ARGUMENTACIÓN DE LOS ESTUDIANTES DE LA LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS DEL CURSO DE GEOMETRÍA ANALÍTICA AL REALIZAR UNA TAREA SOBRE DEFINICIONES GEOMÉTRICAS DE SECCIONES CÓNICAS

Por

EDGAR ÁNDRES MANCERA RODRÍGUEZ

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D.C., 2015

ARGUMENTACIÓN DE LOS ESTUDIANTES DE LA LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS DEL CURSO DE GEOMETRÍA ANALÍTICA AL REALIZAR UNA TAREA SOBRE DEFINICIONES GEOMÉTRICAS DE SECCIONES CÓNICAS

Por

EDGAR ÁNDRES MANCERA RODRÍGUEZ

Trabajo de grado para optar por el título de

Licenciado en Matemáticas

Monografía asociada a la línea de investigación: Argumentación y Prueba

Asesora:

MARÍA NUBIA SOLER ÁLVAREZ

Profesora del Departamento de Matemáticas

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D.C., 2015

A Dios por estar siempre a mi lado

y a mi familia por su apoyo incondicional.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco primeramente a Dios por darme sabiduría, fortaleza y protección en este camino, por guiarme en la que fue una de las decisiones más importantes de mi vida y de la cual considero fue la mejor y es haber elegido la enseñanza de las matemáticas como mi proyecto de vida.

En esta primera etapa de mi sueño de ser profesional de la docencia, que está a punto de terminar, quiero de todo corazón agradecer a todas aquellas personas que hicieron posible esta meta.

A mi hija Luna Mancera, el mejor y más hermoso regalo que Dios puso en mi vida, mi motor, mi alegría, mi princesa, mi preciosa consentida, tu compañía me lleno de fuerzas para que juntos cumpliéramos este sueño.

A mi mamá Leonilde Rodríguez Calderón mi más grande ejemplo de lucha, de fuerza y de deseos de vivir y a mi papá Edgar Mancera Fique, por apoyarme y ayudarme de manera incondicional, gracias a ambos por todo su sacrificio y comprensión, por estar siempre en los momentos difíciles motivándome. Sin su ayuda no hubiera sido posible lograrlo, Gracias mil gracias.

A mis familiares y amigos que creyeron en mí, quienes seguramente están muy contentos al igual que yo de cumplir esta tan anhelada victoria.

Finalmente a todos los docentes que durante este periodo compartieron conmigo sus experiencias y enseñanzas, especialmente a la profesora Nubia Soler la mentora de este trabajo; gracias por sus enseñanzas acompañadas de humildad, paciencia y sencillez.

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Argumentación de los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas del curso de Geometría Analítica al realizar una tarea sobre definiciones geométricas de secciones cónicas
Autor(es)	MANCERA Rodríguez, Edgar Andrés.
Director	SOLER-ÁLVAREZ, María Nubia.
Publicación	Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional. 2015, 90 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional.
Palabras Claves	ARGUMENTACIÓN, CONJETURAR, MODELO DE TOULMIN, GARANTE, CÓNICAS.

2. Descripción
En el Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, se realizó un proyecto de investigación titulado "Razonamientos abductivos, inductivos y deductivos desarrollados por estudiantes del curso de geometría analítica al realizar una tarea relacionada con la representación de objetos geométricos en distintos sistemas coordenados", llevado a cabo durante el primer semestre del año 2012. Algunos resultados de la investigación indicaron que los estudiantes que realizaban tareas en las que se formulan y validan conjeturas, desarrollan también procesos de argumentación; además, se identificaron características de tareas, que pueden proponerse en el aula, mediadas por herramientas tecnológicas que promueven la formulación y validación de conjeturas. A partir de estos resultados, surgió la idea de elaborar este trabajo de grado, que consiste en estudiar los argumentos desarrollados por cuatro estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas, al resolver una tarea diseñada en el marco del proyecto de investigación, relacionada con la definición de las secciones cónicas, usando *applet* diseñados en el software Geogebra. Para tal fin, se identificaron los argumentos surgidos durante el desarrollo de la tarea, por medio del modelo de Toulmin sobre argumentación; estos se clasificaron según su garante y

se describieron para cada argumento las etapas de conjeturar evidenciadas.

Las preguntas de indagación que orientaron el desarrollo de la investigación en el presente trabajo de grado son:

1. ¿Qué relación hay entre los procesos de conjeturar y los procesos de argumentación en el desarrollo de las tareas propuestas por el grupo de investigación y desarrolladas por maestros en formación?
2. ¿Qué tipo de argumentos tienen lugar en el desarrollo de la tarea por parte de los maestros en formación?

3. Fuentes

Para el desarrollo de presente estudio se consideraron dos libros, dos artículos, dos informes de dos proyectos de investigación y una tesis de pregrado, los cuales se especifican a continuación:

1. Álvarez, I., Carranza, E., Ángel, L. & Soler-Álvarez, N. (2014). Actividades Matemáticas: Conjeturar y Argumentar. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas. 85,* 75-90.
2. Lehman, C. H. (1989). *Geometría Analítica*: Nueva York. John Wiley and sons.
3. Manrique, V. (2011). *Caracterización y clasificación de las formas de razonar usadas por un grupo de profesores en formación al resolver una actividad sobre ruletas cicloidales*. Tesis de pregrado no publicada. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.
4. Ministerio-de-Educación-Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Bogotá: MEN.
5. Soler-Álvarez, N. (2013). *Razonamientos abductivos, inductivos y deductivos desarrollados por estudiantes del curso de geometría analítica al realizar una tarea relacionada con la representación de objetos geométricos en distintos sistemas coordenados.* Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional, Departamento de Matemáticas.
6. Soler-Álvarez, N., Ávila, J. C. & Luque, C. (2009). *Propuesta proyecto de investigación "Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: los razonamientos abductivo e inductivo"*. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional, Departamento de Matemáticas.
7. Soler-Álvarez, N. & Manrique, V. (2014). El proceso de descubrimiento en la clase de matemáticas: los razonamientos abductivo, inductivo y deductivo. *Revista Enseñanza de las Ciencias. 32,* 191-219.

8. Toulmin, S. E. (2003). *The uses of argument* (updated edition). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

4. Contenidos

El documento está organizado en seis capítulos. En el primer capítulo se expone el planteamiento del problema, la justificación, las preguntas de indagación y los objetivos del trabajo de grado. En el segundo capítulo se presentan los referentes teóricos que orientaron el análisis de la información recolectada y aquellos que sustentan los conceptos matemáticos de la tarea desarrollada. En el tercer capítulo se hace referencia a las estrategias metodológicas usadas en el desarrollo del trabajo. En el capítulo cuarto se desarrolla el análisis de los argumentos identificados en el desarrollo de la tarea. En el capítulo quinto se presentan las conclusiones y en el último capítulo se realizan algunas consideraciones finales del trabajo de grado.

5. Metodología

Para el desarrollo del trabajo de grado se contó con la información obtenida por el grupo de investigación de uno de los grupos de estudiantes que desarrollaron las tareas propuestas. El grupo que se tomó como referencia para la elaboración de este trabajo estaba conformado por 4 estudiantes que estaban realizando el curso Geometría Analítica en el primer semestre del año 2012, y quienes ya habían cursado asignaturas como Aritmética, Sistemas Numéricos, Elementos de Geometría y Geometría Plana; cursos que tratan temas asociados a los de la actividad propuesta por el grupo de investigación y que tienen como propósito común desarrollar actividad matemática.

El desarrollo del trabajo de grado contó, en primer lugar, con el estudio de algunos referentes teóricos. El primero de ellos consistió en el modelo de argumento de Toulmin, descrito en su libro "*The uses of argument*", con el fin de identificar los argumentos surgidos en el desarrollo de las tareas por parte de los estudiantes y estudiar de forma detallada la argumentación.

Paralelo a la indagación del modelo Toulmin, se realizó el estudio matemático de las definiciones de las secciones cónicas como lugar geométrico y a partir de la excentricidad, debido a que este es el contenido matemático de las tareas propuestas por el grupo de investigación.

En segundo lugar, se realizó la revisión de la información dada por el grupo de investigación. Fueron 10 videos los elaborados por los estudiantes, en donde dan solución a la tarea propuesta, cada uno con una duración aproximada de 11 minutos.

Con esta información, se inició el análisis realizando una caracterización amplia de la tarea formulada en el proyecto de investigación; posteriormente se identificaron los argumentos siguiendo el modelo de Toulmin sobre argumentación, realizando una descripción detallada de los contextos en los que surgieron los argumentos y de la estructura de los mismos, es decir, se hizo una descripción de los datos, garante y afirmación de cada uno de ellos. Luego se relacionaron los argumentos con las características de las tareas a partir de su garante y por último, se describieron las etapas del proceso de conjeturar logrado por los estudiantes en la elaboración de cada uno de los argumentos, el cual se reporta en el análisis de la información de este documento.

6. Conclusiones

Se presentan conclusiones en relación con las características de los garantes de los argumentos surgidos en el desarrollo de la tarea, en relación con las etapas del proceso de conjeturar evidenciadas en el surgimiento de cada argumento y en relación con las características de la tarea.

En relación con los garantes de los argumentos, en la mayoría de estos, el garante corresponde a relaciones, propiedades, patrones o regularidades observadas en la exploración de los *applet*, al manipular las herramientas de estos, identificando que el uso de software como Geogebra conlleva a encontrar, por parte de los estudiantes, diversidad de relaciones entre las diferentes representaciones geométricas y algebraicas de un objeto matemático.

Con respecto al proceso de conjeturar y argumentar, se observa que se desarrollan las cinco etapas del proceso de conjeturar, según Álvarez, Ángel, Carranza y Soler-Álvarez (2013), en la mayoría de los argumentos formulados por los estudiantes. A continuación se describen los aspectos relevantes que se presentaron en cada una de estas etapas.

La etapa de visualización, es apoyada principalmente en los diagramas geométricos que se observan en los *applet* y en la posibilidad que tienen los estudiantes de realizar construcciones auxiliares y tener una dinámica directa con las representaciones de los objetos matemáticos.

La etapa de identificación de patrones, relaciones, regularidades o propiedades, se presentó principalmente en la exploración de los applet, al observar cambios en las representaciones geométricas y en los valores numéricos.

La etapa de formulación de conjeturas, se observó que las conjeturas se presentaron de manera verbal y surgieron como expresiones de las relaciones identificadas en la etapa anterior.

La etapa de verificación de las conjeturas, en la mayoría de los argumentos fue elaborada realizando la observación de un considerable número de casos que los *applet* permitían generar, identificando si en verdad las relaciones y propiedades encontradas eran ciertas.

En la etapa de generalización de las conjeturas, estas surgieron en la mayoría de los argumentos como expresiones generales de las relaciones, propiedades, patrones o características observadas.

Referente a las características de la tarea, el uso de las herramientas tecnológicas en la tarea, como el software Geogebra, permitió la observación y exploración de diferentes representaciones de los objetos matemáticos, permitiendo encontrar diversidad de relaciones entre estas representaciones, lo cual llevó a la construcción de diferentes argumentos.

Por último, se lograron identificar tres tipos de enunciados del diseño de la tarea, que permitieron el desarrollo de procesos argumentativos: enunciados de preguntas abiertas, enunciados que conllevan a que los estudiantes enfoquen sus relaciones encontradas en temáticas específicas y enunciados de preguntas que buscan la justificación de las relaciones encontradas. Los enunciados de las preguntas abiertas dieron lugar a que los estudiantes encontraran diferentes relaciones entre los objetos matemáticos presentes en los *applet* y el hecho de solicitar las justificaciones de las relaciones encontradas fue un aspecto relevante en la tarea, pues durante el desarrollo de estas preguntas surgieron la mayoría de los argumentos.

TABLA DE CONTENIDO

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

ÍNDICE DE TABLAS

INTRODUCCIÓN

La presente monografía se desarrolla en el marco del proyecto de investigación denominado *Razonamientos abductivos, inductivos y deductivos desarrollados por estudiantes del curso de Geometría Analítica al realizar una tarea relacionada con la representación de objetos geométricos en distintos sistemas coordenados*, llevado a cabo en el Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional durante el primer semestre del año 2012.

Algunos resultados de esta investigación indican que los estudiantes que realizaban tareas en las que se formulan y validan conjeturas, desarrollan también procesos de argumentar; además, se identificaron características de tareas, que pueden proponerse en el aula, mediadas por herramientas tecnológicas y que promuevenla formulación y validación de conjeturas.

A partir de estos resultados, surgió la idea de elaborar este trabajo de grado, que consiste en estudiar los argumentos desarrollados por cuatro estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas al resolver una tarea diseñada en el marco del proyecto de investigación relacionada con la definición de las secciones cónicas, usando applet diseñados en el software Geogebra.En concordancia con las tipologías adoptadas por el grupo de investigación del proyecto mencionado anteriormente, este trabajo conserva los elementos del modelo de Toulmin sobre argumentación, en búsqueda de explorar otras áreas del conocimiento Matemático, tales como los procesos de argumentar.

Este documento se divide en seis capítulos. En el primer capítulo se expone el planteamiento del problema, la justificación, las preguntas de indagación y los objetivos del trabajo de grado. En el segundo capítulo se presentan los referentes teóricos que orientaron el análisis de la información recolectada y aquellos que sustentan los conceptos matemáticos de la tarea desarrollada. En el tercer capítulo se hace referencia a las estrategias metodológicas usadas en el desarrollo del trabajo. En el capítulo cuarto se desarrolla el análisis de los argumentos identificados en el desarrollo de la tarea. En el capítulo quinto se presentan las conclusiones y en el último capítulo se realizan algunas consideraciones finales del trabajo de grado.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. JUSTIFICACIÓN

El presente trabajo de grado está vinculado al proyecto de investigación titulado *Razonamientos abductivos, inductivos y deductivos desarrollados por estudiantes del curso de geometría analítica al realizar una tarea relacionada con la representación de objetos geométricos en distintos sistemas coordenados*, que se desarrolló en la Universidad Pedagógica Nacional en el año 2012.

El proyecto de investigación tenía como objetivo estudiar las formas de argumentar y razonar de un grupo de estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas. La indagación inicialmente centró la atención, por una parte, en el proceso de razonar en la clase de matemáticas que hace parte de la formación de futuros docentes de matemáticas, y de otra parte, en el conocimiento de las representaciones de algunos objetos geométricos y en las características de las tareas que promueven el desarrollo de habilidades argumentativas.

Sin embargo, en el estudio del razonamiento matemático los investigadores observaron que este estaba ligado a la argumentación y a la conjeturación, vistos estos como procesos; Álvarez, Ángel, Carranza y Soler-Álvarez (2013), amplían esta descripción, precisando la importancia de estos procesos en el desarrollo de la actividad matemática, pues potencian el desarrollo del pensamiento matemático, y encontrando una relación entre los procesos de argumentar y conjeturar, al referirse que conjeturar corresponde al proceso de formular y validar conjeturas, y la argumentación surge como medio para justificar las conjeturas.

A partir de la anterior observación, el proyecto de investigación cambió su centro de atención por los procesos de conjeturar y las características de las tareas que promueven la formulación y validación de conjeturas, en lugar de las que promueven el desarrollo de habilidades argumentativas.

En concreto, el proyecto de investigación pretendía aportar a la pregunta¿Cuáles características podrían tener las tareas propuestas a los estudiantes del curso de

Geometría Analítica para crear conocimiento matemático sobre las secciones cónicas y desarrollar procesos de formulación y validación de conjeturas?

Para dar respuesta a la anterior pregunta, en la investigación se diseñaron tareas relacionadas con las representaciones geométricas de las secciones cónicas (ver capítulo 5, Análisis de la Información). Estas tareas fueron desarrolladas por estudiantes de un curso de Geometría Analítica de la Licenciatura en Matemáticasdel primer semestre del año 2012.

La manera como los estudiantes debían presentar el desarrollo de las tareas fue esencial para la investigación. Los estudiantes debían grabarse a sí mismos tan pronto como empezaran a realizar las tareas, no importando que aparecieran errores, preocupaciones, ideas no desarrolladas o momentos de silencio. Los videos no debían ser planeados, tenían que ser lo más naturales posibles.

Estos videos y audios fueron elaborados por los estudiantes con software de captura de video como Camtasia o Screen Capture. Estas grabaciones debían ser subidas a YouTube, teniendo presente que la duración de cada video debía ser de máximo 12 minutos. El grupo de investigación recibió información de 5 grupos, cada unoconformado por 3 o 4 estudiantes. Se resalta el hecho de que en el desarrollo de las tareas no hubo intervención por parte del profesor siendo un trabajo autónomo de los estudiantes en su proceso de aprendizaje.

Con la información recolectada, el grupo de investigación realizó el análisis de la información a partir de categorías específicas relacionadas con los procesos de formulación y validación de conjeturas y con las características de las tareas para desarrollar dichos procesos.

Algunos resultados de la investigación fueron: la identificación de características de tareas, que pueden proponerse en el aula, mediadas por herramientas tecnológicas y que permiten formulación y validación de conjeturas, como lo sonla realización de preguntas o instrucciones abiertas que brindan la posibilidad a los estudiantes de seguir sus propios caminos para dar solución a estas, realizando exploraciones de diferente índole y formulando una cantidad significativa de conjeturas.

También, el uso de herramientas tecnológicas en las tareasapoyan la exploración y el descubrimiento matemático, en especial, los*applet* diseñados en software como Geogebra, permiten observar diferentes representaciones de objetos matemáticos, brindando la oportunidad a los estudiantes de encontrar gran variedad de relaciones entre estos.

Además, debido a que con muchos de los objetos de los *applet*se puede tener una dinámica directa, es posible observar muchos casos en tiempos muy cortos ytambiénrealizar construcciones geométricas, lo cual hace que se den otras posibilidades para encontrar relaciones entre objetos estudiados.

En cuanto a los procesos de conjeturar, uno de los resultados del proyecto de investigación indicó que los estudiantes que realizaban tareas en las que se formulan y validad conjeturas, desarrollan también procesos de argumentación, como lo mencionan Álvarez, Ángel, Carranza y Soler-Álvarez (2013). También, lograron distinguir varias etapas en el proceso de formulación y validación de conjeturas, como la exploración de datos, observación de regularidades, presentación de conjeturas y validación de las mismas. Además, en la investigación se observó diversidad en las formas de validar las conjeturas, donde algunos estudiantes utilizan libros de texto para contrastar las definiciones encontradas en estos con las conjeturas formuladas, otros validan las conjeturasrealizando demostraciones y támbiénpresentando de manera detallada el proceso que los llevó a conjeturar.

A partir de estos resultados, surgen preguntas como por ejemplo:¿así como hay diversidad de conjeturas, hay diversidad de argumentos con estas mismas tareas?, ¿cuáles argumentos surgieron en el desarrollo de las tareas?, ¿qué relaciones hay entre el proceso de conjeturar y el proceso de argumentar en el desarrollo de estastareas?, ¿Qué tipo de argumentos tienen lugar en el desarrollo de la tarea por parte de los maestros en formación?, ¿qué características de la tarea promueven los procesos de argumentación? o ¿así como el diseño de *applet* favoreció el proceso de conjeturar, favorece el proceso de argumentar?

Así pues,el proyecto de investigación deja como proyección, la identificación de los argumentos que surgieron en el desarrollo de las tareas, el estudio detallado de estosy las relaciones entre el proceso de argumentar y el de conjeturar logrado por los estudiantes. Los anteriores aspectosresultan ser de gran importanciaen la educación, ya que, según los Estándares Curriculares (MEN, 2006) el desarrollo de competencias matemáticas en los estudiantes, en especial las de tipo argumentativo, son un propósito para los maestros en la actualidad y debe ser de atención para la comunidad de educadores, pues el desarrollo de estas competencias se logra cuando en clase se construye el conocimiento matemático.

En este sentido, el presente documento pretende servir de apoyo a la línea de investigación "Argumentación y Prueba" a la cual está vinculado el proyecto descrito,realizando la identificación de los argumentos logrados por un grupo de estudiantes, al realizar las tareas diseñadas en el marco del proyecto de investigación, con el fin de encontrar posibles relaciones entre los procesos de conjeturar y los procesos de argumentar y dando respuesta a algunas delas preguntas que surgieron de la investigación. De todas las preguntas presentadas anteriormente, este trabajo pretende aportar a las siguientes:

1. ¿Qué relación hay entre los procesos de conjeturar y los procesos de argumentar en el desarrollo de las tareas propuestas por el grupo de investigación y desarrolladas por maestros en formación?

2. ¿Qué tipo de argumentos tienen lugar en el desarrollo de la tarea por parte de los maestros en formación?

1.2. OBJETIVOS

A partir de lo presentado, se formulan los siguientes objetivos:

1.2.1. OBJETIVO GENERAL

Establecer relaciones entre los procesos de conjeturar y los procesos de argumentar logrados por un grupo de estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, que hicieron parte del curso de Geometría Analítica del primer semestre del 2012, al resolver una tarea sobre la representación geométrica de las secciones cónicas usando como herramienta los *applet* diseñados en Geogebra.

1.2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Identificar los argumentos formulados los estudiantes al resolver la tarea propuesta por el grupo de investigación.

- Describir el proceso de argumentar evidenciado en cada uno de los argumentos identificados en el desarrollo de la tarea.

- Describir las etapas del proceso de conjeturar en la elaboración de cada uno de los argumentos.

- Establecer posibles relaciones entre los procesos de conjeturar y los procesos de argumentar logrados por los estudiantes al resolver la tarea.

2. MARCO TEÓRICO

En este capítulo se exponen los referentes teóricos en los que se basa el análisis de la información recolectada y aquellos que sustentan los aspectos matemáticos de la misma.

En una primera parte se realiza una descripción del modelo de argumentación de Toulmin, en la segunda parte se presenta una descripción del proceso de conjeturar presentado por Álvarez, Ángel, Carranza y Soler-Álvarez (2014) en su artículo *Actividades Matemáticas: Conjeturar y Argumentar*y finalmente, se realiza un estudio de las cónicas como lugar geométrico y a partir de la excentricidad.

2.1. MODELO DE TOULMIN Y PROCESO DE ARGUMENTAR

En este apartado se realiza una descripción de los elementos del modelo Toulmin, en relación con lo que se considera un argumento (Toulmin, 2003).

Este autor inicia su estudio sobre la argumentación realizando una caracterización de las aseveraciones y las afirmaciones.Toulmin señala que quien realiza una aseveración está formulando una pretensión ya sea de atención o de credibilidad, con el fin de que estase convierta en una afirmación. Además, menciona que a diferencia de quien realiza un comentario, una broma o habla de manera hipotética, quien asevera algo quiere que lo que dice sea tomado en serio.

Una aseveración puede ser aceptada sin discusión alguna o se puede poner en tela de juicioen este caso, será necesario de fundamentos o razones (datos, hechos, pruebas, consideraciones) en los que se apoye dicha aseveración, para darle un valor a esta. En ambos casos, la aseveración pasa a ser una afirmación.

A los fundamentos o razones que sustentan las aseveraciones,se les llama justificaciones. En términos generales, las justificaciones se elaboran con propósitos diversos; algunos para hacer una reclamación opara dar defensa formal a una afirmación. Toulmin centrarásu atención en las estructuras de las justificaciones que son usadas para apoyar o validar afirmaciones y plantea una pregunta general en la siguiente situación: alguien ha realizado una aseveración y esta se ha puesto en duda, ese alguien presenta una justificación que respalda la aseveración original, ahora, ¿cuáles son los criterios de evaluación apropiados para considerar válida la justificación presentada?

Ante tal pregunta, Toulmin indica que existe gran variedad en el contexto de las aseveraciones que se hacen, las justificaciones que se presentan y las afirmaciones a las que se llegan, y destacaque los criterios de evaluación de las justificaciones depende del contexto en las que se presenten.

Sin embargo, Toulmin señala que se pueden reconocer ciertas similitudes básicas entre las justificaciones en general sin importar su contexto, puesto que, la intensión en su libro no es presentar estándares rigurosos que digan cuándo una justificación es válida o no, sino que, la idea es ver hasta qué punto hay estándares comunes aplicables a los criterios de evaluación de las justificaciones provenientes de diferentes contextos.

Para ello, con el de fin determinar características comunes que relacionan las justificaciones, sin importar de dónde provengan, Toulmin describe dos etapas en las cuales se crea una justificación. La caracterización de las etapas está relacionada con el uso de expresiones importantes a los que Toulmin llama términos o calificadores modales, estos expresan condiciones que suponen una matización de los enunciados, como su grado de certeza, algunos ejemplos son: "posible", "necesario", "debe ser", "habrá de estar" o "podría ser". Teniendo en cuenta las funciones que desempeñan cuando se expone una justificación.

PRIMERA ETAPA. Formulación de problema. Planteamiento de una pregunta o cualquier tipo de problema, donde se está obligado a admitir un número de diferentes propuestas.

SEGUNDA ETAPA. Establecer las posibles soluciones que reclaman la atención o dicho de otra forma, las más serias, teniendo en cuenta la relación que hay entre esas propuestas y cualquier información que se tenga.

En esta etapa se clasifican diferentes situaciones:

1. Cuando en algunos ámbitos, sujetos a controversia, no es posible establecer qué afirmaciones prevalecen sobre otras. En estos casos, las respuestas a las preguntas están sujetas a cuestiones de opinión o de gusto.
2. Cuando se considera alguna de las respuestas, puede ocurrir que:

a. Situaciones en donde la información que se tiene señala hacia una solución determinada, en estos casos se hace uso de los siguientes términos modales (debe ser, necesariamente, ha de ser, habrá de estar).
b. De acuerdo con la información que se dispone se clasifican las posibles respuestas según el grado relativo de confianza y credibilidad. Entonces la de mayor credibilidad será tomada como la conclusión más “probable” que las otras.

3. Cuando una de las posibles respuestas se considera la apropiada y se toma como la conclusión, sin tener certeza de esta; de este modo la conclusión deberá ser matizada. El término modal más utilizado para este caso será (presumiblemente, se presume).
4. Las imposibilidades o impropiedades resultan ser otro tipo de situación en donde los calificadores modales utilizados son “no poder”, “no se puede”, etc. En determinada ocasión puede que la aseveración hecha esté sujeta a una imposibilidad o impropiedad ya sea formal o teórica, como por ejemplo leyes naturales o imposibilidades matemáticas. Es importante aclarar que en esta situación, se da lugar a descartar las posibles respuestas a partir de que son insostenibles o imposibles, no porque se estén dando justificaciones o razones.

A partir de estas etapas, Toulmin realiza un estudio detallado del uso de los términos modales utilizados en las justificaciones, llegando a las siguientes conclusiones:

El uso de términos modales en las justificaciones, tiene dos aspectos a los cuales Toulmin denomina *fuerza* de la expresión y los *criterios* que rigen su uso.La fuerza de los términos modales “no puede ser que”, “es imposible”, “es posible”, “es necesario”, etc., son independientes del contexto, pues cumplen la misma función en cada justificación. Pero los criterios, que son las razones o motivos a los que nos referimos para decir en cualquier contexto que una determinada justificación resulta apropiada o no, son dependientes del contexto, ya que, a partir de estos se puede determinar si los términos modales usados han sido utilizados correctamente.

La forma de los argumentos

Hasta este momento se han tratado tres elementos: las aseveraciones que se hacen, las justificaciones que sustentan la aseveración y las afirmaciones o conclusiones a las que se llegan. A la anterior estructura Toulmin la denomina “argumento” y es en esta estructura en donde centraremos nuestro estudio.

Para realizar el estudio de los argumentos, Toulmin emplea un esquema que, como punto de partida, cuenta con dos elementos, laaseveración que se realiza, a la que llama datos (D), y la afirmación que se está tratando de establecer (C).Para explicar o describir estos componentes, Toulmin presenta el siguiente ejemplo: “Harry no es moreno, sabemos por experiencia que, de hecho, es pelirrojo”. En este ejemplo, el dato es el hecho de conocer que Harry es pelirrojoy estea su vez sustenta la afirmación inicial la cual no es puesta en duda.

Sin embargo, cabe señalar que en un argumento se puede poner en entre dicho la relación entre los datos y la conclusión, o también, sehace necesario indicar qué tienen que ver los datos que se han ofrecido con la conclusión que se ha presentado.

Es evidente que al presentar un conjunto determinado de datos como base para una conclusión hay un paso entre estos dos elementos, de modo que ahora se centra la atención en la naturaleza de este paso.

En este paso,se justifica por medio de reglas, principios, enunciados o razones;el objetivo consiste en mostrar cómo a partir de los datos se ha pasado a una conclusión y que este paso es apropiado y legítimo. A este paso Toulmin lo denomina garante o garantía (G), (obsérvese que las garantías corresponden a lo que en este documento habíamos señalado como justificaciones).

Observaremos algunos ejemplos descritos en el libro *The uses of Argument*, que describen algunas características de los garantes de un argumento.

Retomando el ejemplo anterior, Toulmin menciona que: “saber que Harry es pelirrojo, descarta cualquier insinuación de que su pelo sea negro, esto sobre la garantía (G) de quese supone que no hay morenos pelirrojos”. En este ejemplo se evidencia la diferencia entre el dato y la garantía, entendiendo que la garantía responde a las preguntas ¿Por qué?, ¿Debido a qué?, ¿Cómo has llegado a esa conclusión?

Es importante resaltar que no todas las garantías pueden legitimarse por sí solas,para explicar estoToulmin presenta el siguiente ejemplo: “Petersen -podríamos decir- no es católico romano, ¿por qué?; basamos nuestra afirmación en que sabemos que es Sueco”; Toulmin continua el ejemplo explicando que “se ha realizado la afirmación suponiendo que un sueco por lo general no es católico romano, sin embargo, cabe la posibilidad de que lo sea”. Obsérvese que en este caso el garante no se considera indiscutible.

En otro ejemplo dado por Toulminse presenta otra característica de los garantes. El ejemplo es: “Wilkinson, asegura el fiscal ante el tribunal, ha cometido una infracción contra el código de circulación”; Toulmin continua describiendo la anterior situación así: “para apoyar su afirmación, hay dos policías dispuestos a testificar que lo cronometraron conduciendo a más de $75\ km/h$ en un área urbana”.En este ejemplo, Toulmin señala que la aseveración original se ve apoyada presentando otros hechos que lo confirman también deja claro que la garantía es “el hecho de que a alguien de quien se ha probado que ha conducido a más de $75\ km/h$ en un área urbana se le puede hallar culpable de haber cometido una infracción contra el código de circulación”.

A diferencia de los ejemplos anteriores, en este caso, la garantía no puede legitimarse por sí misma y tampoco se fundamenta en un supuesto, obsérvese que en este caso para legitimar el garante se hace necesario hacer referencia a los datos del argumento, que para este ejemplo son las declaraciones de los dos policías.

Con estos tres elementos (Datos, Conclusión y Garantía) Toulmin realiza un primer esquema para analizar argumentos. La relación entre los datos y la afirmación es señalada con una flecha de forma directa y debajo la garantía indicando que permite pasar de los datos a la afirmación. La Ilustración 1, representa el esquema de argumentación propuesto por Toulmin.

Datos (D) → **Por tanto, afirmación (C)**

Debido a que, garante(G)

Ilustración 1. Esquema inicial de argumentación propuesto por Toulmin.

Es importante aclarar que en el argumento, las garantías tienen un sentido explicativo, pues su objetivo consiste en registrar explícitamente la legitimidad del paso entre los datos y la afirmación, mientras que los datos son la base de la afirmación. Ahora bien, las garantías son de diferente clase, otorgando diversos grados de fuerza a las conclusiones que justifica. Algunas garantías permiten aceptar una afirmación de manera inequívoca, haciendo uso de términos modales como “necesariamente” o “debe ser”. Otras garantías nos permiten llegar a una conclusión de manera provisional utilizando términos modales como “probablemente”, entre otros.

Toulmin, en su libro *The uses of argument,* presenta un ejemplo que ilustra la manera en cómo se relacionan lo datos, el garante y la afirmación de un argumento, el cual se presenta en la Ilustración 2.

Harry nació en Bermuda (D)

Por tanto, Harry es súbdito británico (C)

Debido a que, quien nace en Bermuda es súbdito británico (G)

Ilustración 2. Ejemplo esquema de argumentación de Toulmin

En este argumento la afirmación apela directamente a los datos que le sirven de base, es decir, a partir del hecho conocido (D), se presenta una afirmación (C); la garantía (G), tiene como objetivojustificar el paso de los datos a la afirmación.

Siguiendo con la estructura de un argumento, Toulmin señala que adicional a la garantía, puede ser necesario añadir alguna referencia o incluir un calificador modal que matice la información, a este elemento lo llama Toulmin matizador (M), este indica la fuerza dada por la garantía.

Pero además, también en el argumento pueden surgir refutaciones o condiciones de excepción que obligan a dejar de lado la garantía, descartando o rechazando la conclusión; a este elemento lo denomina Toulmin como refutadores (E).

En la Ilustración 3, se muestra la manera como Toulmin introduce estos dos nuevos elementos a su esquema inicial.

Datos (D) → **Por tanto, (M), (C)**

Debido a que,(G)

A menos que,(E)

Ilustración 3. Segundo esquema de argumentación propuesto por Toulmin.

Siguiendo con el ejemplo que desarrolla Toulmin, según este, “la afirmación de que Harry es súbdito Británico es defendida apelando a la información de que nació en Bermuda, pues este dato es apoyo a la afirmación”; no obstante, el argumento no es por sí solo concluyente si se carece de seguridad sobre la procedencia de los padres de Harry o sobre si ha cambiado de nacionalidad después de su nacimiento.

Ahora bien, lo que si permiten los datos en el ejemplo, es establecer que la conclusión es presumiblemente correcta y que está sujeta a controversias. En la Ilustración 4 se presenta la estructura del argumento desarrollado por Toulmin con el matizador y el refutador.

Harry nació en Bermuda (D) → **Por tanto, presuntamente (M), Harry es súbdito británico (C)**

Debido a que, quien nace en Bermuda es súbdito británico (G)

A menos que, sus padres sean extranjeros / haya sido naturalizado americano (E)

Ilustración 4. Ejemplo de la estructura argumentación según Toulmin con matizador y refutador.

Habiendo presentado los datos de los que se disponen, la garantía y el matizador, puede quedar en duda el argumento, si se pone en tela de juicio la garantía. En este caso, deben haber otras certezas, sin las cuales la garantía carecería de validez, a estas Toulmin les llama respaldo (R) de las garantías, que en otras palabras son el sustento de las garantías, cuando de estas se pone en duda su legitimidad. El esquema de argumentación completo desarrollado por Toulmin se refleja en la Ilustración 5.

Datos (D)

Por tanto, (M), (C)

Debido a que (G)

A menos que (E)

Teniendo en cuenta que, (R)

Ilustración 5. Esquema completo de argumentación propuesto por Toulmin.

Retomando el ejemplo desarrollado por Toulmin, alguien podría preguntarse el por qué alguien nacido en Bermuda puede tomarse por súbdito británico; en otras palabras, se está pidiendo un respaldo de la garantía, en esta ocasión la garantía se justifica apelando a las leyes que rigen la nacionalidad de los nacidos en las colonias británicas. Es importante hacer una diferencia entre las garantías y el respaldo, pues los enunciados de las garantías son enunciados hipotéticos, mientras que los enunciados de los respaldos son categóricos sobre hechos. En la Ilustración6 se presenta una estructura final del ejemplo de argumento desarrollado por Toulmin.

Harry nació en Bermuda (D)

Por tanto, presuntamente (M), Harry es súbdito británico (C)

Debido a que, quien nace en Bermuda es súbdito británico (G)

A menos que, sus padres sean extranjeros / haya sido naturalizado americano (E)

Teniendo en cuenta las siguientes leyes y provisiones legales (R)

Ilustración 6. Ejemplo esquema completo de argumentación de Toulmin

Este esquema, asegura Toulmin, no es definitivo, pero sí encierra en gran parte un modelo bastante complejo de argumentación, a partir del cual se puede realizar el estudio de diferentes argumentos. Un ejemplo de uso del esquema en el campo de la Geometría se presenta en la Ilustración 7.

Sea A un punto y l una recta (D)

Se puede construir una parábola con foco en A y directriz l (C)

Definición de parábola como lugar geométrico (G)

A menos que el punto A pertenezca a la recta l. (E)

De acuerdo a la Geometría Analítica (R)

Ilustración 7. Ejemplo de argumento en el campo de la Geometría

En el argumento anteriormente presentado, a partir de una información (D), se llega a una afirmación (C), donde esta es sustentada en (G)y respaldada en (R), siempre y cuando no suceda (E).

En cuanto al proceso de argumentar, se describe como todo aquello que genera argumentos. Se generan argumentos en matemáticas en los momentos donde se afirma algo y se quiere garantizar la validez de lo afirmado, es decir, que la argumentación busca justificar o validar afirmaciones que se formulan.

2.2. PROCESO DE CONJETURAR

En esta sección se realiza una descripción delos procesos de conjeturar y argumentar presentado por Álvarez, Ángel, Carranza y Soler-Álvarez (2014) en su artículo *Actividades Matemáticas: Conjeturar y Argumentar;* en este se considera que elproceso de conjeturar en matemáticas“se constituye en el mecanismo por medio del cual se formulan afirmaciones” acerca de las propiedades de objetos matemáticos o de relaciones entre estos objetos. Este proceso se estructura a partir de cinco etapas las cuales se desarrollan a continuación:

- Visualización

Se refiere al proceso de observar unarepresentación de un objeto matemático para identificar sus características e identificar posibles relaciones que se establecen entre estas características, partiendo de los conocimientos que tiene el observador de estos objetos.

- Identificar patrones, relaciones, regularidades o propiedades

En esta etapa, a partir de la visualización de un objeto matemático se identifica lo que es común o relevante, que según el contexto, puede corresponder a patrones, regularidades, reglas, semejanzas o propiedades.

- Formulación de conjeturas

Es el proceso en donde se comunican las relaciones, regularidades o propiedades encontradas, ya sea de forma verbal, simbólica o gráfica, de tal forma que permita organizar, clasificar e identificar la información útil para formular la conjetura de forma clara.

- Verificar conjeturas

Es el proceso en el cual se busca, en la medida de las posibilidades, validar la conjetura formulada y probar si esta es cierta en algunos otros casos o por el contrario mostrar que la conjetura es falsa.

- Generalizar Conjeturas

En esta etapa, la conjetura es aceptada como una afirmación válida para varios casos y que se convierte en una regla general aceptada, de tal manera que se reconoce verdadera para cualquier caso del contexto estudiado.

2.3. CÓNICAS

En esta sección se realizará una descripción de los temas matemáticos que están vinculados en lastareas propuestas por el grupo de investigación. Se presentan las definiciones de parábola, elipse e hipérbola, primero como lugar geométrico y segundo a partir de la excentricidad; también, se realiza una descripción sobre la relación entre las ecuaciones de las cónicas como lugar geométrico y a partir de la excentricidad, para garantizar que las definiciones son equivalentes.

2.3.1. PARÁBOLA

Una definición de parábola como lugar geométrico

Una parábola es el lugar geométrico de los puntos P del plano de tal manera que su distancia a una recta fija l, llamada directriz, situada en el plano, es siempre igual a su distancia a un punto fijo F, llamado foco, en el plano y que no pertenece a la recta directriz l.

$$d(F,P) = d(F,l)$$

En la Figura 1, se presenta un ejemplo de la representación gráfica de una parábola y de la recta y el foco.

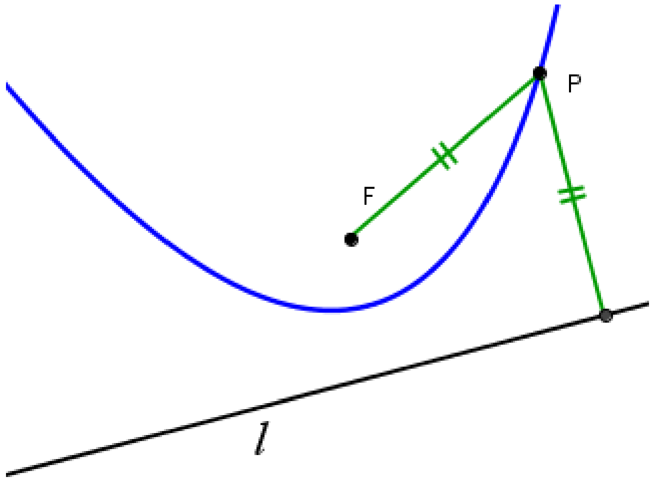

Figura 1. Representación gráfica de una parábola

En la Figura 2 se representan algunos elementos asociados a la parábola:

- El punto F corresponde al*foco*.
- La recta l, corresponde a la recta *directriz*.
- Una recta perpendicular a la recta directriz que pasa por Fcomo la$\overleftrightarrow{AF}$ recibe el nombre de *eje de simetría* de la parábola.
- El punto V de intersección entre la parábola y el eje de simetría, se llama *vértice*.
- El segmento que une dos puntos cualesquiera de la parábola, como el $\overline{BB_1}$, recibe el nombre de *cuerda*.
- Una cuerda de la parábola que contiene el punto F, como el $\overline{CC_1}$, se llama *cuerda focal*.
- Una cuerda de la parábola que contienen al punto F, perpendicular al eje de simetría, como el $\overline{LL_1}$, recibe el nombre de *lado recto.*

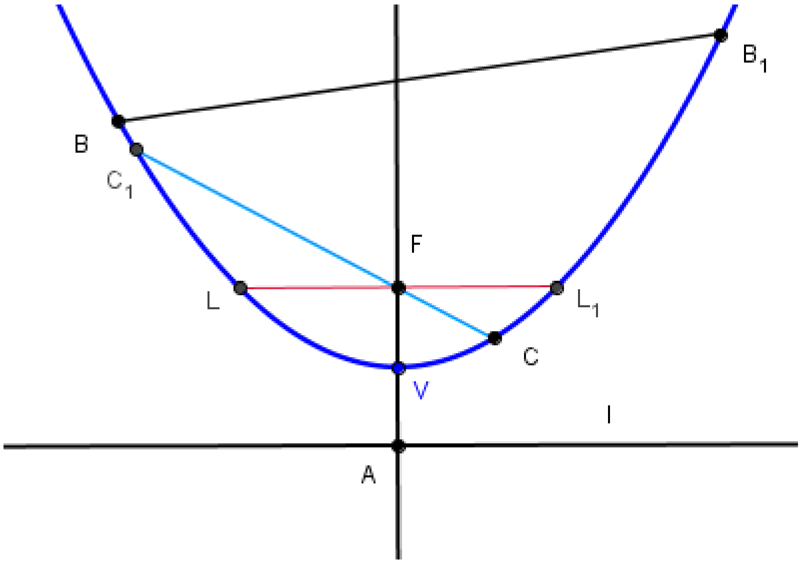

Figura 2. Elementos asociados a la parábola

Una representación algebraica de una parábola

Dada una parábola con foco F y recta directriz l, en el plano, le asignaremos un sistema coordenado de la siguiente manera: Se traza una recta perpendicular a la recta directriz l que pasa por el punto F, a la que se llama eje X. Sea el punto R la intersección del eje X y la recta directriz. Sea V el punto medio entre los puntos R y F; se traza la recta perpendicular al eje X que pasa por el punto V, la cual corresponde al eje Y. El punto V es la intersección entre los ejes coordenados, por tanto es el origen del sistema y tiene coordenadas $(0,0)$. Ahora bien, el punto F está sobre el eje X, los puntos que están sobre la $\overrightarrow{VF}$ serán los puntos positivos del eje X, las coordenadas del punto F serán $(p, 0)$. La recta directriz tiene por ecuación $x = -p$. Sea P un punto cualquiera de la parábola con coordenadas (x, y). Este debe satisfacer la condición geométrica:

$$d(F, P) = d(P, l)$$

En la Figura 3 se presenta la representación gráfica de la parábola en el sistema coordenado.

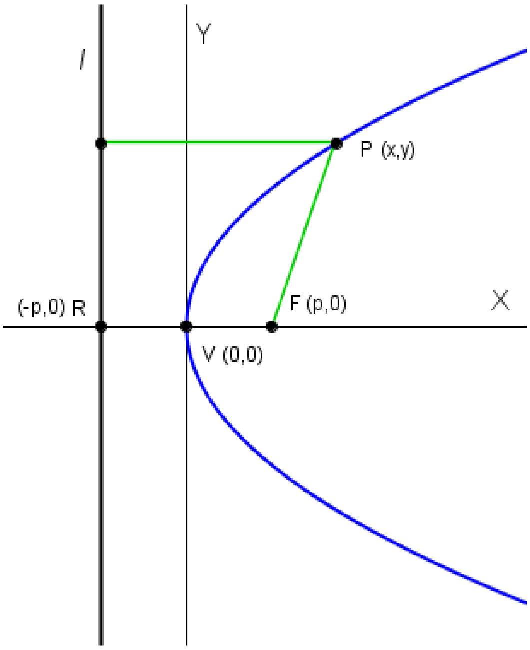

Figura 3. Representación gráfica de la parábola en el sistema coordenado

Ahora bien, tenemos que $d(F,P) = \sqrt{(x-p)^2 + y^2}$ y $d(\ P,l) = |x+p|$, por tanto:

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |x+p|$$

$$(x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2$$

$$y^2 = 4px$$

Definición de parábola a partir de la excentricidad

Dada una recta fija l llamada *recta directriz* y un punto fijo F llamado *foco*, no contenido en esa recta, se llama *cónica* al lugar geométrico de un punto P que se mueve en el plano de la recta l y el punto F, de tal manera que la razón $\frac{d(F,P)}{d(l,P)}$ es siempre igual a una constante positiva e, que se llama *excentricidad*.

$$\frac{d(F,P)}{d(l,P)} = e$$

Si$e = 1$ se obtiene una parábola.

En la Figura 4 se muestra la representación gráfica de una parábola a partir de la excentricidad.

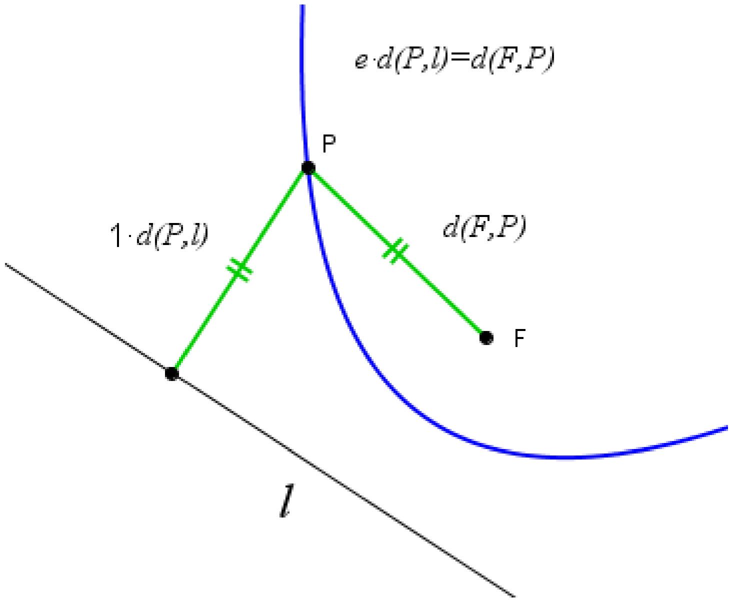

Figura 4. Representación gráfica de una parábola a partir de la excentricidad

Al igual que se trabajó en la definición de parábola como lugar geométrico, asignaremos un sistema coordenado para la parábola descrita a partir de excentricidad. Como partimos de los mismos elementos que en la definición de la parábola como lugar geométrico, la asignación del sistema coordenado quedará de la misma forma, por tanto el punto P satisface la siguiente condición:

$$\frac{d(F,P)}{d(l,P)} = 1$$

Ahora bien, tenemos que $d(F,P) = \sqrt{(x-p)^2 + y^2}$ y $d(\,P,l) = |x+p|$, por tanto:

$$\frac{\sqrt{(x-p)^2 + y^2}}{|x+p|} = 1$$

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |x+p|$$

$$(x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2$$

$$y^2 = 4px$$

Encontrando una equivalencia entre las ecuaciones de la parábola, como lugar geométrico y a partir de la excentricidad.

2.3.2. ELIPSE

Una definición de elipse como lugar geométrico

Dados dos puntos fijos F y F_1, y un número real $k > 0$, tal que $d(F, F_1) < k$. Una elipse es el lugar geométrico de un punto P que se mueve en un plano donde están los puntos F y $F1$ de tal manera que:

$$d(F, P) + d(F_1, P) = k$$

En la figura 5, se presenta un ejemplo de la representación gráfica de una elipse y sus puntos fijos.

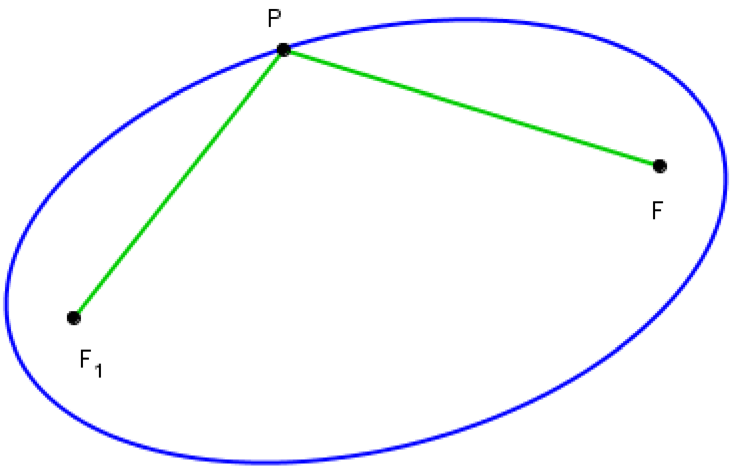

Figura 5. Representación gráfica de una elipse

En la Figura 6 se representan algunos elementos asociados a la elipse:

- Los dos puntos fijos F y F_1 se llaman *focos*.
- La recta que pasa por los focos, como la recta X, se llama *eje focal*.
- El eje focal corta la elipse en dos puntos V y V_1 llamados *vértices*.
- El segmento que une los vértices de la elipse, como el $\overline{VV_1}$ se llama *eje mayor*.
- El punto C es punto medio del eje mayor y se llama *centro de la elipse*.
- La perpendicular al eje focal que pasa por el punto C, como la recta Y, se llama *eje normal*.

- El eje normal corta la elipse en dos puntos A y A_1.
- El $\overline{AA_1}$ se llama *eje menor*.
- El segmento que une dos puntos cualesquiera de la elipse, como el $\overline{BB_1}$, se llama *cuerda*.
- La cuerda que pasa por los focos, como el $\overline{EE_1}$, se llama *cuerda focal.*
- Una cuerda focal perpendicular al eje focal como el $\overline{LL_1}$ se llama *lado recto*.
- Una cuerda que pasa por C, como el $\overline{DD_1}$, se llama *diámetro.*
- SiP es un punto cualquiera de la elipse, el$\overline{PF}$ y el $\overline{PF_1}$ se llaman *radios vectores*.

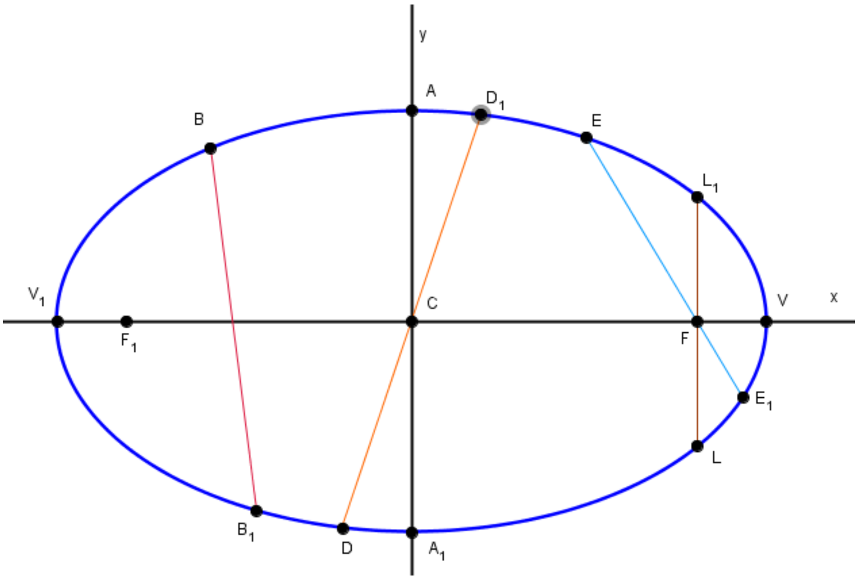

Figura 6. Elementos asociados a la elipse

Una representación algebraica de una elipse

Dada una elipse, con focos F y F_1, a la representación gráfica de la elipse le asignaremos un sistema coordenado de la siguiente manera: se traza la recta que pasa por los puntos F y F_1, que corresponde con el eje X, sea C el punto medio del $\overline{FF_1}$, se traza la recta perpendicular al eje X, que pasa por C, que corresponde al eje Y, por tanto el punto C es la intersección de los ejes coordenados y tiene coordenadas (0,0), los puntos que pertenecen a la$\overrightarrow{CF}$ serán los puntos positivos del eje X; los puntos F y F_1están sobre el eje X y tienen coordenadas $(c, 0)$ y $(-c, 0)$ respectivamente, siendo

$c > 0$. Sea P un punto cualquiera de la elipse con coordenadas (x, y), debe satisfacer la condición geométrica:

$$d(F, P) \; + \; d(F_1, P) = k$$

Ahora bien, tenemos que $d(F, P) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ y $d(F_1, P) = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, por tanto:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = k$$

Simplificando obtenemos:

$$4cx + k^2 = 2k\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$k^4 - 4k^2c^2 = 4k^2x^2 + 4k^2y^2 - 16x^2c^2$$

$$(k^2 - 4c^2)k^2 = x^2(4k^2 - 16c^2) + 4k^2y^2$$

$$\frac{4x^2}{k^2} + \frac{4y^2}{k^2 - 4c^2} = 1$$

Ahora bien, sean V y V_1 puntos de la elipse que están sobre el eje X, satisfacen la condición: $d(F, V) \; + \; d(F_1, V) = k$ y $d(F, V_1) \; + \; d(F_1, V_1) = k$respectivamente.

Igualamos y obtenemos que: $d(F, V) = d(F_1, V_1) \;\; y \;\; d(F_1, V) = d(F, V_1)$

$$d(V, V_1) = d(F, V) + d(F, V_1)$$

$$d(V, V_1) = k$$

Los puntos V y V_1 están sobre el eje X y tienen coordenadas $(a, 0)$ y $(-a, 0)$ respectivamente, siendo $a > c$. Entonces $d(V, V_1) = 2a$, por tanto $k = 2a$.

Sean A y A_1 los puntos de intersección de la elipse con el eje Y, satisfacen la condición: $d(F, A) \; + \; d(F_1, A) = 2a$ y $d(F, A_1) \; + \; d(F_1, A_1) = 2a$respectivamente, de tal forma que los puntos que pertenecen a la $\overrightarrow{OA}$, son los puntos positivos del eje Y.

Por ser el eje Y mediatriz de los puntos F y F_1tenemos que:

$$d(F, A) = d(F_1, A)$$

$$2d(F, A) = 2a$$

$$d(F, A) = a$$

Los puntos O, F y A forman un triángulo rectángulo y sean las coordenadas del punto $A\ (0, b)$, tenemos $b^2 = a^2 - c^2$. Lo mismo ocurre con el punto A_1el cual tendría como coordenadas $(0, -b)$.

Sustituyendo $k = 2a$ y $b^2 = a^2 - c^2$ en la ecuación de la elipse, quedaría de la siguiente manera:

$$\frac{4x^2}{4a^2} + \frac{4y^2}{4a^2 - 4c^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Donde a es la medida del semieje mayor de la elipse y b es la medida del semieje menor de la elipse. En la Figura 7 se presenta la representación gráfica de una elipse en el sistema coordenado.

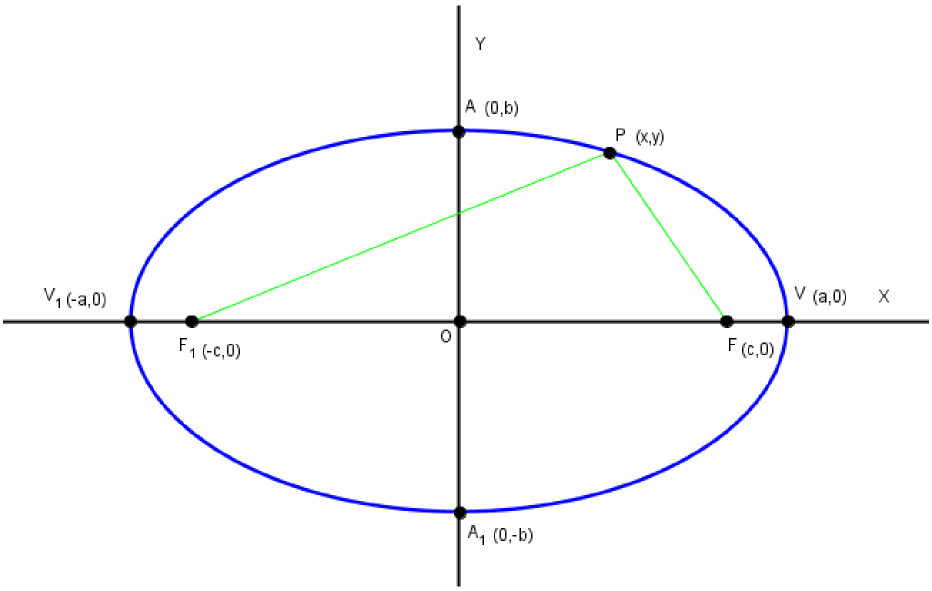

Figura 7. Representación gráfica de una elipse en el sistema coordenado

Las intersecciones de la elipse con el eje X, son los puntos V y V_1, que corresponden a los vértices de la elipse. El$\overline{VV_1}$, es el eje mayor de la elipse y su longitud es igual a $2a$. Se le llama semieje mayor al$\overline{OV}$ y al $\overline{OV_1}$ que son iguales a a.

Las intersecciones de la elipse con el eje Y, son los puntos A y A_1, que tienen como coordenadas $(0, b)$ y $(0, -b)$ respectivamente. El segmento $\overline{AA_1}$, es el eje menor de la elipse y su longitud es igual a $2b$. Se le llama semieje menor a $\overline{OA}$ y $\overline{OA_1}$ que son iguales a b.

Definición de elipse a partir de la excentricidad

Dada una recta fija l llamada *recta directriz* y un punto fijo F llamado *foco*, no contenido en esa recta, se llama *cónica* al lugar geométrico de un punto P que se mueve en el plano de la recta l y el punto F, de tal manera que la razón $\frac{d(F,P)}{d(l,P)}$ es siempre igual a una constante positiva e, que se llama *excentricidad*.

$$\frac{d(F,P)}{d(l,P)} = e$$

Si$0 < e < 1$ se obtiene una elipse.

En la Figura 8 se muestra la representación gráfica de una elipse a partir de la excentricidad.

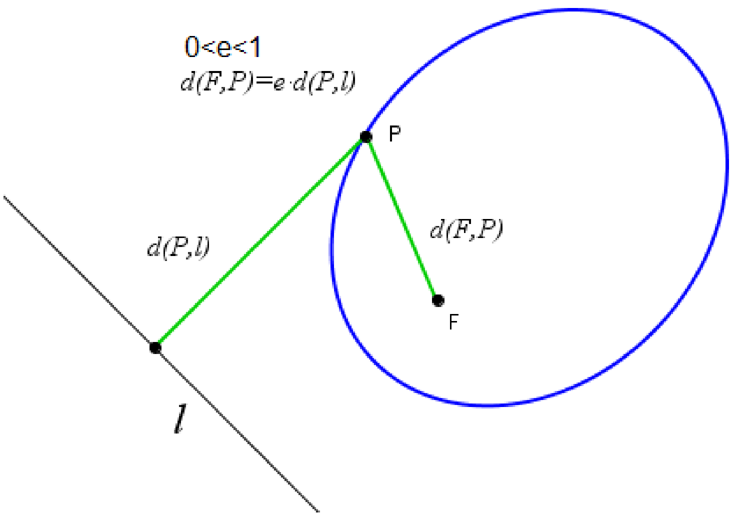

Figura 8. Representación gráfica de una elipse a partir de la excentricidad

Una representación algebraica de una elipse

Dada una elipse con foco F y recta directriz l, a la representación gráfica de la elipse le asignaremos un sistema coordenado, como se presenta en la Figura 9, de la siguiente manera: se traza la perpendicular a la recta directriz l que pasa por el punto F, que corresponde con el eje X. Sea V y V_1 los puntos de intersección de la elipse con el eje X. Obsérvese que estos puntos satisfacen la condición $d(F,V) = e \cdot d(l,V)$ y $d(F,V_1) = e \cdot d(l,V_1)$ respectivamente. Sea O el punto medio del $\overline{VV_1}$; se traza la recta perpendicular al eje X que pasa por el punto O, que a su vez corresponde con el eje Y del sistema coordenado; por tanto, el punto O es la intersección de los ejes coordenados y tiene coordenadas (0,0); los puntos que están sobre la$\overrightarrow{OF}$, son los puntos positivos del eje X, el punto Festá sobre el eje X, y tiene coordenadas $(c,0)$, siendo $c > 0$, los puntos V y V_1 también están sobre el eje X y tienen coordenadas $(a,0)$ y $(-a,0)$ respectivamente y la recta directriz por ser perpendicular al eje X tiene por ecuación $x = m$.

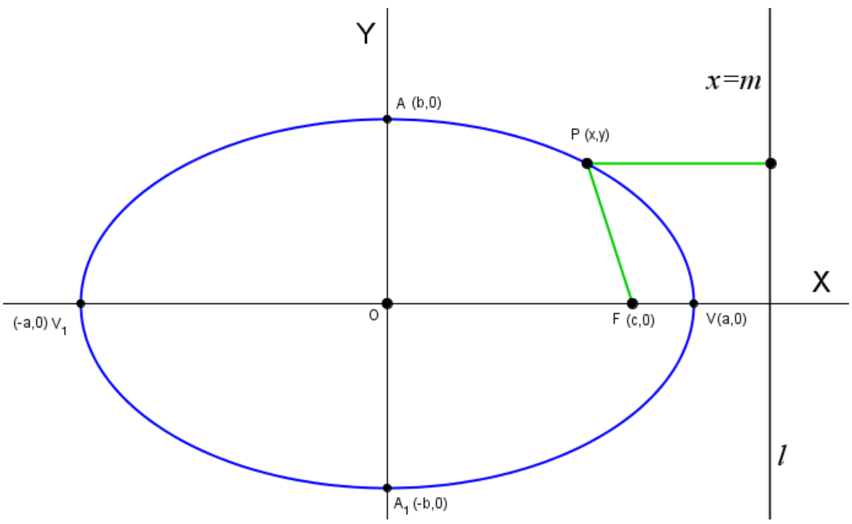

Figura 9. Representación gráfica de la elipse en el sistema coordenado a partir de la excentricidad

Sea P un punto cualquiera de la elipse con coordenadas (x,y), debe satisfacer la condición geométrica:

$$\frac{d(F,P)}{d(l,P)} = e$$

$$\frac{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{|x-m|} = e$$

$$\frac{(x-c)^2+y^2}{(x-m)^2}=e^2$$

$$(x-c)^2+y^2=e^2(x-m)^2$$

$$x^2(1-e^2)+2x(e^2m-c)+y^2=e^2m^2-c^2$$

Ahora bien, los puntos V y V_1 satisfacen la condición $d(F,V)=e\cdot d(V,l)$ y $d(F,V_1)=e\cdot d(l,V_1)$ respectivamente.

Se sabe que $d(\,O\,,\ F\,)=c,\ \ d(\,O\,,V\,)=a,\ d(\,O\,,\ V_1\,)=a\ \ y\, d(O,l)=m$ tenemos que:

$$d(F,V)=a-c$$

$$d(V,l)=m-a$$

$$d(F,V_1)=c+a$$

$$d(l,V_1)=a+m$$

Por tanto

$$\frac{a-c}{m-a}=e\ \ y\ \ \frac{a+c}{m+a}=e$$

$$\frac{a-c}{m-a}=\frac{a+c}{m+a}$$

$$a^2=mc$$

$$m=\frac{a^2}{c}$$

Entonces obtenemos que

$$\frac{a-c}{\frac{a^2}{c}-a}=e$$

$$\frac{a-c}{\frac{a^2}{c}-a}=e$$

$$\frac{a-c}{\frac{a^2-ca}{c}}=e$$

$$\frac{c(a-c)}{a(a-c)} = e$$

$$\frac{c}{a} = e$$

Como $0 < e < 1$, entonces $c < a$ y $m > c$.

Sean los puntos A y A_1 las intersecciones de la elipse con el eje Y, tal que los puntos que pertenecen a la $\overrightarrow{OA}$ son los puntos positivos del eje Y, los puntos A y A_1 deben satisfacer la condición $\frac{d(F,A)}{d(l,A)} = e$ y $\frac{d(F,A_1)}{d(l,A_1)} = e$. Por ser A y A_1 puntos del eje Y, tenemos que:

$$d(l,A) = d(l,O)$$

$$d(l,A) = m$$

Por tanto

$$\frac{d(F,A)}{m} = e$$

$$\frac{d(F,A)}{m} = \frac{c}{a}$$

$$d(F,A) = \frac{cm}{a}$$

$$d(F,A) = \frac{c\,\frac{a^2}{c}}{a}$$

$$d(F,A) = a$$

Los puntos O, F y A forman un triángulo rectángulo, las coordenadas del punto A son $(0,b)$, tenemos $b^2 = a^2 - c^2$. Lo mismo ocurre con el punto A_1 el cual tendría como coordenadas $(0,-b)$.

Sustituyendo$\frac{c}{a} = e$, $m = \frac{a^2}{c}$ y $b^2 = a^2 - c^2$ en la ecuación de la elipse a partir de la excentricidad tenemos:

$$x^2(1-e^2) + 2x(e^2m - c) + y^2 = e^2m^2 - c^2$$

$$x^2\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)+2x\left(\frac{c^2}{a^2}\frac{a^2}{c}-c\right)+y^2=\frac{c^2}{a^2}\frac{a^4}{c^2}-c^2$$

$$x^2\left(\frac{a^2-c^2}{a^2}\right)+2x(c-c)+y^2=a^2-c^2$$

$$x^2\left(\frac{a^2-c^2}{a^2}\right)+y^2=a^2-c^2$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Ahora bien, encontramos una equivalencia entre las ecuaciones de la elipse, como lugar geométrico y a partir de la excentricidad, pues en este caso, al igual que en la ecuación de la elipse como lugar geométrico, encontramos que a corresponde a la medida del semieje mayor de la elipse y b corresponde con la medida del semieje menor de la elipse.

2.3.3. HIPÉRBOLA

Una definición de elipse como lugar geométrico

Dados dos puntos fijos F y F_1, y un número real $a > 0$, tal que $d(F, F_1) > a$,una hipérbola es el lugar geométrico de un punto P que se mueve en un plano de tal manera que:

$$|d(F,P)-\ d(F_1,P)|=k$$

En la Figura 10, se presenta un ejemplo de una representación gráfica de una hipérbola.

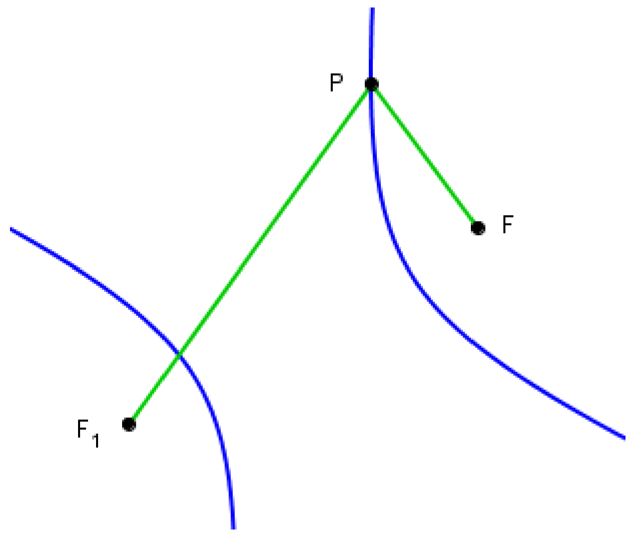

Figura 10. Representación gráfica de una hipérbola

En la Figura 11 se representan algunos elementos asociados a la hipérbola:

- Los puntos F y F_1 reciben el nombre de *focos*.
- La recta X que pasa por los focos se llama *eje focal*, el eje focal corta la hipérbola en dos puntos V y V_1 llamados vértices.
- El $\overline{VV_1}$ se llama *eje transverso*;
- El punto C se llama *centro* y es punto medio del eje transverso.
- La recta Y que es perpendicular al eje focal X y que pasa por C se llama *eje normal*.
- El segmento que une dos puntos cualesquiera de la hipérbola, como el$\overline{BB_1}$ se llama *cuerda*.
- La cuerda que pasan por alguno de los focos, como el$\overline{EE_1}$ se llama *cuerda focal.*
- Una cuerda focal perpendicular al eje focal como$\overline{LL_1}$ se llama *lado recto*.
- Una cuerda que pasa por el centro C como el$\overline{DD_1}$ se llama *diámetro.*
- Si P es un punto cualquiera de la hipérbola el$\overline{PF}$ y el $\overline{PF_1}$ se llaman *radios vectores*.
- Los puntos A y A_1 son puntos que están sobre el eje normal de la hipérbola, tal que $d(C,F) = d(V,A) = d(V,A_1)$.
- La recta m es una recta que pasa por el centro de la hipérbola (punto C), y el punto de intersección entre la perpendicular a la recta X que pasa por V_1y la

perpendicular a la recta Y que pasa por el punto A. La recta n es una recta que pasa por el centro de la hipérbola, (punto C), y el punto de intersección entre la perpendicular a la recta X que pasa por V y la perpendicular a la recta Y que pasa por el punto A. Las rectas m y n se llaman *asíntotas de la hipérbola.*

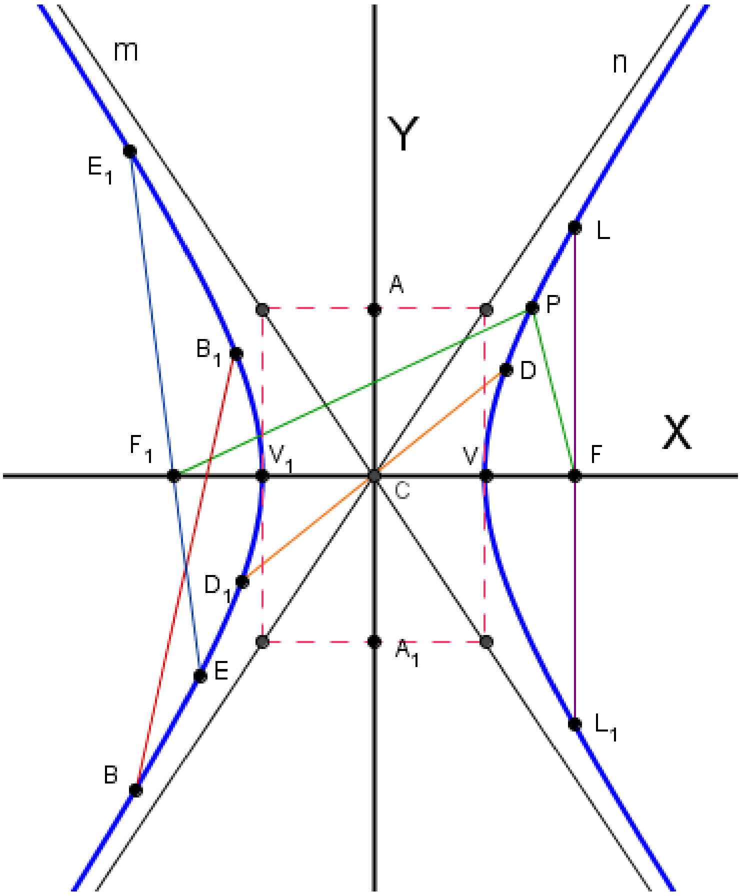

Figura 11. Elementos asociados a la hipérbola

Representación algebraica de una hipérbola

Dada una hipérbola con focos F y F_1 , a la representación gráfica de la hipérbola le asignaremos un sistema coordenado de la siguiente manera: se traza la recta que pasa por los puntos F y F_1, que corresponde con el eje X, sea Cel punto medio entre el$\overline{FF_1}$, se traza la recta perpendicular al eje X, que paso por C, que corresponde al eje Y, por tanto el punto C es la intersección de los ejes coordenados y tiene coordenadas (0,0);los puntos F y F_1están sobre el eje X, y tienen coordenadas $(c, 0)$ y $(-c, 0)$

respectivamente, siendo $c > 0$. Sea P un punto cualquiera de la hipérbola con coordenadas (x, y), debe satisfacer la condición geométrica:

$$|d(F, P) - d(F_1, P)| = k$$

La condición geométrica es equivalente a:

$$(d(F, P) - d(F_1, P))^2 = k^2$$

Ahora bien, tenemos que $d(F, P) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ y $d(F_1, P) = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, por tanto:

$$\left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = k^2$$

$$-4cx - k^2 = 2k\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$-4k^2x^2 - 4k^2y^2 + 16x^2c^2 = -k^4 + 4k^2c^2$$

$$x^2(16c^2 - 4k^2) - 4k^2y^2 = (4c^2 - k^2)k^2$$

$$\frac{4x^2}{k^2} - \frac{4y^2}{4c^2 - k^2} = 1$$

Ahora bien, sean V y V_1 puntos de la elipse que están sobre el eje X satisfacen la condición: $|d(F, V) - d(F_1, V)| = k$ y $|d(F, V_1) - d(F_1, V_1)| = k$respectivamente.

Igualamos y obtenemos que: $d(F, V) = d(F_1, V_1)$ y $d(F_1, V) = d(F, V_1)$

$$d(V, V_1) = |d(F, V_1) - d(F, V)|$$

$$d(V, V_1) = |d(F, V_1) - d(F_1, V_1)|$$

$$d(V, V_1) = k$$

Los puntos V y V_1 están sobre el eje X y tienen coordenadas $(a, 0)$ y $(-a, 0)$ respectivamente, siendo $a < c$. Entonces $d(V, V_1) = 2a$, por tanto $k = 2a$.

Sean A y A_1 puntos del eje Y, con coordenadas $(0, b)$ y $(0, -b)$ respectivamente, talque $b > 0$ y $d(V, A) = d(V, A_1) = c$. Los puntos A y A_1deben cumplir esas condiciones para que se cumpla que $b^2 = c^2 - a^2$, siendo $a < c$, con el propósito de sustituir $k = 2a$ y $b^2 = a^2 - c^2$ en la ecuación de la hipérbola; quedaría de la siguiente manera:

$$\frac{4x^2}{k^2} - \frac{4y^2}{4c^2 - k^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

En la Figura 12 se presenta la representación gráfica de una hipérbola en el sistema coordenado.

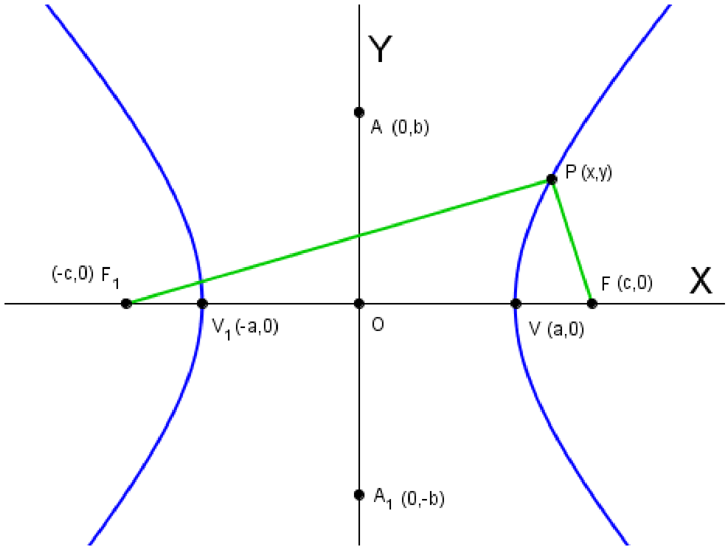

Figura 12. Representación gráfica de una hipérbola en el sistema coordenado

Las intersecciones de la hipérbola con el eje X, son los puntos V y V_1, que corresponden a los vértices de la elipse. El $\overline{VV_1}$, es el eje transverso de la hipérbola y su longitud es igual a $2a$. Se le llama semieje transverso al $\overline{OV}$ y al $\overline{OV_1}$ que son iguales a a.

Aunque no hay intersecciones de la hipérbola con el eje Y, nombramos los puntos A y A_1, que tienen como coordenadas $(0, b)$ y $(0, -b)$ respectivamente y son de gran importancia, pues son los puntos extremos del eje conjugado de la hipérbola; este eje conjugado está directamente relacionado con las asíntotas de la hipérbola, pues son (a, b) las coordenadas del punto por donde pasa una de las asíntotas y son $(-a, b)$ las coordenadas del punto por donde pasa la otra asíntota de la hipérbola. La longitud del eje conjugado es igual a $2b$. Se le llama semieje conjugado a $\overline{OA}$ y $\overline{OA_1}$ que son iguales a b.

Definición de hipérbola a partir de la excentricidad

Dada una recta fija l llamada *recta directriz* y un punto fijo F llamado *foco*, no contenido en esa recta, se llama *cónica* al lugar geométrico de un punto P que se mueve en el plano de la recta l y el punto F, de tal manera que la razón $\frac{d(F,P)}{d(l,P)}$ es siempre igual a una constante positiva e, que se llama *excentricidad*.

$$\frac{d(F,P)}{d(l,P)} = e$$

Si $e > 1$ la cónica correspondiente es una hipérbola.

En la Figura 13 se presenta la representación gráfica de una hipérbola a partir de la excentricidad.

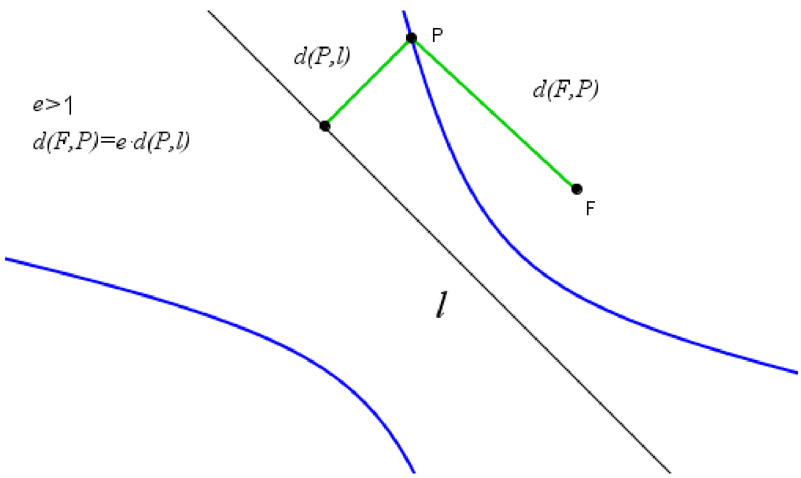

Figura 13. Representación gráfica de una hipérbola a partir de la excentricidad

Representación algebraica de una hipérbola

Dada una hipérbola con foco F y recta directriz l, a la representación gráfica de la hipérbola le asignaremos un sistema coordenado, como se presenta en la Figura 14, de la siguiente manera: se traza la perpendicular a la recta directriz l que pasa por F, que corresponde con el eje X. Sean V y V_1 los puntos de intersección de la hipérbola con el eje X, que satisfacen la condición $d(F,V) = e \cdot d(l,V)$ y $d(F,V_1) = e \cdot d(l,V_1)$, $e > 1$ respectivamente. Sea O el punto medio entre los puntos V y V_1; se traza la recta perpendicular al eje X que pasa por el punto O, que a su vez corresponde con el eje Y del sistema coordenado, por tanto, el punto O es la intersección de los ejes coordenados y tiene coordenadas $(0,0)$, el punto Festá sobre el eje X, y tiene coordenadas $(c,0)$, siendo $c > 0$, los puntos V y V_1 también están sobre el eje X y tienen coordenadas $(a,0)$ y $(-a,0)$ respectivamente, y la recta directriz por ser perpendicular al eje X tiene por ecuación $x = m$.

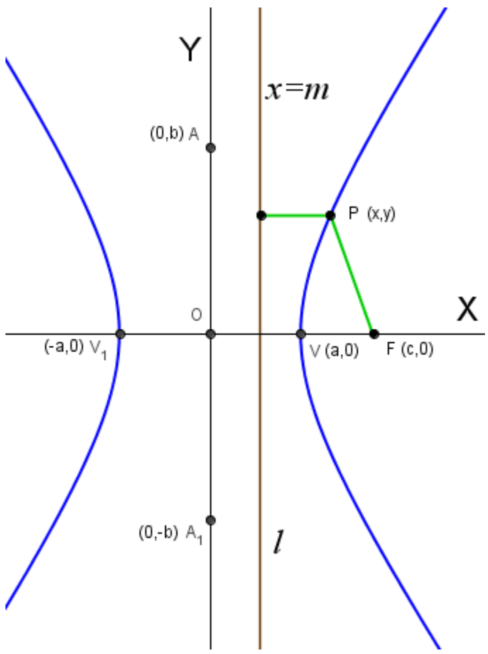

Figura 14. Representación gráfica de la hipérbola en el sistema coordenado a partir de la excentricidad

Sea P un punto cualquiera de la hipérbola con coordenadas (x,y), debe satisfacer la condición geométrica:

$$\frac{d(F,P)}{d(l,P)} = e$$

$$\frac{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{|x-m|} = e$$

$$\frac{(x-c)^2 + y^2}{(x-m)^2} = e^2$$

$$(x-c)^2+y^2=e^2(x-m)^2$$

$$x^2(1-e^2)+2x(e^2m-c)+y^2=e^2m^2-c^2$$

Al igual que en la elipse, podemos encontrar de la misma manera las siguientes relaciones:

$$m=\frac{a^2}{c} \quad y \quad \frac{c}{a}=e$$

Sin embargo, es importante aclarar que en este caso como $e>1$ entonces $c>a$.

Sean A y A_1 puntos del eje Y, con coordenadas $(0,b)$ y $(0,-b)$ respectivamente, talque $b>0$ y $b^2=c^2-a^2$, siendo $a<c$.

Sustituyendo en la ecuación de la hipérbola tenemos:

$$x^2(1-e^2)+2x(e^2m-c)+y^2=e^2m^2-c^2$$

$$x^2\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)+2x\left(\frac{c^2}{a^2}\frac{a^2}{c}-c\right)+y^2=\frac{c^2}{a^2}\frac{a^4}{c^2}-c^2$$

$$x^2\left(\frac{a^2-c^2}{a^2}\right)+2x(c-c)+y^2=a^2-c^2$$

$$x^2\left(\frac{a^2-c^2}{a^2}\right)+y^2=a^2-c^2$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{-b^2}=1$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Ahora bien, encontramos una equivalencia entre las ecuaciones de la hipérbola, como lugar geométrico y a partir de la excentricidad, pues en este caso, al igual que en la ecuación de la hipérbola como lugar geométrico, el valor de a corresponde a la medida del semieje transverso y el valor de b corresponde con la medida del semieje conjugado.

3. METODOLOGÍA

Para el desarrollo del trabajo de grado se contó con la información obtenida por el grupo de investigación de uno de los grupos de estudiantes que desarrollaron las tareas propuestas. El grupo que se tomó como referencia para la elaboración de este trabajo estaba conformado por 4 estudiantes que estaban realizando el curso Geometría Analítica en el primer semestre del año 2012, y quienes ya habían cursado asignaturas como Aritmética, Sistemas Numéricos, Elementos de Geometría y Geometría Plana; cursos que tratan temas asociados a los de la actividad propuesta por el grupo de investigación y que tienen como propósito común desarrollar actividad matemática.

El desarrollo del trabajo de grado contó, en primer lugar, con el estudio de algunos referentes teóricos. El primero de ellos consistió en el modelo de argumento de Toulmin, descrito en su libro "*The uses of argument*", con el fin de identificar los argumentos surgidos en el desarrollo de las tareas por parte de los estudiantes yestudiar de forma detallada la argumentación, puesto que, como se plantea en el proyecto, en el estudio detallado de los argumentos se reconocen vínculos entre los procesos de argumentar y conjeturar.

Paralelo a la indagación del modelo Toulmin, se realizó el estudio matemático de las definiciones de las secciones cónicas como lugar geométrico y a partir de la excentricidad, debido a que este es el contenido matemático de las tareas propuestas por el grupo de investigación.

También fue necesario desarrollar las tareas propuestas, siguiendo las mismas indicaciones que las realizadas por los estudiantes, con el fin conocer en detalle en qué consistía la tarea y familiarizarse con los contenidos y demás aspectos de las tareas, haciendo la exploración de los *applet* diseñados e identificando el conocimiento matemático involucrado en estas.

En segundo lugar, se realizó la revisión de la información dada por el grupo de investigación. Fueron 10 videos los elaborados por los estudiantes, en donde dan solución a la tarea propuesta, cada uno con una duración aproximada de 11 minutos.

Para la revisión de la información en primer lugar se observaron los 10 videos para tenerun panorama general del desarrollo de las tareas. Posteriormente se volvió a realizar la observación de los videos, con la diferencia que en esta ocasión se realizó una relatoría de los momentos donde surgieron opiniones, discusiones, afirmaciones, preguntas entre los estudiantes y diferentes caminos a seguir para solucionar la tarea, con el propósito de destacar aquellas ideas importantes y tener claro el contexto en el que se fue desarrollando la tarea.

En este proceso se observó que mucha de la información descrita en la relatoría no era relevante para el análisis. Por lo tanto, se determinó realizar un filtrado de la información y realizar algunas transcripciones textuales de los comentarios de los estudiantes, particularmente en los momentos donde se realizaban afirmaciones, justificaciones, encontraban relaciones, propiedades y observaban patrones o regularidades; además, se tomó nota del tiempo de recorrido de los videos cuando ocurrían estos eventos, para no volver a ver todos los videos, sino los momentos donde surgió información relevante para el análisis.

Posteriormente se hizo lectura de las transcripciones textuales y revisión de esos momentos importantes de los videos para identificar los argumentos que emergieron; para ello se fueron descartando todos los comentarios y afirmaciones que carecían de elementos justificatorios, también se descartaron aquellas ideas que no fueron desarrolladas en su totalidad, dejando finalmente toda la información donde surgían justificaciones, validaban sus afirmaciones, encontraban relaciones y observaban patrones y regularidades.

Con esta información, se inició el análisis realizando una caracterización amplia de la tarea formulada en el proyecto de investigación; posteriormente se identificaron los argumentos siguiendo el modelo de Toulmin sobre argumentación, realizando una descripción detallada de los contextos en los que surgieron los argumentos y de la estructura de los mismos, es decir, se hizo una descripción de los datos, garante y afirmación de cada uno de ellos.Luego se relacionaron los argumentos con las características de las tareas a partir de su garante y por último, se describieron las etapas del proceso de conjeturar logrado por los estudiantes en la elaboración de cada uno de los argumentos, el cual se reporta en el análisis de la información de este documento.

4. ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

En este capítulo se presenta el análisis de la información, para ello,se realiza inicialmente una descripción detallada de la tarea formulada en el proyecto de investigación.En segundo lugar, se realiza la identificación de los argumentos elaborados por los estudiantes en el desarrollo de la tarea y se describe el proceso en el que surge cada uno de ellos.Posteriormente se caracterizan los argumentos según su garante y se describen las etapas del proceso de conjeturar logrado por los estudiantes en la elaboración de cada uno de los argumentos; todo lo anterior, con el fin encontrar relaciones entre los procesos de conjeturar y los procesos de argumentar,e identificar las características de la tarea que promueven el desarrollo de procesos de argumentar.

4.1. TAREA DISEÑADA

La tarea estaba conformada por cuatro preguntas y dos archivos de Geogebra que contienen objetos matemáticos representados de forma geométrica y algebraica, estos archivos recibieron el nombre de *applet*. Es necesario, en primer lugar, realizar una descripción de los *applet* diseñados y posteriormente realizar la descripción de las preguntas para conocer en detalle la tarea.A continuación se presentan las características de los *applet*.

Se diseñaron dos *applet*, el primero es llamado "Excentricidad definitiva" y el segundo "Otro de cónicas".

El applet "Excentricidad definitiva", que también llamaremos *applet* 1, fue diseñado con el fin de apoyar las posibles conjeturas de los estudiantes en relación con laspropiedades de las cónicas a partir del concepto de excentricidad.

Este primer *applet* contiene: un deslizador[1] llamado e que toma valores en el intervalo $[0,5]$, una representación gráfica de una cónica, él nombre de esta, los puntos $F1$ y $F2$ que corresponden a los focos, un punto C que pertenece a la cónica, su recta directriz, un punto G que pertenece a la recta directriz, los segmentos $\overline{CG}$, $\overline{CF1}$ y $\overline{CF2}$, las medidas de los segmentos $\overline{CG}$, $\overline{CF1}$ y $\overline{CF2}$, la ecuación de la recta directriz y tres deslizadores nombrados "a, b y c" que varían entre el intervalo$[-5,5]$.

En la Figura 15 se muestran algunas capturas de pantalladel *applet* "Excentricidad definitiva".

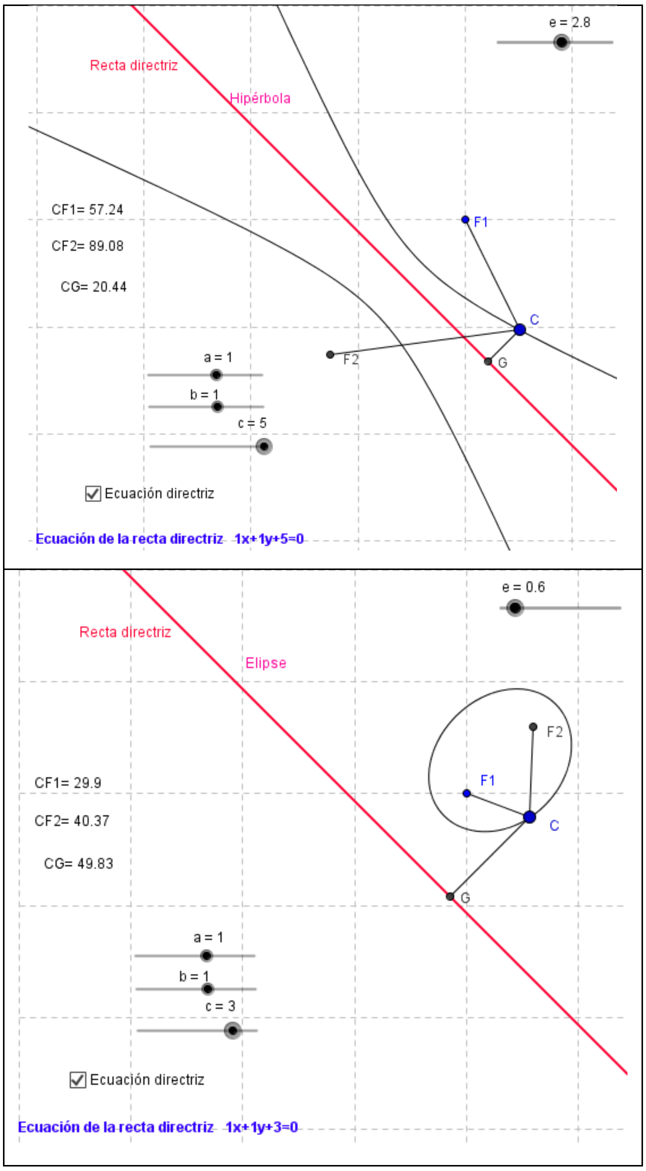

Figura 15. Captura de pantalla del applet 1, "Excentricidad definitiva"

[1]Los deslizadores en el software Geogebra, son elementos que se pueden construir en un applet y que presentan un dominio de valores reales que se pueden definir de antemano, con el objetivo de hacer variar un parámetro que está relacionado con propiedades geométricas de los elementos del applet.

Cuando se mueve el deslizador e cambia la representación gráfica de la cónica, ya sea a una elipse, a una hipérbola o a una parábola; también cuando se mueve este deslizador hay cambios en las medidas de los segmentos $\overline{CG}$, $\overline{CF1}$ y $\overline{CF2}$. La relación entre esos objetos es $\frac{d(C,G)}{d(C,F1)} = e$, esto permite evidenciar que el valor de e representa la excentricidad de la cónica.

Cuando se mueven los deslizadores $a, b,$ y c, se generan movimientos en la recta directriz, esto a su vez, produce cambios en la representación de la cónica y en las medidas del $\overline{CG}$, $\overline{CF1}$ y $\overline{CF2}$. Estos deslizadores corresponden a los coeficientes de la ecuación de la recta directriz, donde el deslizador a y b son los coeficientes de las variables x y y respectivamente. Por último, cuando se mueve el punto C cambian las medidas del $\overline{CG}$, $\overline{CF1}$ y $\overline{CF2}$.

El *applet* "Otro de cónicas", que también llamaremos applet 2, fue diseñado pensando en apoyar las posibles conjeturas de los estudiantes, en particular las relacionadas con las propiedades de la elipse y de la hipérbola como lugar geométrico.

El diseño del *applet* contiene: un deslizador llamado k que varía en el intervalo $[0,5]$, una representación gráfica de una cónica, los puntos A y C que corresponden a los focos, un punto E que pertenece a la cónica, el $\overline{AE}$ y el $\overline{CE}$ y la medida de estos dos segmentos. En la Figura 16 se muestran algunas capturas de pantalla del applet "Otro de cónicas".

Los elementos del *applet* que se pueden manipular son el deslizador k y los puntos A, C y E. Cuando se manipula el deslizador k cambia la representación gráfica de la cónica a una elipse o a una hipérbola, y también cambian las medidas del $\overline{AE}$ y $\overline{CE}$; así también, cuando se mueven los puntos A y C se producen los mismos cambios. Y cuando se mueve el punto E cambian las medidas de los segmentos $\overline{AE}$ y $\overline{CE}$. La relación que se tiene entre esos objetos es $d(A,E) + d(C,E) = k$ cuando la sección cónica es una elipse y $|d(A,E) - d(C,E)| = k$ cuando la sección cónica es una hipérbola, evidenciando que en este *applet* se tiene como contenido matemático la definición de las cónicas como lugar geométrico.

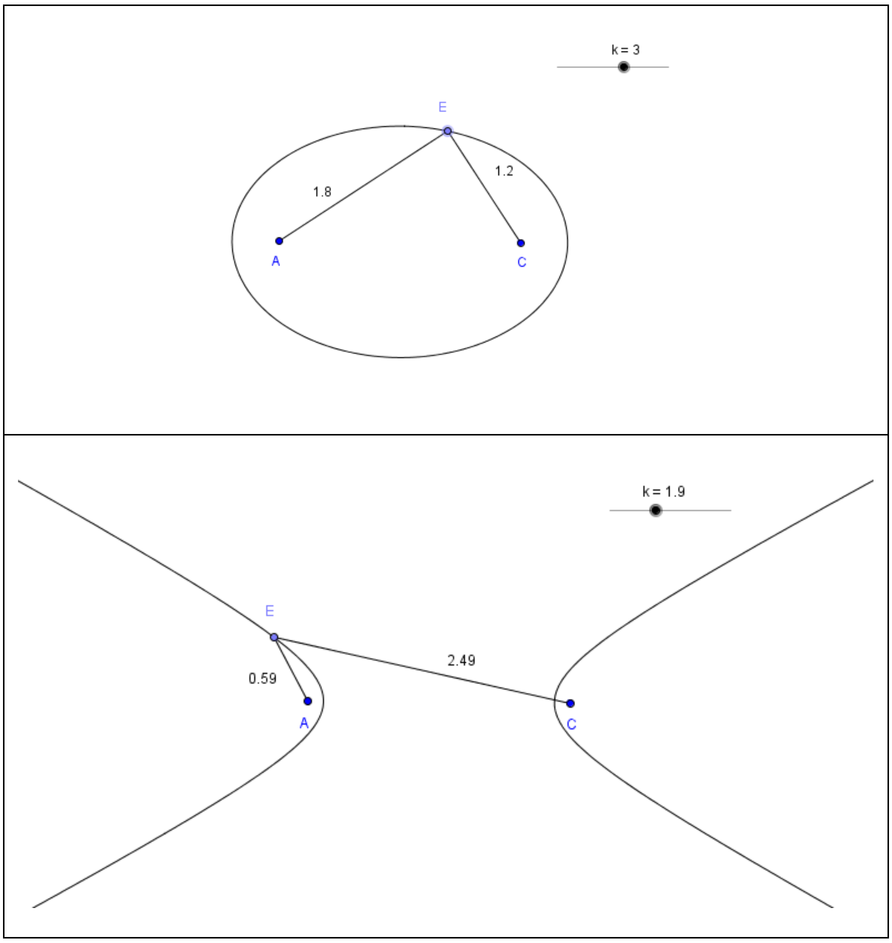

Figura 16. Captura de pantalla applet 2, "Otro de cónicas"

En cuanto a la descripción de la tarea, esta inicia con el siguiente enunciado: " *Explora los applet Excentricidad definitiva" y "Otro de cónicas" e identifica los objetos que son variables. Describe tus hallazgos*".

Esta tarea tenía la intención que los estudiantes iniciaran con la exploración de los *applet*, identificando los elementos que se pueden manipular y observando los cambios que ocurren al mover algún elemento; además, tenía la intención que los estudiantes hicieran un panorama general del contenido matemático que se involucra en la tarea.

La manera como se esperaba que se realizara la exploración de los applet es por medio de la herramienta "Elige y Mueve" de Geogebra, con la cual podían elegir cualquier elemento del *applet* y mover algunos de ellos. Se esperaba que los estudiantes a partir de la exploración describierande manera verbal cuáles fueron esos primeros hallazgos.

La segunda instrucción de la tarea se enuncia de la siguiente manera: "*Completa la tabla 1 tomando los datos del applet "Excentricidad definitiva". Sugerencia: Si no se pueden ubicar los valores dados en la tabla, cambiarlos por algunos que sean próximos a estos".Ecuación de la recta directriz.*$x + y + 1 = 0$. En la Tabla 1 se presenta la tabla que los estudiantes debían completar.

La segunda tarea consistía en completar la Tabla 1 con algunos valores del deslizador *e* y algunos valores de las medidas de los segmentos que aparecen en el applet "Excentricidad definitiva". Para ello los estudiantes en primer lugar debían fijar los valores de los deslizadores en$a = 1, b = 1$ y $c = 1$. Posteriormente, moviendo el deslizador e y el punto C debían colocar los valores de las medidas de los segmentos según indica la tabla y completar aquellos valores que faltaran.

Esta segunda tarea buscaba centrar la atención de los estudiantes en las definiciones geométricas de las cónicas como lugar geométrico y a partir de la excentricidad, por medio de posibles relaciones entre los valores de la Tabla 1.

El tercer ítem se enuncia así: "*En los applet Excentricidad definitiva y Otro de cónicas y en la tabla, para cada una de las curvas ¿qué cambia y cómo es ese cambio? ¿Cuáles relaciones encuentras entre las variables de la tabla y/o de los applet?*"

La actividad tenía como propósito que los estudiantes encontraran algunas relaciones a partir de las observaciones de los applet realizadas en la primera tarea y también a partir de completar la Tabla 1 en la segunda tarea.

Para dar solución al tercer ítem, los estudiantes debían comparar lo realizado en la primera y segunda tarea e iniciar con un proceso detallado de observación para encontrar algunas relaciones.

El último ítem de la tarea se enuncia de la siguiente manera: "*¿Qué garantiza que las relaciones encontradas sean válidas?".*La intención de esta última tarea era que los estudiantes justificaran las relaciones encontradas en el punto anterior. Para esto, ellos debían buscar diferentes herramientas que les permitan argumentar lo expresado en la tercera tarea, ya sea por medio de los applet, del desarrollo de las tareas o de elementos externos a estos como libros, documentos, información en internet u otros medios.

E	**CG**	**CF1**	**CF2**	**Objeto geométrico generado**
1	**18,03**	**18,03**	**-----**	**Parábola**
1	**42,5**			**Parábola**
1	**62,56**	**62,56**		
		51		**Parábola**
				Parábola
1				
0,4	**40**		**18.35**	**Elipse**
0,4	**60.04**	**24.02**		
	42		**17.55**	**Elipse**
0,5	**72.12**	**36.06**	**12.02**	**Elipse**
0,5	**50**		**23,08**	**Elipse**
0,5		**24.22**	**23.86**	
0,8		**32.24**	**128.04**	
0,8	**162.8**	**130.24**	**30.04**	
	136		**51.48**	**Elipse**
1,5	**15.2**	**22.8**	**109.35**	
		96	**182.55**	**Hipérbola**
1,5	**116.5**		**261.3**	
2				
	40	**80**		**Hipérbola**
2	**26**		**100.08**	
3	**11.01**	**33.03**	**60.08**	**Hipérbola**
3	**22.1**		**93.34**	**Hipérbola**
3		**51**	**78.04**	
3		**150.3**	**177.35**	**Hipérbola**
			----	**Parábola**
				Elipse
				Hipérbola

Tabla 1. Tabla propuesta por el grupo de investigación para completar con información del applet “Excentricidad definitiva”

4.2. IDENTIFICACIÓN DE LOS ARGUMENTOS Y PROCESO DE ARGUMENTAR

A continuación se hace la identificación de los argumentos formulados por los estudiantes en el desarrollo de las actividades bajo el modelo de Toulmin.

Los estudiantes inicialmente hicieron lectura de los puntos delatarea en donde se presentan algunas dificultades en la comprensión de los enunciados de esta. Sin embargo, inician el desarrollo del primer ítem, haciendo la exploración del *applet* "*Excentricidad definitiva*" en donde de inmediato afirman que los objetos que son variables son aquellos elementos del *applet* que se pueden mover, como por ejemplo los puntos y los deslizadores, donde los deslizadores que aparecen son los nombrados e, a, b y c, tal como se muestra en la Figura 17.

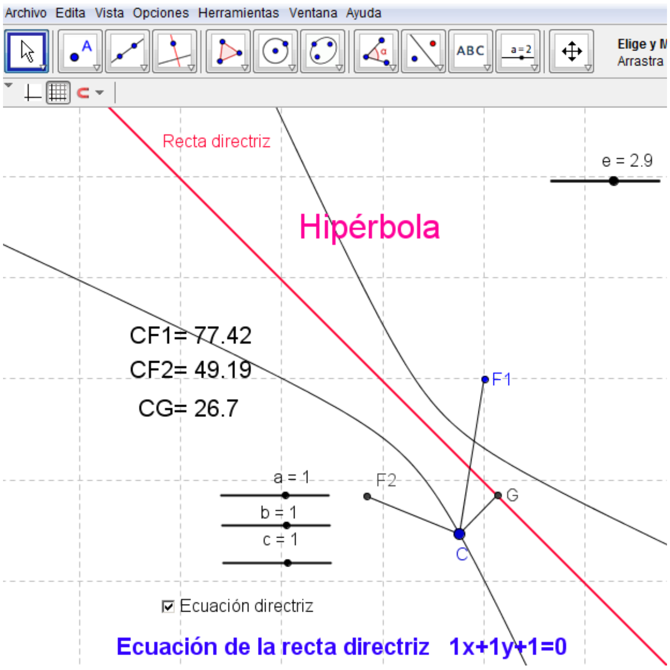

Figura 17. Applet "Excentricidad definitiva"

Uno de los aspectos relevantes, que surgió en el inicio de la exploración, es el hecho que de forma inmediata los estudiantes llegan a la siguiente afirmación: *Cuando* $e < 1$ *es elipse, cuando* $e = 1$*es una parábola y cuando* $e > 1$ *es hipérbola*. El resultado anterior es producto de que los estudiantes mueven el deslizador e y observan el cambio de la sección cónica en los momentos en que e toma algunos valores característicos. A continuación se presentan en la Figura 18capturas de pantalla de la exploración de los estudiantes.

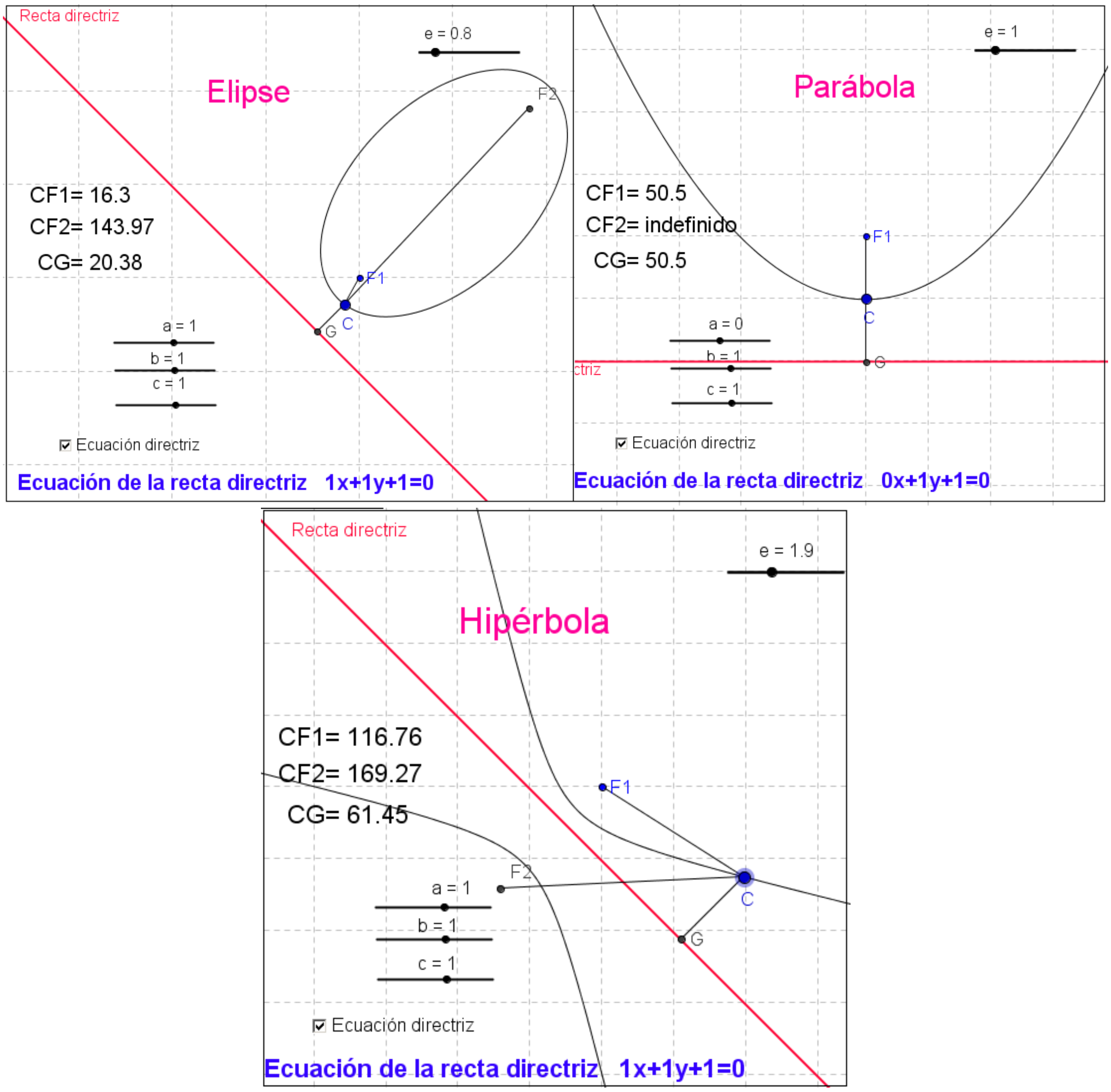

Figura 18. Secciones cónicas para diferentes valores de e

Con esto se identifica un primer argumento según el modelo de Toulmin. En cuanto a los datos podemos decir que en este caso los estudiantes contaban con valores del deslizador e, que se encontraban en el intervalo [0,5] y también cuentan con la representación gráfica de la cónica. En cuanto a la garantía (G: 1) podemos decir que está dada por la exploración que realizan los estudiantes al mover el deslizador e en el intervalo [0,5], quienes observan que cuando el valor de e está entre (0,1) la cónica que se genera es una elipse, sí$e = 1$ la cónica que se genera es una parábola y cuando e está entre (1,5] la cónica que se genera es una hipérbola. Un resumen de este argumento se presenta en la Tabla 2.

Datos	***Garantía***	***Afirmación***
Valores del deslizador **e** entre $[\mathbf{0}, \mathbf{5}]$. Representación gráfica de la cónica presentada en el *applet*.	Propiedad observada en la exploración de los datos en el *applet* 1. (G:1)	*Cuando* $e < 1$ *es elipse. Cuando* $e = 1$*es una parábola. Cuando* $e > 1$ *es hipérbola*

Tabla 2. Argumento 1

Posteriormente los estudiantes continúan moviendo los deslizadores a, b y c, fijando un valor de e, en este caso $e = 4.5$ generando una hipérbola, luego mueven el deslizador a que está en el intervalo $[-5,5]$, observan que cuando a está entre $[-5, 0)$ la recta directriz presenta una inclinación como se muestra en la Figura 19, cuando $a = 0$ es una recta horizontal como se observa en la Figura 20 y cuando a está entre $(0,5]$ la recta directriz presenta otra inclinación como se presenta en la Figura 21.

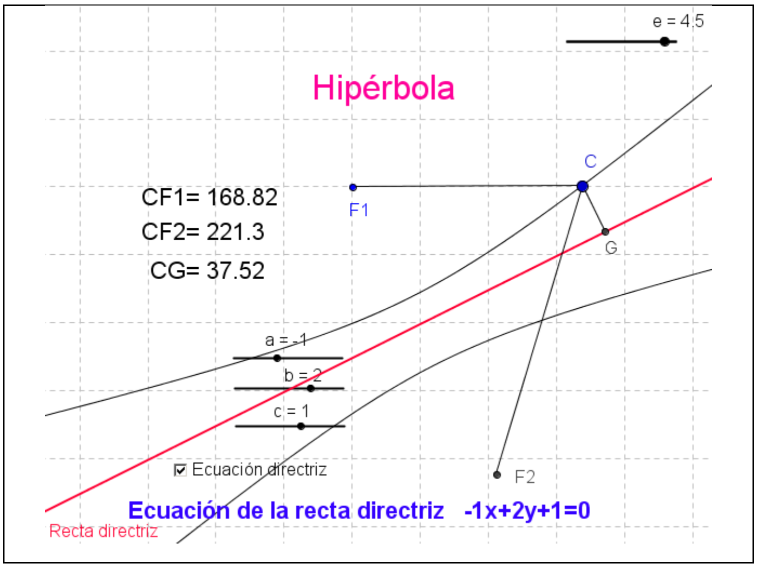

Figura 19. Los deslizadores en a=-1, b=2, c=1 y e=4.5. La cónica es una hipérbola

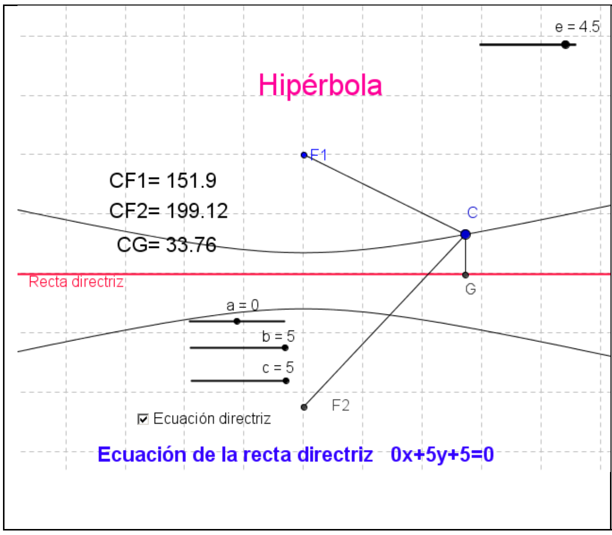

Figura 20. Los deslizadores en a=5, b=5, c=5 y e=4.5. La cónica es una hipérbola

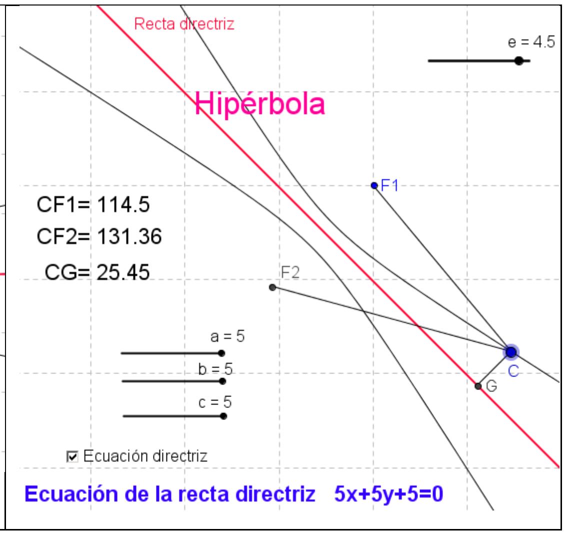

Figura 21. Los deslizadores en a=0, b=5, c=5 y e=4.5. La cónica es una hipérbola

Posteriormente mueven el deslizador b y observan que al igual que con el deslizador a, la inclinación de la recta directriz cambia, en particular cuando $b = 0$ la recta directriz es una recta vertical,(afirman los estudiantes). Encontrada una relación entre los deslizadores a y b, y la posición de la recta directriz, los estudiantes proceden a realizar operaciones algebraicas con la ecuación de la recta directriz, específicamente, despejan y de la ecuación$ax + by + c = 0$,obteniendo$y = \frac{-a}{b}x - c$

Llegan así a la conclusión que la pendiente de la recta directriz es igual a $\frac{-a}{b}$. La anterior descripción corresponde al garante (G: 2) del argumento que se resume en la Tabla 3.

Datos	***Garantía***	***Afirmación***
La ecuación de la recta directriz. Los coeficientes que acompañan la variable x y y de la ecuación de la recta directriz que corresponde a los deslizadores$a$ y b respectivamente. La representación gráfica de la recta directriz	Propiedad observada en la exploración de los datos en el *applet* 1, al realizar cálculos algebraicos. (G:2)	*Los deslizadores a y b definen la inclinación de la directriz de tal forma que la pendiente de la recta es igual a* $\frac{-a}{b}$

Tabla 3. Argumento 2

Para continuar identificando los objetos variables en los applet, los estudiantes fijan inicialmente una cónica, en este caso la elipse, colocando el deslizador e en un valor menor que 1, mueven el punto Cy observan que este siempre está sobre el lugar geométrico de la cónicacomo se muestra en la Figura 22.

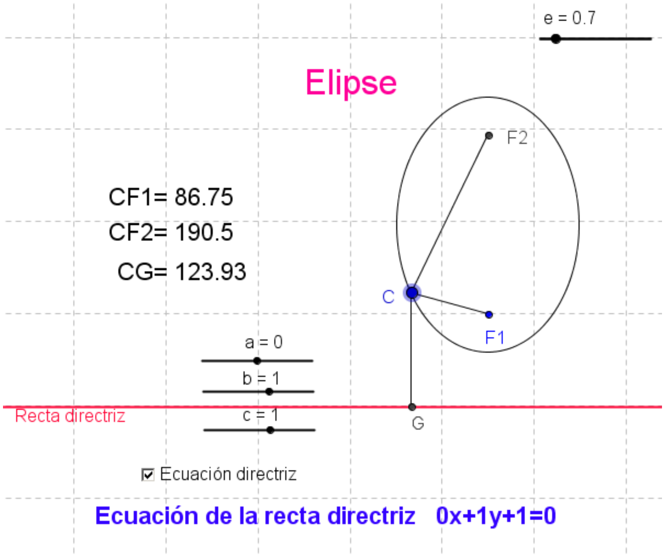

Figura 22. Punto C sobre la elipse

Luego para comprobar que sucede lo mismo con las demás cónicas, cambian la excentricidad a $e = 1$, mueven el punto C y observan que también siempre está sobre el lugar geométrico como se indica en la Figura 23.

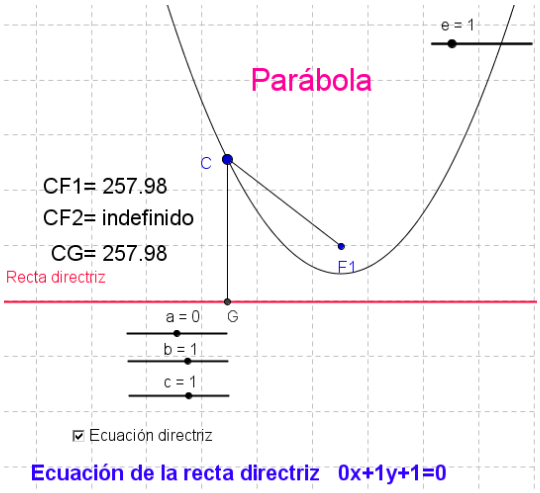

Figura 23. Punto C sobre la parábola

Por último, cambian la excentricidad a $e = 3.7$, mueven el punto C y observan que también este está siempre sobre el lugar geométrico como se observa en la figura 24. Los estudiantes concluyen que C es un punto de la cónica, no importando cuál sea esta.

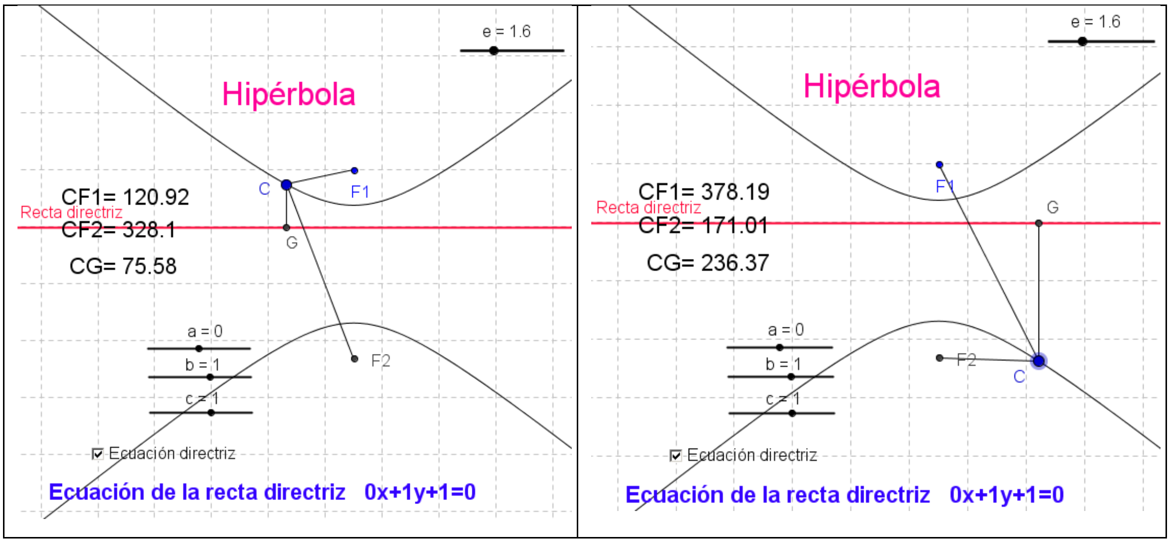

Figura 24. Punto C sobre la hipérbola

Los estudiantes observan que únicamente cuando se mueven los deslizadores, se producen cambios en las representaciones graficas de las cónicas. La siguiente es la forma en la que los estudiantes realizan verbalmente la descripción de las variables de los applet: *"el deslizador e es una variable que modifica la excentricidad de las cónicas y los deslizadores a, b y c son variables que modifican los coeficientes de la ecuación de la recta directriz"*.

Posteriormente se inicia un nuevo estudio relacionado con la variable e, fijándola en $e = 1$, es decir, el caso en el que el lugar geométrico corresponde a una parábola, con el objetivo de realizar una exploración de esta cónica en particular.

El primer hallazgo encontrado por los estudiantes fue la equidistancia que hay al relacionar las distancias entre el punto C que está contenido en la curva y el foco $F1$ de la parábola y la distancia perpendicular a la recta directriz que hay desde C hasta un punto G que pertenece a la recta directriz, como se indica en la Figura 25.

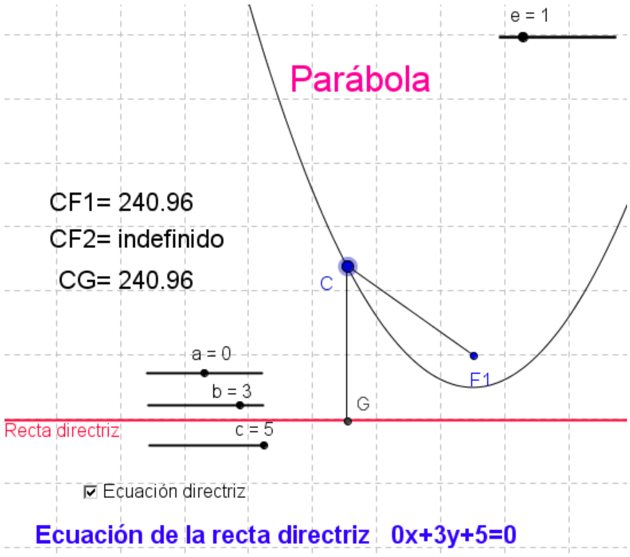

Figura 25. Análisis de la medida de los segmentos en la parábola

La anterior exploración realizada por los estudiantes, arrojó una afirmación, que puede ser descrita bajo el modelo de Toulmin, distinguiendo en este caso que los elementos dados corresponden básicamente a las medidas del$\overline{CF1}, \overline{CG}$ y $\overline{CF2}$ que se encuentran especificadas en el *applet*; por otro lado el garante (G:3) corresponde al patrón geométrico que logran determinar después de hacer observaciones de diferentes ubicaciones en el plano para C.La conclusión fue manifestada como: "*La distancia perpendicular desde el punto C que está en el lugar geométrico a la recta directriz, es igual a la distancia desde C hasta el foco $F1$*", es decir, que $d(C, F1) = d(C, G)$.En la Tabla 4 se presenta la estructura del argumento.

Datos	Garantía	Afirmación
Representación gráfica dela cónica con su foco y su recta directriz, $\overline{CF1}$, $\overline{CG}$, $d(C, F1)$ y $d(C, G)$,	Relaciónobservada al realizar la exploración del applet 1. (G:3)	*La distancia perpendicular desde el punto C que está en el lugar geométrico a la recta directriz, es igual a la distancia desde C hasta el foco $F1$*

Tabla 4. Argumento 3

Posteriormente los estudiantes proceden a desarrollar el segundo punto de la tarea que consiste en completar los valores de la tabla a partir de las medidas de los segmentos del *applet* 1. Este procedimiento es para los estudiantes un poco complicado de desarrollar puesto que intentan poner los valores exactos y en algunos casos no les es posible, por lo tanto, deciden cambiar algunos de los valores que están fijos en la Tabla 1 por otros más cercanos. En esta ocasión el desarrollo de la tarea por parte de los estudiantes carece de afirmaciones pues se dedican únicamente a completar las medidas de la Tabla 1, y no realizan comentarios al respecto.

Completada la Tabla 1, los estudiantes inician con el desarrollo del numeral 3 delatarea; los estudiantes inician la búsqueda de relaciones entre los valores de la Tabla 1, realizando sumas, restas, multiplicaciones y divisiones entre estas medidas; en esta búsqueda uno de los estudiantes encuentra que al multiplicar la medida del segmento CG por el valor de e el resultado es igual a la medida del segmento $CF1$; los estudiantes prueban la relación para todos los casos de la Tabla 1observando que efectivamente se cumple. En la Figura 26 se observa el momento en el que los estudiantes efectúan las operaciones con los valores de la Tabla 1.

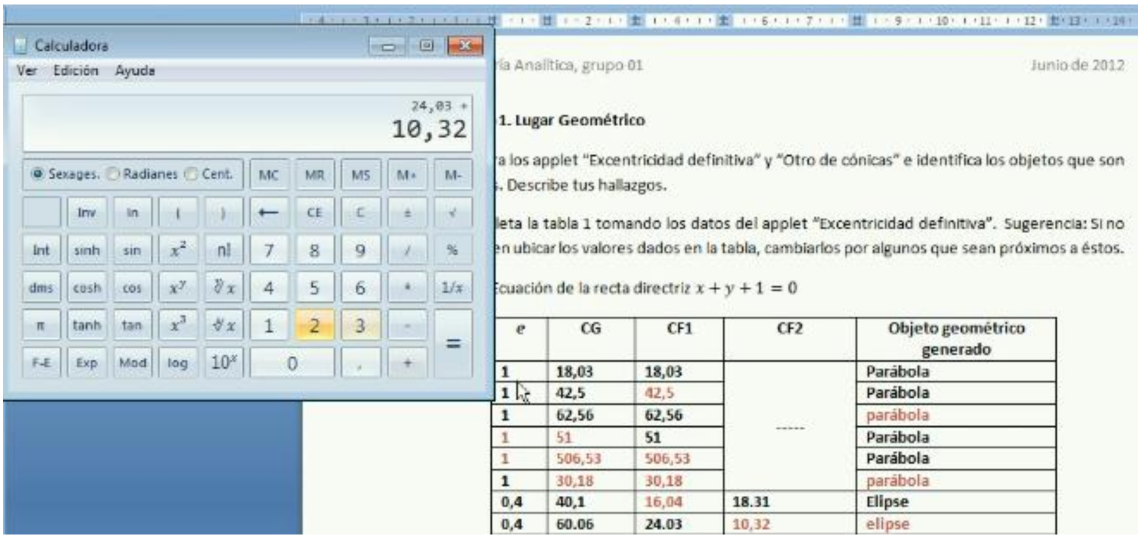

Figura 26. Captura de pantalla en el que los estudiantes efectúan operaciones con los valores de la tabla

Sin embargo, los estudiantes quieren verificar que la relación encontrada en la tabla se cumple para cualquier caso en el*applet* 1.Para ello, los estudiantes colocan el deslizador $e = 1$, generando una parábola, observando que efectivamente se cumple la relación$CG * e = CF1$. En la figura 27 se muestran algunas capturas de pantalla de momentos en el que los estudiantes hacen observaciones al mover el punto C y observar que se cumple la relación encontrada.

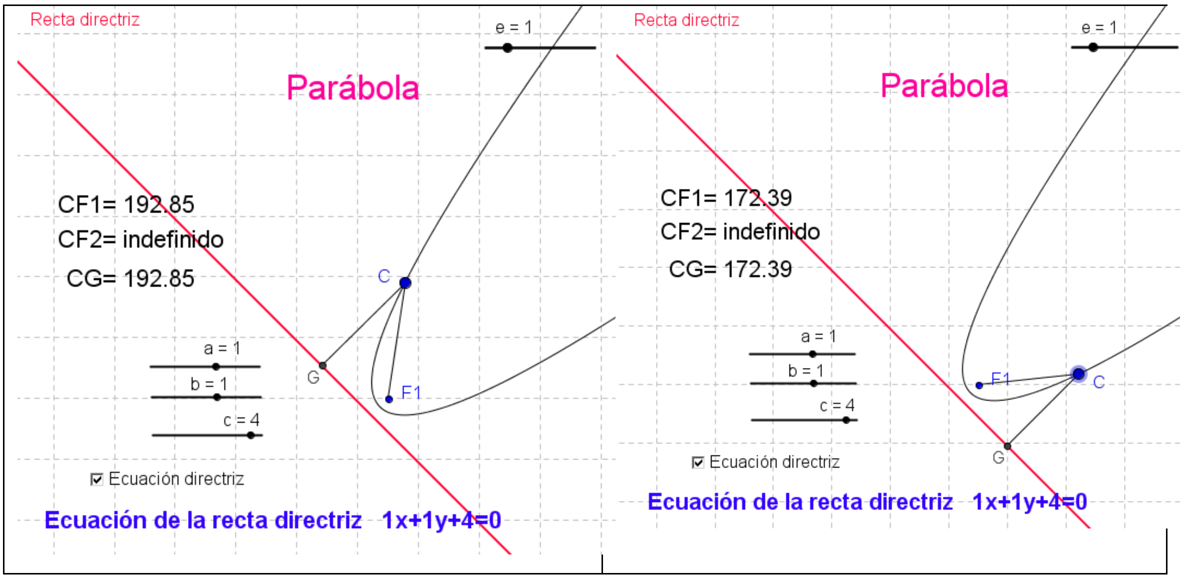

*Figura 27. CG*e = CF1 en la parábola*

Los estudiantes consideran necesario que se debe probar esta relación para las demás cónicas, es decir, para la elipse y para la hipérbola. Colocado el valor del deslizador e en $e = 0.7$, se genera una elipse; los estudiantes proceden a realizar el producto entre el valor del deslizador e y la medida del segmento CG que en ese momento es 82.66, verifican que para este caso también se cumple; que el resultado de este producto es la medida del segmento $CF1$ que en ese momento es 57,86.

$$0.7 * 82,66 = 57,66$$

En la Figura 28 se observa una captura de pantalla del momento de la exploración.

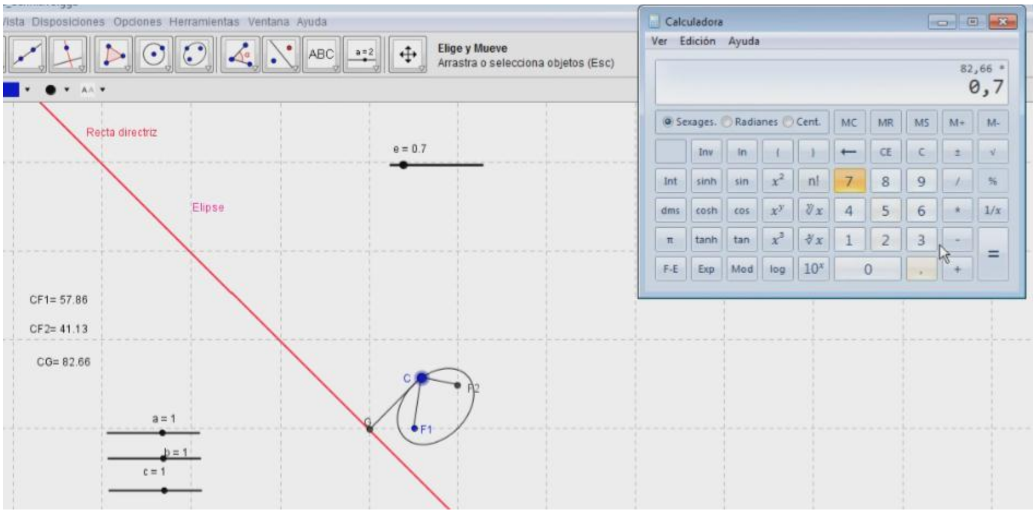

Figura 28. $CG * e \;=\; CF1$*en la elipse*

Luego colocan el valor del deslizador en $e = 3.1$ y se genera una hipérbola, multiplican este valor por la medida del segmento CG que en ese momento es 21,49 y verifican que el producto es igual a la medida del segmento $CF1$ que en ese momento es 66.62.

$$3.1 \,*\, 21.49 \;=\; 66.62$$

Los estudiantes afirman que la relación encontrada se cumple para cualquiera de las tres cónicas. En la figura 29 se muestra una captura de pantalla del momento de exploración en la hipérbola.

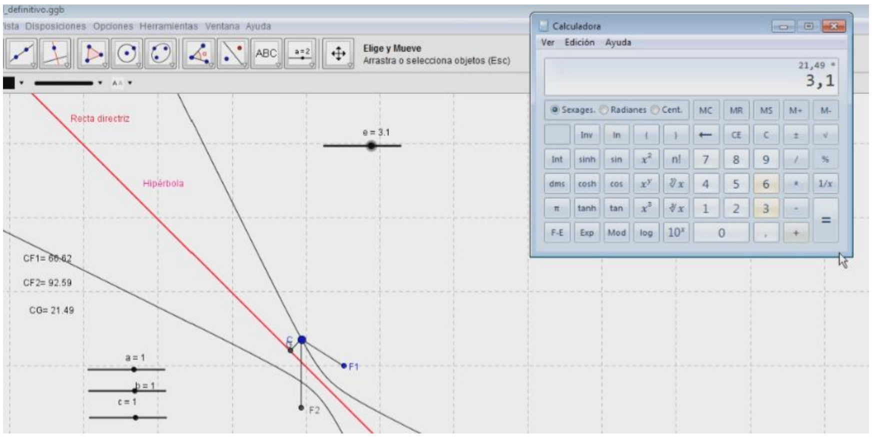

Figura 29. $CG * e = \; CF1$*en la hipérbola*

Bajo el modelo de Toulmin la estructura del argumento sería el siguiente: Los datos son las medidas de los segmentos CG, $CF1$ y el valor de la excentricidad (deslizador e), la garantía (G:4) son las operaciones que realizan los estudiantes con las medidas de los segmentos que hay en la tabla y posteriormente en el applet 1, las cuales permiten ver que la relación encontrada se cumple en los casos estudiados, y por último, la afirmación es que para cualquiera de las tres cónicas se cumple que $e * CG = CF1$. La estructura del anterior argumento se sintetiza en la Tabla 5.

Datos	***Garantía***	***Afirmación***
Los valores de la Tabla 1 del segundo punto de la tarea. La representación gráfica de la cónica, las medidas de los segmentos CG y $CF1$ y el valor del deslizador $e$del applet 1.	Relación encontrada en los valores de la Tabla 1 y en la exploración del applet 1 al realizar cálculos aritméticos. (G:4)	*"$CG * e = CF1$, se cumple para cualquiera de las tres cónicas"*

Tabla 5. Argumento 4

Los estudiantes inician la exploración del *applet*"Otro de cónicas" moviendo el deslizador k y los puntosA, C y E, identificando de forma inmediata que en este *applet* no se generan parábolas sino únicamente elipses e hipérbolas. En búsqueda de relaciones entre las medidas de los segmentos proceden a colocar el deslizador $k = 1$ y a mover los puntos A, C y E como se muestra en la Figura 30.

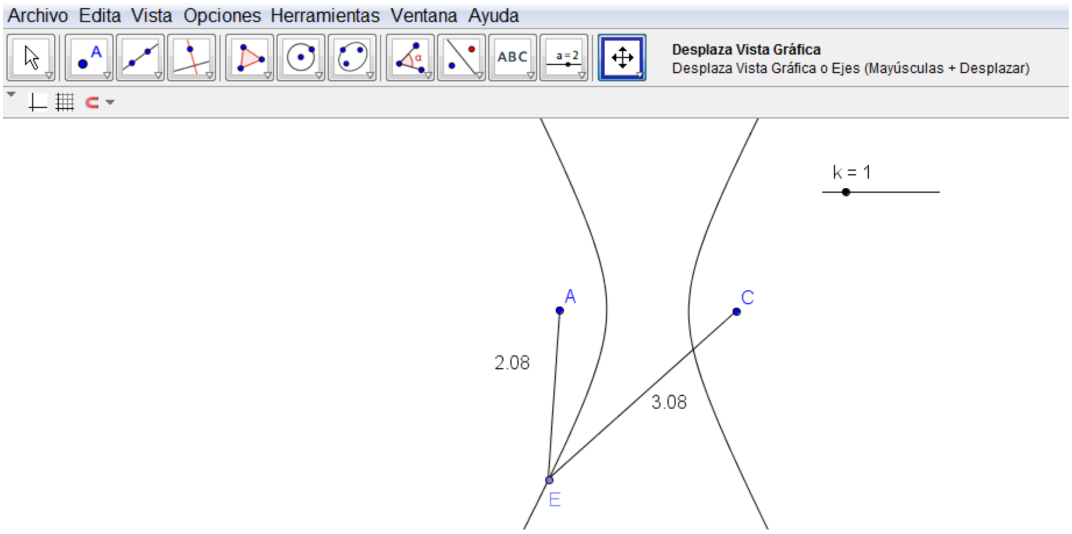

Figura 30. Representación de una hipérbola en el applet "Otro de cónicas"

Los estudiantes observan que al separar los puntos A y C la cónica que se genera es una hipérbola, pero cuando los puntos se acercan, la cónica que se genera es una elipse. Este hecho los lleva a construir el$\overline{CA}$ y tomar la medida de este, luego fijan un valor del deslizador ($k = 3$) y mueven los puntos A y C.En lasFiguras 31 y 32 se observa el segmento construido con su respectiva medida y el cambio que hay al mover los puntos A y C.

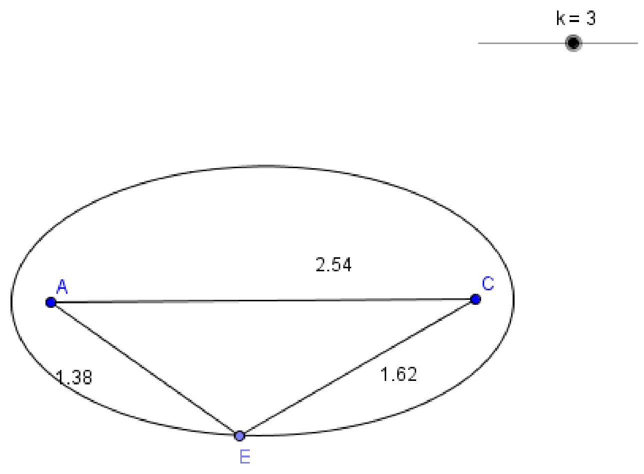

Figura 31. Applet "Otro de cónicas", construcción del segmento CA.

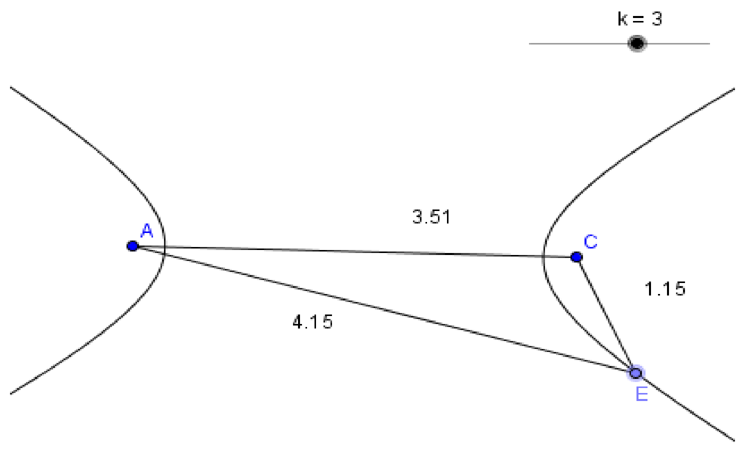

Figura 32. Applet "Otro de cónicas", construcción del segmento CA

Los estudiantes identifican varios casos en los quecuando la medida del $\overline{AC}$ es mayor que el valor del deslizador k, la cónica que se genera es una hipérbola. Como se muestra en la Figura 33.

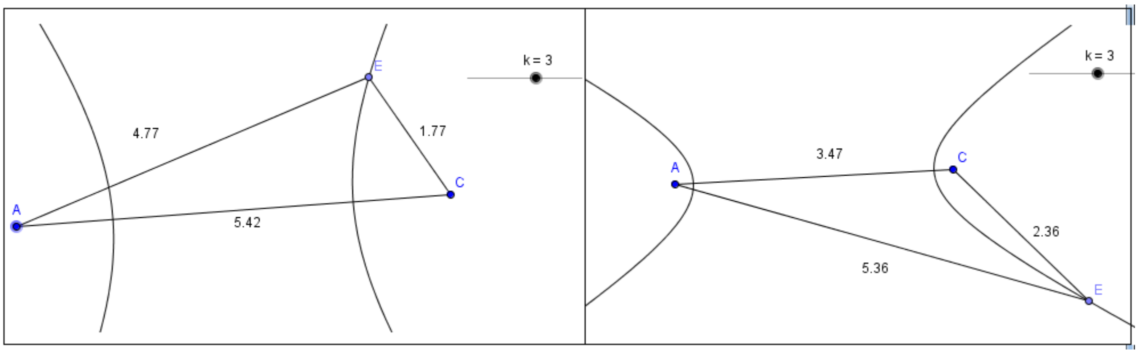

Figura 33. Applet 2, representación de la hipérbola cuando d(A, C)>k.

También, identificaronvarios casos en los que si la medida del $\overline{AC}$ es menor que el valor de$k$, la cónica que se genera es una elipse. Como se muestra en la Figura 34.

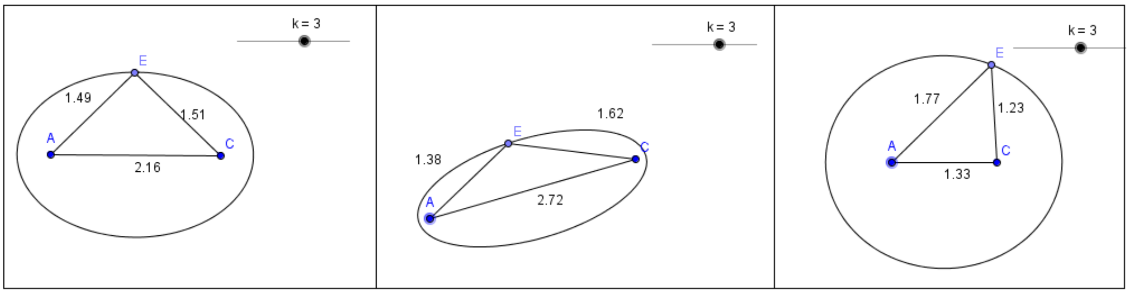

Figura 34. Applet 2, representación de la elipse cuando d(A, C) <k.

Estas observaciones conducen a los estudiantes a afirmar que "*Si $d(A, C) > k$ entonces la cónica que se genera es una hipérbola.Si$d(A, C) < k$ entonces la cónica que se genera es una elipse*".En la estructura del argumento se observa que el garante (G: 5)corresponde a los casos anteriormente descritos, donde visualizan que efectivamente para los casos observados se cumple la relación encontrada. En la Tabla 6 se presenta la estructura del argumento.

Datos	***Garantía***	***Afirmación***
Representación gráfica de la cónica, el valor del deslizador k y la medida del segmento $\overline{AC}$ que fue construido en el applet 2.	Relación observada en la exploración de los datos a partir de una construcción geométrica realizada en el *applet* 2. (G:5)	*Si $d(A, C) > k$ entonces la cónica que se genera es una hipérbola.Si $d(A, C) < k$ entonces la cónica que se genera es una elipse.*

Tabla 6. Argumento 5

Posteriormente, los estudiantes buscan relaciones entre las medidas de los segmentos que se pueden visualizar en el *applet* 2, para ello colocan el deslizador $k = 1$yutilizando la calculadora, empiezan a realizar sustracciones y adiciones de las medidas de los segmentos AE y BE.

En este proceso los estudiantes identificaron algunos casos en los que se cumple que la suma de $d(B,E)$ y $d(A,E)$ es igual a k. Deciden verificar si la relación encontrada se cumple para otros valores del applet 2, por tanto mueven los puntos A y C y observan que esta relación se cumple cuando la cónica es una elipse, pero no se cumple cuando esta es una hipérbola. En las Figuras 35 y 36 se observan algunas capturas de pantalla de los momentos en donde los estudiantes hacen la anterior observación y realizan las sumas entre las medidas de los segmentos.

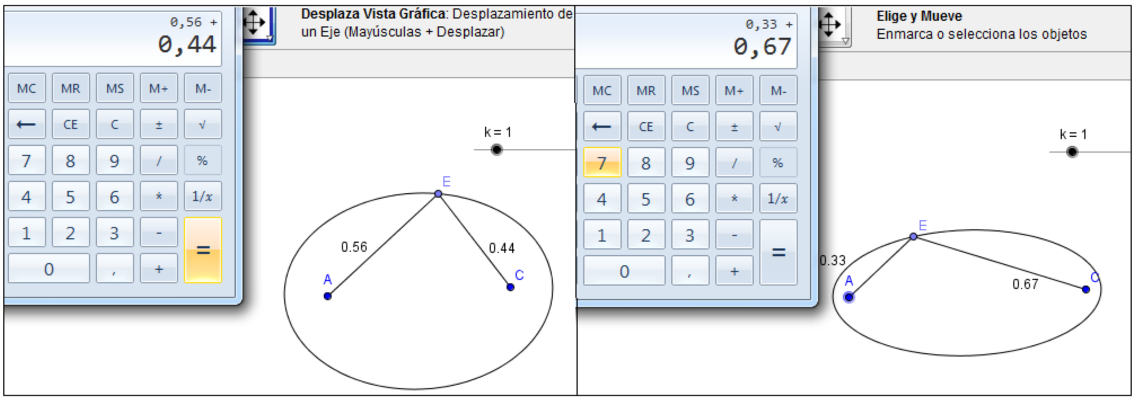

Figura 35. Casos donde se cumple que $d(A,E) + d(C,E) = k$.

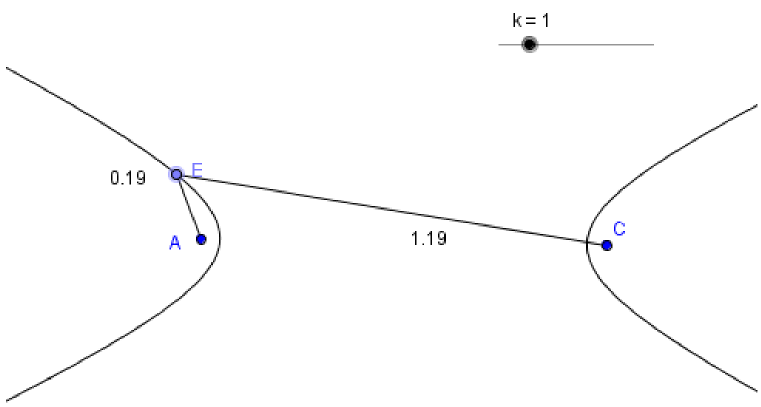

Figura 36. Caso donde no se cumple que $d(A,E) + d(C,E) = k$.

Los estudiantes afirman que:*cuando se genera una elipse se cumple que* $CE + EA = k$. En este caso, el garante (G: 6) es producto de encontrar una relación al realizar operaciones entre las medidas de los segmentos CE y EA, y verificar si se cumple para otros datos cuando cambia la representación gráfica de la cónica al mover los puntos A y C, como se describió anteriormente.En la Tabla 7 se realiza una síntesis del anterior argumento.

Datos	***Garantía***	***Afirmación***
Representación gráfica de la sección cónica y de los segmentos que van desde los focos a un punto de la cónica, valor del deslizador k y medidas de los segmentos CE y EA del applet 2.	Relación encontrada en la exploración de los datos en el *applet* 2 al realizar cálculos aritméticos. (G:4)	*Cuando se genera una elipse se cumple que* $CE + EA = k$.

Tabla 7. Argumento 6

Los estudiantes buscan relaciones entre las medidas de los segmentos CE y EA, particularmente cuando la cónica es una hipérbola. Con el deslizador en $k = 1$ y, utilizando la calculadora, de nuevo empiezan a realizar adiciones y sustracciones entre las medidas de los segmentos AE y BE. Los estudiantes identifican que en algunos casos se cumple que $CE - EA = k$y en otros casos $CE - EA = -k$. En las Figura 37 y 38 se observan algunos casos estudiados.

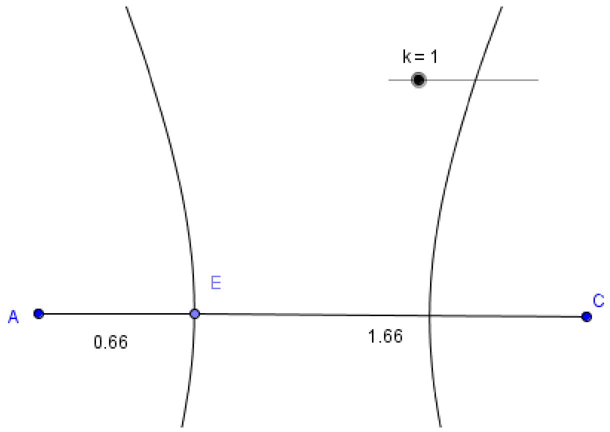

Figura 37. Caso donde$CE - EA = k$

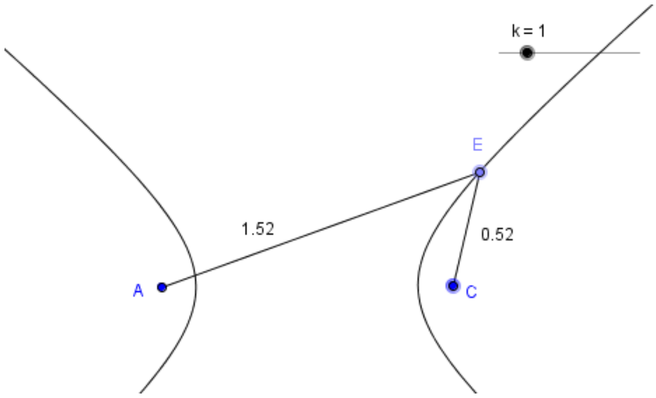

Figura 38. Caso donde $CE - EA = -k$

Encontradas estas dos relaciones, uno de los estudiantes identifica queel valor absoluto de la diferencia de las medidas de los segmentos BE y AE es igual al valor de k. Los estudiantes proceden a comprobar este hecho con algunos de los valores del *applet* 2, encontrando que efectivamente la relación encontrada se cumple para los casos observados cuando la cónica es una hipérbola. El garante (G: 7) para esta afirmación, es producto de encontrar una relación al realizar sustracciones entre las medidas de los segmentos CE y EA , y verificar que se cumple para un considerable número de casos. En la Tabla8 se presenta una síntesis del anterior argumento.

Datos	***Garantía***	***Afirmación***
Representación gráfica de la sección cónica y de los segmentos que van desde los focos a un punto de la cónica, valor del deslizador k y medidas de los segmentos CE y EA del *applet* 2.	Relación encontrada en la exploración de los datos en el *applet* 2 al realizar cálculos aritméticos. (G:7)	Cuando se genera una hipérbola se cumple que $\lvert CE - EA \rvert = k$.

Tabla 8. Argumento 7

Posterior a esto, los estudiantes siguen explorando el *applet* 2 y retoman una idea que anteriormente había quedado inconclusa, en dondelos estudiantes observaron que cuando la medida del segmento AC es igual a k, en ocasiones en el *applet* 2 se genera una elipse y en otras ocasiones se genera una hipérbola, tal hecho los lleva a indagar si es posible que esto suceda.En la Figura 39, se muestran las capturas de pantalla del anterior hecho.

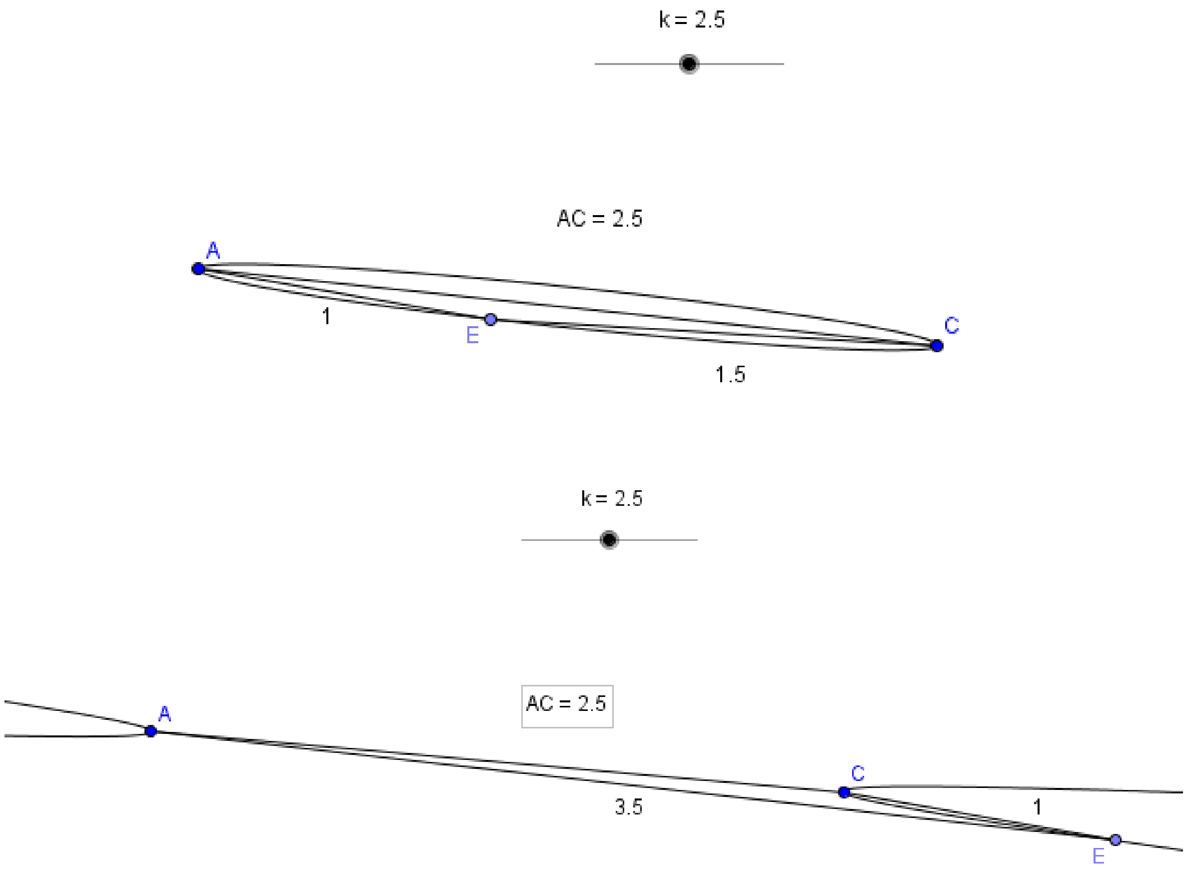

Figura 39. Applet "Otro de cónicas", medida del segmento AC igual a k

Los estudiantes observan que cuando $AC = k$, se forma un triángulo con los segmentos AE, CE,y$AC(\Delta\ AEB)$, como se observa en la Figura 39.

Los estudiantes sustituyen k por la medida del segmento AC en la igualdad encontrada en una de las afirmaciones anteriores, quedando de la siguiente forma$CE + EA = AC$. Uno de los estudiantes afirma que no es posible que esta igualdad se cumpla, debido a que estos son los segmentos de un triángulo, haciendo referencia a la desigualdad triangular, entonces los estudiantes concluyen la idea afirmando que, cuando *la medida del* $\overline{AC}$ *es igual a* k *no se genera cónica.*

En la anterior afirmación, el garante (G: 8) corresponde a la contradicción encontrada en la igualdad, al realizar la sustitución de la medida del segmento AC por el valor del deslizador k y hacer referencia a la desigualdad triangular. En la Tabla 9 se presenta un resumen del anterior argumento.

Datos	***Garantía***	***Afirmación***
Representación gráfica de la cónica y los segmentos AC, EA y EC, valor del deslizador k y medida delos segmento AC, EA y EC. Casos donde C$A = k$	Contradicción observada en una propiedad establecida previamente, haciendo uso de la Geometría Euclidiana. (G:8)	*Si $d(A, C) = k$ no se genera cónica.*

Tabla 9. Argumento 8

Los estudiantes continúan con la exploración del *applet*2, e intentan superponer los puntos C y E realizando varios intentos, observan que esto no es posible, pues en ningún momento de la exploración la medida del segmento CE es igual a 0, como se muestra en la figura 40. Este hecho los lleva a preguntarse si es posible que el foco de una cónica sea un punto que pertenece a esta.

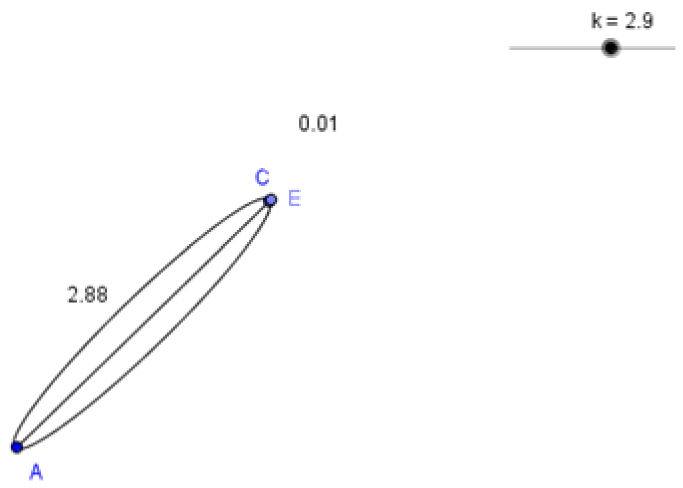

Figura 40. Intento de superponer los puntos C y E en el applet "Otro de cónicas".

Para responder a la pregunta, los estudiantes encuentran una relación entre las afirmaciones realizadas anteriormente y la pregunta en cuestión, afirmando que: *Los focos de la elipse no pertenecen a la sección cónica*, debido a que, si esto sucediera, el punto C que corresponde a uno de los focos de la elipse sería en algún momento igual al punto E que está sobre la cónica; por tanto, sustituyendo en la igualdad $d(C,E) + d(C,A) = k$ quedaría de la siguiente manera:

$$d(C,C) + d(C,A) = k$$

$$d(C,A) = k$$

Encontrando una contradicción, pues si esta última igualdad se cumple, no se genera cónica como habían afirmado los estudiantes anteriormente; estadescripción corresponde al garante (G: 9) de la afirmación que se resume en la Tabla 10.

Datos	***Garantía***	***Afirmación***
Representación gráfica de la cónica, sus focos y el punto E que pertenece a ella. Afirmación realizada: *Si* $d(A,C) = k$ *no se genera cónica.*	Contradicción observada en una propiedad establecida previamente (G:9)	*Los focos de la elipse no pertenecen a la sección cónica.*

Tabla 10. Argumento 9

Los estudiantes vuelven a explorar el*applet*1 y ubican el deslizador e de tal forma que se genere una elipse, posteriormente construyen el punto de intersección del segmento GC con la cónica, al cual llaman I, sin embargo el software les genera otro punto de intersección del segmento GC con la cónica al cual nombran$A$; los estudiantes observan que el punto A corresponde exactamente con el punto Cque estaba en el *applet*; luego toman la medida de la distancia entre el punto$I$ y el punto $F1$, la distancia entre el punto G y el punto I y la distancia entre el punto $F2$ y C. Los estudiantes empiezan a buscar relaciones entre las distancias construidas y las medidas de los segmentos del *applet*, identificando que la distancia $d(F1, I) = d(C, F2)$ como se observa en la Figura 41.

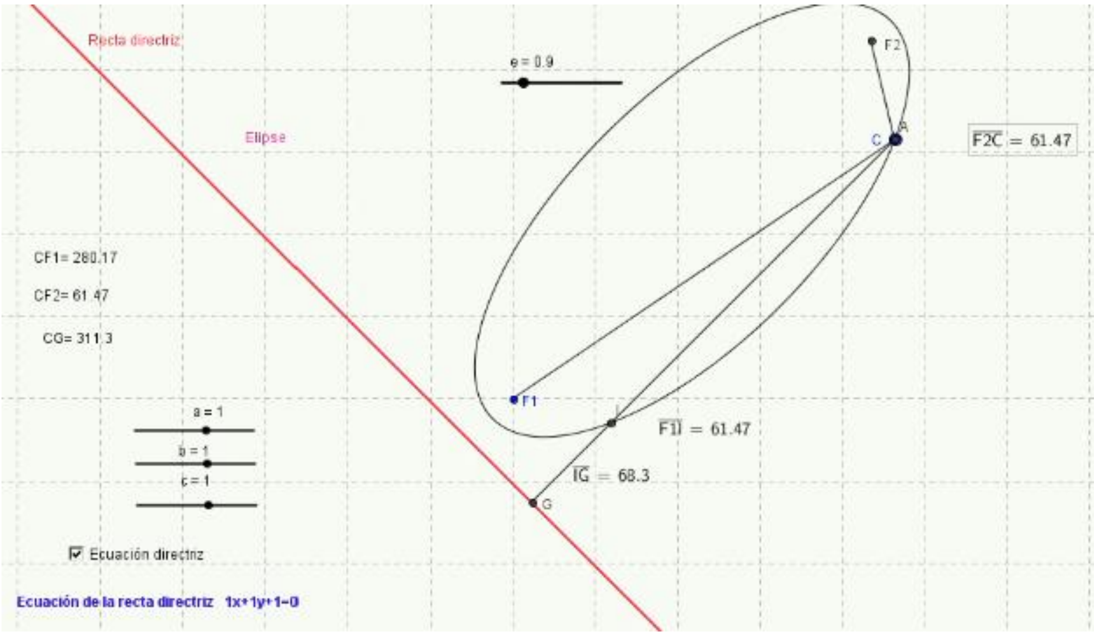

Figura 41. Construcción del punto de intersección entre el segmento GC y la cónica

Luego los estudiantes realizan las siguientes construcciones: trazanla recta que pasa por los puntos$F1$ y $F2$, a la cual llamaremos l, construyen los puntos de intersección de la recta l con la cónica y los llaman punto K y L, construyen el punto medio de los focos de la elipse al cual llaman J y trazan la recta perpendicular a la recta l que pasa por J que llamaremos m; por último, construyen los puntos de intersección dela recta m y la cónica, a los que nombran puntos M y N, como se observa en la Figura 42.

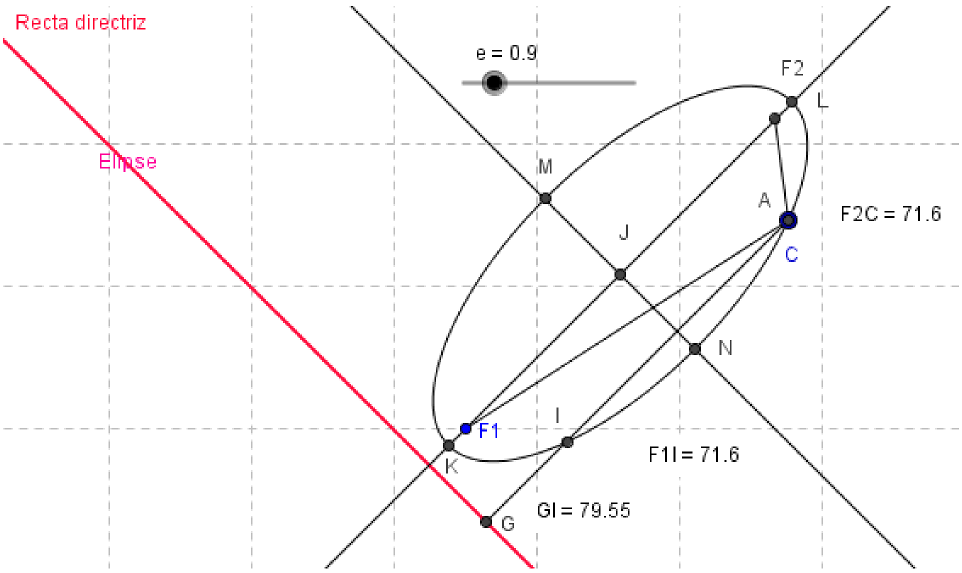

Figura 42. Construcción de los ejes de la elipse

Uno de los estudiantes interviene y explica que el segmento KL corresponde al eje mayor de la elipse y el segmento MN corresponde al eje menor de la elipse.

Los estudiantes mueven el punto A y observan que este y el punto I realizan recorridos similares en la elipse; también, que para cada punto I hay un punto A que está ubicado a la misma distancia respecto al eje menor. Luego, al seguir mirando las construcciones hechas, identifican que al ser J punto medio entre los focos, también es un punto medio de la elipse y que el eje menor divide a la elipse en dos partes iguales.

Teniendo presente estas observaciones y la igualdad $d(F1, I) = d(C, F2)$ los estudiantes intentan relacionar todas estas ideas concluyendoque *la elipse es simétrica respecto a su eje menor*.

El garante (G: 10) para esta afirmación corresponde a las observaciones realizadas por los estudiantes que se describieron anteriormente, producto de la exploración cuando se realizaron algunas construcciones geométricas en el *applet* 1. La estructura del argumente se presenta en la Tabla 11.

Datos	***Garantía***	***Afirmación***
Representación gráfica de la elipse, desu eje menor, de los puntos de intersección del segmento GC con la cónica, $d(F1, I)$ y $d(C, F2)$	Relación observada en la exploración de los datos a partir de una construcción geométrica realizada en el *applet* 1. (G:10)	*La elipse es simétrica respecto a su eje menor*

Tabla 11. Argumento 10

Con las anteriores construcciones realizadas en el *applet* 1, los estudiantes intentan colocar las medidas de las distancias $d(F1, C)$ y $d(F2, C)$ de modo que queden iguales;este movimiento resulta algo complicado de efectuar, sin embargo realizan varios intentos, como se observa en la Figura 43.

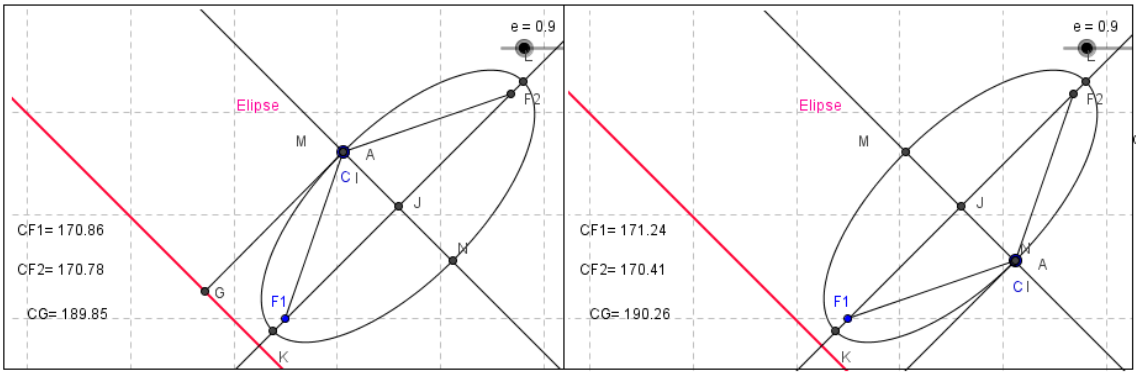

Figura 43. Construcciones en el applet 1

Los estudiantes identifican quesi $d(F1,C) = d(F2,C)$, hay que superponer el punto C en uno de los puntos de intersección del eje menor con la cónica; puesto que en todos los casos observados siempre que estas distancias eran casi iguales el punto C estaba sobre el punto M o estaba sobre el punto N,concluyendo que cuando $d(F1,C) = d(F2,C)$, el punto C pertenece al eje menor de la elipse, específicamente, a alguno de los puntos de intersección del eje menor con la cónica. El garante (G: 11) en esta afirmación es producto de realizar varias observaciones del applet al intentar colocar las distancias de los focos al punto C iguales. En la Tabla 12 se observa la estructura del argumento

Datos	***Garantía***	***Afirmación***
Representación gráfica de la elipse, de su eje menor ydel punto C que pertenece a la cónica, $d(F1,C)$ y $d(F2,C)$	Propiedad observada de la exploración de los datos en el *applet* 1. (G:11)	*Si* $d(F1,C) = d(F2,C)$ *entonces C es alguno de los puntos de intersección del eje menor con la elipse.*

Tabla 12. Argumento 11

Los estudiantes construyen la medida del eje mayor de la elipse, que corresponde al segmento KL y mueven el punto C con el fin de encontrar relaciones entre las medidas del *applet* y la anteriormente construida. En esta exploración, uno de los estudiantes encuentra que la suma de las distanciasde un punto de la cónica a los focos es igual a la medida del eje mayor de la elipse. Los estudiantes proceden a verificar si la propiedad encontrada se cumple cuando se modifican las medidas de los segmentos $CF1$ y $CF2$, para ello, mueven el punto C y con la calculadora observan varios casos como se muestra en la Figura 44.

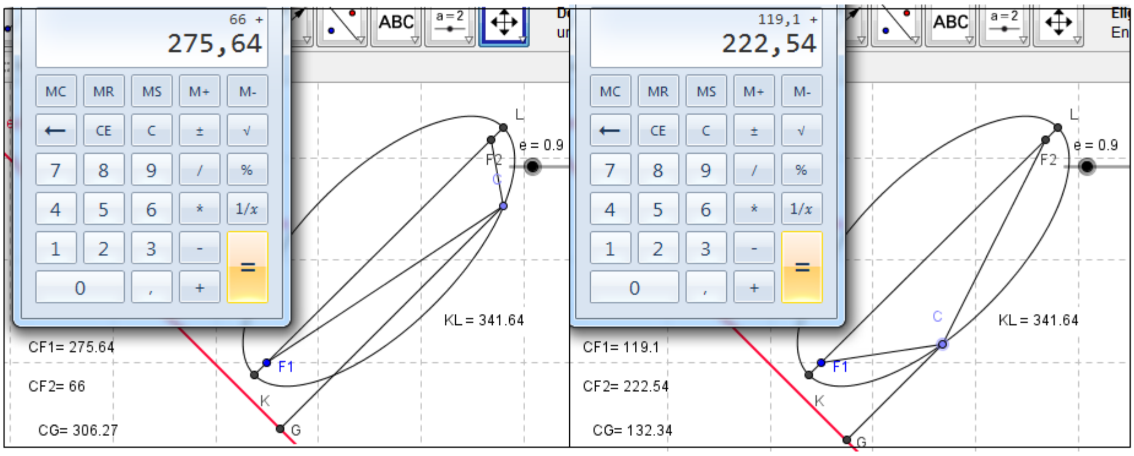

Figura 44. Capturas de pantalla de momentos donde los estudiantes verifican que $d(F1. C) + d(F2, C) = d(K, L)$

Al ver que la propiedad encontrada se cumple para los casos estudiados, los estudiantes afirman que *la suma de las distancias de un punto cualquiera de la elipse a los focos es igual a la medida del eje mayor de la elipse*, es decir, $d(F1. C) + d(F2, C) = d(K, L)$. En este caso, el garante (G: 12) es producto de encontrar una relación al realizar operaciones entre las medidas de los segmentos $CF1$ y $CF2$, y verificar si se cumple para otros datos, cuando cambia la medida de estos segmentos, al mover el punto C, como se describió anteriormente.La estructura del argumento se presenta en la Tabla 13.

Datos	***Garantía***	***Afirmación***
Representación gráfica de la elipse con su eje mayor. Medidas de las distancias $d(F1, C)$, $d(C, F2)$ y $d(K, L)$.	Relación encontrada en la exploración de los datos en el *applet* 2 al realizar cálculos aritméticos. (G:12)	*La suma de las distancias de un punto cualquiera de la elipse a los focos es igual a la medida del eje mayor de la elipse.*

Tabla 13. Argumento 12

4.3. CARACTERÍSTICAS DE LOS ARGUMENTOS

En la Tabla 14, se presenta una descripción de los garantes de cada uno de los argumentos encontrados, con el propósito de hacer una caracterización de estos en el proceso de argumentar.

Argumento No.	***Descripción de los garantes en el proceso de argumentar.***
1	Propiedad observada en la exploración de los datos en el applet 1.
2	Propiedad observada en la exploración de los datos en el applet 1, al realizar cálculos algebraicos.
3	Patrón geométrico observado al realizar la exploración del applet 1.
4	Relación encontrada en los valores de la tabla de la actividad y en la exploración del applet 1 al realizar cálculos aritméticos.
5	Relación observada en la exploración de los datos a partir de una construcción geométrica realizada en el applet 2.
6	Relación encontrada en la exploración de los datos en el applet 2 al realizar cálculos aritméticos.
7	Relación encontrada en la exploración de los datos en el applet 2 al realizar cálculos aritméticos.
8	Contradicción observada en una propiedad establecida previamente haciendo uso de la Geometría Euclidiana.
9	Contradicción observada en una propiedad establecida previamente.
10	Relación observada en la exploración de los datos a partir de una construcción geométrica realizada en el applet 1.
11	Relación observada en la exploración de los datos en el applet 1
12	Relación encontrada en la exploración de los datos en el applet 2 al realizar cálculos aritméticos.

Tabla 14. Garantes de los argumentos.

La observación detallada de la Tabla 14, permitió identificar cuatro tipos de garantes. En lo que sigue, se presenta una clasificación de los argumentos según el tipo garante:

ARGUMENTO TIPO1: Argumentos 1, 3 y 11	
GARANTE	Propiedades, relaciones o patrones observados en la exploración de los datos.
Los estudiantesefectúan una dinámica directa con las representaciones geométricas y los valores que se identifican en los applet, en donde observan cambios en las secciones cónicas y en las medidas de los segmentos que se visualizan, encontrando diferentes relaciones entre estos objetos matemáticos.	

ARGUMENTO TIPO2: Argumentos 2, 4, 6, 7 y 12	
GARANTE	Propiedades, relaciones o patrones observados en la exploración de los datos al realizar cálculos aritméticos o algebraicos.
Los estudiantes realizan el estudio de diferentes casos,verificando el cumplimiento de las relaciones encontradas, realizando operaciones con los valores numéricos o expresiones algebraicas que se visualizan en los *applet*.	

ARGUMENTO TIPO3. Argumentos 5 y 10	
GARANTE	Propiedades, relaciones o patrones observados en la exploración de los datos a partir de una construcción geométrica realizada en el *applet.*
Los estudiantes realizan construcciones auxiliares en los applet, (de segmentos, rectas, y distancias entre puntos), y a partir de estas construcciones observan regularidades y relaciones.	

ARGUMENTO TIPO4: Argumentos 8 y 9	
GARANTE	Contradicción observada en una propiedad establecida previamente.
A partir de las observaciones que realizan de los *applet* y teniendo como precedente afirmaciones anteriormente elaboradas, los estudiantes encuentran contradicciones en las propiedades ya establecidas, al realizar movimientos de las variables de los applet	

4.4. ARGUMENTOS Y PROCESO DE CONJETURAR

Para cada argumento identificado en el desarrollo de la tarea se estudió también el proceso de conjeturar; en las Tablas 15 al 26 se describen las etapas de este proceso (Álvarez, Ángel, Carranza & Soler-Álvarez, 2014) que se evidenció en la generación de cada uno de los argumentos.

Argumento No.1	***Etapas del proceso de conjeturar evidenciadas en el proceso de generación del argumento.***
Visualización Esta etapa se desarrolla cuando los estudiantes observan el applet 1 con todos sus elementos, y realizan su exploración, con el objetivo de reconocer las variables que se encuentran en este. **Identificar patrones, relaciones, regularidades o propiedades** La relación identificada en este argumento es el hecho de que la representación gráfica de la cónica cambia para algunos valores característicos del deslizador e, cuando este es movido. **Formulación de la conjetura** Los estudiantes realizan una formulación inicial de la conjetura de la siguiente manera: Si el valor del deslizador$e$ está en el intervalo$(0,1)$, la cónica que se genera es una elipse, si $e = 1$ la cónica es una parábola y si estáen el intervalo$(1,5)$ es una hipérbola. **Verificación de conjeturas** La manera en como los estudiantes verifican la conjetura es observando varios casos para valores característicos del deslizador e, notando que la relación encontrada se cumple para los casos vistos. **Generalización de conjeturas** Finalmente la conjetura es expresada así: *Cuando* $e < 1$ *es elipse. Cuando* $e = 1$*es una parábola. Cuando* $e > 1$ *es hipérbola.*	

Tabla 15. Proceso de conjeturar en el argumento 1.

Argumento No.2	***Etapas del proceso de conjeturar evidenciadas en el proceso de generación del argumento.***
Visualización Se desarrolla cuando los estudiantes observan la recta directriz de la cónica en el applet1, su ecuación y los deslizadores a, b y c que corresponden a los coeficientes de la ecuación. **Identificar patrones, relaciones, regularidades o propiedades** La relación identificada corresponde al cambio observado en la representación gráfica dela recta directriz, particularmente en su inclinación, al mover los deslizadores a y b. **Formulación de la conjetura** En una primera instancia, los estudiantes formulan que los deslizadores a y b definen la pendiente de la recta directriz de la cónica. **Verificación de conjeturas** La manera cómo se verifica la conjetura es realizando procedimientos algebraicos con la ecuación de la recta directriz que se visualiza en el *applet* 1, encontrando que $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$. **Generalización de conjeturas** Finalmente la conjetura es expresada de la siguiente manera: *Los deslizadores a y b definen la inclinación de la directriz de tal forma que la pendiente de la recta es igual a* $\frac{-a}{b}$	

Tabla 16. Proceso de conjeturar en el argumento 2.

Argumento No. 3	***Etapas del proceso de conjeturar evidenciadas en el proceso de generación del argumento.***
Visualización Inicia al observar,en el *applet* 1, la representación gráfica de una parábola, los segmentos $CF1$ y CG, y las medidas de estos segmentos. **Identificar patrones, relaciones, regularidades o propiedades** El patrón identificado en esta etapa es que las medidas de los segmentos $CF1$ y CG se mantienen iguales cuando la cónica es una parábola. **Formulación de la conjetura** Se formula la conjetura así: Si la cónica es una parábola, entonces $CF1 = CG$ **Verificación de la conjetura** En esta etapa se observan varios casos donde la cónica es una parábola y cambian las medidas de los segmentos $CF1$ y CG, notando que efectivamente se cumple la propiedad encontrada. **Generalización de la conjetura** Se generaliza de la siguiente manera: *La distancia perpendicular desde el punto C que está en el lugar geométrico a la recta directriz, es igual a la distancia desde C hasta el foco $F1$*	

Tabla 17. Proceso de conjeturar en el argumento 3.

Argumento No. 4	***Etapas del proceso de conjeturar evidenciadas en el proceso de generación del argumento.***
Visualización En esta primera etapa se observan en la tabla de la tarea, las medidas de los segmentos $CF1$, $CF2$ y CG, el valor del deslizador e y el nombre de la cónica que corresponde. **Identificar patrones, relaciones, regularidades o propiedades** En la segunda etapa se identifica, en algunos valores de la tabla, la relación $CG * e = CF1$. **Formulación de la conjetura** Encontrada la relación se formula la conjetura en esta etapa de la siguiente manera: $CG * e = CF1$se cumple para cualquier caso. **Verificación de conjeturas** Se verifica cuando se comprueba la conjetura para todos los valores de la tabla y se estudian casos para varios valores de e y varias medidas de los segmentos que se visualizan en el applet, observando que en todos los casos se cumple. **Generalización de conjeturas** En la última etapa se presenta la generalización de la conjetura así: $CG * e = CF1$.*Se cumple para cualquiera de las tres cónicas.*	

Tabla 18. Proceso de conjeturar en el argumento 4.

Argumento No. 5	***Etapas del proceso de conjeturar evidenciadas en el proceso de generación del argumento.***

Visualización

Se observaen el *applet* 2, la representación gráfica de una cónica, los segmentos que van desde los focos a un punto de la cónica con sus respectivas medidas, el deslizador k y el segmento que une los focos con su medida.

Identificar patrones, relaciones, regularidades o propiedades

Se identifica que cuando la medida del segmento AC es mayor que el valor del deslizador k la cónica que se genera es una hipérbola y cuando es menor que k se genera una elipse.

Formulación de la conjetura

En este caso se formula la conjetura de la siguiente manera: *Si* $d(A,C) > k$ *entonces la cónica que se genera es una hipérbola.Si* $d(A,C) < k$ *entonces la cónica que se genera es una elipse.*

Verificación de conjeturas

Se observan varios casos donde $d(A,C) > k$ y donde$d(A,C) < k$, notando que efectivamente se cumple la propiedad encontrada.

Generalización de conjeturas

En este argumento la generalización de la conjetura corresponde a la confirmación de la formulación hecha tras realizar la verificación de esta.

Tabla 19. Proceso de conjeturar en el argumento 5.

Argumento No. 6	***Etapas del proceso de conjeturar evidenciadas en el proceso de generación del argumento.***

Visualización Se observa en el *applet* 2, la representación gráfica de la cónica, los segmentos que van desde los focos a un punto de la cónica con sus respectivas medidas y el valor del deslizador k. **Identificar patrones, relaciones, regularidades o propiedades** La relación identificada es que para las medidas de los segmentos CE y EA y el deslizador $k$del applet 2,se cumple que$CE + EA = k$ **Formulación de la conjetura** Se realiza una formulación inicial de la conjetura, expresando que la igualdad$CE + EA = k$ se cumple en cualquier caso. **Verificación de conjeturas** La manera como se realizó la verificación de la conjetura fue la siguiente: mueven los puntos A y C, y se observan varios casosdonde en algunos se cumple que $CE + EA = k$, y en otros no, notando que cuando se cumple la propiedad encontrada la cónica que se genera es una elipse. **Generalización de conjeturas** A partir de la verificación se realiza la siguiente generalización de la conjetura: *Cuando se genera una elipse se cumple que* $CE + EA = k$.

Tabla 20. Proceso de conjeturar en el argumento 6.

<table>
<tr><th>Argumento No. 7</th><th>Etapas del proceso de conjeturar evidenciadas en el proceso de generación del argumento.</th></tr>
<tr><td colspan="2">

Visualización
Se observa en el applet 2, la representación gráfica de la cónica, los segmentos que van desde los focos a un punto de la cónica con sus respectivas medidas y el valor del deslizador k.

Identificar patrones, relaciones, regularidades o propiedades
La relación que se identifica es que para las medidas de los segmentos CE y EC, y para el deslizador k del *applet* 2, se cumple que $CE - EA = k$

Formulación de la conjetura
Se realiza la formulación de la conjetura expresando que la igualdad $CE - EA = k$ se cumple en algunos casos.

Verificación de conjeturas
Para verificar la conjetura, mueven los puntos A y C, y se observan varios casos donde, en algunos se cumple que $CE - EA = k$, y en otros que $CE - EA = -k$, notando que cuando se cumple alguna de las dos propiedades encontradas la cónica que se genera es una hipérbola.

Generalización de conjeturas
En este caso se generaliza la conjetura de la siguiente manera: *Cuando se genera una hipérbola se cumple que*$|CE - EA| = k$.

</td></tr>
</table>

Tabla 21. Proceso de conjeturar en el argumento 7.

Argumento No. 8	***Etapas del proceso de conjeturar evidenciadas en el proceso de generación del argumento.***

Visualización

Se observaen el *applet* 2, la representación gráfica de una cónica, los segmentos que van desde los focos a un punto de la cónica con sus respectivas medidas, el deslizador k y el segmento que une los focos con su medida.

Identificar patrones, relaciones, regularidades o propiedades

Se identifica que cuando $d(C, A) = k$ en ocasiones se genera una elipse y en otras ocasiones una hipérbola.

Formulación de la conjetura

Los estudiantes en vista de la relación observada, formulan la conjetura de la siguiente manera: Cuando $d(C, A) = k$ la cónica puede ser una elipse o una hipérbola.

Verificación de conjeturas

Para verificar la conjetura, relacionan lo observado en el *applet* 2 con una de las propiedades previamente establecidas encontrando una contradicción.

Generalización de conjeturas

Los estudiantes presentan la conjetura finalmente de la siguiente manera: *Si* $d(A, C) = k$ *no se genera cónica.*

Tabla 22. Proceso de conjeturar en el argumento 8.

Argumento No. 9	***Etapas del proceso de conjeturar evidenciadas en el proceso de generación del argumento.***
Visualización Se observaen el *applet* 2, la representación gráfica de una cónica, los segmentos que van desde los focos a un punto de la cónica con sus respectivas medidas y el deslizador k. **Identificar patrones, relaciones, regularidades o propiedades** En este caso, los estudiantes observan que no es posible superponer el punto E que pertenece a la cónica a alguno de los focos. **Formulación de la conjetura** Al identificar la anterior situación los estudiantes formulan de manera general que los focos no pertenecen a la cónica. **Verificación de conjeturas** Para verificar la conjetura, relacionan lo observado en el *applet* 2 con una de las propiedades previamente establecidas sobre la elipse, encontrando una contradicción. **Generalización de conjeturas** La manera en como los estudiantes generalizan la conjetura es precisando la siguiente situación:*Los focos de la elipse no pertenecen a la sección cónica.*	

Tabla 23. Proceso de conjeturar en el argumento 9.

Argumento No. 10	***Etapas del proceso de conjeturar evidenciadas en el proceso de generación del argumento.***
Visualización Se observa en el *applet* 1, la representación gráfica de una elipse, su eje mayor, su eje menor, los puntosde intersección del segmento GC con la cónica, $d(F1, I)$ y $d(C, F2)$ **Identificar patrones, relaciones, regularidades o propiedades** A partir de la visualización, los estudiantes observan que el eje menor de la elipse divide a esta en dos partes iguales. **Formulación de la conjetura** La conjetura es presentada de la siguiente forma: *La elipse es simétrica respecto a su eje menor*. **Verificación de conjeturas** La manera en como realizan la verificación de la conjetura es por medio de la observación de las distancias entre algunos puntos, específicamente $d(F1, I)$ y $d(C, F2)$, las cuales se mantiene iguales cuando se mueve el punto *C* que pertenece a la cónica y que realiza los mismos recorridos del punto *A*. **Generalización de conjeturas** En este argumento la generalización de la conjetura corresponde a la confirmación de la formulación de hecha.	

Tabla 24. Proceso de conjeturar en el argumento 10.

Argumento No. 11	***Etapas del proceso de conjeturar evidenciadas en el proceso de generación del argumento.***
Visualización Se observa en el applet 1, la representación gráfica de la elipse, su eje menor, los puntos de intersección entre la cónica y el eje menor. **Identificar patrones, relaciones, regularidades o propiedades** Se identifica que cuando se superponen el punto C que pertenece a la cónica y alguno de los puntos de intersección del eje menor con la cónica, se cumple que $d(F1, C) = d(F2, C)$. **Formulación de la conjetura** *Si* $d(F1, C) = d(F2, C)$ *entonces C es alguno de los puntos de intersección del eje menor con la elipse.* En este caso no es clara una evidencia de las etapas de verificación y de generalización de la conjetura.	

Tabla 25. Proceso de conjeturar en el argumento 11.

<table>
<tr><td>Argumento No. 12</td><td>Etapas del proceso de conjeturar evidenciadas en el proceso de generación del argumento.</td></tr>
<tr><td colspan="2">

Visualización

Se observa en el$applet$ 1, la representación gráfica de la elipse, de su eje mayor con su mediday las distancias de un punto cualquiera de la elipse a los focos.

Identificar patrones, relaciones, regularidades o propiedades

La relación identificada es que para algunos casos, la suma de los segmentos $CF1$ y $CF2$ es igual a la medida del eje mayor de la elipse.

Formulación de la conjetura

Los estudiantes presentan la conjetura así: *La suma de los segmentos $CF1$ y $CF2$ es igual a la medida del eje mayor*.

Verificación de conjeturas

Para verificar la conjetura hecha, mueven el punto C y se observan varios casos, notando que se cumple la propiedad encontrada.

Generalización de conjeturas

Finalmente la conjetura es generalizada de la siguiente manera:*La suma de las distancias de un punto cualquiera de la elipse a los focos es igual a la medida del eje mayor de la elipse.*

</td></tr>
</table>

Tabla 26. Proceso de conjeturar en el argumento 12.

5. CONCLUSIONES

Las conclusiones del estudio realizado se presentarán en este capítulo organizadas entres partes. En la primera, se exponen las conclusiones en relación con las características de los garantes de los argumentos surgidos en el desarrollo de la tarea;en la segunda, las relacionadascon las características de las etapas del proceso de conjeturar evidenciadas en el surgimiento de cada argumento, y en la tercera, las conclusiones en relación conlas características de la tarea.

5.1. Conclusiones en relación con las características de los garantes de los argumentos surgidos

En el análisis de las características de los argumentos a partir de su garante, se pudieron agrupar estos en 4 tipos.

- Los argumentos cuyo garante son propiedades, relaciones o patrones observados en la exploración de los datos.En este tipo de argumentos los datos corresponden a representaciones geométricas y variables relacionadas en un contexto tecnológico como el software Geogebra, donde la afirmación surge como la expresión general de una propiedad observada.

- Los argumentos cuyo garante son propiedades, relaciones o patrones observados en la exploración de los datos al realizar cálculos aritméticos o algebraicos. En estos argumentos, a partir de un número finito de casos estudiados al manipular los objetos matemáticos de los *applet*, se llega a una expresión general de una propiedad, presentada por medio de diagramas aritméticos o algebraicos.

- Los argumentos cuyo garante son propiedades, relaciones o patrones observados en la exploración de los datos a partir de una construcción geométrica realizada en el applet.Estos argumentos surgen de diagramas geométricos, donde se elaboraron construcciones en un contexto tecnológico, donde la afirmación se establece a partir de la representación visual de un problema.

- Los argumentos cuyo garante son contradicción observada en una propiedad establecida previamente.En este tipo de argumentos hay una característica significativa observada en los datos, se afirma sobre un hecho conocido o sobre la base de una regla general establecida, en relación con un caso particular estudiado.

En la mayoría de argumentos surgidos en el desarrollo de la tarea, el garante corresponde a relaciones, propiedades, patrones o regularidades observadas en la exploración de los *applet*, identificando que el uso de software como Geogebra, conlleva a encontrar por parte de los estudiantes, diversidad de relaciones entre las diferentes representaciones geométricas y algebraicas de un objeto matemático como las evidenciadas en la formulación de las afirmaciones de cada uno de los argumentos.

5.2. Conclusiones en relación con el proceso de conjeturar evidenciado en el surgimiento de cada argumento.

En el análisis de los procesos de conjeturar de los argumentos surgidos en la realización de la tarea por parte de los estudiantes, se observa que se desarrollan las cinco etapas del proceso de conjeturaren la mayoría de los argumentos; el único argumento enel que no se cumplieron las dos últimas etapas fue el argumento 11.

Se observa que la etapa de visualizacióndel proceso de conjeturares apoyada principalmente en los diagramas geométricos, los valores de las medidas de algunos segmentos, deslizadores y distancias entre puntos que se observan en los applet. Además, la posibilidad que tienen los estudiantes de realizar construcciones auxiliares y tener una dinámica directa con las representaciones de los objetos matemáticos del applet, permite que en esta primera etapa se realice con facilidad una amplia actividad explorativa.

En la etapa de identificación de patrones, relaciones, regularidades o propiedades que surgió en cada argumento, se observa que los estudiantes identifican sus relaciones principalmente al efectuar movimientos de las variables de los applet y observar los cambios en las representaciones geométricas, en las medidas de los segmentos, en las distancias entre los puntos y en los valores de los deslizadores, identificando aquello que es relevante en la interacción con los objetos de los applet.

En la etapa de formulación de conjeturas, se observó que las conjeturas se presentaron de manera verbal y surgieron como expresiones de las relaciones identificadas en la etapa anterior.

La verificación de las conjeturas en la mayoría de los argumentos fue elaboradarealizando la observación de un considerable número de casos que los applet permitían generar, identificando si en verdad las relaciones y propiedades encontradas eran ciertas.

Por último, en la etapa de generalización de las conjeturas, estas surgieron en la mayoría de los argumentos como expresiones generales de las relaciones, propiedades, patrones o características observadas, en donde, al realizar la verificación del cumplimiento de las propiedades en algunos casos, confirmaban lo expresado en la formulación de la conjetura.

Observando que durante todo el desarrollo de la tarea los procesos de argumentar y conjeturar fueron transversales, se evidenciaron algunas relaciones entre estos dos procesos.

La primera de ellas es la similitud que se observa en los elementos de los argumentos y algunasde las etapas del proceso de conjeturar; hay una relación entre la etapa de visualización y los datos de un argumento, entendiendo que a partir de la visualización hay una generación de los datos.También, la etapa de generalización de conjeturas se corresponde en la mayoría de los argumentos con las afirmaciones de estos.

5.3. Conclusiones en relación con las características de la tarea

Se consideraron tres aspectos importantes en el diseño de la tarea: el uso de herramientas tecnológicas, las características de los enunciados de la misma y la forma de recolección de la información.

Uso de herramientas tecnológicas

En lo que concierne al uso de las herramientas tecnológicas en la tarea, como el software Geogebra, es importante resaltar que estas permitieronla observación y exploración de diferentes representaciones de los objetos matemáticos,favoreciendo que los estudiantes encontraran diversidad de relaciones entre estas representaciones, lo cual llevó a la construcción de varios argumentos.

También, el hecho de que los estudiantes tuvieran una dinámica directa con los applet, favoreció las etapas del proceso de conjeturar evidenciadas en el desarrollo de la tarea, en especial, la visualización y la verificación de las conjeturas, donde fue posible que los estudiantes observaran varios casos del cumplimiento de propiedades y relaciones encontradas, en tiempos relativamente cortos.

Enunciados de la tarea

En cuanto a los enunciados de la tarea, la forma como estos se presentaron, permitió que surgieran diferentes argumentos, con los cuales se evidencia la conceptualización lograda por los estudiantes sobre las cónicas y sus representaciones.

Se lograron identificar algunas características de los enunciados que permitieron el desarrollo de procesos argumentativos. Se observan tres tipos de enunciados los cuales se describen a continuación: primero, enunciados de preguntas abiertas, segundo, enunciados que conllevan a que los estudiantes enfoquen sus relaciones encontradas en la temática a trabajar en la tarea y tercero, enunciados de preguntas que buscan la justificación de las relaciones encontradas.

Los enunciados de las preguntas abiertas, dieron lugar a que los estudiantes encontraran diferentes relaciones entre los objetos matemáticos presentes en los applety elaboraran diferentes argumentos.Además, favoreció el desarrollo de la etapa de visualización del proceso de conjeturar, debido a que los estudiantes podían tomar diferentes caminos de exploración y de observación.

Otro tipo de enunciados fueron los que permitían enfocar la tarea en la temática a trabajar; en este caso, la definición de las cónicas a partir el concepto de excentricidad, lo cual permitió centrar la atención en unas de las múltiples relaciones que encontraban los estudiantes a partir del primer enunciado, permitiendo que estos enfatizaran el desarrollo de la tarea en la construcción de los argumentos.

Por último, el hecho de preguntar las justificaciones de las relaciones encontradas, fue un aspecto relevante en la tarea, pues durante el desarrollo de estas preguntassurgió la mayoría de los argumentos.

Formas de recolección de la información

En cuanto alas características de recolección de la información que se describieron en el análisis de la información, en el diseño de la tarea, se resaltan aquellas que favorecieron el desarrollo de este documento, como lo fue observar el desarrollo completo de la tarea elaborada por los estudiantes, favoreciendo la observación detallada dela construcción de los argumentos.

Un aspecto importante del modo de recolección de la información de la tarea, fue queen varias ocasiones los estudiantes dejaban algunas ideas interesantes inconclusas y no las desarrollaron en ningún momento; lo cual no permitió que los estudiantes encontraran otras afirmaciones y otros garantes para generar una mayor argumentación.

6. CONSIDERACIONES FINALES

En este último capítulo, se realizarán algunas precisiones en relación con el trabajo realizado.

En primer lugar es importante señalar que el ánimo de este trabajo no es presentar conclusiones generales de los procesos de argumentar y conjeturar; en su lugar, pretende que los resultados de este estudio contribuyan al proyecto de investigación "Argumentación y Prueba", aportando a las conclusiones de los procesos antes mencionados, al considerar como población a los maestros en formación de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

En segundo lugar, considero que se pueden realizar múltiples estudios en relación con los procesos de argumentar y conjeturar en la clase de matemáticas, no solo para maestros en formación, sino también a nivel de secundaria, donde se elaboren diferentes actividades haciendo uso de *applet*, con el fin de continuar adquiriendo diversas herramientas que promuevan el desarrollo de habilidades argumentativas.

Por último, considero relevante destacar los aportes que este trabajo hizo a mi formación. El estudio de las cónicas demandó el uso de diferentes conceptos relacionados con estas representaciones geométricas. Como maestro en formación, al realizar este trabajo observo la importancia de dar uso a un software matemático en laclase de matemáticas, en especial el software Geogebra y el diseño de applet como herramientas que se pueden usar de múltiples formas, permitiendo visualizar representaciones geométricas desde el punto de vista geométrico y algebraico.

También, el análisis de los procesos de argumentar y conjeturar, me permitió participar en el ambiente investigativo, describiendo y analizando situaciones relacionadas con el ejercicio profesional del profesor de matemáticas.

Estas dos actividades fortalecieron mi conocimiento profesional, al promover tanto la construcción de conocimiento matemático, como la del conocimiento didáctico, en este caso, relacionados con la definición de las cónicas y los procesos de argumentar y conjeturar.

BIBLIOGRAFÍA

1. Álvarez, I., Carranza, E., Ángel, L. & Soler-Álvarez, N. (2014). Actividades Matemáticas: Conjeturar y Argumentar. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas. 85,* 75-90.

2. Lehman, C. H. (1989). *Geometría Analítica*: Nueva York. John Wiley and sons.

3. Manrique, V. (2011). *Caracterización y clasificación de las formas de razonar usadas por un grupo de profesores en formación al resolver una actividad sobre ruletas cicloidales*. Tesis de pregrado no publicada. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

4. Ministerio-de-Educación-Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Bogotá: MEN.

5. Soler-Álvarez, N. (2013). *Razonamientos abductivos, inductivos y deductivos desarrollados por estudiantes del curso de geometría analítica al realizar una tarea relacionada con la representación de objetos geométricos en distintos sistemas coordenados.* Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional, Departamento de Matemáticas.

6. Soler-Álvarez, N., Ávila, J.C. & Luque, C. (2009). *Propuesta proyecto de investigación "Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: los razonamientos abductivo e inductivo"*. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional, Departamento de Matemáticas.

7. Soler-Álvarez, N. &Manrique, V. (2014). El proceso de descubrimiento en la clase de matemáticas: los razonamientos abductivo, inductivo y deductivo. *Revista Enseñanza de las Ciencias. 32*, 191-219.

8. Toulmin, S. E. (2003). *The uses of argument* (updated edition). Cambridge, UK: Cambridge University Press.