LA DIFERENCIAL Y SU SIGNIFICADO EN FÍSICA: UNA MIRADA ALREDEDOR DE LEIBNIZ Y NEWTON.

Jeimy Lizeth Mancera Pachón

LÍNEA DE PROFUNDIZACIÓN: LA ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS DESDE UNA PERSPECTIVA CULTURAL.
GRUPO CAMPOS Y PARTÍCULAS.

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
BOGOTÁ D.C.
2013

LA DIFERENCIAL Y SU SIGNIFICADO EN FÍSICA: UNA MIRADA ALREDEDOR DE LEIBNIZ Y NEWTON.

Jeimy Lizeth Mancera Pachón

Trabajo de grado para optar al título de Licenciada en Física.

Asesor

Mauricio Rozo Clavijo

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
BOGOTÁ D.C.
2013

AGRADECIMIENTOS

Quiero inicialmente, darle gracia a Dios por orientar este camino dándome la fuerza y la sabiduría para lógralo.

A mis padres, quienes me apoyaron en toda la carrera, por medio de sus palabras, sacrificios, el amor y el ejemplo que hoy hacen que todo este proceso haya sido exitoso y un orgullo para ellos.

Al profesor Mauricio Rozo Clavijo, un mérito a la paciencia y a la buena labor, una persona dedicada y orgullosa de su profesión, un corazón gentil capaz de orientar con la mayor precisión y garante de los mejores resultados, un agradecimiento infinito.

A mis hermanos, el monito, Marthica y mis primos, por su cariño, fortaleza, compañía, complicidad y solidaridad ante los tropiezos de la vida, ante los momentos difíciles que me ayudaron a sobrellevar.

De igual manera quiero agradecerles a mis amigos por la confianza, el ánimo, la energía de cada día que me permitieron luchar y creer en lo que hoy se materializa.

Por ultimo quiero darles las gracias a aquellas personas que hoy no se encuentran vigentes en mi vida, pero que estuvieron presentes apoyando a la culminación de este proyecto.

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN-RAE

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	LA DIFERENCIAL Y SU SIGNIFICADO EN FÍSICA: UNA MIRADA ALREDEDOR DE LEIBNIZ Y NEWTON.
Autor(es)	Mancera Pachón, Jeimy Lizeth
Director	Rozo Clavijo, Mauricio
Publicación	Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional, 2013, 50 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional.
Palabras Claves	Calculo, diferencial, infinitesimal, fluxional, enseñanza de la Física, recontextualización de saberes, Newton y Leibniz.

2. Descripción
En la actualidad, los trabajos realizados en relación a la enseñanza de la física ponen de manifiesto la preocupación por mejorar la calidad en los procesos de aprendizaje-enseñanza de la misma, generando la necesidad de reflexionar y buscar metodologías que contribuyan a mejorar dichos procesos. Por esta razón este trabajo sugiere una nueva alternativa en la enseñanza de la física, particularmente en el uso del cálculo diferencial, recalcando la importancia, significado y utilidad que tiene en la física, por otro lado, se pretende dejar en claro a los estudiantes los aportes realizados por Leibniz y Newton al cálculo diferencial.

3. Fuentes
Para el desarrollo del trabajo las principales fuente bibliográficas fueron : [1] Ayala, M. (2005). Análisis histórico-crítico y la recontextualización de saberes científicos. Construyendo un nuevo espacio de posibilidades. Departamento de física pre impresos. [2] Colette, J (1993). Historia de las matemáticas volumen 2.siglo XXI España Editores. [3] Garzón, I. (1994). El desarrollo del concepto de integral y su relación con la física. Arquímedes a Riemann, Monografía Departamento de Física Universidad Pedagógica Nacional. [4] Grattan, I.(1984). Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica. Alianza Editorial. [5]Leibniz, G. (1987). Análisis infinitesimal. Madrid: Editorial Tecno, S.A.

[6] Newton, I. (1736). Method of fluxions and infinite series. London: Printed by Henry Wood fall.

[7] López, R. , Martínez, J. , Gras, A.(2005) Análisis de la utilización y comprensión del cálculo diferencial en la enseñanza de la física.

[8] López, R. , Martínez, J. , Gras, A. (2002). La diferencial no es un incremento infinitesimal. Evolución del concepto de diferencial y su clarificación en la enseñanza de la física. Enseñanza de las ciencias, 2002,20 ,271-283.

[9] López, R., Martínez, J., Gras, A.(1991) ¿Qué hacen y que entienden los estudiantes y profesores de física cuando usan expresiones diferenciales? (2005). Enseñanza de las ciencias, 2005,23(3) ,321-334.

4. Contenidos

El trabajo se encuentra estructurado en tres capítulos. El primero pone de manifiesto las dificultades que están presentes en la enseñanza de la Física en relación a la forma en que se está abordando el cálculo diferencial en el aula de clase y la correspondencia de este en la Física, además resalta la importancia de realizar estudios históricos, los cuales aportan argumentos de base que llevaron a desarrollar alguna teoría en particular y asimismo garantiza la compresión de las ideas propias de los autores.

En el segundo capítulo, se expone el estudio histórico que se llevó a cabo en relación al surgimiento del concepto de la diferencial y sus principales autores Leibniz y Newton. Se muestra las razones y la forma como se desarrolló el cálculo infinitesimal y el fluxional.

En el tercer capítulo, se realiza un análisis del concepto de la diferencial desde el punto de vista geométrico y físico desde los aporte realizado por Newton “calculo fluxional”. En este sentido, se realiza un análisis sobre el movimiento de un cuerpo inmerso en un campo gravitacional describiendo un movimiento semiparabólico, a partir de los aportes hechos por Newton, buscando mostrar la diferencial como un constituyente propio de la física y no como una herramienta que es utilizada para realizar cálculos generando así una manera más propicia para la enseñanza del cálculo diferencial.

5. Metodología

Para estudiar la relación de la diferencial y la Física, se realizó una revisión de los textos originales de Leibniz y Newton, con el objetivo de analizar el significado de la diferencial en la Física, basados en la metodología de recontextualización de saberes, para mostrar una forma alternativa de del cálculo diferencial en la enseñanza de la Física.

6. Conclusiones
• La importancia del análisis de los textos originales por parte de los docentes como herramienta para la enseñanza de la física, permite mostrar a los estudiantes las problemáticas que dieron origen de estas teorías (Ayala, M. 2006), proponiendo al estudiante reconocer cuales fueron los conceptos fundamentales y las motivaciones que tuvieron los pensadores dando la posibilidad de redireccionar dichos conceptos, teniendo en cuenta la necesidad de apoyarse en otro tipo de libros guías para el estudiante, que permiten mostrar al estudiante diferentes perspectivas de razonamiento demostrando así la evolución de este conocimiento. • Los análisis de escritos originales permite al docente elaborar una imagen del fenómeno, valorar los aportes de los autores en cuestión y generar estrategias para abordar en el aula una teoría, fenómeno o concepto. Además permite al estudiante generar formas de ver esquemas de organización, razones para privilegiar determinadas concepciones, elementos para reconsiderar errores o situaciones para analizar y elementos sobre procesos de la formalización matemática. • Se ha mostrado el concepto de diferencial como una estimación lineal del incremento de una magnitud Física, cuya pendiente coincide con la derivada, resulta adecuado para entender y dar sentido físico a las expresiones diferenciales, y al uso del cálculo en general. • Sus creadores (Leibniz y Newton) consideraron a dx y dy como pequeñas variaciones en las variables x y y, y a la derivada de y con respecto a x, como la razón que existe entre dy y dx cuando dy y dx se hacen muy pequeños. • Cuando los valores de Δx y Δy son muy pequeños en comparación a las variables x y y su relación de cambio es aproximadamente igual a la recta pendiente, y si Δx y Δy los dividimos en n intervalos se puede hacer la aproximación: $\Delta x/\Delta y=dx/dy$ sin cometer error alguno, dy sería la diferencial o incremento diferencial de y. • Una forma alternativa para mostrar el cálculo diferencial, es que el docente realice un estudio sobre los originales para generar un proceso de recontextualización de saberes con los estudiantes, ayudándose de los textos guías y los aportes que pudo deducir de su estudio histórico, y por otro lado mostrar ambas concepciones, la de Newton como la de Leibniz.

Elaborado por:	Mancera Pachón, Jeimy Lizeth
Revisado por:	Rozo Clavijo, Mauricio

Fecha de elaboración del Resumen:	05	12	2013

TABLA DE CONTENIDO

TABLA DE FIGURAS

.

TABLAS

TABLA DE GRÁFICAS

INTRODUCCIÓN

CONTEXTO PROBLEMÁTICO

En la actualidad, los trabajos realizados en relación a la enseñanza de la física ponen de manifiesto la preocupación por mejorar la calidad en los procesos de aprendizaje-enseñanza de la misma, generando la necesidad de reflexionar y buscar metodologías que contribuyan a mejorar dichos procesos. Por esta razón este trabajo sugiere una nueva alternativa en la enseñanza de la física, particularmente en el uso del cálculo diferencial, recalcando la importancia, significado y utilidad que tiene en la física, dejando en claro a los estudiantes los aportes realizados por Leibniz y Newton al surgimiento del cálculo diferencial.

Teniendo en cuenta lo anterior es importante señalar cuales son las dificultades frecuentes en la aprensión y el uso del cálculo diferencial, ya que este puede generar grandes dificultades en los estudiantes debido a la manera de abordar los diferentes tópicos planteados en el aula de clase. Es así que el uso del cálculo en lugar de constituir una ayuda para el estudiante en la comprensión de la Física, resulta ser un obstáculo y fuente de rechazo para éstos. Por otro lado, el tratamiento algorítmico dado a los estudiantes no es inteligible para éstos, ya que usualmente se plantea la mirada dada por Leibniz convirtiendo el proceso de enseñanza-aprendizaje en algo netamente matemático sin permitir relacionar los componentes de la Física inmersos en los fenómenos estudiados.

En el trabajo se propone realizar una exploración en torno a los trabajos realizados por Leibniz y Newton sobre la diferencial con el objeto de clarificar, dar significado y a la vez mostrar el papel que juega en la Física. La mirada fluxional de Newton será implementada con el fin de mostrar que el cálculo diferencial puede ser considerado como parte constitutivo de la física, y de esta manera poder describir los fenómenos mecánicos del mundo físico.

El trabajo se encuentra estructurado en tres capítulos. El primero pone de manifiesto las dificultades que están presentes en la enseñanza de la Física en relación a la forma en que se está abordando el cálculo diferencial en el aula de clase y la correspondencia de éste en la Física, además se resalta la importancia de realizar estudios históricos que permiten evidenciar las problemáticas que los diferentes autores tenían en épocas pasadas, con el fin de recontextualizarlos y ponerlos en términos actuales permitiendo realizar una nueva mirada alrededor de ellos.

En el segundo capítulo, se expone el estudio histórico que se llevó a cabo en relación al surgimiento del concepto de la diferencial en torno a sus principales autores Leibniz y Newton. En este sentido, se muestra la forma como se desarrolló el cálculo infinitesimal y el fluxional.

En el tercer capítulo, se realiza un análisis del concepto de la diferencial desde el punto de vista geométrico y físico desde el aporte realizado por Newton "calculo fluxional". En este sentido, se realiza un análisis sobre el movimiento de un cuerpo inmerso en un campo gravitacional describiendo una trayectoria semiparabólica a partir de los aportes hechos por Newton, buscando además mostrar la diferencial como un constituyente propio de la física y no como una herramienta que es utilizada para realizar cálculos generando así una manera más propicia para la enseñanza del cálculo diferencial.

PLANTEAMIENTIO DEL PROBLEMA

El concepto de la diferencial en el proceso de aprendizaje-enseñanza de la física se introduce en el último grado de bachillerato y continúa en los cursos introductorios de física a nivel universitario. Este concepto es mirado, en general por los estudiantes, como un instrumento para realizar cálculos sin tener sentido ni significado. Dada esta problemática, se plantea generar una postura diferente, donde la relación entre la física y la física ni sea un formalismo puramente algorítmico, sino por el contrario mirar el cálculo diferencial como un constituyente propio de la física, es decir, concebir los objetos propios del calculo y de la física sin una jerarquía conceptual, lo cual permite dar cuenta de la situaciones físicas planteadas con una mirada diferente. De esta forma, se plantea una propuesta en relación al uso del cálculo diferencial en los cursos introductorios de física con sentido y significado, preocupados en los razonamientos e interpretación de la diferencial dentro del contexto de la física.

PREGUNTA PROBLEMA

¿Cuál es el significado y el papel que juega la diferencial en la física?

OBJETIVO GENERAL

Realizar una exploración del concepto de la diferencial alrededor de los aporte de Newton y Leibniz, buscando alternativas en el proceso de enseñanza-aprendizaje en la física.

OBJETIVOS ESPECIFICOS

- Mostrar la construcción geométrica del concepto de la diferencial a partir de los trabajos hechos por Leibniz y Newton.

- Análisis del fenómeno físico del movimiento de un cuerpo que describiendo una curva semiparabólica, el cual permita dar sentido y significado al concepto de la diferencial.

CAPITULO 1: RECONTEXTUALIZACIÓN DE SABERES COMO ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LA FÍSICA.

En las tres últimas décadas, las investigaciones realizadas sobre la enseñanza de las ciencias por el grupo física y cultura (Ayala, M. 2006), evidencian como el docente tendrá que afrontar una variedad de situaciones en el aula de naturaleza distinta, en relación a como es el proceso de aprendizaje en los estudiantes deduciendo que esto puede devenir de dos aspectos: el primero por la dificultad de aprendizaje de los mismos, ya sea por actitud y/o aptitud de ellos, y el segundo a causa de la forma en la que se está enseñando áreas relacionadas con las ciencias forjando así una concepción de ciencia errónea en los estudiantes considerándola como difícil, incomprensible y carente de significado para su vida.

Por esta razón surge la necesidad de buscar una educación en ciencias que involucre organizar el conocimiento de tal manera que para el estudiante tenga significado y sentido, observando la ciencia y en específico la física como una acción de elaboración del conocimiento, que surge de la necesidad de explicar los acontecimientos del mundo físico. Al conseguir esta imagen de producción de conocimiento, se procura que los estudiantes caractericen el mundo en que viven a través de explicaciones y razonamientos a sucesos y hechos de la naturaleza que resulten ser importantes y significativos para ellos, sin enfocarse o encasillarse en las teorías físicas, por el contrario, orientándolo a una explicación plausible de los fenómenos mismos que están observando.

Por consiguiente, se plantea la importancia de percibir la ciencia como un proceso y acción, donde el estudiante genere su propio conocimiento a partir de los fenómenos observados en la naturaleza, teniendo en cuenta que el conocimiento adquirido no sea a través de la memorización si no por lo contrario, el conocimiento sea significativo y relevante para el estudiante.

Ahora, **¿Qué estrategia se debe utilizar para generar un conocimiento más sastifactorio en los estudiantes?**, y a partir de ésta obtener una mirada más reflexiva hacia los fenómenos de la naturaleza. Para esto se debe buscar elementos que permitan a los estudiantes generar una actitud reflexiva y critica frente a las teorías que explican el mundo físico en el que vivimos, generando así recursos para los docentes formados en ciencias. Para encontrar dichos elementos se recurre a un proceso de recontextualización como un instrumento para la construcción de conocimiento, por parte del docente y de los estudiantes, el cual consiste en redireccionar, reorientar y organizar el proceso de aprendizaje-enseñanza por parte del estudiante como del docente, permitiendo así la estructuración de los conceptos, la elaboración de nuevos paradigmas explicativos y plausibles para el estudiante a partir de la reflexión y motivación del investigador.

Teniendo en cuenta lo anterior, la enseñanza de las ciencias y en particular la enseñanza de la física es vista como un procedimiento y una acción donde las teorías científicas adquieren un significado dependiendo del contexto en el que se esté desarrollando; es decir, "conocer los problemas que han posibilitado la formación y el desarrollo de los conceptos de la física, las condiciones en que tales problemas se plantean, las respuestas y las formas de abordar los conceptos, los elementos comunes y las diferencias básicas entre las diferentes teorías" (Ayala, M. 2006), permite a los docentes y estudiantes desarrollar e interiorizar una nueva mirada acerca de las teorías de la física, de tal forma, que se considere la enseñanza de la física como una actividad enérgica, nutriéndose en sí misma y a su vez en un proceso de evolución, otorgándole a los estudiantes y docentes la generación del conocimiento a partir de la experiencia sensible de los fenómenos que suceden en la naturaleza, y de esta forma es como debe ser mostrada a los estudiantes para así ir aproximando a la actividad científica.

La recontextualización de saberes permite al docente generar nuevos significados y correspondencias en los procesos de enseñanza, permitiendo así la apropiación de una problemática de estudio, reorganizándola a partir de su propio conocimiento que evoluciona a partir de su experiencia común, generando nuevas definiciones de ésta, que a su vez se pueden ser mostrada en formas alternas a los estudiantes (Ayala, M. 2006). Por lo tanto, es necesario iniciar con la indagación de los textos originales de los pensadores, estableciendo así una relación dialógica con los autores a través del estudio de sus escritos originales, resaltando que no sólo es importante hallar el significado, argumentos, problemáticas de estudio por parte del autor, si no por lo contrario permite construir nuevas formas de simbolizar el conocimiento, generando así nuevas alternativa y herramientas en el proceso de aprendizaje-enseñanza por parte de los estudiantes, propiciando así en el docente que su labor no sea pensar cual o cuales deben ser los conceptos que se deben transmitir a los estudiantes, si no por el contrario su trabajo debe estar enfocado alrededor de las ideas que los estudiantes explicitan y con ellas ir reconstruyendo, reorganizando una explicación a los fenómenos de la naturaleza observados.

Concluyendo así la importancia del estudio de textos originales por parte de los docentes como herramienta para la enseñanza de la física, ya que permite mostrar a los estudiantes las problemáticas que permitieron el origen de estas teorías (Ayala, M. 2006), proponiendo al estudiante reconocer cuales fueron los conceptos fundamentales y las motivaciones que tuvieron los pensadores dando la posibilidad de redireccionar dichos conceptos, teniendo en cuenta la necesidad de apoyarse en otro tipo de libros guías para el estudiante, que permiten mostrar al estudiante diferentes perspectivas de razonamiento demostrando así la evolución de este conocimiento, permitiendo la reorganización de los contenidos, aportando nuevas perspectivas alrededor de los conceptos, asumiendo que el conocimiento no es absoluto, si no por el contrario, da opciones para la enseñanza de la física planteando problemas y formas de explicar los fenómenos acercando a los estudiantes al surgimiento de las teorías y el desarrollo de las mismas, que lamentablemente no se evidencia en los textos usuales utilizados para la enseñanza de la física.

1.1 EL CASO DE LA DIFERENCIAL EN LA FÍSICA.

Los fundamentos del cálculo diferencial datan de la época de los griegos (Apóstol,1961, p. 6), pero su invención definitiva remonta a los siglos XVI y XVII, por la necesidad de solucionar algunas dificultades matemáticas, como (López, 1991) :la construcción de la tangente a una curva en un punto dado, los máximos y mínimos de una curva y las cuadraturas, es decir, la medida o el área que encierra una curva, si es cerrada, o el trozo del plano que origina con las intersecciones con otra curva dada. Todas estas dificultades matemáticas pueden considerarse problemas relacionados con el movimiento en su sentido más amplio, con la necesidad de encontrar relaciones entre distintas magnitudes (López, 1991). Por esta razón no es raro afirmar que el cálculo diferencial haya sido estimado como “el instrumento teórico más poderoso que se ha construido jamás por los seres humanos a lo largo de su historia” (Rossi, 1997, p. 199).

Si el cálculo diferencial ha sido tan importante para el progreso científico, y en particular para la Física, resulta lógico que también fuera imprescindible a partir del último grado de bachillerato y en especial en los tópicos de Física a nivel universitario.

La importancia del cálculo diferencial para la Física y su enseñanza, contrasta con las conclusiones de diferentes trabajos realizados (Universidad de Alicante, España, departamento de física aplicada, departamento de didáctica general y didácticas especificas) (López, 1991,2002 y2005) en el ámbito de la enseñanza de la física, en los cuales se expone la existencia de dificultades en los estudiantes e incluso entre los docentes, en relación con los conceptos básicos del cálculo diferencial (López, 1991) y más específico con el concepto de la diferencial. Estas dificultades se evidencian en que los estudiantes no saben el por qué y el para qué hacen uso de la diferencial. Debido a estas circunstancias, resulta importante que el uso del cálculo diferencial en general, en vez de ser una ayuda para la física se constituye como un obstáculo para los estudiantes, convirtiéndose en fuente de rechazo hacia la misma.

Trabajos hechos por el departamento de Física y en especial por el grupo Física y Cultura de la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia, como los realizados por la profesora María Mercedes Ayala en relación a la recontextualización de saberes hacen responsable a estas dificultades a una enseñanza inadecuada, que por lo general está enmarcada en un carácter algorítmico, que se dedica exclusivamente en el manejo y dominio de reglas matemáticas para la solución de ejercicios, sin llegar a profundizar y analizar realmente el fenómeno físico que se está estudiando (Ayala, 2006)(López, 1991).

En la mayoría de los casos se cree que el gran conflicto en la enseñanza de la Física está en la comprensión inadecuada que generan los estudiantes de los conceptos, puesto que no les permite solucionar correctamente los ejercicios propuestos en clase y dar cuenta de los fenómenos físicos que explica la teoría; esto puede ser producido por el excesivo uso de la formalización matemática que se hace en la enseñanza de la Física, esto puede conllevar a que el estudiante confunda la comprensión de conceptos físicos con la manipulación o agilidad matemática que se adquiere al solucionar ejercicios y se deja de lado el análisis y la lógica conceptual de los fenómenos físicos (Ayala, 2006) (López, 1991).

En la enseñanza de la Física se debe generar condiciones que permitan a los estudiantes la construcción de representaciones física del mundo y de esta forma posibilitar un enriquecimiento de la visión del mundo. Una forma de generar este tipo de visiones es a través del estudio de los textos originales de los principales personajes (Leibniz y Newton) por parte de los docentes, que hicieron grandes aportes a las teorías físicas, permitiendo así llevar a los estudiantes a un proceso de reorganización y orientación de su conocimiento. Es así que la intención de este tipo de estudio es establecer un dialogo con los autores a través de sus escritos originales y hacerse participe de cómo suscito la problemática, generando así una herramienta para que los estudiantes comprendan que el conocimiento científico no solo lo generan los benefactores "genios" de la ciencia, sino las persona comprometidas en la construcción de conocimiento a partir del estudio de una teoría.

Por consiguiente se plantea una posible organización de cómo se debe llevar a cabo este tipo de estudio para obtener la recontextualización de saberes en los estudiantes, para empezar se debe hacer la identificación del problema que dio origen a la motivación, respondiendo de una forma sencilla y clara a las preguntas que suelen hacer los estudiantes sobre el origen y fundamentación de los principios básicos de las teorías físicas, finalmente el estudiante crea un nuevo paradigma acerca del fenómeno de la naturaleza a estudio, a partir de la reorientación y comparación de la ideas que se tenían antes con las nuevas que se generaron a partir del estudio anteriormente hecho.

Este tipo de estudios se hacen con una intencionalidad pedagógica, que es enfatizar en el proceso de aprendizaje de la Física como tal, aportando elementos de carácter histórico-epistemológico, a través del ámbito didáctico, es decir, la recontextualización de saberes tiene dos momentos importantes, primero, la configuración del problema, para así organizar las actividades que se llevaran al aula y las bases conceptuales necesarias para esto; segundo, generar condiciones para que los estudiantes organicen y enriquezcan su experiencia alrededor del fenómeno en dirección a la propuesta inicial, la cual se realiza en dos fases, la primera es el diseño de las actividades didácticas y el segundo es el trabajo en el aula donde se desarrollan las actividades planteadas y se van realizando un proceso de ajuste de acuerdo a las especificaciones y necesidades del grupo.

Como conclusión podemos decir que los análisis de escritos originales permite al docente elaborar una imagen del fenómeno, valorar los aportes de los autores en cuestión y generar estrategias para abordar en el aula una teoría, fenómeno o concepto, debido a esto se le permite al estudiante generar formas de ver esquemas de organización, razones para privilegiar determinadas concepciones, elementos para reconsiderar errores o situaciones para analizar y elementos sobre procesos de la formalización,matemática.

CAPITULO 2: LA DIFERENCIAL DE LEIBNIZ Y NEWTON.

2.1. CONTEXTO PROBLEMÁTICO

Durante el siglo XVI y XVII el proceso de desarrollo y profesionalización de las matemáticas condujo a un incremento de pensadores e investigadores en el tema y a su vez de publicaciones; los cuales buscaban mostrar los contenidos de una manera breve y sencilla, sin llegar a quitarle algún tipo de rigurosidad a la temática de estudio; con el tiempo la forma que adoptaron los autores para presentar la matemática, fue a través de libros de estudio, los cuales son mostrados en una forma completa y perfecta, la cual permitió la ventaja de poder "acumular una gran cantidad de conceptos" (Grattan, I.1984), pero a la vez tenía la gran dificultad de convertir los textos en grandes y extensos para los estudiantes, generando así en ellos una desmotivación para leerlos y estudiarlos, lo que conllevo a producir dificultades para ser comprendidos los temas de estudio y así mismo poder relacionarlos o aplicarlos a los fenómenos físicos en general (Grattan, I.1984).

El proceso de evolución que presentó las matemáticas en el siglo XVI y XVII, dio origen a la problemática de poder representar todo el mundo físico en el que vivimos, siendo esto posible a través de las mismas, lo cual no fue tan sencillo de obtener con los procesos matemáticos que existían en la época, esto llego a ser viable gracias a los aportes de grandes pensadores, pero principalmente por los aportes de Leibniz y Newton acerca de la diferenciación e integración.

Los primeros escritos en los que se encontraron evidencias de trabajos relacionados con la diferenciación e integración, fueron los hechos por Descartes con su método para determinar la normal a una curva, el método de Roverbal para las tangentes, el método de máximos y mínimos de Fermat, el método de exhaución de Cavalieri, el método de integración aritmética de Wallis, (Grattan, I.1984) donde estos métodos funcionaban o estaban expuestos para casos particulares, lo cuales no podían ser generalizados, es decir, no podían ser aplicados a una situación diferente que no fuera la planteada por el autor.

Posteriormente Leibniz y Newton tuvieron la genialidad de desarrollar el cálculo infinitesimal y el cálculo fluxional respectivamente, creando un método general que podía ser aplicado a cualquier situación. Después de circular varios escritos sobre el cálculo infinitesimal y el cálculo fluxional, se produjo el interés por perfeccionar dichos escritos, en donde algunos pensadores como: *Jakob Bernoulli*[1], *Johann Bernoulli*[2], *Guillaume Francois*[3] y por ultimo *Leonhard Euler*[4] (Grattan, I.1984) hicieron mejoras al cálculo infinitesimal de Leibniz con el fin de dar más claridad de los temas expuestos en ellos. Por otro lado, las obras de Newton tardaron mucho tiempo en ser publicadas; los "*Principia"* fue el primer documento en donde muestra al mundo científico el método de las fluxiones, pero este no era lo suficientemente claro para explicarlo, hasta que posteriormente Newton toma la decisión de publicar: "*Themethod of fluxions and infinite series* (1736)" en el cual se ve más explícito el cálculo fluxional permitiendo así dar más claridad sobre este método.

A finales del siglo XVIII habían circulado una gran cantidad de documentos del cálculo de Leibniz y también de Newton, permitiendo así, que la comunidad científica evidenciaran la creación de nuevos métodos de estudio en el campo de las matemáticas, generando grandes conflictos en relación a quien había creado primero el cálculo infinitesimal; después de mucho tiempo y de estudios históricos se llegó a la conclusión que Leibniz había creado su cálculo posteriormente al hecho por Newton e independientemente de él, pero Leibniz lo público antes que Newton (Grattan, L.1980).

En 1710 circulaban varios artículos de Newton sobre el cálculo de fluxiones, el cual empezó a ser utilizado por otros matemáticos. El desarrollo posterior al cálculo de Newton se vio restringido en Gran Bretaña debido a la falta de matemáticos que tuvieran la habilidad para entenderlo y desarrollarlo completamente, en consecuencia a esto, el cálculo fluxional de Newton (Grattan, L.1984) no concurrió en la comunidad académica, y por esta razón no llego a ser tan utilizado por los grandes pensadores como si lo fue el cálculo infinitesimal desarrollado por Leibniz.

En los inicios de Leibniz como matemático, sus trabajos no son muy reconocidos, ya que él no pertenecía a una comunidad académica la cual certifique sus aportes y lo acredite como un pensador académico, su reconocimiento solo empezó a ser posible, hasta que años más tarde los hermanos Bernoulli empezaron a estudiar los trabajos hechos por él y a tener un dialogo frecuente a través de la correspondencia con el mismo Leibniz, con el fin de dar un desarrollo más amplio y profundo a su teoría del análisis infinitesimal (Grattan, I. 1984); es así como tiempo después se publicaron los avances del trabajo realizado por Leibniz y los aportes hechos por los hermanos Bernoulli en la revista *Acta Eruditorum*, a los cuales posteriormente se le uniría el trabajo hecho por L·Hopital y otros pensadores más al estudio del cálculo.

El cálculo de Leibniz, a pesar del trabajo de muchos otros personajes era todavía un poco independiente y en ocasiones podía llegar a ser particular, hasta que llego Leonhard Euler en 1748 quien fue el que organizo de una forma más general, razonable y comprensible el cálculo infinitesimal y que conllevo a que tomara el nombre de cálculo diferencial, además fue una figura importante en las matemáticas de Europa en el siglo XVIII.

Teniendo en cuenta todo lo dicho anteriormente es importante apreciar que el inventor de cálculo diferencial es Newton con su cálculo fluxional, pero de una manera independiente a Newton, Leibniz creó su cálculo infinitesimal, el cual llegó a ser más utilizado por la comunidad que el de Newton; ya que en el siglo XVII existían una variedad de aspectos a tener en cuenta en el momento de validar una teoría, como por ejemplo el lugar de origen y la sociedad académica a cual pertenecía el autor. Si hacemos referencia a Newton el cual pertenecía a la Royal Society y además de ser británico, su trabajo tuvo más relevancia que el producido por Leibniz ya que él siendo alemán no pertenecía a una sociedad académica reconocida que validara su trabajo.

2.2. LA DIFERENCIAL DE LEIBNIZ

A finales del siglo XVII la matemática empieza a desarrollar un proseso en el cual se nutre de sí misma, permitiendo así solucionar situaciones “reales”, es decir proporciono la posibilidad de representar fenómenos naturales a través de la matemática, dando así origen al estudio de la Física, mediante experimentos mentales llevándolos a la aplicabilidad.

El método utilizado en esta época para hacer dichas descripciones físicas, era realizado a través de la geometría Euclidea, siendo usada como la base para conceptualización y así mismo poder plantear un formalismo matemático en las representaciones de los fenómenos físicos. Para esto los matemáticos de la época buscaban métodos racionales, que permitieran un simbolismo adecuado y general para explicar los fenómenos físicos; los cuales conllevaron a generar nuevos conceptos como el de un punto en el infinito, la noción de transformación continua, el análisis y la existencia de indivisibles o infinitésimos, etc., lo cual genero la idea de diferencial (López, 1991).

En la búsqueda de un método que permitiera la representación de los fenómenos del mundo físico apareció el término análisis el cual hace referencia al estudio de los fenómenos físicos, inicialmente se le otorgo el adjetivo de “espacioso”, al evolucionar y al pasar el tiempo pudo ser generalizado, adquiriendo el nombre de “análisis infinitesimal”.

2.2.1. LOS DOS ANÁLISIS

2.2.1.1. ANÁLISIS ESPACIOSO

El análisis espacioso creado por Viète en 1591 consistía en un cálculo basado en símbolos que representaban magnitudes cualesquiera, bien sean geométricas o aritméticas; esto se enlazaba con la resolución de ecuaciones de primer, segundo, tercer y cuarto grado, quedando por resolver las de quinto grado.

Otro representante de este tipo de análisis fue Descartes con su obra *La Geometría,* en donde sistematiza el empleo de los signos y designa las últimas letras del abecedario para las incógnitas y las primeras para los coeficientes; también identifica las curvas que permiten hacer una representación del movimiento de un cuerpo en el mundo físico, a través de sus ecuaciones respectivas, permitiéndole clasificar estas curvas en dos grandes grupos:

- Geométricas: son las que pueden ser representadas a través de una expresión algebraica, por ejemplo las hipérbolas, elipses, parábolas entre otras, también conocidas como cónicas.

- Mecánicas: son curvas que no podían ser representadas a través de una ecuación algebraica, por ejemplo la cicloide, la ruleta y otras, que en la actualidad se conocen como funciones trigonométricas y logarítmicas.

Descartes se sentía orgulloso pensando que los planteamientos algebraicos eran la solución y la clave de todos los problemas geométricos y matemáticos. Lo cual implicaba que los problemas que se clasificaban como geométricos eran los que únicamente se podían resolver a través de medios algebraicos, es decir, al empezar el estudio de todos los fenómenos que ocurrían en la naturaleza e intentar representarlos utilizando términos matemáticos (Grattan, L. 1984), se dio cuenta que no todos podían ser representados de esta forma dejando a un lado aquellos que no podían ser planteados algebraicamente, como lo era la cicloide, convirtiéndose este en un problema mecánico y no en uno geométrico, generando así la necesidad de buscar otro método, uno que tuviera un sentido más amplio y general, permitiendo así representar en términos algebraica los fenómenos físico en general, tanto los que en su movimiento describen curvas geométricas o mecánicas sin importar su naturaleza, este nuevo método adquirió el nombre de análisis infinitesimal.

2.2.1.2. ANÁLISIS INFINITESIMAL

En el análisis infinitesimal es donde se encuentra auténticamente el proceso de analizar o diseccionar un todo en sus partes y luego recomponer el todo a partir de esas partes adquiriendo un carácter ontológico, es decir, un todo puede ser dividido en infinitas partes como se quiera siempre y cuando se sigan las mismas reglas para cada una de las partes. Por esta razón, se le atribuyó el nombre de análisis y el adjetivo de infinitesimal (Grattan, I. 1984). En el proceso de evolución del análisis infinitesimal tres pasos de vital importancia en el surgimiento del concepto de la diferencial: el primero es la introducción del análisis infinitesimal de Leibniz dentro del análisis cartesiano, el cual fue caracterizado como el estudio del significado de las curvas a través de técnicas algebraicas; el segundo proceso ocurre aproximadamente en la mitad del siglo XVIII, con la separación del análisis infinitesimal de la geometría. El análisis infinitesimal se convierte en la herramienta para el estudio de las curvas, desarrollando el análisis como una rama separada de la matemática. El objeto de estudio ya no es la relación entre cantidades geométricas relacionadas con la curva, sino la relación entre cantidades en general expresadas como ecuaciones a través de letras y números lo cual fundamenta la formalización, y por último el tercer proceso es la sustitución del concepto de la diferencial por el de la derivada como concepto fundamental del análisis infinitesimal. En este trabajo solo se estudiara y analizara los dos primeros procesos ya que el objeto de estudio es el concepto de la diferencial no el de la derivada que es el que se desarrolla en el tercer proceso.

2.2.2. INTRODUCCIÓN DEL ANÁLISIS INFINITESIMAL DE LEIBNIZ DENTRO DEL ANÁLISIS CARTESIANO

El análisis infinitesimal es un cuerpo de herramientas analíticas para el estudio de los objetos geométricos, el cual muestra la relación entre varias variables definidas con respecto a un punto de la curva. La relación entre estas variables se expresan por medio de ecuaciones algebraicas, es decir la representación de la relación entre la ordenada y la abscisa, teniendo en claro que en este proceso estas variables no eran funciones, ya que no siempre indicaban o implicaban la dependencia de una con la otra.

Las variables en el análisis geométrico hacen referencia a cantidades geométricas que no eran números reales, es decir eran cantidades exactas, puntuales, las cuales se consideraban en una sola dimensión, bien sea lineal (ordenada, línea de arco, subtangente, etc.) de área (área entre la curva y el eje) o de un sólido (solidos de revolución). Desde un punto de vista geométrico existen otro tipo de variables con dimensionalidad de naturaleza distinta como lo era la velocidad, la masa, la fuerza, etc.

Generando así que el análisis infinitesimal se convirtiera en la segunda gran obra de los matemáticos de siglo XVII, al proponer soluciones a los obstáculos que no permitían representar en forma general el mundo físico, los cuales fueron el objeto de estudio del análisis infinitesimal durante la primera mitad del siglo:

- Construir la tangente o la normal a una curva por un punto dado.
- Hallar los máximos y mínimos de una curva.
- Calcular cuadraturas, es decir, la medida o el área que encierra un curva, si es cerrada, o el trozo del plano que origina con las intersecciones con otra curva dada.

2.2.3. UNA PROBLEMÁTICA: LA CICLOIDE

Posteriormente a estos tres problemas se les agregaría, el reto lanzado por el anti cartesiano Pascal en 1658 (cuadrar la cicloide y hallar tanto su centro de gravedad como el de cualquier arco de cicloide), un ejemplo de la cuadratura de la cicloide fue el realizado por Roverbal en 1693 el cual fue denominado como: cuadratura de la cicloide**.** En 1630, Mersenne (Colette, J 1993) propuso a sus amigos matemáticos hacer la cuadratura de la cicloide, la cual es la curva que describe un punto de una circunferencia que rueda sin deslizarse.

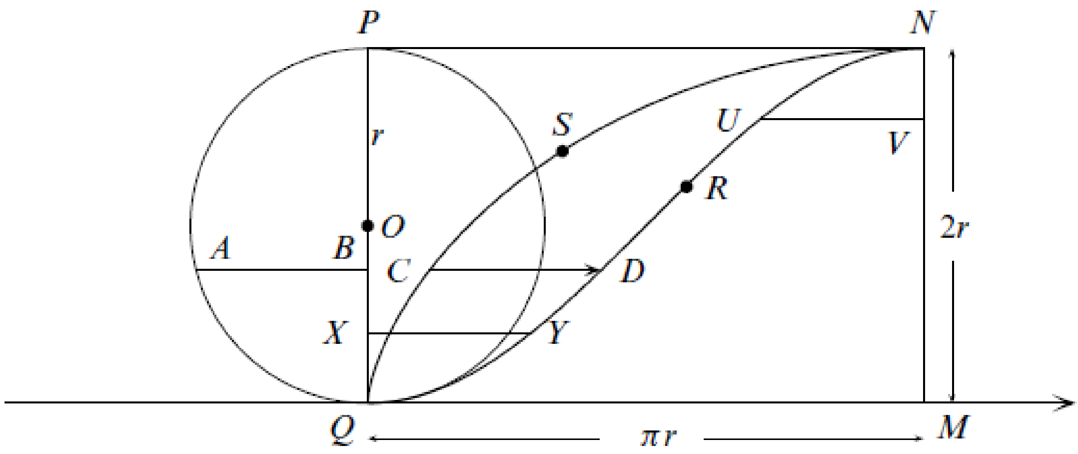


Figura 1. Cuadratura de la cicloide

En la figura 1, sea $QMNS$ la mitad de un arco de la cicloide generada por el circulo de radio r centrado en O. El área del rectángulo $QMNP$ es el doble del área del círculo, ya que:

$$\acute{A}rea\ del\ circulo = \pi r^2$$

$$\acute{A}rea\ del\ rectangulo = (\pi r)(2r) = 2\,\pi r^2$$

Por lo tanto se puede afirmar lo anteriormente dicho:

$$\pi r^2 = 2\pi r^2$$

Continuando son construidos segmentos de línea infinitesimales horizontalesAB con longitud determinada por la distancia horizontal entre el diámetro PQ y la circunferencia. Cada punto C de la cicloide lo sometemos a una translación horizontal hasta el punto D, según el correspondiente segmento $AB = CD$, y asi obtenemos la curva QRN.

Por la construcción realizada, las secciones horizontales del semicírculo y de la región comprendida entre la cicloide y su curva compañera son segmentos de igual longitud, por lo que dicha región tiene el área igual a la mitad del círculo. Por otra parte, la curva compañera de la cicloide divide en dos partes iguales al rectángulo $QMNP$, pues, como Roverbal demostró (Colette, J 1993), las secciones horizontales de altura a y $2r - a$ da en cada una de las partes en que dicha curva divide el rectángulo, segmentos iguales XY y UV.

Deducimos así que el área encerrada por la mitad de un arco de cicloide es $\pi r^2 + \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{3}{2}\pi r^2$. Por tanto, concluimos que el área encerrada por un arco de la cicloide es tres medios el área del círculo que la genera.

En cuanto al problema de las cuadraturas hacia mediados del siglo XVII se ha solucionado de una forma particular, clasificando las cuadraturas en dos grandes tipos: las cuadraturas de parábolas, que corresponden a la expresión $y^p a^m = b^p x^m$ y la de hipérbolas $y^p x^m = a^p b^m$. La mayoría de los métodos empleados en la cuadratura de curvas se centra, en combinar el razonamiento geométrico sintético con el análisis de indivisibles, como algunos matemáticos los mostraron en sus métodos (Pascal y Leibniz), con el razonamiento combinatorio y aritmético (Leibniz, 1684). Estos métodos se centran básicamente en:

- Suma de indivisibles (descomponer el área bajo la curva en pequeños trozos, es decir, elementos infinitamente pequeños que al volverlos a sumar van a representar dicha área).

Al solucionar el problema de las cuadraturas a partir del método de la suma de indivisibles, es decir la suma de pequeños trozos, surgió la necesidad de realizar un estudio sobre sucesiones numéricas, a lo que llamaron la combinatoria, ya que estas variable geométricas tenían un carácter discreto no continuo, es decir, el paso de una a la otra iba a saltos, por ejemplo entre el 1 y 2 no existía nada.

2.2.4. LEIBNIZ: LA COMBINATORIA

Para conseguir el paso de lo discreto a lo continuo Leibniz considero importante el estudio sobre sucesiones numéricas y sucesiones de diferencias porque a partir de ellas pudo ser explica la idea de que un todo puede dividirse en muchas partes y al volverlas a sumar esas partes vuelve a reconstruir el todo, dada una sucesión:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n,$$

calculando sus primeras diferencias

$$b_1 = a_2 - a_1, b_2 = a_3 - a_2, b_3 = a_4 - a_3, \dots, b_{n-1} = a_n - a_{n-1},$$

observando la suma de estas primeras diferencias

$$a_2 - a_1 + a_3 - a_2 + a_4 - a_3 + a_n - a_{n-1} = a_n - a_{n-1}$$

$$b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} = a_n - a_1.$$

Leibniz al darse cuenta de la relación anterior que indica que las sucesiones de diferencias pueden sumarse fácilmente, y que el proceso de formar la sucesión de diferencias y después sumarlas recupera la sucesión inicial, es decir, que se trata de operaciones inversas una de la otra. Esta sencilla idea, cuando se lleva al área de la geometría, conduce al concepto central del cálculo de Leibniz que es el de los infinitesimales que conlleva al concepto de la "diferencial" [Leibniz, G. 1684].

Otro ejemplo que Leibniz analizó fue el siguiente:

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15} \dots.$$

Donde los denominadores son los números triangulares (son aquellos que se pueden recomponer en la forma de un triángulo equilátero), los cuales pueden ser expresados a partir de la siguiente sucesión, desde cuando $n = 1$ hasta $n = \infty$.

$$\frac{2}{n(n+1)}$$

Cabe observa la siguiente relación

$$\frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1} = \frac{2n+2-2n}{n^2+n} = \frac{2}{n^2+n} = \frac{2}{n(n+1)}$$

Así cada termino se descompone en la diferencia de dos sumandos, con lo cual, la suma de la sucesión será, al descomponer cada sumando de la sucesión en la diferencia correspondiente al anterior y así llegar a la sucesión inicial, llegando a la misma conclusión mencionada anteriormente.

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \cdots + \frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}$$

Si la sucesión posee infinitos términos, la suma se puede aproximar a 2.

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \cdots + \frac{2}{n(n+1)} \approx 2$$

Esta idea de descomposición de sucesiones a partir de diferencias y luego sumarlas para llegar a sucesión inicial, condujo a Leibniz a la simetría del triángulo aritmético de Pascal (Figura 2), en el cual, las filas está formada por las diferencia sucesivas de la fila anterior (Leibniz, G. 1684), de tal manera que si se suman los infinitos términos de una fila se obtiene el termino superior.

$$
\begin{array}{c}
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 1 \\
1 \\
\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \\
\frac{1}{3} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{3} \\
\frac{1}{4} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{4} \\
\frac{1}{5} \quad \frac{1}{20} \quad \frac{1}{30} \quad \frac{1}{20} \quad \frac{1}{5} \\
\frac{1}{6} \quad \frac{1}{30} \quad \frac{1}{60} \quad \frac{1}{60} \quad \frac{1}{30} \quad \frac{1}{6}
\end{array}
$$

Figura 2. Triangulo armónico de Pascal.

En la parte de arriba cada término es la suma de los que están debajo, y en la parte inferior cada término es diferencia de los que están encima. Ejemplo se toma las dos primeras filas del triángulo de Pascal:

En la segunda fila tenemos

$$1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$$

Ahora si sumamos los dos primeros términos de esta fila tenemos

$$1 + 4 = 5; \;\; 4 + 6 = 10; \;\; 6 + 4 = 10 \;\; y \;\; 4 + 1 = 5$$

Obteniendo ahora la primera fila del triángulo de Pascal

$$1 \;\; 5 \;\; 10 \quad 10 \;\; 5 \;\; 1$$

Este estudio de las sucesiones realizado por Leibniz propicio herramientas para continuar en el proceso de pasar de lo discreto a lo continuo.

2.2.5. EL PASO A LO CONTINUO

En el campo de la aritmética las diferencias entre los números van a saltos discretos, es decir entre el número 1 y el 2 existía un hueco, un vacío, no existía nada entre ellos, por esta razón surgió la necesidad de pasar a lo continuo. El paso de lo discreto a lo continuo se hizo a partir de dos principios o postulados:

- Transformación continua: consiste en llenar los huecos con la existencia de otros números, es decir, como se muestra en la Figura 3. al representar los números naturales en la recta numérica se observa que existe un vacío entre cada uno de los números.

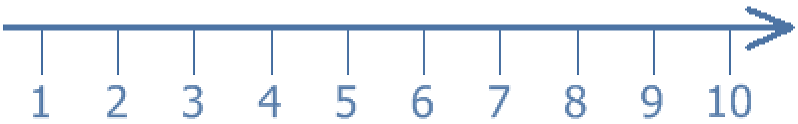


Figura 3. Números Naturales.

Posteriormente se introdujeron los números enteros en la recta numérica pero esto tampoco consiguió llenar en totalidad la recta numérica (Figura 4.)

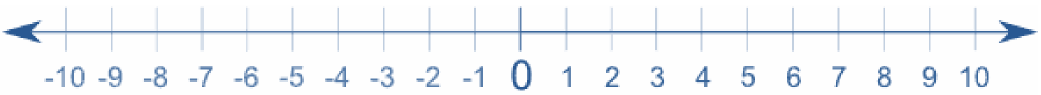
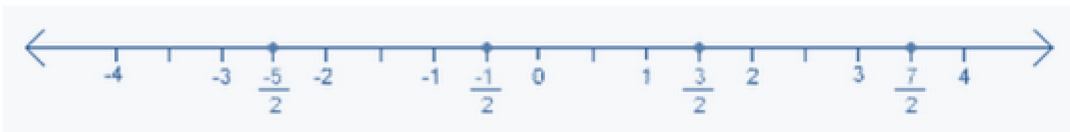


Figura 4. Números Enteros.

Por último se introdujeron lo números racionales e irracionales para medir características físicas como longitud, temperatura y tiempo (Figura 5.), los cuales llegaron a completar la recta numérica, permitiendo así el paso de lo discreto a lo continuo, es decir, entre un valor y otro podían existir infinitud de números.



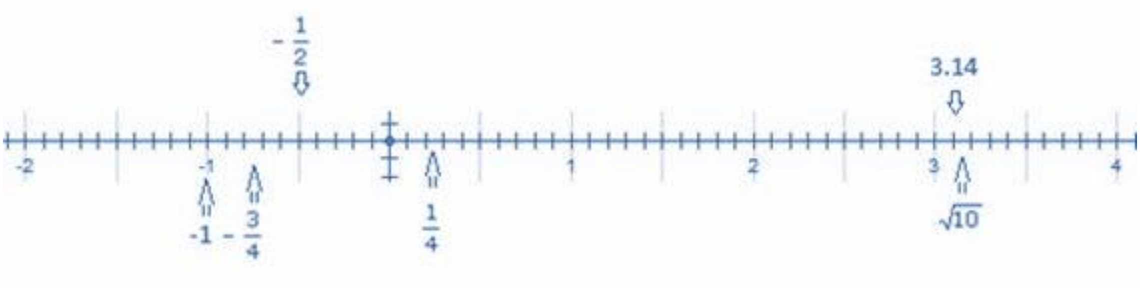


Figura 5. Números Racionales e Irracionales.

- Existencia de magnitudes incomparables entre sí: magnitudes reales infinitamente pequeñas e indivisibles entre sí, por lo cual permitió explicar la idea de infinitesimal al ser magnitudes que tiende a cero pero nunca llegaran a ser nulas, posteriormente se convertiría en la idea de limite y diferencial (Leibniz, G. 1684).

Leibniz asume los dos postulados y admite la existencia de magnitudes infinitesimales como partes de un todo, igualmente acepta que una curva se compone de partes y que esas partes son diferencias infinitesimales entre dos términos consecutivos de una curva (ver Figura 6.) (Grattan, I.1984). Esto lo conlleva a aceptar que una curva es una poligonal de lados rectos infinitésimos o indivisibles. Acepta que una curva puede considerarse como una sucesión de líneas ordenadas, en principio equidistantes entre sí, con lo cual la suma de todas las ordenadas, nos daría la cuadratura de dicha curva, o el área de la misma.

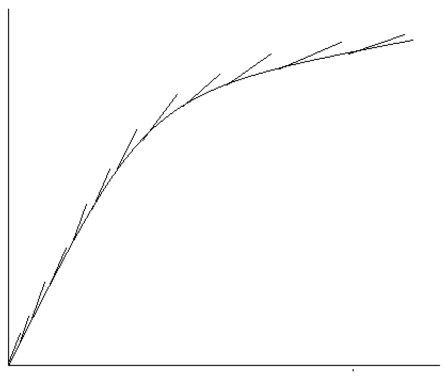


Figura 6. Representación de una curva a partir de líneas ordenadas.

Por otro lado, en la lectura del *Tratado de los senos del cuarto de círculo*, realizado por Pascal en el año de1623, Leibniz observara el triángulo característico de Pascal, el cual se limitaba únicamente a resolver cuadraturas; generando en Leibniz la idea de mejorar la concepción del triángulo característico para que aparte de resolver cuadraturas también pudiera:

- Construir la cuadratriz y reducir el problema de la cuadratura de una curva a la de otra previamente conocida, con la cual podrá cuadrar cualquier tipo de curva mediante el proceso que llamara transmutación.
- Hallar la tangente a una curva en cualquiera de sus puntos.
- Las cuadraturas y las diferenciales son inversas y el paso de una a otra se realiza por el método inverso de las tangentes.

En el intento por conseguir lo anteriormente dicho Leibniz empieza a estudiar el planteamiento realizado por Pascal del triángulo característico para que pasara de ser un caso particular a uno más general, y a su vez da pie para iniciar con el segundo proceso, la separación el análisis infinitesimal de la geometría.

2.2.6. TRIÁNGULO CARACTERÍSTICO "SEPARACIÓN DEL ANÁLISIS DE LA GEOMETRÍA"

Leibniz consideraba una curva como un polígono de infinitos lados de longitud infinitesimal. A la cual se asocia una sucesión de abscisas x_1, x_2, x_3, x_4 .... y una sucesión de ordenadas y_1, y_2, y_3, y_4,. . . donde los puntos (x_i, y_i) están todos ellos en la curva y son considerados como los "vértices" de la poligonal de infinitos lados que forma la curva. La diferencia entre dos valores sucesivos de x es llamada la diferencial de x y se representa por dx , significado análogo tiene dy . El diferencial dx es una cantidad fija, no nula, infinitamente pequeña en comparación con x, de hecho es una cantidad infinitesimal. Los lados del polígono que constituye la curva son representados por ds (Leibniz. 1684). Resulta así el triángulo característico de Leibniz que es el mismo que ya había sido considerado por Barrow (ver Figura 7.).

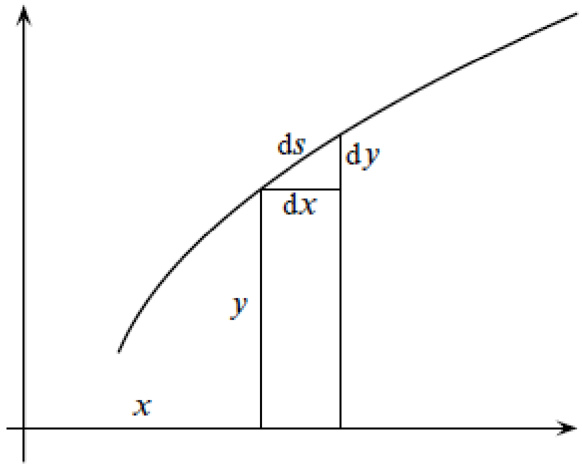


Figura 7. Triángulo característico.

Extraordinariamente, los términos “abscisa”, “ordenada” y “coordenadas”, tan particulares de la geometría analítica, nunca fueron utilizados por Descartes sino que son originados por Leibniz; mientras que en la actualidad hablamos de “diferenciales”, Leibniz las llamaba “diferencias”.

El triángulo característico hecho por Leibniz tiene lados infinitesimales dx, dy, ds, puede tener la siguiente relación $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$de acuerdo con el teorema de Pitágoras. El lado ds sobre la curva o polígono se hace coincidir con la tangente a la curva en el punto (x, y), ahora la tangente de esta curva puede ser expresada como $\frac{dy}{dx}$, que es un cociente de diferenciales que Leibniz Llamo “*cociente de diferencial”*(Leibniz, G. 1684).

Leibniz tras algún tiempo de estudio, logró encontrar las normas correctas para diferenciar productos y cocientes

$$d(x, y) = ydx + xdy$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$$

Se cree que una de las maneras en como Leibniz llego a la formulación anterior fue:

Considérese

$$z_n = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right)$$

Por lo tanto

$$z_{n+1} - z_n = x_{n+1}\left(\sum_{j=1}^{n+1} y_j\right) + y_{n+1}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)(1)$$

Si analizamos el estilo de Leibniz, que $x_j\ e\ y_j$ son diferencias de valores consecutivos de las cantidades $x\ e\ y$ respectivamente, por lo tanto los valores de dichas cantidades estarán dados por las sumas respectivas $x = \sum_{j=1}^{n} x_j\ ey = \sum_{j=1}^{n+1} y_j$, mientras que $dx = x_{n+1}$ y $dy = y_{n+1}$ por ser las diferencias de valores consecutivos, de tal forma $z_{n+1} - z_n$ seria la diferencial de $z = xy$. Por lo tanto, la ecuación (1) es interpretada por Leibniz en la forma $d(x, y) = ydx + xdy$ como la norma de la diferencial de un producto (Leibniz, G. 1684).

Partiendo de la norma de la diferencial de un producto Leibniz consiguió obtener la norma correspondiente para el cociente $z = \frac{x}{y}$, si se toma $x = zy$ se obtiene $dx = ydz + zdy$, si despejamosdz, se tiene como resultado:

$$dz = \frac{dx - zdy}{y} = \frac{dx - \frac{x}{y}dy}{y} = \frac{ydx - xdy}{y^2}$$

Ahora bien, tomemos la curva como la muestra la Figura 8. Con una sucesión de ordenadas trazadas a intervalos de longitud de unidad.

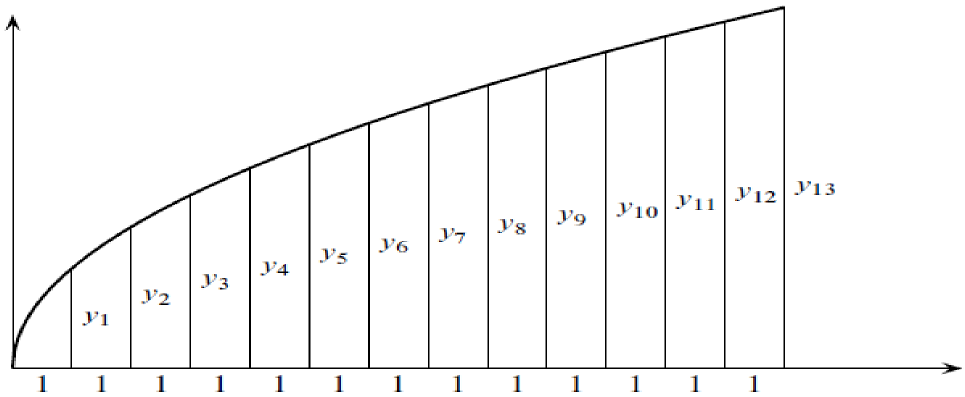


Figura 8. Aproximación de una cuadratura.

La suma de las ordenadas es una aproximación a la cuadratura de la curva (del área bajo la curva), y la diferencia entre dos ordenadas sucesivas es aproximadamente igual a la pendiente de la correspondiente tangente, entre más pequeña sea elegida la unidad "infinitamente pequeña", la aproximación seria cada vez más exacta, es decir la cuadratura sería igual a la suma de las ordenadas, y la pendiente de la tangente sería igual a la diferencia de dos ordenadas sucesivas (Leibniz, G. 1684). Deduciendo así Leibniz que las operaciones para hallar cuadraturas y tangentes eran operaciones inversas, es decir el proceso de diferenciación e integración son operaciones inversas una de la otra (Apéndice. EL DESCUBRIMIENTO DE CALCULUS SUMMATORIUS POR LEIBNIZ)

Leibniz llega hasta este punto en el segundo proceso del surgimiento del concepto de la diferencia, ya que dejo de lado la noción puramente geométrica al introducir la idea de incrementos infinitesimales, aunque el aporte de Leibniz quedo restringido a un carácter netamente matemático, caso contrario pasó con el trabajo realizado por Newton el cual le otorgó un carácter físico.

2.3. LA DIFERENCIAL DE NEWTON

2.3.1. CÁLCULO DE FLUXIONES

Los más importantes estudios matemáticos de Newton en el área del cálculo infinitesimal datan de los llamados "*AnniMirabiles 1665 y 1666, d*e la Universidad de Cambridge, de donde Newton se había graduado de *bachelor of arts* en 1664, la cual estuvo cerrada dos años por la peste, por lo cual Newton se la paso ese tiempo en su casa de *Woolsthorpe*, y como el mismo llegó a afirmarlo tiempo después ese fue el tiempo más creativo de su vida (Grattan, I. 1984).

A principios de 1665 descubre el teorema del binomio y el cálculo con las series infinitas, y el método de fluxiones a finales de ese mismo año, en 1666 el método inverso de las fluxiones y la relación entre cuadraturas y fluxión. En esos dos años también inició las teorías de los colores y gravitación universal.

Newton realizó tres versiones de su cálculo, la primera seria en la obra *De Analysi per aequationes numero terminor umifinitas*, el cual Newton entrego a su maestro Barrow en 1669, una segunda presentación de su cálculo es la que realiza en su libro *nethodus fluxionum et serierum infinitorun* , escrito alrededor del año de 1671 y el cual fue publicado hasta el año de 1736, en este trabajo Newton considera unas cantidades variables que van fluyendo en el tiempo, a la que llama "fluentes", después introduce las razones de cambio instantánea de las fluentes, a la que llamo fluxiones que vienen siendo las derivadas respecto al tiempo de las fluentes (Newton, I, 1736).

Las cantidades $x \; e \; y$ son variables con respecto al tiempo a las cuales llamo fluentes y a su velocidad de cambio $\dot{x} \; e \; \dot{y}$ con respecto al tiempo las llamo fluxiones. Se puede decir que en términos de la actualidad las fluxiones $\dot{x} \; e \; \dot{y}$ son las derivadas de $x \; e \; y$ con respecto al tiempo.

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt}$$

Las fluxiones mismas no son infinitamente pequeñas, pero los momentos de las fluxiones, denotados por $\dot{x}\vartheta, \dot{y}\vartheta$, etc; si lo son, donde ϑ es un incremento en el tiempo infinitesimal. Estos momentos son semejantes a las diferenciales de Leibniz $dy,\ dx$. Newton desarrollo una serie de algoritmos y redujo muchos problemas como el de hallar tangentes, máximos y mínimos, áreas y superficies, curvaturas, longitudes de arco, centros de gravedad, etc. Y principalmente redujo su estudio a dos problemas fundamentales que pueden ser términos mecánicos o matemáticos:

- Problema 1. Determinar la velocidad de movimiento en un momento de tiempo dado según un camino dado, es decir, en otro termino hallar la relación entre las fluentes dadas y la relación entre las fluxiones.

- Problema 2. Dada la velocidad de movimiento, determinar el camino recorrido en un tiempo dado. En otros términos, es determinar la relación entre las fluentes dada la relación entre las fluxiones.

Teniendo en cuenta que en esa época no se pensaba en términos de funciones, Newton no era la excepción, sino que él se imaginaba curvas o superficies descritas por las variables, es decir, considera relaciones entre las fluentes del tipo $f(x, y, z, \dots) = 0$, donde f para él es una expresión analítica finita o infinita. Por lo tanto, el primer problema planteado por Newton puede verse como un problema de derivación, o sea, conociendo una expresión analítica que satisfaga las fluentes $f(x, y, z, \dots) = 0$, obtener la expresión analítica $F(x, y, z, \acute{x}, \acute{y}, \acute{z}, \dots) = 0$ que satisfaga las fluxiones (Newton, I, 1736). Como ejemplo sea la curva descrita por la ecuación (1).

$$4x^2 - axy + y^2 = 0 \tag{1}$$

Si sustituimos $x\ e\ y$ por $x + \dot{x}\vartheta, e y + \dot{y}\vartheta$ respectivamente en la ecuación (1) se obtiene:

$$4(x + \dot{x}\vartheta)^2 - a(x + \dot{x}\vartheta)(y + \dot{y}\vartheta) + (y + \dot{y}\vartheta)^2 = 0$$

$$\Big((4x^2 + 8x\dot{x}\vartheta + 4\dot{x}^2\vartheta^2) - (axy + ay\dot{x}\vartheta + ax\dot{y}\vartheta + a\dot{x}\dot{y}\vartheta^2) + (y^2 + 2y\dot{y}\vartheta + \dot{y}^2\vartheta^2)\Big) = 0 \qquad (2)$$

Dividiendo todo los términos de (2) por ϑ

$$\frac{4x^2}{\vartheta} + 8x\dot{x} + 4\dot{x}^2\vartheta - \frac{axy}{\vartheta} - ay\dot{x} - ax\dot{y} - a\dot{x}\dot{y}\vartheta + \frac{y^2}{\vartheta} + 2y\dot{y} + \dot{y}^2\vartheta = 0$$

Despreciando los términos que tengan ϑ (como es un incremento infinitesimal tiende a cero, por lo cual conlleva a anular lo términos que tienen ϑ)

$$8x\dot{x} - ay\,\dot{x} - ax\dot{y} + 2y\dot{y} + \dot{y}^2\vartheta = 0,$$

$$\dot{x}(8x - ay) + \dot{y}(2y - ax) = 0, \qquad (3)$$

Despejando $\dot{x}\ e\ \dot{y}$ de (3)

$$\dot{y}(2y - ax) = -\dot{x}(8x - ay),$$

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{(8x - ay)}{2y - ax}\frac{(-1)}{(-1)},$$

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{-8x + ay}{-2y + ax}, \qquad (4)$$

Si analizamos el numerador y el denominador de la ecuación (4) son las derivadas parciales de$f(x)$ y $f(y)$de $f(x, y) = 4x^2 - axy + y^2 = 0$ (exceptuando un signo).

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{-fx}{fy} = \frac{\frac{-df}{dx}}{\frac{df}{dy}}$$

Así, Newton basado en la concepción física de las fluxiones como las componentes de la velocidad instantánea, calculó la pendiente $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ de la línea tangente a una curva algebraica. Esta es la relación que satisfacen las fluxiones, es decir, a partir de ella puede obtenerse la tangente a la curva $4x^2 - axy + y^2 = 0$ o en cualquier otro punto (x, y) de la misma.

Newton aplicó los resultados que obtuvo sobre fluente y fluxiones a la solución de una gran variedad de problemas, por ejemplo: calcular los máximos y mínimos, Newton escribe:

> "cuando una cantidad es la más grande o la más pequeña, en ese momento su fluir ni crece ni decrece, si creciera, eso probaría que era mayor y en lo que sigue sería más grande de lo que ahora es, y recíprocamente pasaría si decreciera" Newton.

En *De QuadraturaCurvarum,* escrita en 1676 y publicada en 1704, Newton propone fundamentar su cálculo de fluxiones en lo que llama "razones primera y última de incrementos evanescentes", refiriéndose Newton a los cocientes de los incrementos infinitesimales de las cantidades variables y su objetivo es hallar en el momento en que dichas cantidades nacen desde cero "razón primera" o se anulan "razón última". A través de un ejemplo se entenderá un poco más esta idea:

Calcular la fluxión de x^n.Para logra esto se debe considerar un incremento ϑ de tal manera que$x$pasa a ser $x + \vartheta$, por lo tanto x^n se transforma en

$$(x + \vartheta)^n = x^n + n\vartheta x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}\vartheta^2 x^{n-2} + \cdots$$

Los incrementos de x y x^n, son:

$$\vartheta y n\vartheta x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}\vartheta^2 x^{n-2} + \cdots$$

Están entre sí en la misma razón que

$$1\; y n x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}\vartheta x^{n-2} + \cdots$$

Dice Newton "dejemos ahora que los incrementos se anulen y su última proporción será 1 a nx^{n-1}, por lo tanto, la fluxión de la cantidad x es la fluxión de la cantidad x^n como $1{:}\, nx^{n-1}$".

Existen distintas explicaciones de los argumentos que llevaron a Newton a mostrar su cálculo de varias formas. Las más explícita es que su objetivo era obtener una fundamentación más rigurosa del cálculo.

En su trabajo *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum (1671),* el concepto básico es el de cantidad en movimiento o que fluye continuamente en el tiempo. Las magnitudes están creadas por el movimiento continuo y no por agregación de cantidades infinitesimales; la idea básica es la de continuidad tal como se observa en los procesos de la Naturaleza. Tal vez Newton pretendía de esta forma evitar el uso de "infinitesimales estáticos o geométricos", pero lo que realmente hizo fue sustituirlos por los infinitesimales de tiempo usados para definir los momentos de las fluentes. Conviene advertir que lo que Newton considera es la abstracción matemática análoga al tiempo, es decir, una magnitud independiente imaginaria abstracta que fluye uniformemente y con la que se relacionan todas las fluentes (Newton, I, 1736). Cabe observar el intento de Newton por evitar los problemas matemáticos del continuo (infinitesimales, indivisibles) y trasladarlos al mundo físico, a la continuidad de los procesos naturales y al movimiento. Por otra parte, Newton aceptaba como algo dado la idea intuitiva de velocidad instantánea de las fluentes, no le pareció preciso definirla.

En el escrito *Quadrature of Curves (1676),* Newton manifiesta su propósito de dejar de lado por completo el uso de cantidades infinitesimales, proponiendo en este sentido que *"errores quamminimi in rebusmathematicis non suntcontemnendi"*, es decir, que en matemáticas ni siquiera los errores más diminutos pueden ser aceptados, eso es justamente lo que se hacía cuando se despreciaban en los cálculos cantidades infinitesimales. Posteriormente enuncia su teoría de las "razones primera y última de cantidades evanescentes". Estas ideas señalan claramente al concepto matemático de límite. Lo que expresa, a su manera, Newton es, en términos actuales, el límite de un cociente de funciones que se anulan. Se necesitaros casi 200 años para precisar matemáticamente el concepto de límite en el siglo. Debemos notar que Newton usa dicho concepto a partir de la intuición mecánica del movimiento (Colette, J 1993), iniciando así el último proceso de reemplazar el concepto de la diferencial por el de la derivada.

2.3.2. REGLA DE NEWTON

Newton desarrolló tres versiones de su cálculo. En la obra De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas, que entregó a su maestro Barrow en 1669, y que puede ser considerado el escrito fundacional del Cálculo, Newton usa conceptos infinitesimales de manera precisa a como hacía el propio Barrow. Este trabajo, además de mostrar el teorema binomial y los descubrimientos de Newton relacionados a series infinitas, contiene también un claro reconocimiento de la relación inversa entre problemas de cuadraturas y de tangentes.

Posteriormente que Newton calculara$\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ a partir de la ecuación $f(x,y)=0$, se planteo el problema inverso: establecer y en términos de x, dando una ecuación que exprese la relación $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ de sus fluxiones (Newton, I, 1736), en este caso la ecuación es de la forma:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \Phi(x)$$

Esto es ahora lo que en términos actuales se conoce como anti derivación. Teniendo en cuenta que la técnicas infinitesimales previas al cálculo fluxional se había basado, principalmente, en la determinación de un área, o más exactamente como una suma de infinitesimales o elementos indivisibles de área, Newton introdujo la técnica de determinar primero la razón de cambio del área deseada (con respecto a x) y luego calcular el área por antiderivación (Newton, I, 1736).

Analicemos un ejemplo planteado por Newton

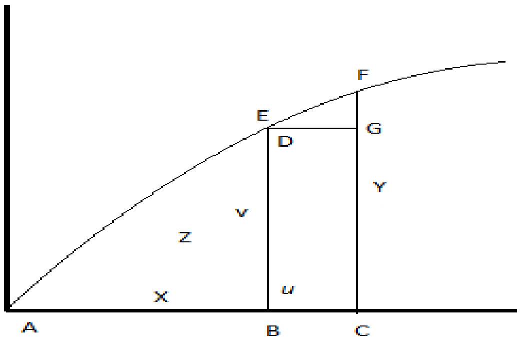


Figura 9. Calculo del área a través de la antiderivación.

$$z = \acute{a}readeABD$$

$$AB = x\ BE = v$$

$$BC = u$$

De tal manera que el área $BCDF$ es igual al área $BCEG = \vartheta y$

Consideremos, por ejemplo, la curva para la cual

$$z = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$$

Elevando al cuadrado z

$$z^2 = \frac{4}{9}x^3$$

Por lo tanto

$$(z + \vartheta y)^2 = \frac{4}{9}(x + \vartheta)^3$$

De donde

$$z^2 + 2z\vartheta y + (\vartheta y)^2 = \frac{4}{9}(x^3 + 3x^2\vartheta + 3x\vartheta^2 + \vartheta^3) \qquad (5)$$

Sustituyendo z^2por $\frac{4}{9}x^3$, simplificando y dividiendo los dos miembros de la expresión resultante por ϑ en (5)

$$2zy + \vartheta y^2 = \frac{4}{9}(3x^2\vartheta + 3x\vartheta + \vartheta^2)$$

Considerando ϑ infinitamente pequeño, se puede omitir los términos que lo contienen y y será igual ha v, de esta manera se obtiene:

$$2zy + \vartheta y^2 = \frac{4}{9}x^2$$

Si sustituimos el valor de z de acuerdo a $z = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, obtenemos:

$$y = x^{\frac{1}{2}}$$

El procedimiento caracterizado fundamentalmente por el hecho de sustituir en la ecuación dada incrementos pequeños $\vartheta y,\ \vartheta z$ para x y z, respectivamente muestra que Newton se dio cuenta entre la integración y la diferenciación.

El cálculo de áreas mediante antiderivación realizado por Newton es históricamente la primera aparición del teorema fundamental del cálculo en su forma explícita:

$$\frac{dA}{dx} = y$$

Donde A es el área bajo la curva $y = f(x)$, obteniendo así un algoritmo para el cálculo de áreas. Los algoritmos propuestos por Newton para resolver los problemas que él mismo planteó, como los dos problemas fundamentales del cálculo:

- Dadas las fluentes y sus relaciones, hallar las fluxiones correspondientes.

Dada la relación de la fluente, hallar la relación entre las fluentes.

CAPITULO 3: LA DIFERENCIAL EN LA ENSEÑANZA DE LA FÍSICA.

En la enseñanza de la física es muy frecuente utilizar el cálculo diferencial sin otorgarle la importancia que éste tiene en la física, por lo cual, no se le presta mayor atención al concepto de la diferencial y su significado en ésta. En general, la diferencial se interpreta como un incremento infinitesimal de las variables dependiente e independiente aunque en ocasiones ésta característica no es evidente.

Para la implementación de la diferencial en la física, se realiza un análisis del concepto desde el punto de vista geométrico y físico, para un cuerpo en un campo gravitacional describiendo un movimiento semiparabólico.

3.1. LA DIFERENCIAL DESDE UN PUNTO DE VISTA GEOMÉTRICO.

Al analizar el movimiento de un cuerpo inmerso en un campo gravitacional, prescindiendo de la resistencia del aire y tomando el marco de referencia desde el punto donde se libera, se observa que objeto toma la trayectoria curva como la mostrada en la Figura 10, se puede apreciar que en los diferentes puntos de la trayectoria existe una recta tangente. Esta recta tangente permite conocer el estado del cuerpo en un instante de tiempo; por lo cual la curva se construye por rectas tangentes a los puntos que componen la trayectoria que sigue el cuerpo indicando sus diferentes estados. En otras palabras, el movimiento del cuerpo representado por una trayectoria curva, indica los diferentes cambios de estado del cuerpo representado por su cambio de posición y de su velocidad. Ya que la idea de recta tangente permite construir la concepción de variación o cambio de velocidad propuesta por Newton y Leibniz.

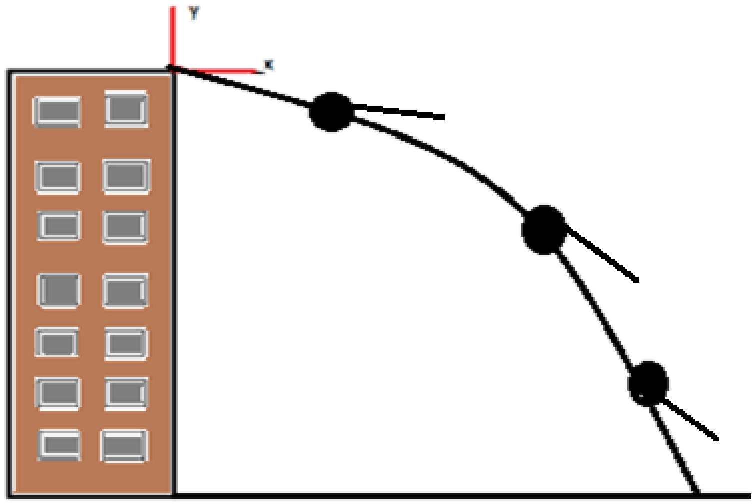


Figura 10. Movimiento semiparabólico de un cuerpo de masa m en un campo gravitacional.

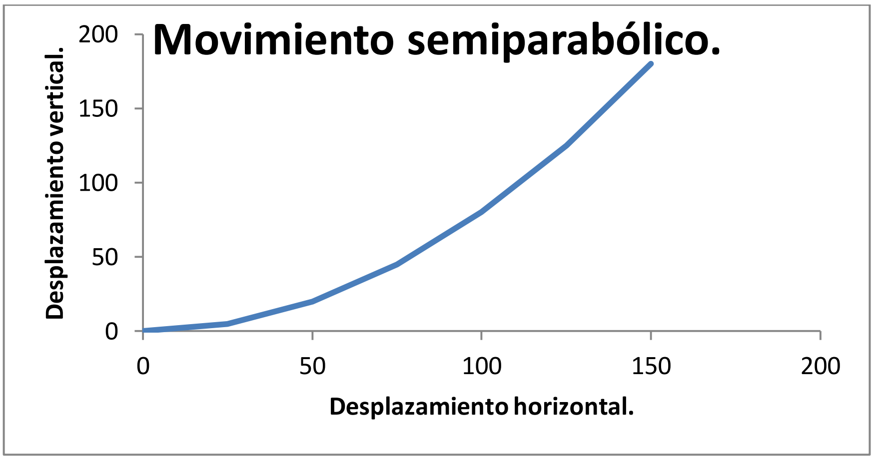
Con el fin de analizar el concepto de la diferencial dentro del contexto geométrico, se extraerá la curva generada por el cuerpo en su movimiento dada por la ecuación:

$$y = y_0 + v_{0y}\left(\frac{x-x_f}{v_{0x}}\right) + \frac{1}{2}g\left(\frac{x-x_f}{v_{0x}}\right)^2,$$

qué en el caso particular considerado será:

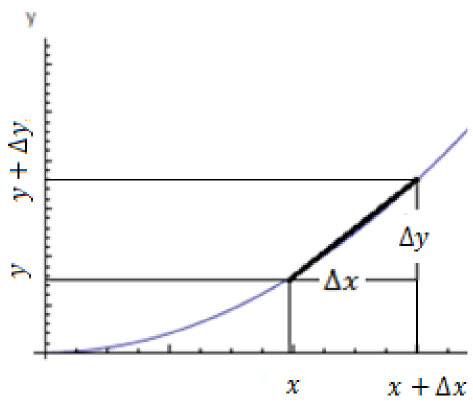
$$y = \frac{1}{2}g\frac{x^2}{{v_{0x}}^2}. \qquad (6)$$

La Gráfica 1 muestra la relación entre el desplazamiento horizontal y el desplazamiento vertical del cuerpo. El estado de movimiento horizontal es rectilíneo y uniforme, por lo tanto, la velocidad inicial es igual a la velocidad final $(v_o = v_f)$ que para este caso se considera un valor arbitrario de $v_o = v_f = 25\ {}^{m}/_{s}$.

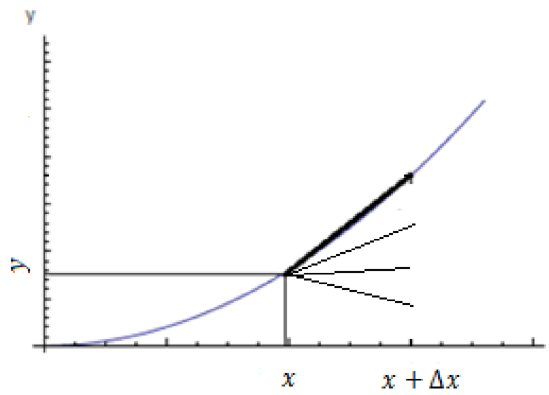


Gráfica 1. Desplazamiento horizontal y vertical de un cuerpo inmerso en un campo gravitacional.

Con el fin de obtener un significado geométrico de la diferencial, se obtendrá una relación entre las variables $x\,(desplazamiento\ horizontal)$ e $y\,(\,desplazamiento\ vertical)$. Como primera medida, se puede considerar que la relación entre las variables sea lineal $\Delta y = k(x)\,\Delta x$ como se observa en la gráfica 2. Si se obtiene el valor de k el problema estará resuelto, ya que su valor da cuenta de su relación. Sin embargo, el comportamiento de k no es precisamente lineal, es decir, k no es constante en el intervalo Δx, por lo contrario k varia con respecto a Δx. Por lo tanto, cabe la pregunta: ¿Qué valor de k se debe tomar sabiendo que Δy no es lineal respecto a Δx? (ver Gráfica 3.) Se puede realizar una estimación aproximada de su valor considerando que en el intervalo Δx la relación queda $\Delta y \approx k\,\Delta x$, es decir, cuando los valores de Δx y Δy son muy pequeños. Además, dividiendo en n intervalos a Δx y Δy la expresión $\Delta y \approx k(x)\,\Delta x$ deja de convertirse en una aproximación y pasa a ser una igualdad $dy = k(x)\,dx$, es decir, Δy será la diferencial o el incremento diferencia de $y\ (dy)$, teniendo en cuenta que dy es muy pequeño en comparación a Δy. Δy es tan grande que en realidad hay una variación que puede tomar varios valores y estos pueden ser lo más pequeños posible “dy”. Así se asegura que dy no coincide con Δy obteniendo la variación de la función respecto a un x hasta $x + \Delta x$.



Gráfica 2. Valor de Δy que le corresponde a un Δx



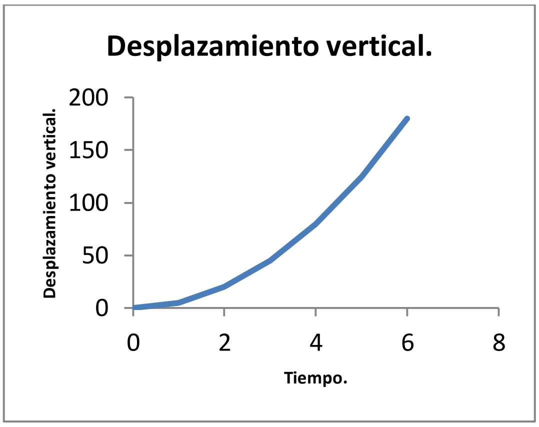
Gráfica 3. Para un valor de x, pueden existir varias funciones lineales que permitan determinar el valor de Δy para un Δx

En general, en cuanto más pequeño sea el valor de Δx, el error que se puede cometer en la estimación lineal de la diferencial es menor, teniendo en cuenta que ese incremento dx es casi insignificante en comparación con Δx. La diferencial de una magnitud (y) respecto a otra (x), es la única relación lineal del incremento $(dy = k(x)\, dx)$, es decir, la única aproximación lineal de Δy que permite determinar la relación exacta entre Δy y Δx. Por ejemplo, la variación de la energía total de un sistema que se produce debido al trabajo exterior realizado sobre éste por una fuerza constante es $\Delta E = F \bullet \Delta x$. Sin embargo, si la fuerza es función con la distancia, $F(x)$, la relación entre la energía y el desplazamiento es una "aproximación" que se convierte en una expresión diferencial $dE = F(x) \bullet dx$. Finalmente, la diferencial geométricamente es la forma en la que está cambiando un Δy respecto a un Δx, es decir, la razón de cambio de una respecto a la otra.

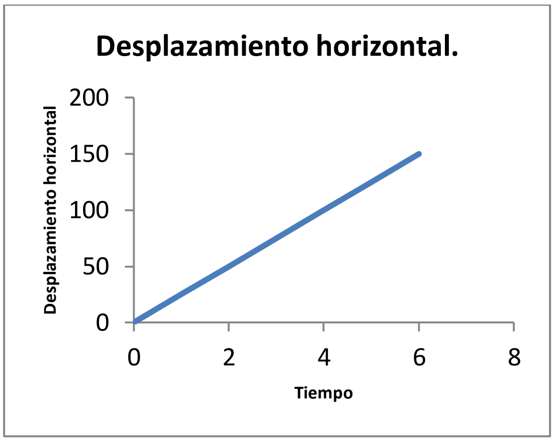
3.2. LA DIFERENCIAL DESDE UN PUNTO DE VISTA FÍSICO.

Al analizar el movimiento de un cuerpo inmerso en un campo gravitacional, prescindiendo de la resistencia del aire y tomando el marco de referencia desde el punto donde se libera, se observa que su estado de movimiento se compone de dos estados de movimiento: uno horizontal y otro vertical como se muestra en la Figura 10. En otras palabras, el movimiento del cuerpo será representado por una trayectoria curva que indica los diferentes cambios instantáneos de su estado caracterizado por la posición y la velocidad.

Partiendo de lo anterior se utiliza el método desarrollado por Newton para analizar el concepto de la diferencial y su significado en física, ya que este permite construir la concepción de variación o cambio de velocidad propuesta por el mismo. El lugar geométrico de un cuerpo en movimiento inmerso en un campo gravitacional se caracteriza por dos movimientos: uno vertical, como se muestra en la Gráfica 4 y otro con velocidad constante como se muestra en la Gráfica 5.



Gráfica 4. Desplazamiento vertical de un cuerpo en movimiento inmerso en un campo gravitacional



Gráfica 5. Desplazamiento horizontal de un cuerpo en movimiento inmerso en un campo gravitacional.

Las ecuaciones de movimiento para el sistema son:

$$x(t) = x_0 + v_{ox}t \qquad\qquad y(t) = y_0 + v_{oy}t + \frac{1}{2}gt^2$$

Ya que el cuerpo parte del reposo, $y_0 = 0$ y $x_0 = 0$ la velocidad inicial en la componente vertical estará dada por $v_{0y} = 0$ y la velocidad en la componente horizontal será $v_{0x} = 25\,{}^{m}/_{s}$, Las anteriores consideraciones se escriben a través de las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$x(t) = v_{ox}t \qquad (7) \qquad\qquad y(t) = \frac{1}{2}at^2. \qquad (8)$$

Considerando el valor de la aceleración de la gravedad como $10\,{}^{m}/_{s^2}$, la ecuación de movimiento vertical (8) del cuerpo queda dada por:

$$y(t) = \frac{1}{2}\left(10\ {}^{m}/_{s^2}\right) t^2$$

$$y(t) = 5t^2 \tag{9}$$

Al ser un movimiento acelerado, el cuerpo no recorrerá distancias iguales en tiempos iguales, por lo que la distancia recorrida en cada intervalo de tiempo t no será la misma. Para encontrar la velocidad instantánea del cuerpo al cabo de cuatro segundos, es necesario conocer la distancia que recorre el cuerpo en un tiempo muy pequeño para evitar cambios en la velocidad. Como lo muestra la Tabla 1, a medida que el tiempo tiende a cuatro segundos, haciendo una aproximación por la izquierda la posición vertical del cuerpo tiende a $80\,m$, lo cual significa que la velocidad tiende a $40\,m/s$. Realizando la aproximación por la derecha se puede observar exactamente lo mismo, es decir, la posición horizontal del cuerpo tiende a $80\,m$ y la velocidad tiende a $40\,m/s$, como se muestra en la tabla 2.

$t(seg)$	$y(t)m$	$\Delta t(seg)$	$\Delta y(m)$	$v(t)\ {}^{m}/_{s}$
3,8	72,2	0,1	3,85	38,5
3,9	76,05	0,09	3,5505	39,45
3,99	79,6005	$9x10^{-3}$	0,359505	39,945
3,999	79,960005	$9x10^{-4}$	0,03599955	39,9995
3,9999	79,99600005	$1x10^{-4}$	$3{,}99995x10^{-3}$	39,9995

Tabla 1. Aproximación por la izquierda de la posición y velocidad.

$t(seg)$	$y(t)m$	$\Delta t(seg)$	$\Delta y(m)$	$v(t)\ {}^{m}/_{s}$
4,0001	80,00400005	$9x10^{-4}$	0,03600495	40,005
4,001	80,040005	$9x10^{-3}$	0,360495	40,055
4,01	80,4005	0,09	3,6495	40,55
4,1	84,05	0,1	4,15	41,5

4,2	88,2	0,1	4,25	42.5

Tabla 2. Aproximación por la derecha de la posición y velocidad.

Para conocer con exactitud la velocidad del cuerpo al cabo de cuatro segundos, se desarrolla el proceso de derivación como lo plantea Newton. Dada la ecuación de movimiento (9), que para Newton es denominada fluente (cantidad variable que va fluyendo en el tiempo), se obtendrá la fluxión (razón de cambio instantánea de la fluente) del cuerpo. Para hallar la variación de la fluente con respecto al tiempo, se determina cuanto a caído el cuerpo ($y + \Delta y$) respecto a su posición inicial (y), en un tiempo ($t + \Delta t$), en otras palabras, se determinan los incrementos infinitesimales $y + \Delta\dot{y}$ y $t + \Delta\dot{t}$ respectivamente, lo cual significa cuanto cayo el cuerpo con respecto a la posición anterior $y = 5t^2$. De igual forma, el incremento respecto al tiempo Δt significa cuanto tiempo gasta el cuerpo de pasar de la posición y a la posición $y + \Delta y$; posición con la cual se obtiene la fluxión del cuerpo, esto es:

$$y = 5t^2,$$

$$y + \Delta\dot{y} = 5(t + \Delta\dot{t})^2,$$

resolviendo la potencia,

$$y + \Delta\dot{y} = 5(t^2 + 2t\Delta\dot{t} + \dot{t}^2\Delta^2),$$

$$y + \Delta\dot{y} = 5t^2 + 10t\Delta\dot{t} + 5\dot{t}^2\Delta^2,$$

dividiendo cada término en Δ, se obtiene:

$$\frac{y}{\Delta} + \dot{y} = \frac{5t^2}{\Delta} + 10t\dot{t} + 5\dot{t}^2\Delta,$$

despreciando los términos que tengan Δ como lo propone Newton (capitulo 2), ya que este es infinitamente pequeño, se obtiene,

$$\dot{y} = 10t\dot{t}$$

$$\frac{\dot{y}}{\dot{t}} = \frac{dx}{dt} = 10t \qquad (10)$$

La fluxión de la fluente es: $\frac{dx}{dt} = 10t$, es decir, la variación de y con respecto al tiempo, es lo que actualmente se denomina velocidad instantánea. Para el caso de los cuatro segundos la velocidad del cuerpo será:

$$\frac{dx}{dt} = 10t\ ,$$

$$\frac{dx}{dt} = 10(4) = 40\ {}^{m}/_{s}.$$

La velocidad del cuerpo al cabo de los cuatros segundos se calculó a partir de los principios dados por Newton, que para el caso anterior la fluente $y = 5t^2$ describe el movimiento del cuerpo a medida que transcurre el tiempo. Al calcular su fluxión (derivada) $\frac{dx}{dt} = 10t$ se determina la razón de cambio de la fluente con respecto al tiempo.

Ahora para calcular la velocidad en x del cuerpo al pasar cuatro segundos, se realiza exactamente lo anteriormente expuesto:

$$x = v_{ox}t$$

$$x + \Delta\dot{x} = v_{ox}t + v_{ox}\Delta\dot{t}$$

$$x + \Delta\dot{x} = v_{ox}t + v_{ox}\Delta\dot{t}$$

$$\frac{x}{\Delta} + \dot{x} = \frac{v_{ox}t}{\Delta} + v_{ox}\dot{t}$$

$$\dot{x} = v_{ox}\dot{t}$$

$$\frac{\dot{x}}{\dot{t}} = \frac{dx}{dt} = v_{ox} = 25\ {}^{m}/_{s},$$

determinando así la velocidad instantánea cuando $t = 4\,s$, reafirmando que la velocidad en el desplazamiento horizontal siempre va a ser constante $\left(v_o = v_f\right)$.

Lo anterior permite abordar tópicos de la Física aplicando la idea de la diferencial dando elementos para una mejor comprensión del concepto en los estudiantes. Por otra parte, teniendo en cuenta que desde este análisis las variables cinemáticas de la diferencial adquieren un significado físico, por ejemplo en el caso del movimiento semiparabólico, la diferencial $\frac{dx}{dt}$ muestra la razón de cambio de $dx = x + \Delta x$ (un pedacito muy pequeño e insignificante en comparación con la variable x) con respecto a $dt = t + \Delta t$ (un pedacito muy pequeño e insignificante en comparación con la variable t), recalcando que ese incremento infinitesimal se puede considerar despreciable en comparación con la variable cinemática. Por ejemplo, la diferencial de carga dq es muy grande en comparación a q (carga del electrón).

A modo de conclusión el concepto de la diferencial ocupa un lugar importante en el proceso de enseñanza-aprendizaje en la física, además es constituido como un elemento útil al momento de abordar problemas físicos. Teniendo una magnitud física (y), la diferencial (dy) como así la definía Leibniz, es una variación infinitesimal de la magnitud (y). Por otro lado, Newton expresa la diferencial en términos de fluentes y fluxiones, siendo las fluentes las cantidades x y/o y, es decir, variables con respecto al tiempo $(y = y(t))$; la fluxión es la razón de cambio de la variable con respecto al tiempo descritas como $\dot{x}\ e\ \dot{y}$. En la actualidad la fluxión se conoce como la derivada de una función $(y' = y(t))$ (Newton, I, 1736).

Es preciso anotar que Leibniz tuvo la genialidad de generar un formalismo matemático el cual permite representar todos los fenómenos existentes en la naturaleza y a su vez crear una simbología más sencilla y adecuada para realizar dicha representación; esto lo consiguió a través de la idea de infinitesimal, en donde se entiende como una variación infinitamente pequeña en comparación con su variación, con lo cual este proceso recibió el nombre de cálculo infinitesimal aunque posteriormente adquirió el nombre de cálculo diferencial.

Por otro lado, Newton también creo su cálculo fluxional, pero a diferencia de Leibniz el cálculo inventado por Newton, se realizó a partir del análisis de una partícula en movimiento, es decir, este tipo de cálculo permitió hallar la razón de cambio de una partícula en movimiento respecto al tiempo.

En la actualidad el cálculo utilizado es el inventado por Leibniz y no el desarrollado por Newton, por esta razón el cálculo diferencial es mostrado en la enseñanza de la Física y en específico la mecánica clásica como un instrumento para realizar cálculos y no como un constituyente propio de la Física. Cabe destacar que si es mostrado el cálculo desarrollado por Newton a la par con el cálculo infinitesimal de Leibniz, permitiría a los estudiantes de física relacionar la idea de la diferencial con un significado físico, como por ejemplo la razón de cambio de una magnitud con respecto al tiempo; lo anteriormente mencionado se debe a que Newton siempre estaba pensado en la forma de representar y analizar el movimiento de un cuerpo de manera general llegando a formular el cálculo fluxional.

NOTAS

1. Profesor de matemáticas de Basilea
2. Hermano de Jakob trece años menor, que después lo sucedió en Basilea en el 1705, después de ser profesor en Groninga.
3. Marqués de L•Hopital, noble francés de fortuna, muy interesado en los últimos avances de los métodos infinitesimales.
4. Estudio con Johann Bernoulli fue profesor en la academia de San Petersburgo Por otro lado, Cristian Huygens guío los estudios matemáticos de Leibniz cuando él se encontraba en una misión diplomática en París, la cual le dejaba mucho tiempo libre para sus estudios en matemática; los progresos de Leibniz fueron grandiosos, en consecuencia esto condujo al desarrollo del cálculo infinitesimal.

CONCLUSIONES

- La importancia del análisis de los textos originales por parte de los docentes como herramienta para la enseñanza de la física, permite mostrar a los estudiantes las problemáticas que dieron origen de estas teorías (Ayala, M. 2006), proponiendo al estudiante reconocer cuales fueron los conceptos fundamentales y las motivaciones que tuvieron los pensadores dando la posibilidad de redireccionar dichos conceptos, teniendo en cuenta la necesidad de apoyarse en otro tipo de libros guías para el estudiante, que permiten mostrar al estudiante diferentes perspectivas de razonamiento demostrando así la evolución de este conocimiento.

- Los análisis de escritos originales permite al docente elaborar una imagen del fenómeno, valorar los aportes de los autores en cuestión y generar estrategias para abordar en el aula una teoría, fenómeno o concepto. Además permite al estudiante generar formas de ver esquemas de organización, razones para privilegiar determinadas concepciones, elementos para reconsiderar errores o situaciones para analizar y elementos sobre procesos de la formalización matemática.

- Se ha mostrado el concepto de diferencial como una estimación lineal del incremento de una magnitud Física, cuya pendiente coincide con la derivada, resulta adecuado para entender y dar sentido físico a las expresiones diferenciales y al uso del cálculo en general.

- Sus creadores (Leibniz y Newton) consideraron a dx y dy como pequeñas variaciones en las variables x y y, y a la derivada de y con respecto a x, como la razón que existe entre dy y dx cuando dy y dx se hacen muy pequeños.

- Cuando los valores de Δx y Δy son muy pequeños en comparación a las variables x y y su relación de cambio es aproximadamente igual a la recta pendiente, y si Δx y Δy los dividimos en n intervalos se puede hacer la aproximación: $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{dx}{dy}$ sin cometer error alguno, dy sería la diferencial o incremento diferencial de y.

- Una forma alternativa para mostrar el cálculo diferencial, es que el docente realice un estudio sobre los originales para generar un proceso de recontextualización de saberes con los estudiantes, ayudándose de los textos guías y los aportes que pudo deducir de su estudio histórico, y por otro lado mostrar ambas concepciones, la de Newton como la de Leibniz.

APÉNDICE: EL DESCUBRIMIENTO DE *CALCULUS SUMMATORIUS* POR LEIBNIZ.

Las principales ideas que condujeron a Leibniz al descubrimiento del cálculo fue:

- La creación de un simbolismo matemático que simplificaran los cálculos y permitiera con facilidad el proceso de formular algoritmos.
- La estimación de que las sucesiones de diferencias se podían sumar, y que el proceso de formar la sucesión de diferencias y después sumarlas recupera la sucesión inicial, es decir, son operaciones inversas una de la otra.
- La consideración de las curvas como polígonos de infinitos lados de longitud infinitesimal y de las variables como sucesiones que toman valores consecutivos infinitamente próximos.

La conservación de los manuscritos de Leibniz en Hannover contiene los estudios hechos por Leibniz sobre las cuadraturas (Leibniz, G. 1684), donde investiga la posibilidad de formular simbólicamente los problemas de las cuadraturas e introduce la simbología que actualmente se conoce para el proceso de integración y de diferenciación, algunos de los resultados que se encuentra en los manuscritos de Leibniz son los casos particulares de la regla de integración por partes, por ejemplo:

Se supone que $(f(0) = 0)$

$$\int_0^a x f'(x)dx = af(a) - \int_0^a f(x)dx = a\int_0^a f'(x)dx - \int_0^a \left(\int_0^a f'(t)dt\right)dx \quad (1)$$

Obviamente, esta no fue la notación utilizada por Leibniz, la notación que se usa para la derivada fue realizada a finales del siglo XVIII por Langrange , por otro lado la notación que se usó para exponer los límites de integración fue introducida por J. Fourier, en el primer tercio del siglo XIX, además el término “integral” no se debe a Leibniz o Newton, ya que lo que introdujo Leibniz fue el símbolo “$\int$ ", a esta operación matemática la llamaba “*calculussummatorius”* o cálculo de sumas, la que solucionaba el problema de las cuadraturas. Para Leibniz una integral era la suma de infinitos rectángulos infinitesimales. Fue Johann Bernoulli en 1690 quien sugirió llamar “*calculusintegralis”* al cálculo de cuadraturas, de donde deriva el término “integral” que es usado en la actualidad (Leibniz, G. 1684).

Leibniz logro la ecuación (1) antes de inventar su notación para las integrales y las diferénciales. Para mostrar como Leibniz llego a obtener el termino (1) en este caso, se debe interpretar la igualdad (1) observando la Figura 1.

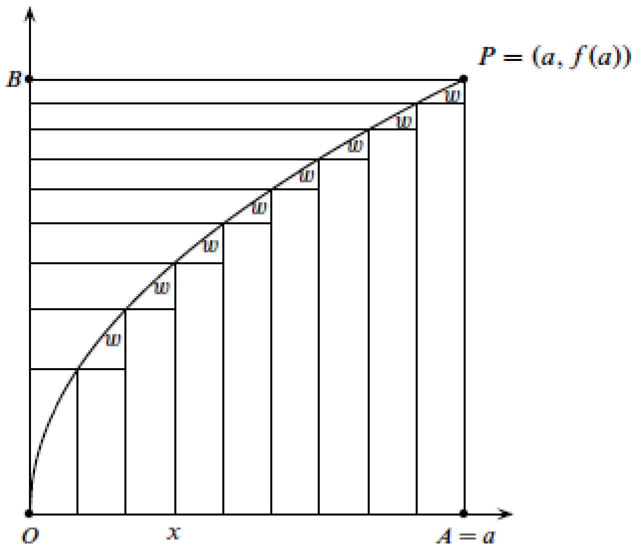


Figura 1. Áreas complementarias

El término $af(a)$ es el área del rectángulo $OAPB$, la integral $\int_0^a f(x)\,dx$ es el área de la parte de dicho rectángulo OAP que queda bajo la curva $y = f(x)$. Deducimos de (1) que la integral $\int_0^a xf(x)\,dx$es el área de la parte OBP del rectángulo que queda por encima de la curva $y = f(x)$esta área es la suma de todas las áreas de los rectángulos horizontales, como se muestra en la Figura 1. Estos rectángulos horizontales tienen como base el valor de la abscisa correspondiente a x, y como la altura es la diferencia infinitamente pequeña entre dos ordenadas sucesivas, que Leibniz llama w ,esta diferencia es lo que posteriormente conoceremos como diferencial de y, por lo tanto podemos decir que $w = dy = f'(x)dx$, por otra parte el área de la región OAP es considerada por Leibniz como la suma de las ordenadas y, por ultimo podemos eliminar y porque para Leibniz el valor de la variable puede obtenerse sumando sus diferencias consecutivas, por eso, y puede verse como la suma de las w, la forma exacta como Leibniz escribió la igualdad (1):

$$omn.\overline{xw} \neg ult.x, \overline{omn.w,} - \overline{omn.omnw} \qquad (2)$$

Donde $\neg$ es el símbolo para la igualdad "$ult.x$" significa ($ultimusx$) el ultimo de los x, es decir $OA = a$, el símbolo "omn es la abreviatura ($omneslineae$) de todas la líneas, símbolo que había sido utilizado por Cavalieri y que Leibniz utiliza con el significado de una suma (Leibniz, G. 1684). Las líneas encima de los termino y lo puntos y comas se puede remplazar con paréntesis.

En un manuscrito posterior Leibniz escribe (2) de la siguiente forma:

$$omn.xl \neg omn.l - omn.omn.l, \qquad (3)$$

Teniendo en cuenta que omn antepuesto a una magnitud lineal como l da un área, omn, antepuesto a un área como xl da un volumen y así sucesivamente. Al parecer estas consideraciones de homogeneidad dimensional hicieron pensar a Leibniz en una única letra en vez del símbolo "*omn*", por que escribe el "*sería conveniente escribir* " $\int$ " en lugar de "*omn*", de tal manera que $\int l$ representa $omnl$, es decir, la suma de todas las l" [Leibniz], ahora escribiremos (3) aplicando el nuevo formalismo

$$\int xl = x \int l - \int \int l \, (4)$$

Denotando que:

$$\int x = \frac{x^2}{2} y \int x^2 = \frac{x^3}{3}$$

Resaltando que estas reglas se aplican a las series en las que la razón de las diferencias de los términos a los términos mismos es menor que cualquier cantidad dada, es decir a las series cuyas diferencias son infinitamente pequeñas (Leibniz, G. 1684).

BIBLIOGRAFÍA

[1] Ayala, M. (2005). Análisis histórico-crítico y la recontextualización de saberes científicos. Construyendo un nuevo espacio de posibilidades. Departamento de física pre impresos.

[2] Colette, J (1993). Historia de las matemáticas volumen 2.siglo XXI España Editores.

[3] Garzón, I. (1994). El desarrollo del concepto de integral y su relación con la física. Arquímedes a Riemann, Monografía Departamento de Física Universidad Pedagógica Nacional.

[4] Grattan, I.(1984). Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica. Alianza Editorial.

[5]Leibniz, G. (1987). Análisis infinitesimal. Madrid: Editorial Tecno, S.A.

[6] Newton, I. (1736). Method of fluxions and infinite series. London: Printed by Henry Wood fall

[7] López, R. , Martínez, J. , Gras, A.(2005) Análisis de la utilización y comprensión del cálculo diferencial en la enseñanza de la física.

[8] López, R. , Martínez, J. , Gras, A. (2002). La diferencial no es un incremento infinitesimal. Evolución del concepto de diferencial y su clarificación en la enseñanza de la física. Enseñanza de las ciencias, 2002,20 ,271-283.

[9] López, R., Martínez, J., Gras, A.(1991) ¿Qué hacen y que entienden los estudiantes y profesores de física cuando usan expresiones diferenciales? (2005). Enseñanza de las ciencias, 2005,23(3) ,321-334.