

Transformación del conocimiento del profesor para enseñar a argumentar

Carlos Federico Camargo Arias

Sergio Alfonso Triana Ramírez

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de Matemáticas

Maestría en Docencia de la Matemática

Bogotá, D. C. 2022

Transformación del conocimiento del profesor para enseñar a argumentar

Carlos Federico Camargo Arias

Sergio Alfonso Triana Ramírez

Trabajo de Grado como requisito parcial para optar al título Magister en Docencia de la
Matemática

Directora

Claudia Marcela Vargas Guerrero
Profesora Departamento de Matemáticas
Magister en Docencia de la Matemática

Universidad Pedagógica Nacional
Facultad de Ciencia y Tecnología
Departamento de Matemáticas
Maestría en Docencia de la Matemática
Bogotá, D. C. 2022

Dedicatoria

A mi mamá Elvia Ramírez,
por ser la luz que guía mi camino,
por su amor y comprensión a lo largo de los años
y por acompañarme sin condición en este largo proceso.
A mi familia, que siempre me alentó en los momentos más difíciles,
y a mi abuelito, que en paz descansa, por ser mi mayor ejemplo de vida.

Sergio Triana

A Luz Nelly Arias,
por brindarme todo su amor y apoyarme por medio de sus oraciones.

A mi padre Israel Camargo,
por su apoyo incondicional si él nada de esto hubiera sido posible.

A mi hermana Ivonne Camargo,
por su compañía y por los momentos que hemos compartido.

Carlos Camargo

Agradecimientos

A la profesora Claudia Marcela Vargas Guerrero, por sus grandes enseñanzas, por dirigir nuestro trabajo de grado, por toda la paciencia que nos tuvo durante este largo proceso y en especial por enseñarnos que, ante todo, los valores hacen a un gran ser humano.

Muchas gracias profe por todo el tiempo compartido.

A los profesores Edgar Guacaneme, Óscar Molina, Leonor Camargo y Carlos Pérez, por acompañar nuestro tránsito por la maestría y contribuir a formarnos como los profesores que necesita este país, críticos y reflexivos.

A nuestros amigos y familiares por no desampararnos, aconsejándonos en los momentos más difíciles y por apoyarnos para que este trabajo fuera posible.

Tabla de contenido

Introducción	11
Planteamiento de problema.....	13
Delimitación del problema	13
Justificación.....	15
Objetivos	17
Objetivo general	17
Objetivos específicos	18
Antecedentes	18
Marco de referencia	22
Enfoque Onto semiótico.....	22
Conocimiento didáctico matemático del profesor (CDM).....	25
Metodología	31
Posicionamiento Investigativo	31
Estrategia investigativa	32
Recolección de información y construcción de datos investigativos	37
Descripción de procesos de análisis del CDM	39
Caracterización del Conocimiento didáctico matemático en cada estado	39
Descripción del proceso de análisis de la transformación del CDM.....	40
Ciclo 1.....	43

Fase 1: Detección de un problema inicial	43
Fase 2: Formulación del primer plan de acción	43
Fase 3: Implementación del primer plan de acción y recolección de información	44
Fase 4: Análisis y reflexión del Ciclo 1	45
Caracterización del conocimiento didáctico matemático en el Estado Base.....	45
Caracterización del conocimiento didáctico matemático en el Estado de Transición del Base al Uno	47
Caracterización del conocimiento didáctico matemático en el Estado Uno.....	48
Ciclo 2.....	52
Fase 1: Detección de un nuevo problema.....	52
Fase 2: Formulación del segundo plan de acción.....	52
Fase 3: Implementación del segundo plan de acción	54
Fase 4: Análisis y reflexión del Ciclo 2	55
Caracterización del conocimiento didáctico matemático en el Estado de Transición del Uno al Dos.....	55
Caracterización del conocimiento didáctico matemático en el Estado Dos	58
Ciclo 3.....	62
Fase 1: Detección de una problemática final	62
Fase 2: Diseño del tercer plan de acción	62
Fase 3: Implementación del tercer plan de acción	64

Fase 4: Análisis y reflexión del Ciclo 3	64
Caracterización del conocimiento didáctico matemático en el Estado Tres	64
Análisis del proceso de transformación del conocimiento	69
Análisis respecto a la categoría vínculos entre términos.....	73
Análisis respecto a la categoría asimilación.....	74
Conclusiones.....	76
Referencias.....	78
Anexos	81
Anexo 1: Insumos Ciclo 1.....	81
Anexo 2: Texto Narrativo de Argumentación.....	86
Anexo 3: Texto Narrativo de EGD	93
Anexo 4: Textos Narrativo de Tareas	100
Anexo 5: Datos investigativos Ciclo 1	107
Anexo 6: Transcripción de la ponencia diferenciación de términos afines a la argumentación	110
Anexo 7: Transcripción de la ponencia enseñanza de la argumentación.....	112
Anexo 8: Transcripción cierre del Ciclo 2	120
Anexo 9: Datos investigativos Ciclo 2.....	121
Anexo 10: Diseño de la tarea para favorecer la argumentación.....	124
Anexo 11: Rediseño de la tarea para favorecer la argumentación	136

Anexo 12: Discusión en torno al diseño y el rediseño de la tarea.....	144
Anexo 13: Insumos Ciclo 3.....	146
Anexo 14: Datos investigativos Ciclo 3.....	153
Anexo 15: Datos investigativos para la transformación del conocimiento.....	155

Índice de figuras

Figura 1. Diagrama de la IA: fases de cada ciclo. Fuente: Elaborada por los autores.....	33
Figura 2. Categorías de transformación propuesta por los autores	42
Figura 3. Acciones que conforman el plan del Ciclo 2.....	53
Figura 4. Acciones que conforman el plan del Ciclo 3.....	63
Figura 5. Síntesis de datos investigativos por faceta en cada ciclo	70
Figura 6 Síntesis de la Faceta Epistémica en cada ciclo.....	71
Figura 7 Síntesis de la Faceta Interaccional en cada ciclo.....	72

Índice de tablas

Tabla 1. Preguntas que orientaron cada ciclo de la estrategia Investigación - Acción	35
Tabla 2. Fases que componen los Ciclos de la Investigación	37
Tabla 3. Ejemplos de datos investigativos	38
Tabla 4. Propuesta de descriptores para analizar nuestro CDM respecto a argumentación/argumento.....	40
Tabla 5. Categorías y subcategorías de transformación.....	43
Tabla 6. Datos investigativos del Estado Base	46
Tabla 7. Datos Investigativos del Estado de Transición al Uno	47
Tabla 8. Datos Investigativos del Estado Uno	50
Tabla 9. Datos Investigativos del Estado de transición del Uno al Dos	56
Tabla 10. Datos Investigativos del Estado Dos	60
Tabla 11. Datos Investigativos del Estado Tres.....	66
Tabla 12. Síntesis de los datos investigativos para la categoría vínculos entre términos	73
Tabla 13. Síntesis de los datos investigativos para la categoría asimilación	75

Introducción

En este documento, presentamos el reporte de nuestra investigación, en la que pretendemos exponer la caracterización de la transformación del conocimiento del profesor de matemáticas cuando realiza acciones tendientes a mejorar el conocimiento para favorecer la enseñanza de la argumentación. Dicha investigación la hemos realizado como producto final para optar por el título de Magister en Docencia de la Matemática en la Universidad Pedagógica Nacional.

En el primer capítulo mostramos que la problemática inicial, la enseñanza de la argumentación, se fundamenta en nuestros intereses e inquietudes en al iniciar nuestros estudios en la Maestría. Estos intereses e inquietudes van en concordancia con algunos autores como Lin (2018) y Drivjers (2013) y lo hemos relacionado con lo que se propone en los lineamientos curriculares de nuestro país (MEN, 1998). Además, exhibimos la importancia de investigar sobre el conocimiento del profesor sobre argumentación, sintetizando algunas investigaciones de autores reconocidos en la comunidad de educadores matemáticos que favorecen el conocimiento del profesor.

En el capítulo 2, damos a conocer el origen del sustento teórico de nuestra investigación, el modelo del Conocimiento del profesor CDM (Conocimiento Didáctico Matemático) como referente dentro del enfoque Ontosemiótico propuesto por Godino. También, mostramos las categorías propuestas en el CDM para caracterizar el conocimiento del profesor y en particular, las relacionadas con el proceso de argumentación.

En el tercer capítulo, describimos lo relacionado con la metodología de esta investigación, dando a conocer el posicionamiento investigativo, la estrategia investigativa (Investigación – Acción) y las estrategias que empleamos para desarrollar el análisis que se presenta en los capítulos posteriores. En los capítulos 4, 5 y 6 presentamos cada uno de los Ciclos investigativos describiendo la problemática que guía cada uno de estos, la formulación del plan de acción con el cual pretendimos atender dichas problemáticas, la implementación del plan de acción y la recolección de la información, y finalmente, el análisis de los datos investigativos construidos en cada Ciclo.

En el capítulo 7, ostentamos nuestra propuesta de categorías que caracterizan la transformación del conocimiento del profesor en cuanto a la enseñanza de la argumentación. Por último, el capítulo 8 da a conocer las conclusiones y proyecciones personales a las que hemos llegado con esta investigación en torno a los objetivos planteados desde el inicio.

Planteamiento de problema

En este apartado exponemos las razones que nos motivaron a realizar una investigación en torno a nuestro conocimiento sobre la enseñanza de la argumentación. Para ello, tomamos como punto de partida algunas experiencias en nuestro quehacer docente que nos llevaron a cuestionar el conocimiento que poseemos sobre la enseñanza de este proceso. Luego, mostramos la importancia de realizar una investigación centrada en el conocimiento del profesor y en la argumentación. Posteriormente, explicitamos los objetivos de este trabajo de grado y, finalmente, reportamos algunos antecedentes investigativos que se centran en asuntos relacionados con los objetivos de esta tesis.

Delimitación del problema

En los colegios en los que hemos trabajado implementamos una metodología de clase en la que proponemos ejercicios de los libros de texto, que en su mayoría son ejercicios netamente algorítmicos y que no promueven la argumentación en los estudiantes. Consideramos que, tal y como señala Lin (2018), para los profesores es un reto aproximarse a enseñar las matemáticas con metodologías de clase no tradicionales, como nos ha sucedido. Pensamos que al cambiar dichas prácticas pedagógicas favoreceríamos los procesos de aprendizaje en los estudiantes, sin embargo, aunque realizamos algunas acciones con dicho fin, no se obtuvieron los frutos esperados.

Por un lado, Sergio, al ser egresado del programa de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN) decidió proponer la construcción de un sistema axiomático, apoyado por el software GeoGebra, con el fin de favorecer la producción de argumentos en sus estudiantes. Dicha propuesta, se llevó a cabo con estudiantes de grado

séptimo en su labor docente antes de ingresar a la Maestría en el colegio Cooperativo Monseñor Ismael Perdomo en el sur de la ciudad, cabe resaltar que los estudiantes no conocían el software de GeoGebra. Los resultados no fueron los esperados ya que las acciones de mediación que realizaba Sergio no lograban promover en los estudiantes la argumentación. Lo anterior va en concordancia con lo que menciona Drivjers (2013), la implementación de tareas que promueven argumentación no es simple y el uso de un software para promover aprendizajes matemáticos no sólo concierne al diseño de las tareas involucradas, sino también a la mediación que hace el profesor. Por otro lado, Carlos en su rol como profesor, al ser Matemático de la Universidad Industrial de Santander (UIS), propuso una adaptación de los ejercicios del libro de texto que utilizaban en el colegio Liceo Antonio Toledo para grado octavo y organizaba a los estudiantes en grupos de trabajo. Sin embargo, aunque consideraba que proponer tareas para ser desarrolladas en grupo favorecería la argumentación, tampoco logró promover la producción de argumentos en sus estudiantes. Con estos cuestionamientos en nuestra práctica profesional, iniciamos el tránsito por la Maestría en Docencia de la Matemática (MDM).

Precisamente, esta investigación se presenta para optar por el título de Magister en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional, y se desarrolló en el marco de una cohorte que se centró en el núcleo problémico concerniente al conocimiento del profesor de matemáticas respecto al diseño de tareas de argumentación apoyadas por un Entorno de Geometría Dinámica. En el marco de esta cohorte, para construir el problema de investigación, fue necesario que, como educadores, empezáramos a cuestionar el conocimiento que subyace y que determina las acciones que realizamos para promover la argumentación en la clase de Geometría. Esto conllevó a que identificáramos que, en nuestra labor docente, no tenemos un

conocimiento especializado en la enseñanza de la argumentación y ello nos lleva a subestimar el papel que como profesores tenemos al momento de enseñar este proceso.

Pensamos que el hecho de realizar clases con un modelo de enseñanza tradicionalista se debe a que, como profesores, carecemos de un conocimiento especializado concerniente al de enseñar a argumentar en geometría. Así, la manera de enseñar geometría por medio de la memorización de definiciones y teoremas se encuentra en un polo totalmente opuesto a lo que se menciona en los lineamientos curriculares de nuestro país, ya que en estos se menciona que la geometría permite interpretar, entender, y apreciar un mundo evidentemente relacionado con figuras geométricas y por tanto se constituye como una herramienta de modelación y en particular de diversas formas de argumentación (MEN, 1998).

Dicho lo anterior, proponemos la siguiente pregunta que orientará el desarrollo de esta investigación en torno a los objetivos propuestos más adelante

¿Qué transformación se genera en nuestro conocimiento profesional sobre argumentación cuando desarrollamos planes de acción tendientes a mejorar el conocimiento sobre la enseñanza de la argumentación?

Justificación

A continuación, exponemos las razones por las cuales consideramos que es importante y necesario realizar una investigación respecto al conocimiento del profesor de matemáticas sobre la argumentación y su enseñanza. Para ello, hicimos énfasis en indicar para qué se debe indagar sobre el conocimiento del profesor, por qué el profesor debe ser objeto de estudio de esta investigación y por qué es importante investigar el conocimiento del profesor enfocado en la argumentación.

En primera instancia, esta investigación está en correspondencia con los intereses de algunos investigadores del campo de la Didáctica de las Matemáticas que se han centrado en determinar cuáles son los conocimientos que debe tener un profesor para la enseñanza de las matemáticas. Así, existen diversas propuestas de modelos de conocimiento que buscan definir y caracterizar los elementos que componen el conocimiento de los profesores de matemáticas para desempeñarse eficazmente en su práctica (Shulman, 1987; Grossman, 1990; Ball y colaboradores, 2000; Rowland, Huckstep y Thwaites, 2005; Godino y Pino Fan, 2015). Otros investigadores se han vinculado a una línea investigativa en la cual los profesores identifican ideas para la enseñanza de las matemáticas con el fin de comprender el cómo, dónde y de qué manera el conocimiento matemático podría ser útil en las prácticas docentes (Hill, Rowan y Ball, 2005; Hill, Schilling y Ball, 2004; Ball y Bass 2003 citado en Stylianides 2008). En relación con lo anterior, con esta investigación pretendemos exponer la descripción de la transformación del conocimiento del profesor y la importancia de este cuando el mismo profesor es quien propone un plan de acción encaminado a mejorar sus prácticas de enseñanza, en especial cuando enseña a argumentar.

Por otro lado, en la actualidad se reconoce que es importante investigar sobre argumentación en la clase de matemáticas, y en particular, sobre el papel del profesor para favorecer este proceso. Así, algunas investigaciones han centrado sus estudios en identificar acciones del profesor que buscan favorecer la argumentación en el aula (Ayalon y Hershkowitz, 2017; Chapman, 2013). A su vez, Lin (2018) menciona que los profesores de matemáticas juegan un papel importante en la orquestación del discurso matemático y que deben aprender más sobre argumentación y a adquirir las habilidades pedagógicas para promover prácticas en el aula que les permitan buscar que los estudiantes hagan justificaciones y afirmaciones, animar a

los estudiantes a que analicen críticamente algún resultado y a modelar formas particulares para construir argumentos. No obstante, hay muy pocas investigaciones que se centran en el conocimiento del profesor cuando enseña a argumentar (Toro y Castro, 2020). En ese sentido, nuestra investigación pretende exponer la importancia de que el profesor de matemáticas adquiera, adapte o diseñe algunas estrategias que le permitan transformar su conocimiento respecto a la argumentación y otros procesos como explicación, justificación, validación y demostración para favorecer la enseñanza de la argumentación.

Finalmente, consideramos que las clases de matemáticas no deben ser netamente algorítmicas o procedimentales, es decir, que se proponen ejercicios rutinarios y operacionales. Simon y Erduran (2006) mencionan la importancia de enseñar a argumentar en la clase de matemáticas, puesto que el hecho de emplear estrategias pedagógicas para enseñar a argumentar son un medio para promover la comprensión conceptual de las matemáticas y para promover la discusión a partir de discursos hilados y coherentes con el fin de producir argumentos en los estudiantes. Dicho lo anterior, consideramos que esta investigación es necesaria ya que buscamos desarrollar nuevas estrategias para enseñar a nuestros estudiantes a argumentar.

Objetivos

Objetivo general

Caracterizar la transformación de nuestro conocimiento didáctico- matemático sobre argumentación, necesario para el desarrollo de las prácticas de enseñanza de este proceso, cuando desarrollamos acciones tendientes a generar cambios respecto a este conocimiento.

Objetivos específicos

- Proponer una adaptación al modelo del CDM (Godino y Pino Fan, 2015) de tal forma que pueda ser utilizado para caracterizar nuestro conocimiento respecto a argumentación, en diferentes momentos.
- Problematizar asuntos de nuestro conocimiento profesional referidos a argumentación, desarrollar planes de acción para atender esas problemáticas y recoger información que se convierta en insumo para dar cuenta del CDM involucrado.
- Utilizar la adaptación del CDM para caracterizar nuestro conocimiento didáctico matemático al finalizar cada plan de acción.
- Proponer un conjunto de categorías que permitan dar cuenta y razón de la transformación de nuestro conocimiento didáctico matemático respecto a argumentación.

Antecedentes

Aproximadamente desde hace unos 30 años los investigadores en Educación Matemática se han preocupado por aquellos conocimientos didácticos y matemáticos que debe tener un profesor de matemáticas para que su labor de enseñanza sea lo más idónea posible (Godino y Pino Fan, 2015). Diferentes autores mencionan la importancia de estudiar el conocimiento que debe tener un profesor para una enseñanza más idónea y han propuesto modelos para analizar dicho conocimiento. Las propuestas más destacadas son las que realizan: Shulman y Grossman (1987) con *el modelo del conocimiento del profesor*, Ball y sus colaboradores (2000) con su propuesta *Mathematical Knowledge Teaching* (MKT), Huckstep y Thawaites (2005) con el modelo del *Cuarteto del Conocimiento* y finalmente, Shoenfeld y Kilpatrick (2008) con el

modelo de *la Proficiencia en la Enseñanza de las Matemáticas*, Godino y Pino Fan (2009) con su propuesta *Modelo del Conocimiento Didáctico Matemático*.

En cuanto a diferentes investigaciones referentes al conocimiento profesional del profesor, y específicamente sobre su conocimiento en argumentación, Lin (2018) realiza un estudio en el cual analiza los efectos en la enseñanza de la argumentación en las aulas de primaria, cuando el profesor mejora sus conocimientos respecto a este proceso. El marco de referencia de esta investigación se centra en identificar el papel de las conjeturas para promover la argumentación y en determinar algunas características de los ambientes de aprendizaje en los cuales la argumentación se convierte en una práctica. Para desarrollar el estudio, Lin conforma una comunidad de aprendizaje compuesta por seis profesores, en la cual se realizan acciones tendientes a identificar el significado de una conjetura, la relación entre argumentación y validación en el marco de la formulación de conjeturas, y el papel de las normas para favorecer estos dos procesos. En estas sesiones, la clase de matemáticas en primaria, de uno de los seis profesores, se convertía en objeto de discusión. Durante este proceso las sesiones de estudio de la comunidad fueron video grabadas y transcritas, con el propósito de recoger información respecto al aprendizaje de los profesores. Entre los resultados encontrados está que es posible que los profesores adapten y desarrollen su enseñanza para la argumentación y provoquen un cambio en la naturaleza del discurso matemático en el aula, a medida que su conocimiento se transforma.

Otra investigación concerniente al conocimiento del profesor en argumentación es la que realizaron Ayalon y Hershkowitz (2017). Estos autores profundizan e investigan respecto a la atención que dan los profesores de matemáticas de grado séptimo a las situaciones de enseñanza que promueven la argumentación en los estudiantes. Para este trabajo se tuvo en cuenta la participación de 17 profesores y se les pidió que eligieran tres tareas de un libro de matemáticas

que a su concepto favorecieran la producción de argumentos en los estudiantes, luego, debían justificar su selección. Su trabajo se enmarca en tres tipos de análisis entre los cuales se interesan por las justificaciones que manifiestan los profesores cuando escogen una tarea de un libro de texto que para ellos promueve la argumentación en los estudiantes. El primer análisis consistió en identificar si las tareas que seleccionaron los profesores efectivamente promovían o no la argumentación en los estudiantes. Dado que los investigadores tienen vasta experiencia en el diseño de tareas de argumentación, identificaron cuáles tareas promovían la argumentación y las clasificaron en tres niveles de argumentación (bajo, medio y alto). El segundo análisis se realizó por medio del modelo de Stylianides que se denomina *razonamiento y adaptación*. Es decir, formulación de conjeturas, búsqueda de generalización por patrones, argumentos no probatorios y aportación de pruebas (Stylianides, 2009 citado en Ayalon y Hershkowitz, 2017). En este, se analizan las 72 tareas elegidas por los docentes centrando la atención en el propósito de la argumentación en la tarea, si en la tarea solicitan justificar y de qué manera (demostración o argumento formal) o si en la tarea se solicitan argumentos informales (empíricos). Por último, el tercer análisis, clasifica en unas dimensiones el tipo de justificaciones que daban los profesores al momento de elegir la tarea del libro. Esta investigación arroja resultados en los cuales se devela que la mayoría de los profesores que participaron de la investigación escogieron tareas en las que el nivel de argumentación era el menos intuitivo posible, es decir, centran su atención en la formalidad que deben tener los argumentos que dan los estudiantes. Sin embargo, también se reporta que los profesores dan poca importancia a la dimensión sociocultural de la argumentación, es decir, a las interacciones que deben surgir entre profesor y estudiantes o entre estudiantes y estudiantes para favorecer la argumentación.

Otro estudio importante respecto al conocimiento del profesor sobre argumentación es el que desarrollan Simon, Eduran y Osborne (2006). El propósito de esta investigación fue el estudio de la enseñanza de la argumentación en contextos científicos a partir de las clases de doce profesores de secundaria en la ciudad de Londres. Estos, asistían a una serie de talleres para desarrollar materiales y estrategias con el fin de enseñar a argumentar a sus estudiantes. Luego, los docentes grababan las sesiones de clase a las cuales posteriormente se les realizaba una transcripción para obtener una representación escrita de los argumentos que daban los estudiantes en las clases. Los profesores evaluaban la calidad de los argumentos a partir del desarrollo de herramientas analíticas que se diseñaron partiendo del modelo de argumentación de Toulmin (1958, citado por Simon, Eduran y Osborne, 2006). Además, se decidió evaluar las acciones que realizaron cinco profesores con el propósito de formular futuros programas de formación para profesores en cuanto al proceso de argumentación. Este proyecto dio a conocer que, para la enseñanza de la argumentación, los profesores también relacionaron la argumentación con otros procesos como la justificación y la validación. Además, los autores también concluyeron que, para enseñar a argumentar, es necesario un proceso de reflexión sobre los errores y aciertos que tiene un profesor cuando adapta o diseña tareas de argumentación.

Dicho lo anterior, vemos que se han desarrollado varias investigaciones en torno al conocimiento del profesor sobre argumentación y su enseñanza, y pensamos que es importante investigar sobre nuestro propio conocimiento para reflexionar respecto a cómo enseñamos a argumentar en nuestras clases de matemáticas. Para ello, consideramos relevantes algunos aspectos metodológicos como lo son las grabaciones y transcripciones de sesiones de estudio con pares académicos; la generación de comunidades de práctica de profesores; el diseño de planes y la ejecución de acciones que promuevan la producción de argumentos en los estudiantes.

Marco de referencia

En este capítulo, presentamos los referentes que son el sustento teórico de nuestra investigación. Haremos énfasis en el Enfoque Onto semiótico (EOS) en el cual se enmarca el modelo del Conocimiento Didáctico Matemático del profesor (CDM) que proponen Godino y Pino Fan (2015). Además, indicamos cómo es posible utilizar el CDM para el análisis del conocimiento de un profesor de matemáticas requerido para la enseñanza de la argumentación.

Enfoque Onto semiótico

Del EOS hay dos asuntos que nos interesa describir en este apartado. Por una parte, una descripción de los problemas epistemológicos y cognitivos que dieron origen al enfoque; por otra parte, el interés actual del EOS por articular diferentes teorías sobre el conocimiento del profesor. Estos dos asuntos los describimos en relación con el propósito de nuestra investigación: caracterizar la transformación de nuestro conocimiento didáctico- matemático sobre argumentación, necesario para el desarrollo de las prácticas de enseñanza de este proceso, cuando desarrollamos acciones tendientes a generar cambios en este conocimiento.

El EOS centra su interés en dos problemáticas relacionadas con el propósito de nuestra investigación. Estas problemáticas son de carácter epistemológico y cognitivo. Por una parte, el **problema epistemológico** se centra en indagar sobre asuntos relacionados con el significado y origen de un objeto matemático, la forma como se construye y se relaciona con otros objetos, el contexto histórico o institucional en el cual surge, entre otros. Por otra parte, el **problema cognitivo** indaga sobre el significado de un objeto para un sujeto en un momento y circunstancias específicas. A partir de estos dos tipos de interrogantes, el EOS busca precisar y explicitar la naturaleza del objeto matemático y su emergencia a partir de las prácticas

matemáticas que se desarrollan en momentos y comunidades específicas. También elabora una ontología matemática explícita (tipos de objetos y procesos matemáticos) que permiten describir en términos operativos el significado del objeto matemático desde un punto de vista personal e institucional. Si bien esta investigación no está centrada en los objetos matemáticos, sino en un objeto discursivo que hace parte del discurso matemático (argumento/argumentación), consideramos que los dos tipos de problemáticas que busca atender el EOS aplican para los objetivos expuestos para este estudio. Así, asuntos relacionados con el significado del argumento/argumentación, su construcción dentro de un discurso matemático, o los significados personales que un sujeto pueda tener en un momento y contexto específico, son de nuestro interés.

El EOS también ha convertido en objeto de interés el problema de comprensión, comparación y articulación de teorías didáctico-matemáticas. Para este enfoque, la existencia de diversas teorías para abordar problemas didáctico-matemáticos se puede ver por algunos autores como un factor positivo dada la complejidad de estos. No obstante, si cada teoría aborda un aspecto parcial de las problemáticas, con lenguajes y supuestos distintos, se pueden obtener resultados contradictorios que pueden dificultar el progreso investigativo. Por tanto, es necesario tratar de comparar, coordinar e integrar esas teorías en un marco que incluya las herramientas necesarias pero suficientes, respetando el principio fundamental de paz y armonía metodológica. Para lograr ello, el EOS propone un conjunto de las herramientas para que el trabajo realizado en teorías específicas permita elaborar una teoría general para el tratamiento de problemas didáctico – matemáticos. Estas son:

- **Significados pragmáticos.** Estos son los significados entendidos como sistemas de prácticas (operativas, discursivas y normativas). Esto permite realizar un primer nivel de

análisis en el que se distinguen significados institucionales y personales dando lugar al reconocimiento de una diversidad de significados parciales junto con un significado global para cada objeto.

- **Configuración onto semiótica.** La noción de configuración onto semiótica que permite alcanzar un nivel de análisis más detallado y microscópico de los objetos implicados y las prácticas matemáticas. En el eje central están los problemas y las prácticas matemáticas que tienen lugar en un contexto institucional. También se propone una categoría de objetos matemáticos implicados en la resolución de estos problemas los cuales se les conocen como elementos primarios (Elementos lingüísticos, Proposiciones, Conceptos, Procedimientos y Argumentos). Estos objetos primarios pueden ser contemplados desde diferentes puntos de vista: personal, institucional, ostensivo, no ostensivo, unitario, sistémico, ... etc.
- **Configuración y trayectoria didáctica.** Sirve para descomponer un proceso de estudio que tiene lugar en el tiempo, en unos segmentos de actividad didáctica centrados en la resolución y el abordaje de un problema matemático, tarea o proyecto. Estos procesos de estudio se describen de manera detallada con la secuencia de configuraciones didácticas, que es lo que se le conoce como trayectoria didáctica. Es importante ver que en esas trayectorias didácticas se identifican también subtrayectorias (epistémica, cognitiva-afectiva e instruccional)
- **Dimensión Normativa.** En esta herramienta se tiene en cuenta la identificación de normas, hábitos, reglas que condicionan el desarrollo de los procesos de estudio matemático. Aquí se extiende la noción de contrato didáctico y norma socio-matemática, etc.

- **Idoneidad didáctica.** Esta herramienta sirve para examinar las prácticas de los profesores de matemáticas. En esta herramienta se distinguen una serie de facetas (Interaccional, mediacional, ecológica, epistémica, cognitiva y afectiva) y para cada una de estas facetas o dimensiones se proponen unos criterios de idoneidad y de optimización de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Las anteriores cinco herramientas permitieron elaborar un sistema de categorías de competencias y conocimientos didáctico-matemáticos del profesor de matemáticas que puede servir de base para diseñar procesos formativos orientados al desarrollo profesional de los profesores de matemáticas. Este sistema se ve reflejado en el modelo del CDM que exponemos a continuación.

Conocimiento didáctico matemático del profesor (CDM)

Godino (2009) afirma que los modelos de conocimiento matemático para la enseñanza elaborados desde las investigaciones en educación matemática (ver sección de antecedentes) incluyen categorías demasiado globales, por ello, considera útil disponer de modelos que permitan análisis más detallados de cada uno de los tipos de conocimiento que se ponen en juego en una enseñanza efectiva de las matemáticas. Esto permitiría orientar el diseño de acciones formativas y la elaboración de instrumentos de evaluación de los conocimientos de los profesores. Con el propósito de subsanar estas falencias, proponen el CDM, que es el modelo que utilizaremos en esta investigación para caracterizar nuestro conocimiento profesional para la enseñanza de la argumentación, en diferentes momentos de la ejecución de una serie de planes de acción que pretenden abordar ese conocimiento.

En el CDM, el conocimiento del profesor de matemáticas se devela a partir de las prácticas matemáticas y didácticas. Las prácticas matemáticas incluyen la realización de acciones operatorias o procedimentales, que indican la posesión de una competencia o capacidad (conocimiento en uso), y las prácticas didácticas incluyen acciones de tipo discursivo y declarativo, indicando por consiguiente la explicitación de un conocimiento. Dado que esta tesis no pretende caracterizar el CDM respecto a un objeto matemático, sino respecto a un objeto discursivo o meta matemático (argumento/argumentación), vemos pertinente centrarnos en las practicas discursivas y declarativas. Ello nos permitirá capturar evidencia de nuestro conocimiento a lo largo de la investigación y poder analizar la transformación de nuestro conocimiento profesional respecto al objeto discursivo elegido.

El modelo del CDM (Godino y Pino Fan, 2015) se fundamenta principalmente en el modelo de razonamiento y acción pedagógica propuesto por Shulman (1987, citado por Godino & Pino Fan, 2015) y el modelo Conocimiento matemático para la enseñanza propuesto por Ball, Thames y Phelps (2008, citado por Godino & Pino Fan, 2015). Shulman propone siete categorías del conocimiento del profesor: conocimiento del contenido, conocimiento pedagógico general, conocimiento curricular, conocimiento pedagógico del contenido, conocimiento de los estudiantes y sus características, conocimientos de los contextos educativos y conocimientos de los fines de la educación. Además, hace especial énfasis en el conocimiento pedagógico del contenido ya que este es una mezcla del conocimiento del contenido con el conocimiento pedagógico, lo cual lo convierte en un conocimiento especializado para la enseñanza. Por su parte, Ball, Thames y Phelps se apoyan de las ideas de Shulman y proponen un modelo del conocimiento del profesor, que consta de dos categorías: conocimiento del contenido (que incluye el conocimiento sobre el contenido matemático y el currículo, y el conocimiento

didáctico del contenido) y conocimiento pedagógico del contenido (que incluye conocimiento de las características de los aprendices, del contexto educativo y referente a los objetivos educativos y valores).

Tomando como referencia, principalmente, al modelo Razonamiento y Acción Pedagógica propuesto y el modelo Conocimiento Matemático para la Enseñanza, el CDM establece que el conocimiento de un profesor se caracteriza por medio de tres dimensiones: la dimensión matemática (referente al conocimiento sobre el contenido matemático en un nivel educativo específico y su relación con otros procesos y objetos de la matemática), la dimensión didáctica (referente al conocimiento necesario para la enseñanza del contenido matemático) y la dimensión meta-didáctico-matemática (referente a conocimientos acerca de las normas, Meta normas, restricciones conceptuales, reflexión sobre la práctica y valoración de la idoneidad didáctica). En esta investigación solo nos enfocaremos en la dimensión didáctica porque estamos interesados en develar nuestro conocimiento sobre argumentación requerido para la enseñanza.

La **dimensión didáctica** se divide en seis facetas: epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica; cabe resaltar que estos conocimientos son de una naturaleza didáctico-matemática ya que los conocimientos respecto a estas facetas están relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Dado que la propuesta de Godino y Pino- Fan (2015) se centra en la enseñanza de objetos matemáticos, en este marco de referencia presentamos una adaptación para repensar el modelo en términos del objeto/proceso argumento/argumentación. Ello implica, realizar una adaptación a la descripción de cada faceta para escribirla en términos del este objeto.

Faceta Epistémica: Corresponde con el conocimiento especializado del contenido propuesto por Hill, Ball y Schilling (2008). Es el conocimiento de la pluralidad de los

significados institucionales de cualquier objeto matemático, dependiendo de los diferentes contextos de uso, y el reconocimiento del sistema de prácticas, objetos y procesos implicados en cada significado parcial. Para términos de esta investigación, implica que el profesor tenga un conocimiento relativo a: conceptualización sobre argumento y argumentación matemática, representación de un argumento, elementos claves de un argumento, características del proceso de argumentación, tipos de argumentos y relación entre ellos, relación entre argumentación y otros procesos y prácticas discursivas (explicación, justificación, etc.), conexiones entre la argumentación con otros procesos, entre otros. Esta faceta del conocimiento permite a un profesor responder las preguntas ¿Existe otra forma de argumentar una proposición? ¿Qué conocimientos se ponen en juego al argumentar? ¿Qué es argumento y argumentación? ¿Qué relación existe con otros procesos? ¿Qué conocimiento se tiene sobre vocabulario especializado relacionado con argumentación?

Faceta cognitiva: Corresponden con el conocimiento del profesor acerca de las características y aspectos que están relacionados con la forma cómo los estudiantes aprenden, razonan y entienden las matemáticas y cómo progresan en su aprendizaje. En relación con la argumentación, en la faceta cognitiva se movilizan los conocimientos del profesor respecto a cómo los estudiantes aprenden, razonan y entienden la argumentación. También, un conocimiento sobre los errores, dificultades y obstáculos en los momentos de planear y ejecutar una sesión de clase, teniendo en cuenta las posibles producciones de los estudiantes o posibles argumentos que pueden producir. Esta faceta responde a las preguntas: ¿Qué características podrían tener los argumentos que se esperan por parte de los estudiantes? ¿Cuáles dificultades podrían tener los estudiantes a la hora de argumentar la solución de la tarea? ¿Cuál podría ser la

interpretación de los estudiantes respecto a los términos relacionados con la argumentación, que involucra el profesor en sus clases?

Faceta afectiva: Incluyen los conocimientos sobre los aspectos afectivos, emocionales, actitudinales y creencias de los estudiantes con relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido. Con relación a esta faceta en esta investigación nuestro interés se centra en el conocimiento que le permite al profesor describir las experiencias y sensaciones de los estudiantes dentro de una clase concreta a la hora de argumentar un problema matemático determinado. Esta faceta responde las siguientes preguntas: ¿Qué tipo de emociones y creencias movilizan mis alumnos a la hora de argumentar? ¿Qué acciones motivan a los estudiantes a la hora de argumentar en clase de Geometría?

Faceta interaccional: Hace referencia a los conocimientos necesarios para prever, diseñar, organizar, implementar y evaluar secuencias de interacciones que se dan entre las personas y los recursos involucrados en el proceso de enseñanza y aprendizaje, estas interacciones tienen el objetivo de fijar y negociar significados de los alumnos. Cabe resaltar que estas interacciones no solo se establecen entre el profesor y los alumnos, sino también se puede establecer interacciones entre los alumnos, alumnos-recursos y profesor-alumnos-recursos. Por esta razón consideramos que el conocimiento que se moviliza para la organización de tareas hace parte de esta faceta. Será de nuestro interés fijar la atención en aspectos en los que esta faceta favorece la enseñanza de la argumentación matemática, en el diseño de tareas que favorecen la producción de argumentos por parte de los estudiantes y las interacciones que favorecen el proceso de argumentación. Esta faceta responde las preguntas: ¿Qué preguntas o interacciones podría hacer el profesor para que los estudiantes hagan explícitos sus argumentos? ¿Cómo

distribuir los momentos de la clase para que favorezca la producción colectiva de argumentos?
¿Qué metodología de clase favorece la producción de argumentos?

Faceta mediacional: Se refiere a los conocimientos que el profesor debe tener respecto a uso y evaluación de la pertinencia del uso de recursos (tecnológicos, materiales y temporales) para potenciar el aprendizaje de los estudiantes. Además, de tener en cuenta el tiempo que se dará a las acciones que buscan favorecer el aprendizaje. En esta faceta estamos interesados en el conocimiento del profesor para favorecer el proceso de argumentación en los estudiantes a través de la implementación de recursos y materiales tecnológicos. Cabe aclarar que consideramos que la tarea impresa la consideramos como un recurso, pero el conocimiento que moviliza el docente para diseñar la tarea hace parte de la faceta interaccional. Esta faceta responde los siguientes interrogantes: ¿De qué manera el recurso o material favorece la argumentación? ¿Cómo orquestar los recursos para favorecer la producción colectiva de argumentos?

La faceta ecológica: Refiere a los conocimientos sobre el currículo de matemáticas del nivel educativo en el que se contempla el estudio del objeto matemático, sus relaciones con otros currículos, y las relaciones que dicho currículo tiene con los aspectos sociales, políticos y económicos, que soportan y condicionan el proceso de enseñanza y aprendizaje. En esta faceta nos centramos en el conocimiento del docente sobre la importancia de favorecer la argumentación matemática en los estudiantes en diversos contextos y la pertinencia de abordar la enseñanza de la argumentación según las políticas educativas nacionales o institucionales. Esta faceta responde las preguntas: ¿En qué momento exigir ciertos tipos de argumentos según el nivel curricular en el que se propone el problema? ¿Qué tipos de argumentos se desean abordar en ciertos grados según las políticas curriculares nacionales o institucionales? ¿Por qué en el currículo escolar es pertinente el desarrollo del proceso de argumentación?

Estas seis facetas mencionadas anteriormente se deben contemplar con el fin de analizar, describir y desarrollar el conocimiento de los profesores en las diferentes fases de los procesos de enseñanza y aprendizaje del proceso de argumentación.

Metodología

En este capítulo presentamos la metodología de nuestro proyecto de investigación refiriéndonos al enfoque, la aproximación y la estrategia investigativa, esta última articulándola con el marco de referencia. Realizamos una descripción general de la estrategia investigativa Investigación-Acción, mencionando las características principales, los ciclos y las fases de cada uno de estos, en consonancia con los objetivos de nuestra investigación, y teniendo en cuenta la pertinencia de emplear dicha estrategia.

Posicionamiento Investigativo

Esta investigación se enmarca en un enfoque fenomenológico, ya que pretendemos describir, interpretar, explicar y cuestionar un fenómeno en estudio, que, para este caso, es la caracterización de la transformación de nuestro conocimiento profesional con respecto a la argumentación y su enseñanza. En busca de dicha transformación, decidimos establecer unas acciones formativas, con ayuda de un equipo de investigación, para ampliar nuestro conocimiento al ser estudiantes de la MDM, cohorte 2020-1. Además, en esta investigación asumimos una aproximación interpretativa, la cual consiste en realizar un rastreo del significado de las acciones, interacciones y discursos (gestual, verbal, escrito) que surgen de los participantes (Camargo, 2021). Una de las estrategias investigativas que se enmarca en este enfoque es la Investigación-Acción. La cual explicamos en el siguiente apartado.

Estrategia investigativa

La Investigación-Acción (IA) es una estrategia investigativa propuesta inicialmente por Kurt Lewin quien la concebía como una espiral de fases que se repetían de forma cíclica. Estas fases son: análisis-diagnóstico de un problema, recolección de la información, conceptualización de la información, formulación de estrategias de acción para resolver el problema, plan de ejecución y evaluación de resultados (Martínez 2000). Algunos investigadores (Freire, 1970; Hilda Taba, 1957; Stenhouse, 1998; citados por Martínez, 2000), se han valido de esta estrategia específicamente en el campo de la educación. En general, la IA en el ámbito educativo, se centra en la acción y reflexión de los profesores investigadores para atender una problemática en la práctica que afecta e interesa profundamente generando una transformación en las prácticas profesionales. Para atender a nuestros propósitos investigativos, se realizó una adaptación de la propuesta original de la IA con el fin transformar nuestro conocimiento. Específicamente, no pretendemos una transformación en la práctica, sino en el conocimiento que soporta las prácticas de enseñanza de la argumentación.

Dicho lo anterior, concebimos la IA como una espiral de ciclos sucesivos, sistemáticos, críticos, evolutivos y de indagación, que permiten la acción y la reflexión de los docentes sobre sus prácticas. La IA es cíclica porque se ejecuta en un conjunto de fases que se repiten de forma sucesiva; es decir, después de atender una problemática, determinar un plan de acción que investigue y solucione las necesidades detectadas, realizar acciones en pro de superar las dificultades y evaluar resultados de forma reflexiva, se plantean nuevas inquietudes y se procede de la misma manera. En la Figura 1 reportamos la estructura de cada ciclo y las fases que lo conforman.

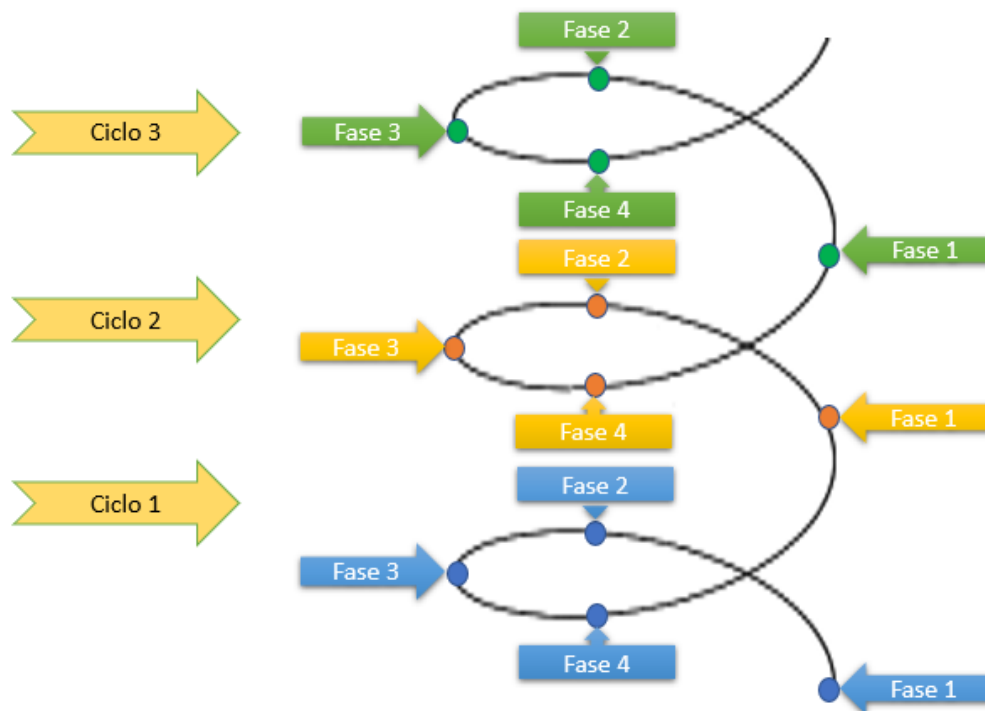


Figura 1. Diagrama de la IA: fases de cada ciclo. Fuente: Elaborada por los autores

La primera fase de un ciclo de la estrategia IA consiste en la detección de un problema, en el cual se plantean interrogantes y se consideran dificultades que los docentes investigadores quieren atender. Si bien la estrategia IA problematiza un asunto sobre la práctica, en este caso lo que se va a problematizar es un asunto relativo a nuestro conocimiento profesional respecto a la argumentación y su enseñanza. En la segunda fase, los docentes investigadores establecen un plan de acción para atender las dificultades detectadas en la fase anterior. En la tercera fase se implementa el plan de acción, se efectúa la recolección de la información y se realiza el tratamiento de la información hasta ser convertida en dato investigativo. En la cuarta fase se realiza la evaluación de forma reflexiva y el análisis de los datos investigativos. Este análisis se realizará con apoyo del CDM el cual nos permitirá realizar una clasificación por facetas de nuestro conocimiento (datos investigativos) en diferentes **estados del conocimiento**. Estos se refieren al conjunto de conocimientos que posee un profesor sobre una temática en específico en

un determinado momento o intervalo de tiempo. Para nuestro proyecto investigativo los estados son:

- **Estado Base:** Conjunto de conocimiento acerca de la argumentación y su enseñanza al iniciar el ciclo 1.
- **Estado 1:** Conjunto de conocimiento acerca de la argumentación y su enseñanza al finalizar el ciclo 1.
- **Estado 2:** Conjunto de conocimiento acerca de la argumentación y su enseñanza al finalizar el ciclo 2
- **Estado 3:** Conjunto de conocimiento acerca de la argumentación y su enseñanza al finalizar el ciclo 3

Una vez hechas estas clasificaciones, realizaremos una comparación entre las clasificaciones del conocimiento profesional en diferentes etapas de la investigación y así reportar la transformación del conocimiento profesional.

La IA además de tener una estructura en espiral tiene características importantes como las que exponemos a continuación:

- Es un proceso colaborativo que se adelanta entre un equipo de profesores investigadores; de esta manera se apoyan para atender el fenómeno y generar conocimiento compartido. Para esta investigación, los profesores investigadores somos dos estudiantes de la MDM con la asesoría de una profesora de la MDM quien pertenece al grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría de la UPN.
- En esta estrategia investigativa los profesores involucrados actúan como investigadores y sujetos investigados al mismo tiempo. Es decir, somos los participantes informantes y se realiza el análisis a partir de nuestras prácticas para dar cuenta de los resultados de la investigación.

- Aunque los participantes sean los mismos investigadores, hay que buscar mecanismos para garantizar imparcialidad al momento de construir y analizar los datos. Es decir, la estrategia es confiable cuando se construyen los datos de manera cuidadosa y fiel a los hechos.
- Los profesores investigadores e investigados son quienes plantean las inquietudes y problemáticas que determinan el rumbo de la investigación.

Pensamos que la IA es pertinente para nuestro trabajo de grado, ya que nos permite atender a una situación poco satisfactoria la cual es ¿Cómo enseñar a argumentar en clase de Geometría? Para responder a esta pregunta, hay que considerar en una primera instancia asuntos sobre: Definición de argumentación y argumento, partes de un argumento, formas de representar un argumento y estrategias para favorecer la enseñanza de la argumentación. Luego, ir problematizando en otras situaciones que vayan surgiendo a medida que se vaya profundizando en estos asuntos.

Teniendo en cuenta lo mencionado anteriormente, en esta investigación se desarrollaron 3 ciclos. Las preguntas que orientaron cada ciclo se reportan en la Tabla 1.

Ciclo 1	Ciclo 2	Ciclo 3
¿Qué conocimiento requiere un profesor al momento de diseñar una tarea que favorezca la producción de argumentos en la clase de Geometría, desarrolladas con el apoyo de un EGD?	¿Cómo favorecer la enseñanza de la argumentación y la demostración en nuestras clases de Geometría?	¿Cómo incorporar estrategias que favorecen la producción de argumentos en el diseño de una tarea?

Tabla 1. Preguntas que orientaron cada ciclo de la estrategia Investigación - Acción

En la Tabla 2, presentamos las fases que componen cada ciclo de nuestra investigación.

	Fase 1: Detección de un subproblema	Fase 2: Plan de acción	Fase 3: Ejecución del plan de acción y recolección de información	Fase 4: Análisis
Ciclo 1	Problema detectado por los profesores de la MDM, falta de conocimiento especializado en argumentación, diseño de tareas y EGD.	Plan de acción diseñado por los profesores de la MDM. El cual consistió en el diseño de seminarios que reforzaran el conocimiento profesional de los estudiantes de la MDM con respecto a la argumentación, diseño de tareas y EGD.	La implementación del plan de acción se realizó a través de la incorporación de seminarios en el primer y segundo semestre de la MDM que apuntara a atender las problemáticas sobre argumentación detectadas por los profesores de la maestría. Mediante una técnica de evocación y recuerdo, a través de la escritura de narrativas se realizó la recolección de la información, luego se procedió a capturar fragmentos de las narrativas	En esta fase se clasifican los datos investigativos de cada estado del conocimiento de acuerdo con las categorías establecidas por el CDM. Luego se procede a clasificar los datos identificados en cada faceta en los descriptores que caracterizan a cada faceta del CDM y finalmente se aplica microanálisis para debelar que conocimiento en esencia tenían los profesores en cada estado del conocimiento. Finalmente se comparan estas descripciones en busca de establecer diferencias o similitudes entre los estados del conocimiento a través de la herramienta analítica conocida como comparación.
Ciclo 2	Problema acerca del uso de vocabulario especializado y como favorecer la enseñanza de la argumentación y demostración	El diseño del plan de acción consistió en la creación de un grupo de estudio junto con nuestros compañeros Carlos Guevara y Omar Martínez con el fin de estudiar literatura relacionada con la enseñanza de la argumentación y vocabulario especializado y posteriormente cada grupo diseñó una ponencia. En nuestro caso, la temática de nuestra ponencia trató sobre asuntos relacionados a la enseñanza de la argumentación y la demostración.	La implementación del plan de acción se llevó a cabo desarrollando encuentro periódicos con nuestros pares académicos para estudiar los asuntos relacionados con la problemática detectada en este ciclo, encuentros mediados por la plataforma Teams. Fragmentos de la transcripción de las ponencias, que develen nuestro conocimiento profesional y la transformación de este	
Ciclo 3	Problema acerca de la implementación en el aula de tareas que se resuelven con ayuda de un EGD que favorecen el proceso de argumentación	Reflexionar acerca del diseño de una tarea desarrollada en un EGD que favorece la producción de argumentos después de un acercamiento teórico.	El plan de acción se llevó a cabo a través del rediseño de una secuencia de tareas elaboradas en el ciclo 1 de esta investigación. Posteriormente se	

			realizó una institucionalización sobre los cambios realizados a dicha tarea, por medio de la plataforma Teams. La información se capturó a través de las transcripciones de reuniones en la que se discutió detalles acerca del diseño de la tarea	
--	--	--	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--

Tabla 2. Fases que componen los Ciclos de la Investigación

Recolección de información y construcción de datos investigativos

En esta investigación utilizamos principalmente tres estrategias para recolectar información (forma cómo se construye el insumo a partir del cual se obtienen los datos):

- **Construcción de narraciones:** Las narraciones las construimos con el fin de generar datos investigativos a través de una técnica de evocación y recuerdo. A partir de fragmentos de tareas realizadas en el marco de los seminarios de la MDM y apuntes de estas clases, en los cuales nos referíamos a asuntos relacionados con la argumentación, evocamos qué sabíamos sobre dicho asunto antes de iniciar el ciclo y al culminarlo. Con ello, construimos narraciones sobre nuestro conocimiento al inicio, en el transcurso y al finalizar cada ciclo.
- **Construcción de transcripciones:** video grabamos interacciones realizadas en el marco de los planes de acción o en sesiones con la asesora. Luego, generamos transcripciones de las sesiones, específicamente de las partes en las que evocábamos un conocimiento relativo a la argumentación y su enseñanza. Estas transcripciones fueron insumo para la construcción de datos investigativos.

- **Construcción de apartados críticos y reflexivos:** Centramos nuestra atención en las transcripciones de las sesiones en las que nos reunimos a discutir sobre el diseño de una tarea. Luego, identificamos aquellos fragmentos en los cuales dimos cuenta de algunas acciones que realizamos durante el diseño para escribir un apartado en el cual hiciéramos una crítica reflexiva a dichos fragmentos.

Luego de que contamos con un insumo, procedimos a codificarlo. Los códigos utilizados y los insumos asociados a cada ciclo los reportamos en los Capítulos 4, 5 y 6, en los cuales se muestra el desarrollo de cada ciclo.

Con los insumos elaborados, procedimos a identificar en cada uno, fragmentos de las narraciones o de las transcripciones en los cuales se hablará de un asunto específico relativo a la argumentación o a asuntos relacionados con su enseñanza. En una tabla colocamos todos los fragmentos, indicando el insumo al cuál correspondían y el estado del conocimiento al que estaba asociado (Estado base, Estado de transición del Estado base al 1, Estado 1, Estado de transición del Estado 1 al 2, Estado 2 o Estado 3). Posteriormente, eliminamos los datos que tenían prácticamente la misma información en cada estado. Los fragmentos restantes, son los datos investigativos de esta investigación. La Tabla 3 reporta un ejemplo.

Insumo	Datos	Estado
NE _B	Cuando nos inscribimos a la maestría a menudo utilizábamos las palabras argumentación, argumento, justificación, explicación y validación estos términos los entendíamos como sinónimos.	Base
NE _B	Concebíamos por argumentación a la justificación de una idea.	Base

Tabla 3. Ejemplos de datos investigativos

Descripción de procesos de análisis del CDM

A continuación, exponemos los descriptores que proponemos para cada una de las facetas del CDM que guiarán el análisis en los capítulos posteriores.

Caracterización del Conocimiento didáctico matemático en cada estado

Para caracterizar nuestro CDM en cada estado, clasificamos cada dato en una faceta del CDM y en un descriptor de acuerdo con la Tabla 4. Esta propuesta se obtuvo a partir de los expuesto en el marco de referencia.

Faceta	Descriptores
Epistémica	Ep1: Definición de argumento y argumentación. Ep2: Tipos de argumentos. Ep3: Términos afines a la argumentación (justificación, explicación, validación y demostración). Ep4: Formas de representar un argumento. Ep5: Modos de razonamiento para construir un argumento. Ep6: Elementos que conforman un argumento.
Cognitiva	Co1: Uso común de términos especializados, relacionados con argumento y argumentación, por parte de los estudiantes (argumento, argumentación, justificación, explicación, validación, demostración). Co2: Dificultades o errores de los estudiantes respecto a la argumentación.
Interaccional	In1: Interacciones que favorecen la producción de argumentos. In2: Temporalidad para favorecer la producción de argumentos In3: Agrupamiento que favorecen la producción de argumentos. In4: Metodología de enseñanza que favorezca la producción de argumentos. In5: Criterios para diseñar tareas que favorezcan la producción de argumentos. In6: Relación entre una tarea diseñada y los argumentos que generan.
Mediacional	Me1: Relación entre el uso de un recurso y la producción de argumentos. Me2: Herramientas de un recurso útiles para favorecer la producción de argumentos.
Ecológica	Ec1: Tipos de argumentos que se pretenden abordar en ciertos grados según políticas curriculares nacionales o institucionales. Ec2: Importancia de promover la argumentación en el contexto educativo.

Tabla 4. Propuesta de descriptores para analizar nuestro CDM respecto a *argumentación/argumento*

La forma como realizamos el análisis en cada uno de los tres ciclos será de la siguiente manera. En una primera instancia clasificamos los datos investigativos en alguna faceta del conocimiento didáctico-matemático del CDM. Una vez clasificados los datos investigativos en las facetas, los ubicamos en alguno de los descriptores correspondientes a la faceta del conocimiento didáctico-matemático en la cual se encuentra el dato. Luego de realizar esta segunda clasificación, procedimos por facetas a escribir textos descriptivos en los cuales se develen las principales características, relaciones y dimensiones de estos datos a la luz del descriptor en el cual se encuentran ubicados este conjunto de datos.

Descripción del proceso de análisis de la transformación del CDM

Para analizar los datos investigativos utilizamos dos técnicas de análisis cualitativo extraídas del texto de Li-Strauss Corbin (2002), estas son *el análisis por medio del examen microscópico de los datos y comparación sistemática de dos o más fenómenos* los cuales describiremos a continuación.

La herramienta análisis microscópico de datos nos permitirá identificar en cada dato una palabra, frase u oración que nos permita percatarnos del significado del dato sin que dicho significado se vea afectado por nuestras experiencias personales o nuestras creencias. Por otro lado, emplearemos también una comparación entre datos debido a que es necesario encontrar propiedades y dimensiones para poder establecer relaciones concretas entre lo que se menciona en cada uno de los datos investigativos de cada uno de los Ciclos. A continuación, presentamos un ejemplo del uso de cada una de las herramientas mencionadas anteriormente.

Inicialmente, señalamos palabras clave en cada uno de los datos con el fin de determinar cuál era el significado de dicha palabra en el dato, por ejemplo, en el dato [02] “Argumento lo relacionábamos con el sustento teórico para soportar una idea, especialmente con el marco teórico que permite respaldar una demostración.”; las palabras lo relacionábamos nos permiten determinar que hay una relación al de sinonimia entre argumento y sustento teórico. Después de identificar las palabras clave en cada uno de los datos, evidenciamos que existían algunos vínculos entre algunos términos y por tanto consideramos que sería una categoría de transformación, dichas relaciones las caracterizamos a partir de las palabras clave como sinonimia, contención, intersección y diferenciación que se convirtieron en las subcategorías.

La herramienta de comparación nos fue útil después de tener las subcategorías propuestas para cada una de las categorías emergentes de transformación. Inicialmente tomamos los datos que estaban agrupados en cada una de las subcategorías e identificamos que en los dos primeros estados (Estado 0 y Estado 1) los datos se encontraban en las dos primeras subcategorías (sinonimia y contención), mientras que en los Estados 2 y 3, los datos correspondientes a vínculos entre argumentos se relacionaban a partir de las otras tres subcategorías (contención, intersección y diferenciación); así nos fue más fácil identificar en cuánto a la relación entre términos cómo fue que se dio la transformación del conocimiento a lo largo de esta investigación. Para la categoría asimilación y sus subcategorías, se realizó un proceso similar al descrito anteriormente.

En la Figura 2 exponemos las categorías de transformación del conocimiento y las subcategorías que surgieron a partir del proceso descrito; luego, explicitamos la definición de cada categoría y subcategoría como se reporta en la Tabla 5.

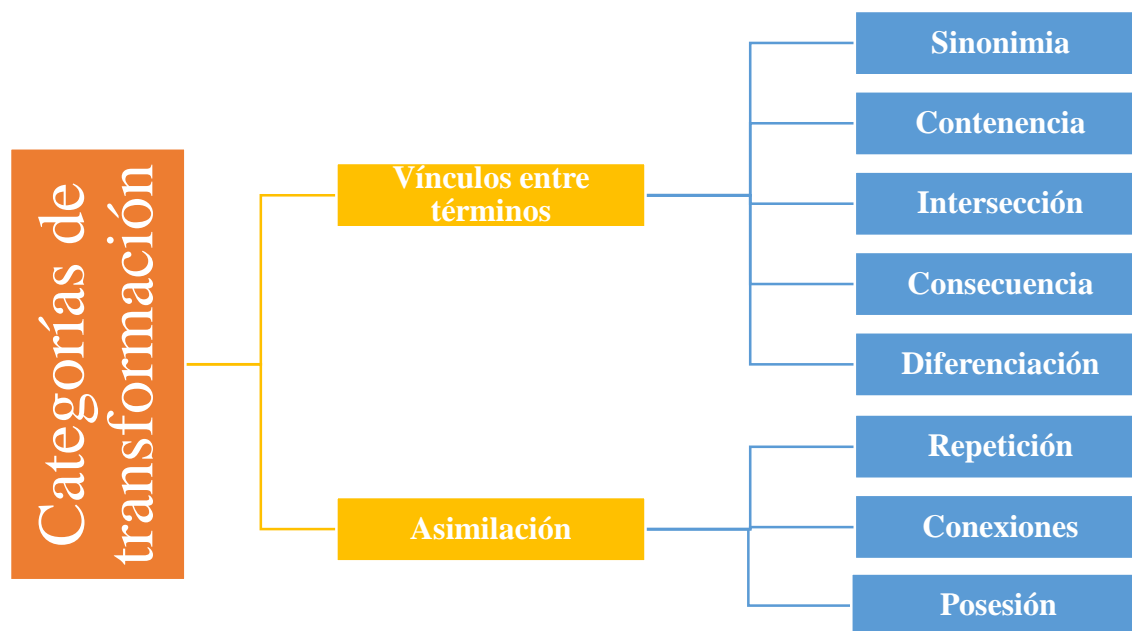


Figura 2. Categorías de transformación propuesta por los autores

Cada una de las categorías y subcategorías las hemos definido como exhibimos a continuación:

Categoría	Subcategoría
Vínculos entre términos: Esta categoría de transformación hace referencia a la forma en la cual los profesores establecían relaciones entre términos relacionados con argumento/argumentación y con su enseñanza.	Sinonimia: Relación de igualdad que hay entre el significado de dos o más términos.
	Contenencia: Relación que establece que un término es un caso particular de otro.
	Intersección: Relación que establece aspectos comunes entre dos términos.
	Consecuencia: Relación de dependencia entre dos términos.
	Diferenciación: Relación que establece diferencias entre dos términos.
Asimilación: Esta categoría hace referencia a la caracterización del proceso de transformación del conocimiento que permite hacer propio un hecho, una experiencia, una situación o conocimientos, ideas, etc., comprendiéndolos de modo que	Repetición: Hace referencia a cuando se parafrasean las ideas por una fuente de autoridad (profesor, artículos especializados, etc.).
	Conexiones: Hace referencia a establecer nexos entre las ideas de más de dos fuentes de autoridad.

se incorporen a la forma de pensar o de actuar.	Poseción: Hace referencia a la expresión de ideas propias del profesor, soportadas en las ideas de otros.
-------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Tabla 5. Categorías y subcategorías de transformación.

Ciclo 1

A continuación, exponemos cada una de las fases que corresponden al primer ciclo de nuestra investigación. En la primera fase exponemos la detección del problema inicial, posteriormente damos a conocer el plan de acción diseñado para atender dicha problemática, luego exhibimos la ejecución del plan de acción en el cual realizamos la recolección de la información y finalmente el análisis de los datos investigativos correspondiente al Ciclo 1.

Fase 1: Detección de un problema inicial

La Fase 1 de este ciclo, se aparta de lo propuesto en la Investigación Acción, dado que fueron los profesores de la Maestría quienes detectaron un problema central respecto a nuestro conocimiento profesional. El problema se determinó a partir de la experiencia que poseen los profesores de la MDM laborando en el programa de pregrado de formación de profesores en Matemáticas (Licenciatura en Matemáticas de la UPN) y un análisis previo que ellos realizaron a algunas producciones de los aspirantes a la Maestría de la cohorte 2020-1. En síntesis, la problemática encontrada refiere a la falta de conocimiento especializado referente al asunto de argumentación.

Fase 2: Formulación del primer plan de acción

Esta fase también se aparta de lo que se establece en una IA, ya que el plan de acción fue diseñado por los profesores de la MDM y este consistió en orientar seminarios en el primero y segundo semestre de la Maestría cuyo propósito era profundizar teóricamente en aspectos

relacionados con la argumentación, diseño de tareas y EGD. Los seminarios en los que estuvimos inmersos fueron Innovación e Investigación (II), Diseño y Desarrollo Curricular (DDC), Profundización en Matemáticas Elementales (PME) y Tecnología en Ciencias y Matemáticas (TCM); nosotros debíamos tomar apuntes de cada una de las sesiones con el fin de obtener información relevante a nuestro conocimiento respecto a la argumentación, además, de tener el registro digital de cada una de las tareas que desarrollábamos en cada seminario. Estos seminarios se desarrollaron en gran parte de manera virtual a través de la plataforma Teams, debido a la emergencia sanitaria ocasionada por el COVID-19.

Fase 3: Implementación del primer plan de acción y recolección de información

El plan de acción se desarrolló en los cuatro espacios académicos de formación, de la siguiente manera: Innovación e Investigación (II), en el cual se nos orientó hacia la problematización de un asunto relativo a nuestro conocimiento didáctico – matemático en relación con el foco de la cohorte (argumentación); Diseño y Desarrollo Curricular (DDC), en el cual se nos brindaron estrategias para efectuar el estudio de algunos referentes teóricos relativos al diseño de tareas y a su vez, a los estudiantes se nos involucró en el diseño de tareas de argumentación; Profundización en Matemáticas Elementales (PME), en el cual como estudiantes desempeñamos un papel de resolutores problemas abiertos de conjeturación y se realizó una fundamentación teórica acerca de la argumentación; finalmente, el otro espacio académico fue el de Tecnología en Ciencias y Matemáticas (TCM) en el cual nos enfocamos en diferentes teorías que aluden al sustento teórico de asuntos relacionados con los EGD y tareas desarrolladas en estos.

Para recoger la información respecto al conocimiento didáctico – matemático del profesor respecto a la enseñanza de la argumentación realizamos la construcción de tres narraciones, de acuerdo con lo descrito en la sección de metodología (Anexos 2. 3 y 4).

Posteriormente, a partir de las narraciones se construyeron los datos investigativos, siguiendo el proceso reportado en el capítulo de metodología (Anexo 5).

Fase 4: Análisis y reflexión del Ciclo 1

A continuación, presentamos la caracterización de nuestro Conocimiento Didáctico Matemático respecto a argumentación, en los Estados Base y 1, y en un estado de transición entre estos dos:

Caracterización del conocimiento didáctico matemático en el Estado Base

Todos los datos recolectados en el Estado Base de nuestro conocimiento didáctico matemático quedaron clasificados en la faceta epistémica. En síntesis, se encontraron cinco datos correspondientes al Estado Base, estos fueron clasificados en tres de los seis descriptores propuestos para la faceta epistémica: los datos [01] y [02] para el descriptor *Definición de argumento y argumentación*, los datos [03] y [04] para el descriptor *Formas de representar un argumento*, el dato [05] para el descriptor *Modos de razonamiento para construir un argumento* (Ver Tabla 6).

Código	Dato	Descriptor
Faceta Epistémica		
01	Concebíamos por argumentación a la justificación de una idea.	Ep1: Definición de argumento y argumentación
02	Argumento lo relacionábamos con el sustento teórico para soportar una idea, especialmente con el marco teórico que permite respaldar una demostración.	

03	Conocíamos que se puede expresar una demostración por medio de una tabla a dos columnas (afirmación y garantía) o en un párrafo coherente y secuenciado.	Ep5: Formas de representar un argumento
04	En el caso de Sergio, conocía un formato para reportar una demostración a tres columnas (qué se, qué uso y qué concluyo)	
05	Respecto al proceso para producir una demostración de una proposición, conocíamos una estrategia para lograr construirla. Esta consistía en asumir como cierta la tesis de la proposición y a partir de un proceso de abstracción, inferir qué propiedades se debían haber garantizado antes para poder concluir dicha tesis.	Ep6: Modos de razonamiento para construir un argumento

Tabla 6. Datos investigativos del Estado Base

Los dos datos clasificados en el descriptor *Definición de argumento y argumentación*, muestran que para emitir las definiciones recurríamos al uso de sinónimos. Así, argumentación lo asumimos como sinónimo de justificación [01] y argumento como sinónimo de elemento de un sistema teórico [02]. Adicionalmente, en la definición de argumento [01] también explicitábamos un propósito para este (soportar una idea).

En los datos correspondientes al descriptor *Formas de representar un argumento* se describen representaciones para una demostración. Las formas de representar que se proponen están diferenciadas por la manera cómo se reportaba la información que la misma contenía: utilizando tablas o párrafos [03, 04].

Finalmente, el dato [05] correspondiente al descriptor *Modos de razonamiento para construir un argumento* revela que se conocía una estrategia para construir una demostración, asociada al uso del Modus Ponendo Ponens y a la abducción matemática.

Caracterización del conocimiento didáctico matemático en el Estado de Transición del Base al Uno

Durante la implementación del plan de acción del Ciclo 1 evidenciamos dos datos que corresponden a dos datos de transición entre el Estado Base y Uno de conocimiento. Uno de estos datos está clasificado en la faceta Epistémica [6] y el otro dato en la faceta Mediacional [7] (Ver Tabla 7).

Código	Dato	Descriptor
Faceta Epistémica		
06	Al realizar la lectura del documento de Molina y Samper (2019), también nos percatamos de que existen tres tipos de argumentos: deductivos, inductivos y abductivos.	Ep3: Tipos de argumentos.
Faceta Mediacional		
07	Carlos proponía que la solución de los problemas geométricos debía surgir como consecuencia directa de las reglas teóricas de la geometría euclidiana. Viendo el proceso de exploración en un EGD como algo innecesario y generaba ciertos argumentos, que en ocasiones no llegaba a la solución del ejercicio. Mientras que Sergio, realizaba exploraciones a la construcción y de esta manera lograba encontrar argumentos que daban la solución al problema. Esta acción le permitió a Carlos entender la importancia del proceso de exploración en un EGD a la hora de encontrar argumentos que resuelvan el problema.	Me1: Relación entre el uso de un recurso y la producción de argumentos

Tabla 7. Datos Investigativos del Estado de Transición al Uno

El dato correspondiente a la faceta epistémica [06] tiene como descriptor *Tipos de argumentos*. En este dato se evidencia que al transcurrir el primer semestre de la Maestría comenzamos a enunciar una tipificación para los argumentos (inductivo, deductivo y abductivo).

Por otro lado, el dato que corresponde a la faceta mediacional [07] atiende al descriptor *Relación entre el uso de un recurso y la producción de argumentos*. El dato expone cómo la interacción entre pares académicos permitió a uno de nosotros darse cuenta de un potencial de la

geometría dinámica (posibilidad de efectuar exploraciones) para apoyar la producción de argumentos.

Caracterización del conocimiento didáctico matemático en el Estado Uno

Al finalizar el plan de acción del Ciclo 1 tenemos un total de once datos, de los cuales siete corresponden a la faceta epistémica, uno a la mediacional, dos a la interaccional y uno a la cognitiva (Tabla 8).

Código	Dato	Descriptor
Faceta Epistémica		
08	Empezamos a identificar la argumentación como el acto comunicativo en el cual una persona se vale de uno o más argumentos para sustentar una idea, con el fin de persuadir a un grupo de personas o a sí mismo.	Ep1: Definición de argumento y argumentación
09	Argumento, entendiéndolo como el enunciado de un razonamiento que una persona manifiesta de forma oral o escrita y que tiene tres componentes: datos, garantía y aserción.	Ep1: Definición de argumento y argumentación
10	<p>Argumento deductivo: Es el argumento en el cual se conocen los datos y la garantía y se infiere la aserción.</p> <p>Argumento inductivo: Es el argumento que se obtiene cuando se conoce un conjunto de datos los cuales conducen siempre a una misma aserción; de esta manera se infiere una garantía que corresponde a una regla general que relaciona los datos y la aserción.</p> <p>Argumento abductivo: Es el argumento en el cual se conocen la garantía y la aserción, y se infieren los datos.</p>	Ep3: Tipos de argumentos.
11	Los tres tipos de argumentos se pueden representar por medio de un diagrama, el cual corresponde a una representación gráfica del argumento usando el modelo de Toulmin. En (el esquema utilizado para representar) los argumentos deductivos se resalta el cuadro donde se escribe la aserción, ya que en este tipo de argumentos esto es lo que se infiere. En (el esquema utilizado para representar) los argumentos abductivos, se puntea y se resalta la casilla donde escribimos los datos, ya que lo que se infiere son los datos. En (el esquema utilizado para representar) los argumentos inductivos, se puntea y se resalta la casilla donde se escribe la garantía ya que es lo que se infiere. Cabe resaltar que la convención de colocar el cuadro punteado hace referencia a que lo que se infiere es plausible hasta que sea demostrado, mientras que cuando no se puntea es porque este hecho se da con seguridad.	Ep5: Formas de representar un argumento

12	El modelo de demostración a tres columnas que conocía Sergio al iniciar el primer semestre se relaciona con el diagrama para representar un argumento usando el modelo de Toulmin. El “qué sé” inicialmente se considera como un dato, el “qué uso” se asocia con la garantía y el “qué concluyo” se refiere a la aserción. [...] También, entendemos que la demostración a dos columnas (Afirmación y Garantía) se relaciona con el diagrama para un argumento del modelo de Toulmin y con un diagrama para representar demostraciones a tres columnas. Cada una de las filas que aparecen en las tablas de demostración corresponde a un argumento de tipo deductivo. En la columna de “afirmación” se escribe la aserción; en la columna de “garantía” se escribe la garantía y en ella también se escribe entre paréntesis el número de la fila en la cual se encuentran los datos de dicho argumento.	Ep5: Formas de representar un argumento
13	Los datos son condiciones y relaciones entre objetos geométricos; La garantía es la regla general que relaciona datos y aserción. Las reglas pueden ser teoremas, definiciones y postulados; la aserción es una consecuencia que surge a partir de unos datos.	Ep2: Elementos que conforman un argumento
14	Cabe resaltar que estos componentes del argumento (garantía, aserción y datos) están sustentados en el modelo de Toulmin. [...] Este modelo (Toulmin) es un referente teórico que nos permite caracterizar, representar, analizar y valorar la calidad de un argumento.	Ep2: Elementos que conforman un argumento
Faceta mediacional		
15	La mayor utilidad que les podemos dar a los EGD es que permiten al profesor potenciar los diferentes procesos involucrados (exploración, construcción, conjeturación, argumentación, demostración) cuando un <u>estudiante</u> resuelve una tarea en un EGD mediante el uso de las herramientas dinámicas del programa.	Me1: Relación entre el uso de un recurso y la producción de argumentos
Faceta Interaccional		
16	El trabajo colaborativo en pequeños grupos potencia el proceso de argumentación, ya que esto genera espacios de discusión y negociación de significados los cuales generan conocimiento compartido.	In1: Interacciones que favorecen la producción de argumentos.
17	<p>Problemas de búsqueda de consecuente: Son los que proporcionan las condiciones necesarias para resolver el problema y se deben hallar las consecuencias de dichas condiciones. Este tipo de problemas favorece la búsqueda de invariantes mediante el proceso de construcción y exploración. Los problemas de búsqueda de consecuente privilegian la producción de argumentos inductivos.</p> <p>Problemas de búsqueda de antecedente: En los problemas de búsqueda de antecedente se deben hallar las condiciones suficientes para que se cumplan las propiedades mencionadas en el enunciado del problema. Los problemas de búsqueda de antecedente favorecen la producción de argumentos abductivos.</p>	In6: Relación entre una tarea diseñada y los argumentos que generan
Faceta Cognitiva		

18	Estas preguntas guía limitan procesos como la exploración, conjeturación y argumentación. Ya que, no generan inquietudes en los estudiantes [preguntas guía hace referencia a preguntas en las cuáles se desglosa cada una de las acciones que debía realizar el estudiante con respecto al uso de un recurso - ¿qué tenía que medir? ¿qué tenía que arrastrar? ¿en qué debía fijarse?].	Co2: Dificultades o errores de los estudiantes respecto a la argumentación.
----	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------

Tabla 8. Datos Investigativos del Estado Uno

En los datos [08] y [09] clasificados en el descriptor *Definición de argumento y argumentación*, observamos que la definición de argumentación empieza a involucrar un término que clasifica a este proceso dentro de otro término (acto comunicativo), y un propósito que permite diferenciarlo de otros actos comunicativos. Con argumento ocurre algo similar, puesto que se clasifica con el término enunciado, pero se diferencia de otros por su origen y su estructura. Adicionalmente, evidenciamos una relación de dependencia entre argumentación y argumento teniendo en cuenta la expresión “se vale de uno o más argumentos”.

En el dato [10] correspondiente al descriptor *Tipos de argumentos*, evidenciamos que el conocimiento del profesor sobre tipo de argumento incluye un tipo de clasificación que está determinada a partir de la estructura ternaria que propone Toulmin, más específicamente, a partir de las relaciones que existen entre los elementos de esa estructura.

Los datos [11] y [12] se clasifican en el descriptor *formas de representar un argumento* porque en ambos se propone como criterio para generar la representación de un argumento, la explicitación de la estructura ternaria. Por un lado, en el dato [11] se explicita un convenio en la representación gráfica que permite establecer qué tipo de argumento se está representando y que explicita las relaciones entre los elementos de cada tipo de argumento. Por otro lado, el dato [12] expone una correspondencia entre un tipo de representación de una demostración (también reportada en el Estado Base) y esa estructura ternaria.

Los datos [13] y [14] los hemos clasificado en el descriptor *Elementos que conforman un argumento* ya que se evidencia que en ambos datos se explicitan los componentes de un argumento según el modelo de Toulmin y se establecen relaciones de dependencia entre los mismos. En el dato [13] el conocimiento del profesor se caracteriza por proponer definiciones de cada uno de los componentes definiéndolos a partir de relaciones entre los mismos, es decir, son definiciones circulares (la garantía depende de la aserción y la aserción surge a partir de los datos). Además, el dato [14] indica que el conocimiento de los profesores les permite reconocer un modelo teórico sobre argumentación, que, en particular, se convierte en una herramienta para realizar acciones que en su práctica profesional debe efectuar en relación con los argumentos (caracterizarlos, representarlos, analizarlos y valorarlos).

El dato [15] lo clasificamos en el indicador *Relación entre el uso de un recurso y la producción de argumentos* porque enuncia un recurso en particular (EGD) con un potencial para favorecer el proceso de argumentación. También, evidenciamos que esta relación se da en el marco de la resolución de una tarea.

El dato [16] lo hemos clasificado en el descriptor *Interacciones que favorecen la producción de argumentos* puesto que el conocimiento del profesor respecto a este asunto se caracteriza por exponer formas de agrupación que los profesores consideran propicia para la argumentación (trabajo en pequeños grupos de estudiantes), y por explicar características que debe tener la interacción para que se genere argumentación (discusión y negociación de significados).

El dato [17] lo hemos clasificado en el descriptor *Relación entre una tarea diseñada y los argumentos que generan* porque explicita una relación entre el tipo de argumento que se genera al resolver una tarea y el enunciado de la tarea. Dicha relación se encuentra bajo un sustento

teórico respecto a la producción de argumentos en Molina y Samper (2019). También, se establece una relación con otros procesos que apoyan la generación de argumentos (exploración).

Finalmente, el dato [18] lo hemos clasificado en el descriptor *Presaberes, Dificultades o errores de los estudiantes respecto a la argumentación* ya que el conocimiento del profesor le permite establecer una relación entre las tareas que propone el profesor y qué tanto esas tareas terminan siendo un obstáculo para el desarrollo del proceso. En particular, este conocimiento le permite al profesor cuestionar su propia práctica.

Ciclo 2

Fase 1: Detección de un nuevo problema

Después del análisis realizado en la fase 4 del Ciclo 1, llegamos a la conclusión de que hay una dificultad en la faceta epistémica, la cual es la no diferenciación de cierto vocabulario especializado. También, detectamos carencias en nuestro conocimiento profesional sobre acciones o estrategias para favorecer la enseñanza de la argumentación y demostración en el aula. Por lo tanto, enfocamos nuestro plan de acción en especificar aquellas acciones que debemos realizar como profesores para enseñar a argumentar y demostrar, dando cuenta de las diferencias que hay entre algunos procesos relacionados con la argumentación (explicación, justificación, validación, demostración).

Fase 2: Formulación del segundo plan de acción

Como estrategia para atender las dificultades detectadas en la fase 1 del ciclo 2, propusimos seguir una serie de pasos con el fin de atender cuidadosamente cada una de las falencias que habíamos detectado en nuestro conocimiento. A continuación, presentamos un diagrama en el cual se hace una síntesis del plan de acción de este ciclo (ver Figura 3).

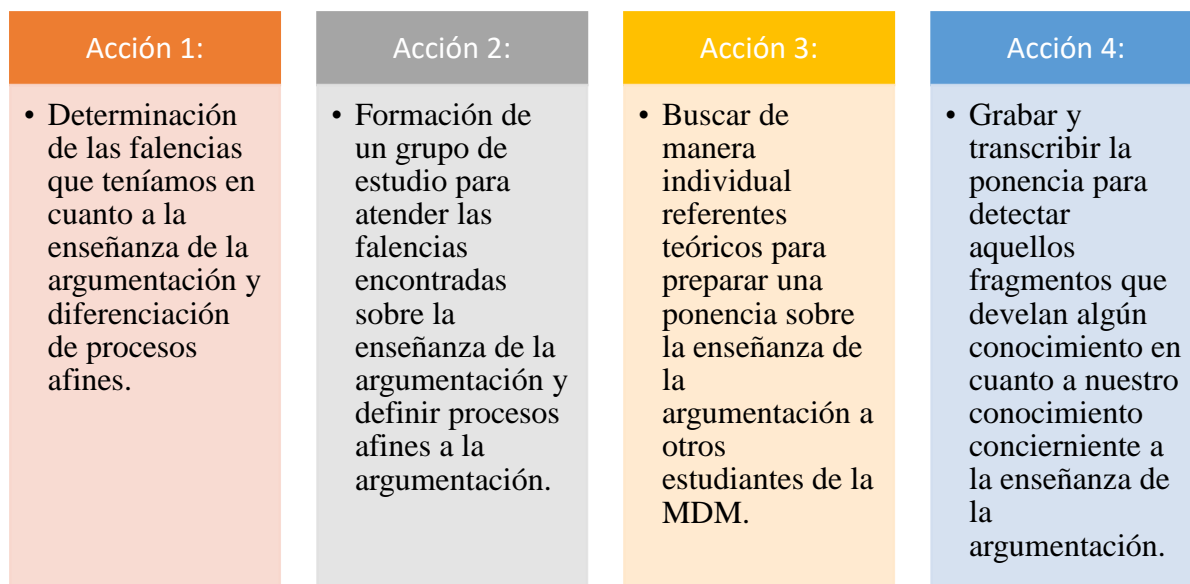


Figura 3. Acciones que conforman el plan del Ciclo 2

El plan de acción consistió inicialmente en responder qué falencias o dificultades teníamos en nuestro conocimiento respecto a diferencias entre la argumentación y otros procesos. Luego, se propuso la construcción de un grupo de estudio con el propósito de estudiar de manera grupal lo concerniente no sólo a la argumentación sino a la enseñanza de este proceso a partir de diferentes referentes teóricos; el siguiente paso, consistió en buscar de manera individual referentes teóricos que aludieran a estrategias, propuestas o diseño de tareas que promovieran la enseñanza de la argumentación; luego, presentar una ponencia a algunos estudiantes de la MDM y a la asesora de este trabajo de grado. Finalmente, realizar una reunión de cierre de ciclo con la asesora del trabajo de grado en la cual cada uno de nosotros debía responder a unas preguntas orientadas a dar cuenta de nuestro conocimiento didáctico – matemático después de la ponencia presentada.

Cabe aclarar que a medida que íbamos preparando la ponencia acordamos en grabar las sesiones en las cuales discutíamos o aportábamos el uno al otro, respecto a lo que íbamos encontrando en los referentes teóricos que estábamos estudiando en ese momento.

Fase 3: Implementación del segundo plan de acción

Este ciclo se desarrolló durante el primer semestre del 2021, en el cual se conformó un grupo de estudio con dos estudiantes más de la Maestría; ellos se encargaron de atender la dificultad que refería a las diferencias entre algunos conceptos (explicación, argumentación, justificación y validación) y nosotros nos encargamos de atender la dificultad que refería a la enseñanza de la argumentación. Cada grupo diseñó una ponencia que atendiera a la dificultad que se le fue asignada. Para el diseño de nuestra ponencia realizamos una lectura y posteriormente una reseña de los siguientes artículos: Perry, Samper, Molina, Camargo y Echeverry (2012), Stylianides (2016), Samper y Toro (2017), Rumsey y W. Langrall (2016), Camargo (2010) y Molina y Samper (2019).

Luego de reseñar los artículos nos centramos en la construcción de la ponencia de la cual éramos expositores (Enseñanza de la argumentación y la demostración) atendiendo a las temáticas: Definiciones iniciales (Argumentación y demostración), comunidades de práctica, plantillas discursivas, enunciados que favorecen la producción de argumentos y metodología alternativa que favorece la producción de argumentos. Finalmente, como producto de cada ponencia se propuso realizar un documento en el cual relacionáramos cada una de las temáticas de tal manera que expusiera nuestro conocimiento para enseñar a argumentar y demostrar.

La recolección de la información se llevó a cabo por medio de las transcripciones generadas por las video grabaciones realizadas en las dos ponencias hechas por el grupo de

estudio y en la reunión de cierre (Anexo 8). En estas transcripciones se rastrearon fragmentos que develaran nuestro conocimiento sobre asuntos relacionados con la argumentación o su enseñanza. Luego, pasamos a realizar una depuración de la información realizando aclaraciones sobre cada fragmento y realizando algunas correcciones de redacción y referenciación para contextualizar cada uno de los fragmentos (Anexo 9).

Fase 4: Análisis y reflexión del Ciclo 2

A continuación, presentamos la caracterización de nuestro Conocimiento Didáctico Matemático respecto a argumentación y su enseñanza, en los Estados Uno y Dos, y en un estado de transición entre estos dos Estados del conocimiento:

Caracterización del conocimiento didáctico matemático en el Estado de Transición del Uno al Dos

En este ciclo se lograron recolectar en total seis datos en el estado de tránsito entre los Estado Uno y Dos, los datos quedaron clasificados en tres de los seis descriptores de la Faceta Epistémica de la siguiente manera. De los datos [19] al [22] en el descriptor *Términos afines a la argumentación* y los datos [23] y [24] en el descriptor *Modos de razonamiento para construir un argumento*. Los datos y sus descriptores se observan en la Tabla 9.

Código	Dato	Descriptor
Faceta Epistémica		
19	Vamos a llamar actividad demostrativa a ese proceso que permite construir una demostración y que está conformado por varios subprocesos, estos son: exploración, conjeturación, definición y argumentación.	3. Términos afines a la argumentación
20	La demostración está conformada por una secuencia conectada de argumentos deductivos, emitidos a favor de una afirmación matemática, es decir, la demostración queda en función del argumento.	

	Por eso es tan importante hablar de argumentación para hablar de demostración.	
21	En una demostración se deben utilizar declaraciones aceptadas por una comunidad (postulados, definiciones, teoremas de un sistema axiomático local) y hay que tener en cuenta que cuando yo utilizo este tipo de afirmaciones ya no necesitan de más justificación porque anteriormente ya se tuvieron que haber demostrado.	
22	Llamamos demostración al producto de haber realizado actividad demostrativa	
23	Una demostración emplea formas de razonamiento que son válidas y conocidas dentro del alcance conceptual de la comunidad (demostración directa - Modus Ponens, demostración por contradicción - tercio excluido). El Modus Ponendo Ponens plantea que a partir de P puedo deducir Q. Eso es lo que se le conoce como demostración directa y se asemeja mucho a los argumentos de tipo deductivo. El Modus Tollendo Tolens plantea que a partir de $\neg Q$ se deduce $\neg P$. Es conocido como una forma de demostración indirecta y se llama demostración por contra recíproco. Entonces, resulta que P implica Q es lógicamente equivalente a $\neg Q$ implica $\neg P$. Entonces, demostrar que $\neg Q$ implica $\neg P$, es equivalente a demostrar que P implica Q.	6. Modos de razonamiento para construir un argumento
24	Un modo de representar una demostración es en párrafo. Esto consiste en escribir de forma lineal y secuenciada los datos y las asepciones de cada argumento deductivo, mencionando las garantías más importantes de la demostración. En las demostraciones escritas en forma de párrafo notamos que no se logran identificar las tres partes de un argumento puesto que se omiten algunas partes de los argumentos que conforman la demostración. Esta forma de representar la demostración no favorece la enseñanza de la demostración. Para el caso de la enseñanza de la demostración y argumentación es más pertinente utilizar la representación a 3 columnas. Esta favorece la enseñanza de la demostración, más que la representación en párrafo, sobre todo para los estudiantes que están aprendiendo a demostrar. Al leer una demostración en párrafo, al lector le toca desentrañar lo que está oculto en esa demostración. Como en este tipo de representación hay que inferir tantas cosas, ahí se puede dar un proceso de aprendizaje muy rico para el miembro experto.	4. Formas de representar un argumento

Tabla 9. Datos Investigativos del Estado de transición del Uno al Dos

Los datos [19] al [22] los clasificamos en el descriptor *Términos afines a la argumentación* porque reportan un conocimiento de los profesores respecto a demostración y actividad demostrativa, y los mismos son caracterizados a partir de su relación con los términos argumentación y argumento. En el dato [19] se define la actividad demostrativa a partir de una relación de contención entre unos procesos y la demostración (exploración, conjeturación,

definición y argumentación contenidos en la demostración). En el dato [22] se evidencia una relación de consecuencia entre la actividad demostrativa (proceso) y la demostración (producto), es decir, este proceso tiene como finalidad generar un producto final llamado demostración. En el dato [20] se evidencia que este producto termina siendo una secuencia articulada de argumentos de tipo deductivo. Por lo anterior, la demostración termina siendo un tipo especial de argumento. En el dato [21] se evidencia una característica de la demostración la cual es que debe estar sustentada en el conjunto de normas compartidas de la comunidad matemática.

El dato [23] clasificado en el descriptor *Modos de razonamiento para construir un argumento*, se observa otra de las características que deben tener las demostraciones. Estos modos de razonamiento deben estar sustentados en la lógica matemática y son estrategias para producir ciertos tipos de argumentos.

El dato [24] lo clasificamos en el descriptor *Formas de representar un argumento* porque caracteriza el conocimiento del profesor en cuanto a identificar la estructura ternaria de un tipo particular de argumento (deductivo) en diferentes representaciones de una demostración. Este dato describe el modo de representación de una demostración en párrafo y lo caracteriza por omitir partes de los argumentos deductivos que conforman una demostración. Por lo anterior, se deduce que esta forma de representación no es pertinente para favorecer la enseñanza de la argumentación y demostración en los estudiantes que están iniciando su proceso de aprendizaje. Esta forma de representación es pertinente para miembros expertos en el proceso de construir demostraciones (actividad demostrativa).

Caracterización del conocimiento didáctico matemático en el Estado Dos

Al finalizar el plan de acción del Ciclo 2 tenemos un total de quince datos que corresponden a distintas facetas del conocimiento, clasificamos ocho en la Faceta Epistémica, cuatro en la Faceta Interaccional, uno en la Faceta Mediacional y dos en la Faceta Ecológica como se presenta en la Tabla 10.

Código	Dato	Descriptor
Faceta Epistémica		
25	La argumentación es una práctica discursiva, que se basa en normas compartidas de una comunidad. Lo que se busca es persuadir a un grupo de personas y hay ciertos roles como un emisor, y un receptor.	1. Definición de argumento y argumentación
26	La argumentación es una forma particular de justificar, la cual consiste en cualquier proceso comunicativo, en el que se busca persuadir a alguien o a uno mismo sobre una afirmación. Este proceso está sustentado en unas afirmaciones, normas, declaraciones compartidas. El producto de este proceso es el argumento. Estos argumentos tienen una estructura ternaria, de datos, garantía y aserción. Cabe resaltar que, en la argumentación, los roles que juegan el emisor y el receptor es un papel de pares, es decir, están en la misma jerarquía. El emisor trata de persuadir, de convencer al receptor acerca de una idea, afirmación o aserción.	
27	Justificación es dar el porqué de algo y eso está basado en algún sustento teórico, digámoslo así, teórico, entre comillas, con base en algunas normas que fueran conocidas en la comunidad	1. Términos afines a la argumentación (justificación, explicación, validación y demostración)
28	La justificación es tratar de dar el porqué de lo que se está afirmando. La justificación la entiendo como un proceso general, que abarca a otros dos procesos más, los cuales son la argumentación y la explicación.	
29	La explicación es una forma particular de justificación y lo que busca es tratar de ampliar, ejemplificar, describir algún conocimiento.	
30	La validación es determinar la veracidad de una afirmación, determinar que, si esto que afirmo, escucho o leo es cierto o no. Entonces, de esta manera eso se relaciona con la definición de justificación. Ya que en la justificación se trata de validar lo que se dice. Ya que la justificación lo que busca es tratar de dar el porqué es cierto lo que alguien o yo afirmo.	
31	. Entonces, ¿La argumentación es lo mismo que la explicación? Entonces, ¿Es lo mismo? Llegamos a la conclusión de que una de las diferencias que hay entre argumentación y explicación, es el papel que juegan el emisor y recetor. Porque en la explicación la persona que explica tiene un papel de	

	autoridad en el conocimiento y eso es una diferencia que hay con respecto a la argumentación ya que allí los roles son de pares intelectuales.	
32	Nosotros estábamos discutiendo con Sergio la siguiente pregunta ¿La argumentación amplía el conocimiento? y la respuesta fue que en cierta manera sí, ya que, en la argumentación se hace una ampliación de algún conocimiento, pues ahí se comunican datos, aserción y garantía y adicionalmente se describe la conexión que hay entre los datos y la aserción mediante la garantía, en ese sentido hay una ampliación del conocimiento.	
Faceta Interaccional		
33	¿Por qué siempre en la universidad (UPN) proponen trabajar en grupos de tres y no en grupos de dos? es que cuando trabajamos en grupos existe esa relación entre pares (entre los estudiantes) y lo que se busca es que ellos comiencen a explicitar y a dar ideas de lo que conocen. Entonces, cuando ellos necesitan tomar una decisión, si están trabajando en grupos de dos, a lo mejor es posible que los estudiantes fácilmente se pongan de acuerdo con respecto a la aserción que quieren validar. Mientras que sí trabajan en grupos de tres quizás exista un integrante que esté en contra de los otros dos y en ese sentido, si es necesario que los estudiantes comiencen a argumentar para defender sus posturas.	1. Interacciones que favorecen la producción de argumentos.
34	Un aspecto importante de la argumentación y la demostración en el aula de clase es que permiten un cambio de la metodología de clase tradicionalista, que siempre hemos manejado o que se maneja usualmente en las clases de geometría. Ya que el promover la argumentación y la demostración en el aula de clase se evita ese tipo de énfasis en ejercicios algorítmicos.	4. Metodología de enseñanza que favorezca la producción de argumentos
35	Una metodología alternativa para la enseñanza de la argumentación y la demostración es una que se basa en la construcción de un sistema axiomático mediante resolución de problemas abiertos. Se busca que sean problemas abiertos de conjeturación, porque en ese sentido los estudiantes son quienes construyen los teoremas y quienes los descubren.	
36	Las plantillas discursivas que favorecen la argumentación (Chepina Rumsey and Cynthia W. Langrall, 2016) permiten al estudiante generar hábitos discursivos para que expresen sus ideas de forma similar a la estructura de un argumento. Esto permite al profesor identificar los argumentos que están dando los estudiantes.	5. Criterios para diseñar tareas que favorezcan la producción de argumentos.
Faceta Mediacional		
37	Nosotros tampoco conocíamos el axioma de Pasch y fuimos capaces de deducir este axioma a partir de una exploración en el EGD.	Formas en que el EGD favorecen la producción de argumentos
Faceta Ecológica		
38	Aprender a argumentar en matemáticas permite a los estudiantes desarrollar formas de razonamiento y formas de actuar ante diferentes situaciones en otros contextos distintos a los matemáticos.	2. Importancia de promover la

39	Incorporar la argumentación y la demostración matemática permite a los estudiantes comprender la necesidad de la demostración para darle validez a las afirmaciones que hagan algunos compañeros o incluso las mismas afirmaciones que da el profesor. Es decir, eso permite que el profesor no sea la única persona que tiene la razón en el aula, sino que ellos por medio de la argumentación y la demostración, pueden refutar también las ideas que dan los profesores.	argumentación en diferentes contextos
----	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------

Tabla 10. Datos Investigativos del Estado Dos

Los datos [25] y [26] se encuentran ubicados en el descriptor *Definición de argumentación y argumento* de la Faceta Epistémica, porque se define la argumentación como un proceso discursivo en el cual se evidencia ciertas características las cuales son, persuadir, estar sustentado en normas compartidas de una comunidad, ejercer ciertos roles entre emisor y receptor. Se sigue mencionando el argumento como un producto (consecuencia) de la argumentación y su estructura ternaria.

Los datos [27] al [32] los clasificamos en el descriptor *Términos afines a la argumentación* porque se enfocan en caracterizar los términos justificación, explicación y validación. De los datos [27] y [28] se puede inferir que existe una contención entre argumentación y justificación (la justificación contiene a la argumentación) y que, al igual que la argumentación, la justificación también está sustentada en conjunto de normas compartidas por una comunidad. En el dato [29] se define la explicación con una relación de contención en la justificación (similar a como se describió el proceso de argumentación en el dato [28]). En el dato [30] se define la validación a partir de relaciones de semejanza con la justificación entre el propósito de cada proceso. En el dato [31] y [32] se exponen diferencias y semejanzas entre la argumentación y la explicación, específicamente, en el rol que desempeña el emisor en el contexto en el que se desenvuelve, ya que en la explicación el emisor ejerce un rol de autoridad en el conocimiento mientras que en la argumentación ejerce un rol de par académico.

En el dato [33] de la faceta interaccional, clasificado en el descriptor *Interacciones que favorecen la producción de argumentos* se observa que, los docentes justifican y tienen en cuenta la importancia de trabajar cooperativamente para favorecer la producción de argumentos.

En los datos [34] y [35] de la faceta interaccional clasificados en el descriptor *Metodología de enseñanza que favorece la producción de argumentos* se evidencia una relación entre el proceso de argumentación y la forma en cómo se desarrolla la clase, estableciendo una alternativa para romper con las metodologías tradicionales basada en la construcción de un sistema axiomático a través de la resolución de problemas abiertos de conjeturación.

En el dato [36] de la faceta interaccional, clasificado en el descriptor *Criterios para diseñar tareas que favorecen la producción de argumentos* se plantea una estrategia para favorecer la producción de argumentos la cual es el uso de plantillas discursivas.

En el dato [37] de la faceta mediacional, clasificado en el descriptor *Formas en que el EGD favorecen la producción de argumentos* se explicita que gracias al proceso de exploración el profesor pudo deducir elementos del sistema axiomático (garantía) que a priori no se encontraban en su compendio de enunciados conocidos por él. Gracias a esto pudo construir el argumento que validaba su conjetura.

En los datos [38] y [39] de la faceta ecológica clasificados en el descriptor *Importancia de promover la argumentación* en diferentes contextos se observa una relación de utilización entre la demostración y otros contextos diferentes al ámbito académico. Además, se hace énfasis en el papel de la argumentación y la demostración con el propósito de que el docente no sea el único validador de la clase sino el estudiante también.

Ciclo 3

Fase 1: Detección de una problemática final

Al final del Ciclo 2, después de tener un acercamiento teórico respecto a diferentes estrategias para favorecer la enseñanza de la argumentación, nos interesamos en evidenciar el impacto que generó este ciclo en el diseño de nuestras tareas, ya que antes de iniciar la Maestría intentamos enseñar a argumentar a nuestros estudiantes, pero los resultados no fueron los esperados.

Fase 2: Diseño del tercer plan de acción

Como buscábamos dar cuenta de aquellos conocimientos que se movilizaban para atender las dificultades detectadas en la fase 1 del ciclo 2, propusimos seguir una serie de pasos con el fin de atender cuidadosamente cada una de las falencias que habíamos detectado en nuestro conocimiento. A continuación, presentamos un diagrama en el cual se hace una síntesis del plan de acción de este ciclo.

El plan de acción del Ciclo 3 se representa en la Figura 4.

Etapa 1:	Etapa 2:	Etapa 3:	Etapa 4:
<ul style="list-style-type: none"> • Seleccionar una tarea que diseñamos durante el primer semestre de la MDM que consideramos favorecía la argumentación (Tarea 1). 	<ul style="list-style-type: none"> • Revisar la Tarea 1, explicitando si considerabamos que las tareas favorecían la producción de argumentos. 	<ul style="list-style-type: none"> • Proponer una nueva tarea (Tarea 2), que favoreciera la argumentación e indicar por qué considerabamos que favorecía esta proceso. Ello implicó tratar de involucrar el conocimiento explicitado en el Ciclo 2, involucrar las cosas buenas que identificamos de la tarea 1 y subsanar las falencias que vimos en esta tarea. 	<ul style="list-style-type: none"> • Identificar las acciones que se realizaron en el marco del diseño de la Tarea 2 y de la evaluación de la Tarea 1, y responder las siguientes preguntas respecto las acciones: ¿Qué conocimiento sobre argumento / argumentación me llevó a efectuar una determinada acción de esa forma?; Qué conocimiento que tengo ahora, me lleva a cuestionar o validar una acción que realice anteriormente?; ¿Qué aprendí al tratar de interpretar acciones de mi práctica?

Figura 4. Acciones que conforman el plan del Ciclo 3

En la Etapa 1, se seleccionó una tarea que diseñamos en el primer semestre de la MDM, la cual favorecía la producción de argumentos. En la Etapa 2 se realizó una revisión crítica que se fundamentó en determinar si la tarea que diseñamos en el primer semestre realmente estaba al alcance conceptual de nuestros estudiantes y tratar de incorporar las estrategias vistas en el Ciclo 2. La Etapa 3 consistió en reformular la tarea que diseñamos en el Ciclo 1 de la MDM, en la que se modificó principalmente los requisitos para abordar la tarea, las metas y su formulación. Mantuvimos los elementos que consideramos pertinentes para la producción de argumentos como por ejemplo los recursos, las interacciones y la temporalidad. La reformulación de la tarea se caracterizó por un antes y un después. Antes la formulación consistía en un problema abierto de conjeturación en el que simplemente se le pedía al estudiante reportar una serie de procesos afines a la actividad demostrativa, mientras que en la reformulación se le indicaba al estudiante un paso a paso de lo que la tenía que hacer para recrear y reportar cada uno de los procesos

afines a la actividad demostrativa que estaban involucrados en la primera propuesta de tarea. Finalmente, en la Etapa Cuatro se identificó el conocimiento que estuvo involucrado en las acciones realizadas para llevar a cabo la reformulación de la tarea a través de dar respuesta a una serie de preguntas que permitían explicitar dicho conocimiento.

Fase 3: Implementación del tercer plan de acción

Este plan de acción se ejecutó durante el segundo semestre del 2021. Para realizar el rediseño de esta tarea se llevaron a cabo reuniones semanales por la plataforma TEAMS.

El insumo recolectado en este ciclo fue la transcripción de la reunión final donde se discutieron asuntos relacionados con los criterios que utilizamos para la reformulación de la tarea a lo largo del ciclo y el diseño final de la tarea en cuestión. El tratamiento y construcción de los datos se realizó de forma similar a como lo hicimos en el Ciclo 2. (Anexo 13)

Fase 4: Análisis y reflexión del Ciclo 3

Caracterización del conocimiento didáctico matemático en el Estado Tres

Al finalizar el plan de acción del Ciclo 3 tenemos un total de diez y siete datos que se agrupan en diferentes facetas del conocimiento didáctico matemático como se observa en la Tabla 11. Clasificamos catorce datos en la Faceta Interaccional y tres datos en la Faceta Mediacional.

Código	Dato	Descriptor
Faceta Interaccional		
40	El proceso de argumentación se desarrolla en conjuntos de personas con dos a más integrantes, los cuales tengan una comunicación clara y fluida.	1. Interacciones que favorecen la producción de argumentos.
41	Pensamos que hay mayor favorecimiento del proceso de argumentación cuando existe trabajo cooperativo e interacción	1. Interacciones que favorecen la producción de argumentos.

	grupal entre los estudiantes a diferencia que si ellos trabajan de manera individual.	
42	A la hora de argumentar es indispensable gestionar el uso de la palabra de los participantes, para que haya una recepción clara de los argumentos y esta no sea interrumpida por otros participantes	1. Interacciones que favorecen la producción de argumentos.
43	Al momento de argumentar es posible que se nos vayan las palabras. Por esta razón a menudo se acude al lenguaje gestual para completar un argumento. Por este motivo la herramienta de la cámara web es apropiada para suplir esta necesidad a través de plataformas virtuales.	1. Interacciones que favorecen la producción de argumentos.
44	Es necesaria la supervisión de un miembro experto (Profesor) en el desarrollo de una tarea de argumentación, ya que muchas veces a la hora de construir argumentos para resolver la tarea, se pueden presentar dificultades para comprenderla, debido a que puede haber sofisticación en el lenguaje, en las representaciones, en los invariantes que están involucrados en la formulación de la tarea y para solventar estas posibles dificultades se requiere de la presencia de un miembro experto que despeje las dudas que van surgiendo el desarrollo de la tarea.	5. Interacciones que favorecen la producción de argumentos.
45	Una forma de favorecer el proceso de argumentación es que cada grupo de trabajo socialice a toda la clase los argumentos que construyeron a través el trabajo en las subsalas (interacción grupo-toda la clase) y de esta manera los demás miembros de la clase validen o refuten las producciones de los demás grupos de trabajo. Esta era una estrategia que se llevaba a cabo en la metodología de clase presencial y que también se puede adaptar a medios virtuales.	5. Interacciones que favorecen la producción de argumentos.
46	Uno de los principales criterios que hay que tener en cuenta al momento de diseñar una tarea que favorezca la producción de argumentos es considerar las dificultades, errores, alcance conceptual, el conocimiento que poseen sobre los objetos matemáticos involucrados en la tarea y los tipos de interacciones que podría favorecer en mis estudiantes el proceso de argumentación al momento de desarrollar la tarea. Adicionalmente, tener en cuenta que la tarea no está dirigida a miembros expertos (nosotros mismos), que conocen estos procesos y tiene experiencia en la resolución de este tipo de tareas, sino a los estudiantes.	5. Criterios para diseñar tareas que favorezcan la producción de argumentos.
47	Los problemas abiertos de conjeturación, favorecen la producción de argumentos y procesos afines (construcción, exploración, conjeturación), ya que esto da vía libre a que surjan diversas construcciones, exploraciones, conjeturas y argumentos por parte de los estudiantes.	5. Criterios para diseñar tareas que favorezcan la producción de argumentos.
48	En los libros de texto escolares es común encontrar tareas que solicitan demostrar una proposición condicional. Estas tareas pueden ser reformuladas para propiciar que el estudiante desarrolle procesos de construcción, exploración, conjeturación y argumentación que le permita descubrir la relación condicional y construya la demostración utilizando un esquema de representación de una demostración. Una tarea de un libro de texto puede transformarse en un problema abierto de conjetura. Para ello, es necesario: 1) Reformularla de tal forma que puedan tener diversidad de soluciones 2) Reformularla de tal forma que permita al estudiante explorar una	5. Criterios para diseñar tareas que favorezcan la producción de argumentos.

	situación; 3) Reformularla de tal forma que el enunciado no sugiera la respuesta.	
49	Una tarea que implique al estudiante argumentar, explorar y construir, puede incluir indicaciones para realizar cada proceso, cuando el estudiante es novato respecto a estos procesos. Una vez los alumnos hayan ganado cierta experiencia con respecto a la argumentación y procesos afines, se pueden omitir este tipo de indicaciones.	5. Criterios para diseñar tareas que favorezcan la producción de argumentos.
50	Dos estrategias para favorecer la producción de argumentos son: el uso de plantillas discursivas y la representación de una demostración a 3 columnas. Estas estrategias facilitan el seguimiento de la demostración y explicitan las partes de un argumento.	5. Criterios para diseñar tareas que favorezcan la producción de argumentos.
51	Implementar tareas de conjeturación, en las que se incluyan indicaciones respecto a cómo realizar procesos de exploración, construcción, conjeturación y argumentación, podría a largo plazo favorecer un tránsito entre la argumentación y la demostración. Pero, por otra parte, la tarea de argumentación que propusimos incluía completar dos demostraciones representadas a través de un esquema a tres columnas y la otra mediante una secuencia articulada de plantillas discursivas. No obstante, al finalizar nos cuestionábamos si esta tarea estuviera al alcance conceptual de nuestros estudiantes. Consideramos que para que los estudiantes puedan solucionar este tipo de tarea, deben tener un conocimiento sobre lo que es una implicación, una estructura condicional y de las relaciones condicionales que hacen parte de un sistema teórico, o el profesor debe hacer una gestión para enseñárselo.	5. Criterios para diseñar tareas que favorezcan la producción de argumentos.
Faceta Mediacional		
52	Una plataforma virtual que permita establecer entornos en los cuales un grupo de estudiantes pueda tener una comunicación clara y fluida, generaría un ambiente favorable para entablar argumentaciones entre los participantes presentes.	1. Formas en que el recurso favorecen la producción de argumentos
53	Una herramienta que permite gestionar el uso de la palabra cuando los estudiantes argumentan es la herramienta “Levantar la mano” de la plataforma Teams.	2. Herramientas de un recurso útiles para favorecer la argumentación
54	Por esta razón la herramienta de creación de subsalas dentro de una sala de Teams es apropiada para favorecer espacios de dialogo y discusión entre los equipos de trabajo que se establecen en el aula de clase virtual.	2. Herramientas de un recurso útiles para favorecer la argumentación

Tabla 11. Datos Investigativos del Estado Tres

En los datos [40] al [45] ubicados en el descriptor *Interacciones que favorecen la producción de argumentos*, se observa que estos profesores conciben la argumentación como un proceso comunicativo que se desarrolla de forma clara y fluida. Que se favorece mediante la interacción social y no como seres aislados e individualizados. En el dato [42] se puede observar

una necesidad a la hora de argumentar la cual es la gestión del uso de la palabra, para que de esta manera haya un desarrollo adecuado de los procesos de argumentación. En el dato [43] se puede evidenciar que en ocasiones el proceso de argumentación se puede valer de otros tipos de comunicación distintos al oral y escrito para comunicar parte del argumento. En los datos [44] y [45] se puede observar un conocimiento acerca de la gestión que hace el profesor a la hora de implementar una tarea. Esta gestión juega un papel crucial a la hora de que los estudiantes produzcan argumentos. El profesor debe ser un miembro activo en el momento que los estudiantes resuelven la tarea. También se evidencia un conocimiento sobre la planificación de las posibles interacciones que se pueden dar en el aula (estudiante-estudiante, estudiante-grupo de trabajo, estudiante-maestro, estudiante-toda el aula, grupo de trabajo -maestro, grupo de trabajo-grupo de trabajo, grupo de trabajo, toda el aula) y de qué manera propiciar este tipo de interacciones.

Los datos [46] al [51], se ubicaron en el descriptor *Criterios para diseñar una tarea que favorece la producción de argumentos*; en el dato [46], se puede observar que los profesores tienen en cuenta realizar un análisis cognitivo y un análisis del contenido antes de diseñar una tarea. También son conscientes que al momento de diseñar una tarea no hay que pensar como un resolutor de problemas ya que las tareas que se diseñan no están dirigidas a nosotros mismos (miembros expertos). En el dato [47], se evidencia un conocimiento especializado sobre una forma de diseñar la formulación de una tarea que favorece la producción de argumento. Además, conocen las ventajas de utilizar este tipo de enunciaciones (problemas abiertos de conjeturación). En el dato [48], se observa un conocimiento didáctico sobre como reformular tareas de demostración propuestas por textos guía en la que se favorecen procesos de la actividad demostrativa y de esta manera los estudiantes puedan adquirir los conocimientos a través del

descubrimiento. Además, se espera que los estudiantes reporten estos descubrimientos y los argumenten mediante el uso de diferentes esquemas de representación de secuencias de argumentos deductivos (demostración). También, se evidencia un conjunto de indicaciones para poder realizar adaptaciones de tareas propuestas por textos guías y convertirlas en problemas abiertos de conjeturación. En el dato [49], vemos que los profesores adaptan distintas propuestas de tareas dependiendo del alcance conceptual de los estudiantes. Además, establecen que cuando un estudiante no tiene experiencia con procesos de la actividad demostrativa es necesario diseñar tareas en las que se les indique a los estudiantes cuales son los pasos que ellos deben seguir para poder realizar dichos procesos. En el dato [50], vemos dos estrategias para favorecer la argumentación que se plantearon en el Ciclo 2 y se explicita lo más importante que poseen dichas estrategias. Finalmente, en el dato [51] se establece que el rediseño de la tarea propuesta en el Ciclo 1, podría en cierta medida favorecer un tránsito entre procesos de argumentación y demostración, ya que, a medida que los estudiantes experimentan la actividad demostrativa y se van familiarizando con los procesos que la componen, esto podría favorecer a largo plazo una transición entre la argumentación y la demostración. Además, en el mismo dato también se evidencia un conocimiento con respecto a cómo implementar dos diferentes formas de representar una demostración (párrafo y 3 columnas) en el diseño de una tarea, pero a su vez estos profesores afirman que probablemente estas estrategias no son suficientes para que los estudiantes que tienen poca experticia en procesos de la actividad demostrativa logren argumentar y por ende se requiere, por una parte, un conocimiento con respecto a la construcción de argumentos deductivos y, por otra parte, una explicación por parte del docente con respecto a las dificultades o errores que vayan surgiendo al completar una demostración independientemente de su representación (párrafo o tabla).

En los datos [52] al [54], clasificados en la Faceta Mediacional, tenemos un dato [52] en el descriptor *Formas en que el recurso favorece la producción de argumentos*. En dicho dato vemos un conocimiento acerca de una plataforma digital (Teams) que permite establecer reuniones masivas y entablar conversaciones fluidas y organizadas. En los datos [53] y [54], ubicados en el descriptor *Herramientas de un recurso útiles para favorecer la argumentación*, vemos dos herramientas de la plataforma Teams que les permiten a los docentes gestionar el uso de la palabra y favorecer el trabajo cooperativo mediante la creación de subsalas de trabajo. Vemos que estos profesores trataron de adaptar las estrategias que implementaban los profesores de la MDM de manera presencial a la virtualidad mediante el uso de las herramientas que provee la plataforma.

Análisis del proceso de transformación del conocimiento

La Figura 5 reporta la cantidad de datos asociados a cada faceta en cada uno de los estados de conocimiento. Hay un total de 7 datos en el Estado Base, 6 (Epistémica) y 1 (Mediacional). Hay un total de 11 datos en el Estado Uno, 7 (Epistémica), 2 (Interaccional), 1 (Mediacional) y 1 (Cognitiva). Hay un total de 21 datos en el Estado Dos, 14 (Epistémica), 4 (Interaccional), 1 (Mediacional) y 2 (Ecológica). Finalmente, hay un total de 15 datos en el Estado Tres, 12 (Interaccional) y 3 (Mediacional). En total se trabajaron con 54 datos investigativos.

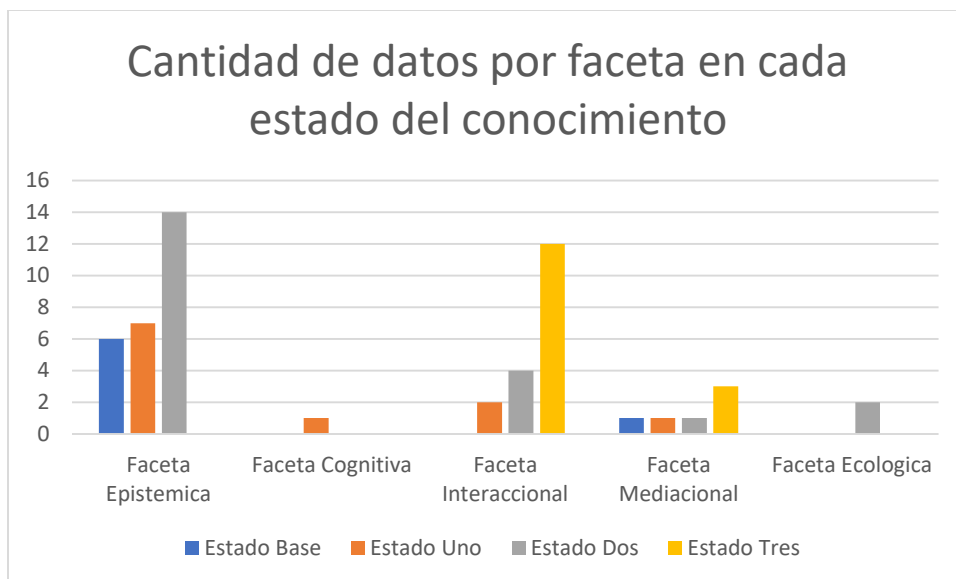


Figura 5. Síntesis de datos investigativos por faceta en cada ciclo

En los primeros dos ciclos de investigación-acción se caracterizaron por ser demasiado teóricos. Por esta razón en los estados del conocimiento Base, Uno y Dos se evidencia que los datos en su mayor cantidad están ubicados en las facetas Epistémica e Interaccional. El Ciclo Tres se caracterizó por realizar el rediseño de una tarea a través de un análisis con respecto a lo trabajado en el Ciclo Dos, por tal razón podemos observar que la mayor cantidad de datos pertenecen a la faceta interaccional.

La Figura 6 reporta la cantidad de datos asociados a cada descriptor de la Faceta Epistémica en cada uno de los estados del conocimiento.

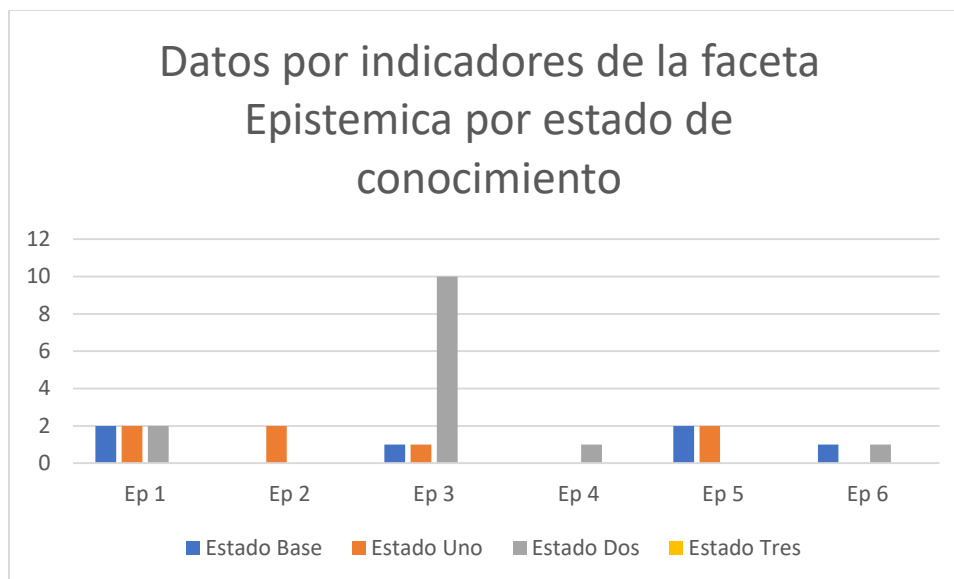


Figura 6 Síntesis de la Faceta Epistémica en cada ciclo

En la anterior gráfica podemos ver un énfasis en el tercer descriptor de la Faceta Epistémica que trata sobre *Términos a fines a la argumentación (justificación, explicación, validación y demostración)*. Esto se debe a que el propósito del Ciclo Dos consistía en atender asuntos acerca de la diferenciación de vocabulario especializado relacionado con la argumentación.

La Figura 7 reporta la cantidad de datos asociados a cada descriptor de la Faceta Interaccional en cada uno de los estados del conocimiento.

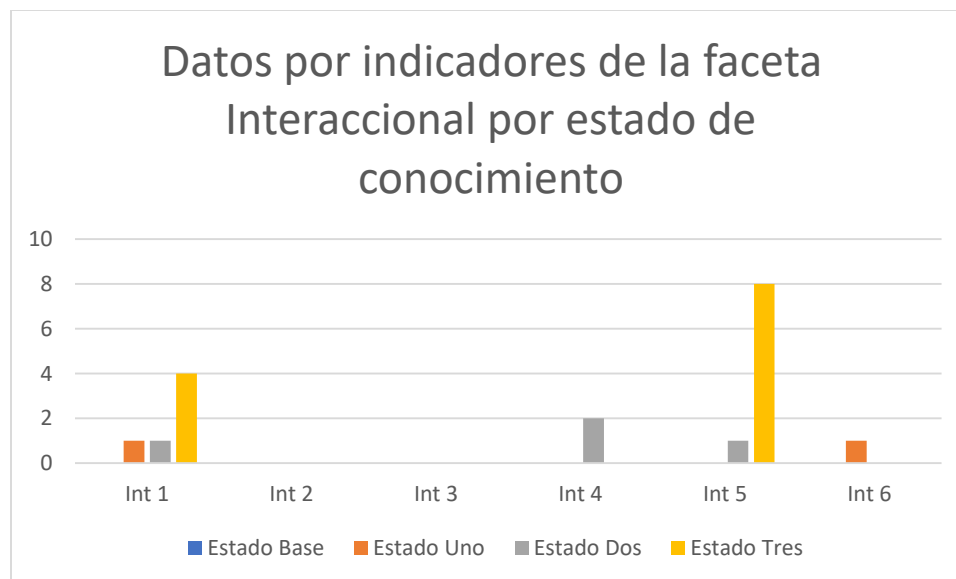


Figura 7 Síntesis de la Faceta Interaccional en cada ciclo

En la anterior gráfica podemos ver un énfasis en el primer y quinto descriptor de la Faceta Interaccional los cuales tratan sobre *Interacciones que favorecen la producción de argumentos* y *Criterios para diseñar tareas que favorezcan la producción de argumentos*. Esto se debe a que el propósito del Ciclo Tres consistía en atender asuntos acerca del diseño de una tarea que involucraba asunto sobre las posibles interacciones que se podían dar en la implementación de la tarea y criterios para diseñar tareas que favorezcan la producción de argumentos.

En las demás facetas (Mediacional, Cognitiva y Ecológica) se presentaron datos aislados los cuales no nos permiten detectar una regularidad en la estrategia investigativa.

De los 54 datos recogidos, únicamente 47 nos permitieron dar cuenta de una transformación del conocimiento didáctico matemático, y para los cuales utilizamos las categorías de transformación que explicitamos en el capítulo de metodología (Tabla 5).

A continuación, exponemos el análisis que da cuenta de la transformación de nuestro conocimiento al comparar datos investigativos de diferentes estados del conocimiento a partir de los descriptores del CDM y de las categorías de transformación expuestas en el capítulo de metodología.

Análisis respecto a la categoría vínculos entre términos

En la Tabla 12 exponemos la cantidad de datos investigativos clasificados en la categoría vínculos entre términos, dicha clasificación la hemos separado por estados y por cada subcategoría.

Vínculos entre términos									
Estados	Facetas	Descriptor del CDM	Cantidad de datos por descriptor	Total por Estado	Subcategoría				
					Sinonimia	contenencia	Intersección	Consecuencia	Diferenciación
Estado B	Epistémica	Ep1	2	2	1	0	1	0	0
Estado 2	Epistémica	Ep1	2	11	0	1	0	0	0
		Ep3	8		0	6	0	1	1
	Ecológica	Ec2	1		0	0	0	1	0
Total por subcategoría					1	7	1	2	1

Tabla 12. Síntesis de los datos investigativos para la categoría vínculos entre términos

La información reportada en la Tabla 12 permite inferir que la transformación del conocimiento didáctico – matemático del profesor respecto a la categoría **vínculos entre términos**, consistió en pasar de proponer *definiciones de argumentación* [EP1] a partir de relaciones de **sinonimia**, durante el Estado Base, a proponer *definiciones de argumentación/argumento* [EP1], caracterizaciones de *términos afines a la argumentación* [EP3] e indicar *la importancia de promover la argumentación en diferentes contextos* [EC2], a partir de relaciones de **contenencia** y **consecuencia** entre diferentes términos.

Tanto en el estado base como en el Estado 2, los datos se concentraban en la faceta epistémica, salvo por un dato que se clasificó en la faceta ecológica. En el Estado Base en los dos datos identificamos que se establecen relaciones de **sinonimia**, porque se define argumento como sinónimo de marco de referencia, y argumentación como sinónimo de justificación [EP1]. Por otro lado, en el Estado 2, los datos clasificados en la subcategoría **contenencia** se clasificaron así porque definen la argumentación como un proceso inmerso en la actividad demostrativa, la argumentación inmersa en la justificación y el argumento inmerso en la demostración. Por otro lado, los datos que corresponden a la subcategoría **intersección** se clasificaron así porque se establece que, aunque la explicación y la argumentación son procesos diferentes, hay componentes que se encuentran en ambos procesos (los roles de emisor y receptor).

Análisis respecto a la categoría asimilación

En la Tabla 13 exponemos la síntesis de los datos investigativos clasificados en la categoría **Asimilación**, dicha clasificación la hemos separado por estados y por cada subcategoría dando a conocer el total de datos para cada Estado de conocimiento.

Asimilación							
Estados	Facetas	Descriptorios del CDM	Cantidad de datos	Total por Estado	Subcategoría		
					Repetición	Conexiones	Posesión
Estado B	Epistémica	Ep2	1	1	1	0	0
Estado 1	Epistémica	Ep1	2	7	2	0	0
		Ep2	1		1	0	0
		Ep4	2		1	1	0
		Ep6	1		1	0	0
	Interaccional	In6	1		0	1	0
Estado 2	Epistémica	Ep1	1	6	1	0	0
		Ep3	1		0	0	1
		Ep4	1		1	0	0

		Ep5	1		1	0	0
	Interaccional	In1	1		0	1	0
		In5	1		0	1	0
Estado 3	Interaccional	In5	3	3	0	1	2
Total por subcategoría					9	5	3

Tabla 13. Síntesis de los datos investigativos para la categoría asimilación

La información reportada en la Tabla 13 permite inferir que la transformación del conocimiento didáctico matemático del profesor en cuanto a la categoría de **asimilación** consistió en pasar de proponer *definiciones de argumentación/argumento* [Ep1], *definiciones de tipos de argumentos* [Ep2], *definir elementos de un argumento* [Ep6] y *formas de representar un argumento* [Ep4] empleando **repetición** de conceptos propuestos por otros autores, a proponer *definiciones de argumento/argumentación* [Ep1], *definiciones de términos afines a la argumentación* [Ep3], *formas de representar un argumento* [Ep4], *modos de razonamiento para construir un argumento* [Ep5], por medio de **conexiones** entre diferentes referentes teóricos con el fin de establecer *interacciones que favorecen la producción de argumentos* [In1] y de criterios para el *diseño de tareas que favorezcan la argumentación* [In5] sustentando el diseño y las interacciones tomando postura y proponiendo definiciones propias, sustentadas en diferentes referentes como evidencia de una **posesión** del conocimiento.

En el Estado Base únicamente se encuentra un dato correspondiente a parafrasear tipos de argumentos después de realizar la lectura del documento de Molina y Samper (2019). Para el Estado 1 de conocimiento se evidencia que, de los siete datos, seis se encuentran aún en la subcategoría de **repetición**, sin embargo, aparece un dato que establece relaciones entre diferentes referentes teóricos respecto a la representación de una demostración a tres columnas y la representación de argumentos deductivos del modelo de Toulmin.

En el Estado 2 se exhibe que en comparación al Estado 1, tres datos aún hacen referencia a la **repetición** de ideas de otros autores, por el contrario, ya hay dos datos que corresponden a realizar **conexiones** entre diferentes referentes teóricos en cuanto al porqué trabajar en grupos cooperativos para favorecer la argumentación y en cuanto al uso de diferentes estrategias como las plantillas discursivas propuestas por Rumsey y Langrall (2016) para favorecer la argumentación. Además, se observa el primer dato que corresponde a la subcategoría **posesión**, clasificado en esta porque establece las ideas de los profesores en cuanto al porqué algunas representaciones de una demostración favorecen la enseñanza y lo sustentan por medio de ideas de otros referentes teóricos.

Finalmente, la Tabla 13 expone que para el Estado 3 de conocimiento los datos corresponden únicamente a la faceta interaccional; ya no se encuentran datos clasificados en la subcategoría **repetición**. Se encuentra un dato que corresponde a la categoría **conexiones** porque establece relaciones entre problemas abiertos de conjeturación y procesos afines a la argumentación como la exploración y la conjeturación. Por otro lado, dos datos se encuentran clasificados en la subcategoría posesión porque establecen estrategias para promover la argumentación a partir del diseño de una tarea realizado por los profesores investigados y lo sustentan en el marco de los problemas abiertos de conjeturación, la representación de argumentos y los procesos de la actividad demostrativa.

Conclusiones

A continuación, presentamos las conclusiones que se derivan de este proyecto investigativo, cada una de estas en torno a cada uno de los objetivos específicos planteados en el primer capítulo, finalmente exponemos unas conclusiones y unas proyecciones personales.

Se logró adaptar el modelo del CDM, lo que nos permitió categorizar los datos investigativos en torno a nuestro conocimiento profesional respecto a la enseñanza de la argumentación con el fin de darnos cuenta cuáles facetas se veían favorecidas en cada plan de acción. El prestarles atención a las facetas, nos permitió una mejor organización de los datos para realizar cada uno de los análisis expuestos en los capítulos 4, 5, 6 y 7 a partir de los descriptores que caracterizaban a cada una de estas.

En lo que corresponde a problematizar asuntos de nuestro conocimiento profesional sobre la enseñanza de la argumentación, nos percatamos de que cada plan de acción favoreció ciertas facetas del conocimiento debido al origen de cada dificultad encontrada. En el primer Ciclo, los datos fueron clasificados en la faceta epistémica debido a que las falencias encontradas eran sobre el conocimiento especializado sobre la argumentación. En el segundo Ciclo, los datos fueron clasificados en todas las facetas ya que la problemática encontrada refería a asuntos muy globales sobre la enseñanza de la argumentación lo cual hizo que el plan de acción fuera bastante ambicioso. Para el Ciclo 3, las dificultades encontradas referían a los asuntos de aplicar el conocimiento adquirido en los anteriores ciclos para el diseño de una tarea y una reflexión posterior a este diseño; es por esa razón que la faceta que se vio favorecida en el Ciclo 3 fue la interaccional dando cuenta de las acciones que hace el profesor para favorecer la argumentación en sus estudiantes. También, cabe resaltar que el hecho de que los profesores sean conscientes y reflexivos en cuanto a su conocimiento les permite determinar ciertas acciones que logren atacar las dificultades encontradas y posteriormente a observar cómo el cambio de un conocimiento logra proyectarse por medio de las prácticas profesionales.

Por otro lado, la formulación de categorías emergentes para dar cuenta de la transformación de nuestro conocimiento nos permitió determinar el origen de los datos en el cual

observamos que la transformación del conocimiento se dio entre las facetas epistémica, e interaccional principalmente. Dicha transformación está ligada, como se mencionó anteriormente, a las características de cada uno de los planes de acción y las problemáticas que cada uno de estos abordaba. Sin embargo, consideramos que se podrían plantear planes de acción para futuras investigaciones que se enfoquen en los conocimientos que refieren a las facetas que no se vieron favorecidas en esta investigación.

Finalmente, como consideraciones personales, pensamos que el hecho de que la investigación estuviera orientada por una persona perteneciente a un grupo de investigación nos permitió adquirir habilidades analíticas y de escritura para reportar la transformación de nuestro conocimiento en cuanto a la enseñanza de la argumentación. Por otro lado, esperamos que esta investigación sea un aporte y un ejemplo a la comunidad de educadores matemáticos que buscan mejorar sus prácticas profesionales cuando realizan planes de acción para atender dificultades en su conocimiento profesional. Además, planteamos una inquietud que surgió a lo largo de esta investigación; teniendo en cuenta que el CDM y las categorías emergentes que propusimos, logran caracterizar la transformación de nuestro conocimiento profesional, ¿qué modelo nos permitirá categorizar el conocimiento profesional que debería tener un profesor que prepara a futuros profesores de matemáticas?

Referencias

Ayalon, M., Hershkowitz, R., (2017) Mathematics teachers' attention to potential classroom situations of argumentation, *The Journal of Mathematical Behavior*, Volume 49, 163-173, ISSN 0732-3123, <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.11.010>.
(<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0732312317301141>)

Camargo, L. (2021) Estrategias cualitativas de investigación en Educación Matemática. Medellín, Editorial Universidad de Antioquia y Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional.

Chapman, O. (2013). Mathematical-task knowledge for teaching. *J Math Teacher Educ* **16**, 1–6. <https://doi.org/10.1007/s10857-013-9234-7>

Drijvers, P. (2015). Digital technology in mathematics education: Why it works (or doesn't). En S. J. Cho (Ed.), *Selected regular lectures from the 12th international congress on mathematical education* (pp. 135-151). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-17187-6_8.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13–31. <http://repositorio.minedu.gob.pe/handle/123456789/3098>

Lin, P. (2018). Improving Knowledge for Teaching Mathematical Argumentation in Primary Classrooms. *Journal on Mathematics Education*, 11, 17-30.

Martínez, M. (2000). La investigación – acción en el aula. *Agenda académica*, 7(1), 27-39.

Molina, O., y Samper, C. (2019). Tipos de Problemas que Provocan la Generación de Argumentos Inductivos, Abductivos y Deductivos. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 33(63), 109–134.

Pino-Fan, L., Godino, J. (2015). *Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico matemático del profesor*, paradigma, 36(1), 87-109. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2015.p87-109.id552>

Simon, S., Erduran, S. y Osborne, J. (2006). “Learning to teach argumentation: Research and development in the science classroom”. *International Journal of Science Education*, No. 2-3, Vol. 28, pp. 235-260.

Stylianides, A., Ball, D. (2008). Understanding and describing mathematical knowledge for teaching: knowledge about proof for engaging students in the activity of proving. *J Math Teacher Educ* **11**, 307–332. <https://doi.org/10.1007/s10857-008-9077-9>

Strauss, A., y Corbin, J. (2002). Bases de la investigación cualitativa: técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada.
http://www.academia.edu/download/38537364/Teoria_Fundamentada.pdf

Toro, J., Castro, W., (2020). Condiciones que activan la argumentación del profesor de matemáticas en clase. *Revista Chilena De Educación Matemática*, 12(1), 35–44.
<https://doi.org/10.46219/rechiem.v12i1.11>

Anexos

Anexo 1: Insumos Ciclo 1

Insumo	Fecha	Fragmento	Asunto	Qué revela de mi conocimiento
T1-DDC	24/04/2020	posee una formulación a modo de preguntas guías que orientaban al alumno a nuestros propósitos	Diseño de tareas	Se piensa que la formulación de una tarea debe contener preguntas guías que orientan al estudiante a los propósitos de la tarea.
T1-DDC	24/04/2020	los materiales y recursos era esencialmente GeoGebra, el cual apoya el desarrollo de la tarea a la hora de realizar la construcción que se sugiere en la formulación, además promueve la observación, exploración y la conjeturación de la propiedad del circuncentro	Diseño de tareas y EGD	Un EGD hace parte de los recursos y materiales de una tarea, se hace explícito algunas de las potencialidades que brinda un EGD en la resolución de una tarea.
T1-DDC	24/04/2020	tampoco se especifica el agrupamiento, lo que pone en duda como va a ser la interacción que se genera al desarrollar la tarea, ni mucho menos se habla sobre el tiempo requerido para ejecutarla. Por lo anteriormente dicho no considero que nuestra propuesta sea una tarea, posee algunos elementos esenciales, pero está incompleta.	Diseño de tareas	No se muestra los otros seis elementos de una tarea, lo único que se hace explícito es la formulación del enunciado y se asume que la tarea está mal elaborada o incompleta
T1-DDC	24/04/2020	El texto de Laborde trata sobre los dos tipos de construcciones existentes en los entornos de geometría dinámica, construcciones robustas y construcciones blandas	EGD	Existen dos tipos de construcciones en un EGD, construcciones blandas y robustas
T1-DDC	24/04/2020	conceptos de variación y variable, su importancia en la matemática y como los softwares de geometría dinámica ayudan a observar y comprender mejor estos conceptos gracias al arrastre	EGD	La variación y variable conceptos que se potencializan gracias al uso de EGD
T1-DDC	24/04/2020	Las construcciones robustas son aquellas que conservan sus propiedades geométricas aun después de arrastrar los elementos de la construcción, es decir, el arrastre es una manera de verificar las propiedades de la construcción	EGD	Definición de construcción robusta
T1-DDC	24/04/2020	estas construcciones permiten visualizar mejor la relación entre invariante y variable en un teorema de geometría	EGD	El potencial de las construcciones robustas para la enseñanza de conceptos como los de invariante y variable en matemáticas

T1-DDC	24/04/2020	Una construcción blanda es aquella que surge como resultado de una variación particular, en la que la construcción satisface una propiedad en un caso muy específico, pero sus propiedades no se mantiene al arrastrar los elementos de la construcción	EGD	Definición de construcción blanda
T1-DDC	24/04/2020	ventajas de las construcciones blandas es que promueven la exploración y la observación en los procesos de conjeturación y resolución de problemas geométricos	EGD	El potencial de las construcciones blandas para promover la observación y exploración
T1-DDC	24/04/2020	distintos tipos de arrastre los cuales son: arrastre libre, arrastre guiado, arrastre de lugar oculto.	EGD	Los diferentes arrastres que se pueden dar en una construcción blanda
T1-DDC	24/04/2020	Estudiantes de grado 10° sin ningún tipo de discapacidad, con los preconceptos necesarios para abordar la secuencia de tareas, además la institución educativa cuenta con una sala de cómputo disponible para las clases de matemáticas.	Diseño de tareas	Se dice que los alumnos tienen los preconceptos claros, pero en ningún momento se especifican cuáles son?
T1-DDC	24/04/2020	Inicialmente trabajan individualmente en el proceso de observación, exploración y conjeturación, luego en la discusión y demostración de las conjeturas trabajan en grupos de 3 integrantes.	Diseño de tareas	Concepto de agrupamiento
T1-DDC	24/04/2020	La interacción inicialmente será individual como mucho habrá interacciones de tipo estudiante – profesor para orientar al alumno, luego habrá interacciones de tipos estudiante – estudiantes, estudiantes – profesor y se finalizará con una socialización grupal.	Diseño de tareas	Concepto de interacción
T2-DDC	26/04/2020	para ello tuvimos en cuenta que al momento de usar geometría dinámica no fuera para plasmar algo que se puede hacer con regla y compás, por eso decidimos que las tareas deberían tener un momento en el que los estudiantes tuvieran que usar la función de “arrastre”.	EGD	Un EGD no es un recurso para dibujar objetos geométricos, sino para explotar el dinamismo que nos proporciona a la hora de resolver problemas de geometría.
T2-DDC	26/04/2020	Por medio del arrastre en cada una de las secuencias propuestas por nosotros, los estudiantes debían formular una conjetura, esto lo hicimos primordialmente para observar cómo era que los	EGD	Favorecer el proceso de conjeturación por medio de los arrastres que proporcionan las construcciones blandas

		estudiantes abstraían unas propiedades para unos casos específicos y la llevaban a una forma general.		
T2-DDC	26/04/2020	Inicialmente en lo que más enfatizamos fue en el uso de un programa como GeoGebra, en que los estudiantes hicieran exploraciones de alguna tarea propuesta, generalizaran y formularan una conjetura y finalmente comprobar dicha proposición (conjetura) de manera deductiva.	EGD	Al realizar una tarea en enfatiza en el recurso y en los procesos que se querían desarrollar.
T2-DDC	26/04/2020	Empezamos a problematizar el hecho de querer que un estudiante argumente, nosotros cuando iniciamos la maestría no conocíamos los diferentes tipos de argumentos que hay, pensamos que argumentar era solamente dar el porqué de una afirmación basados en un marco teórico.	Argumentación	Concepto de argumentar y se asume el desconocimiento de esta teoría
T2-DDC	26/04/2020	Ahora vemos que una dificultad que se nos presenta en el aula es cómo mediar para que un estudiante pueda producir diferentes tipos de argumentos con las tareas que nosotros hemos diseñado	Argumentación & mediación	Se manifiesta dificultades a la hora de mediar y diseñar tareas
T2-DDC	26/04/2020	vemos como un problema de nosotros como profesionales, es la falta de exploración con geometría dinámica, generalmente proponemos tareas donde el uso de un EGD sólo se usa para representar la situación sin dinamismo (Construir triángulos, hallar puntos medio de un segmento, entre otros), al no saber cómo diseñar tareas que promuevan la exploración pues nuestros estudiantes se verán con falencias en estos procesos.	Diseño de tareas & EGD	Dificultades en la formulación de tareas, ya que usamos el EGD para hacer dibujos, mas no para sacarle provecho a su dinamismo.
T2-DDC	26/04/2020	Un problema que también vemos en el diseño de nuestras tareas (las que proponemos casi siempre en el aula) es que nunca diseñamos tareas que soliciten hacer conjeturas, normalmente las tareas que se proponen son más para mostrar algún concepto o para realizar algunos algoritmos y dejamos de lado la capacidad de abstracción que pueden tener nuestros estudiantes.	Diseño de tareas	Dificulta para diseñar tareas que promuevan la conjeturación
T2-DDC	26/04/2020	teníamos algunos conocimientos sobre el curso de elementos de geometría de la Universidad Pedagógica Nacional, observamos que en general siempre se trabaja en grupos	Diseño de tareas	Estadio 0 sobre el agrupamiento a la hora de resolver una tarea

T2-DDC	26/04/2020	por tanto era importante una producción textual para garantizar que era lo que pensaban los estudiantes, una producción en el software para poder relacionar lo que reportaban en su producción textual con la construcción que estaban presentando	Argumentación	Producción en el EGD y textual como formas de evidenciar los argumentos de un estudiante
T2-DDC	26/04/2020	también pensamos que es importante favorecer una producción semiótica con la interacción entre estudiantes y profesor porque es una de las maneras en que los estudiantes fortalecen su proceso de argumentación al querer convencer a los demás de alguna postura que tienen en clase.	Argumentación	Concepto de mediación semiótica
T2-DDC	26/04/2020	Las tareas que usualmente proponíamos no manejaban este tipo de estructura, es en la maestría en donde nos llegamos a problematizar sobre los conocimientos que debemos tener como profesionales para el diseño y gestión de tareas que promuevan argumentación en los estudiantes con el uso de un programa de geometría dinámica, ahora hemos tratado de usar geometría dinámica en las clases de matemáticas aprovechando la situación del país con la educación virtual, sin embargo aún nos falta conocimiento y nos quedamos cortos en el diseño y en la gestión de estas tareas.	Diseño de tareas	Poco conocimiento sobre diseño y gestión de tareas.
T2-DDC	26/04/2020	tener en cuenta formular problemas que su solución no sea tan inmediata, ni tampoco esta solución no sea tan asequible aun con el uso de las herramientas teóricas que estén a disposición, en pocas palabras, este problema necesita un alto grado de heurística. Esto se hace con el propósito de hacer entrar al estudiante en crisis, en generar frustración y que el estudiante sienta la necesidad de pensar para resolver el ejercicio.	Diseño de tareas	A la hora de diseñar tareas se requiere que la solución del problema no sea inmediata, esto con el fin de generar una fase de crisis en el alumno
T2-DDC	26/04/2020	Algunos autores dicen que demasiada intervención por parte del docente es poco recomendable ya que vuelve a los estudiantes dependientes y a la hora de resolver un examen este debe de resolverse individualmente. Por lo tanto, el artículo plantea que la retroalimentación debe ser abundante al inicio pero a medida que los estudiantes van encontrando	Diseño de tareas	Al estudiante no se le debe orientar demasiado, ya que este se podría volver dependiente al profesor, la orientación debe ser abundante al inicio y luego muy poca

		el camino, esta retroalimentación debe disminuir drásticamente.		
T2-DDC	26/04/2020	Esta es la etapa final y en esta parte el maestro realizar la discusión de las soluciones y se da solución al ejercicio, de esta manera desvaneciendo la crisis que se generó al inicio de la tarea.	Diseño de tareas	Al final del desarrollo de la actividad el docente debe realizar la socialización de la tarea para desvanecer la crisis que genero el ejercicio
T3-DDC	11/06/2020	Como hemos observado en el transcurso de la maestría, trabajar en grupos de tres favorece el proceso de argumentación en los estudiantes; puesto que es más difícil que se logren poner de acuerdo tres personas sin haber llegado a algunos acuerdos entre ellos. La organización en el aula es de tres estudiantes por cada mesa con computador, así el docente podrá observarlos de una manera más adecuada y atender las dudas de cada uno de los grupos.	Mediación	El agrupamiento de los estudiantes juega un papel importante en la interacción de los estudiantes en la resolución de tareas.
T3-DDC	11/06/2020	La interacción inicialmente será entre los integrantes de cada grupo en la cual se espera que intenten persuadir a sus compañeros con argumentos respecto a la construcción y la exploración de la situación. habrá interacciones de tipo estudiante – profesor para orientar al alumno y no perder la meta de la tarea. Después, habrá interacciones de tipos estudiante – estudiantes en la cual se espera llegar a una conjetura para analizar. Finalmente, una interacción grupal en la que el profesor servirá como mediador en las participaciones de los estudiantes para llegar a un acuerdo de aprendizaje.	Mediación	Diferentes tipos de interacción que se pueden dar en el aula

Anexo 2: Texto Narrativo de Argumentación

Conocimiento sobre argumentación estadio base

Cuando nos inscribimos a la maestría a menudo utilizábamos las palabras argumentación, argumento, justificación, explicación, validación y demostración de manera intuitiva, en ocasiones, estos términos los entendíamos como sinónimos. Por ejemplo, concebíamos por argumentación a la justificación de una idea. A su vez, argumento lo relacionábamos con el sustento teórico para soportar una idea, especialmente con el marco teórico que permite respaldar una demostración. También, asociábamos la palabra demostración con un proceso deductivo y la concebíamos como una forma de argumentar.

Conocíamos que se puede expresar una demostración por medio de una tabla a dos columnas (afirmación y garantía) o en un párrafo coherente y secuenciado. En el caso de Sergio, conocía un formato para reportar una demostración a tres columnas (qué se, qué uso y qué concluyo), el cual conoció en el curso de Elementos de Geometría de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN).

Respecto al proceso para producir una demostración de una proposición, conocíamos una estrategia para lograr construirla. Esta consistía en asumir como cierta la tesis de la proposición y a partir de un proceso de abstracción (abducción), inferir qué propiedades se debían haber garantizado antes para poder concluir dicha tesis.

Transformación del conocimiento sobre argumentación

Consideramos que como profesores constantemente les pedíamos a los estudiantes que explicaran, justificaran, argumentaran, validaran y en ocasiones que demostraran las respuestas

que ellos encontraban a un problema. Sin embargo, nosotros como docentes, no teníamos claro cuál era el significado de cada uno de estos conceptos y los considerábamos como sinónimos.

Al iniciar la maestría nos pidieron enfocarnos (centrarnos) en el proceso de argumentación para nuestro trabajo de grado. En el seminario de Investigación e Innovación nos preguntaron ¿Qué entendíamos por argumentación? Inicialmente, no tuvimos una respuesta clara más allá de entender la argumentación como la justificación o la validación de una idea. Esta respuesta no nos convenció porque no logramos definir este concepto con exactitud, ~~ya que~~ lo que hicimos fue asociarlo con sinónimos. Fue entonces cuando nos comenzamos a preguntar, si había una definición de argumentación y de argumento que tuviera un sustento teórico.

Luego, en el seminario de Profundización en Matemáticas Elementales (PME) nos pidieron realizar una lectura del documento *Tipos de problemas que provocan la generación de argumentos inductivos, abductivos y deductivos* de Molina y Samper (2019). Esta acción, nos permitió apropiarnos (interpretar aclarar el significado) de la palabra argumento, entendiéndolo como el enunciado de un razonamiento que una persona manifiesta de forma oral o escrita y que tiene tres componentes: datos, garantía y aserción. Entendemos estos conceptos de maneras distintas, por esta razón, reportamos las definiciones según la concepción de cada uno de los profesores.

Sergio definió estas palabras de la siguiente manera:

- **Datos:** Son condiciones y relaciones entre objetos geométricos.
- **Garantía:** Es la regla general que relaciona datos y aserción. Las reglas pueden ser teoremas, definiciones y postulados.
- **Aserción:** Es una consecuencia que surge a partir de unos datos.

Carlos las define así:

- **Datos:** Son un objeto geométrico que satisface una o varias propiedades y que normalmente coincide con el antecedente de una implicación.
- **Garantía:** Es una proposición teórica de la forma $p \rightarrow q$.
- **Aserción:** Es un objeto geométrico que satisface una o varias propiedades y que normalmente coincide con el consecuente de una implicación.

Vemos que hay diferencias entre la definición de datos en un argumento; para Carlos los datos son un objeto geométrico y coinciden con el antecedente de una implicación, mientras que, para Sergio, son relaciones entre objetos geométricos. Las definiciones de garantía son parecidas y la definición que da Sergio, abarca la definición que da Carlos. Por otro lado, la diferencia de las definiciones de garantía es que Sergio menciona que la aserción surge como consecuencia de los datos y Carlos la concibe como un objeto geométrico con cierta propiedad y que coincide con el consecuente de una implicación. Cabe resaltar que estos componentes del argumento están sustentados en el marco del modelo de Toulmin. Este modelo es un referente teórico que nos permite caracterizar, representar, analizar y valorar la calidad de un argumento.

A su vez, empezamos a identificar la argumentación como el acto comunicativo en el cual una persona se vale de uno o más argumentos para sustentar una idea, con el fin de persuadir a un grupo de personas o a sí mismo.

Al realizar una comparativa entre la definición de argumento del Estadio Base y el Estadio 1, podemos ver que estas tienen mucha similitud. Sin embargo, la segunda definición es mucho más amplia en el sentido que abarca otros elementos que en la primera no se mencionan (datos, garantía y aserción), los cuales nos permiten determinar qué es y qué no es un argumento.

Por ejemplo, con la definición del Estadio Base, se podría considerar que una demostración es un argumento, mientras que ahora sabemos que no es así, una demostración es una cadena de argumentos deductivos, más adelante hablaremos sobre los tipos de argumentos.

Al realizar una comparativa entre las definiciones del Estadio base y el Estadio 1 de argumentación; vemos que la mayor diferencia es que en el Estadio 1 se entiende la argumentación en términos del argumento, es decir, que estos argumentos tienen cierta estructura (datos, garantía, aserción), no pueden ser cualquier cosa. Mientras que en el Estadio Base cualquier enunciado que justifique una idea se puede considerar argumentación.

Cabe resaltar que a pesar de tener una idea acerca de la diferencia entre las definiciones de los Estadios Base y 1, estas diferencias son simples especulaciones y actualmente no sabemos cuál es la diferencia teórica entre justificar y argumentar. Sabemos que los términos argumentación, argumento, justificación, explicación y validación son distintos, pero salvo por argumento y argumentación aún no sabemos precisar sus definiciones y mucho menos diferenciarlos. Los términos que conocemos medianamente bien son argumento y argumentación, ya que estos temas fueron trabajados a profundidad en el seminario PME. Podemos visualizar esta dificultad en el ítem 4 de la formulación del enunciado de una tarea (Figura), donde utilizamos los términos explique y valide en la misma frase. En la manera en cómo se formuló este ítem, se puede inferir que los profesores al utilizar estos términos en la misma frase los están asociando como sinónimos.

Situación 3. ¿Cómo formularían la situación de tarea para que se favorezca el logro de las metas propuestas? Para dicha formulación considere los recursos que se tendrían a disposición para desarrollar la situación de tarea.

Construya un $\square ABCD$ de tal manera que $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{AD} \cong \overline{BC}$. ¿Qué relación encuentra entre \overline{AC} y \overline{BD} ?

1. Reporte los pasos de la construcción.
2. Reporte los pasos de exploración.
3. Provea una conjetura.
4. Explique por qué es válida su conjetura.

Figura 6 Fragmento de la tarea final del seminario Diseño y Desarrollo Curricular (DDC), en la cual nos pedían que diseñáramos una tarea.

Al realizar la lectura del documento de Molina y Samper (2019), también nos percatamos de que existen tres tipos de argumentos: deductivos, inductivos y abductivos. Comenzamos a utilizar estos términos frecuentemente durante el transcurso de todos los seminarios. A continuación, presentamos nuestra definición de cada tipo de argumento:

- **Argumento deductivo:** Es el argumento en el cual se conocen los datos y la garantía y se infiere la aserción.
- **Argumento inductivo:** Es el argumento que se obtiene cuando se conoce un conjunto de datos los cuales conducen siempre a una misma aserción; de esta manera se infiere una garantía que corresponde a una regla general que relaciona los datos y la aserción.
- **Argumento abductivo:** Es el argumento en el cual se conocen la garantía y la aserción, y se infieren los datos.

Evocando algunas acciones relacionadas con nuestro pregrado, actualmente podemos afirmar que nosotros sabíamos demostrar y en el reporte de la demostración producíamos solo argumentos deductivos. Sin embargo, no éramos conscientes del proceso de argumentación que se encontraba inmerso y de los tipos de argumentos que generábamos. Ya que en el proceso de

construir la demostración no solamente generábamos argumentos deductivos, sino que también pueden surgir otro tipo de argumentos. Por ejemplo, argumentos abductivos que también los usábamos en el pregrado inconscientemente.

En los cursos de geometría y análisis matemático era común generar argumentos abductivos cuando se demostraba una proposición de la forma $p \rightarrow q$. Suponíamos que la proposición q era verdadera y a través de un proceso de ~~abstracción~~ abducción, se generaba una nueva proposición q_1 , con la característica de que, si q_1 es verdadera, también q es verdadera. Realizando el procedimiento anterior con q_1 , se genera una cadena de implicaciones en retrospectiva ($q \leftarrow q_1 \leftarrow q_2 \leftarrow \dots \leftarrow p$) hasta lograr conectar la proposición q con la proposición p .

En el curso de PME también aprendimos que, estos tres tipos de argumentos se pueden representar por medio de un diagrama, el cual corresponde a una representación gráfica del argumento usando el modelo de Toulmin. El profesor Oscar Molina durante el seminario PME nos explicó que, según el tipo de argumento que se esté usando, se debe tener en cuenta cierta representación. Esto permite determinar qué es lo que se infiere en cada argumento y de esta manera identificar el tipo de argumento. En la siguiente figura vemos como se representa cada tipo de argumento en el modelo de Toulmin.



Figura 2 Representación de argumentos: deductivos abductivos e inductivos en el modelo de Toulmin

En la Figura 2 podemos visualizar que en los argumentos deductivos se resalta el cuadro donde se escribe la aserción, ya que en este tipo de argumentos esto es lo que se infiere. En los argumentos abductivos, se puntea y se resalta la casilla donde escribimos los datos, ya que lo que se infiere son los datos, y en los argumentos inductivos, se puntea y se resalta la casilla donde se escribe la garantía ya que es lo que se infiere. Cabe resaltar que la convención de colocar el cuadro punteado hace referencia a que lo que se infiere es plausible hasta que sea demostrado, mientras que cuando no se puntea es porque este hecho se da con seguridad.

Después en el seminario PME, nos propusieron una tarea la cual nos pedían representar los argumentos que surgían al modelar en GeoGebra la construcción de una parábola a partir del doblado de papel. En esta tarea se puede observar que inicialmente tuvimos dificultades para representar argumentos, ya que no atendíamos las normas que se utilizan en el modelo de Toulmin para representar argumentos. Representábamos los tres tipos de argumentos de la misma manera, en la figura 3 se observa como representábamos argumentos deductivos e inductivos indistintamente.

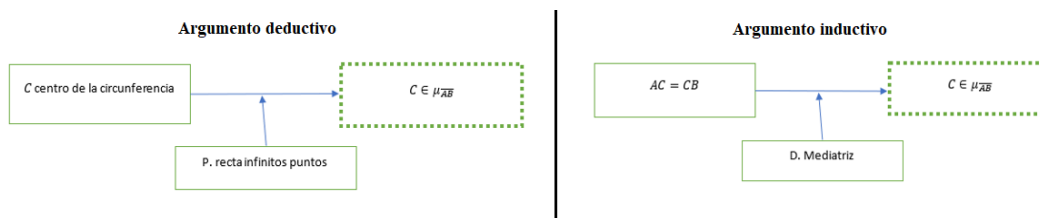


Figura 3 Representación que hacíamos de un argumento deductivo e inductivo de manera equivocada.

El modelo de demostración a tres columnas que conocía Sergio al iniciar el primer semestre se relaciona con el diagrama para representar un argumento usando el modelo de Toulmin. El “qué sé” inicialmente se considera como un dato, el “qué uso” se asocia con la garantía y el “qué concluyo” se refiere a la aserción.

Qué sé	Qué uso	Qué concluyo

También, entendemos que la demostración a dos columnas (Afirmación y Garantía) se relaciona con el diagrama para un argumento del modelo de Toulmin y con un diagrama para representar demostraciones a tres columnas. Cada una de las filas que aparecen en las tablas de demostración corresponde a un argumento de tipo deductivo. En la columna de “afirmación” se escribe la aserción; en la columna de "garantía" se escribe la garantía y en ella también se escribe entre paréntesis el número de la fila en la cual se encuentran los datos de dicho argumento.

Afirmación	Garantía

Anexo 3: Texto Narrativo de EGD

Conocimiento sobre EGD estadio base:

Un Entorno de Geometría Dinámica (EGD) lo considerábamos como un software que permite resolver problemas de geometría mediante la representación gráfica de objetos

geométricos. Estos tienen la característica de poder generar representaciones dinámicas de dichos objetos. Conocemos 3 entornos de geometría dinámica: Cabri, GeoGebra y Regla y Compás (software). En especial, hemos utilizado GeoGebra ya que es de fácil acceso al ser un programa gratuito.

Considerábamos que el uso de un EGD servía para realizar construcciones más estéticas que las que realizábamos en el tablero. Con estéticas nos referíamos a que las representamos de los objetos geométricos se generaban con mayor precisión que al realizarlas a mano alzada o con regla y compas. El uso de los EGD permitía atender dificultades que surgían al hacer representaciones en el tablero o en el cuaderno. Por ejemplo, identificar relaciones entre medidas, intersecciones, congruencias, paralelismo o perpendicularidad.

Además, nuestro concepto de tecnología digital consistía en una herramienta tecnológica para desarrollar una tarea determinada. Así mismo, pensábamos que el papel que desempeñaba la TD en educación matemática era simplemente una herramienta que se llevaba al aula de clase para facilitar la enseñanza de algún concepto matemático.

Transformación de conocimiento sobre EGD:

En el curso Profundización en Matemáticas Elementales (PME), el profesor nos pidió desarrollar tareas que involucraban el uso de un EGD. Sergio, al tener experiencia con el uso de GeoGebra para resolver tareas en sus estudios de pregrado, en la Universidad Pedagógica Nacional, utilizaba el EGD para explorar utilizando arrastres, midiendo segmentos, midiendo ángulos y encontrando relaciones entre objetos. Carlos, aunque sabía manejar algunas herramientas de GeoGebra, no se interesaba en usar el EGD para resolver la tarea, pues prefería realizar las representaciones en el cuaderno. Fue entonces, cuando el profesor del seminario

PME, solicitó a Carlos no utilizar el cuaderno y realizar las mismas representaciones en el EGD. Tiempo después, Carlos utilizaba el EGD para representar las construcciones de una manera estética y la solución de los ejercicios surgía como consecuencia directa de las reglas teóricas de la geometría euclidiana, viendo el proceso de exploración como algo innecesario. Esta forma de pensar cambio cuando en el curso de EPM del segundo semestre de la MDM nos pidieron diseñar una tarea. Nosotros tomamos un ejercicio de un texto guía y realizamos una adaptación de tal manera que el enunciado quedara como un problema abierto de conjeturación de búsqueda de antecedente. En este problema Carlos pensó que una solución particular del ejercicio era la única solución, sin embargo, al momento de demostrarlo no se evidenciaba este hecho. En ese momento Sergio realizó una exploración a la construcción y de esta manera logró encontrar la solución generalizada que estábamos buscando. Esta acción le permitió a Carlos entender la importancia del proceso de exploración al resolver problemas de geometría con un EGD.

En el seminario PME del primer semestre, nos solicitaron realizar una lectura del documento *Tipos de problemas que provocan la generación de argumentos inductivos, abductivos y deductivos* de Molina y Samper (2019), en el cual encontramos algunas menciones sobre los EGD de tal manera que logramos identificar una posible definición de estos. Definimos un EGD como un software de geometría dinámica en el cual se pueden hacer representaciones de objetos geométricos y que se caracteriza por el dinamismo que se le puede hacer a dichas representaciones geométricas. Los EGD cuentan con algunas herramientas que no se podrían utilizar si se hace una construcción a papel y lápiz, estas son: arrastre, lugar geométrico, rastro y animación.

En particular centramos nuestra atención en la herramienta arrastre, pues no conocíamos que existían diferentes tipos de arrastre y, por tanto, la lectura de este documento nos ayudó a apropiarnos de estas definiciones:

- **Arrastre libre:** Consiste en mover un punto por cualquier parte del plano.
- **Arrastre limitado:** Consiste en mover un punto sólo por el objeto al cual pertenece.
- **Arrastre guiado:** Consiste en mover un punto por una forma determinada para no perder las propiedades de la construcción.
- **Arrastre de lugar ficticio:** Consiste en mover un punto con el fin de que las propiedades de la construcción no cambien. El punto se mueve por una forma determinada sin que la persona lo perciba.
- **Arrastre mantenido:** Consiste en mover un punto con el fin de que las propiedades de la construcción no cambien. El punto se mueve por una forma determinada, la persona percibe esta forma y comprueba por medio de la herramienta del rastro.

Cabe resaltar que también definimos las otras herramientas que permiten el dinamismo de los EGD.

- **Animación:** Consiste en una herramienta que permite realizar un arrastre limitado sin necesidad de que el usuario mantenga el click del mouse oprimido.
- **Rastro:** Es una herramienta que permite dejar la huella de un punto a medida que a este se le aplica un arrastre.
- **Lugar Geométrico:** Es una herramienta que permite visualizar el rastro que deja la representación de un objeto geométrico cuando se realiza un arrastre limitado de un punto.

Podemos observar que la definición de EGD que dimos inicialmente, aún se parece a la que damos al terminar el primer semestre. Sin embargo, en la segunda definición tenemos en cuenta las herramientas que permiten el dinamismo. No conocíamos los tipos de arrastre, ni siquiera nos habíamos preguntado qué era lo que caracterizaba a los EGD y por qué su importancia en la enseñanza.

En el seminario Diseño y Desarrollo Curricular (DDC), nos solicitaron realizar la lectura del documento *Robust and soft constructions: two sides of the use of dynamic geometry environments* de Colette Laborde (2000), en el cual logramos identificar aspectos importantes que caracterizan a los EGD. Por tanto, encontramos que se ha investigado en el uso de construcciones blandas y construcciones robustas en la Educación Matemática y consideramos importante apropiarnos de estos conceptos. Definimos estos tipos de construcciones de la siguiente manera:

- **Construcción blanda:** Es una construcción geométrica que, si se somete al arrastre alguno de los puntos de dicha construcción, las propiedades iniciales no se mantienen.
- **Construcción robusta:** Es una construcción geométrica la cual satisface la prueba del arrastre, esto quiere decir que al arrastrar algún elemento que conforma la construcción, esta preserva sus propiedades geométricas. Por ejemplo, perpendicularidad, paralelismo, congruencia, etc.

Al iniciar la maestría teníamos una idea intuitiva de construcción robusta, sin embargo, no pensábamos que a las construcciones blandas se les diera tanta importancia en el ámbito investigativo. Ya que es a partir de las construcciones blandas que surgen los diferentes tipos de arrastres, además, este tipo de construcciones surgen principalmente del proceso de exploración.

Por otro lado, pensamos que los EGD no sirven sólo para dibujar o representar situaciones geométricas. Uno de los potenciales más importantes es que cuentan con las herramientas de arrastre, lugar geométrico y rastro; estas son útiles para promover el proceso de exploración asociados a una construcción geométrica, algo que no permiten las construcciones con lápiz y papel. Otro potencial de los EGD es que ayuda al estudiante a diferenciar entre propiedades variables y propiedades invariables de una construcción.

Consideramos que uno de los mayores cambios que hemos tenido respecto a los EGD, es que ya no los consideramos como software que solo sirven para realizar representaciones geométricas con mayor precisión. Ahora, pensamos que la mayor utilidad que les podemos dar a los EGD es que permiten al profesor potenciar los diferentes procesos involucrados (exploración, construcción, conjeturación, demostración) cuando un estudiante resuelve una tarea en un EGD. Lo anterior es gracias al dinamismo del software, ya que esta es la principal característica que lo diferencia de otros recursos como por ejemplo el papel y lápiz.

En el segundo semestre de la MDM, en el curso de TCM del profesor Carlos Pérez se trabajó principalmente en aspectos relacionados con los EGD. Por ejemplo, tecnología educativa, tecnología digital en educación matemática, EGD y aproximación instrumental.

El concepto que adquirimos sobre tecnología digital al finalizar el curso es que es una herramienta que debe abarcar y guiar todas las acciones educativas que impliquen transformaciones en el entorno humano, sean de carácter artefactual (aparatos), simbólico u organizativo. También tenemos un nuevo concepto acerca de TD en educación matemática ya que ahora sabemos que actualmente el uso de la tecnología digital en el aula está basado principalmente en el diseño de tareas que exploten el potencial que tiene la tecnología para la enseñanza de las matemáticas. También aprendimos que existen tres perspectivas investigativas

fundamentales acerca de la TD, las cuales son: Teoría de génesis instrumental, Teoría de mediación semiótica y Teoría del Construccinismo, todo esto en torno al uso de la tecnología digital.

En este curso también aprendimos varios conceptos que son claves a la hora de enseñar conceptos matemáticos mediados por el uso de tecnología digital los cuales son:

- **Artefacto:** Es un objeto creado con una finalidad específica.
- **Instrumento:** Un instrumento está conformado por un artefacto y las habilidades y conocimientos que tiene el sujeto para utilizar el artefacto.
- **Génesis instrumental:** Llamamos génesis instrumental al proceso por el cual se producen los instrumentos por parte de un sujeto mediante la utilización de un artefacto.
- **Instrumentalización:** Son los conocimientos que tiene el sujeto en cuanto a la utilización de un artefacto.
- **Instrumentación:** Es la influencia que ejerce el artefacto sobre los significados personales del sujeto.

De esta manera generando una transformación en la definición que teníamos acerca de un EGD ya que ahora entendemos por EGD: Es un artefacto compuesto por una colección de artefactos, los cuales son: artefactos de construcción, artefactos de medida, artefacto de arrastre, artefacto de animación, artefacto de lugar geométrico, herramienta rastro, entre otros. Las herramientas arrastre, animación, lugar geométrico y rastro son las que le proveen el carácter dinámico al EGD y su principal objetivo es convertirlo en instrumento en manos de un estudiante a partir del surgimiento de esquemas de utilización mediante un proceso llamado génesis

instrumental. Esta se genera cuando el estudiante experimenta el doble proceso de instrumentalización e instrumentación al interactuar con el EGD.

Anexo 4: Textos Narrativo de Tareas

Conocimiento sobre tareas estadio base:

Antes de ingresar a la Maestría en Docencia de la Matemática (MDM) de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN), considerábamos el término actividad como aquellos ejercicios que el profesor dejaba a los estudiantes para resolver en la clase. También, usábamos la palabra tarea para referirnos a los ejercicios que el docente dejaba a los estudiantes para resolver en casa. Es importante mencionar que para nosotros el significado de actividad era un sinónimo de tarea (salvo por el lugar en el que se realizan), por tanto, era frecuente que utilizáramos expresiones como “la actividad queda de tarea”.

Cuando diseñábamos una tarea simplemente tomábamos enunciados de ejercicios del texto guía o construíamos nuestro propio enunciado. Las tareas que implementábamos en el aula eran de dos tipos de ejercicios. Los primeros son ejercicios netamente algorítmicos y los segundos corresponden a preguntas tipo ICFES, debido a que en el currículo de los colegios nos solicitaban fortalecer los conocimientos de los estudiantes para este tipo de pruebas.

Implícitamente teníamos en cuenta que, cuando proponíamos una tarea a nuestros estudiantes debíamos considerar los siguientes criterios:

- El propósito de una tarea era reforzar lo visto en clase.
- Los conocimientos previos para abordar los ejercicios deben ser tenidos en cuenta por el profesor.

- Las tareas deben desarrollarse de forma individual.
- Los ejercicios que proponíamos estaban presupuestados para desarrollarlos en una sesión de clase (100 minutos). Si esto no ocurría, los estudiantes deberían terminarlos en casa.
- El uso de GeoGebra es para realizar representaciones gráficas con mayor precisión.
- Los estudiantes deben reportar de manera escrita los procedimientos realizados durante el desarrollo de los ejercicios.
- Los acuerdos acerca del uso de símbolos para referirnos a segmentos, distancias, rectas, triángulos, deben ser utilizados por los estudiantes en el reporte de sus producciones.

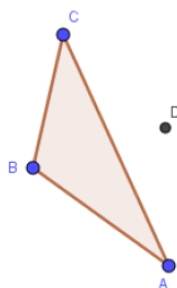
Transformación de conocimiento sobre tareas:

Desde que éramos estudiantes de secundaria, hemos asumido la tarea como aquellos ejercicios que los docentes proponen para hacer en casa y actividad a los ejercicios propuestos para hacer en la clase. Con esta idea ingresamos a la Maestría en Docencia de la Matemática (MDM). En una tarea del seminario Desarrollo y Diseño Curricular (DDC), nos pidieron leer el documento *Análisis de instrucción* de Gómez, Mora y Velasco (2016). Este documento nos permitió transformar nuestra definición de actividad y tarea, y adquirir la definición de secuencia de tareas. Entendemos por actividad a las acciones que el estudiante hace al resolver una tarea; por tarea, a aquello que propone el profesor al estudiante con el fin de superar limitaciones y cumplir unas expectativas de aprendizaje; y por secuencia de tareas, a una serie de tareas que están relacionadas entre sí y conllevan a un mismo propósito de aprendizaje.

Al comparar las definiciones de actividad en el Estadio base y en el Estadio 1, vemos que, en la primera definición, actividad era los ejercicios que el profesor propone al estudiante para hacer en el aula. Mientras que, en la segunda definición, actividad se considera como las

acciones que realiza el estudiante para resolver una tarea. Estas acciones no necesariamente deben ser en el aula. También, al comparar las definiciones de tarea de los Estadios base y 1, podemos notar que en la primera definición tarea son los ejercicios que deja el profesor para hacer en la casa, mientras que en la segunda definición tarea es todo aquello que el docente propone al estudiante con un propósito de enseñanza y esta no necesariamente se debe desarrollar en la casa.

En la primera clase del seminario DDC nos pidieron diseñar una tarea. Esta, debía diseñarse teniendo en cuenta dos criterios: uso de EGD y promover argumentos de los estudiantes. La tarea que propusimos consistía en seguir una serie de pasos para que el estudiante identificara el circuncentro de un triángulo y demostrara por qué ese punto equidistaba de los vértices del triángulo (Figura).



Dada la siguiente construcción responda las preguntas.

- ¿Qué relación cumple el punto D respecto a los puntos A y B?

Ubique X de modo que este sea el punto medio de \overline{AB}

- ¿Qué relación cumple el \overline{DX} respecto a \overline{AB} ?

Trace los \overline{AD} y \overline{BD}

- ¿Qué relación hay entre $\triangle AXD$ y $\triangle BXD$?

Justifique la respuesta del primer ítem a partir de la relación encontrada entre $\triangle AXD$ y $\triangle BXD$.

Replique el procedimiento anterior para los demás lados de $\triangle ABC$.

- ¿El punto D cumple con las condiciones encontradas inicialmente respecto a los otros dos lados del $\triangle ABC$?

Trace la circunferencia con centro D y radio \overline{AD}

- ¿Por qué los puntos C y B pertenecen a la circunferencia trazada previamente?

Figura 7 Tarea que propusimos en el seminario DDC en la primera clase.

En la imagen anterior podemos ver que efectivamente considerábamos que diseñar una tarea era simplemente construir el enunciado de esta. También se observa que teníamos como criterio para el diseño de tareas, establecer un paso a paso que orientara al estudiante hacia el propósito que queríamos lograr con la implementación de la tarea. Cabe aclarar que el propósito no se especificó en el diseño de la tarea. Actualmente pensamos que estas preguntas guía limitan procesos como la exploración y no generan inquietudes en los estudiantes. Además, carece de otros elementos indispensables para el diseño de una tarea los cuales presentaremos a continuación.

En el documento de *Análisis de instrucción* de Gómez, Mora y Velasco (2016) también aprendimos que para el diseño de una tarea hay que tener en cuenta siete elementos, estos son:

- **Requisitos:** Son los conocimientos y destrezas que el profesor supone que debe tener el estudiante para poder desarrollar la tarea.
- **Metas:** Son los propósitos que el profesor quiere lograr al asignar la tarea.
- **Formulación:** Es el enunciado que provee las instrucciones de la tarea.
- **Materiales y recursos:** Los materiales son aquellos elementos que fueron diseñados concretamente para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, y los recursos son aquellos elementos que un profesor puede adaptar para la enseñanza así no hayan sido diseñados para ello, ejemplo: palitos de paleta, software de geometría dinámica, etc.
- **Agrupamiento:** Es la organización que el docente le dará a los estudiantes en el aula durante el desarrollo de la tarea.
- **Interacción:** Es la manera en cómo el profesor prevé se harán discusiones, socializaciones o explicaciones, ya sea entre docente – estudiante o estudiante – estudiante.

- **Temporalidad:** Es el tiempo que necesitan los estudiantes para resolver la tarea

Realizando una comparativa de los anteriores elementos con los criterios que mencionamos en el Estadio Base, podemos ver que algunos de estos coincidían. Por ejemplo, los requisitos y metas se mencionan a modo de criterio, aunque de una forma intuitiva y vaga. También se nota la poca importancia que se le da al agrupamiento, ya que, los estudiantes normalmente trabajaban de forma individual. Actualmente, pensamos que el trabajo colaborativo en pequeños grupos de trabajo potencia el aprendizaje de la matemática, ya que esto genera espacios de discusión y negociación de significados los cuales generan conocimiento compartido. Es decir, el aprendizaje se da como consecuencia de una interacción social. En el estadio Base no considerábamos para el diseño de una tarea las posibles interacciones que se pueden dar en el aula. Por otro lado, se consideraban los EGD únicamente para hacer mejores representaciones gráficas, desaprovechando totalmente el potencial que brindan estas herramientas en la enseñanza. La temporalidad estaba determinada por el tiempo que dura la clase, más no por el tiempo que necesita el estudiante para resolver la tarea. En las clases de geometría, considerábamos que no era necesario realizar una socialización de las producciones, debido a que se proponían ejercicios algorítmicos. Ahora, creemos que es importante realizar socializaciones de las producciones porque los estudiantes pueden identificar diferentes estrategias para resolver una tarea.

En el seminario de PME, realizamos la lectura del documento *Tipos de problemas que provocan la generación de argumentos inductivos, abductivos y deductivos* de Molina y Samper (2019). Esta lectura nos permitió identificar diferentes tipos de problemas como:

- **Problemas cerrados:** Estos problemas se caracterizan porque en su enunciado se presenta la solución de la tarea.

- **Problema abierto:** Son aquellos problemas que en su enunciado no se revela su solución o respuesta.
- **Problemas abiertos de conjeturación:** En este tipo de tareas, se le solicita al estudiante de forma explícita que provea una conjetura a partir de un proceso de exploración hecho anteriormente.

Este artículo también nos permitió encontrar una conexión entre la formulación del enunciado de un problema abierto de conjeturación y los tipos de argumentos que surgen del proceso de exploración. Es decir, dependiendo de la tipología del enunciado del problema, este puede favorecer la producción de algún tipo de argumento. Conocemos dos tipologías:

- **Problemas de búsqueda de consecuente:** Son los que proporcionan las condiciones necesarias para resolver el problema y se deben hallar las consecuencias de dichas condiciones. Este tipo de problemas favorece la búsqueda de invariantes mediante el proceso de construcción y exploración. Los problemas de búsqueda de consecuente privilegian la producción de argumentos inductivos.
- **Problemas de búsqueda de antecedente:** En los problemas de búsqueda de antecedente se deben hallar las condiciones suficientes para que se cumplan las propiedades mencionadas en el enunciado del problema. Los problemas de búsqueda de antecedente favorecen la producción de argumentos abductivos.

En el seminario de PME también aprendimos que, al diseñar una tarea además de tener en cuenta los elementos que corresponden al análisis de instrucción, también consideramos otros elementos que corresponden a un análisis de contenido conocidos como los objetos primarios, estos son:

- **Conceptos y definiciones:** Los conceptos y las definiciones son los que están inmersos en la tarea, ya sean definiciones de conceptos que necesiten para argumentar la respuesta o definiciones que el profesor quiere enseñar.
- **Proposiciones:** Son las proposiciones que pueden expresar los estudiantes cuando resuelven la tarea, nos referimos a proposiciones de la forma $p \rightarrow q$.
- **Procedimientos:** Los procedimientos son aquellos que el estudiante puede realizar para resolver la tarea. Teniendo en cuenta que no existe un único procedimiento de solución, el profesor debe prever cuáles son los procedimientos de construcción, exploración y conjeturación que un estudiante puede realizar cuando resuelve una tarea.
- **Lenguajes y representaciones:** Los lenguajes y las representaciones están ligados al uso de símbolos matemáticos, lenguaje natural, gestos o representaciones gráficas que pueden hacer los estudiantes cuando quieren exponer una idea.
- **Argumentos:** Los argumentos son los que el profesor espera que den los estudiantes cuando realizan discusiones con sus grupos de trabajo.

En la tarea final del curso de DDC nos pidieron adaptar una tarea de un libro, de acuerdo al conocimiento que habíamos adquirido con respecto al diseño de tareas. En esta tarea podemos ver que inicialmente se nos dificultaba relacionar los elementos del análisis de instrucción con el análisis de contenido, pues ubicábamos los objetos primarios como algo aparte e independiente de los elementos para el diseño de una tarea.

Objetos primarios

En el enfoque onto-semiótico propuesto por Godino, Batanero y Font (2007) considera seis objetos matemáticos primarios, estos son: elementos lingüísticos, situaciones/problemas, conceptos/definiciones, proposiciones, procedimientos, argumentos. A continuación, presentamos los objetos primarios necesarios para poder abordar la reformulación que propusimos a la tarea propuesta en el libro.

Gracias a la realimentación que realizaron los docentes de los cursos PME y DDC, ahora sabemos que los objetos primarios están relacionados con la manera de plantear los requisitos y las metas de una tarea. Los conceptos y definiciones, proposiciones, lenguajes y representaciones ayudan a consolidar los requisitos para el diseño de una tarea. Los procedimientos y argumentos permiten establecer metas que apunten a que los estudiantes provean alguno de los procedimientos y argumentos que allí se reportan.

Anexo 5: Datos investigativos Ciclo 1

Estado Base		
Código	Dato	Descriptor
Faceta Epistémica		
01	Concebíamos por argumentación a la justificación de una idea.	Ep1: Definición de argumento y argumentación
02	Argumento lo relacionábamos con el sustento teórico para soportar una idea, especialmente con el marco teórico que permite respaldar una demostración.	
03	Conocíamos que se puede expresar una demostración por medio de una tabla a dos columnas (afirmación y garantía) o en un párrafo coherente y secuenciado.	Ep5: Formas de representar un argumento
04	En el caso de Sergio, conocía un formato para reportar una demostración a tres columnas (qué se, qué uso y qué concluyo)	
05	Respecto al proceso para producir una demostración de una proposición, conocíamos una estrategia para lograr construirla. Esta consistía en asumir como cierta la tesis de la proposición y a	Ep6: Modos de razonamiento para construir un argumento

	partir de un proceso de abstracción, inferir qué propiedades se debían haber garantizado antes para poder concluir dicha tesis.	
--	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--

Estado de transición del Base al 1		
Código	Dato	Descriptor
Faceta Epistémica		
06	Al realizar la lectura del documento de Molina y Samper (2019), también nos percatamos de que existen tres tipos de argumentos: deductivos, inductivos y abductivos.	Ep3: Tipos de argumentos.
Faceta Mediacional		
07	Carlos proponía que la solución de los problemas geométricos debía surgir como consecuencia directa de las reglas teóricas de la geometría euclidiana. Viendo el proceso de exploración en un EGD como algo innecesario y generaba ciertos argumentos, que en ocasiones no llegaba a la solución del ejercicio. Mientras que Sergio, realizaba exploraciones a la construcción y de esta manera lograba encontrar argumentos que daban la solución al problema. Esta acción le permitió a Carlos entender la importancia del proceso de exploración en un EGD a la hora de encontrar argumentos que resuelvan el problema.	Me1: Relación entre el uso de un recurso y la producción de argumentos

Estado 1		
Código	Dato	Descriptor
Faceta Epistémica		
08	Empezamos a identificar la argumentación como el acto comunicativo en el cual una persona se vale de uno o más argumentos para sustentar una idea, con el fin de persuadir a un grupo de personas o a sí mismo.	Ep1: Definición de argumento y argumentación
09	Argumento, entendiéndolo como el enunciado de un razonamiento que una persona manifiesta de forma oral o escrita y que tiene tres componentes: datos, garantía y aserción.	Ep1: Definición de argumento y argumentación
10	Argumento deductivo: Es el argumento en el cual se conocen los datos y la garantía y se infiere la aserción. Argumento inductivo: Es el argumento que se obtiene cuando se conoce un conjunto de datos los cuales conducen siempre a una misma aserción; de esta manera se infiere una garantía que corresponde a una regla general que relaciona los datos y la aserción.	Ep3: Tipos de argumentos.

	Argumento abductivo: Es el argumento en el cual se conocen la garantía y la aserción, y se infieren los datos.	
11	Los tres tipos de argumentos se pueden representar por medio de un diagrama, el cual corresponde a una representación gráfica del argumento usando el modelo de Toulmin. En (el esquema utilizado para representar) los argumentos deductivos se resalta el cuadro donde se escribe la aserción, ya que en este tipo de argumentos esto es lo que se infiere. En (el esquema utilizado para representar) los argumentos abductivos, se puntea y se resalta la casilla donde escribimos los datos, ya que lo que se infiere son los datos. En (el esquema utilizado para representar) los argumentos inductivos, se puntea y se resalta la casilla donde se escribe la garantía ya que es lo que se infiere. Cabe resaltar que la convención de colocar el cuadro punteado hace referencia a que lo que se infiere es plausible hasta que sea demostrado, mientras que cuando no se puntea es porque este hecho se da con seguridad.	Ep5: Formas de representar un argumento
12	El modelo de demostración a tres columnas que conocía Sergio al iniciar el primer semestre se relaciona con el diagrama para representar un argumento usando el modelo de Toulmin. El “qué sé” inicialmente se considera como un dato, el “qué uso” se asocia con la garantía y el “qué concluyo” se refiere a la aserción. [...] También, entendemos que la demostración a dos columnas (Afirmación y Garantía) se relaciona con el diagrama para un argumento del modelo de Toulmin y con un diagrama para representar demostraciones a tres columnas. Cada una de las filas que aparecen en las tablas de demostración corresponde a un argumento de tipo deductivo. En la columna de “afirmación” se escribe la aserción; en la columna de “garantía” se escribe la garantía y en ella también se escribe entre paréntesis el número de la fila en la cual se encuentran los datos de dicho argumento.	Ep5: Formas de representar un argumento
13	Los datos son condiciones y relaciones entre objetos geométricos; La garantía es la regla general que relaciona datos y aserción. Las reglas pueden ser teoremas, definiciones y postulados; la aserción es una consecuencia que surge a partir de unos datos.	Ep2: Elementos que conforman un argumento
14	Cabe resaltar que estos componentes del argumento (garantía, aserción y datos) están sustentados en el modelo de Toulmin. [...] Este modelo (Toulmin) es un referente teórico que nos permite caracterizar, representar, analizar y valorar la calidad de un argumento.	Ep2: Elementos que conforman un argumento
Faceta mediacional		
15	La mayor utilidad que les podemos dar a los EGD es que permiten al profesor potenciar los diferentes procesos involucrados (exploración, construcción, conjeturación, argumentación, demostración) cuando un <u>estudiante</u> resuelve una tarea en un EGD mediante el uso de las herramientas dinámicas del programa.	Me1: Relación entre el uso de un recurso y la producción de argumentos
Faceta Interaccional		
16	El trabajo colaborativo en pequeños grupos potencia el proceso de argumentación, ya que esto genera espacios de discusión y negociación de significados los cuales generan conocimiento compartido.	In1: Interacciones que favorecen la producción de argumentos.

17	<p>Problemas de búsqueda de consecuente: Son los que proporcionan las condiciones necesarias para resolver el problema y se deben hallar las consecuencias de dichas condiciones. Este tipo de problemas favorece la búsqueda de invariantes mediante el proceso de construcción y exploración. Los problemas de búsqueda de consecuente privilegian la producción de argumentos inductivos.</p> <p>Problemas de búsqueda de antecedente: En los problemas de búsqueda de antecedente se deben hallar las condiciones suficientes para que se cumplan las propiedades mencionadas en el enunciado del problema. Los problemas de búsqueda de antecedente favorecen la producción de argumentos abductivos.</p>	In6: Relación entre una tarea diseñada y los argumentos que generan
Faceta Cognitiva		
18	Estas preguntas guía limitan procesos como la exploración, conjeturación y argumentación. Ya que, no generan inquietudes en los estudiantes [preguntas guía hace referencia a preguntas en las cuáles se desglosa cada una de las acciones que debía realizar el estudiante con respecto al uso de un recurso - ¿qué tenía que medir? ¿qué tenía que arrastrar? ¿en qué debía fijarse?].	Co2: Dificultades o errores de los estudiantes respecto a la argumentación.

Anexo 6: Transcripción de la ponencia diferenciación de términos afines a la argumentación

[Carlos] Yo tengo una duda con respecto a la diapositiva donde aparecía el enunciado de una tarea, creo que fue la segunda diapositiva. En la formulación de sus tareas, las que llegamos a hacer en el marco de la MDM en el primer semestre diseñamos tareas y entonces la pregunta es ¿si quizás vio esa dificultad ahí reflejada en la formulación de esas tareas? ... O sea que estas eran las tareas que ustedes diseñaban en el Estado Base de conocimiento. Nosotros de igual manera en nuestro rol como diseñadores de tareas en el Estado Cero de conocimiento, lo que hacíamos era tomar los enunciados que aparecían en los libros, donde muchas veces, como usted mencionaba los mismos libros confunden esta terminología. Ahora desde un Estado 1 de conocimiento. Nosotros estuvimos revisando nuestras y notamos que no distinguíamos entre estos términos, a tal punto que había un anuncio en la formulación de una tarea, que decía explique por qué es válida su conjetura. Eso nos pareció curioso y pues lo traje a colación a la charla, a lo mejor, pues ustedes

también en alguna tarea que diseñamos en aquel momento pudieron haber visto manera explícita esta problemática en sus tareas. Acá lo diferente es que es desde el rol del estudiante, no desde el rol del profesor, ni del investigador. Entonces, en ese sentido, no importa si hayan leído literatura o no. [Sergio] En explicar si fuera un estudiante en este momento, lo que intentaría es como dar detalladamente paso a paso todo lo que hice en la construcción, es como tratar de hacerme entender. Si me dicen justifica tu respuesta trataría de hallar el porqué de lo que estoy afirmando. Si me dicen valida tu respuesta asumo que es sinónimo de verificar y argumentar considero que se diferencia de justificar porque la argumentación se utiliza para convencer a los demás a partir de cosas que todos conozcamos y que todos tengamos claro. ... Estaba pensando ahorita en que nosotros también tuvimos estas dudas cuando estábamos trabajando en la tesis me daba cuenta de que nosotros siempre hemos hecho esto (confundir los términos) y de hecho muchos profesores que tuve en el colegio lo hacían igual. Entonces esto tiene que ver muchísimo con la formación de profesores, porque no recuerdo haber visto esto en ningún seminario del pregrado o algo así y pues eso influye bastante en cómo nos formamos nosotros. ... Cuando dice el receptor reconoce en el emisor una autoridad frente al conocimiento. Es decir, Si le digo a Carlos Guevara que me explique, es porque lo reconozco como autoridad en el conocimiento frente a determinada temática. Entonces tengo la duda ¿cuándo el profesor le dice al estudiante que explique, digamos que en ese momento el profesor como receptor, reconoce al estudiante como autoridad en el conocimiento? ... [Carlos] Siendo así el niño ya sea apropiado, aprendió un cierto conocimiento, entonces, el niño puede ejercer un rol como una autoridad en el conocimiento a tal punto que está al nivel de dar una explicación acerca de este tema. ... me queda sobre la demostración ¿Hay alguna otra forma de validar aparte de la demostración? ... Quería comunicar lo que alcancé a capturar en las definiciones (Justificar, explicar, argumentar y validar) que ustedes nos han

expuesto. En la definición de explicar, lo que entendí es que es un proceso discursivo el cual describe un razonamiento, razonamiento, forma de pensar donde el emisor asume un papel de autoridad en el conocimiento y cuyo fin es describir una situación, clarificar o ejemplificar. En la definición de justificación es describir la veracidad de un razonamiento. En la definición de argumentación, es el proceso de comunicar razonamientos con el fin de persuadir un grupo de personas o a uno mismo en el marco de unas normas compartidas en una comunidad específica, donde el emisor y el receptor tienen un papel de pares académicos, es decir, no hay una persona que ejerce un rol como autoridad del conocimiento, sino que el emisor quiere persuadir al receptor acerca de una idea, un razonamiento o algo que está pensando. Finalmente, en la definición de validación, es el proceso que corrobora nivel de aceptación según las normas que se tengan establecidas en la comunidad. ... Me parecería bueno para cerrar esta charla responder la pregunta ¿Como la a partir de la distinción de esta terminología esto puede llegar a impactar a mis prácticas profesionales? Pienso que la distinción de esta terminología me permite considerar una diversidad de procesos diferentes. De ser conscientes de la diversidad de procesos distintos que se pueden desarrollar en el aula y a cuál proceso le quiero apuntar.

Anexo 7: Transcripción de la ponencia enseñanza de la argumentación

[Sergio] Lo primero que debemos preguntarnos respecto a la temática que vamos a abordar en la sesión de hoy dos preguntas, si pueden responder las dos, muchísimo mejor. La primera pregunta es ¿Cuáles son las problemáticas que ustedes identifican para la enseñanza de la argumentación y la demostración? La segunda pregunta es ¿Qué estrategias han llevado a cabo en el aula para favorecer la enseñanza de la demostración y la argumentación? Entonces quisiéramos escuchar a dos o tres personas que quieran responderlas. Mientras tanto voy a

contextualizar un poco porque estamos realizando esta sesión. La sesión la estamos realizando en el marco del trabajo de grado de la MDM. ... [Carlos] Pienso que una de las problemáticas a la hora de enseñar argumentaría y demostrar en el aula es que a los estudiantes de alguna manera les cuesta todo lo relacionado con la lógica, es decir, Si tengo P entonces implica Q ¿Como a partir de P llego a Q? Todas estas estrategias de razonamiento para construir un argumento o una demostración. A los estudiantes se les dificulta muchísimo eso. Y en cuanto a ¿qué estrategias he llevado? Bueno, sí quiero enseñar a mis estudiantes a demostrar, lo que he hecho en mis prácticas es, que si usted quiere aprender a demostrar, entonces le hago una réplica de una demostración, llevándolo así paso a paso a través de una demostración, realizo una descripción muy detallada, amplia de una demostración y luego le digo a los estudiantes que traten ahora de realizar una demostración de unos enunciados sencillos y poco a poco ir subiendo la dificultad hasta que sean capaces de al menos lograr una demostración sencilla. ... Todo depende del contexto escolar en el que se esté trabajando. Entonces sí estamos trabajando en la universidad las problemáticas van a ser distintas a las de la escuela o el colegio y pienso que, si se puede llevar la demostración a la escuela, pero muchísimo más aterrizado, por decirlo así, algo más suave y no tan formal a diferencia como se hace en una universidad. ... Cabe aclarar que todo lo que toda esta teoría que vamos a hablar en esta ponencia la debemos aterrizar en algún campo de la matemática y este será la Geometría Euclidiana. Aunque no por el hecho de que está aterrizado en Geometría Euclidiana, esto quiere decir que no se pueda quizás readaptar estas estrategias a enseñanza de otros campos de la Matemática, por ejemplo, se pueden rescatar cosas de esta ponencia para la enseñanza de la Topología o para la enseñanza del Análisis Real o el Análisis en \mathbb{R}^n o el Algebra Elemental, o cualquier otro campo de la Matemática, Es decir todas las estrategias que vamos a presentar el día hoy son rescatables para la enseñanza de cualquier

rama de las matemáticas. ... Esta ponencia surge a raíz de que tenemos una problematización, la cual consiste en que nosotros ejercemos una metodología de clase tradicionalista en la enseñanza de la Geometría. Cuando hablamos de metodología tradicionalista nos referimos al profesor como autoridad en el conocimiento, en el que en las clases solo se identifican propiedades de figuras y ejercicios algorítmicos y los estudiantes poco argumentan y simplemente los estudiantes le prestan atención al profesor y el estudiante juega un papel pasivo en la clase. Entonces a raíz de esta problemática pensamos en buscar otra metodología de clase en la que se favorezca la argumentación y la demostración. ... [Sergio] Quiero contextualizar un poco lo que mencionaban en las intervenciones anteriores. Ustedes mencionaron tres cosas importantes, sistema axiomático, comunidad de práctica y demostración. Vamos a tener en cuenta que entendemos por sistema axiomático, comunidad de práctica, que entendemos por argumento, argumentación, demostración y actividad demostrativa y a partir de estos seis elementos nosotros vamos a responder la pregunta ¿Cómo favorecer la argumentación y la demostración y las clases de Geometría? Digamos que en especial lo que buscamos es tratar de responder la pregunta y adaptarla al ámbito escolar. ... Lo que vamos a entender por argumentación y argumento es que existe una relación entre estos dos términos. La argumentación la vamos a entender como una acción y el argumento es el producto de realizar esa acción. La argumentación para nosotros es cualquier proceso el cual se produce un discurso oral o escrito de un razonamiento que se basa en normas compartidas por una comunidad específica con el fin de persuadir a un grupo de personas acerca de la veracidad de una afirmación o una idea. El producto de realizar este proceso es lo que vamos a llamar como argumento. Ahora es importante hacer una distinción, normalmente en los libros y en el ámbito académico no se distingue entre la demostración y la actividad demostrativa. Vamos a llamar actividad demostrativa al proceso que le permitía a una persona

construir una demostración y que se basa en varios subprocesos los cuales son: Construcción, exploración, conjeturación, argumentación y sistematización. Cuando una persona logra realizar estos procesos, eso es lo que le permite formular un enunciado de una proposición, la cual se va a demostrar y va a generar el producto de esta actividad demostrativa. El producto de esta actividad demostrativa es lo que llamamos demostración. Voy a mencionar un poco a qué nos referimos con cada uno de estos subprocesos. La exploración es la acción en la cual el estudiante busca encontrar invariantes en una construcción en una construcción Geométrica. Luego el estudiante pasa al proceso de conjeturación en el que el estudiante proporcionará una afirmación la cual para probar su validez será sometida a un proceso de demostración. Es importante tener en cuenta el proceso de definir en el que se busca es que los estudiantes puedan expresar características de un objeto geométrico y que lo hagan de la forma más sintética posible. En sistematizar se hace referencia a cómo el estudiante puede organizar de manera lógica los enunciados que tiene y que esa manera desarrollar un sistema axiomático que no tenga contradicciones y que se pueda desarrollar de una manera secuencial. La demostración matemática es el producto de la actividad demostrativa, y consiste en una secuencia conectada de argumentos deductivos y que van siempre a favor de una afirmación matemática. La demostración se caracteriza o diferencia de una argumentación, porque tiene tres condiciones importantes. La primera es que para la demostración se deben utilizar declaraciones aceptadas por la comunidad, es decir, la demostración está centrada en una comunidad de práctica. Las declaraciones aceptadas son los que conocemos como definiciones, teoremas y axiomas de un sistema axiomático. La segunda característica es que en una demostración se emplean formas de razonamiento que son válidas y conocidas dentro del alcance conceptual de la comunidad. Los métodos de razonamiento son demostración directa, demostración por contrarrecíproco y

demostración por contradicción. Estas formas de razonamiento se han tenido que trabajar anticipadamente con la comunidad en la que se está desarrollando la demostración. Finalmente, la demostración debe comunicarse con algunos modos de representación que son apropiados y conocidos por la comunidad. En estos modos nos referimos a la representación en párrafo y por tabla a dos o tres columnas que es la que generalmente se trabaja en la UPN en la licenciatura para que los estudiantes de primer semestre aprendan a demostrar. ... [Carlos] En la Universidad había un profesor llamado Gabriel Yáñez profesor de Epistemología de la Matemática que decía que en una demostración lo que se muestra es el resultado final, pero todo el andamiaje, todo el razonamiento, todas las estrategias que se llevaron a cabo para realizar una demostración de eso poco se habla. ... Una de las características de la demostración hablaba sobre declaraciones aceptadas por la Comunidad, en este caso, las declaraciones aceptadas por la Comunidad van a ser los teoremas, las definiciones y los axiomas que vamos a utilizar para resolver este ejercicio en particular. ... Ahora vamos a hablar de los modos de razonamiento para realizar una demostración que sería la segunda característica. Tenemos el Modus Ponendo Ponens que básicamente lo que plantea es que a partir de una proposición Matemática P puedo deducir otra proposición Matemática Q, eso es lo que se conoce como demostración directa, y esto se relaciona con los argumentos de tipo deductivos. Tenemos el Modus Tollendo Tolens plantea que a partir de $\neg Q$ se deduce $\neg P$ Esto básicamente es conocido como una forma de demostración indirecta o demostración por contrarrecíproco. Esta estrategia de razonamiento es lógicamente válida ya que P implica Q es lógicamente equivalente a $\neg Q$ implica $\neg P$. El tercer modo de razonamiento que por cierto es polémico en la comunidad Matemática es el modo de razonamiento por reducción al absurdo, ya que esta forma de razonamiento está sustentada en el principio del tercero excluido ($P \vee \neg P$). La reducción al absurdo consiste en asumir la cierta la

hipótesis (P) y la negación de la tesis ($\neg Q$) y a partir de esto construir una contradicción. ... El modo de representación por párrafo consiste en escribir de forma lineal y secuencia los datos y las aserciones de cada argumento deductivo, mencionando las garantías más importantes de la demostración. Pienso que en esta última parte donde dice "mencionando las garantías más importantes" es donde está como lo polémico de esta forma de representación en párrafo.

Tenemos la representación a tres columnas que básicamente cada una de las filas aparecen en la tabla corresponde una parte del argumento según Toulmin. La columna "Que uso" corresponde a los datos de un argumento, la columna "Que uso" corresponde a la garantía de un argumento y la columna "Que concluyo" corresponde a la aserción de un argumento. Cabe resaltar que cada una de las filas de la tabla corresponde a un argumento de tipo deductivo y todo en conjunto determina la demostración. ... En esta demostración por párrafo hay muchas cosas que verbalice que no están escritas en la demostración, eso es un hecho. Sino que toca inferirlas a partir de darle vueltas a la demostración, hacer una representación y apoyarse en ella. Esta es una de las mayores críticas que le hacen a esta forma de representación de la demostración en términos de enseñanza. Para estudiantes que están aprendiendo a demostrar esta forma de representar la demostración no favorece la enseñanza de la argumentación y demostración. En ese caso pienso que es más pertinente utilizar la forma de representación a tabla a tres columnas 3 columnas, ya que esta forma de representación favorece mucho más la enseñanza de la demostración a comparación de la representación por párrafo. ... Estuvimos discutiendo acerca de las formas de representación de una demostración y llegamos a la conclusión de que la demostración en párrafo es pertinente para estudiantes que ya saben demostrar. Para miembros experimentados pensamos la forma de representación en párrafo es pertinente ya que no hay que preocupar por la enseñanza, sino que esta forma de representación en miembros experimentados podría favorecer

algunos procesos de la actividad demostrativa en el sentido de que como toca inferior tantas cosas, eso obliga al lector a que piense un poquito. Sino que hay que desentrañar todo lo que está escrito en esa demostración y en ese proceso de que el lector está desentrañando la demostración, ahí se puede dar un proceso de aprendizaje muy rico. ... Esta proposición surge en el marco del primer semestre en la MDM una tarea que nos dejaron en el seminario PME dirigido por el profesor Oscar Molina. Fíjense que en ningún momento en la demostración se justifica algún argumento por el axioma de Pash, sino que en una primera instancia se justifica es por propiedades de los triángulos. En el proceso exploración le permite a uno darse cuenta de cosas que están implícitas y no sabe cómo justificarlas, porque no conoce la garantía que la sustenta. Cuando hice esa demostración hace más de un año, tampoco conocía el axioma de Pash, pero yo sin saberlo y por mi propia cuenta deduje el axioma de Pash a partir de una exploración porque me pareció algo obvio. ... Claro, con hacer la explicación paso a paso de una demostración párrafo no se puede afirmar que los estudiantes van a quedar con unas bases sólidas con respecto al proceso de construir una demostración. Eso apenas le da unas luces al estudiante acerca de cómo demostrar. Donde verdaderamente el estudiante se adentra en la actividad demostrativa, es cuando el estudiante se pone a tratar de realizar demostraciones. Es decir, si un estudiante quiere aprender a demostrar, pues debe ponerse a realizar demostraciones. ... [Sergio] ¿Cuál es la importancia que se le debe dar a la argumentación y demostración en el aula? Encontramos que una importancia que se le puede dar a la argumentación y demostración es que permite un cambio de la metodología de clase tradicionalista que siempre hemos impartido y esto evita enfatizar en ejercicios algorítmicos. Aprender a argumentar en matemáticas permite a los estudiantes desarrollar formas de razonamiento y formas de actuar ante diferentes situaciones en otros contextos distintos a los matemáticos y además incorporar la demostración matemática en

el aula de clase les permite a los estudiantes que comprender la necesidad de la demostración para darle validez a las afirmaciones que hagan los demás estudiantes o incluso las mismas afirmaciones que da el profesor. Es decir, eso permite que el profesor no es la única persona que tiene la razón en el aula, sino que ellos por medio de la argumentación y la demostración, pueden refutar también las ideas que dan los demás compañeros o el profesor. Digamos que eso es lo que se busca con la incorporación de la argumentación y la demostración en las clases de Geometría. ... Hay varias estrategias para favorecer la argumentación y la demostración en el aula. Entonces una metodología alternativa que se usa para la enseñanza de la argumentación y demostración es una que se basa en la construcción de un sistema axiomático mediante resolución de problemas abiertos de conjeturación. Ya que con este tipo de problemas son los estudiantes quien construyen los teoremas, quien los descubren. Otra estrategia es la consolidación de una comunidad de práctica. Entendiendo comunidad práctica como una configuración social en la cual se busca que los profesores y los estudiantes participen en las mismas actividades y busca ese compromiso por parte de los estudiantes por sacar adelante los propósitos del curso o seminario. Finalmente, una de las estrategias que traemos un poco desconocida, es el uso de plantillas discursivas. Esta estrategia le permite al estudiante generar hábitos discursivos en los cuales los estudiantes expresen sus ideas mediante una estructura gramatical que se asemeja a la de un argumento de Toulmin. Esto le permite al profesor poder caracterizar los argumentos que produce el estudiante. ... Es importante generar una comunidad de practica en el aula ya que esto motiva a los estudiantes y cambia las dinámicas de la clase. Una de las características de las comunidades de practica es que establecen unos lenguajes y unas formas específicas de comunicación. Una comunidad de practica permite que los miembros de esta comunidad defiendan sus posturas o sus ideas frente al resto de los otros estudiantes y con esto generar un

tránsito entre miembros novatos de la comunidad se conviertan poco a poco en miembros expertos en la comunidad.

Anexo 8: Transcripción cierre del Ciclo 2

[Profesora Claudia] Me gustaría que ustedes pudieran decirme ¿Después de haber participado en la ponencia sobre la distinción de términos afines a la argumentación que aprendieron? ¿Qué cuestionamientos surgieron? [Sergio] Estuvimos como en una discusión de lo que era explicación, justificación, argumentación, validación y demostración. Nosotros inicialmente pensábamos que en general eran sinónimos (argumentación, justificación, explicación y validación). Entendía por explicación como en una descripción de lo que se ve, es decir, describir ciertas propiedades, características, etcétera. De justificación entendía como dar el porqué de algo y esto debe estar basado en algún sustento teórico que fueran conocidas en una comunidad. La argumentación es una práctica discursiva que se basa en normas compartidas de una comunidad cuyo propósito es persuadir a un grupo de personas en donde el emisor y receptor juegan un papel de pares académicos. ... [Carlos] Yo concibo la justificación como un proceso general, que abarca a otros procesos, que son la explicación, argumentación y demostración. Es decir, estos procesos son formas de justificar, ya que estos procesos tratan de dar el porqué de algo que se afirma. La justificación consiste en tratar de dar el por qué es cierto una afirmación o proposición matemática. Por lo tanto, pareciera que el fin de la justificación es buscar la validación de una idea. La validación es determinar la veracidad de una afirmación o idea. La argumentación es el proceso comunicativo el cual trata de persuadir a alguien sobre una afirmación o idea. La argumentación está sustentada en un conjunto de normas y declaraciones compartidas. Cabe resaltar que, en la argumentación, la relación entre el emisor y el receptor es de pares académicos, es decir, están en la misma jerarquía. El producto de este proceso es el

argumento, es decir, lo que se comunica en la argumentación son argumentos. Estos argumentos tienen una estructura ternaria, datos, garantía y aserción. En cuanto a la explicación también es una forma particular de justificación y consiste en tratar de ampliar, ejemplificar, describir algún conocimiento o idea. Nosotros nos preguntábamos si ¿la argumentación es lo mismo que la explicación? Ya que en cierta manera la argumentación también amplía el conocimiento, al comunicar datos, garantía y aserción estoy ampliando el conocimiento, al final llegamos a la conclusión de que una de las diferencias que hay entre la argumentación y explicación es el papel que juega el emisor y receptor en cada uno de estos procesos. Ya que en la explicación el emisor tiene un rol de autoridad en el conocimiento, mientras que en la argumentación tanto el emisor como el receptor juegan un papel de pares. Además, lo que se comunica en una explicación no necesariamente debe tener la estructura ternaria de un argumento. Para finalizar, entendemos la demostración como una secuencia articulada de argumentos deductivos que surgen como consecuencia de la actividad demostrativa la cual posee tres características las cuales son que está sustentada en normas y declaraciones compartidas en una comunidad, que se utilizan formas de razonamiento que están al alcance conceptual de la comunidad y que las demostraciones se reportan mediante ciertas formas de representación las cuales podrían ser en párrafo o en tablas o tres columnas.

Anexo 9: Datos investigativos Ciclo 2

Estado de transición del Estado 1 a 2		
Código	Dato	Descriptor
Faceta Epistémica		
19	Vamos a llamar actividad demostrativa a ese proceso que permite construir una demostración y que está conformado por varios subprocesos, estos son: exploración, conjeturación, definición y argumentación.	3. Términos afines a la argumentación

20	La demostración está conformada por una secuencia conectada de argumentos deductivos, emitidos a favor de una afirmación matemática, es decir, la demostración queda en función del argumento. Por eso es tan importante hablar de argumentación para hablar de demostración.	
21	En una demostración se deben utilizar declaraciones aceptadas por una comunidad (postulados, definiciones, teoremas de un sistema axiomático local) y hay que tener en cuenta que cuando yo utilizo este tipo de afirmaciones ya no necesitan de más justificación porque anteriormente ya se tuvieron que haber demostrado.	
22	Llamamos demostración al producto de haber realizado actividad demostrativa	
23	Una demostración emplea formas de razonamiento que son válidas y conocidas dentro del alcance conceptual de la comunidad (demostración directa - Modus Ponens, demostración por contradicción - tercio excluido). El Modus Ponendo Ponens plantea que a partir de P puedo deducir Q. Eso es lo que se le conoce como demostración directa y se asemeja mucho a los argumentos de tipo deductivo. El Modus Tollendo Tolens plantea que a partir de $\neg Q$ se deduce $\neg P$. Es conocido como una forma de demostración indirecta y se llama demostración por contra recíproco. Entonces, resulta que P implica Q es lógicamente equivalente a $\neg Q$ implica $\neg P$. Entonces, demostrar que $\neg Q$ implica $\neg P$, es equivalente a demostrar que P implica Q.	6. Modos de razonamiento para construir un argumento
24	Un modo de representar una demostración es en párrafo. Esto consiste en escribir de forma lineal y secuenciada los datos y las aserciones de cada argumento deductivo, mencionando las garantías más importantes de la demostración. En las demostraciones escritas en forma de párrafo notamos que no se logran identificar las tres partes de un argumento puesto que se omiten algunas partes de los argumentos que conforman la demostración. Esta forma de representar la demostración no favorece la enseñanza de la demostración. Para el caso de la enseñanza de la demostración y argumentación es más pertinente utilizar la representación a 3 columnas. Esta favorece la enseñanza de la demostración, más que la representación en párrafo, sobre todo para los estudiantes que están aprendiendo a demostrar. Al leer una demostración en párrafo, al lector le toca desentrañar lo que está oculto en esa demostración. Como en este tipo de representación hay que inferir tantas cosas, ahí se puede dar un proceso de aprendizaje muy rico para el miembro experto.	4. Formas de representar un argumento

Estado 2		
Código	Dato	Descriptor
Faceta Epistémica		

25	La argumentación es una práctica discursiva, que se basa en normas compartidas de una comunidad. Lo que se busca es persuadir a un grupo de personas y hay ciertos roles como emisor, y un receptor.	1. Definición de argumento y argumentación
26	La argumentación es una forma particular de justificar, la cual consiste en cualquier proceso comunicativo, en el que se busca persuadir a alguien o a uno mismo sobre una afirmación. Este proceso está sustentado en unas afirmaciones, normas, declaraciones compartidas. El producto de este proceso es el argumento. Estos argumentos tienen una estructura ternaria, de datos, garantía y aserción. Cabe resaltar que, en la argumentación, los roles que juegan el emisor y el receptor es un papel de pares, es decir, están en la misma jerarquía. El emisor trata de persuadir, de convencer al receptor acerca de una idea, afirmación o aserción.	
27	Justificación es dar el porqué de algo y eso está basado en algún sustento teórico, digámoslo así, teórico, entre comillas, con base en algunas normas que fueran conocidas en la comunidad	1. Términos afines a la argumentación (justificación, explicación, validación y demostración)
28	La justificación es tratar de dar el porqué de lo que se está afirmando. La justificación la entiendo como un proceso general, que abarca a otros dos procesos más, los cuales son la argumentación y la explicación.	
29	La explicación es una forma particular de justificación y lo que busca es tratar de ampliar, ejemplificar, describir algún conocimiento.	
30	La validación es determinar la veracidad de una afirmación, determinar que, si esto que afirmo, escucho o leo es cierto o no. Entonces, de esta manera eso se relaciona con la definición de justificación. Ya que en la justificación se trata de validar lo que se dice. Ya que la justificación lo que busca es tratar de dar el porqué es cierto lo que alguien o yo afirmo.	
31	. Entonces, ¿La argumentación es lo mismo que la explicación? Entonces, ¿Es lo mismo? Llegamos a la conclusión de que una de las diferencias que hay entre argumentación y explicación, es el papel que juegan el emisor y receptor. Porque en la explicación la persona que explica tiene un papel de autoridad en el conocimiento y eso es una diferencia que hay con respecto a la argumentación ya que allí los roles son de pares intelectuales.	
32	Nosotros estábamos discutiendo con Sergio la siguiente pregunta ¿La argumentación amplía el conocimiento? y la respuesta fue que en cierta manera sí, ya que, en la argumentación se hace una ampliación de algún conocimiento, pues ahí se comunican datos, aserción y garantía y adicionalmente se describe la conexión que hay entre los datos y la aserción mediante la garantía, en ese sentido hay una ampliación del conocimiento.	
Faceta Interaccional		
33	¿Por qué siempre en la universidad (UPN) proponen trabajar en grupos de tres y no en grupos de dos? es que cuando trabajamos en grupos existe esa relación entre pares (entre los estudiantes) y lo que se busca es que ellos comiencen a explicitar y a dar ideas de lo que conocen. Entonces, cuando ellos necesitan tomar una decisión, si están trabajando en grupos de dos, a	1. Interacciones que favorecen la producción de argumentos.

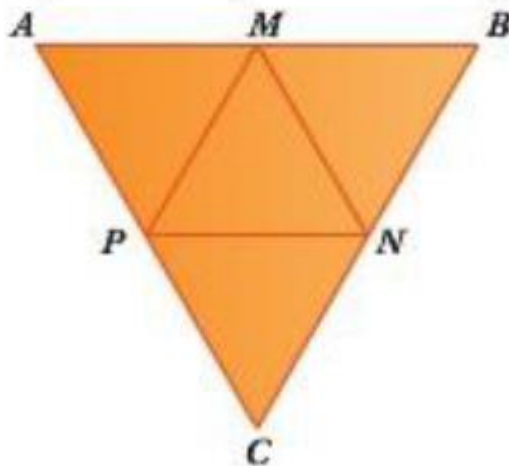
	lo mejor es posible que los estudiantes fácilmente se pongan de acuerdo con respecto a la aserción que quieren validar. Mientras que sí trabajan en grupos de tres quizás exista un integrante que esté en contra de los otros dos y en ese sentido, si es necesario que los estudiantes comiencen a argumentar para defender sus posturas.	
34	Un aspecto importante de la argumentación y la demostración en el aula de clase es que permiten un cambio de la metodología de clase tradicionalista, que siempre hemos manejado o que se maneja usualmente en las clases de geometría. Ya que el promover la argumentación y la demostración en el aula de clase se evita ese tipo de énfasis en ejercicios algorítmicos.	4. Metodología de enseñanza que favorezca la producción de argumentos
35	Una metodología alternativa para la enseñanza de la argumentación y la demostración es una que se basa en la construcción de un sistema axiomático mediante resolución de problemas abiertos. Se busca que sean problemas abiertos de conjeturación, porque en ese sentido los estudiantes son quienes construyen los teoremas y quienes los descubren.	
36	Las plantillas discursivas que favorecen la argumentación (Chepina Rumsey and Cynthia W. Langrall, 2016) permiten al estudiante generar hábitos discursivos para que expresen sus ideas de forma similar a la estructura de un argumento. Esto permite al profesor identificar los argumentos que están dando los estudiantes.	5. Criterios para diseñar tareas que favorezcan la producción de argumentos.
Faceta Mediacional		
37	Nosotros tampoco conocíamos el axioma de Pash y fuimos capaces de deducir este axioma a partir de una exploración en el EGD.	Formas en que el EGD favorecen la producción de argumentos
Faceta Ecológica		
38	Aprender a argumentar en matemáticas permite a los estudiantes desarrollar formas de razonamiento y formas de actuar ante diferentes situaciones en otros contextos distintos a los matemáticos.	2. Importancia de promover la argumentación en diferentes contextos
39	Incorporar la argumentación y la demostración matemática permite a los estudiantes comprender la necesidad de la demostración para darle validez a las afirmaciones que hagan algunos compañeros o incluso las mismas afirmaciones que da el profesor. Es decir, eso permite que el profesor no sea la única persona que tiene la razón en el aula, sino que ellos por medio de la argumentación y la demostración, pueden refutar también las ideas que dan los profesores.	

Anexo 10: Diseño de la tarea para favorecer la argumentación

Seleccionamos un problema del libro Los caminos del saber 8°, el cual utiliza el compañero Carlos Camargo en el colegio donde trabaja. El problema se encuentra en la unidad

9, denominada *Geometría*. Esta unidad aborda los temas referentes a Ángulos, Triángulos, Propiedades de los triángulos, Clasificación de triángulos, Líneas y puntos notables en un triángulo y Congruencia de triángulos. Hemos escogido el siguiente problema:

157. Si M , N y P son los puntos medios de los lados \overline{AB} , \overline{BC} y \overline{AC} del triángulo equilátero ABC , muestra que el triángulo MNP es equilátero.



En esta tarea se ha reformulado el enunciado transformándolo en un problema de búsqueda del antecedente. Esto con el fin de generar procesos de construcción, exploración, conjeturación y argumentación más ricos. Ya que a priori le estamos proporcionando al estudiante información sobre cómo determinar los puntos M , N y P . Además de la formulación de la tarea, hacemos explícitos otros elementos que se deben tener en cuenta para el diseño de una tarea (Gómez, 2018).

Dado el ΔABC equilátero en Geogebra ¿Es posible determinar los puntos $M \in \overline{AB}$, $N \in \overline{BC}$ y $P \in \overline{AC}$, de tal forma que ΔMNP sea equilátero?

1. Reporte los pasos de la construcción.

2. Reporte los pasos de exploración.
3. Provea una conjetura.
4. Argumenta porque es válida tu conjetura.

REQUISITOS

Los requisitos hacen referencia a aquellos conocimientos y destrezas que, de acuerdo con el nivel educativo de los estudiantes, se vinculan directamente con las metas y el contenido matemático de la tarea.

La siguiente tarea se propone para ser desarrollada con estudiantes de grado octavo. Se ha hecho un esfuerzo por promover el lenguaje matemático en el aula de clase y los estudiantes poco a poco se han ido familiarizando con él. Ninguno de los estudiantes tiene limitaciones físicas o cognitivas diagnosticadas.

- Los estudiantes deben tener competencias acerca de la utilización del programa GeoGebra.
- Los estudiantes deben saber realizar y reportar procesos de construcción, exploración, argumentación y conjeturación para resolver una tarea en un EGD.

Conceptos y definiciones

A continuación, reportamos los conceptos y definiciones que requieren los estudiantes para abordar la tarea.

- D. Punto medio: X es punto medio de \overline{AB} sí y sólo si $\overline{AX} \cong \overline{XB}$.
- D. Segmentos congruentes: $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ sí y sólo si $AB = BC$
- D. Triángulo equilátero: $\triangle ABC$ es equilátero si y sólo si $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CA}$

- D. Triángulos congruentes: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ sí y sólo si $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{DF}$, $\overline{CA} \cong \overline{FD}$, $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$ y $\angle C \cong \angle F$.
- D. Intersección de conjuntos: $x \in (A \cap B)$ sí y sólo si $x \in A$ y $x \in B$.

Proposiciones

A continuación, reportamos las proposiciones (teoremas, postulados, axiomas) que requieren los estudiantes para abordar la tarea.

- Criterio de congruencia de triángulos LAL
- Propiedad transitiva
- Principio de Sustitución
- T. Triángulo equilátero – ángulos congruentes

Lenguajes y representaciones

- Lenguaje matemático (verbal y escrito): Hacemos referencia a símbolos matemáticos como: congruencia, igualdad, paralelismo, perpendicularidad, circunferencia, intersección.
- Simbología establecida (gráfica y escrita): Aludimos a representaciones de segmentos, circunferencias y puntos en GeoGebra,
- Lenguaje natural: Oraciones o frases o gestos que expresen los estudiantes. Por ejemplo “mover el punto”, “los segmentos son congruentes”, “Los triángulos son congruentes”; expresar perpendicularidad o paralelismo con las manos o brazos, representar triángulos con las manos, etc.
- Representaciones gráficas dinámicas

METAS

Las metas de una tarea matemática escolar resumen los propósitos que el profesor asigna a la tarea. Estos propósitos se refieren a aquellos aspectos de las expectativas de aprendizaje y de tipo afectivo a los que la tarea pretende contribuir, y aquellos errores y dificultades que el profesor espera que la tarea contribuya a superar.

- Fortalecer los procesos de construcción, exploración, argumentación y conjeturación mediante el desarrollo de una tarea en un EGD, que involucre conceptos relacionados con las propiedades de los triángulos equiláteros y congruencia de triángulos.
- Esperamos que los estudiantes logren reportar alguno de los **procedimientos y argumentos** que presentaremos a continuación:

Procedimientos:

Presentamos algunas construcciones que consideramos pueden hacer los estudiantes para solucionar el problema propuesto.

Construcción 1:

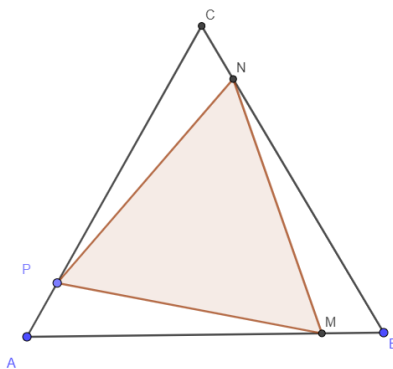
- Dado $\triangle ABC$
- $M \in \overline{AB}$
- $N \in \overline{BC}$
- $P \in \overline{AC}$
- $\triangle MNP$
- Con la herramienta distancia o longitud hallar MN, NP, MP
- Con un arrastre limitado de los puntos M, N y P hacer que $MN = NP = MP$.

Construcción 2:

- Dado $\triangle ABC$
- M punto medio de \overline{AB}
- N punto medio de \overline{BC}
- P punto medio de \overline{AC}
- $\triangle MNP$
- Con la herramienta de distancia o longitud verificar que $MN = NP = MP$

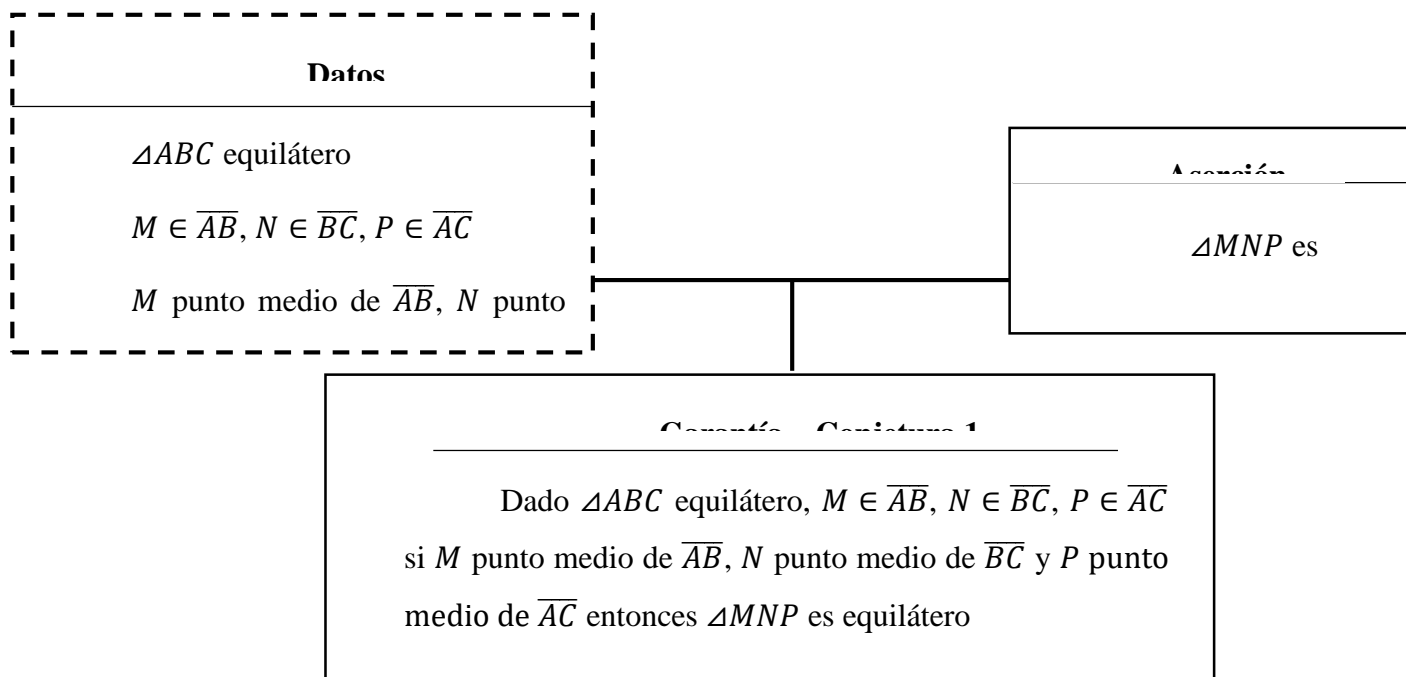
Construcción 3:

- Dado $\triangle ABC$
- $M \in \overline{AB}$
- $\odot B, AM$
- $\odot B, AM \cap \overline{BC} = \{N\}$
- $\odot C, \overline{AM}$
- $\odot C, AM \cap \overline{AC} = \{P\}$
- $\triangle MNP$
- Con la herramienta de distancia o longitud verificar que $MN = NP = MP$
- Con la herramienta animación, mover el punto M por \overline{AB}



Argumentos

- Conjetura 1: Dado $\triangle ABC$, $M \in \overline{AB}$, $N \in \overline{BC}$, $P \in \overline{AC}$ si M punto medio de \overline{AB} , N punto medio de \overline{BC} y $P \in \overline{AC}$ entonces $\triangle MNP$ es equilátero.



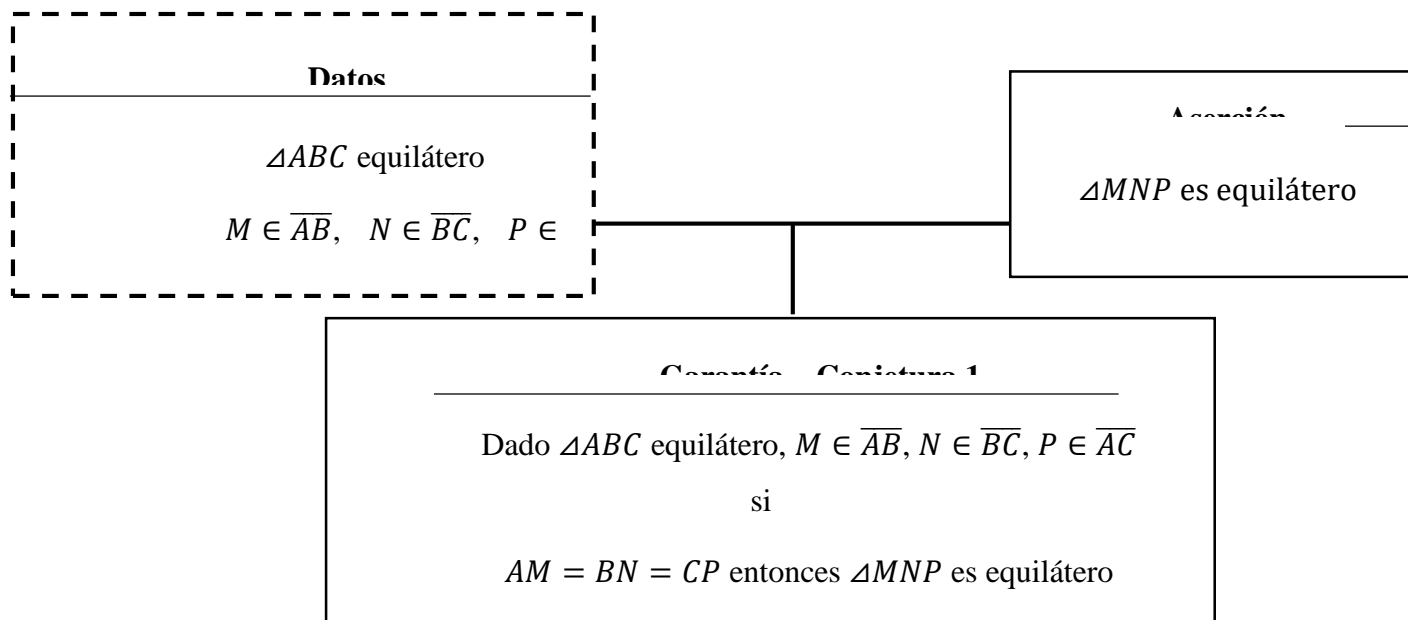
Demostración conjetura 1

Afirmación	Garantía
<p>1. Dado $\triangle ABC$ equilátero</p> <p>$M \in \overline{AB}, N \in \overline{BC}, P \in \overline{AC}$</p> <p>$M$ punto medio de \overline{AB},</p> <p>N punto medio de \overline{BC}</p> <p>P Punto medio de \overline{AC}</p>	<p>Dado</p>
<p>2. $\triangle AMP, \triangle CNM, \triangle BPN$</p>	<p>D. Triángulo (1)</p>

3. $\angle A \cong \angle B \cong$	T. triángulo equilátero – ángulos congruentes (1)
4. $\overline{AM} \cong \overline{BN}$ y $\overline{AP} \cong \overline{BM}$	D. punto medio. (1)
5. $\triangle AMP \cong \triangle CNM$	Criterio de congruencia LAL (2)(3)(4)
6. $\overline{MN} \cong \overline{MP}$	D. triángulos congruentes (5)
7. Análogamente se demuestra que $\triangle AMP \cong \triangle BPN$	Analogía (2)(3)(4)(5)
8. $\overline{MN} \cong \overline{PN}$	D. Triángulos congruentes (7)
9. $\overline{MN} \cong \overline{MP} \cong \overline{PN}$	Propiedad transitiva (8)
10. $\triangle MNP$ es equilátero	D. Triángulo equilátero

■

- Conjetura 2: Dado $\triangle ABC$, $M \in \overline{AB}$, $N \in \overline{BC}$, $P \in \overline{AC}$ si $AM = BN = CP$ entonces $\triangle MNP$ es equilátero.



Demostración conjetura 2:

Afirmación	Garantía
1. Dado $\triangle ABC$ equilátero $M \in \overline{AB}, N \in \overline{BC}, P \in \overline{AC}$ $AM = BN = CP$	Dado
2. $\angle A \cong \angle B$ $m\angle A = m\angle B = 60$	T. Triángulo equilátero – ángulos congruentes (1)
3. $\overline{AM} \cong \overline{BN}$	D. Segmentos congruentes (1)
4. $AB = AC$	D. Segmentos congruentes (1)
5. $AB = AM + MB$ $AC = AP + PC$	D. Interestancia (1)
6. $MB = AB - AM$ $AP = AC - PC$	Propiedad de los números reales (5)
7. $AP = AB - AM$	Sustitución (4)(6)

8. $AP = MB$	Transitividad (6)(7)
9. $\overline{AP} \cong \overline{MB}$	D. Segmentos congruentes (8)
10. $\triangle AMP \cong \triangle BNM$	D. Criterio de congruencia LAL (9)(3)
11. Análogamente se demuestra que $\triangle AMP \cong \triangle CPN$	Analogía (2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)(10)
12. $\triangle AMP \cong \triangle BNM \cong \triangle CPN$	Transitividad (11)
13. $\overline{MN} \cong \overline{NP} \cong \overline{PM}$	D. Triángulos congruentes (12)



Superación de dificultades

Las dificultades que suponemos que los estudiantes superen son:

- Logar una mejor apropiación de los conceptos, definiciones, lenguajes y representaciones mencionados en los requisitos.
- Adquirir una mejor destreza en cuanto a la resolución de problemas de geometría.
- Desarrollar un conocimiento más robusto acerca del uso del software de geometría dinámica GeoGebra.

Expectativas afectivas

Mediante la presente tarea se busca contribuir a las expectativas afectivas que describiremos a continuación:

- Propiciar el interés por la identificación y visualización de propiedades de los triángulos, particularmente las del triángulo equilátero.
- Generar interés por el aprendizaje de la geometría al expresar conjeturas y exploraciones frente a una determinada tarea.

- Generar en los estudiantes emociones y sensaciones de asombro, e inquietud y así fomentar el interés para el desarrollo de las tareas.
- Orientar y motivar a los estudiantes que entran en frustración al no ser capaces de resolver la tarea.

FORMULACIÓN

La formulación de la tarea proporciona una información inicial y requiere que los estudiantes produzcan una información final como su solución.

Dado el ΔABC equilátero en Geogebra ¿Es posible determinar los puntos $M \in \overline{AB}$, $N \in \overline{BC}$ y $P \in \overline{AC}$, de tal forma que ΔMNP sea equilátero?

1. Reporte los pasos de la construcción.
2. Reporte los pasos de exploración.
3. Provea una conjetura.
4. Explique por qué es válida su conjetura.

MATERIALES Y RECURSOS

Los materiales y recursos son las herramientas que se utilizan para resolver una tarea, estas son:

- **GeoGebra:** Este EGD se utiliza con el fin de que los estudiantes puedan resolver la tarea utilizando las herramientas dinámicas con las que cuenta el software y de esta manera potenciar procesos de exploración, construcción, argumentación y conjeturación.
- **Microsoft Teams:** Este software me permite supervisar, mediar e interactuar con los estudiantes durante la resolución de la tarea.

- **Computadores:** Este artefacto le permite a los estudiantes y docentes manipular el EGD, Microsoft Teams, entre otros programas.
- **Conexión a internet:** Este servicio permite que el computador del docente y de los estudiantes estén conectados en tiempo real y de esta manera poder compartir información.

AGRUPAMIENTO

El agrupamiento es la fase donde el docente determina como se van a organizar los estudiantes para resolver la tarea. Esta organización puede ser individual, en pequeños grupos de trabajo o con todo el curso.

Se prevé que los alumnos trabajen en la resolución de la tarea en grupos de tres estudiantes mediante salas exclusivas para cada grupo dentro del equipo en Teams. Al final de la clase se tomará un tiempo para realizar una socialización general con todos los estudiantes, se compartirán las conjeturas y distintas construcciones que puedan surgir.

INTERACCIÓN

La interacción está determinada por el agrupamiento. Las interacciones que se puede dar en el aula virtual son: estudiante-estudiante, estudiante-profesor, estudiante -grupo y grupo profesor.

Estas interacciones se darán entre los integrantes de los grupos de trabajo, a partir de la mediación que pueda hacer el profesor en cada uno de los grupos, o a partir de las preguntas que puedan llegar a surgir en la socialización con todo el curso.

TEMPORALIDAD

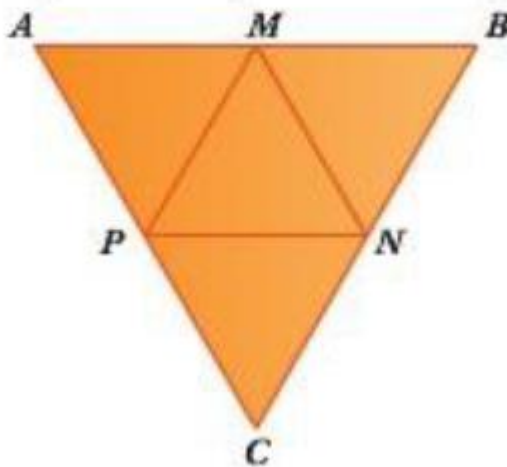
La temporalidad es el tiempo que el docente asigna para la resolución de una tarea o una secuencia de tareas.

- Construcción, exploración min (Grupos de trabajo)
- Discusión & conjeturación: 30 minutos (Grupos de trabajo)
- Socialización general: 60 minutos (Toda el aula)

Anexo 11: Rediseño de la tarea para favorecer la argumentación

Seleccionamos un problema del libro Los caminos del saber 8°, el cual utiliza el compañero Carlos Camargo en el colegio donde trabaja. El problema se encuentra en la unidad 9, denominada *Geometría*. Esta unidad aborda los temas referentes a Ángulos, Triángulos, Propiedades de los triángulos, Clasificación de triángulos, Líneas y puntos notables en un triángulo y Congruencia de triángulos. Hemos escogido el siguiente problema:

157. Si M , N y P son los puntos medios de los lados \overline{AB} , \overline{BC} y \overline{AC} del triángulo equilátero ABC , muestra que el triángulo MNP es equilátero.



Nos basaremos en este problema para diseñar una secuencia de enseñanza la cual se distribuye dos hojas de trabajo y cada hoja comprende una secuencia de tareas.

REQUISITOS

Los requisitos hacen referencia a aquellos conocimientos y destrezas que, de acuerdo con el nivel educativo de los estudiantes, se vinculan directamente con las metas y el contenido matemático de la tarea.

La siguiente tarea se propone para ser desarrollada con estudiantes de grado octavo. Se ha hecho un esfuerzo por promover el lenguaje matemático en el aula de clase y los estudiantes poco a poco se han ido familiarizando con él. Ninguno de los estudiantes tiene limitaciones físicas o cognitivas diagnosticadas. Además, los estudiantes tienen algún acercamiento acerca de la utilización del programa GeoGebra.

Conceptos y definiciones

A continuación, reportamos los conceptos y definiciones que requieren los estudiantes para abordar la tarea.

- D. Punto medio: X es punto medio de \overline{AB} sí y sólo si $\overline{AX} \cong \overline{XB}$.
- D. Segmentos congruentes: $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ sí y sólo si $AB = BC$
- D. Triángulo equilátero: $\triangle ABC$ es equilátero si y sólo si $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CA}$
- D. Triángulos congruentes: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ sí y sólo si $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{DF}$, $\overline{CA} \cong \overline{FD}$, $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$ y $\angle C \cong \angle F$.
- D. Intersección de conjuntos: $x \in (A \cap B)$ sí y sólo si $x \in A$ y $x \in B$.
- D. Interestancia entre puntos: Si C está entre A y B si se cumple las siguientes condiciones. A, B y C son colineales y $AC + CB = AB$.

Proposiciones

A continuación, reportamos las proposiciones (teoremas, postulados, axiomas) que requieren los estudiantes para abordar la tarea.

- Criterio de congruencia de triángulos LAL
- Propiedad transitiva
- Principio de Sustitución
- T. Triángulo equilátero – ángulos congruentes

Lenguajes y representaciones

- Lenguaje matemático (verbal y escrito): Hacemos referencia a símbolos matemáticos como: congruencia, igualdad, paralelismo, perpendicularidad, circunferencia, intersección.
- Simbología establecida (gráfica y escrita): Aludimos a representaciones de segmentos, circunferencias y puntos en GeoGebra,
- Lenguaje natural: Oraciones o frases o gestos que expresen los estudiantes. Por ejemplo “mover el punto”, “los segmentos son congruentes”, “Los triángulos son congruentes”; expresar perpendicularidad o paralelismo con las manos o brazos, representar triángulos con las manos, etc.
- Representaciones gráficas dinámicas

METAS

Las metas de una tarea matemática escolar resumen los propósitos que el profesor asigna a la tarea. Estos propósitos se refieren a aquellos aspectos de las expectativas de aprendizaje y de tipo afectivo a los que la tarea pretende contribuir, y aquellos errores y dificultades que el profesor espera que la tarea contribuya a superar

- Fortalecer los procesos de construcción, exploración y argumentación mediante el desarrollo de una tarea en un EGD, que involucre conceptos relacionados con las propiedades de los triángulos equiláteros y congruencia de triángulos.
- Fortalecer las imágenes conceptuales de los objetos geométricos: puntos medio, triángulo equilátero y congruencia de triángulos, a partir de exploraciones y construcciones realizadas en la solución de la secuencia de enseñanza.
- Favorecer la producción de argumentos por parte de los estudiantes mediante la implementación de plantillas discursivas.
- Realizar un primer acercamiento a lo que es una demostración matemática.
- Conceptualizar a los estudiantes acerca del uso de las construcciones blandas y robustas para la resolución de problemas geométricos.

Superación de dificultades

Las dificultades que suponemos que los estudiantes superen son:

- Lograr una mejor apropiación de los conceptos, definiciones, lenguajes y representaciones mencionados en los requisitos.
- Adquirir una mejor destreza en cuanto a la resolución de problemas de geometría.
- Desarrollar un conocimiento más robusto acerca del uso del software de geometría dinámica GeoGebra.

Expectativas afectivas

Mediante la presente tarea se busca contribuir a las expectativas afectivas que describiremos a continuación:

- Propiciar el interés por la identificación y visualización de propiedades de los triángulos, particularmente las del triángulo equilátero.
- Generar interés por el aprendizaje de la geometría al expresar conjeturas y exploraciones frente a una determinada tarea.
- Generar en los estudiantes emociones y sensaciones de asombro, e inquietud y así fomentar el interés para el desarrollo de las tareas.
- Orientar y motivar a los estudiantes que entran en frustración al no ser capaces de resolver la tarea.

FORMULACIÓN

La formulación de la tarea proporciona una información inicial y requiere que los estudiantes produzcan una información final como su solución.

Esta tarea consta de dos bloques y cada bloque está compuesto por varias secuencias de tareas. En la primera hoja de trabajo (HT1) el objetivo es que los estudiantes logren construir un triángulo equilátero. En una primera instancia utilizando construcciones blandas y luego se les presenta una construcción robusta. Esto con el fin de que ellos sean conscientes de este tipo de construcciones que conservan sus propiedades mediante el arrastre. Además, se busca que los estudiantes construyan argumentos mediante completar plantillas discursivas las cuales relatan la demostración de un hecho geométrico. De esta manera adentramos a los estudiantes en el seguimiento de una demostración matemática. En la HT2 tiene como objetivo que los estudiantes exploren un hecho geométrico, complementen una construcción y realicen un primer intento de adentrarse en el seguimiento de una demostración matemática.

HT1:

1) Trata de construir un triángulo equilátero en GeoGebra y reporta tu construcción.

2) Realizar la siguiente construcción en GeoGebra:

- Ubicar A, B puntos
- Trazar \overline{AB}
- Trazar $\odot(A, AB)$
- Trazar $\odot(B, BA)$
- Marcar C punto de intercepción superior entre $\odot(A, AB)$ y $\odot(B, BA)$
- Trazar $\triangle ABC$
- Medir $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$

3) Escribe tu descubrimiento utilizando la siguiente platilla:

Observe que _____ cuando _____

4) Arrastra los puntos A, B y reporta que sucede con las medidas de los lados del triángulo equilátero ¿Miden diferente los segmentos?

5) Probar que $\triangle ABC$ es equilátero, completando las siguientes oraciones:

- Basado en que el punto $C \in \odot(A, AB) \cap \odot(B, BA)$ y la definición de intersección de conjuntos, pienso que $C \in \odot(A, AB)$ y $C \in \odot(B, BA)$
- Afirmino que $AC = AB$ y $BC = BA$, por la definición de circunferencia
- Se que $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$ son congruentes porque $AB = BA$ y por la propiedad transitiva
- Como $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$ son congruentes concluyo que $\triangle ABC$ es equilátero

HT2:

1) Realizar la siguiente construcción:

- Ubicar $M \in \overline{AB}, N \in \overline{BC}, P \in \overline{AC}$ puntos medios

- Trazar $\triangle MNP$
- Medir \overline{MN} , \overline{MP} , \overline{NP}

2) Escribe tu descubrimiento utilizando la siguiente platilla:

Observe que _____ cuando _____

3) Arrastra los puntos A , B y reporta que sucede con las medidas de los lados del $\triangle MNP$; Miden diferente los segmentos?

4) Demuestra que $\triangle MNP$ es equilátero completando la siguiente tabla:

Que se	Que uso	Que concluyo
Dado $\triangle ABC$ equilátero	T. triángulo equilátero – ángulos congruentes (1)	$\angle A \cong \angle B \cong \angle C$
Dado $\triangle ABC$ equilátero	D. Triangulo equilátero	$\overline{AB} \cong \overline{AC} \cong \overline{BC}$
<ul style="list-style-type: none"> • $M \in \overline{AB}$, $N \in \overline{BC}$, $P \in \overline{AC}$ • M punto medio de \overline{AB}, • N punto medio de \overline{BC} • P Punto medio de \overline{AC} 	D. Punto Medio	<ul style="list-style-type: none"> • $\overline{AM} \cong \overline{MB}$ • $\overline{AP} \cong \overline{PC}$ • $\overline{BN} \cong \overline{NC}$
<ul style="list-style-type: none"> • $\overline{AB} \cong \overline{AC} \cong \overline{BC}$ • $\overline{AM} \cong \overline{MB}$ • $\overline{AP} \cong \overline{PC}$ • $\overline{BN} \cong \overline{NC}$ 	D. Inter estancia Principio de sustitución	$\overline{AM} \cong \overline{MB} \cong \overline{AP} \cong \overline{PC}$ $\cong \overline{BN} \cong \overline{NC}$
<ul style="list-style-type: none"> • $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$ • $\overline{AM} \cong \overline{MB} \cong \overline{AP} \cong \overline{PC} \cong \overline{BN} \cong \overline{NC}$ 	Criterio LAL	$\triangle AMP \cong \triangle BMN \cong \triangle CNP$
$\triangle AMP \cong \triangle BMN \cong \triangle CNP$	D. Triángulos congruentes	$\overline{MN} \cong \overline{MP} \cong \overline{NP}$
$\overline{MN} \cong \overline{MP} \cong \overline{NP}$	D. Triangulo equilátero	$\triangle MNP$ es equilátero

MATERIALES Y RECURSOS

Los materiales y recursos son las herramientas que se utilizan para resolver una tarea, estas son:

- **GeoGebra:** Este EGD se utiliza con el fin de que los estudiantes puedan resolver la tarea utilizando las herramientas dinámicas con las que cuenta el software y de esta manera potenciar procesos de exploración, construcción, argumentación y conjeturación.
- **Microsoft Teams:** Este software me permite supervisar, mediar e interactuar con los estudiantes durante la resolución de la tarea.
- **Computadores:** Este artefacto le permite a los estudiantes y docentes manipular el EGD, Microsoft Teams, entre otros programas.
- **Conexión a internet:** Este servicio permite que el computador del docente y de los estudiantes estén conectados en tiempo real y de esta manera poder compartir información.

AGRUPAMIENTO

El agrupamiento es la fase donde el docente determina como se van a organizar los estudiantes para resolver la tarea. Esta organización puede ser individual, en pequeños grupos de trabajo o con todo el curso.

Se prevé que los alumnos trabajen en la resolución de la tarea en grupos de tres estudiantes mediante salas exclusivas para cada grupo dentro del equipo en Teams. Al final de la clase se tomará un tiempo para realizar una socialización general con todos los estudiantes, se compartirán las conjeturas y distintas construcciones que puedan surgir.

INTERACCIÓN

La interacción está determinada por el agrupamiento. Las interacciones que se puede dar en el aula virtual son: estudiante-estudiante, estudiante-profesor, estudiante -grupo y grupo profesor.

Estas interacciones se darán entre los integrantes de los grupos de trabajo, a partir de la mediación que pueda hacer el profesor en cada uno de los grupos, o a partir de las preguntas que puedan llegar a surgir en la socialización con todo el curso.

TEMPORALIDAD

La temporalidad es el tiempo que el docente asigna para la resolución de una tarea o una secuencia de tareas. Se darán 2 horas para cada hoja de trabajo.

Anexo 12: Discusión en torno al diseño y el rediseño de la tarea

Pienso que con este tipo de tareas [Segunda propuesta] incluso podría ir pasando de la argumentación poco a poco a la demostración, creo que se va favoreciendo ambos procesos. Ya que con esta tarea pretendemos que el estudiante tenga un primer acercamiento o aproximación a realizar actividad demostrativa, especialmente el proceso de argumentación y tratar de recrear una demostración de un hecho geométrico. ... En el punto cinco de la segunda tarea se implementa una de las estrategias vistas en el ciclo 2 para favorecer la producción de argumentos. La cual consiste en proveer la demostración de porque la construcción hecha en el punto dos corresponde a un triángulo equilátero. Esta demostración esta reportada a partir de una secuencia articulada de las plantillas discursivas. Fíjese que esta propuesta de representación corresponde a una representación en párrafo. Digamos que la estructura ternaria de cada argumento deductivo está completa, salvo la garantía que esta implícita. Eso es lo importante de las plantillas, poder explicitar y poder identificar las partes de los argumentos que producen los estudiantes. ... En el cuarto punto de la segunda hoja de trabajo de la segunda tarea se implementa otra de las estrategias vistas en el ciclo 2 para favorecer la producción de argumentos. Esta consiste en la incorporación de la representación de una demostración a 3 columnas. Lo que se quiere hacer con esta forma de

representación es preséntales a los estudiantes la demostración de porque la construcción (triángulo formado por los puntos medios de un triángulo equilátero) que realizaron anteriormente también era un triángulo equilátero. Al igual que con la demostración en párrafo se les presentaba a los estudiantes una tabla a tres columnas (que se, que uso, que concluyo). La ventaja de esta representación a 3 columnas es que puedo ver las 3 partes específicas que componen a cada argumento deductivo que conforma la demostración. ... Propusimos Teams porque era una forma de generar agrupamiento a través de medios virtuales. A su vez podemos aprovechar las herramientas que tiene Teams como, por ejemplo, la opción de levantar la mano, para gestionar del uso de la palabra al momento de argumentar grupalmente (profesor-curso) cuando están resolviendo una tarea que favorece la producción de argumentos en un EGD. ... Otra herramienta es el uso de la cámara web en la cual se pueden ver las expresiones de los estudiantes que desean hacer uso del lenguaje gestual a la hora de argumentar. Por ejemplo, para indicar que algo es perpendicular usando los brazos. ... También, se pueden crear subsalas asociadas a la sala principal para favorecer el trabajo cooperativo entre equipos de trabajo a la hora de argumentar la solución de la tarea. ... Mientras los estudiantes van resolviendo la tarea en sus salas exclusivas, el docente realiza rondas de acompañamiento para supervisar y validar el trabajo de los equipos. Pensamos que este software favorece las interacciones individuales, grupales y de todo el curso (institucionalización) a la hora de argumentar en la resolución de la tarea. ... Otra interacción es la de grupo y grupo, entonces un grupo tiene una conjetura y otro grupo tiene otra conjetura y discuten dichas conjeturas por medio de la argumentación y llegan a un acuerdo.

Anexo 13: Insumos Ciclo 3

Fragmento Transcripción	¿Qué conocimiento sobre argumento / argumentación me llevó a efectuar una determinada acción de esa forma?	¿Qué interrogantes a mi conocimiento sobre argumento / argumentación me genera una acción realizada durante el diseño?	¿Qué conocimiento que tengo ahora, me lleva a cuestionar o validar una acción que realice anteriormente?	¿Qué aprendí al tratar de interpretar acciones de mi práctica?
<p>La forma como enunciamos esta tarea da a entender que los profesores que la diseñaron no tuvieron en cuenta la faceta cognitiva en cuanto a determinar el alcance conceptual que pueden llegar a tener los estudiantes con respecto a la argumentación y que esta tarea estaba dirigida a miembros expertos (nosotros mismos) que conocen estos procesos y tiene experiencia en la resolución de este tipo de tareas.</p>	<p>Al enunciar una tarea es necesario determinar el alcance conceptual que pueden llegar a tener los estudiantes con respecto a la argumentación. Adicionalmente, tener en cuenta que la tarea no está dirigida a miembros expertos (nosotros mismos), que conocen estos procesos y tiene experiencia en la resolución de este tipo de tareas, sino a los estudiantes.</p>	<p>El interrogante que nos llevó a realizar esta acción fue ¿Esta tarea favorecería la producción de argumentos en mis estudiantes?</p>	<p>Uno de los principales criterios que hay que tener en cuenta al momento de diseñar una tarea que favorezca la producción de argumentos es considerar las dificultades, errores y el alcance conceptual que tienen mis estudiantes con respecto a la argumentación y los objetos matemáticos involucrados en la tarea.</p>	<p>Es de suma importancia considerar el alcance conceptual de los estudiantes (qué saben, qué dificultades y errores pueden tener y el tipo de interacción que podría favorecer la producción de argumento) en cuanto a la argumentación y el conocimiento del contenido que ellos poseen.</p>
<p>En la primera tarea teníamos la creencia que los problemas que se les proponía a estudiantes, necesariamente, tenían que ser problemas abiertos de conjeturación con enunciaciones lo más generales posibles para favorecer procesos como la exploración, construcción, conjeturación y argumentación. Ya que se creía que entre más general fuera el enunciado</p>	<p>Los problemas abiertos de conjeturación, favorece la producción de argumentos y procesos afines (construcción, exploración, conjeturación), ya que esto da vía libre a que surjan diversas construcciones, exploraciones, conjeturas y argumentos por parte de los estudiantes.</p>	<p>El interrogante que nos llevó a realizar esta acción fue ¿Qué tipo de formulaciones favorecen la producción de argumentos en los estudiantes al momento de resolver una tarea?</p>	<p>Para que un estudiante pueda solucionar un problema de conjeturación, en el cual se involucran procesos como construcción, exploración, conjeturación y argumentación, se necesita que los estudiantes tengan cierta familiaridad con esos procesos. De lo contrario este tipo de diseño de tarea no sería muy conveniente.</p>	

<p>de un problema abierto de conjeturación, habría más diversidad de soluciones y por tal razón se desarrollarían procesos (exploración, construcción, conjeturación, argumentación) más ricos.</p>	<p>Una tarea de un libro de texto puede transformarse en un problema abierto de conjetura. Para ello, es necesario: 1) reformularla de tal forma que puedan tener más de una solución y más de una forma de solucionarla; 2) reformularla de tal forma que permita al estudiante explorar una situación; 3) Reformularla de tal forma que el enunciado no sugiera la respuesta.</p> <p>Un problema de conjeturación, solucionado con un EGD, debe permitir al estudiante formular una conjetura que sea una generalización obtenida al explorar infinitos casos en el EGD.</p>			
<p>Para la segunda tarea [Tarea reformulada] nos apartamos de las creencias de formular el enunciado de la tarea como un problema abierto de conjeturación cuyo enunciado fuera lo más general posible. Por esta razón nos quedamos con la propuesta original del texto guía (Puntos medios) y propusimos un paso a paso de cómo</p>	<p>En un problema de conjeturación existe una conjetura que reporta la solución del problema de la forma más general posible, es decir, una proposición que incluye en ella todos los casos en los cuales se cumple un atributo. Cuando este tipo de problema se propone a estudiantes no familiarizados con el proceso de exploración,</p>	<p>El interrogante que nos llevó a realizar esta acción fue ¿Cómo diseñar una tarea que favorezca la producción de argumentos en alumnos no están familiarizados con los procesos matemáticos que están relacionados con la argumentación?</p>		<p>A menudo hay que realizar adaptaciones en los diseños de tarea que se ajusten a lo que mis estudiantes saben y pueden hacer.</p>

<p>realizar cada uno de los procesos (construcción, exploración, conjeturación, argumentación) que se les pedía que realizaran en la primera tarea. Esto con el fin de no complejizar tanto el problema para que la tarea estuviera al alcance conceptual de nuestros estudiantes y de esta manera favorecer la producción de argumentos.</p>	<p>argumentación, conjeturación y exploración, el profesor puede sugerir estudiar casos específicos.</p> <p>Una tarea que implique al estudiante argumentar, explorar y construir, puede incluir indicaciones que el estudiante debe seguir para realizar cada proceso, cuando el estudiante es novato respecto a estos procesos. Una vez los alumnos hayan ganado cierta experiencia con respecto a la argumentación y procesos afines, se pueden quitar este tipo de indicaciones.</p> <p>En los libros de texto escolares es común encontrar tareas que solicitan demostrar una proposición condicional. Estas tareas pueden ser reformuladas para propiciar que el estudiante haga una exploración que le permita descubrir la relación condicional y construya la demostración utilizando un esquema de representación de una demostración. También puede incluir en su formulación, el uso de plantillas</p>			
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--	--	--

	discursivas que favorecen la argumentación.			
<p>En la segunda tarea se implementa dos de las estrategias vistas en el Ciclo 2 para favorecer la producción de argumentos. Las cuales consisten en proveer dos demostraciones de dos hechos Geométricos involucrados en la tarea, a través de una secuencia articulada de plantillas discursivas y tabla a 3 columnas. En cada demostración se omiten alguna parte de algunos argumentos deductivos que conforman la demostración y el estudiante debe diligenciar esos espacios vacíos.</p>	<p>Dos estrategias para favorecer la producción de argumentos son: el uso de plantillas discursivas y la representación de una demostración a 3 columnas. Estas estrategias facilitan el seguimiento de la demostración y explicitan las partes de un argumento.</p>	<p>El interrogante que nos llevó a realizar esta acción fue ¿Qué estrategias puedo implementar para representar argumentos y favorecer la producción de los mismos?</p>	<p>Una tarea de argumentación que propusimos incluía completar una demostración representada en el esquema a tres columnas. No obstante, al finalizar nos cuestionábamos si esta tarea estuviera al alcance conceptual de nuestros estudiantes. Consideramos que para que los estudiantes puedan solucionar este tipo de tarea, deben tener un conocimiento sobre lo que es una implicación, una estructura condicional y de las relaciones condicionales que hacen parte de un sistema teórico, o el profesor debe hacer una gestión para enseñárselo.</p>	<p>El hecho de que se incorporen estrategias nuevas no implica que las dificultades y los vacíos conceptuales sobre un proceso se van a solucionar, ya que el proceso de conceptualización con respecto a algún proceso u objeto geométrico toma tiempo y no se puede abordar todos los procesos al mismo tiempo.</p>
<p>Con tareas como esta, en que el estudiante debe ir diligenciando algunas partes de la demostración representada a través de plantillas o tabla a 3 columnas, incluso podría ir pasando de la argumentación poco a poco a la demostración, creo que se va favoreciendo ambos procesos. Ya que con esta tarea pretendemos que el estudiante tenga un primer acercamiento o aproximación a</p>	<p>Implementar tareas de conjeturación, en las que se incluyan indicaciones respecto a cómo realizar procesos de exploración, construcción, conjeturación y argumentación, podría a largo plazo favorecer un tránsito entre la argumentación y la demostración.</p>	<p>El interrogante que nos llevó a realizar esta acción fue ¿Cómo aproximar a los estudiantes a la demostración de un hecho geométrico a través de las estrategias aprendidas en el ciclo anterior?</p>		

<p>realizar actividad demostrativa, especialmente el proceso de argumentación y tratar de recrear una demostración de un hecho geométrico.</p>				
<p>Propusimos Teams porque era una forma de generar agrupamiento a través de medios virtuales.</p>	<p>El proceso de argumentación se desarrolla en conjuntos de personas con dos a más integrantes, los cuales tengan una comunicación clara y fluida.</p> <p>Una plataforma virtual que permita establecer entornos en los cuales un grupo de estudiantes pueda tener una comunicación clara y fluida, generaría un ambiente favorable para entablar argumentaciones entre los participantes presentes.</p>	<p>El interrogante que nos llevó a realizar esta acción fue ¿Qué plataformas virtuales me permiten realizar reuniones masivas?</p>		<p>La argumentación no únicamente se desarrolla de forma presencial. Sino que también se puede desarrollar a través de medios virtuales.</p>
<p>A su vez podemos aprovechar las herramientas que tiene Teams como, por ejemplo, la opción de levantar la mano, para gestionar del uso de la palabra al momento de argumentar grupalmente (profesor-curso) cuando están resolviendo una tarea que favorece la producción de argumentos en un EGD.</p>	<p>A la hora de argumentar es indispensable gestionar el uso de la palabra de los participantes, para que haya una recepción clara de los argumentos y esta no sea interrumpida por otros participantes</p> <p>Una herramienta que permite gestionar el uso de la palabra cuando los estudiantes</p>	<p>El interrogante que nos llevó a realizar esta acción fue ¿Cómo favorecer la argumentación mediante la gestión del uso de la palabra?</p>		

	argumentan es la herramienta “Levantar la mano” de la plataforma Teams.			
Otra herramienta es el uso de la cámara web en la cual se pueden ver las expresiones de los estudiantes que desean hacer uso del lenguaje gestual a la hora de argumentar. Por ejemplo, para indicar que algo es perpendicular usando los brazos.	Al momento de argumentar es posible que se nos vayan las palabras. Por esta razón a menudo se acude al lenguaje gestual para completar un argumento. Por este motivo la herramienta de la cámara web es apropiada para suplir esta necesidad a través de plataformas virtuales.	El interrogante que nos llevó a realizar esta acción fue ¿Cómo favorecer la argumentación a través del lenguaje gestual mediante plataformas virtuales de reuniones masivas?		Aprendí que existen otras formas de construir argumentos además de la forma oral y escrita
También, se pueden crear subsalas asociadas a la sala principal para favorecer el trabajo cooperativo entre equipos de trabajo a la hora de argumentar la solución de la tarea.	Pensamos que hay mayor favorecimiento del proceso de argumentación cuando existe trabajo cooperativo e interacción grupal entre los estudiantes a diferencia que si ellos trabajan de manera individualmente. Por este motivo la herramienta de creación de subsalas dentro de una sala de Teams es apropiada para favorecer espacios de dialogo y discusión entre los equipos de trabajo que se establecen en el aula de clase virtual.	El interrogante que nos llevó a realizar esta acción fue ¿Cómo favorecer la argumentación a través de las interacciones que se pueden desarrollar en una plataforma virtual de reuniones masivas?		Aprendí que las estrategias de agrupamiento que se llevan a cabo en la presencialidad también se pueden adaptar a medios virtuales.
Mientras los estudiantes van resolviendo la tarea en sus salas	Es necesaria la supervisión de un miembro experto (Profesor) en el	El interrogante que nos llevó a realizar esta acción fue ¿Qué acciones debe hacer el		

<p>exclusivas, el docente realiza rondas de acompañamiento para supervisar y validar los argumentos producidos por los grupos de trabajo.</p>	<p>desarrollo de una tarea de argumentación, ya que muchas veces a la hora de construir argumentos para resolver la tarea, se pueden presentar dificultades para comprenderla, debido a que puede haber sofisticación en el lenguaje, en las representaciones, en los invariantes que están involucrados en la formulación de la tarea y para solventar estas posibles dificultades se requiere de la presencia de un miembro experto que despeje las dudas que van surgiendo el desarrollo de la tarea.</p>	<p>profesor al momento en que los estudiantes están resolviendo la tarea para favorecer la producción de argumentos?</p>		
<p>Finalmente, los estudiantes regresan a la sala general para realizar un cierre a la tarea institucionalizando los argumentos que sustentan las conjeturas de cada grupo de trabajo.</p>	<p>Una forma de favorecer el proceso de argumentación es que cada grupo de trabajo socialice a toda la clase los argumentos que construyeron a través el trabajo en las subsalas (interacción grupo-toda la clase) y de esta manera los demás miembros de la clase validen o refuten las producciones de los demás grupos de trabajo. Esta era una estrategia que se llevaba a cabo en la metodología de clase presencial y que también se</p>	<p>El interrogante que nos llevó a realizar esta acción fue ¿Cómo favorecer la argumentación a través de las interacciones que se pueden desarrollar en una plataforma virtual de reuniones masivas?</p>		

	puede adaptar a medios virtuales.			
--	-----------------------------------	--	--	--

Anexo 14: Datos investigativos Ciclo 3

Estado 3		
Código	Dato	Descriptor
Faceta Interaccional		
40	El proceso de argumentación se desarrolla en conjuntos de personas con dos a más integrantes, los cuales tengan una comunicación clara y fluida.	1. Interacciones que favorecen la producción de argumentos.
41	Pensamos que hay mayor favorecimiento del proceso de argumentación cuando existe trabajo cooperativo e interacción grupal entre los estudiantes a diferencia que si ellos trabajan de manera individualmente	1. Interacciones que favorecen la producción de argumentos.
42	A la hora de argumentar es indispensable gestionar el uso de la palabra de los participantes, para que haya una recepción clara de los argumentos y esta no sea interrumpida por otros participantes	1. Interacciones que favorecen la producción de argumentos.
43	Al momento de argumentar es posible que se nos vayan las palabras. Por esta razón a menudo se acude al lenguaje gestual para completar un argumento. Por este motivo la herramienta de la cámara web es apropiada para suplir esta necesidad a través de plataformas virtuales.	1. Interacciones que favorecen la producción de argumentos.
44	Es necesaria la supervisión de un miembro experto (Profesor) en el desarrollo de una tarea de argumentación, ya que muchas veces a la hora de construir argumentos para resolver la tarea, se pueden presentar dificultades para comprenderla, debido a que puede haber sofisticación en el lenguaje, en las representaciones, en los invariantes que están involucrados en la formulación de la tarea y para solventar estas posibles dificultades se requiere de la presencia de un miembro experto que despeje las dudas que van surgiendo el desarrollo de la tarea.	5. Interacciones que favorecen la producción de argumentos.
45	Una forma de favorecer el proceso de argumentación es que cada grupo de trabajo socialice a toda la clase los argumentos que construyeron a través el trabajo en las subsalas (interacción grupo-toda la clase) y de esta manera los demás miembros de la clase validen o refuten las producciones de los demás grupos de trabajo. Esta era una estrategia que se llevaba a cabo en la metodología de clase presencial y que también se puede adaptar a medios virtuales.	5. Interacciones que favorecen la producción de argumentos.
46	Uno de los principales criterios que hay que tener en cuenta al momento de diseñar una tarea que favorezca la producción de argumentos es considerar las dificultades, errores, alcance conceptual, el conocimiento que poseen sobre los objetos matemáticos involucrados en la tarea y los tipos de interacciones que podría favorecer en mis estudiantes el proceso de argumentación al momento de desarrollar la tarea. Adicionalmente, tener en cuenta	5. Criterios para diseñar tareas que favorezcan la producción de argumentos.

	que la tarea no está dirigida a miembros expertos (nosotros mismos), que conocen estos procesos y tiene experiencia en la resolución de este tipo de tareas, sino a los estudiantes.	
47	Los problemas abiertos de conjeturación, favorecen la producción de argumentos y procesos afines (construcción, exploración, conjeturación), ya que esto da vía libre a que surjan diversas construcciones, exploraciones, conjeturas y argumentos por parte de los estudiantes.	5. Criterios para diseñar tareas que favorezcan la producción de argumentos.
48	En los libros de texto escolares es común encontrar tareas que solicitan demostrar una proposición condicional. Estas tareas pueden ser reformuladas para propiciar que el estudiante desarrolle procesos de construcción, exploración, conjeturación y argumentación que le permita descubrir la relación condicional y construya la demostración utilizando un esquema de representación de una demostración. Una tarea de un libro de texto puede transformarse en un problema abierto de conjetura. Para ello, es necesario: 1) Reformularla de tal forma que puedan tener diversidad de soluciones 2) Reformularla de tal forma que permita al estudiante explorar una situación; 3) Reformularla de tal forma que el enunciado no sugiera la respuesta.	5. Criterios para diseñar tareas que favorezcan la producción de argumentos.
49	Una tarea que implique al estudiante argumentar, explorar y construir, puede incluir indicaciones para realizar cada proceso, cuando el estudiante es novato respecto a estos procesos. Una vez los alumnos hayan ganado cierta experiencia con respecto a la argumentación y procesos afines, se pueden omitir este tipo de indicaciones.	5. Criterios para diseñar tareas que favorezcan la producción de argumentos.
50	Dos estrategias para favorecer la producción de argumentos son: el uso de plantillas discursivas y la representación de una demostración a 3 columnas. Estas estrategias facilitan el seguimiento de la demostración y explicitan las partes de un argumento.	5. Criterios para diseñar tareas que favorezcan la producción de argumentos.
51	Implementar tareas de conjeturación, en las que se incluyan indicaciones respecto a cómo realizar procesos de exploración, construcción, conjeturación y argumentación, podría a largo plazo favorecer un tránsito entre la argumentación y la demostración. Pero, por otra parte, la tarea de argumentación que propusimos incluía completar dos demostraciones representadas a través de un esquema a tres columnas y la otra mediante una secuencia articulada de plantillas discursivas. No obstante, al finalizar nos cuestionábamos si esta tarea estuviera al alcance conceptual de nuestros estudiantes. Consideramos que para que los estudiantes puedan solucionar este tipo de tarea, deben tener un conocimiento sobre lo que es una implicación, una estructura condicional y de las relaciones condicionales que hacen parte de un sistema teórico, o el profesor debe hacer una gestión para enseñárselo.	5. Criterios para diseñar tareas que favorezcan la producción de argumentos.
Faceta Mediacional		
52	Una plataforma virtual que permita establecer entornos en los cuales un grupo de estudiantes pueda tener una comunicación clara y fluida, generaría un ambiente favorable para entablar argumentaciones entre los participantes presentes.	1. Formas en que el recurso favorecen la producción de argumentos

53	Una herramienta que permite gestionar el uso de la palabra cuando los estudiantes argumentan es la herramienta “Levantar la mano” de la plataforma Teams.	2. Herramientas de un recurso útiles para favorecer la argumentación
54	Por esta razón Por este motivo la herramienta de creación de subsalas dentro de una sala de Teams es apropiada para favorecer espacios de dialogo y discusión entre los equipos de trabajo que se establecen en el aula de clase virtual.	2. Herramientas de un recurso útiles para favorecer la argumentación

Anexo 15: Datos investigativos para la transformación del conocimiento

Datos investigativos para caracterizar la transformación del conocimiento del profesor				Vínculos entre términos	Asimilación
#	Datos	Faceta	Descriptor	Descriptor	Descriptor
1	Concebíamos por argumentación a la justificación de una idea.	Epistémica	Ep1: Definición de argumento y argumentación.	sinonimia	
2	Argumento lo relacionábamos con el sustento teórico para soportar una idea, especialmente con el marco teórico que permite respaldar una demostración.	Epistémica	Ep1: Definición de argumento y argumentación.	intersección	
6	Al realizar la lectura del documento de Molina y Samper (2019), también nos percatamos de que existen tres tipos de argumentos: deductivos, inductivos y abductivos.	Epistémica	Ep2: Tipos de argumentos.		Repetición
8	Empezamos a identificar la argumentación como el acto comunicativo en el cual una	Epistémica	Ep1: Definición de argumento y argumentación.		Repetición

	<p>persona se vale de uno o más argumentos para sustentar una idea, con el fin de persuadir a un grupo de personas o a sí mismo.</p>				
9	<p>Argumento, entendiéndolo como el enunciado de un razonamiento que una persona manifiesta de forma oral o escrita y que tiene tres componentes: datos, garantía y aserción.</p>	Epistémica	Ep1: Definición de argumento y argumentación.		Repetición
10	<p>Argumento deductivo: Es el argumento en el cual se conocen los datos y la garantía y se infiere la aserción. Argumento inductivo: Es el argumento que se obtiene cuando se conoce un conjunto de datos los cuales conducen siempre a una misma aserción; de esta manera se infiere una garantía que corresponde a una regla general que relaciona los datos y la aserción. Argumento abductivo: Es el argumento en el cual se conocen la garantía y la aserción, y se infieren los datos.</p>	Epistémica	Ep2: Tipos de argumentos.		Repetición

11	<p>Los tres tipos de argumentos se pueden representar por medio de un diagrama, el cual corresponde a una representación gráfica del argumento usando el modelo de Toulmin. En (el esquema utilizado para representar) los argumentos deductivos se resalta el cuadro donde se escribe la aserción, ya que en este tipo de argumentos esto es lo que se infiere. En (el esquema utilizado para representar) los argumentos abductivos, se puntea y se resalta la casilla donde escribimos los datos, ya que lo que se infiere son los datos. En (el esquema utilizado para representar) los argumentos inductivos, se puntea y se resalta la casilla donde se escribe la garantía ya que es lo que se infiere. Cabe resaltar que la convención de colocar el cuadro punteado hace referencia a que lo que se infiere es plausible hasta que sea demostrado, mientras que cuando no se puntea es porque</p>	Epistémica	Ep4: Formas de representar un argumento.		Repetición
----	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------	------------------------------------------	--	------------

	este hecho se da con seguridad.				
12	<p>El modelo de demostración a tres columnas que conocía Sergio al iniciar el primer semestre se relaciona con el diagrama para representar un argumento usando el modelo de Toulmin. El “qué sé” inicialmente se considera como un dato, el “qué uso” se asocia con la garantía y el “qué concluyo” se refiere a la aserción. [...]</p> <p>También, entendemos que la demostración a dos columnas (Afirmación y Garantía) se relaciona con el diagrama para un argumento del modelo de Toulmin y con un diagrama para representar</p>	Epistémica	Ep4: Formas de representar un argumento.		Conexiones

	demostraciones a tres columnas. Cada una de las filas que aparecen en las tablas de demostración corresponde a un argumento de tipo deductivo. En la columna de "afirmación" se escribe la aserción; en la columna de "garantía" se escribe la garantía y en ella también se escribe entre paréntesis el número de la fila en la cual se encuentran los datos de dicho argumento.				
13	Los datos son condiciones y relaciones entre objetos geométricos; La garantía es la regla general que relaciona datos y aserción. Las reglas pueden ser teoremas, definiciones y postulados; la aserción es una consecuencia que surge a partir de unos datos.	Epistémica	Ep6: Elementos que conforman un argumento.		Repetición
17	Problemas de búsqueda de consecuente: Son los que proporcionan las condiciones necesarias para resolver el problema y se deben hallar las consecuencias de dichas	Interaccional	In6: Relación entre una tarea diseñada y los argumentos que generan.		Conexiones

	condiciones. Este tipo de problemas favorece la búsqueda de invariantes mediante el proceso de construcción y exploración. Los problemas de búsqueda de consecuente privilegian la producción de argumentos inductivos.				
19	Vamos a llamar actividad demostrativa a ese proceso que permite construir una demostración y que está conformado por varios subprocesos, estos son: exploración, conjeturación, definición y argumentación.	Epistémica	Ep3: Términos afines a la argumentación (justificación, explicación, validación y demostración).	Contenencia	
20	La demostración está conformada por una secuencia conectada de argumentos deductivos, emitidos a favor de una afirmación matemática, es decir, la demostración queda en función del argumento. Por eso es tan importante hablar de argumentación para hablar de demostración.	Epistémica	Ep3: Términos afines a la argumentación (justificación, explicación, validación y demostración).	Contenencia	

21	En una demostración se deben utilizar declaraciones aceptadas por una comunidad (postulados, definiciones, teoremas de un sistema axiomático local) y hay que tener en cuenta que cuando yo utilizo este tipo de afirmaciones ya no necesitan de más justificación porque anteriormente ya se tuvieron que haber demostrado.	Epistémica	Ep3: Términos afines a la argumentación (justificación, explicación, validación y demostración).		Posesión
22	Llamamos demostración al producto de haber realizado actividad demostrativa	Epistémica	Ep3: Términos afines a la argumentación (justificación, explicación, validación y demostración).	Consecuencia	
23	Una demostración emplea formas de razonamiento que son válidas y conocidas dentro del alcance conceptual de la comunidad (demostración directa - Modus Ponens, demostración por contradicción - tercio excluido). El Modus Ponendo Ponens plantea que a partir de P puedo deducir Q. Eso es lo que se le conoce como demostración directa y se asemeja mucho a los argumentos de	Epistémica	Ep5: Modos de razonamiento para construir un argumento.		Conexiones

	<p>tipo deductivo. El Modus Tollendo Tolens plantea que a partir de $\neg Q$ se deduce $\neg P$. Es conocido como una forma de demostración indirecta y se llama demostración por contra recíproco. Entonces, resulta que P implica Q es lógicamente equivalente a $\neg Q$ implica $\neg P$. Entonces, demostrar que $\neg Q$ implica $\neg P$, es equivalente a demostrar que P implica Q.</p>				
24	<p>Un modo de representar una demostración es en párrafo. Esto consiste en escribir de forma lineal y secuenciada los datos y las aseveraciones de cada argumento deductivo, mencionando las garantías más importantes de la demostración. En las demostraciones escritas en forma de párrafo notamos que no se logran identificar las tres partes de un argumento puesto que se omiten algunas partes de los argumentos que conforman la demostración. Esta forma de representar la</p>	Epistémica	Ep4: Formas de representar un argumento.		Posesión

	<p>demostración no favorece la enseñanza de la demostración. Para el caso de la enseñanza de la demostración y argumentación es más pertinente utilizar la representación a 3 columnas. Esta favorece la enseñanza de la demostración, más que la representación en párrafo, sobre todo para los estudiantes que están aprendiendo a demostrar. Al leer una demostración en párrafo, al lector le toca desentrañar lo que está oculto en esa demostración. Como en este tipo de representación hay que inferir tantas cosas, ahí se puede dar un proceso de aprendizaje muy rico para el miembro experto.</p>				
25	<p>La argumentación es una práctica discursiva, que se basa en normas compartidas de una comunidad. Lo que se busca es persuadir a un grupo de personas y hay ciertos roles como emisor, y un receptor.</p>	Epistémica	Ep1: Definición de argumento y argumentación.		Repetición

26	<p>La argumentación es una forma particular de justificar, la cual consiste en cualquier proceso comunicativo, en el que se busca persuadir a alguien o a uno mismo sobre una afirmación. Este proceso está sustentado en unas afirmaciones, normas, declaraciones compartidas. El producto de este proceso es el argumento. Estos argumentos tienen una estructura ternaria, de datos, garantía y aserción. Cabe resaltar que, en la argumentación, los roles que juegan el emisor y el receptor es un papel de pares, es decir, están en la misma jerarquía. El emisor trata de persuadir, de convencer al receptor acerca de una idea, afirmación o aserción.</p>	Epistémica	Ep1: Definición de argumento y argumentación.	Contenencia	
28	<p>La justificación es tratar de dar el porqué de lo que se está afirmando. La justificación la entiendo como un proceso general, que abarca a otros dos procesos más, los cuales son la argumentación y la explicación.</p>	Epistémica	Ep3: Términos afines a la argumentación (justificación, explicación, validación y demostración).	Contenencia	

29	La explicación es una forma particular de justificación y lo que busca es tratar de ampliar, ejemplificar, describir algún conocimiento.	Epistémica	Ep3: Términos afines a la argumentación (justificación, explicación, validación y demostración).	Contenencia	
30	La validación es determinar la veracidad de una afirmación, determinar que, si esto que afirmo, escucho o leo es cierto o no. Entonces, de esta manera eso se relaciona con la definición de justificación. Ya que en la justificación se trata de validar lo que se dice. Ya que la justificación lo que busca es tratar de dar el porqué es cierto lo que alguien o yo afirmo.	Epistémica	Ep3: Términos afines a la argumentación (justificación, explicación, validación y demostración).	Contenencia	
31	. Entonces, ¿La argumentación es lo mismo que la explicación? Entonces, ¿Es lo mismo? Llegamos a la conclusión de que una de las diferencias que hay entre argumentación y explicación, es el papel que juegan el emisor y receptor. Porque en la explicación la persona que explica tiene un papel de autoridad	Epistémica	Ep3: Términos afines a la argumentación (justificación, explicación, validación y demostración).	Diferenciación	

	<p>en el conocimiento y eso es una diferencia que hay con respecto a la argumentación ya que allí los roles son de pares intelectuales.</p>				
32	<p>Nosotros estábamos discutiendo con Sergio la siguiente pregunta ¿La argumentación amplía el conocimiento? y la respuesta fue que en cierta manera sí, ya que, en la argumentación se hace una ampliación de algún conocimiento, pues ahí se comunican datos, aserción y garantía y adicionalmente se describe la conexión que hay entre los datos y la aserción mediante la garantía, en ese sentido hay una ampliación del conocimiento.</p>	Epistémica	<p>Ep3: Términos afines a la argumentación (justificación, explicación, validación y demostración).</p>	Contenencia	

33	<p>¿Por qué siempre en la universidad (UPN) proponen trabajar en grupos de tres y no en grupos de dos? es que cuando trabajamos en grupos existe esa relación entre pares (entre los estudiantes) y lo que se busca es que ellos comiencen a explicitar y a dar ideas de lo que conocen. Entonces, cuando ellos necesitan tomar una decisión, si están trabajando en grupos de dos, a lo mejor es posible que los estudiantes fácilmente se pongan de acuerdo con respecto a la aserción que quieren validar. Mientras que sí trabajan en grupos de tres quizás exista un integrante que esté en contra de los otros dos y en ese sentido, si es necesario que los estudiantes comiencen a argumentar para defender sus posturas.</p>	Interaccional	In1: Interacciones que favorecen la producción de argumentos.		Conexiones
36	<p>Las plantillas discursivas que favorecen la argumentación (Chepina Rumsey and Cynthia W. Langrall, 2016) permiten al estudiante generar</p>	Interaccional	In5: Criterios para diseñar tareas que favorezcan la producción de argumentos.		Conexiones

	hábitos discursivos para que expresen sus ideas de forma similar a la estructura de un argumento. Esto permite al profesor identificar los argumentos que están dando los estudiantes.				
39	Incorporar la argumentación y la demostración matemática permite a los estudiantes comprender la necesidad de la demostración para darle validez a las afirmaciones que hagan algunos compañeros o incluso las mismas afirmaciones que da el profesor. Es decir, eso permite que el profesor no sea la única persona que tiene la razón en el aula, sino que ellos por medio de la argumentación y la demostración, pueden refutar también las ideas que dan los profesores.	Ecológica	Ec2: Importancia de promover la argumentación en el contexto educativo.	Consecuencia	
47	Los problemas abiertos de conjeturación, favorecen la producción de argumentos y procesos afines (construcción, exploración, conjeturación), ya que esto da vía	Interaccional	In5: Criterios para diseñar tareas que favorezcan la producción de argumentos.		Conexiones

	libre a que surjan diversas construcciones, exploraciones, conjeturas y argumentos por parte de los estudiantes.				
48	<p>En los libros de texto escolares es común encontrar tareas que solicitan demostrar una proposición condicional. Estas tareas pueden ser reformuladas para propiciar que el estudiante desarrolle procesos de construcción, exploración, conjeturación y argumentación que le permita descubrir la relación condicional y construya la demostración utilizando un esquema de representación de una demostración. Una tarea de un libro de texto puede transformarse en un problema abierto de conjetura. Para ello, es necesario:</p> <p>1) Reformularla de tal forma que puedan tener diversidad de soluciones 2) Reformularla de tal forma que permita al estudiante explorar una</p>	Interaccional	In5: Criterios para diseñar tareas que favorezcan la producción de argumentos.		Posesión

	<p>situación; 3) Reformularla de tal forma que el enunciado no sugiera la respuesta.</p>				
50	<p>Dos estrategias para favorecer la producción de argumentos son: el uso de plantillas discursivas y la representación de una demostración a 3 columnas. Estas estrategias facilitan el seguimiento de la demostración y explicitan las partes de un argumento.</p>	Interaccional	<p>In5: Criterios para diseñar tareas que favorezcan la producción de argumentos.</p>		<p>Posesión</p>