rho^2}d\theta \wedge d\varphi \quad (3.20)$$

Dicha ecuación muestra tubos que divergen en la vecindad de  $\rho \rightarrow 0$ . Observe que la representación gráfica de la ecuación 3.20 es la intersección entre los  $d\theta$  y los  $d\varphi$ . Observe la figura 3.9 que representa la ecuación (3.20).

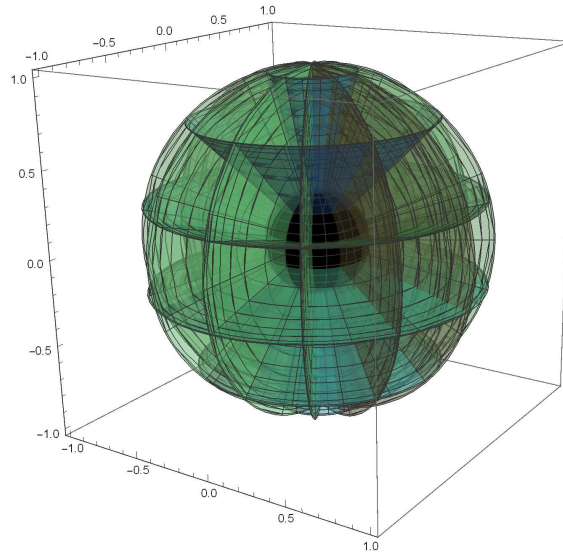


Figura 3.9: Representación gráfica de la ecuación  $*d_{(\rho,\theta,\varphi)}\phi$ . Elaboración propia. Reproducido en Wolfram Alpha 11

De la figura 3.9 se pueden observar los tubos por donde debe “fluir” el campo gravitacional. También es posible observar que al fondo de la figura se localiza una esfera negra que representa la singularidad de dicho campo, en este orden de ideas es posible mostrar que al principio los tubos son anchos pero a medida que se acercan al centro estos se vuelven angostos, mostrando así que entre mas angosto es mayor la pesantez, tal como se dedujo en el capítulo 1. Por otro lado es posible mostrar la relación entre tubos y campo gravitacional vectorial, observando que evidentemente los vectores se orientan en dirección de los tubos. Para mostrar esto se tiene la figura 3.10

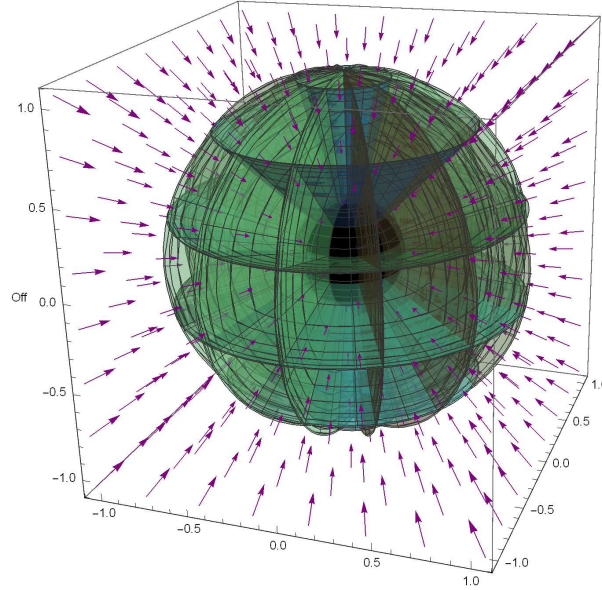


Figura 3.10: Relación entre las dos formas y el campo gravitacional vectorial. Elaboración propia. Reproducido en Wolfram Alpha 11

Regresando a la ecuación (1.19) es posible mostrar desde las formas diferenciales que el campo gravitacional es conservativo. Aplicando nuevamente la derivada exterior sobre la ecuación en mención, se obtiene que:

$$d_{\rho,\theta,\varphi}(d_{(\rho,\theta,\varphi)}(\phi)) = d_{\rho,\theta,\varphi}^2(\phi) = 0 \quad (3.21)$$

Observe que la ecuación (3.21) muestra que el valor del rotacional es cero, probando así que el campo gravitacional es conservativo, como se explicó anteriormente. Ahora bien, la ecuación (3.21) cumple con el lema de Poincaré de la doble derivada exterior, considerándose esta como exacta y cerrada. Esto implica que el campo gravitacional es conservativo, como se explicó anteriormente. Sin embargo, también en el lenguaje de formas diferenciales no es posible mostrar geoméricamente el rotor del campo.

Por último, es posible mostrar el sumidero del campo gravitacional. En este orden de ideas, se tiene que el flujo a través de una superficie cerrada es igual al valor del campo encerrado, cumpliendo así con el teorema de la divergencia. Recordando el teorema de la divergencia en formas tenemos que:

$$\iiint_v d\tau = \iint_{\partial v} \tau$$

donde  $d\tau$  es un tres forma integrada sobre un volumen, y  $\tau$  es una dos forma integrada sobre una superficie. Escribiendo esto en términos del análisis de campo gravitacional tenemos que

$$\iiint_v d_{\rho,\theta,\varphi}(*-d_{(\rho,\theta,\varphi)}\phi) = \iint_{\partial v} *-d_{(\rho,\theta,\varphi)}\phi$$

### 3. 3.3. TEORÍA CLÁSICA DE CAMPO GRAVITACIONAL DESDE LAS FORMAS DIFERENCIALES

Observe que la parte izquierda de la ecuación, es el cálculo de la divergencia, ya que es la derivada de una dos forma. Como la dos forma a derivar es un campo gradiente, tenemos que dicha divergencia se conoce como laplaciano. El laplaciano en formas diferenciales escrito en coordenadas escalares está dado por

$$\partial_{\rho,\theta,\varphi}^2(\phi) = \frac{1}{\rho \sin^2(\theta)} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho^2 \sin(\theta) \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right) \right]$$

Resolviendo el laplaciano al evaluar el valor de  $\phi$  se obtiene que:

$$\partial_{\rho,\theta,\varphi}^2(\phi) = 0$$

Por lo tanto, la integral de volumen de la parte izquierda tiene un valor de 0. Luego, la integral de superficie de la parte derecha debe tener un valor a cero. Para probar esto se tiene que:

$$\iint_{\partial v} \star -d_{(\rho,\theta,\varphi)}\phi = \iint_{\partial v} -\frac{GM}{\rho^2} d\theta \wedge d\varphi$$

Luego, el producto  $d\theta \wedge d\varphi$  muestra el valor de un área con  $\rho$  constante. Del del Jacobiano para coordenadas esféricas, se deduce que:

$$d\theta \wedge d\varphi = \rho^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi$$

Remplazando en la integral y resolviendo tenemos que:

$$\iint_{\partial v} -\frac{GM}{\rho^2} d\theta \wedge d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[ -\frac{GM}{\rho^2} \right] \rho^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi = -4\pi GM$$

finalmente, esto implica que el teorema de la divergencia en formas diferenciales debe seguir la función delta de Dirac descrita anteriormente.

$$\partial_{\rho,\theta,\varphi}^2(\phi) = -4\pi GM \delta(r) \quad \delta(r) = \begin{cases} 0 & r \neq 0 \\ \infty & r = 0 \end{cases} \quad (3.22)$$

Gráficamente, desde las formas diferenciales se muestra el teorema de la divergencia como:

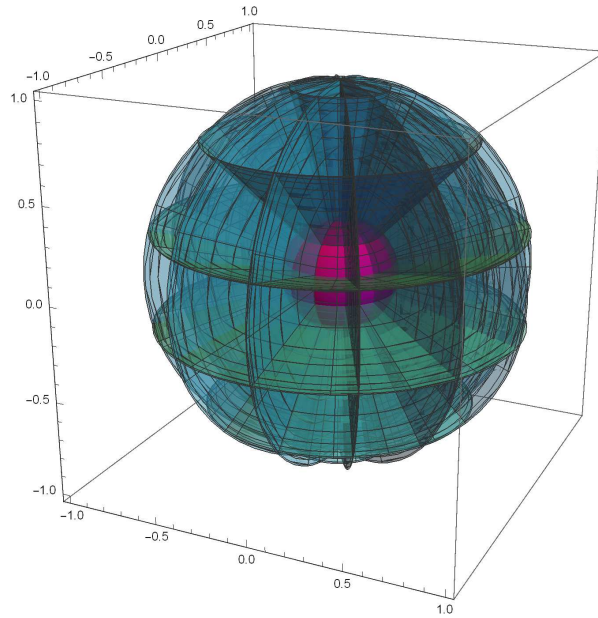


Figura 3.11: Teorema de la divergencia en formas. Elaboración propia. Reproducido en Wolfram Alpha 11

Como el lector podrá observar, el teorema de la divergencia en formas diferenciales se encuentra asociada a tubos que divergen en un punto morado. En este orden de ideas a radios diferentes de cero, es posible observar que no hay sumideros de campo gravitacional, sin embargo a radio cercanos a cero, se observa que existe un sumidero de campo que en este caso el la esfera morada, la misma donde divergen todos los tubos por donde fluye el campo gravitacional.

En conclusión, la realizar el contraste entre los resultados obtenidos a partir de las formas diferenciales y las representación vectoriales resulta posible pensar que, al implementar en aula universitaria las representaciones realizadas, dichas imágenes podrían servir como un apoyo, tanto para el docente al momento de explicar las ideas de campo y las singularidades clásicas de un campo gravitacional, como para el estudiante al momento desarrollar la perspectiva tridimensional del espacio y comprender el concepto en mención y las características físicas del mismo. De acuerdo con lo anterior se sugiere implementar las formas diferenciales en los cursos asociados al calculo vectorial y a las explicaciones de fenómenos físicos mediante campo clásicos ya que siguiendo Warnick et al. (1997) las formas diferenciales y sus representación gráfica de todos los operadores, contribuyeron a que un gran porcentaje de estudiantes desde principiantes hasta avanzados lograran comprender los principios electromagnéticos. De acuerdo con lo anterior, se espera que en próximas investigaciones sea posible medir el impacto de dichas representaciones en el aula mediante la evaluación cambio en el lenguaje pictórico para representar el concepto de campo gravitacional y sus características físicas.

---

## Conclusiones

Como conclusiones del presente trabajo de grado de tiene que:

- En primer lugar es posible reconocer el principio de continuidad en la historia de las ciencias. En este orden de ideas, se evidencia como a lo largo de la historia es posible transitar desde un sistema planetario geocéntrico hacia un sistema heliocéntrico, reconociendo los postulados propuestos por diferentes pensadores y las relaciones entre dichos postulados. De acuerdo con lo anterior, es posible evidenciar como el modelo heliocéntrico se estructura a partir de la continua modificación de las diferentes hipótesis propuestas por pensadores previos a Newton, y como este último es quien propone una solución al problema del movimiento de los cuerpos bajo la acción de una fuerza central.
- En segundo lugar, resulta posible evidenciar como algunos pensadores post-Newtonianos caracterizan el campo gravitacional a partir del reconocimiento de la ley de gravitación universal. De acuerdo con lo anterior, es evidente el proceso de continuidad mencionado anteriormente. Además, resulta posible mencionar que mediante los barridos históricos es posible caracterizar y conceptualizar las síntesis físico-matemáticas que usualmente se transmiten en la enseñanza de la ciencia.
- En tercer lugar, es importante inferir el potencial geométrico de las formas diferenciales para la representación físico-geométrica de un fenómeno particular. De acuerdo con esto, las formas diferenciales pueden ser superficies apiladas y orientadas en una dirección, o formar tubos por donde se puede pensar que «fluyen» campos tal como se evidencia en Peña Moreno (2008). Tales representaciones contribuyen a estructurar una representación, diferente a la vectorial, de los fenómenos físicos, donde las superficies orientadas podrían incentivar en el lector una comprensión tridimensional de los fenómenos físicos en estudio.
- En cuarto lugar, al realizar un análisis geométrico de la gravitación clásica, es importante reconocer la importancia de la geometría en la estructuración de las leyes de Kepler y en la misma ley de gravitación universal. En este orden de ideas, para comprender de una manera más sutil algunas leyes físicas es importante atribuirle un carácter geométrico a las mismas. Por otro lado, el carácter vectorial es adecuado para la representación de las ideas de campo, sin embargo, es posible recurrir a otras formas de representación con características diferentes, que contribuyan a una comprensión espacial de los fenómenos.
- En quinto lugar es importante destacar que no todas las ecuaciones son susceptibles de una representación geométrica. En este orden de ideas, el rotacional de un campo conservativo en el lenguaje de las formas diferenciales o en el lenguaje vectorial carece de representación geométrica. Sin embargo de acuerdo con el análisis algebraico realizado sobre dicho operador es posible constatar la conservación del campo a partir de los resultados obtenidos.

# Bibliografía

- Alonso, M. and Finn, E. (1970). *Física Volumen 1 Mecánica*. México: Fondo Educativo Interamericano.
- Apostol, T. M. (1973). *Cálculo con funciones de varias variables y algebra lineal, con aplicaciones a las ecuaciones diferenciales y las probabilidades*. Reverté.
- Barragan Parra, J. (2005). Presentación de la mecánica hamiltoniana con formas diferenciales, estudio de caso: péndulo esférico. *Universidad Pedagogica Nacional*.
- Chao Rebolledo, C. and Díaz Barriga Arceo, F. (2014). Análisis comparativo del aprendizaje de los conceptos de calor y temperatura utilizando una simulación digital interactiva y un texto ilustrado. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias*, 9(1):00–00.
- Euler, L. and Pérez, C. M. (1990). *Cartas a una princesa de Alemania sobre diversos temas de Física y Filosofía*, volume 4. Universidad de Zaragoza.
- Feynman, R. P., Leighton, R. B., and Sands, M. (1963). *The Feynman lectures on physics, Vol. I: The new millennium edition: mainly mechanics, radiation, and heat*, volume 1. Addison-Wesley Publishing.
- Flanders, H. (1963). *Differential Forms with Applications to the Physical Sciences by Harley Flanders*, volume 11. Elsevier.
- Garay, F. R. (2011). Perspectivas de historia y contexto cultural en la enseñanza de las ciencias: discusiones para los procesos de enseñanza y aprendizaje. *Ciência & Educação*, 17(1):51–62.
- Granés, J. (2005). *Isaac Newton: obra y contexto: una introducción*. Univ. Nacional de Colombia.
- Grossman, S. I. (1996). *Algebra lineal*. McGraw-hill.
- Hacyan, S. (2012). *Los hoyos negros y la curvatura del espacio tiempo*. Fondo de Cultura Económica.
- Hawking, S. (2010). *Historia del tiempo. Del big bang a los agujeros negros*. Espasa.
- Hayt, W. H., Buck, J. A., and Pedraza, C. R. C. (2006). *Teoría electromagnética*. McGraw-Hill.
- Holton, G. J. and Brush, S. G. (1996). *Introducción a los conceptos y teorías de las ciencias físicas*. Reverté.

- 
- Jammer, M. (1999). *Concepts of force: A study in the foundations of dynamics*. Courier Corporation.
- Malakhaltsev, M. and Artega Bejarano, J. R. (2013). *Calculo vectorial*. Cengage Learning Editores, primera edition.
- Marsden, J. E., Tromba, A. J., and Muñiz, P. C. (1991). *Cálculo vectorial*, volume 69. Addison-Wesley Iberoamericana.
- Misner, C. W., Thorne, K. S., and Wheeler, J. A. (1973). *Gravitation*. Princeton University Press.
- Pacheco Sarmiento, E. (2016). Interpretación geométrica desde las formas diferenciales: ecuación de continuidad y ecuación de vorticidad. *Universidad Pedagógica Nacional*.
- Peña Moreno, R. (2008). Contextualización de las ecuaciones de maxwell empleando formas diferenciales. *Universidad Pedagógica Nacional*.
- Sagan, C. (1980). *Cosmos*. Planeta Pub Corp.
- Stewart, I. (2015). 17 ecuaciones que cambaron el mundo.
- Stewart, J. (2008). *Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas*. Cengage Learning.
- Tejeiro, J. M. (2005). *Apuntes de relatividad general*. Universidad Nacional de Colombia, primera edition.
- Vélez, F. (2012). *Apuntes de Relatividad*. Universidad Pedagógica Nacional.
- Warnick, K. F., Selfridge, R. H., and Arnold, D. V. (1997). Teaching electromagnetic field theory using differential forms. *IEEE Transactions on education*, 40(1):53–68.
- Young, H., Freedman, R., Sears, F., and Zemansky, M. (2009). Física universitaria, vol. 2. *México DF: Pearson*.

# Anexo 1

## Teorema de representación de Ritz

De acuerdo con el teorema de representación de Ritz, se establece que para cada función  $f \in \mathcal{T}_{dual}(V, \mathbb{R})$  existe un vector  $w \in \mathcal{V}$  tal que se cumple que  $f(u) = \langle w, v \rangle$ . Entonces, dada una base  $e_i$  para los vectores de  $\mathcal{V}$ , mientras que las funciones  $\langle e_i, \cdot \rangle = e_i^*$ <sup>9</sup> definen una base para el espacio vectorial estructurado a partir de las transformaciones lineales de la forma  $\mathcal{T}_{dual}(V, \mathbb{R})$ , esta base se conoce como la base dual.

Sean:

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \quad w = \sum_{k=1}^n \beta_k e_k$$

Entonces:

$$\langle w, v \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n \beta_k e_k, v \right\rangle$$

$$\langle w, v \rangle = \sum_{k=1}^n \beta_k \langle e_k, v \rangle$$

$$\langle w, v \rangle = \sum_{k=1}^n \beta_k \left\langle e_k, \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \right\rangle$$

$$\langle w, v \rangle = \sum_{k=1}^n \beta_k \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle e_k, e_i \rangle$$

Luego:  $\langle e_k, e_i \rangle = \delta_{ki}$ , en donde  $k = i$ . Finalmente.

$$\langle w, v \rangle = \sum_{i=1}^n \beta_i \alpha_i$$

Finalmente, es posible deducir que para cualquier espacio vectorial  $\mathcal{V}$  existe un espacio vectorial dual  $\mathcal{V}^*$ , definido a partir de las transformaciones  $\mathcal{T}_{dual}(V, \mathbb{R})$ . Este espacio dual se caracteriza por tener la misma dimensión del espacio vectorial original, y además para cualquier base  $e_i$ , existe una única base dual  $e_j^*$ , definida por la relación:

---

<sup>9</sup>Vale la pena resaltar que  $\langle e_i, \cdot \rangle = \langle v, \cdot \rangle$ , este es el producto interno en el espacio dual estructurado a partir de las transformaciones  $\mathcal{T}_{dual}(V, \mathbb{R})$ . Este producto interno se desarrolla manteniendo la primera componente fija.

$$\langle e_j^*, e_i \rangle = \delta_{ji}$$

## Suma de uno formas diferenciales.

Sean  $\alpha$  y  $\beta$  uno formas diferenciales definidas como:

$$\alpha = \sum_{i=1}^3 a_i dx_i \quad y \quad \beta = \sum_{i=1}^3 b_i dx_i$$

Luego

$$\alpha \pm \beta = \sum_{i=1}^3 a_i(p) dx_i \pm \sum_{i=1}^3 b_i(p) dx_i$$

$$\alpha \pm \beta = \sum_{i=1}^3 (a_i(p) \pm b_i(p)) dx_i$$

$$\alpha \pm \beta = \sum_{i=1}^3 \underbrace{(a_i(p) \pm b_i(p))}_{c_i} dx_i$$

$$\alpha \pm \beta = \sum_{i=1}^3 c_i(p) dx_i$$

$$\alpha \pm \beta = \gamma$$

Finalmente  $\alpha, \beta, \gamma$  son uno - formas.

Vale la pena resaltar que es posible generalizar la suma y resta de formas diferenciales como:

Sean  $\Theta$  y  $\Omega$  k-formas definidas como:

$$\Theta = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k}^n a_{i_1 i_2 \dots i_k}(p) (dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) \quad y \quad \Omega = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k}^n b_{i_1 i_2 \dots i_k}(p) (dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})$$

donde ambas k-formas son del mismo grado, entonces:

$$\Theta \pm \Omega = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k}^n a_{i_1 i_2 \dots i_k}(p) (dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) \pm \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k}^n b_{i_1 i_2 \dots i_k}(p) (dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})$$

$$\Theta \pm \Omega = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k}^n (a_{i_1 i_2 \dots i_k}(p) \pm b_{i_1 i_2 \dots i_k}(p)) (dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})$$

$$\Theta \pm \Omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \underbrace{(a_{i_1}(p) \dots a_{i_k}(p) \pm b_{i_1}(p) \dots b_{i_k}(p))}_{c_{i_1}(p) \dots c_{i_k}(p)} (dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})$$

$$\Theta \pm \Omega = c_{i_1}(p) \dots c_{i_k}(p) (dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})$$

$$\Theta \pm \Omega = \Gamma$$

donde  $\Theta$ ,  $\Omega$  y  $\Gamma$  son  $k$ -formas del mismo grado.

## Propiedades del producto exterior sobre $k$ -formas diferenciales.

Dados:

- $\omega = \sum a_I dx_I$  donde  $I$  es un subconjunto de índices definido como  $I = i_1, i_2, i_3, i_4, \dots, i_s$
- $\varphi = \sum b_J dx_J$  donde  $J$  es un subconjunto de índices definido como  $J = j_1, j_2, j_3, j_4, \dots, j_k$
- $\theta = \sum c_M dx_M$  donde  $M$  es un subconjunto de índices definido como  $M = m_1, m_2, m_3, m_4, \dots, m_p$

entonces, es posible probar que:

### Propiedad asociativa

$$(\omega \wedge \varphi) \wedge \theta = \left( \sum a_I dx_I \wedge \sum b_J dx_J \right) \wedge \sum c_M dx_M$$

Aplicando el producto curña sobre el parentesis

$$(\omega \wedge \varphi) \wedge \theta = \left( \sum a_I b_J dx_I \wedge dx_J \right) \wedge \sum c_M dx_M$$

Aplicando el producto curña con la expresion fuera del parentesis

$$(\omega \wedge \varphi) \wedge \theta = \left( \sum a_I b_J c_M dx_I \wedge dx_J \wedge dx_M \right)$$

Orgnizando la expresion

$$(\omega \wedge \varphi) \wedge \theta = \sum a_I dx_I \wedge \left( \sum b_J c_M dx_J \wedge dx_M \right)$$

Luego

$$(\omega \wedge \varphi) \wedge \theta = \sum a_I dx_I \wedge \left( \sum b_J dx_J \wedge c_M dx_M \right)$$

Finalmente:

$$(\omega \wedge \varphi) \wedge \theta = \omega \wedge (\varphi \wedge \theta)$$

---

## Propiedad conmutativa

$$\omega \wedge \varphi = \sum a_I dx_I \wedge \sum b_J dx_J$$

Aplicand el producto cuña:

$$\omega \wedge \varphi = \sum a_I b_J dx_I \wedge dx_J$$

Desarrollando los indices  $I$  y  $J$  se obtiene que:

$$\omega \wedge \varphi = \sum a_I b_J dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge dx_{i_3} \wedge \dots \wedge dx_{i_s} \wedge dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge dx_{j_3} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}$$

Luego, permutando  $dx_{i_s}$  con  $dx_{j_1}$  se obtiene que:

$$\omega \wedge \varphi = \sum (-1) a_I b_J dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge dx_{i_3} \wedge \dots \wedge dx_{j_1} \wedge dx_{i_s} \wedge dx_{j_2} \wedge dx_{j_3} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}$$

Realizando este proceso hasta intercambiar todas los diferenciales se obtiene un permutacion cuyo valor esta dado por el producto  $ks$ . Luego se obtiene que:

$$\omega \wedge \varphi = \sum (-1)^{ks} a_I b_J dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge dx_{j_3} \wedge \dots \wedge dx_{j_k} \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge dx_{i_3} \wedge \dots \wedge dx_{i_s}$$

Finalmente, observe que se cumple que:

$$\omega \wedge \varphi = (-1)^{ks} \varphi \wedge \omega$$

## Propiedad distributiva

$$\omega \wedge (\varphi + \theta) = \sum a_I dx_I \wedge \left( \sum b_J dx_J + \sum c_M dx_M \right)$$

Observe que para que se cumpla la suma de  $k$ -formas diferenciales,  $M = J$  por lo tanto.

$$\omega \wedge (\varphi + \theta) = \sum a_I dx_I \wedge \left( \sum b_M dx_M + \sum c_M dx_M \right)$$

Luego, realizando la suma se obtiene que:

$$\omega \wedge (\varphi + \theta) = \sum a_I dx_I \wedge \left( \sum (b_M + c_M) dx_M \right)$$

Aplicando el prodcuto cuña se obtiene que:

$$\omega \wedge (\varphi + \theta) = \sum a_I (b_M + c_M) dx_I \wedge dx_M$$

Operando de manera distributiva las funciones:

$$\omega \wedge (\varphi + \theta) = \sum a_I b_M + a_I c_M dx_I \wedge dx_M$$

Organizando la expresion:

$$\omega \wedge (\varphi + \theta) = \sum a_I b_M dx_I \wedge dx_M + a_I c_M dx_I \wedge dx_M$$

Finalmente:

$$\omega \wedge (\varphi + \theta) = \omega \wedge \varphi + \omega \wedge \theta$$

## Producto interno y producto vectorial en formas diferenciales

De acuerdo con Flanders (1963) se tiene que:

Sean:

1.  $\alpha = f_1(p)dx_1 + f_2(p)dx_2 + f_3(p)dx_3$  una uno forma
2.  $\beta = g_1(p)dx_1 + g_2(p)dx_2 + g_3(p)dx_3$  una uno forma
3.  $\gamma = h_1(p)dx_2 \wedge dx_3 + h_2(p)dx_3 \wedge dx_1 + h_3(p)dx_1 \wedge dx_2$  una dos forma.

Entonces es posible mostrar que:

1. El producto vectorial desde las formas se define como:

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \beta &= [f_2(p)g_3(p) - f_3(p)g_2(p)]dx_2 \wedge dx_3 + [f_3(p)g_1(p) - f_1(p)g_3(p)]dx_3 \wedge dx_1 + \dots \\ &\quad + [f_1(p)g_2(p) - f_2(p)g_1(p)]dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

2. El producto interno desde las formas se define como:

$$\alpha \wedge \gamma = f_1(p)g_1(p)dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + f_2(p)g_2(p)dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + f_3(p)g_3(p)dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

## Propiedades de la derivada exterior sobre k-formas diferenciales

Dados:

- $\omega = \sum a_I dx_I$  donde  $I$  es un subconjunto de indices definido como  $I = i_1, i_2, i_3, i_4, \dots, i_s$
- $\varphi = \sum b_J dx_J$  donde  $J$  es un subconjunto de indices definido como  $J = j_1, j_2, j_3, j_4, \dots, j_k$
- $\theta = \sum c_M dx_M$  donde  $M$  es un subconjunto de indices definido como  $M = m_1, m_2, m_3, m_4, \dots, m_p$

Entonces es posible demostrar que:

---

## Derivada de la suma de k-formas

$$d(\omega + \varphi) = d\left(\sum a_I dx_I + \sum b_J dx_J\right)$$

Siguiendo la regla de la suma para k-formas,  $I = J$  por lo tanto.

$$d(\omega + \varphi) = d\left(\sum a_J dx_J + \sum b_J dx_J\right)$$

Aplicando el operar derivada de manera usual sobre la suma se obtiene que:

$$d(\omega + \varphi) = \sum \partial_\alpha a_J dx_\alpha \wedge dx_J + \sum \partial_\alpha b_J dx_\alpha \wedge dx_J$$

Finalmente se deduce que:

$$d(\omega + \varphi) = d\omega + d\varphi$$

## Regla de Leibniz para las derivadas

$$d(\omega \wedge \varphi) = d\left(\sum a_I dx_I \wedge \sum b_J dx_J\right)$$

Resolviendo el producto cuña se obtiene que:

$$d(\omega \wedge \varphi) = d\left(\sum a_I b_J dx_I \wedge dx_J\right)$$

Aplicando la derivada sobre las funciones resulta:

$$d(\omega \wedge \varphi) = \sum \partial_\alpha a_I dx_\alpha \wedge b_J dx_I \wedge dx_J + a_I \partial_\beta b_J dx_\beta \wedge dx_I \wedge dx_J$$

Organizando un poco la expresion se observa que debe hacer un intercambio entre  $\partial_\beta b_J dx_\beta$  y  $dx_I$  por lo tanto debemos aplicar la propiedad conmutativa que se mostró en el aparte anterior, de acuerdo con esto se tiene que:

$$d(\omega \wedge \varphi) = \sum \partial_\alpha a_I dx_\alpha \wedge dx_I \wedge b_J dx_J + (-1)^k a_I dx_I \wedge \partial_\beta b_J dx_\beta \wedge dx_J$$

Finalmente, se puede expresar la propiedad como:

$$d(\omega \wedge \varphi) = d\omega \wedge \varphi + (-1)^k \omega \wedge d\varphi$$

## Lema de Poincare

Ahora, sea  $\Omega = f(r)$  una cero forma o campo escalar se tiene que:

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(r)}{\partial x_i} dx_i$$

derivando nuevamente se tiene que:

$$d^2 f = \sum_{j=i}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f(r)}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i$$

Luego, se sabe que las segundas derivadas parciales cruzadas son iguales, así cambiemos el orden en la derivación, esto se comprueba bajo el teorema de Clairaut. Por lo tanto:

$$d^2 f = \sum_{j=i}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f(r)}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i + \frac{\partial^2 f(r)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \wedge dx_j$$

Organizando los productos y factorizando se obtiene que:

$$d^2 f = \sum_{j=i}^n \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial^2 f(r)}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f(r)}{\partial x_j \partial x_i} \right) dx_i \wedge dx_j$$

Finalmente:

$$d^2 f = 0$$

Luego, aplicando esto a cualquier k-forma se tiene que:

$$d(d\omega) = 0$$

## Operadores Diferenciales

### Gradiente

Sea  $f(x, y, z)$  una función escalar, es decir un campo de 0-formas. Luego, aplicando la derivada sobre esta función se tiene que:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

luego, es posible escribir el gradiente como:

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right] \cdot [dx, dy, dz]$$

### Rotacional

Sea la 1-forma  $\omega = f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$  donde  $f_1, f_2, f_3$ , son funciones suaves, diferenciales y dependientes de  $x, y, z$ . Luego, aplicando la derivada exterior se tiene que:

$$d\omega = \left[ \frac{\partial f_1}{\partial x} dx + \frac{\partial f_1}{\partial y} dy + \frac{\partial f_1}{\partial z} dz \right] \wedge dx + \left[ \frac{\partial f_2}{\partial x} dx + \frac{\partial f_2}{\partial y} dy + \frac{\partial f_2}{\partial z} dz \right] \wedge dy + \left[ \frac{\partial f_3}{\partial x} dx + \frac{\partial f_3}{\partial y} dy + \frac{\partial f_3}{\partial z} dz \right] \wedge dz$$

Como resultado de esta operación se tiene que:

$$d\omega = \frac{\partial f_1}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial f_1}{\partial z} dz \wedge dx + \frac{\partial f_2}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial f_2}{\partial z} dz \wedge dy + \frac{\partial f_3}{\partial x} dx \wedge dz + \frac{\partial f_3}{\partial y} dy \wedge dz$$

factorizando y agrupando términos tenemos que:

$$d\omega = \left[ \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \right] dy \wedge dz + \left[ \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \right] dz \wedge dx + \left[ \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right] dx \wedge dy$$

Por lo tanto, la ecuacion anterior da cuenta del rotacional sobre campos de uno formas. Es posible ver con mas claridad tal operador al aplicar el operador hodge star sobre  $d\omega$ .

$$*d\omega = \left[ \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \right] dx + \left[ \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \right] dy + \left[ \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right] dz$$

## Divergencia

Sea la dos forma  $\theta = f_1 dy \wedge dz + f_2 dz \wedge dx + f_3 dx \wedge dy$  donde  $f_1, f_2, f_3$ , son funciones suaves, diferenciables y dependientes de  $x, y, z$ . Luego, aplicando la derivada exterior se tiene que:

$$\begin{aligned} d\theta &= \left[ \frac{\partial f_1}{\partial x} dx + \frac{\partial f_1}{\partial y} dy + \frac{\partial f_1}{\partial z} dz \right] \wedge dy \wedge dz + \left[ \frac{\partial f_2}{\partial x} dx + \frac{\partial f_2}{\partial y} dy + \frac{\partial f_2}{\partial z} dz \right] \wedge dz \wedge dx + \dots \\ &\quad + \left[ \frac{\partial f_3}{\partial x} dx + \frac{\partial f_3}{\partial y} dy + \frac{\partial f_3}{\partial z} dz \right] \wedge dx \wedge dy \end{aligned}$$

Luego, realizando las operaciones algebraicas necesarias tenemos que:

$$d\theta = \left[ \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \right] dx \wedge dy \wedge dz$$

Por lo tanto, la ecuacion anterior da cuenta de la divergencia sobre campos de dos formas. Es posible ver con mas claridad tal operador al aplicar el operador hodge star sobre  $d\theta$ .

$$*d\theta = \left[ \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \right]$$

## Propiedades del Pullback sobre k formas diferenciales.

### Pullback aplicado a la suma

Sean  $\alpha$  y  $\beta$  un par de k formas, se puede probar el pullback se aplica de manera distributiva en las formas diferenciales. Observe:

Se parte de:

$$\phi^*(\alpha + \beta) = (\alpha + \beta) [f(df_1(v_1), df_2(v_2), \dots, df_n(v_n))]$$

Luego, evaluando cada k-forma en la función de transformación de coordenadas se obtiene que:

---


$$\phi^*(\alpha + \beta) = \alpha([f(df_1(v_1), df_2(v_2), \dots, df_n(v_n))]) + \beta([f(df_1(v_1), df_2(v_2), \dots, df_n(v_n))])$$

De acuerdo con la definicion de pullback se sabe que:

$$\alpha([f(df_1(v_1), df_2(v_2), \dots, df_n(v_n))]) = \phi^*(\alpha)$$

Por lo tanto se prueba que el pullback es una aplicaci3n distributiva sobre k-formas diferenciales

$$\phi^*(\alpha + \beta) = \phi^*(\alpha) + \phi^*(\beta)$$

### **Pullback Aplicado al producto cuña**

Sean  $\alpha$  y  $\beta$  un par de k formas, se puede probar el pullback se mantiene invariante en el producto cuña entre formas diferenciales. Observe:

Se parte de:

$$\phi^*(\alpha \wedge \beta) = (\alpha \wedge \beta)[f(df_1(v_1), df_2(v_2), \dots, df_n(v_n))]$$

Luego, se sabe que el pullback permite reescribir cada k-forma del sistema de coordenadas original con respecto al sistema de coordenadas de transformaci3n, por lo tanto es posible realizar la transformaci3n del sistema de coordenadas antes de aplicar el pullback. Observe:

$$\phi^*(\alpha \wedge \beta) = \alpha([f(df_1(v_1), df_2(v_2), \dots, df_n(v_n))]) \wedge \beta([f(df_1(v_1), df_2(v_2), \dots, df_n(v_n))])$$

Luego, recordando la definicion de pullback es posible deducir:

$$\phi^*(\alpha \wedge \beta) = \phi^*(\alpha) \wedge \phi^*(\beta)$$

Donde se concluye que el pullback se mantiene invariante si se aplica antes o despu3s del producto cuña.

### **Pullback aplicado a la derivada**

Sea  $\tau$  una k-forma diferencial se mantiene invariante frente a la derivada.

Se parte de:

$$\phi^*(d\tau) = d\tau[f(df_1(v_1), df_2(v_2), \dots, df_n(v_n))]$$

Luego, aplicando la funci3n de transformaci3n sobre  $\tau$  antes de aplicar la derivada se obtiene:

$$\phi^*(d\tau) = d(\tau(\phi^*(d\tau)))$$

Finalmente, la derivada se realiza con respecto al sistema coordenado dado por la función de transformación, lo que permite inferir que:

$$\phi^*(d\tau) = d[\phi^*(\tau)]$$

### Pullback aplicado al producto de funciones.

Sea  $g$  una cero forma o una función escalar continua, y sea  $\tau$  una  $k$ -forma es posible aplicar el pullback al producto de funciones.

se parte de:

$$\phi^*(g\tau) = (g\tau) [f(df_1(v_1), df_2(v_2), \dots, df_n(v_n))]$$

Luego, aplicando de manera distributiva la función de transformación se obtiene que:

$$\phi^*(g\tau) = g([f(df_1(v_1), df_2(v_2), \dots, df_n(v_n))]) \tau([f(df_1(v_1), df_2(v_2), \dots, df_n(v_n))])$$

Luego, recordando la definición de pullback es posible deducir que:

$$\phi^*(g\tau) = [\phi^*(g)] \phi^*(\tau)$$

## Integrales sobre formas

### Integrales de uno-formas

Para integrar uno formas debemos hacer uso de la integral de trayectoria, propia del cálculo vectorial. Recordando, la integral de trayectoria está definida como el área bajo la curva de una curva en tres dimensiones que es tangente a un campo vectorial  $\vec{\mathbf{F}}$ . Analíticamente se define como:

$$\int_c \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \mathbf{F}(r(t)) \cdot r'(t) dt$$

Luego, en el lenguaje de formas diferenciales, la integral de uno formas se define como la integral del pull-back de la uno forma,  $\omega$ , sobre el parámetro de la curva a lo largo del intervalo  $[a; b]$ . Analíticamente se define como:

$$\int_c \omega = \int_{[a;b]} \omega^*$$

De igual manera, la representación geométrica está dada por la figura 3.12.

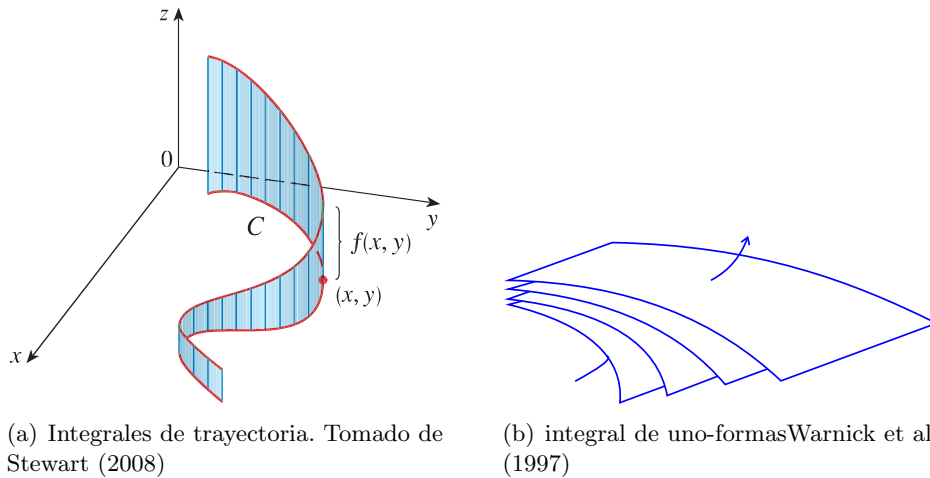


Figura 3.12: Representación geométrica de las integrales de uno-forma

Observe que que la figura 3.12a muestra la integral usual del área bajo la curva, en este caso para una curva en tres dimensiones, siguiendo el principio clásico de integración. Por otro lado, en la figura 3.12b encontramos la integral de uno formas, cuyo resultado esta orientado a contar la cantidad de superficies que atraviesa la curva sobre la que se integran las superficies.

### Integración sobre dos - formas

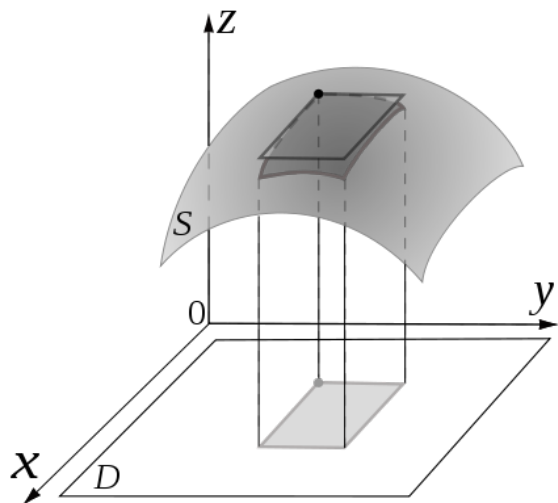
Para integrar sobre dos formas, es necesario recordar las integrales de superficie, propias del calculo vectorial. Desde el vectorial, es posible definir la integral de superficie como el volumen bajo una superficie, teniendo en cuenta una área particular sobre la superficie. Ahora bien, analíticamente se define como:

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_s F(x, y) dA$$

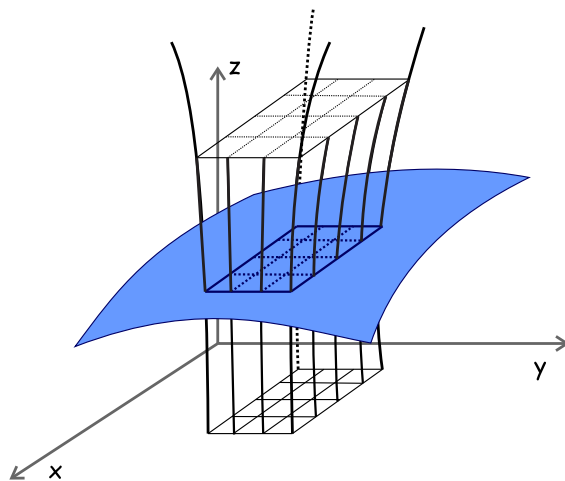
Luego, para las formas diferenciales, la integral de una dos forma, es una integral para una dos forma parametrizada mediante un pull-back en la region de integración. Analíticamente se tiene que:

$$\iint_D \Theta = \iint_s \Theta^*$$

Geoméricamente es posible apreciar que, mientras la integral se superficie en en la representación vectorial busca calcular el volumen bajo una superficie, la integral de una dos formas pretende contar la cantidad de tubos con cierta área constante que atraviesan una superficie. Es importante resaltar que los tubos estarán direccionados hacia la resultante del producto cuña. Observe la figura 3.13.



(a) Integrales de Superficie. Tomado de Marsden et al. (1991)



(b) integral de dos-formas. Tomado de Warnick et al. (1997)

Figura 3.13: Representación geométrica de las integrales de dos-formas

# Anexo 2

## Deducción de la ley de gravitación clásica

Se sabe que, la fuerza gravitacional se propaga a lo largo de la coordenada radial, de acuerdo con esto se tiene que:

$$\vec{F}_{12} = m \left[ \ddot{\vec{r}} + \vec{r}\dot{\theta}^2 \right] \hat{e}_r \quad (3.23)$$

Ahora bien, observe que la ecuación anterior presenta indicios sobre la dirección de la ley de gravitación, pues esta queda en términos de la componente radial del sistema coordinado. Esto es importante de resaltar, puesto que fue uno de los grandes aportes propuesto por Newton, quien enunció que las fuerzas gravitacionales tienen una dirección radial. Luego, para resolver la ecuación (1) en mención es necesario encontrar el valor de  $\ddot{\vec{r}}$  y de  $\vec{r}\dot{\theta}^2$ .

Para encontrar  $\ddot{\vec{r}}$  recordamos la ecuación (3.3)

$$r = \frac{r_0}{1 + e \cos(\theta)}$$

Derivando con respecto al parámetro  $\theta$  encontramos que:

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{4c^2 \cos(\theta) e}{r^2 r_0}$$

Luego para encontrar el valor de  $\vec{r}\dot{\theta}^2$ , recordamos la magnitud de la ecuación (3.4):

$$\vec{r}^2 \dot{\theta} = 2\tau$$

Luego, elevando al cuadrado, y realizando el álgebra correspondiente, se obtiene que:

$$\vec{r}\dot{\theta}^2 = \frac{4c^2}{r^2}$$

Luego, realizando la resta entre los términos  $\ddot{\vec{r}}$  y  $\vec{r}\dot{\theta}^2$  se obtiene que:

$$\ddot{\vec{r}} - \vec{r}\dot{\theta}^2 = -\frac{4c^2}{r^2 r_0}$$

Remplazando en la ecuación (1)

$$\vec{F}_{12} = m \left[ -\frac{4c^2}{r^2 r_0} \right] \hat{e}_r \quad (3.24)$$

Ahora, se realiza la siguiente suposición:

$$U_0 = \frac{4c^2}{r_0}$$

Luego, recordando el tercer principio de Newton, el cual enuncia los pares de fuerza acción - reacción se tiene que:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Si se aplicara el proceso anterior, es decir la reconstrucción de la ley de gravitación, a la fuerza  $\vec{F}_{21}$  se obtiene que :

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \implies \frac{mU_0}{r^2} \hat{U}_r = \frac{MU}{r^2} \hat{U}_r$$

Luego, para finalizar con la formulación, se establece la siguiente relación

$$MU = mU_0 \implies \frac{U_0}{M} = \frac{U}{m} = G$$

Luego  $U_0$  termina por definirse como:

$$U_0 = \frac{MU}{m} = GM$$

Remplazando el valor de  $U_0$  en la ecuación 2 se obtiene:

$$F_{12} = -\frac{GMm}{r^2} \hat{U}_r$$

## Ley de gravitación clasica en coordenadas esféricas.

Se sabe que la fuerza de gravitación esta descrita como

$$F_g = -\frac{GMm}{r^2} dr$$

Luego, es posible escribir dicha ley en un sistema cartesiano como:

$$F_g = -\frac{GMm}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dx + dy + dz$$

Ahora bien, para aplicar el pull - back sobre la expresion de  $F_g$  es necesario definir un conjunto de ecuaciones de transformación. De acuerdo con esto, se tiene que las ecuaciones de transformación están dadas por:

$$(\rho, \theta, \varphi) = \begin{cases} x = \rho \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ y = \rho \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ z = \rho \cos(\theta) \end{cases}$$

Utilizando las ecuaciones de transformación, se procede a calcular dx.

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta$$

$$dx = \cos(\varphi) \sin(\theta) d\rho - \rho \sin(\varphi) \sin(\theta) d\varphi + \rho \cos(\varphi) \cos(\theta) d\theta$$

Realizando un proceso análogo para dy y para dz se obtiene que:

$$dy = \sin(\varphi) \sin(\theta) d\rho + \rho \sin(\theta) \cos(\varphi) d\varphi + \rho \sin(\varphi) \cos(\theta) d\theta$$

$$dz = \cos(\theta) d\rho + 0 d\varphi - \rho \sin(\theta) d\theta$$

Por otro lado:

$$dx + dy + dz = (\cos(\varphi) \sin(\theta) + \sin(\varphi) \sin(\theta) + \cos(\theta)) d\rho + (-\rho \sin(\varphi) \sin(\theta) + \rho \sin(\theta) \cos(\varphi)) d\varphi + \dots$$

$$(\rho \cos(\varphi) \cos(\theta) + \rho \sin(\varphi) \cos(\theta) - \rho \sin(\theta)) d\theta$$

Del calculo vectorial se sabe que:

$$dx + dy + dz = \begin{cases} \hat{r} = \cos(\varphi) \sin(\theta) + \sin(\varphi) \sin(\theta) + \cos(\theta) \\ \hat{\varphi} = \cos(\varphi) - \sin(\varphi) \\ \hat{\theta} = \cos(\varphi) \cos(\theta) + \sin(\varphi) \cos(\theta) - \sin(\theta) \end{cases}$$

Finalmente:

$$dx + dy + dz = \hat{r} d\rho + \rho \sin(\theta) \hat{\varphi} d\varphi + \rho \hat{\theta} d\theta$$

Luego, es posible deducir del vectorial que:

$$d\vec{r} = d\vec{\rho} = \hat{r} d\rho + \rho \sin(\theta) \hat{\varphi} d\varphi + \rho \hat{\theta} d\theta$$

Ahora bien, es importante que a partir de  $d\rho$  es posible hallar los factores de escala de para las coordenadas esféricas, en ese orden de ideas tenemos que:

$$h_\rho = 1 \quad h_\varphi = \rho \sin(\theta) \quad h_\theta = \rho$$

En otro aspecto, es importante remplazar las ecuaciones de transformación sobre  $(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$  se obtiene que:

$$(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} = ((\rho \cos(\varphi) \sin(\theta))^2 + (\rho \sin(\varphi) \sin(\theta))^2 + (\rho \cos(\theta))^2)^{3/2} = \rho^3$$

Finalmente, la ecuación de gravitación en términos de coordenadas polares están dadas por:

$${}^*F_g = -\frac{GMm}{\rho^3} \mathbf{d}\tilde{\rho}$$

Por último, es posible pensar en lo siguiente. Desde el vectorial se sabe que la posición está dada por  $\vec{r} = r\hat{r}$ . Ahora bien, si se toma un infinitesimal de la posición se tiene que:  $\mathbf{d}\tilde{\rho} = \rho d\hat{\rho}$ . Realizando el álgebra correspondiente se puede describir la ley de gravitación como:

$${}^*F_g = -\frac{GMm}{\rho^2} d\hat{\rho}$$

## Deducción del gradiente en coordenadas esféricas.

Dada una cero forma  $f(x_1, x_2, x_3)$  al aplicarle la derivada exterior se tiene que:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3$$

Generalizando para cualquier sistema coordenado se sabe que:

$$df = \frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3$$

Luego, definiendo  $x_1 = \rho; x_2 = \theta; x_3 = \varphi$  se reescribe la derivada total como:

$$df = \frac{\partial f}{\partial \rho} d\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{1}{\rho \sin(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\varphi$$

Por último se sabe que:

$$d_{\rho, \theta, \varphi} = \frac{\partial}{\partial \rho} d\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} d\theta + \frac{1}{\rho \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} d\varphi$$

Donde la ecuación anterior prueba el gradiente en formas diferenciales.

## Deducción del rotacional de un gradiente en coordenadas esféricas.

Recordando que  $df$  se tiene que:

$$df = \frac{\partial f}{\partial \rho} d\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{1}{\rho \sin(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\varphi$$

Aplicando nuevamente la derivada sobre  $df$  se tiene que:

$$d(df) = \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) d\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) d\theta + \frac{1}{\rho \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) d\varphi \right] \wedge d\rho + \dots$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) d\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) d\theta + \frac{1}{\rho \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) d\varphi \right] \wedge d\theta + \dots$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{\rho \sin(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) d\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\rho \sin(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) d\theta + \frac{1}{\rho \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\rho \sin(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) d\varphi \right] \wedge d\varphi$$

Agrupando los términos de acuerdo a los productos cuña.

$$\begin{aligned} d(df) &= \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\rho \sin(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) - \frac{1}{\rho \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \right] d\theta \wedge d\varphi + \dots \\ &\quad \left[ \frac{1}{\rho \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) - \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{\rho \sin(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) \right] d\varphi \wedge d\rho + \dots \\ &\quad d\varphi + \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) \right] d\rho \wedge d\theta \end{aligned}$$

Realizando las derivadas se tiene que:

$$d^2 f = \left[ -\frac{\operatorname{ctg}(\theta)}{\rho^2 \sin(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right] d\theta \wedge d\varphi + \left[ -\frac{1}{\rho^2 \sin(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right] d\varphi \wedge d\rho + \left[ -\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right] d\rho \wedge d\theta$$

Como el lector podrá recordar  $f = \phi$  unicamente depende de  $\rho$ . En este orden de ideas a las derivadas son igual a cero, por lo tanto:

$$d^2 f = 0$$

## Demostración del laplaciano en coordenadas esféricas.

Sea  $\mathbf{X}$  una función del la forma

$$\mathbf{X} = \rho \cos(\varphi) \sin(\theta), \rho \sin(\varphi) \sin(\theta), \rho \cos(\theta)$$

Por otro lado se sabe que el diferencial total esta dado por:

$$d\mathbf{X} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x_2} dx_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x_3} dx_3$$

Luego, se sabe que un sistema en  $\mathbb{R}^3$  un sistema es orthonormal si sus vectores son perpendiculares, en este caso los vectores son:

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x_1}; \quad \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x_2}; \quad \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x_3}$$

Luego, se sabe que en términos generalizados los vectores anteriormente mencionados pueden escribirse como:

---


$$e_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x_i}$$

Luego, el diferencial total puede escribirse como:

$$d\mathbf{X} = h_1 e_1 dx_1 + h_2 e_2 dx_2 + h_3 e_3 dx_3$$

Por otro lado, es posible asumir que:

$$\sigma_i = h_i dx_i \tag{3.25}$$

Ahora bien, se sabe que una uno-forma se escribe como

$$df = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3$$

Remplazando de acuerdo a la ecuacion (5) se tiene que:

$$df = f_1 \frac{\sigma_1}{h_1} + f_2 \frac{\sigma_2}{h_2} + f_3 \frac{\sigma_3}{h_3}$$

Aplicando el operar hodge star se tiene que:

$$\star df = f_1 \frac{\sigma_2 \wedge \sigma_3}{h_1} + f_2 \frac{\sigma_3 \wedge \sigma_1}{h_2} + f_3 \frac{\sigma_1 \wedge \sigma_2}{h_3}$$

Remplazando de acuerdo a la ecuacion (3)

$$\star df = \frac{h_2 h_3 f_1}{h_1} dx_2 \wedge dx_3 + \frac{h_3 h_1 f_2}{h_2} dx_3 \wedge dx_1 + \frac{h_1 h_2 f_3}{h_3} dx_1 \wedge dx_2$$

Realizando la derivada sobre la función  $\star df$  se tiene que:

$$d(\star df) = \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial f}{\partial x_1} \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial x_2} \right] + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[ \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial f}{\partial x_3} \right] \right] h_1 h_2 h_3 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

Finalmente, organizando el laplaciano tenemos que:

$$d(\star df) = \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \rho^2 \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial \rho} \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right] \right] \rho^2 \sin(\theta) d\rho \wedge d\theta \wedge d\varphi$$