APORTES REALIZADOS POR LEIBNIZ A LA CONSOLIDACIÓN DEL CÁLCULO DIFERENCIAL

CLAUDIA PENAGOS VEGA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D.C. 2013

APORTES REALIZADOS POR LEIBNIZ A LA CONSOLIDACIÓN DEL CÁLCULO DIFERENCIAL

CLAUDIA PENAGOS VEGA

Trabajo de grado presentado como requisito para optar el título de
Licenciada en Matemáticas

HERNÁN DÍAZ ROJAS

Asesor

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ, D.C. 2013

A mi familia,
Rosalba, Armando y Alfredo,
por ser motivo constante de tenacidad,
entrega y amor

A Jorge,
por su coraje, ternura y compañía

AGRADECIMIENTOS

Agradezco de manera especial a mis padres y hermano, por su confianza y apoyo incondicional.

Al profesor Hernán Díaz, por animarse a trabajar conmigo, por su cariño y comprensión, por sus oportunas preguntas y sus valiosos comentarios, por su acompañamiento durante este largo proceso.

Al profesor Mauricio Bautista, a las profesoras Lyda Mora y Nora Rojas, a MAPPU y a mis amigos, Faiber y Angie, por sus enseñanzas, por sus palabras de aliento y su amistad.

En general, le doy las gracias a la Universidad Pedagógica Nacional, y a los profesores y profesoras del Departamento de Matemáticas, por sus incalculables aportes a mi formación profesional.

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN (RAE)

Tipo de documento:	Trabajo de Grado
Acceso al documento:	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento:	APORTES REALIZADOS POR LEIBNIZ A LA CONSOLIDACIÓN DEL CÁLCULO DIFERENCIAL
Autora:	PENAGOS VEGA, Claudia
Director:	DÍAZ ROJAS, Hernán
Publicación:	Bogotá, D.C., 2013, 74 páginas
Unidad Patrocinante:	Universidad Pedagógica Nacional. Facultad de Ciencia y Tecnología. Departamento de Matemáticas. Proyecto Curricular Licenciatura en Matemáticas
Palabras Clave:	Derivada, recta tangente, métodos de solución a problemas relacionados con tangentes, expresiones para calcular derivadas, diferencial

Descripción

El trabajo consiste, principalmente, en un rastreo de los problemas que dieron origen al Cálculo Diferencial y los métodos que se emplearon en diferentes épocas, para darles solución. El interés primordial es destacar el trabajo realizado por Leibniz.

Fuentes

Para la elaboración del presente documento se consultaron 28 referencias bibliográficas, entre tesis, artículos y libros.

Algunas de ellas son:

Barcelo, B. (2002). El descubrimiento del Cálculo. Universidad Autónoma de Madrid. España.

Collete, P. (2000). Historia de las matemáticas II. Siglo Veintiuno Editores. México, D.F

González, P. (2008). Fermat y los orígenes del cálculo diferencial. Nivola libros y ediciones. España.

Martínez, J., López, R., Gras, A. & Torregosa, G. (2002). *La Diferencial no es un incremento infinitesimal. Evolución del concepto de Diferencial y su clarificación en la enseñanza de la física.* En Matemáticas: Enseñanza de las ciencias, febrero, número 20, pág. 271 – 283.

Lopes, J. (2004). Cálculo Diferencial: Estudo histórico sobre a evolução do Cálculo Diferencial no século XVII.

Peréz, J. (*s.f*). Orígenes del Cálculo. Historia de las Matemáticas.

Ruíz, M. & Martínez, F. (2005). Infinitésimos: Ficciones útiles para el cálculo de tangentes y cuadraturas.

Contenidos

Este documento consta de tres capítulos. En el primero, se da cuenta de los propósitos de este trabajo y su respectiva justificación. En el segundo, se hace una breve mención al estado de las matemáticas en el siglo XVII, a los métodos que se idearon para solucionar aquellos problemas que le dieron origen al Cálculo Diferencial y a la evolución en la forma en que estos fueron abordados por matemáticos en diferentes épocas. En el tercer capítulo, se tratan los aportes de Leibniz a la consolidación del Cálculo Diferencial, sus métodos, las dudas y las fuertes críticas que estos originaron.

Metodología

Para la realización del presente estudio no se hizo uso de un modelo de investigación en particular. Inicialmente se realizó la búsqueda, selección y recopilación de la información necesaria y pertinente sobre la evolución histórica del concepto de derivada, que abarca desde la matemática griega hasta la denominada matemática moderna, incluyendo los métodos utilizados para derivar. Posteriormente se organizó la información en tres bloques: los trabajos realizados en torno al Cálculo Diferencial i) antes de Leibniz, ii) por Leibniz y iii) después de Leibniz. A continuación se realizó la lectura y el estudio de la información relacionada con el primer bloque, información que incluye desde los trabajos de Euclides hasta los de Newton, seguido de la escritura y la posterior discusión con el asesor sobre lo consignado. Se procedió de manera similar con el segundo y tercer bloque, prestando especial atención al método empleado por Gottfried Leibniz para derivar.

Conclusiones

Las conclusiones de este trabajo apuntan a dos aspectos generales. Uno, dar cuenta de la medida en que los propósitos mencionados anteriormente fueron atendidos y dos, los aportes que el desarrollo de esta propuesta le brindo a mi formación tanto personal como profesional.

Fecha de elaboración del Resumen: 20 / 04 / 2013

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

En este documento se presenta un estudio histórico de la evolución del Cálculo Diferencial, en donde se presta especial atención a los aportes hechos por Gottfried Leibniz a la consolidación de esta importante rama de las matemáticas.

Está estructurado en tres capítulos, los cuales se describen a continuación.

En el primer capítulo se da cuenta de los propósitos de este trabajo y su respectiva justificación.

En el segundo capítulo se hace una breve mención del estado de las matemáticas en el siglo XVII, a continuación, y en un intento por mostrar los problemas que motivaron el desarrollo del Cálculo Diferencial, los métodos que se idearon para darles solución y la evolución en la forma de abordar y de dar respuesta a dichos problemas. Para esto, se hace un breve recuento de los personajes que se encargaron de su estudio en diferentes épocas y los resultados más importantes en relación con ello.

En el tercer capítulo, se describe el trabajo realizado por Leibniz destacando sus aportes a la consolidación del Cálculo Diferencial; sus métodos para calcular derivadas, las dudas y las fuertes críticas que estos originaron. Inicialmente se hace un recuento de los acontecimientos más importantes en la vida de este gran personaje, de los motivos que lo llevaron a involucrase con el estudio de las matemáticas, de sus inicios y de sus posteriores descubrimientos. Además de esto, se incluyen algunos de los desarrollos posteriores que se dieron en el cálculo, después de su descubrimiento por parte de Newton y Leibniz, con el fin de clarificar, fundamentar y dar rigor a los métodos empleados en el nuevo cálculo, puesto que carecían de un sustento teórico.

Por último, se enuncian las conclusiones y los referentes bibliográficos utilizados para su elaboración.

CAPÍTULO 1:
GENERALIDADES DEL ESTUDIO

JUSTIFICACIÓN

Los orígenes del Cálculo Diferencial, cuya construcción ocupa un lugar importante en la Revolución Científica[1] que vivió la Europa del siglo XVI y XVII, se derivan de la antigua geometría griega y fueron motivados por el constante deseo de encontrar solución a problemas relacionados con el movimiento de los cuerpos, la obtención de valores máximos y mínimos de una función dada y la construcción de la tangente a una curva dada en un punto dado. Su descubrimiento, en el siglo XVII, es atribuido a dos grandes matemáticos, Isaac Newton y Gottfried Leibniz, quienes de manera independiente y con características propias, desarrollaron unas reglas para derivar, conocidas como reglas de derivación.

Sin embargo, en el ámbito educativo, son poco mencionados los trabajos que sobre éstos conceptos habían elaborado matemáticos anteriores a ellos (p.e., Arquímedes, Roberval, Barrow, entre otros), razón por la que se pretende ahondar en el desarrollo del concepto de derivada, poniendo de manifiesto que éste no se ha dado de forma lineal, al contrario, en el camino que llevó a su descubrimiento fueron muchos los elementos que se suprimieron, reformularon o ampliaron, además de ser el resultado de numerosos esfuerzos y contribuciones de diferentes personajes en distintas épocas.

Por otro lado, se reconoce que estudio de obras de carácter histórico, aporta a la formación educativa de los futuros licenciados en matemáticas en cuanto *posibilita una visión dinámica, humana de las matemáticas y permite apreciar cómo sus desarrollos han estado*

[1] Este término hace referencia a los cambios en las formas de interpretación de los fenómenos de la realidad debido a una nueva noción de saber y de ciencia.

relacionados con las circunstancias sociales y culturales e interconectados con los avances de otras disciplinas, lo que trae consigo importantes implicaciones didácticas: posibilidad de conjeturar acerca de desarrollos futuros, reflexión sobre limitaciones y alcances en el pasado, apreciación de las dificultades para la construcción de nuevo conocimiento. El conocimiento de la historia puede ser enriquecedor, entre otros aspectos, para orientar la comprensión de ideas en una forma significativa. (MEN, 1998)

OBJETIVOS

Objetivo general

- Mostrar los aportes de Leibniz al Cálculo Diferencial, reconociendo los trabajos realizados por matemáticos anteriores y contemporáneos a él.

Objetivos específicos

- Exponer los principales aportes realizados por matemáticos anteriores y contemporáneos a Leibniz, al desarrollo del cálculo diferencial.
- Mostrar el método de derivación empleado por Leibniz ilustrándolo a través de ejemplos específicos.
- Realizar una comparación entre los procesos hechos por Leibniz y los procesos actuales para calcular derivadas.

CAPÍTULO 2:
APORTES REALIZADOS A LA CONSTRUCCIÓN DEL CÁLCULO DIFERENCIAL

El desarrollo del Cálculo Diferencial, está ligado a la evolución del tipo de problemas que fueron abordados por matemáticos o aficionados en distintas épocas y de las soluciones que se dieron a cada uno de ellos. No obstante, se les atribuye a Newton y a Leibniz, la creación de esta rama de las matemáticas debido a la invención de un método general para abordar infinidad de problemas.

A continuación se presenta de manera muy breve, una mirada a lo que acontecía en el siglo XVII en relación con las matemáticas seguido de un resumen de los personajes y sus contribuciones más importantes al desarrollo del Cálculo Diferencial.

LAS MATEMÁTICAS EN EL SIGLO XVII

Collete(2000), en su *Historia de las matemáticas II*, describe que a mediados del siglo XV, después de conocer la denominada ciencia antigua, los matemáticos europeos se preocuparon por la creación de la teoría de ecuaciones, la trigonometría y el álgebra simbólica, rebosando por mucho el trabajo que por siglos habían desarrollado los griegos; esto debido al desarrollo de matemáticos en Francia, Inglaterra, Alemania, Holanda e Italia. Sin embargo no fue sino hasta el siglo XVII donde surge una nueva ciencia, la ciencia moderna.

El origen de esta ciencia se debe a los pensadores de la Grecia antigua, quienes se negaron a aceptar el aspecto empírico del conocimiento, logrando elaborar teorías matemáticas con "*un rigor poco reprochable"* (Collete, 2000) y cuyo desarrollo no se gestó dentro de las universidades *"cuyo conservadurismo y dogmatismo, controlados por la religión oficial, contribuyeron en gran medida a frenar la creación y la difusión del conocimiento"*. (Collete, 2000)

Antes de 1550, el desarrollo de las matemáticas fue producto del trabajo que de manera individual y aislada realizaban científicos y aficionados, por lo que este sólo era conocido por un número reducido de personas. Sin embargo, esta situación cambió a principios del siglo XVII debido, principalmente, a un crecimiento del número de científicos comprometidos con las matemáticas, cuyo interés por dar a conocer sus ideas y trabajos los condujo a establecer comunidades científicas que permitieron entablar comunicación entre los matemáticos de la época para no solo difundir resultados, plantear retos, intercambiar y confrontar ideas, sino estimular el interés y la motivación de sus participantes.

Algunas de estas comunidades fueron:

Comunidad	**Constituida en**	**Datos históricos**
Cabinet Du Puy	Francia	
Invisible College	Inglaterra	
Accademia dei Lincei (Academia Nacional de los Linces)	Italia, 1603	Galileo fue uno de sus miembros.
Accademia del Cimento	Italia, 1657	
Royal Society of London (Sociedad Real de Londres)	Londres, 1662	Durante los años 1703 a 1727 Isaac Newton fue su presidente.
Académie Royale des Sciences (Academia Francesa de París)	París, 1666	Algunos de sus miembros más reconocidos fueron el padre Marín Mersenne y Descartes.
Societät der Wissenschaften (Primero Academia de Ciencias de Brandenburgo, después Real Academia de Ciencias de Berlín)	Berlín, 1700	Leibniz fue su primer presidente.

Tabla 1.- Algunas comunidades científicas constituidas en el siglo XVII

En pocas palabras, el siglo XVII fue testigo de la expansión de las actividades científicas, el enriquecimiento a los temas clásicos y de las notables contribuciones de destacados matemáticos que dieron origen a la matemática moderna, este es el caso de Fermat, Newton, Leibniz, entre otros, cuyos aportes desembocaron en la creación de nuevas ramas de las matemáticas: el surgimiento de la geometría analítica, los inicios de la geometría proyectiva y la invención del cálculo diferencia e integral, por nombrar algunos ejemplos.

LOS PRECURSORES

Los precursores del Cálculo Diferencial se ocuparon de numerosos problemas, estudiando y resolviendo aquellos relacionados con el movimiento de los cuerpos, la determinación de rectas tangentes y el cálculo de valores máximos y mínimos de una función dada. Como se verá, fue un largo proceso en el que participaron numerosos personajes y que contribuyó, sin lugar a dudas, a los trabajos que Newton y Leibniz desarrollaron posteriormente.

A continuación se presenta, de forma sucinta, los principales avances de los personajes que abordaron dichos problemas, haciendo uso en algunos casos de la notación actual y tratando de ser fiel a las ideas de sus autores.

Euclides
(325 – 265 a. de J.C.)

Presentó, a finales del siglo IV, en el libro III de los *Los Elementos* titulado *La Geometría del Círculo*, los resultados relacionados con el estudio de las propiedades de la tangente al círculo. Allí se encuentra la siguiente definición:

> Definición III.2. Una recta es tangente a un círculo cuando, tocando al círculo y siendo prolongada, no corta al círculo. (González2, p.60)

Como se puede observar, la recta tangente es considerada como "la recta que corta a la curva en un solo punto" (Pérez, p.9). Definición que resulta apropiada para determinadas familias de curvas, entre ellas las circunferencias.

Apolonio

(190 a. de J.C.)

Se ocupó en el libro II de *Las Cónicas*, del trazado de tangentes a las cónicas haciendo uso de técnicas geométricas, basándose en las aplicaciones de la división armónica de un segmento. A continuación se muestra la forma en la que Apolonio traza la tangente a una elipse en un punto de esta.

> Dibuja la perpendicular QN al eje AA_1 y halla el conjugado armónico T de N con respecto a A y A_1, es decir, el punto T de la recta AA_1 que verifica que:
>
> $$\frac{TA}{TA_1} = \frac{AN}{NA_1}$$
>
> O bien, el punto T que divide externamente al segmento AA_1 en la misma razón en que N divide internamente a AA_1. (González3, p.22)

La recta que pasa por los puntos T y Q, resulta ser la tangente a la elipse en el punto Q.

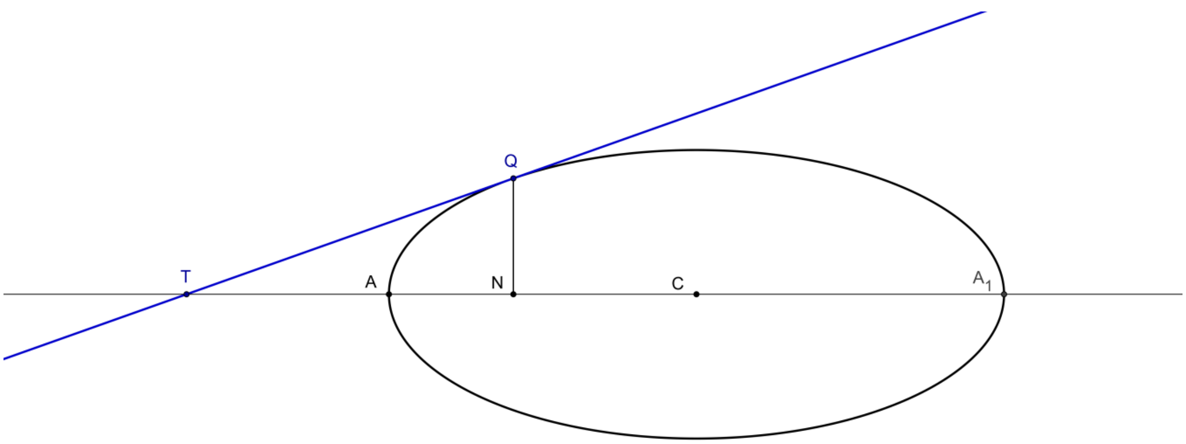


Figura 1.- Tangente a la elipse en el punto Q

Se puede decir que Apolonio extendió la idea de tangente que Euclides había establecido para el círculo, a las cónicas.

Arquímedes de Siracusa
(287 – 212 a. de J.C.)

Arquímedes obtuvo resultados importantes relacionados con el cálculo de tangentes para ciertas curvas particulares, las espirales, que define de la siguiente manera:

> Imagínese una línea que gira con velocidad angular constante alrededor de un extremo, manteniéndose siempre en un mismo plano, y un punto que se mueve a lo largo de la línea con velocidad lineal constante: ese punto describirá una espiral. (Rodríguez, p.9)

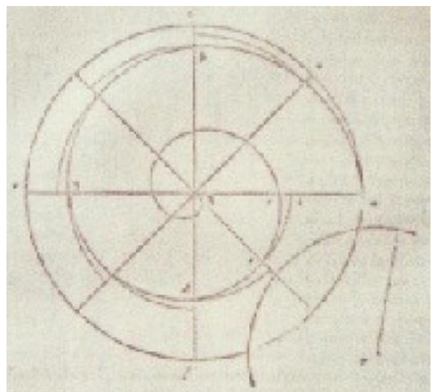


Figura 2.- Espiral de Arquímedes[2]

Se cree que al abordar dicho problema no lo consideró desde un punto de vista estático, sino cinemático, "calculando la dirección del movimiento de un punto que genera la espiral." (Pérez, p.9)

Cabe resaltar que a finales del siglo XVI ocurrieron dos hechos que marcaron el rumbo de las matemáticas. El primero tiene que ver con la invención del álgebra simbólica por parte de Viète, y el segundo, la creación de la geometría analítica por parte de Descartes y Fermat. Esto originó nuevas y numerosas curvas para las cuales resultaba inapropiada la concepción que sobre tangentes, tenían los griegos, por tal motivo, los matemáticos del siglo XVII se dieron a la tarea de desarrollar métodos que permitiesen obtener la recta tangente a cualquier curva.

[2] Imagen tomada del documento "Historia de las matemáticas. Arquímedes. El genio de Siracusa"

Como se verá a continuación algunos de ellos abordaron el problema de una manera geométrica, otros, haciendo uso del álgebra e incluso hubo aquellos que implantaron elementos cinemáticos. Todo esto, preparó el camino para que Newton y Leibniz, inventaran el Cálculo en el último tercio de siglo.

Pierre de Fermat
(1601 – 1665)

"Fermat, el verdadero inventor del cálculo diferencial"

Laplace (Boyer, 1987, p.423)

Pierre de Fermat, nació en 1601 en Beaumont-de-Lomagne, Francia. Hijo de Dominique Fermat, un comerciante de cueros y Claire de Long, hija de una familia perteneciente a la nobleza, quien después de haber recibido una educación sólida en el seno de su familia fue enviado a estudiar derecho a Toulouse, donde permaneció hasta principios de 1620, año en el que se desplazó a la ciudad de Burdeos, poniéndole una pequeña pausa a su formación como jurista y buscando satisfacer su afición a las matemáticas. Una vez allí, compartió su formación y afición con Jean de Beaugrand, quien lo llevó a estudiar el *Arte analítica* de Viète.

De regreso a Toulouse, cinco años más tarde, entabló amistad con Pierre de Carcavi quien lo contactó con el padre Mersenne, principal difusor de su trabajo debido a la continua correspondencia que mantenían y que permitió dar a conocer los importantes avances logrados en matemáticas, a la comunidad de matemáticos existente en ese entonces y a su vez, plantearles nuevos e interesantes problemas a resolver.

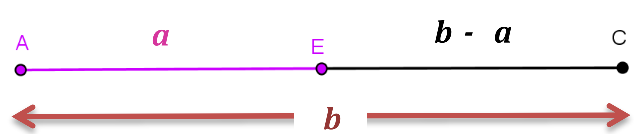
En pocas palabras, se puede decir que Fermat fue jurista de profesión y matemático por pasión, tanto así que es considerado el príncipe de los matemáticos aficionados. Los resultados que obtuvo contribuyeron al desarrollo de muchas de las ramas de las matemáticas. Se le considera inventor de la geometría analítica al igual que Descartes, inventor del cálculo de probabilidades al igual que Pascal y precursor importante del cálculo diferencial.

Fermat desarrolló un método para calcular máximos y mínimos cuya fuente puede encontrarse en el trabajo de Viète. Su método consistía en:

1. Expresar la cantidad máxima o mínima por medio de una incógnita a.
2. Sustituirla por la cantidad $a + e$.
3. *Adigualar*[3] ambas expresiones.
4. Eliminar términos comunes.
5. Dividir todos los términos por alguna potencia de e con el fin de reducir el número de e.
6. Suprimir los términos que aún contenían e.

Dicho método se ejemplifica a continuación para mayor entendimiento.

Problema:
Dividir un segmento dado en dos segmentos de manera que el área del rectángulo determinado por ellos tenga área máxima. O lo que es lo mismo: *Dividir un segmento AC en el punto E de tal manera que el producto de AE por EC sea máximo*



Solución:
Sea $AC = b$ y $AE = a$ entonces se tiene que $EC = b - a$. Por lo que el producto que se desea hallar es:

$$AE \times EC = a \times (b - a) = \boldsymbol{ab - a^2}$$

[3] Término utilizado por Diofanto para *"designar una aproximación a un cierto número racional tan cercana como fuera posible en el ámbito de los problemas de la Aritmética"* (González, 2008).

Ahora se remplaza a, que resulta siendo la incógnita original, por $a + e$

$$(a+e)b-(a+e)^2 = ab+be-a^2 -2ae-e^2$$

$$= ab-a^2 +be-2ae-e^2$$

Se adigualan las dos expresiones anteriores,

$$ab-a^2 \approx ab-a^2 +be-2ae-e^2$$

Se reducen los términos semejantes,

$$be \approx 2ae+e^2$$

A continuación se divide entre e y finalmente se suprimen las e restantes

$$be \approx 2ae+e^2$$

$$b \approx 2a+e$$

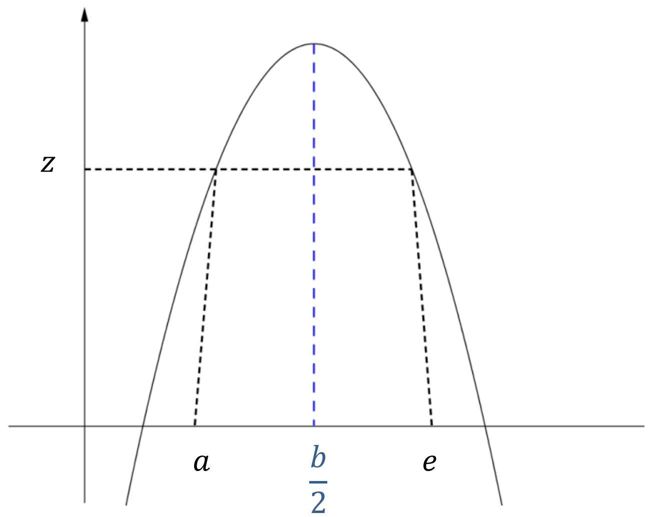
$$b = 2a$$

Por lo tanto, para que el producto sea máximo se debe tomar la mitad de b.

Como se puede apreciar, el problema de dividir una línea b en dos segmentos tal que su producto sea una cantidad z, está relacionado con la siguiente ecuación cuadrática:

$$bx-x^2 = z$$

Fermat conocía, de Euclides, que el producto de los segmentos no puede ser mayor que $b^2/4$ y que el valor máximo de dicho producto se obtiene en el punto medio del segmento dado, es decir para una cantidad $x = b/2$, tal como lo había establecido Pappus (González, 2008, pág. 84).



Sin embargo, este problema, debería tener otra solución. Por lo que Fermat determina la relación entre las raíces a y e de la ecuación cuando z es menor que el producto máximo, haciendo uso de la teoría de ecuaciones de Viète, obtiene las siguientes expresiones:

$$a(b-a) = e(b-e)$$

$$ab - a^2 = eb - e^2$$

$$ab - eb = a^2 - e^2$$

$$b(a-e) = (a-e)(a+e)$$

$$b = a + e$$

Entre más próximo esté z de $b^2/_4$, la diferencia entre a y e será menor, y cuando $z = b^2/_4$, se tendrá $a = e$ y $b = 2a$, que es la única solución que da el valor máximo del producto. Es por esta razón que se hace necesario igualar las raíces a y e. Con esto Fermat asevera que en el máximo la diferencia es cero o como dice, Babini (1969):

> Fermat traduce algebraicamente la idea, ya enunciada por Oresme y por Kepler, acerca de la anulación de la variación en las proximidades de los máximos y mínimos, aplicando la idea a la determinación de las tangentes a las curvas.

Problema: Buscar el máximo de

$$\boldsymbol{ab^2 - a^3}$$

Solución: Aplicando las reglas enunciadas anteriormente, se tiene que:

$$\begin{aligned}(a+e)b^2 - (a+e)^3 &= ab^2 + eb^2 - a^3 - 3a^2e - 3ae^2 - e^3 \\ &= ab^2 - a^3 + eb^2 - 3a^2e - 3ae^2 - e^3\end{aligned}$$

Adigualando,

$$ab^2 - a^3 \approx ab^2 - a^3 + eb^2 - 3a^2e - 3ae^2 - e^3$$

$$eb^2 \approx 3a^2e + 3ae^2 + e^3$$

$$b^2 \approx 3a^2 + 3ae + e^2$$

$$b^2 = 3a^2$$

Ecuación con la cual se obtendrá el máximo buscado tomando la raíz positiva de la ecuación anterior, ignorando que la raíz negativa proporciona un mínimo local debido a que un valor nulo o negativo para *a* no tiene significado geométrico. (González, 2008, pág. 68)

Cabe resaltar que:

- Los problemas sobre máximos y mínimos que abordó Fermat no son de optimización de cantidades sino problemas de construcciones geométricas.

- Su método no permite distinguir entre un máximo y un mínimo, ni tampoco entre extremos relativos y absolutos y no manifiesta la posibilidad de que exista más de un extremo.
- Nunca reveló los fundamentos demostrativos de su método, y cuando se vio obligado, lo hizo de forma vaga e imprecisa. (González, 2008; Pérez, pág. 23)

Hay quienes ven en Fermat, el precursor del cálculo diferencial y otros, no tanto. Si se retoma el primer ejemplo y se hace $a = x,\ e = \Delta x,$ y $f(x) = x(b - x)$ se puede notar que:

Método de Fermat	**Interpretación Actual**
1. Expresar la cantidad máxima o mínima por medio de una incógnita *a*. **2. Sustituirla por la cantidad $a + e$.** **3. *Adigualar* ambas expresiones.**	$f(x + \Delta x) - f(x) \sim 0$
4. Eliminar términos comunes.	$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \sim 0$
5. Dividir todos los términos por alguna potencia de *e* con el fin de reducir el número de *e*. **6. Suprimir los términos que aún contenían *e*.**	$\left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right)_{\Delta x = 0} \sim 0$

Tabla 2.- Interpretación método de Fermat

En razón a lo anterior, Pérez (*s.f*) afirma que:

> Para funciones derivables podemos interpretar todo esto como que el valor de x que hace máximo o mínimo a *f(x)* es la solución de resolver la ecuación
>
> $$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 0$$

Sin embargo, esto constituye una interpretación anacrónica de su método pues se afirma que:

> […] los fundamentos del método de máximos y mínimos de Fermat descansan en el estudio de las raíces de ecuaciones, es decir, en el dominio finitista de la teoría de ecuaciones y no en ningún tipo de consideración infinitesimal sobre límites. (González, 2008, p.86)

No obstante, Collete (2000) afirma que:

> […] Es importante señalar que este método algorítmico es equivalente a calcular
>
> $$\lim_{E \to 0} \frac{f(A + E) - f(A)}{E}$$
>
> aunque Fermat no poseía el concepto de límite. Sin embargo, el cambio de variables de A a $A + E$ y los valores próximos utilizados por Fermat constituyen la esencia del análisis infinitesimal. Subrayemos además que el método de Fermat no permite distinguir entre un máximo y un mínimo.

Otros argumentos que se esgrimen en contra de esta interpretación es que Fermat no pensaba en funciones sino en cantidades y que la e que utilizaba en su método, no aparece como variable que tienda a cero ni requiere, explícitamente, que esta deba ser "pequeña".

> El método es puramente algebraico y no supone en principio ningún concepto de límite. Para Fermat la *e* no es que tienda a 0, sino que en realidad se hace 0. (González, 2008, p.105)

A lo que agrega Pérez (p.23): "Él está pensando en una ecuación algebraica con dos incógnitas que interpreta como segmentos, es decir, magnitudes lineales dadas".

> El fenómeno de *presentismo* (i.e. interpretar el conocimiento de una época con los ojos, ideas, métodos y teoría del presente) aunado a la tendencia natural de interpretar la lectura de textos ajenos con lo que nosotros ya sabemos, con gran frecuencia lleva a ver en Fermat un precursor del Cálculo y sus ideas, por ejemplo encontrando pasos al límite o cocientes diferenciales donde no los hay. […] Si queremos ver a Fermat como un precursor del Cálculo nos tenemos que restringir por un lado, a la problemática que aborda y que comparte con muchos otros, y por el otro a la utilización del método de Viète, el cual lleva aparejado la introducción de la geometría analítica. Éste es un requisito para el desarrollo del Cálculo pero que no puede confundirse con éste. (Bromberg. & Rivaud, 2001)

Fermat también desarrolló un procedimiento para trazar la tangente a líneas curvas tales como la parábola, la elipse, la cisoide, la concoide, la cuadratriz, la cicloide, entre otras, que deriva del método de extremos, enunciado anteriormente y que se presenta a continuación.

La tangente a la parábola

Se considera la parábola *Z* con vértice en F, a la que se le desea trazar la tangente *CD* por el punto *C* y que interseca al eje de simetría en el punto *D*.

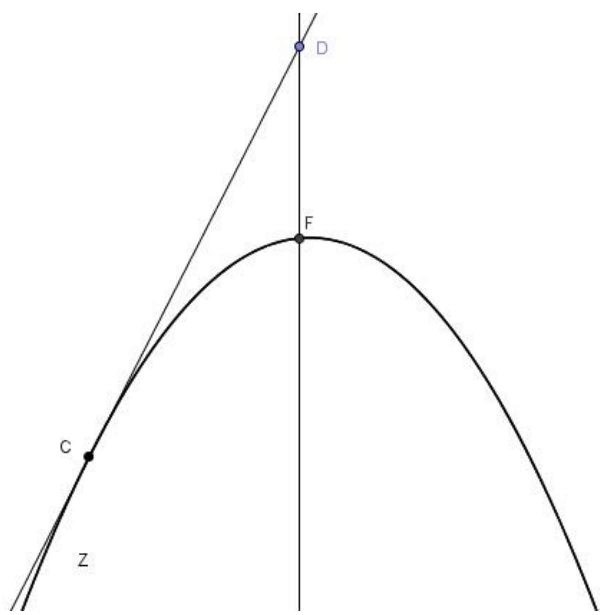


Figura 3.- Parábola y su tangente en el punto *C*

Primero ubica un punto *H* sobre la tangente, de tal forma que se cumpla la interestancia *C – H – D*. Paso seguido, traza los segmentos *HE* y *CG* perpendiculares a la recta *DG*.

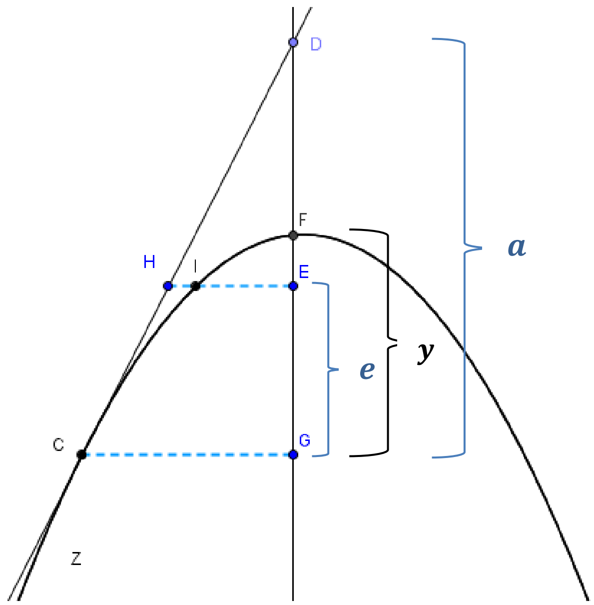


Figura 4.- Cálculo de la subtangente

Fermat pretende calcular la subtangente *GD* con la cual quedará determinada la tangente *CD*. Para esto, tiene en cuenta la propiedad de la parábola según Apolonio, que afirma que:

$$\frac{GF}{FE} = \frac{CG^2}{IE^2}$$

Como $\boldsymbol{HE} > \boldsymbol{IE}$, por ser HE exterior a la parábola, se tiene

$$\frac{GF}{FE} > \frac{CG^2}{HE^2}$$

Dado que $\Delta CGD \sim \Delta HED$

$$\frac{CG}{HE} = \frac{GD}{ED}$$

De las dos últimas relaciones, concluye que

$$\frac{GF}{FE} > \frac{GD^2}{ED^2}$$

Sea $GF = y,\ GE = e,$ y $GD = a$

$$\frac{y}{y-e} > \frac{a^2}{(a-e)^2}$$

$$y(a-e)^2 \ > \ a^2(y-e)$$

$$y(a^2-2ae+e^2) > \ a^2(y-e)$$

$$ya^2-2yae+ye^2 > ya^2-a^2e$$

Ahora sustituye la anterior desigualdad por la siguiente adigualdad y procede de la misma manera que en su método de extremos.

$$ya^2-2yae+ye^2 \approx ya^2-a^2e$$

$$a^2e+ye^2 \approx 2yae$$

$$a^2+ye \approx 2ya$$

$$a^2 = 2ya$$

$$a = 2y$$

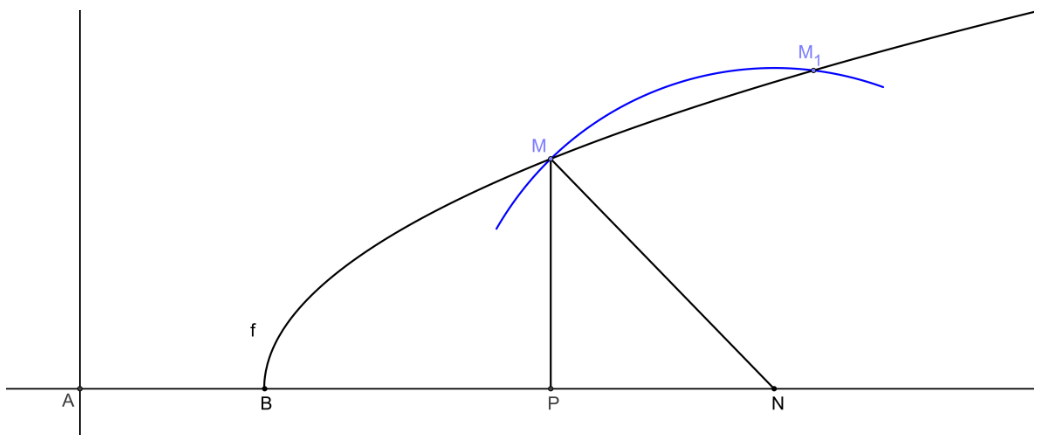
Con este resultado obtiene el valor de la subtangente GD. El hecho de conocer este valor, le permite ubicar las coordenadas del punto *D*, y dado que el punto *C* es conocido, por ser un punto de la parábola, calcula la pendiente de la recta tangente a la parábola en *C*, es decir, calcula el valor de la derivada en dicho punto.

René Descartes
(1596 – 1650)

"Para investigar la verdad es preciso dudar, en cuanto sea posible,
de todas las cosas"
(Descartes, 1637)

Ideó en 1637 un método algebraico, conocido con el nombre de *método del círculo*, para determinar la recta tangente, haciendo uso de la construcción de la normal a una curva en un punto dado. Dicho método puede expresarse de la siguiente manera:

Sea $F(x, y)$ una curva dada y un punto M de la misma, lo que se pretende es señalar la tangente a la curva en este punto. Considérese en primer lugar, un círculo[4] con centro en N y radio NM que corta a la curva en los puntos M y M_1, tal como se muestra en la figura.

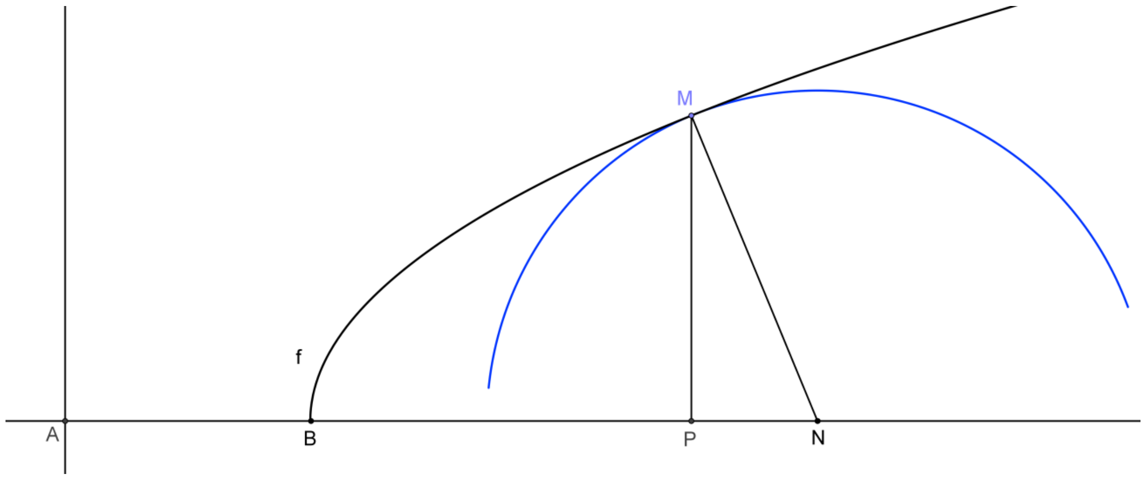


Donde $AP = x,\ \ AN = v,\ \ PM = y,\ \ NM = r$

El método consiste en encontrar la posición exacta de N, para la cual NM es la normal a la curva, es decir, la perpendicular a la tangente en el punto de contacto. Si la posición de N, en el eje x, es apenas aproximada, la circunferencia con este centro cortará a la curva dada

[4] O lo que Descartes denomina: curva auxiliar.

en otro punto M_1, próximo a M y que Descartes obliga a coincidir con M usando un proceso de cálculo que más tarde llegó a ser conocido como el *método de coeficientes indeterminados*. En esta posición "limite", NM resulta ser la normal a la curva dada y PN la subnormal, lo que facilita determinar la posición de la recta tangente. (Lopes, 2004)



Así, de acuerdo a lo indicado en la figura, la ecuación del círculo es:

$$r^2 = y^2 + (v - x)^2$$

Que es equivalente a

$$y = \sqrt{r^2 - v^2 + 2vx - x^2}$$

Entonces la expresión de la curva toma la forma:

$$F\left(x, \sqrt{r^2 - v^2 + 2vx - x^2}\right) = 0$$

De entre las raíces de la ecuación anterior deben existir dos raíces muy próximas. El método de Descartes consiste precisamente en obligar a que esta ecuación tenga una raíz de multiplicidad[5] dos.

[5] El concepto de multiplicidad de una raíz fue introducido por el matemático holandés Johann Van Hudde (1628 – 1704), contemporáneo de Descartes.

Ejemplo:

Considérese la curva $y = \sqrt{x-1}$

Se pretende determinar las relaciones entre los coeficientes de un polinomio con dos raíces eventualmente distintas, que representan los puntos de intersección de la curva dada con la curva auxiliar (circunferencia) y un polinomio del mismo grado con una raíz de multiplicidad dos, que representa la abscisa del punto de tangencia. (Lopes, 2004)

Para satisfacer la condición de Descartes, la circunferencia deberá ser tangente a la curva en estudio en apenas un punto. En esta posición “limite” el conocimiento exacto de la ecuación de la curva auxiliar permite determinar la posición de la normal y de manera indirecta la posición de la tangente.

Volviendo al ejemplo, la ecuación de la curva puede escribirse como

$$y^2 = x - 1$$

Se usa la curva auxiliar

$$y^2 = r^2 - (v - x)^2$$

Con r y v teniendo el mismo significado atribuido a la figura anterior.

Ahora se encontrará el punto de intersección de las dos curvas, para esto se igualan ambas expresiones. Luego se efectúan los cálculos correspondientes y se reordena la expresión resultante.

$$r^2 - (v - x)^2 = x - 1$$

$$r^2 - (v - x)^2 - x + 1 = 0$$

$$r^2 - v^2 + 2vx - x^2 - x + 1 = 0$$

$$x^2 - (2v - 1)x - r^2 + v^2 - 1 = 0$$

Por ser un polinomio de grado 2, debe tener una raíz doble (*a*). Una factorización posible sería entonces,

$$x^2 - (2v - 1)x - r^2 + v^2 - 1 = (x - a)^2$$

$$x^2 - (2v - 1)x - r^2 + v^2 - 1 = x^2 - 2ax + a^2$$

Igualando los coeficientes se obtiene:

$$-(2v - 1) = -2a \qquad \text{y} \qquad -r^2 + v^2 - 1 = a^2$$

De donde:

$$1 - 2v = -2a$$

$$v = \frac{1 + 2a}{2}$$

$$v = \frac{1}{2} + a$$

y

$$-r^2 + v^2 - 1 = a^2$$

$$r^2 = v^2 - 1 - a^2$$

Se remplaza *v*, en la expresión anterior, y se tiene:

$$r = \sqrt{(\frac{1}{2} + a)^2 - 1 - a^2}$$

Si se asigna a *a* el valor de 5, por ejemplo, se obtiene:

$$v = \frac{1}{2} + a = \frac{1}{2} + 5 = 5.5$$

$$r = \sqrt{(5.5)^2 - 1 - 5^2} = \sqrt{4.25}$$

Ahora, se verifica haciendo uso de las reglas actuales de derivación

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x - 1}}$$

La pendiente de la recta normal en el punto de abscisa *x=5* es:

$$m_{n(5)} = -\frac{1}{m_{t(5)}}$$

Así

$$m_{t(5)} = y'(5) = \frac{1}{2\sqrt{5 - 1}} = \frac{1}{4}$$

$$m_{n(5)} = -\frac{1}{\frac{1}{4}} = -4$$

$$y(5) = \sqrt{5 - 1} = 2$$

Se tiene que las coordenadas del punto donde se pretende calcular la tangente y el valor de la pendiente de dicha recta en ese punto, son:

$P(5, 2)$ y $m = -4$

Por lo que se tiene que la ecuación de la recta normal es:

$$y - 2 = -4(x - 5)$$

$$y = -4x + 22$$

Esta recta corta al eje x, precisamente en el punto de abscisa $x=5.5$ que es el valor de v encontrado previamente.

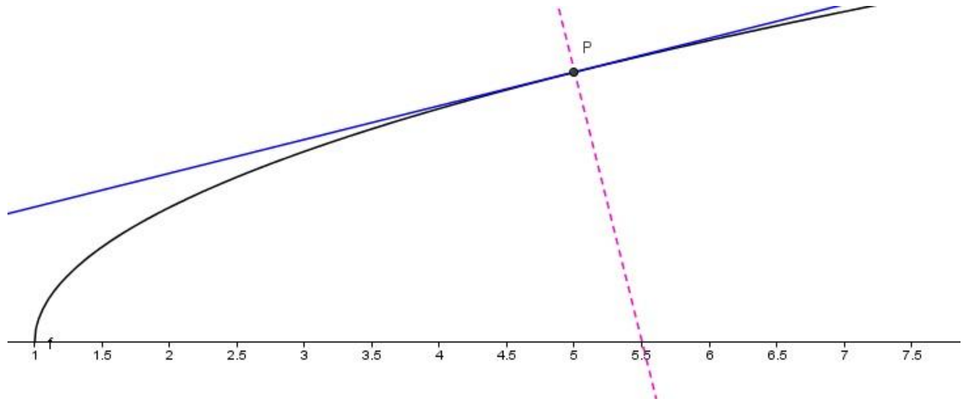
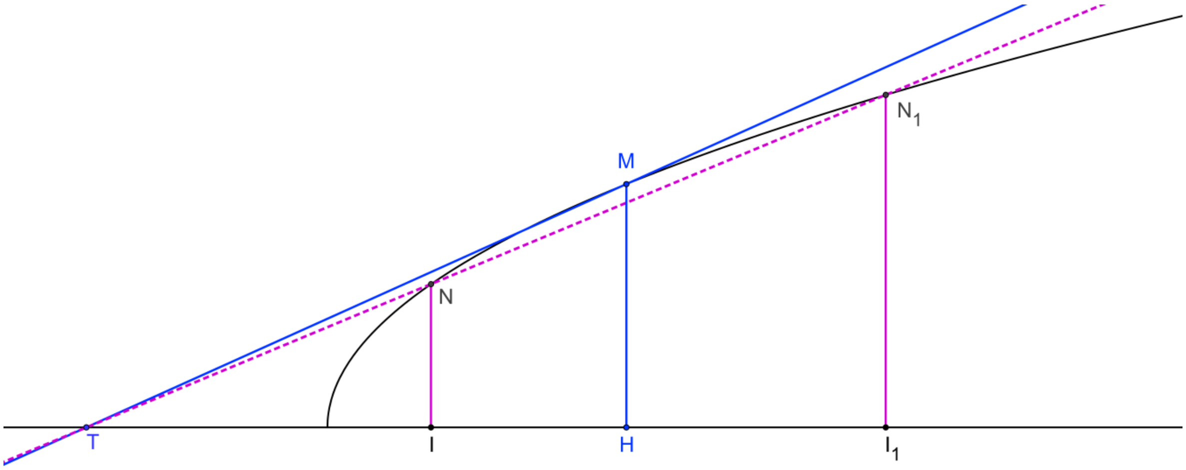


Figura 4.- Recta normal a la curva en el punto P

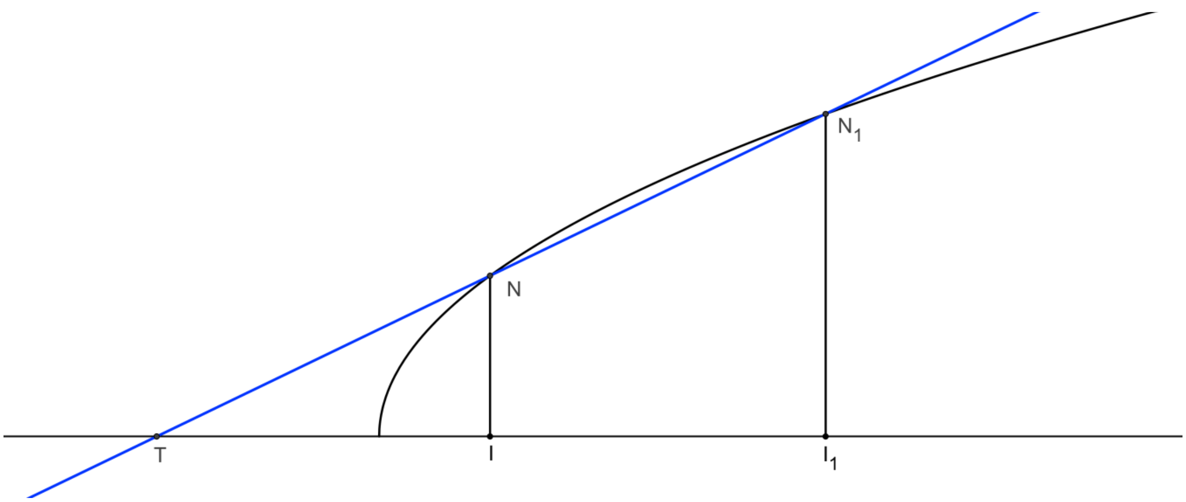
Cabe resaltar que:

> En este método se aprecia una fina combinación entre lo geométrico y lo algebraico, sin embargo, no es muy eficaz ya que hay casos en los que la ecuación, determinada por la suposición de un solo corte entre la curva y la circunferencia, conduce a una ecuación cuya resolución no es inmediata. (Álvarez, 2009)

Descartes posteriormente desarrolló otros métodos para el cálculo de las tangentes, a saber: En un segundo método utiliza una secante en torno a un punto de tangencia, que substituye la curva auxiliar del método enunciado anteriormente. La posición de la tangente se obtiene cuando los dos puntos de intersección de la secante con la curva son obligados a coincidir. Dicho de otra manera, el objetivo en este caso es encontrar un punto T (pie de la tangente) en el eje x, tal que TM sea la tangente a la curva dada en el punto M. Esta tangente es vista por Descartes como la línea "límite" de la secante TNN_1 cuando los puntos N y N_1 de la curva, coinciden con M. (Lopes, 2004)



En un tercer método, sigue un proceso similar al anterior, basado en una explicación teórica más simple pero manteniendo la idea de puntos de aproximación. En este caso, es dada la abscisa del punto de contacto N y la tangente será la posición de la secante TNN_1 cuando N_1, desplazándose sobre la curva, coincide con N. (Lopes, 2004)



Gilles Personne de Roberval (1602 – 1675)

Evangelista Torricelli (1608 – 1647)

Descubrieron de forma independiente un método para calcular tangentes, haciendo uso de consideraciones cinemáticas, en el año 1630. Dicho método se basa esencialmente en la consideración de una curva como "la trayectoria de un punto móvil que obedece a dos movimientos simultáneamente", y en la concepción dinámica de la tangente a una curva en un punto dado, al considerarla como "la dirección del movimiento en ese mismo punto". (Peréz, p.26)

De manera que trazar la tangente a una curva que es descrita por el movimiento de un punto que resulta de la composición de dos movimientos consiste en "determinar la resultante de las velocidades de los dos movimientos que, a su vez, reposa sobre la tangente de la curva en este punto móvil." (Collete, 2005)

Dicho de otra manera

> […] Consideraron una curva como el lugar geométrico o la trayectoria, que traza un punto en movimiento; y la recta tangente a la curva, como la velocidad instantánea del punto en movimiento. […] Si el movimiento de un punto se asume compuesto de dos movimientos simples, entonces el vector velocidad del movimiento será la resultante de las dos componentes sumadas según la regla del paralelogramo[6]. (*Newton y el Cálculo Infinitesimal, s.f, p.3*)

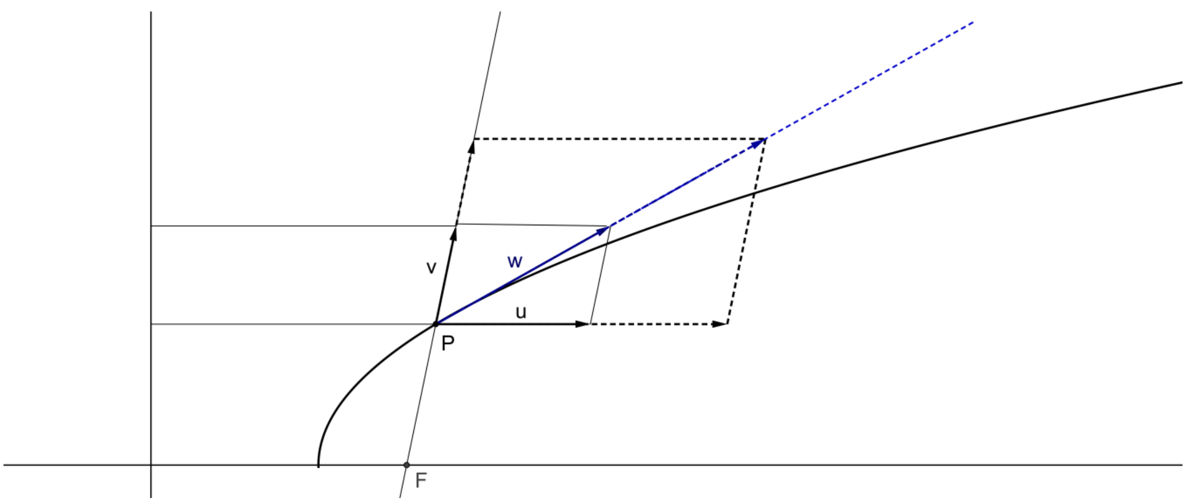


Figura 5.- Tangente a la parábola en *P*, representada como velocidad *w*, según la ley del paralelogramo.

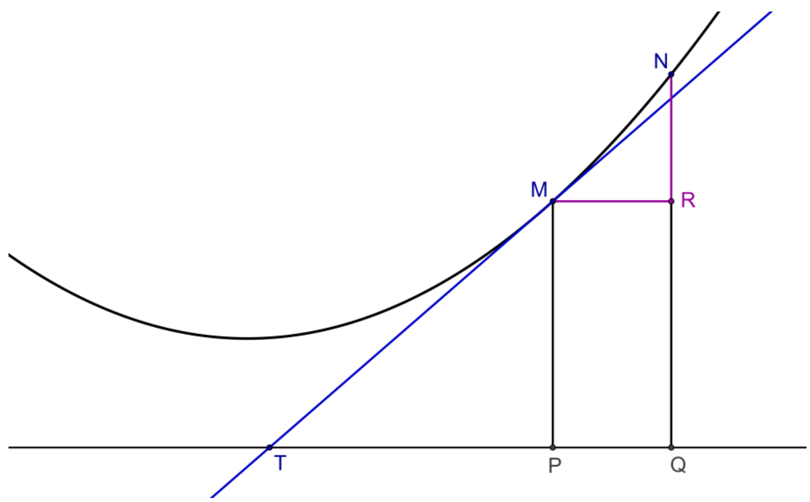
[6] Cabe resaltar que la ley del paralelogramo para vectores, ya era conocida en este tiempo sin embargo fueron ellos quienes la aplicaron a la tangente como vector velocidad instantánea. (*Newton y el Cálculo Infinitesimal, s.f, p.3*)

Isaac Barrow
(1630 – 1677)

"De todos los matemáticos que se aproximaron a los distintos aspectos del cálculo diferencial e integral, Barrow es el que estuvo más cerca"
(Collette, 2000, p.96)

Publica en 1670 sus "*Lectiones Geométriae"*, donde incluye, entre otras cosas, procedimientos infinitesimales para resolver problemas de tangentes. La herramienta principal y sobre la que versa este trabajo es el denominado triángulo característico o triángulo diferencial[7], en el que "implícitamente se toma a la recta tangente como la posición límite de la secante". (Villalba, p.8)

Si $F(x, y) = 0$ es una curva dada y M un punto sobre esta, cuya tangente TM que interseca al eje x en T, lo que Barrow hace es considerar "un arco infinitamente pequeño, MN, de la curva" para luego trazar las ordenadas de los puntos M y N y por éste último punto, trazar una línea MR paralela a la abscisa.



Ahora, denota $TP = t,\ MP = y,\ MR = e,\ NR = a.$

---

[7] Cabe resaltar que fue Pascal el que introdujo en su *Tratado de los senos del cuadrante de circunferencia* la noción de triángulo característico, aunque no se ocupó nunca del problema de tangentes.

En este momento, Barrow identifica el segmento MN como arco de la curva y, al mismo tiempo, como lado del ΔMRN y como parte de la tangente, dada su pequeña diferencia. A dicho triángulo se le conoce con el nombre de triángulo característico.

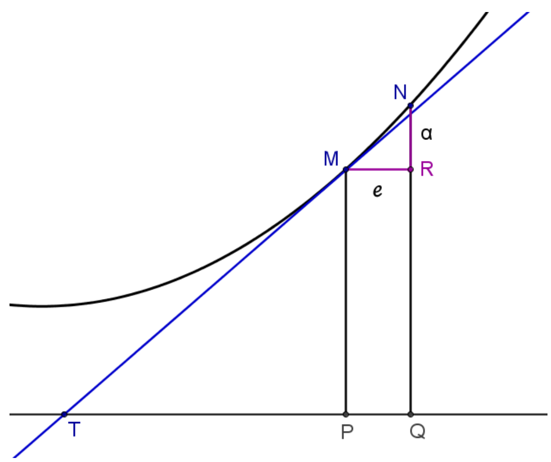
Dado que ΔTPM es casi semejante al ΔMRN se tiene la siguiente proporción:

$$\frac{MP}{TP} \approx \frac{NR}{MR}$$

O lo que es lo mismo

$$\frac{y}{t} \approx \frac{a}{e}$$

Siendo ${}^{y}/_{t}$ la pendiente de la recta TM.



Se tiene que:

> Cuando $e \to 0$ automáticamente $a \to 0$ y el cociente ${}^{a}/_{e}$ tiende al valor de la pendiente de la recta tangente que pasa por M. (Lázaro & Maldonado, 2010)

Para hallar dicha expresión, Barrow sustituye en la ecuación $F(x, y) = 0$ a x e y por las cantidades $x + e$ e $y + a$, respectivamente. De la expresión resultante suprime todos aquellos términos que no contengan ni a ni e, así como todos los de grado mayor que uno tanto en a como en e.

Ejemplo: Considere la curva $y = x^3 - 2x$. Siguiendo el método descrito, se calculará la pendiente en el punto $P(x, y)$.

La ecuación de la curva en forma implícita es:

$$y - x^3 + 2x = 0$$

Sustituyendo,

$$(y + a) - (x + e)^3 + 2(x + e) = 0$$

$$y + a - x^3 - 3x^2e - 3xe^2 - e^3 + 2x + 2e = 0$$

Eliminando los términos que no contienen ni a ni e o lo que es lo mismo simplificamos dado que $y = x^3 - 2x$

$$a - 3x^2e - 3xe^2 - e^3 + 2e = 0$$

Eliminando los términos de grado mayor que uno en a y en e

$$a - 3x^2e + 2e = 0$$

Despejando, se tiene la expresión buscada:

$$\frac{a}{e} = 3x^2 - 2$$

Resultado que coincide al emplear los métodos que se conocen en la actualidad para calcular derivadas.

$$y = x^3 - 2x$$

$$y' = 3x^2 - 2$$

Johann Hudde

(1629 – 1704)

Descubrió en 1657 dos reglas aplicables a funciones polinómicas y que apuntaban de alguna manera a los algoritmos de cálculo que se utilizan en la actualidad. Según, Boyer (1987), estas reglas son:

1. Si *r* es una raíz doble de la ecuación algebraica

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

   y si b_0, b_1, b_2, …, b_{n-1}, b_n, son números que están en progresión aritmética entonces *r* también es raíz de la ecuación

$$a_0b_0x^n + a_1b_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}b_{n-1}x + a_n\, b_n = 0$$

2. Si para $x = a$ el polinomio

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

   toma un valor máximo o mínimo relativo, entonces *a* es una raíz de la ecuación

$$na_0x^n + (n-1)a_1x^{n-1} + \cdots + 2a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x = 0$$

Que en lenguaje actual y en palabras de Collete (2000) dicen que:

1. Si r es una raíz doble de la ecuación algebraica $f(x) = 0$, entonces r también es raíz de la ecuación $f´(x) = 0$.

2. Si $f(a)$ es un valor máximo o mínimo relativo de un polinomio $f(x)$, entonces $f´(a) = 0$

René François de Sluse

(1622 – 1685)

Obtuvo en 1652 una regla para hallar la tangente a una curva dada determinada por una ecuación de la forma $F(x, y) = 0$, siendo F un polinomio. Dicha regla se puede expresar de la siguiente manera:

1. Eliminar los términos constantes.
2. Construir una nueva igualdad agrupando los términos que tienen x de un lado del igual y los que tienen y del otro lado. Si hay términos que contiene tanto x como y, se ubicaran a ambos lados del igual con el signo respectivo, es decir, si cambia de "lado" también cambiará de signo.
3. Multiplicar cada término por el exponente de la incógnita escogida para cada lado.
4. Sustituir en cada término un valor de x por t.
5. Despejar t.

El valor de la subtangente es t y la pendiente de la recta tangente se obtiene calculando la expresión $^{y}/_{t}$. (Lopes, 2004)

Ejemplo: Considérese la curva

$$x^4 - bx^3 + qy^2 - x^3y - b^2 = 0$$

1. Eliminando términos constantes

$$x^4 - bx^3 + qy^2 - \boldsymbol{x^3y} = 0$$

2. Agrupando términos a cada lado del igual

$$x^4 - bx^3 - \boldsymbol{x^3y} = \boldsymbol{x^3y} - qy^2$$

3. Multiplicando términos

$$4x^4 - 3bx^3 - 3\boldsymbol{x^3 y} = \boldsymbol{x^3 y} - 2qy^2$$

4. Sustituyendo

$$4tx^3 - 3btx^2 - 3tx^2 y = x^3 y - 2qy^2$$

5. Despejando *t*

$$t = \frac{x^3 y - 2qy^2}{4x^3 - 3bx^2 - 3x^2 y}$$

$$t = \frac{(x^3 - 2qy)y}{4x^3 - 3bx^2 - 3x^2 y}$$

Calculando la expresión ${}^{y}/_{t}$, tenemos:

$$\frac{t}{y} = \frac{x^3 - 2qy}{4x^3 - 3bx^2 - 3x^2 y}$$

$$\frac{y}{t} = \frac{4x^3 - 3bx^2 - 3x^2 y}{x^3 - 2qy}$$

Cabe resaltar, que esta última igualdad es equivalente a calcular la expresión que conocemos hoy en día como:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}$$

Verificando para el ejemplo anterior, se tiene la expresión encontrada siguiendo el algoritmo de Sluse.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4x^3 - 3bx^2 - 3x^2 y}{2qy - x^3}$$

$$= \frac{4x^3 - 3bx^2 - 3x^2y}{x^3 - 2qy}$$

Con René François de Sluse se cierra la lista de los precursores del Cálculo Diferencial. Ahora se prestará atención al trabajo desarrollado por los que son considerados inventores de esta importante rama de las matemáticas.

LOS FUNDADORES

Isaac Newton y Gottfried Leibniz son considerados los padres del Cálculo Diferencial, pues de manera independiente y con características propias, desarrollaron unas reglas para derivar, conocidas como reglas de derivación. A continuación se presenta, a groso modo, la obra de Isaac Newton para finalmente centrar la atención en Gottfried Leibniz.

Isaac Newton

(1642 – 1727)

"Si pude ver más allá que otros hombres, es porque me subí a hombros de gigantes"

Isaac Newton

(Ruiz & Martínez, 2005)

Estudió, influenciado por su maestro Isaac Barrow, las obras de Descartes, Viète y Wallis, y en 1665, descubrió el teorema del binomio, el cálculo con las series infinitas, y el cálculo fluxional o el cálculo de derivadas, en el que el concepto fundamental es la *fluxión*[8].

[8] Concepto que se corresponde con el de derivada en la actualidad.

Una de las versiones iniciales de su cálculo, publicada en 1667 bajo el nombre de *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas,* contenía además del teorema del binomio[9], sus descubrimientos en torno a las series infinitas. En esta obra se observaba que el uso dado a los conceptos infinitesimales no difiere mucho del de su maestro y según el propio Newton, era una introducción a un potente método general que desarrollaría tiempo después: su cálculo diferencial. (Ruíz & Martínez, 2005)

En general, las notaciones más usadas por Newton en sus trabajos fueron:

Símbolo	***Significado***
$a, b, c, \ldots$	Constantes
$x, y, z, \ldots$	Variables o fluentes
$\dot{x},\ \ \dot{y}$	Velocidad asociada a x y a y, respectivamente (Fluxión)
o	Cantidad muy pequeña, generalmente asociada al tiempo, que se comporta como cero para ciertas cosas y para otras no. Se entiende como un crecimiento infinitesimal del tiempo.
$\dot{x}o,\ \ \dot{y}o$	Momento de fluxión, es decir crecimiento o aumento de las variables x e y, respectivamente.

Tabla 3.- Notaciones usadas por Newton

[9] Con este teorema, Newton logró además de calcular binomios con exponentes fraccionarios (series) legitimar el sentido útil del infinito, al abrir la puerta para el desarrollo del cálculo infinitesimal. (Ruíz y Martínez, 2005)

Es de anotar que en esta época el concepto de función, tal como se conoce hoy en día, aún no había sido descubierto, pues esta noción se desarrolló con los trabajos de Euler, Fourier, Cauchy y Bolzano entre los siglos XVIII y XIX. Por tal razón, Newton no piensa en funciones como tal, sino en el comportamiento de una curva descrita por variables.

Newton asoció la velocidad de un móvil con la existencia de dos fuerzas independientes que, actuando en conjunto, determinan una velocidad tangencial en dirección a la trayectoria del móvil. Es en ese momento en el que Newton habla de fluxiones, fluxiones que se originan por dichas fuerzas, en cuyo tratamiento se encuentra el origen de su cálculo diferencial. (Lópes, 2004, p.49)

Dicho de otra manera, Newton logró representar la idea cinemática de la curva a través de relaciones matemáticas entre variables (las fluentes) que podían sufrir pequeñas variaciones de velocidades (las fluxiones). Definiendo fluxión de la siguiente forma:

> Las fluxiones son, con toda la aproximación que se desee, como los incrementos de los fluentes [las variables] generados en tiempo iguales y tan pequeños como sea posible. (Ruíz et al, 2005)

En general, los problemas que Newton abordó se pueden clasificar en dos tipos, a saber

- Dada una relación entre fluentes hallar la relación entre sus fluxiones, y
- Dada una relación entre fluxiones hallar la relación entre sus fluentes.

Mientras que el primer tipo de problema lo llevó a configurar su *Cálculo diferencial*, el segundo conformaría su *Cálculo integral,* sin embargo, dado el interés del presente estudio, sólo se hará mención en lo que continúa, al método que Newton desarrolló para dar solución a los problemas del primer tipo.

Cabe resaltar que el método de Newton para calcular la fluxión fue en esencia, el de Fermat, con quien comparte la poca preocupación por la justificación lógica de este concepto. (Ruíz et al, 2005)

Para ejemplificar el primer problema, considérense dos cantidades *x* e *y*, relacionadas por la ecuación

$$y + xy - x^3 = 0$$

Cuando *x* cambia a $x + \dot{x}o$, *y* cambia a $y + \dot{y}o$, se obtiene:

$$0 = y + \dot{y}o + (x + \dot{x}o)(y + \dot{y}o) - (x + \dot{x}o)^3$$

$$0 = y + \dot{y}o + xy + x\dot{y}o + y\dot{x}o + \dot{x}o\dot{y}o - x^3 - 3x^2\dot{x}o - 3x(\dot{x}o)^2 - (\dot{x}o)^3$$

$$0 = y + \dot{y}o + xy + x\dot{y}o + y\dot{x}o + \dot{x}o\dot{y}o - x^3 - 3x^2\dot{x}o - 3x\dot{x}^2o^2 - \dot{x}^3o^3$$

Teniendo en cuenta que $y + xy - x^3 = 0$, deducimos:

$$0 = \dot{y}o + x\dot{y}o + y\dot{x}o + \dot{x}o\dot{y}o - 3x^2\dot{x}o - 3x\dot{x}^2o^2 - \dot{x}^3o^3$$

Dividiendo por *o* y despreciando todas las cantidades que aún contengan *o*, la igualdad obtenida resulta:

$$0 = \dot{y} + x\dot{y} + y\dot{x} + \dot{x}\dot{y}o - 3x^2\dot{x} - 3x\dot{x}^2o - \dot{x}^3o^2$$

$$0 = \dot{y} + x\dot{y} + y\dot{x} - 3x^2\dot{x}$$

Lo que representa la relación que satisfacen las fluxiones. Si se despeja se obtiene que

$$0 = \dot{y}(1 + x) + \dot{x}(y - 3x^2)$$

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{3x^2 - y}{1 + x}$$

Expresión que permite obtener la tangente a la curva $y + xy - x^3 = 0$ en cualquiera de sus puntos.

Este método aunque eficaz resulta poco riguroso y no tardó en generar críticas. Fue precisamente en 1734, cuando George Berkeley, obispo anglicano de la diócesis de Cloyne

(Irlanda) expuso de manera vigorosa y malintencionada, las inconsistencias del nuevo Cálculo en un ensayo titulado The Analyst, or A Discourse Addressed to an Infidel Mathematician. El siguiente párrafo es uno de los argumentos de Berkeley:

> Y ¿Qué son las fluxiones? Las velocidades de incrementos evanescentes. Y ¿Qué son estos mismos incrementos evanescentes? Ellos no son ni cantidades finitas, ni cantidades infinitamente pequeñas, ni nada. ¿No las podríamos llamar fantasmas de cantidades que han desaparecido? (Ruíz et al, 2005)

El origen de dichas críticas radicaba en la poca claridad que se tenía respecto a la manera en que se manejaban los cálculos pues Newton recurre a hacer $o = 0$ a pesar de que anteriormente debía dividir por o, lo que resultaba algo contradictorio. Es decir, que con aquellas cantidades se podía operar como con cantidades finitas no nulas, en particular podía dividirse por ellas y a la vez podían ser tratados como cantidades nulas.

No es sino hasta la publicación de su *Philsophiae naturalis principia mathematica* (1686), más exactamente en el segundo libro, donde se nota claramente el concepto de derivada y el algoritmo que emplea para calcular derivadas de productos y cocientes.

> [...] el momento del rectángulo generado AB sería $aB + bA$, [...] y los de las potencias generadas A^2, A^3, A^4, $A^{1/2}$, $A^{3/2}$, $A^{1/3}$, $A^{2/3}$, A^{-1}, A^{-2} y $A^{-1/2}$ serán respectivamente: $2aA$, $3aA^2$, $4aA^3$, $(1/2)aA^{-1/2}$, $(3/2)aA^{1/2}$, $(1/3)aA^{-2/3}$, $(2/3)aA^{-1/3}$, $-aA^{-2}$, $-2aA^{-3}$, y $(-1/2)aA^{-3/2}$; y, en general, el momento de una potencia cualquiera $A^{n/m}$ sería $(n/m)aA^{(n-m)/m}$. El momento de la cantidad generada A^2B será $2aAB + bA^2$, el momento de la generada $A^3B^4C^2$ será $3aA^2B^4C^2 + 4bA^3B^3C^2 + 2cA^3B^4C$, y de la generada A^3/B^2 o de A^3B^{-2} será $3aA^2B^{-2} - 2bA^3B^{-3}$, etc. (Marquina, J., Ridaura, R., Álvarez, J., Marquina, V. & Gómez, R., 1996)

En esta obra, Newton también habla de cantidades divisibles evanescentes, es decir, cantidades que podían disminuir sin parar. Más exactamente, decía:

> Las razones últimas, en las cuales las cantidades desaparecen, no son, estrictamente hablando, razones de cantidades últimas, sino límites a los que las razones de estas cantidades, decrecientes sin límite, se aproximan, y que, aunque puedan estar más cerca que cualquier

> diferencia dada, no pueden ser sobrepasados ni alcanzados antes de que las cantidades hayan disminuido indefinidamente. (Ruíz et al, 2005)

Dado que esta explicación era poco clara, decidió recurrir al significado físico y con la obtención de resultados físicamente correctos se olvidó de la fundamentación lógica de su trabajo matemático, de su cálculo. No obstante, las primeras y últimas razones a las que Newton hace alusión para explicar su método parece no ser más que la aplicación de la noción de límite antes de que este concepto hiciera su aparición de manera formal. (Lópes, 2004)

CAPÍTULO 3:
LEIBNIZ Y LA INVENCIÓN DEL CÁLCULO DIFERENCIAL

"Mis meditaciones fundamentales se mueven en torno a dos cosas,
saber sobre la unidad y sobre el infinito"
Gottfried Leibniz
(Ruiz & Martínez, 2005)

Gottfried Wilhelm Von Leibniz nace en Leipzig, en la parte oriental de la Alemania actual, en el año de 1646[10], cuando estaba concluyendo la guerra de los treinta años[11]. Hijo de Catalina Schmunk y Friedrich Leibniz, aprendió por sí solo latín y un poco de griego siendo aún muy pequeño, motivado por el interés de leer los libros de la biblioteca de su padre, jurista y profesor de filosofía moral, quien le inculco el interés por la historia y el derecho y que murió cuando Gottfried apenas tenía seis años de edad.

Ahora, un breve recorrido por la vida de Leibniz destacando sus sucesos más importantes.

Año		**Acontecimiento**
Educación Básica	1653	Ingresa a la Escuela Nicolai, Leipzing, Alemania

[10] No se sabe con exactitud la fecha de su nacimiento. Hay historiadores que ubican su nacimiento el 21 de junio y otros que lo hacen el 1 de julio.

[11] *"La Guerra de los Treinta Años, es el nombre que recibe el conjunto de los conflictos bélicos europeos que tuvieron lugar desde 1618 hasta 1648, en los cuales participaron la mayoría de los países de Europa occidental, y que en su mayoría se libraron en el centro de Europa."* (Guerra de los Treinta años, s.f)

<table>
<tr><th colspan="2">Año</th><th>Acontecimiento</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Educación superior</td><td>1661</td><td>Ingresa a la Universidad de Leipzig para estudiar leyes</td></tr>
<tr><td>1664</td><td>Se gradúa en Lic. en Filosofía y Jurisprudencia de la Universidad de Leipzig con la tesis De Principio Individui (Sobre el principio de lo individual)</td></tr>
<tr><td>1666</td><td>Obtiene su Doctorado en filosofía de la Universidad de Altdorf, Alemania, por su trabajo Dissertatio de Arte Combinatoria (Disertación sobre el arte de la combinación)</td></tr>
<tr><td colspan="2">1667 a 1670</td><td>Se desempeñó como Asesor de la Corte de Apelaciones en el Tribunal de Mainz, Alemania, además fue miembro vitalicio de la Real Sociedad y Academia de Ciencias de Berlín.</td></tr>
<tr><td colspan="2">1671</td><td>Desarrolla una máquina de calcular, ideada a partir de un principio nuevo y distinto de la de Pascal.</td></tr>
<tr><td colspan="2">1672</td><td>Leibniz emprende el estudio a profundidad de la Matemáticas y la Física, bajo la tutela de Christian Huygens, con el trabajo de Saint Vicent sobre suma de series, realizando algunos descubrimientos sobre este tema, y leyendo posteriormente los trabajos de Pascal y Descartes, entre otros.</td></tr>
</table>

Año	Acontecimiento
1673	Es elegido miembro de la Royal Society de Londres
1676	Se desempeña como bibliotecario y Canciller del Tribunal de Hannover. Utiliza por primera vez las reglas de diferenciación y recibe de Newton dos cartas que contenían sus resultados en torno al cálculo diferencial.
1682	Funda, junto con Otto Mencke, la revista científica *Acta Eruditorum,* donde publica gran parte de sus trabajos matemáticos en el periodo de 1684 a 1693.
1684	Publica en la Acta Eruditorum su trabajo: *Nuevo método para los máximos y mínimos, así como para las tangentes, el cual puede también aplicarse a las cantidades fraccionarias e irracionales.*
1700	Funda la Academia de Ciencias de Berlín.
1711	Es acusado de haber plagiado el método de Newton.
1714	Publica su *Monadología* o teoría de las mónadas, donde esboza su sistema metafísico y que se encuentra fuertemente relacionado con las consideraciones infinitesimales de su cálculo.

Tabla 4.- Cronología de la vida de Gottfried

Leibniz fue hombre de leyes, matemático, alquimista, historiador y filósofo, quien incursionó en varios campos del conocimiento científico. Fue una figura importante en su época, uno de sus primeros proyectos fue lograr un lenguaje preciso y universal.

A continuación se profundizará en el trabajo que desarrolló en matemáticas y que lo llevó a ser considerado como el padre del Cálculo Diferencial.

SUS INICIOS

Para intentar comprender el pensamiento matemático de Leibniz es indispensable remitirse a su ensayo "*De arte combinatoria"*, que redactó siendo aún un joven estudiante, donde además de abordar algunas cuestiones relacionadas con la teoría de números se perciben dos de sus ideas primordiales. Ideas que guiaron siempre sus investigaciones.

La primera de ellas es una idea filosófica y tiene que ver con la construcción de una *"Characteristica Generalis",* que Leibniz concibe como un lenguaje simbólico de carácter universal a través del cual se pudiese escribir, con símbolos y fórmulas, razonamientos y procesos de argumentación, mediante ciertas reglas que fueran garante de la validez de los argumentos formulados en este lenguaje. De ahí, su marcado interés por la notación y el simbolismo en matemáticas. (Peña & Colmenares, 2001)

La segunda idea está relacionada con "*Diferencias de Sucesiones",* según Collete (2000):

> Leibniz […] realiza combinaciones de elementos dados con el fin de obtener formulas diferentes. En particular, a partir de sucesiones de números naturales, combina los términos efectuando las diferencias de dos en dos.

Por ejemplo, si se tiene la siguiente sucesión de números naturales

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

Se observa que las primeras diferencias son todas unos, y las segundas diferencias son todas nulas.

Las diferencias se calculan entre un término y el anterior, es decir que para las primeras diferencias se tiene

$$\underbrace{9-8}_{1}\ \underbrace{8-7}_{1}\ \underbrace{7-6}_{1}\ \underbrace{6-5}_{1}\ \underbrace{5-4}_{1}\ \underbrace{4-3}_{1}\ \underbrace{3-2}_{1}\ \underbrace{2-1}_{1}$$

Y para las segundas diferencias

$$\underbrace{1-1}_{0}\ \underbrace{1-1}_{0}\ \underbrace{1-1}_{0}\ \underbrace{1-1}_{0}\ \underbrace{1-1}_{0}\ \underbrace{1-1}_{0}\ \underbrace{1-1}_{0}$$

Si se realiza el mismo procedimiento para la siguiente sucesión

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81$$

Se obtiene que las terceras diferencias sean todas nulas.

Leibniz, observa hasta aquí que las primeras diferencias de una sucesión natural de los números son constantes y que las segundas diferencias de una sucesión de los cuadrados perfectos, también son constantes y así sucesivamente. (Jimenez, p.2)

Posteriormente “desarrolla algunas propiedades de las sucesiones de los números, en particular que la suma de las diferencias es igual a la diferencia entre los términos último y primero”. (Collete, 2000, pág. 122)

Por ejemplo, si se tiene la siguiente sucesión de números naturales

$$4, 7, 10, 15, 21, 29$$

Las primeras diferencias son

$$3, 3, 5, 6, 8$$

La suma de dichas diferencias es

$$3 + 3 + 5 + 6 + 8 = \mathbf{25}$$

Resultado que se obtiene al efectuar la diferencia entre el último y el primer término de la sucesión

$$29 - 4 = \mathbf{25}$$

Leibniz afirma que esta propiedad puede aplicarse para calcular la suma de series[12] infinitas siempre y cuando los términos de la sucesión disminuyan progresivamente hasta cero.

Se observa que:

A partir de las identidades

$$a_0 - a_0 = 0,\ a_1 - a_1 = 0,\ a_2 - a_2 = 0,\ a_3 - a_3 = 0, \dots, a_n - a_n = 0$$

Se obtiene

$$a_0 - a_0 + a_1 - a_1 + a_2 - a_2 + a_3 - a_3 + \dots + a_n - a_n = 0$$

Se agrupan términos consecutivos

$$a_0 - (a_0 - a_1) - (a_1 - a_2) - (a_2 - a_3) - \dots - (a_{n-1} - a_n) - a_n = 0$$

Se reescribe la expresión anterior

$$a_0 + (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (a_n - a_{n-1}) - a_n = 0$$

Si d es la diferencia entre dos términos sucesivos, es decir

$$d_1 = a_1 - a_0,\ d_2 = a_2 - a_1,\ d_3 = a_3 - a_2, \dots,\ d_n = a_n - a_{n-1}$$

Entonces se tiene

$$a_0 + d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_n - a_n = 0$$

---

[12] Fue John Wallis quien introdujo el concepto de serie.

$$\boldsymbol{a_n - a_0 = d_1 + d_2 + d_3 + \ldots + d_n}$$

Se concluye que si

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots , a_n$$

Representa una sucesión de términos que disminuyen progresivamente hasta cero, la suma de las primeras diferencias está dada por la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{\sum_{i=1}^{n} d_i = a_n - a_0}$$

Serie, que hoy en día se conoce con el nombre de serie telescópica.

Una vez obtenido este resultado, Leibniz, lo usa para calcular sumas infinitas, al encontrar que:

$$\boldsymbol{\sum_{i=1}^{\infty} b_i = a_1}$$

Donde la sucesión b_i es decreciente y está definida por $b_i = (a_i - a_{i+1}),\ \ i = 1, 2, 3, \ldots$ (*La contribución de Leibniz al Cálculo Infinitesimal,* p.2).

Se dice que Leibniz expuso este método general de suma de series mediante diferencias, en una de sus primeras reuniones de la Royal Society, donde Pell le hizo saber que muchos de sus resultados ya eran conocidos y se encontraban en la literatura matemática de la época.

> Esto le volverá a ocurrir a Leibniz en repetidas ocasiones a lo largo de su vida, ya que varias veces obtendrá resultados ya conocidos, aunque claro está, desconocidos para él. (Jimenez, p.2)

En el año 1672, Huygens le propone a Leibniz encontrar la suma de siguiente serie infinita

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{28} + \cdots$$

Donde los términos de dicha serie son los inversos de los números triangulares.

Para calcular la suma, lo primero que Leibniz hace es rescribir la serie, así

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{28}+\cdots$$

$$=2\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\cdots\right]$$

$$=2\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\right]$$

Dado que la sucesión va disminuyendo progresivamente, utiliza la expresión para calcular las diferencias, descrita anteriormente, y de esta manera obtiene que la suma de la serie infinita es 2

$$=2\left[\frac{1}{1}-0\right]$$

$$=2[\ 1]$$

$$=\mathbf{2}$$

Alentado por el descubrimiento anterior, Leibniz no solo concluye que de esta manera puede sumar prácticamente cualquier serie infinita sino que logra elaborar el triángulo armónico cuyas similitudes con el triángulo aritmético de Pascal se tratan a continuación.

1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	…
1	3	6	10	15	…	…
1	4	10	20	…	…	…
1	5	15	…	…	…	…
1	6	…	…	…	…	…
1	…	…	…	…	…	…

Triángulo Aritmético

$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	…
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{105}$	…	…
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{140}$	…	…	…
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{105}$	…	…	…	…
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{42}$	…	…	…	…	…
$\frac{1}{7}$	…	…	…	…	…	…

Triángulo Armónico

Triángulo Aritmético	Triángulo Armónico
Números Naturales	Inversos de los números naturales
Números Triangulares	Mitad de los inversos de los números triangulares
Números Piramidales	Tercio de los inversos de los números piramidales

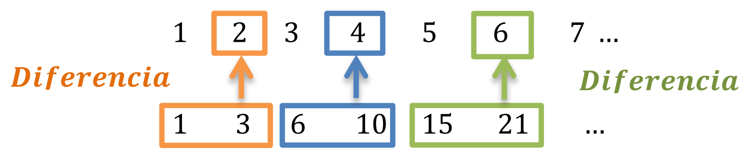
Tabla 5.- Comparación Triángulo Aritmético y Triángulo Armónico

Donde también se observa que en el triángulo armónico:

> "Los números que forman la *n*-ésima fila diagonal [...] son los inversos de los números que forman la correspondiente diagonal *n*-ésima del triángulo aritmético, divididos por *n*" (Boyer, 1986, p.504).

Triángulo Aritmético

Observemos la segunda y tercera fila

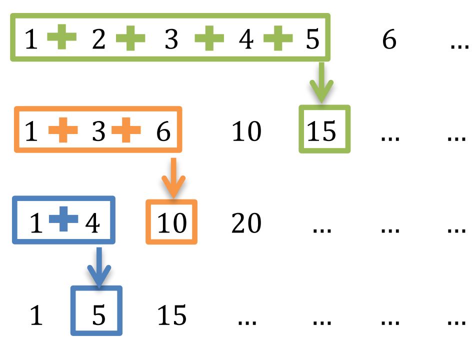


Notamos que:

$$\mathbf{2 = 3 - 1} \qquad \mathbf{4 = 10 - 6} \qquad \mathbf{6 = 21 - 15}$$

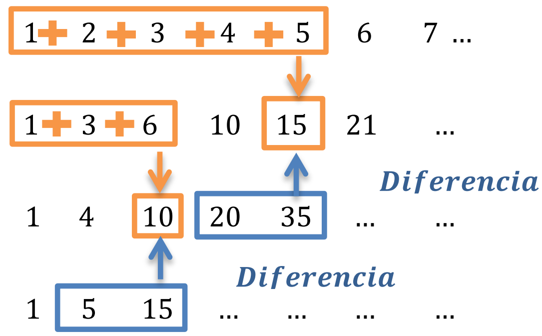
Lo mismo ocurre con todos los elementos del Triángulo Aritmético, es decir, que cada elemento, exceptuando los de la primera columna, se obtiene de la diferencia del término situado debajo de él y el término situado debajo de él a su izquierda.

Además



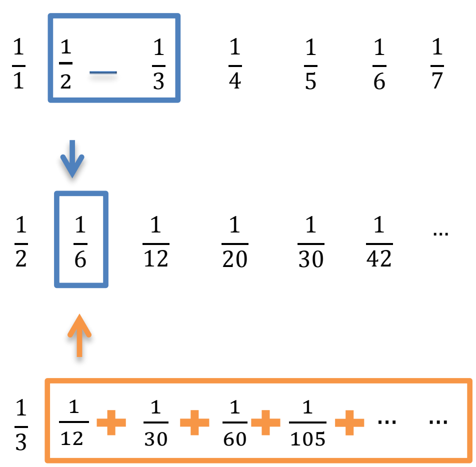
Así sucede con cada elemento, excepto los que están en la primera fila y en la primera columna, es decir, que cada elemento del triángulo es la suma de todos los términos situados encima de él y a su izquierda. (Boyer, 1986, p. 504)

Es decir que estos elementos son a la vez, resultado de una suma y de una diferencia.



Triángulo Armónico

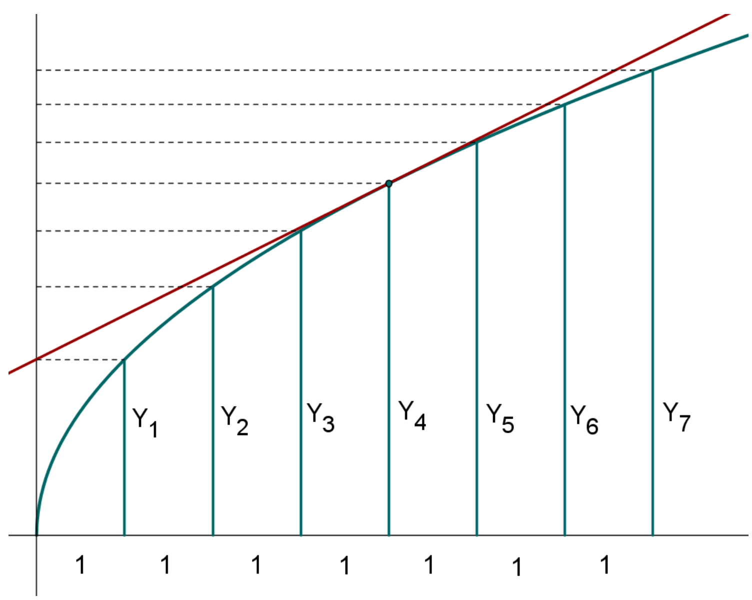
En el Triángulo Armónico cada elemento, exceptuando los de la primera fila, se obtiene de la diferencia del término situado encima de él y el término situado encima de él a su derecha. Elemento que también resulta de la suma de todos los términos en la línea inferior a él y a su derecha. (Boyer, 1986, p. 504)



Tal como lo plantea Pedro Jimenez en su documento titulado *Leibniz*, al parecer la comparación de ambos triángulos y los resultados enunciados anteriormente, le insinuaron la relación inversa que existía entre la formación de sucesiones de sumas y de diferencias.

Relación que fue más evidente cuando las llevó al campo geométrico y que se ejemplifica a continuación.

Sea $y = \sqrt{x}$ una curva donde aparece una sucesión de ordenadas $y_1,\ y_2,\ y_3, \dots ,\ y_n$ de manera que la distancia entre dos abscisas sucesivas es la unidad, se puede comprobar que la suma de las ordenadas da una aproximación de la cuadratura[13] de la curva, mientras que la diferencia entre dos ordenadas sucesivas da una aproximación de la pendiente de la recta tangente correspondiente.



Según Leibniz se puede obtener una aproximación a la cuadratura de la curva al hallar la suma de las ordenadas, es decir

$$\boldsymbol{AC} = Y_1 + Y_2 + Y_3 + \cdots + Y_n$$

[13] Los problemas de cuadraturas son problemas geométricos que consisten en construir un cuadrado con igual área al de una figura dada haciendo uso de una regla no graduada y un compás, siguiendo normas específicas. Arquímedes perfecciono un procedimiento que permitió a los matemáticos griegos obtener la cuadratura de "algunas regiones delimitadas por curvas" denominado método de exhausción, cuya invención se le atribuye a Eudoxo de Cnido (Pérez, pp.3-4) y que recibe este nombre "*porque se puede pensar en expandir sucesivamente áreas conocidas de tal manera que éstas den cuenta (dejen exhausta) del área requerida"* (Villalba, 2002)

Aproximación a la cuadratura siguiendo a Leibniz	Cálculo del área bajo la curva siguiendo métodos actuales
Una aproximación a la cuadratura de la curva $y = \sqrt{x}$ entre las rectas $x = 2$ y $x = 7$ es: $$\begin{aligned} AC &= \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7} \\ &\approx 1.41 + 1.73 + 2 + 2.24 + 2.45 + 2.65 \\ &\approx \mathbf{12.48} \end{aligned}$$	Haciendo uso de la integral, se tiene: $$\begin{aligned} \int_2^7 \left(x^{1/2}\right) dx &= \frac{2}{3} x^{3/2} \Big\vert_2^7 \\ &= \frac{2}{3}\left(\sqrt{343} - \sqrt{8}\right) \\ &\approx \mathbf{10.46} \end{aligned}$$
Aproximación a la pendiente de la recta tangente	**Cálculo de la pendiente siguiendo métodos actuales**
Se desea calcular la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto $P(4,2)$. Siguiendo a Leibniz, se toma la diferencia de las ordenadas sucesivas, es decir: $$\begin{aligned} m_{t(4)} &= Y_4 - Y_3 \\ &\approx 2 - 1.73 \\ &\approx \mathbf{0.27} \end{aligned}$$	Haciendo uso de la derivada, se tiene: $$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$ $$m_{t(5)} = f'(4) = \frac{1}{4} = \mathbf{0.25}$$

Como se observa, se tiene una buena aproximación tanto a la cuadratura como a la pendiente de la recta tangente, sin embargo, para que esta aproximación fuese exacta, se debería poder elegir la unidad *infinitamente pequeña,* siendo la cuadratura igual a la suma de las ordenadas, y la pendiente de la recta tangente igual a la diferencia de dos ordenadas sucesivas. Es de esta forma, de la reciprocidad de las operaciones al tomar sumas y diferencias de sucesiones, como Leibniz deduce que la determinación de cuadraturas y de tangentes, también son operaciones inversas. (Peña y Colmenares, 2001)

SU INVENCIÓN, EL CÁLCULO DIFERENCIAL

Para Leibniz, la curva estaba formada por segmentos de longitud infinitesimal tal que su prolongación generaba la tangente en cada punto y de cuya geometría se obtenía la relación correspondiente entre los diferenciales, asociando a la curva una sucesión de abscisas $x_1,\ x_2,\ x_3, \dots ,\ x_n$ y una sucesión de ordenadas $y_1,\ y_2,\ y_3, \dots ,\ y_n$ donde todos los puntos $(x_i,\ y_i)$ están sobre la curva y determinan, por decirlo de alguna manera, los "vértices" de la poligonal de infinitos lados que en últimas, forma la curva. (Barcelo, 2002)

Para Leibniz, el *diferencial* dy es la representación de la diferencia infinitesimal de dos ordenadas consecutivas, el *diferencial* dx, la representación de la diferencia infinitesimal de dos abscisas consecutivas y la expresión $\frac{dy}{dx}$, la derivada, donde ésta se interpreta como una razón de diferencias infinitesimales a las que él denominó *cociente diferencial*.

Cabe resaltar que Leibniz considera que los diferenciales son cantidades fijas no nulas, infinitamente pequeñas en comparación con x o y, y ds es la representación de los lados del polígono que constituye la curva. De esta manera, obtiene su *Triángulo Característico* que si bien resulta ser el que consideró Barrow, Leibniz afirma haber sido inspirado en la lectura de la obra de Descartes.

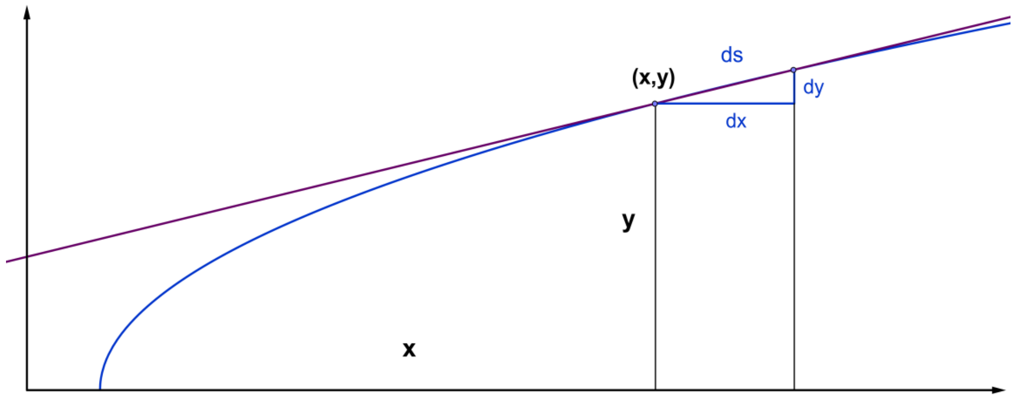


Figura 6.- Triángulo Característico

Como se observa en la figura anterior, el triángulo característico tiene lados infinitesimales dx, dy, ds, donde el lado ds sobre la curva se hace coincidir con la tangente en el punto (x, y) y se verifica la relación $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ siendo la pendiente de la recta tangente la expresión $\frac{dy}{dx}$. (Barcelo, 2002)

Por, ejemplo para calcular la derivada de la función $y = 3x^2$, Leibniz considera que una variación infinitesimal dx producía una variación infinitesimal dy, por lo que tenía que

$$y + dy = 3(x + dx)^2$$

$$y + dy = 3x^2 + 6x\,dx + dx^2$$

Es decir,

$$dy = 6x\,dx + dx^2$$

A continuación, dividía ambos miembros por dx y sólo en ese momento, despreciaba los sumando infinitesimales, de tal suerte que

$$\frac{dy}{dx} = 6x$$

Para Leibniz las cantidades infinitamente pequeñas, que constituyen la pieza fundamental en la creación de su cálculo, eran *cantidades incipientes "aún no formadas"* (Martínez, J., López, R., Gras, A. & Torregosa, G., 2002) blanco de muchas críticas al poder considerarlas como cantidades fijas no nulas que luego podían hacerse tan pequeñas como se deseara, generando, entre otras, las siguientes preguntas:

- ¿Cómo puede justificarse la supresión de algunos términos? Decir simplemente que las cantidades suprimidas eran cero sin explicar por qué, al principio no eran nulas y al final sí parecía violar el *principio de identidad* según el cual no existe estatuto intermedio entre la igualdad y la diferencia (aunque ésta sea muy pequeña) para dos entes matemáticos. (Martínez et al, 2005)

- Otras veces se decía que no eran cero, pero sí despreciables frente a cantidades incomparablemente grandes, en cuyo caso, ¿cómo puede obtenerse un resultado exacto despreciando términos que no son cero? (Martínez et al, 2005)

No obstante, Leibniz no se preocupó mucho en clarificar la naturaleza de aquello que llamaba "infinitamente pequeño" pues

> Estaba seguro de que si formulaba apropiadamente los símbolos y las reglas de operación, y si éstas eran propiamente aplicadas, algún resultado correcto y razonable se debería de lograr aun cuando fuera confusa la naturaleza de los elementos involucrados. (Villalba, 2002)

Leibniz, aunque llegó a afirmar que no creía en magnitudes verdaderamente infinitas o infinitesimales (Kline, 1972 citado por Martínez et al, 2005), las defendió por su uso meramente práctico, asegurando que "se pueden utilizar estos entes últimos – esto es, cantidades infinitas o infinitamente pequeñas – como un instrumento, en la misma forma en que los algebristas utilizaban las raíces imaginarias con gran provecho". (Kline, 1972 citado por Martínez et al.)

Después de investigar durante algún tiempo, Leibniz inventa su cálculo en 1675 y su publicación en el *Acta Eruditorum*, se dio en dos pequeños artículos, uno sobre el cálculo diferencial en 1684 y el otro, sobre cálculo integral en 1686. Su primera publicación se titula *"Noma methodus pro maximis et minimis, itenque tangentibus, quae nec fractas nec* *irrationales quantitares moratur, et singulare pro illis calculi genus"* ("*Nuevo método para los máximos y mínimos, así como para las tangentes, el cual puede también aplicarse a las cantidades fraccionarias e irracionales"*) en la que introduce su notación además de exponer, en no más de seis páginas y sin demostración alguna, las siguientes reglas de su cálculo diferencial, entre otros resultados[14].

$$d(x \pm y) = dx \pm dy$$

$$d(xy) = x\,dy + y\,dy$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$$

$$d(x^n) = nx^{n-1}\,dx$$

Además, de señalar que para valores extremos relativos, $dy = 0$ y que para los puntos de inflexión, $d^2y = 0$, introdujo el término de "cálculo diferencial" (de diferencias). Pero tal como lo aseguraban los hermanos Bernoulli, este trabajo era "un enigma más que una explicación". (Ruíz et al, 2005)

Dado que no se posee documentos que den cuenta de la forma en la que Leibniz llego a dichas expresiones, a continuación se presentan dos maneras en las pudo llegar a deducirlas. La primera, con base en el trabajo que él desarrollo haciendo uso de las series y la segunda, prescindiendo de éstas.

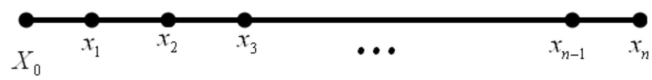
---

[14] Resultados en torno al cálculo de máximos, mínimos y puntos de inflexión además de algunas aplicaciones al cálculo de tangentes. (Jimenez, pág.. 11)

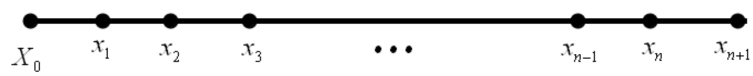
Primer Estrategia: Desarrollo con series

Considérese las siguientes series:

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$$



$$X_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} x_i$$



Al realizar la diferencia entre estas, se obtiene:

$$X_{n+1} - X_n = \sum_{i=1}^{n+1} x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i + x_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$= x_{n+1}$$

Se llamará $D(X)$ a la diferencia hallada, quedando escrito de la siguiente manera:

$$D(X) = X_{n+1} - X_n = x_{n+1}$$

$$\boldsymbol{D(X) = x_{n+1}}$$

Como se observa, el resultado de la diferencia no es más que el último término de la serie, ahora se calculará la diferencia del producto XY, para esto se trabajará con las siguientes series:

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad\qquad Y_n = \sum_{j=1}^{n} y_j$$

Al realizar el producto entre estas, se obtiene:

$$(X_n)(Y_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right)$$

Así mismo es necesario el producto de los términos siguientes de cada una de las series:

$$(X_{n+1})(Y_{n+1}) = \left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n+1} y_j\right)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i + x_{n+1}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j + y_{n+1}\right)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right) + (x_{n+1})\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right) + (y_{n+1})\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) + (x_{n+1})(y_{n+1})$$

Ahora se procede a calcular la diferencia de estos dos productos:

$$(X_{n+1})(Y_{n+1}) - (X_n)(Y_n) = \left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n+1} y_j\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right) + (x_{n+1})\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right) + (y_{n+1})\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) + (x_{n+1})(y_{n+1}) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right)$$

$$= (x_{n+1})\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right) + (y_{n+1})\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) + (x_{n+1})(y_{n+1})$$

Rescribiendo, se obtiene:

$$D(XY) = D(X)Y + D(Y)X + D(X)D(Y)$$

Nota: Leibniz desprecia el producto de las diferencias ya que su resultado es demasiado pequeño con relación a lo demás sumandos. Veamos esto en el siguiente ejemplo numérico:

$$(10 + 0.001) \times (100 + 0.01)$$

$$= (10 \times 100) + (10 \times 0.01) + (0.001 \times 100) + (0.001 \times 0.01)$$

$$= 1000 + 0.1 + 0.1 + 0.0001$$

Como se observa 0.001×0.01 es un valor pequeño en comparación con lo demás sumandos, además Leibniz, como se expuso anteriormente, trabajaba calculando diferencias pequeñas o ínfimas, es decir el producto de esas diferencia es aún más pequeño.

Se concluye que la expresión para el producto queda expresada de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{D(XY) = D(X)Y + D(Y)X}$$

Expresión conocida y usada para el cálculo de la derivada de un producto. De igual manera se obtendrá la diferencia de un cociente, para ello se hallan los cocientes de las series X_n, Y_n y de las series X_{n+1}, Y_{n+1}, obteniendo:

$$\frac{X_n}{Y_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{j=1}^{n} y_j} \qquad\qquad \frac{X_{n+1}}{Y_{n+1}} = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} x_i}{\sum_{j=1}^{n+1} y_j}$$

Ya con los dos cocientes se procede a calcular la diferencia, de la siguiente manera:

$$\frac{X_{n+1}}{Y_{n+1}} - \frac{X_n}{Y_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} x_i}{\sum_{j=1}^{n+1} y_j} - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{j=1}^{n} y_j}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i + x_{n+1}}{\sum_{j=1}^{n} y_j + y_{n+1}} - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{j=1}^{n} y_j}$$

$$= \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + x_{n+1}\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j + y_{n+1}\right)}{\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j + y_{n+1}\right)}$$

$$= \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) + \left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right)(x_{n+1}) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)(y_{n+1})}{\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right) + \left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right)(y_{n+1})}$$

$$= \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right)(x_{n+1}) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)(y_{n+1})}{\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right) + \left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right)(y_{n+1})}$$

Nuevamente es necesario analizar los productos que tenemos para ver si alguno de ellos se puede despreciar, de esta manera el producto $\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right)(y_{n+1})$ es ínfimo con relación al cuadrado de $\sum_{j=1}^{n} y_j$ entonces la expresión queda de la siguiente manera:

$$\frac{X_{n+1}}{Y_{n+1}} - \frac{X_n}{Y_n} = \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right)(x_{n+1}) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)(y_{n+1})}{\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right)}$$

$$= \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right)(x_{n+1}) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)(y_{n+1})}{\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right)^2}$$

$$\boldsymbol{D}\left(\frac{\boldsymbol{X}}{\boldsymbol{Y}}\right) = \frac{\boldsymbol{YD}(\boldsymbol{X}) - \boldsymbol{XD}(\boldsymbol{Y})}{\boldsymbol{Y}^{\mathbf{2}}}$$

Nuevamente se llega a la expresión usada normalmente para el cálculo de la derivara de un cociente.

Para el cálculo de la diferencia de una potencia se usan las series

$$(x_m)^n = \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^n$$

y

$$(x_{m+1})^n = \left(\sum_{i=1}^{m+1} x_i\right)^n$$

Nuevamente se procede a calcular la diferencia de esta forma:

$$(x_{m+1})^n - (x_m)^n = \left(\sum_{i=1}^{m+1} x_i\right)^n - \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^n$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{m} x_i + x_{m+1}\right)^n - \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^n$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^n + n\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^{n-1} (x_{m+1}) + \cdots + (x_{m+1})^n - \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^n$$

$$= n\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^{n-1} (x_{m+1}) + \cdots + (x_{m+1})^n$$

Como los productos obtenidos son ínfimos con relación al producto $n(\sum_{i=1}^{m} x_i)^{n-1}(x_{m+1})$ entonces son despreciables, de tal manera se obtiene la siguiente expresión:

$$D(x^n) = n\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^{n-1} (x_{m+1})$$

$$\boldsymbol{D(x^n) = n(x)^{n-1}D(x)}$$

Hasta aquí se han obtenido las expresiones que se conocen para el cálculo de una derivada, pero hay más caminos, quizás menos tediosos, como el que se muestra a continuación.

Segunda Estrategia: Desarrollo sin series

Para calcular la diferencia de un producto, sean,

$$a_n = xy$$

y

$$a_{n+1} = (x + D(x))(y + D(y))$$

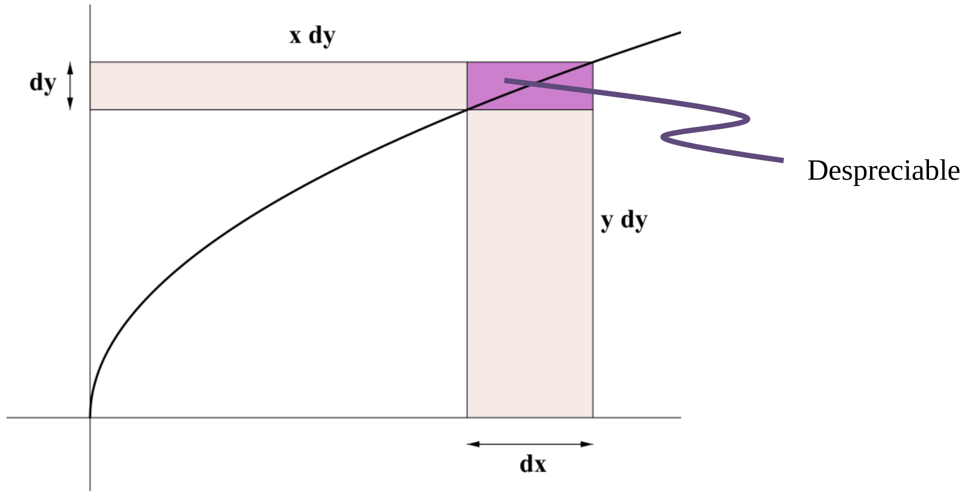
Calculando la diferencia:

$$a_{n+1} - a_n = \big(x + D(x)\big)\big(y + D(y)\big) - xy$$

$$D(xy) = xy + xD(y) + yD(x) + D(x)D(y) - xy$$

$$D(xy) = xD(y) + yD(x) + D(x)D(y)$$

Considerando $D(x)D(y)$ despreciable por ser el área de un rectángulo de lados infinitesimales,



o lo que es lo mismo: dado que el producto $D(x)D(y)$ es <u>ínfimo</u> con relación a los otros dos términos entonces se obtiene la conocida regla para calcular la derivada de un producto:

$$\boldsymbol{D(xy) = xD(y) + yD(x)}$$

Para el cociente se procede de la siguiente manera, sea,

$$z = \frac{x}{y}$$

Entonces, dicha expresión se reescribe como un producto, $x = zy$

Aplicando la expresión para derivar un producto se obtiene:

$$D(x) = zD(y) + yD(z)$$

$$D(z) = \frac{D(x) - zD(y)}{y}$$

Remplazando a z en la expresión anterior se obtiene

$$D(z) = \frac{D(x) - \frac{x}{y}D(y)}{y}$$

$$= \frac{\frac{yD(x) - xD(y)}{y}}{y}$$

$$= \boldsymbol{\frac{yD(x) - xD(y)}{y^2}}$$

Para la diferencia de la potencia, sean,

$$a_n = x^n$$

y

$$a_{n+1} = (x + D(x))^n$$

Calculando la diferencia

$$a_{n+1} - a_n = \left(x + D(x)\right)^n - x^n$$

$$D(x^n) = x^n + nx^{n-1}D(x) + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\left(D(x)\right)^2 + \cdots + (D(x))^n - x^n$$

$$D(x^n) = nx^{n-1}D(x) + \cdots + (D(x))^n$$

Como los productos son ínfimos con relación al producto $nx^{n-1}D(x)$ entonces:

$$\boldsymbol{D(x^n) = nx^{n-1}D(x)}$$

EL CÁLCULO Y SUS DESARROLLOS POSTERIORES

Aunque los métodos de derivación e integración, exigían el uso adecuado de *"cantidades infinitamente pequeñas"* (cantidades evanescentes, según Newton y cantidades incipientes, según Leibniz) éstas permanecieron por mucho tiempo sin un sustento formal debido a que traían consigo ideas relacionadas con el infinito que la matemática de aquella época no poseía, además no existían herramientas suficientes para dar cierto rigor a los métodos empleados en los que se manipulaban dichas cantidades (Ruíz & Martínez, 2005). Igualmente, debido al misterio y sospecha que estos métodos suscitaban, levantaron más de una crítica; sin embargo, es posible que la utilidad y efectividad de aquellos métodos y la exactitud de sus resultados, justificaran su uso sin necesidad de requerir fundamentos teóricos.

Pues bien, la realidad es que el nacimiento del Cálculo, se dio mucho antes que conceptos tales como número real, racional e irracional, estuvieran perfectamente clarificados, y como consecuencia sin haber formalizado el concepto de continuidad y límite. Y dado que los matemáticos del siglo XVII, y hasta bien entrado el siglo XIX, centraron su interés exclusivamente en desarrollar y aplicar las técnicas del Cálculo, se entiende el hecho de que no se tuvieran fundamentos sólidos. (Pérez, p. 183)

No es sino hasta la segunda mitad del siglo XIX que se desarrolla el proceso conocido como *aritmetización del análisis*, el cual consiste en hacer reposar el Cálculo (o "Análisis", como se lo empezó a llamar) sobre las propiedades más profundas de los números, sin recurrir para nada a la intuición geométrica (Obregón, 1991), siendo L'Hôpital quien escribe la primera obra sistemática sobre Análisis infinitesimal, Cauchy quien sienta las bases del Cálculo riguroso y Weierstrass, quien unos años más tarde, las precisa aún más.

Cauchy, gracias a un mejor conocimiento del conjunto de los números reales y del concepto de *límite*, logró definir de forma precisa conceptos tales como cantidades infinitesimales y derivada. Con él, se dejó de identificar la diferencial como un *incremento infinitesimal*, que si bien, había favorecido la construcción del cálculo mostraba serios problemas debido a la ausencia de argumentos para explicar el cómo y el porqué de su funcionamiento.

Para Cauchy, una *cantidad infinitamente pequeña*, es una cantidad variable tal que su valor numérico decrece indefinidamente de manera que converge hacia el valor cero. Es decir, que los infinitesimales, son variables (x) y no cantidades muy pequeñas, con una propiedad específica: su límite, cuando x tiende a cero, es cero. Además,

> […] cuando los sucesivos valores atribuidos a una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo hasta acabar diferenciándose muy poco de él, haciéndose tan pequeña [la diferencia] como uno desee, este último (valor fijo) es llamado el límite de todos los otros. (Lozano, 2011)

Tal como lo afirman Ortega y Sierra (1998), Cauchy formuló la definición de límite[15] (prescindiendo de la geometría, de los infinitésimos y de las velocidades de cambio) y a partir de ésta formuló la definición de derivada como *el límite de un cociente incremental.*

> Para definir la derivada de una función $y = f(x)$ con respecto a x, le da a la variable x un incremento $\Delta x = i$ y forma el cociente
>
> $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$
>
> y al límite cuando $i \to 0$ lo define como la derivada de y con respecto a x, que es la definición de derivada tal y como la usamos hoy.

Así, para calcular el cociente incremental de $y = 3x^2$ se tiene que:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3(x+i)^2 - 3x^2}{i}$$

$$= \frac{3x^2 + 6xi + 3i^2 - 3x^2}{i}$$

---

[15] Cabe resaltar que fue Bolzano, en 1817, quien por primera vez definió la derivada como un límite.

Cuyo valor resulta ser, en el momento en el que se calcula el límite cuando $ix \to 0$, igual a $6x$.

> Por tanto cuando en una expresión aparecen cantidades infinitesimales, dichas cantidades no son cero, pero sí lo son sus límites, justificando así no el que se desprecien sino que, en ese momento, se les iguale, a cero, *exactamente* a cero. (Martínez et al, 2005)

Cauchy definió la diferencial como

> Una expresión construida *a partir* de la derivada: $df = f'(x)\,dx$, siendo dx un incremento arbitrario (grande o pequeño) de la variable y pasó a convertirse así en un simple instrumento formal, necesario para justificar y abreviar ciertas demostraciones. Se desprendió, entonces, a la diferencial de la ambigüedad de los infinitamente pequeños, pero al mismo tiempo quedó desprovista de cualquier significado físico o intuitivo propio: simplemente era el producto de la derivada por el incremento de la variable independiente. (Martínez et al, 2005)

Es decir, que aunque la notación y las reglas generales para calcular derivadas dadas por Leibniz prevalecen hoy en día, hubo un cambio importante en las concepciones de "diferencial" que les dieron origen. Finalmente se presenta una definición de derivada extraída del libro de texto titulado: Teoría y problemas de Cálculo diferencial e integral de Ayres (1971).

> El incremento Δx de una variable x es el aumento o disminución que experimenta, desde un valor $x = x_0$ a otro $x = x_1$ de su campo de variación. Así, pues, $\Delta x = x_1 - x_0$, o bien $x_1 = x_0 + \Delta x$.
>
> Si se da un incremento Δx a la variable x, (es decir si x pasa de $x = x_0$ a $x = x_0 + \Delta x$), la función $y = f(x)$ se verá incrementada en $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ a partir del valor $y = f(x_0)$. El cociente
>
> $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{incremento\ de\ y}{incremento\ de\ x}$$
>
> recibe el nombre de cociente medio de incrementos de la función en el intervalo comprendido entre $x = x_0$ a $x = x_0 + \Delta x$.

La derivada de una función $y = f(x)$ con respecto a x en un punto $x = x_0$ se define por el límite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

siempre que exista. Este límite se denomina también cociente instantáneo de incrementos (o simplemente cociente de incrementos) de y con respecto de x en el punto $x = x_0$.

CONCLUSIONES

En relación con los propósitos perseguidos con el desarrollo de esta propuesta, se puede concluir que:

- El origen del Cálculo Diferencial estuvo marcado por el interés de dar solución a problemas relacionados con el trazado de la tangente a una curva, la obtención de valores máximos y mínimos, la velocidad de los cuerpos en movimiento, entre otros. Los métodos iniciales que permitieron darles solución hacían uso de técnicas geométricas que se ajustaban según el problema que se tuviese, es decir, la solución a estos problemas estuvo marcada inicialmente por la particularidad de los problemas abordados. Con la llegada del Cálculo o mejor aún con su consolidación, que vino de la mano de Newton y de Leibniz, se unificaron estos y otros problemas, proporcionando formas generales para darles solución.

- Con Newton y Leibniz quedaron definidas las reglas para calcular derivadas y la relación entre los procesos de derivación e integración, aun cuando los fundamentos de sus métodos no eran precisos por carecer de un sustento teórico.

- Contrario a lo que se piensa, la derivada no resulta de una aplicación del concepto de límite, lo que realmente condujo hacia este importante concepto fue la fundamentación del cálculo de derivadas.

- Leibniz, fue sin duda de gran importancia en la historia de las Matemáticas, hubo en él un marcado interés por la simbología, la notación y la generalización de resultados que lo llevaron a formalizar propiedades y reglas fundamentales de los procesos de derivación e integración, cuyo papel principal lo jugaron las diferencias y las sumas infinitesimales, respectivamente.

En relación con los aportes que esta propuesta le brindó tanto a mi formación personal como profesional, podemos concluir que:

- Los desarrollos de la matemática no se han dado de forma lineal, tampoco ha estado siempre presente la rigurosidad. Inicialmente los matemáticos se preocupaban por la eficacia de sus métodos y luego por una explicación lógica, es decir que la práctica antecedía a la teoría.

- El estudio de la historia de las matemáticas me exigió, en algún momento, interpretar no sólo los métodos y conocimientos sino las formas en que razonaban los matemáticos en la época en que estos fueron desarrollados, desprendiéndome de las ideas actuales; lo que no siempre fue tarea fácil.

- Sin lugar a dudas, el desarrollo de este trabajo de grado, reafirmó mis conocimientos matemáticos y didácticos en relación con el concepto derivada. Esta experiencia seguramente fortalecerá mi labor docente, puesto que me provee de herramientas potentes para introducir el estudio del Cálculo Diferencial en el aula de clase.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Álvarez, A. (2009). *Algunos Apartes Históricos Del Cálculo*. En Revista Sigma, Vol. 9, número 2, pág. 17 – 24.

Ayres, F. (1971). Teoría y problemas de Cálculo diferencial e integral. McGraw – Hill. España.

Babini, J. (1969). Historia sucinta de la matemática. Espasa-Calpé S.A., Madrid.

Barcelo, B. (2002). El descubrimiento del Cálculo. Universidad Autónoma de Madrid. España.

Boyer, C. (1987). Historia de la matemática. Alianza Universidad Textos. Madrid

Bromberg, S. & Rivaud, J. (2001). Fermat y el Cálculo Diferencial e Integral.

Collete, P. (2000). Historia de las matemáticas II. Siglo Veintiuno Editores. México, D.F

Descartes, R. (1637). Discurso sobre el método. Investigación de la Verdad. Ediciones Universales. Bogotá, D.C., Colombia.

González, P. (2008). Fermat y los orígenes del cálculo diferencial. Nivola libros y ediciones. España.

González2, P. (*s.f*). La Historia de la Matemática como recurso didáctico e instrumento de integración cultural de la Matemática.

González3, J. (*s.f*). Apolonio de Perga. Las secciones cónicas.

Jimenez, P. (*s.f*). Leibniz.

La guerra de los treinta años. (*s.f*). Recuperado de http://historia-vcentenario.wikispaces.com/file/view/La+Guerra+de+los+Treinta+A%C3%B1os.pdf

La contribución de Leibniz al Cálculo Infinitesimal. (*s.f*). Recuperado de http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info/Epistemologia%202009/La%20Contribuci%C3%B3n%20de%20Leibniz%20al%20C%C3%A1lculo%20Infinitesimal.pdf

Lazaro, W. & Maldonado, A. (2010). Antecedentes al concepto de derivada aportados por Isaac Barrow. Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional.

Lopes, J. (2004). Cálculo Diferencial: Estudo histórico sobre a evolução do Cálculo Diferencial no século XVII.

Lozano, Y. (2011). Desarrollo del concepto de la derivada sin la noción del límite. Bogotá, Fundación Universitaria Konrad Lorenz.

Marquina, J., Ridaura, R., Álvarez, J., Marquina, V. & Gómez, R. (1996). *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica: consideraciones en torno a su estrutura matemática.* En Revista Mexicana de Física, junio Vol. 42, número 6, pág. 1051 – 1059.

Martínez, J., López, R., Gras, A. & Torregosa, G. (2002). *La Diferencial no es un incremento infinitesimal. Evolución del concepto de Diferencial y su clarificación en la enseñanza de la física.* En Matemáticas: Enseñanza de las ciencias, febrero, número 20, pág. 271 – 283.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Matemáticas. Lineamientos Curriculares.* Bogotá - Colombia: MEN.

Newton y el Cálculo Infinitesimal (*s.f*). Recuperado de http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info/Epistemologia%202009/Newton%20y%20El%20Calculo%20Infinitesimal.pdf

Obregón, I. (1991). Al Cálculo con la pandilla. Susaeta Ediciones S.A. Medellín.

Ortega, T. & Sierra, M. (1998). El concepto de derivada: Algunas indicaciones para su enseñanza. Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado, Vol. 32, Mayo/Agosto, pp. 87 – 115.

Peña, L. & Colmenares, K. (2001). La génesis del concepto de integral como medida de área. Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional.

Pérez, J. (*s.f*). Orígenes del Cálculo. Historia de las Matemáticas.

Rodríguez, A. (*s.f*). Historia de las matemáticas. Arquímedes. El genio de Siracusa.

Ruíz, M. & Martínez, F. (2005). Infinitésimos: Ficciones útiles para el cálculo de tangentes y cuadraturas.

Villalba, M. (2002). El nacimiento del cálculo.