

Estrategias cualitativas de investigación en educación matemática

**Recursos para la captura
de información y el análisis**

Estrategias cualitativas de investigación en educación matemática

Recursos para la captura de información y el análisis

Leonor Camargo Uribe

Investigación / Educación
Universidad Pedagógica Nacional
Editorial Universidad de Antioquia®

Colección *Investigación / Educación*
© Universidad Pedagógica Nacional
© Editorial Universidad de Antioquia®
ISBN: 978-958-501-036-9
ISBNe: 978-958-501-037-6

Primera edición: agosto del 2021
Impresión y terminación: Imageprinting
Diseño de cubierta y diagramación: Imprenta Universidad de Antioquia

Impreso y hecho en Colombia / Printed and made in Colombia
Prohibida la reproducción total o parcial, por cualquier medio o con cualquier propósito, sin la autorización escrita de la Universidad Pedagógica Nacional y la Editorial Universidad de Antioquia®

Universidad Pedagógica Nacional
(571) 594 18 94 ext. 190
editorialupn@pedagogica.edu.co
<http://editorial.pedagogica.edu.co>
Calle 72 N.º 11-86, código postal 110221
Bogotá D. C., Colombia

Editorial Universidad de Antioquia®
(574) 219 50 10
editorial@udea.edu.co
<http://editorial.udea.edu.co>
Apartado 1226. Medellín, Colombia

Imageprinting
(571) 743 75 52
Carrera 27 N.º 76-38
Bogotá D. C., Colombia

Camargo Uribe, Leonor
Estrategias cualitativas de investigación en educación matemática.
Recursos para la captura de información y el análisis / Leonor Camargo
Uribe. -- 1ª edición. -- Medellín: Editorial Universidad de Antioquia, Bogotá:
Universidad Pedagógica Nacional; 2021.
224 páginas. -- (Colección Investigación / Educación)
ISBN: 978-958-501-036-9
ISBNe: 978-958-501-037-6
1. Educación matemática. 2. Matemáticas – Investigación. 3. Matemáticas
– Estudio y enseñanza. 4. Metodología de la investigación. I. Título. II. Serie.

LC QA11
510/.7-DDC

Catalogación en publicación de la Biblioteca Carlos Gaviria Díaz

Contenido

Alcances del libro	xi
1. Perspectiva y aclaración de términos	1
Una visión sobre el desarrollo investigativo en educación matemática	1
Antes de 1960	1
Décadas del sesenta y el setenta	3
Décadas del ochenta y el noventa	4
Siglo XXI.....	10
La educación matemática, un campo en pleno desarrollo	13
Enfoques, aproximaciones, metodologías, estrategias y recursos.....	14
Enfoques empírico-analítico, fenomenológico y sociocrítico en educación matemática.....	15
Aproximaciones en las investigaciones con enfoque fenomenológico o sociocrítico	18
Metodología y estrategia investigativa.....	20
Recursos para obtener información y para analizar datos	27
Postura ecléctica o de caja de herramientas.....	29
2. Modelos de un diseño investigativo	31
¿Qué es un diseño investigativo y para qué sirve?	31
Modelos de un diseño investigativo	32
Modelo secuencial con solapamientos.....	33
Modelo artesanal de Romberg.....	45
Modelo coreográfico de Janesick.....	50
¿Qué tan operativos son los modelos de diseño investigativo?	52
Diseños rígidos o focalizados versus diseños flexibles y amplios	54

3. Principales estrategias cualitativas empleadas en educación matemática.....	57
Estrategias naturalistas (¿qué pasa?).....	58
Estrategia investigativa: basada en prácticas usuales.....	59
Estrategia investigativa: en primera persona.....	63
Estrategia investigativa: estudio de caso.....	66
Estrategia investigativa: revisión documental.....	69
Estrategias clínicas (¿cómo pasa?).....	72
Estrategias investigativas: entrevista estructurada y entrevista semiestructurada.....	73
Estrategia investigativa: entrevista basada en tareas.....	78
Estrategia investigativa: observación clínica.....	83
Estrategias de diseño (¿qué pasaría si...?).....	84
Estrategia investigativa: experimento de enseñanza.....	86
Estrategia investigativa: experimento comparativo.....	91
Estrategia investigativa: investigación-acción.....	94
Síntesis de las estrategias cualitativas de uso frecuente en educación matemática.....	98
 4. Recursos y sugerencias para registrar información y construir datos investigativos.....	 104
Captura de información.....	105
Escenario investigativo (¿dónde?).....	106
Los informantes (¿a quién?).....	109
Eventos (¿cuándo?).....	112
Procesos (¿haciendo qué?).....	114
Recursos (¿cómo?).....	116
Producción de datos investigativos.....	120
Organización de la información.....	121
Reducción de la información.....	121
Depuración de la información.....	123
Fragmentación e integración de información.....	129
 5. Análisis de la información y obtención de resultados.....	 136
Inicio del proceso de análisis.....	137
Alcances del análisis.....	139
Procedimientos para hacer el análisis.....	141
Producción de resúmenes.....	143
Codificación de datos.....	144
Producción de categorías.....	153
Producción de memorandos.....	158
Notas de análisis colectivos.....	159
Viñetas.....	159

Análisis preestructurados	164
Conteos	169
Correlaciones	170
Triangulación.....	175
Resultados del análisis y formas de presentarlos	176
Síntesis del capítulo y sugerencias	189
6. Criterios de calidad para la investigación en educación matemática...	192
Criterios de calidad para el proceso investigativo	193
Auditabilidad	193
Fiabilidad o credibilidad	194
Consistencia.....	194
Factibilidad o viabilidad	195
Legitimidad.....	195
Objetividad.....	195
Pertinencia	195
Reproducibilidad.....	196
Rigurosidad.....	196
Criterios de calidad para los productos investigativos	196
Adaptabilidad.....	196
Aplicabilidad.....	197
Autenticidad.....	197
Confirmabilidad o falsabilidad	197
Comparabilidad.....	198
Convencimiento	198
Genericidad.....	198
Originalidad	199
Poder descriptivo, explicativo o predictivo.....	199
Significación o relevancia	199
Sustentabilidad.....	199
Transferibilidad.....	200
Validez	200
Referencias bibliográficas.....	201

Alcances del libro

Este libro está dirigido a investigadores en formación y a educadores. Sin pretender ser exhaustiva, ofrezco un recurso bibliográfico para estudiantes en procesos de elaboración de trabajos de grado o tesis, investigadores noveles en el campo de la educación matemática y profesores que orientan espacios académicos de investigación. Proporciono información que pretende ser útil para establecer la estrategia investigativa y los recursos para capturar y analizar información. La mayoría de los ejemplos están tomados de investigaciones realizadas por investigadores colombianos y sirven como referencia para nuevas investigaciones en contextos similares.

De acuerdo con los planteamientos consignados en el capítulo 1, no es un libro de metodología ni pretende orientar la configuración de un proyecto de investigación de principio a fin. Pone el centro de atención en estrategias (capítulo 3) y recursos (capítulos 4 y 5) que pueden servir en un diseño investigativo, al tenor de las preguntas del investigador y su marco de referencia. Sin embargo, en el capítulo 2 presento algunos modelos que pueden ser útiles para concebir un diseño investigativo. Adicionalmente, en el capítulo 6 incluyo un conjunto de criterios de calidad que permiten ir vigilando el proceso investigativo y evaluar el producto obtenido.

Perspectiva y aclaración de términos

Una visión sobre el desarrollo investigativo en educación matemática

Las aproximaciones, las metodologías, las estrategias y los recursos de investigación propios de cualquier campo de conocimiento dependen de la dinámica de desarrollo de dicho campo. Comparada con las disciplinas matemática, psicología, pedagogía, antropología y sociología, la educación matemática constituye una disciplina de conocimiento relativamente joven. El estado de madurez, aunado a la cada vez más diversa y creciente complejidad de los asuntos que atiende, hace que el ejercicio investigativo esté aún hoy en una etapa incipiente de organización y consolidación. Pese a ello, es posible identificar tendencias investigativas que se orientan por las dinámicas propias de su desarrollo.

En esta sección propongo una vista panorámica, sintética y no exhaustiva, de tales tendencias, a nivel internacional y nacional, con el fin de crear un contexto para presentar algunas estrategias investigativas y recursos para capturar y analizar información investigativa. Como se verá, la investigación en educación matemática ha ido ampliando su campo de acción para atender múltiples retos impuestos por la sociedad.

Antes de 1960

De acuerdo con el recorrido histórico elaborado por Kilpatrick (1992), la investigación en educación matemática se originó en países como Alemania, Bélgica, Estados Unidos, Inglaterra y Japón, a finales del siglo XIX. Este nuevo campo de investigación surgió como reacción a las necesidades de aumentar

el número de profesores de matemáticas para cubrir la educación de mayor número de personas y de mejorar su preparación; se requería que más gente se pudiera poner a tono con los desarrollos matemáticos de la época. Las universidades comenzaron a hacerse cargo de institutos de formación de profesores, de niveles elemental y secundario, y la educación matemática comenzó a ser vista como un asunto de indagación en la educación superior. Al comenzar el siglo xx se esperaba que las personas involucradas en la enseñanza de los profesores hicieran investigación al respecto.

En 1905, David Eugene Smith, profesor de la Universidad de Columbia, propuso realizar un estudio internacional, a gran escala, para caracterizar la organización del currículo de matemáticas en diferentes países. A partir de esta idea surgió la Comisión Internacional de Instrucción Matemática (ICMI, por su sigla en inglés), fundada en Roma en 1908, y la primera publicación periódica sobre el tema (*L'Enseignement Mathématique*). El propósito de la ICMI era reportar el estado de la enseñanza de las matemáticas en distintos niveles escolares alrededor del mundo. Países como Alemania, Austria, Bélgica, Dinamarca, Estados Unidos, Francia, Hungría, Inglaterra y Suecia elaboraron reportes nacionales, se hicieron estudios comparativos descriptivos sobre currículos de matemáticas y de formación de profesores y se empezaron a divulgar propuestas de actividades escolares para reformar los currículos. Kilpatrick (1992) reporta, por ejemplo, que dos de los temas que se discutieron en la ICMI de 1912 fueron el papel de la intuición y la experimentación en las matemáticas de secundaria y el tratamiento del concepto de función en secundaria.

Los primeros estudios dieron paso a trabajos investigativos realizados por matemáticos de reconocido prestigio, como Felix Klein, Henri Lebesgue, Émile Borel y Jacques Hadamard, durante los primeros cincuenta años del siglo xx. En ellos se propusieron, principalmente, reformas a la matemática escolar que quedaron plasmadas en documentos escritos. Kilpatrick (1992) menciona que un rasgo distintivo de tales estudios era que, a pesar de recopilar gran cantidad de información, no se desarrollaron diseños investigativos sólidos y los reportes eran compilaciones de datos, más que análisis o interpretaciones. En ese sentido, desde su óptica, el trabajo realizado en aquella época no tenía aún un estatus científico. Sin embargo, se considera el origen de la investigación sobre qué y cómo se enseña matemáticas en la escuela.

En Colombia, de acuerdo con el rastreo hecho por Sánchez (2001), las preocupaciones por la enseñanza de las matemáticas tienen su origen en la Facultad de Matemáticas e Ingeniería de la Universidad Nacional, a final del siglo xix. En esa época tuvieron lugar interesantes debates sobre cómo enseñar matemáticas a los futuros ingenieros; se discutía si había que proporcionarles

una sólida fundamentación teórica o si se hacía énfasis en la aplicabilidad. Los ingenieros-matemáticos estudiaban fundamentos de geometría euclidiana, geometría analítica, álgebra elemental, cálculo diferencial y cálculo integral. Durante los primeros cuarenta años del siglo xx, matemáticos como Julio Garavito rechazaron las geometrías no euclidianas por considerarlas juegos intelectuales sin aplicabilidad. Con la llegada al país de los matemáticos Francisco Vera, en 1943; Carlos Federici, en 1948, y Juan Horváth, en 1951, se impulsó el desarrollo de las matemáticas en Colombia y se crearon las carreras de matemáticas en la Universidad de los Andes (en 1949) y en la Universidad Nacional (en 1951), con el principal interés de introducir las matemáticas modernas en la formación de matemáticos.

La enseñanza de las matemáticas en los niveles elemental y de secundaria fue preocupación de la Escuela Normal Superior. Creada en el país en 1936, bajo la tutela de la Universidad Nacional, era la encargada de la educación superior de las maestras de tales niveles. Esta escuela, que logró su autonomía en 1951, se convirtió en la Universidad Pedagógica Nacional Femenina en 1955, y en la Universidad Pedagógica Nacional en 1962, una universidad mixta. Durante la década del cincuenta del siglo pasado, esta universidad desarrolló un intenso trabajo de capacitación docente que se constituyó en el germen de la investigación sobre la formación de maestros de matemáticas en el país.

Décadas del sesenta y el setenta

A pesar del recorrido señalado en la sección previa, algunos autores (Gómez, 2000; Niss, 2004; Blanco, 2011) ubican los orígenes de la investigación en educación matemática solo a finales de la década del sesenta del siglo pasado, cuando la ICMI otorgó el reconocimiento de dominio científico al campo e instó a instituciones universitarias y centros de investigación a desarrollar trabajo investigativo seriamente. Dos hechos relevantes marcan este inicio: el Primer Congreso Internacional de Educación Matemática, organizado por la ICMI en Lyon (en 1969), Francia, y la aparición de los primeros números de las revistas *Journal for Research in Mathematics Education*, *Educational Studies in Mathematics* y *ZDM: International Journal on Mathematics Education*.

La investigación en educación matemática de las décadas del sesenta y el setenta se enfocó principalmente en los niveles secundario y universitario del sistema educativo. Las preocupaciones centrales eran: el currículo (entendido como un listado de contenidos acompañado por objetivos, formas de enseñar y de evaluar), la organización y secuenciación de contenidos de enseñanza, la producción de materiales educativos y evaluativos, las formas de enseñar

matemáticas y la instrucción de los profesores en formación y en ejercicio (Niss, 2004; Sierra, 2011).

Por ejemplo, en 1971, en los volúmenes 3 y 4 de la revista *Educational Studies in Mathematics*, se encuentran recopilados ejercicios investigativos realizados en Estados Unidos sobre la enseñanza de la geometría. Los autores, apoyados en fundamentos matemáticos y algunos ejercicios empíricos exitosos (principalmente de experiencias personales), establecen la posición de la geometría en el currículo de secundaria, proponen secuencias de enseñanza y recomiendan formas de enseñar. En casi todos los artículos se percibe el interés por mostrar que la enseñanza puede ser realizada de una mejor manera. En 1979, en el volumen 4 de una publicación seriada de la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (Unesco) que fue auspiciada por la ICMI, los investigadores presentan algunas tendencias curriculares para la enseñanza de la matemática en diferentes países, relatan cómo sucedía el proceso de reforma curricular llamado “matemática moderna” y describen ejemplos de formas de enseñar que consideran una buena fuente de inspiración para profesores en diversos lugares del mundo.

En Colombia también se identifica un ejercicio investigativo similar, principalmente realizado por profesores universitarios de programas de matemáticas o de formación de profesores de matemáticas. Por ejemplo, en el Primer Congreso Nacional de Enseñanza de la Matemática a Nivel Medio, llevado a cabo en la Universidad Nacional de Colombia en 1967, profesores como Jairo Charri, Yu Takeuchi y Carlos Federici exponen los retos que enfrenta el currículo escolar al introducir las “matemáticas modernas” en reemplazo de las aproximaciones tradicionales. Y profesores de la Universidad Pedagógica Nacional, como Julia de Delgado, Raquel Ardila y Hernando Alfonso, presentan propuestas de actualización de los programas de matemáticas para bachillerato.

En 1974, adscrito a la Universidad Pedagógica Nacional, se creó el Instituto Colombiano de Pedagogía (Icolpe). En su seno, Carlos Federici y su grupo de trabajo asumieron la tarea de investigar qué podían aprender los estudiantes de primaria sobre lógica y conjuntos, cómo deberían enseñarse los racionales y las razones, cómo introducir los números complejos a partir de vectores y cómo enseñar aspectos matemáticos de la medición, entre otros asuntos.

Décadas del ochenta y el noventa

En las décadas del ochenta y el noventa del siglo pasado el centro de atención de los investigadores amplió su rango de interés con relación a los niveles educativos sobre los cuales intervenir. Se popularizaron trabajos en preescolar,

primaria y secundaria y se convocaron estudiantes de matemáticas y de diversas carreras de pregrado, incluidos los futuros profesores, como sujetos de investigación. También se dio inicio a investigaciones sobre la educación matemática en contextos no formales, por ejemplo, con adultos en procesos de alfabetización.

Las preocupaciones investigativas también comenzaron a abarcar más asuntos. A continuación, menciono algunos de los desarrollos más significativos de estas dos décadas. Algunos dieron continuidad a los estudios previos sobre el currículo, la evaluación, los artefactos mediadores y la formación de profesores. Otros abrieron nuevas líneas de trabajo sobre las relaciones entre historia, filosofía y educación matemática, la resolución de problemas y algunos procesos cognitivos propios del aprendizaje de contenidos específicos. Y otros más contribuyeron a perfilar el giro social en la investigación en educación matemática, que empezó al inicio de la década del noventa.

Los estudios sobre el currículo de matemáticas cambiaron de óptica al abordarse este como un proyecto educativo y no solo como una secuenciación de contenidos de enseñanza. La investigación se centró en el análisis de la pertinencia de los currículos vigentes, la identificación de aspectos que favorecen o dificultan la implementación de un currículo, la selección de referentes útiles para el diseño curricular en matemáticas, la búsqueda de organizadores curriculares, el diseño de tareas y recursos para el aula (dirigido a contextos específicos) y el papel de los profesores en el diseño y el desarrollo curricular. Destaco el trabajo de Thomas Romberg en esta línea de indagación.

La investigación acerca de la evaluación en matemáticas cobró relevancia en las décadas del ochenta y el noventa. Investigadores como Jeremy Kilpatrick, en Estados Unidos, y Mogens Niss, en Dinamarca, retomaron trabajos que se habían adelantado en pedagogía, para desarrollar estudios dedicados a conceptualizar el significado de evaluar en matemáticas, establecer la influencia de diferentes formas de evaluar en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y buscar mecanismos para organizar e implementar la evaluación, interna y externa, de cara a las metas de la educación matemática.

A partir de los trabajos de matemáticos como Pólya, filósofos como Dewey y psicólogos como Luria, Greeno y Newell y Simon (Resnick y Ford, 1990), investigadores como Alan Schoenfeld en Estados Unidos, Luz Manuel Santos Trigo en México, Luis Rico, Martín Socas y Luis Puig en España, avanzaron en la línea de investigación sobre la resolución de problemas en educación matemática. Se interesaron en asuntos como: identificar qué es para los estudiantes un problema, cómo resuelven problemas los estudiantes, qué dificultades tienen los estudiantes al resolver problemas, qué características

tiene un buen resolutor de problemas; qué factores metacognitivos, afectivos y sociales afectan el éxito en la resolución de problemas, qué lugar tienen los problemas en la clase de matemáticas, cómo organizar la enseñanza de las matemáticas alrededor de problemas, y los valores educativos de la enseñanza realizada mediante la resolución de problemas. Ellos realizaron un notable trabajo en este campo; algunos aún lo hacen.

El papel de los artefactos mediadores es un ámbito que comenzó a ser explorado por psicólogos, matemáticos y pedagogos interesados en el aprendizaje de las matemáticas, en décadas anteriores a las del ochenta y el noventa, pero tuvo su auge al finalizar el siglo xx. Una de las motivaciones de la investigación fue el vertiginoso desarrollo de las tecnologías de la información y de la comunicación (TIC) y su llegada a la escuela. Con fundamentos psicológicos (de corrientes cognitivas y socioculturales) o con bases teóricas provenientes de estudiar en profundidad la naturaleza de los objetos y los procesos matemáticos, los investigadores centraron su interés en asuntos como: la influencia de programas informáticos en el aprendizaje, el papel de las representaciones computacionales en la construcción conceptual, las transformaciones del ambiente de clase al estar presentes las TIC, etc. Programas informáticos como Logo, Cabri Geometry, Geometer's Sketchpad y SimCalc MathWorlds fueron desarrollados con la meta de aprovechar las representaciones computacionales de ideas matemáticas, sujetas a la programación matemática interna de la aplicación, para que los estudiantes sobrepasaran la identificación de atributos físicos y se adentraran en la estructura matemática. La posibilidad de manipular las representaciones matemáticas hizo de estos programas entornos estimulantes para favorecer la indagación matemática, en un acercamiento similar al de las ciencias naturales, en busca de explorar, descubrir, conjeturar y justificar. Destaco en esta línea las investigaciones desarrolladas por James Kaput en Estados Unidos y Luis Moreno y Teresa Rojano en México.

En relación con la investigación sobre los profesores, en las décadas del ochenta y el noventa identifiqué un cambio importante de perspectiva. Los docentes dejaron de ser sujetos de observación o instrucción y comenzaron a verse como seres pensantes cuyas concepciones, conocimientos y prácticas tienen un alto impacto en el aprendizaje de sus estudiantes. El conocimiento profesional del profesor se volvió una línea de estudio importante y el interés por la perspectiva del profesor para la educación matemática, su desarrollo profesional y su papel en la investigación en educación matemática empezaron a ser preocupaciones de los investigadores. Los estudios de Deborah Ball en Estados Unidos y Olimpia Figueras en México son representativos de esta línea de trabajo.

Estudios investigativos acerca de las relaciones entre historia, filosofía y educación matemática se destacaron en los años ochenta. Quizás una de las obras más influyentes que condujo a abrir esta línea de investigación es el trabajo de Lakatos, quien dio un vuelco a la visión de las matemáticas, mostrándola como una empresa humana. Este matemático y filósofo estimuló trabajos tendientes a promover esta visión en la escuela. El libro de Davis y Hersh (1982) recoge los principales desarrollos de la época. Investigadores como Paul Ernest en Inglaterra, Anna Sierpinska en Canadá y Ricardo Cantoral en México son reconocidos por sus trabajos desarrollados en esta óptica.

Pero quizás el cambio de dirección más relevante en la investigación en educación matemática durante las décadas del ochenta y el noventa se dio por el interés de investigar el aprendizaje y los procesos cognitivos específicos propios de este. Es decir, los estudiantes entraron en el ámbito de las preocupaciones investigativas. Con fundamento en marcos de referencia muy potentes, como el conductismo y el constructivismo (desarrollados por científicos de la talla de Thorndike, Piaget, Dienes, etc.), y usando estrategias investigativas propias de la psicología, los investigadores comenzaron a estudiar qué y cómo aprendían los estudiantes, cómo desarrollaban capacidades y habilidades matemáticas, cómo procesaban información matemática, cómo resolvían problemas, entre otros asuntos.

Adicionalmente, los investigadores notaron que además de estudiar el aprendizaje de manera general, era necesario —como lo señalaron tempranamente Bauersfeld y Skowronek (1976)— estudiar a fondo el aprendizaje de contenidos específicos, teniendo en consideración la naturaleza y especificidad de estos. La necesidad de desarrollar marcos de referencia particulares dio lugar a una alianza muy productiva entre matemáticos y psicólogos, que derivó en programas de investigación aún vigentes e ilustrativos desde el punto de vista del trabajo colaborativo. Basta mencionar estudios como: la comprensión matemática de las fracciones, las razones y las proporciones, investigada por Kathleen Hart, en Inglaterra; el aprendizaje de los racionales, analizado por Thomas Kieren, en Canadá; el aprendizaje del álgebra, estudiado por Carol Kieran, en Estados Unidos; el razonamiento geométrico, descrito por Pierre y Marie van Hiele, en Holanda. Esta vía de trabajo acarreó el desarrollo de líneas investigativas centradas en el pensamiento numérico, variacional, espacial, métrico, algebraico, analítico, estadístico y probabilístico. También condujo al estudio de procesos como los de argumentar, resolver problemas y demostrar, y al avance de la didáctica de estos dominios y procesos. Afirmando que en las décadas ochenta y noventa reinó la investigación cognitiva en educación matemática, basada en estrategias de indagación empírica, y que fue y continúa siendo muy fructífera.

Además de los avances investigativos mencionados, en la última década del siglo xx se comenzó a dar un giro social en la investigación en educación matemática para prestar atención a aspectos sociales determinantes de la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación en matemáticas. Diversos investigadores coinciden en señalar los comienzos de los años noventa como el momento en el que se empiezan a adoptar teorías socioculturales en los marcos interpretativos y analíticos de los estudios (Lerman, 2006, Valero, 2000). Bajo la influencia de tendencias propias de la psicología cultural, la antropología, la sociología de la educación y teorías acerca del discurso, comenzaron a adelantarse algunos trabajos sobre cognición situada, comunidades de práctica, interacciones sociales, etnomatemática, mediación semiótica, cultura del aula, etc. Adicionalmente, el interés por asuntos socioculturales amplió el panorama de estrategias investigativas empleadas en educación matemática, derivadas de las ciencias sociales. Los trabajos de Alan Bishop, Stephen Lerman, Ubiratàn D'Ambrosio, Ole Skovsmose, Anna Sfard y Paul Ernest, entre otros, son precursores del enfoque sociocultural.

En Colombia la década del noventa puede considerarse como el periodo de surgimiento de grupos de investigación específicos del campo de la educación matemática en las universidades, algunos con participación de profesores de primaria y secundaria. Comenzaron a desarrollarse estudios sistemáticos de corte empírico, muchos de ellos de tipo comparativo, principalmente enfocados en el desarrollo de procesos cognitivos. El interés principal de los investigadores era comprender de qué forma los niños, los adolescentes y los jóvenes acceden al conocimiento matemático, para posteriormente diseñar, implementar y evaluar propuestas didácticas que produjeran un efecto transformador del sistema educativo (Ortiz, 2001). Entre los temas específicos de interés investigativo señalo, a manera de ejemplos: el aprendizaje de los números enteros, las funciones y los racionales; la comprensión de la variable, la ecuación, el límite y la derivada; la enseñanza de las transformaciones geométricas; y las exigencias cognitivas en el acercamiento a procesos como la aproximación, la variación, la argumentación y la demostración. Algunos de los resultados investigativos de esa década tuvieron un efecto directo en la construcción de los *Lineamientos curriculares para el área de matemáticas* (Ministerio de Educación Nacional, 1998), debido a que representantes de los equipos de investigación más conocidos fueron convocados para trabajar en la propuesta.

Otro asunto de interés investigativo en educación matemática en Colombia, en la década del noventa, fue el diseño curricular para la formación de docentes, dado que la mayoría de los grupos de investigación estaban vinculados a programas de formación de profesores. Estos grupos apoyaron el surgimiento y desarrollo de programas de especialización y maestría dirigidos a profesores.

No identifico estudios colombianos de corte sociocultural en las décadas del ochenta y noventa, aunque el profesor Carlos Vasco comenzaba a señalar la necesidad de prestar atención a la dimensión sociocultural de la educación matemática. En la tabla 1.1 listo algunos grupos de investigación que se conformaron en esta década.

Tabla 1.1 Grupos de investigación colombianos en educación matemática conformados en la década del noventa

<i>Grupo de investigación</i>	<i>Institución</i>
Club de Educación Matemática (Club EMA)	Una Empresa Docente, Universidad de los Andes
Grupo de Educación Matemática (GEM)	Universidad del Valle
Asociación Anillos de Matemáticas	Asociación Distrital de Educadores, Bogotá
Didáctica de la Matemática	Universidad Pedagógica Nacional
Grupo de Educación Matemática	Universidad de Antioquia
Grupo Pretexto	Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Grupo Matemáticas Escolares (Mescud)	Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Fuente: información recopilada por la autora.

En las décadas del ochenta y el noventa tres profesores obtuvieron su título de doctor en el campo de la educación matemática en universidades extranjeras, y se convirtieron en los primeros colombianos en tener este nivel de formación en el campo disciplinar. Los autores, nombres de las tesis e institución que les otorgó el título se encuentran en la tabla 1.2.

Tabla 1.2 Primeros doctores colombianos en educación matemática

<i>Fecha</i>	<i>Autor</i>	<i>Tesis</i>	<i>Institución</i>
1980	Luis Carlos Arboleda	<i>Contribution à l'étude des premières recherches topologiques d'après l'œuvre et la correspondance de Maurice Fréchet</i>	Escuela de Estudios Superiores en Ciencias Sociales (EHESS)
1990	Adalira Sáenz-Ludlow	<i>Children's fraction schemes: An elaboration of their number sequence</i>	Universidad de Georgia
1998	César Delgado	<i>Estudio microgenético de esquemas conceptuales de alumnos universitarios en su proceso de aprendizaje de conceptos asociados a definiciones de límite y continuidad en universitarios de primer curso</i>	Universidad de Barcelona

Fuente: información recopilada por la autora.

Siglo XXI

La investigación en educación matemática en los primeros diecisiete años del siglo XXI está enmarcada en la búsqueda de mecanismos para estrechar lazos entre la educación matemática y la sociedad. Se tienen como premisas que el conocimiento se origina en la interacción social y que el aprendiz es miembro de múltiples comunidades a través de las cuales construye significados de las matemáticas; por lo tanto, los roles de la cultura, las prácticas y los valores sociales son centrales y no secundarios en la construcción de conocimiento, y ameritan ser estudiados en profundidad. Con base en estos planteamientos, se han generado importantes trabajos interdisciplinarios y se emplean conceptos, procesos y métodos provenientes de diversas áreas, para comprender el papel que juegan diferentes aspectos sociales en la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación de las matemáticas.

Autores como Ubiratàn D'Ambrosio, Stephen Lerman, Ole Skovsmose, Paola Valero, Alan Bishop, Bill Barton y Günter Ziegler han señalado la necesidad de dar un viraje rotundo a la investigación para dejar de ubicar a las matemáticas como el centro de un sistema alrededor del cual gravitan el sistema educativo, los profesores, los estudiantes y los aspectos sociales determinantes de su enseñanza y de su aprendizaje. En lugar de ello, sugieren poner en el centro del sistema al ciudadano aprendiz, alrededor del cual giran el sistema educativo, las matemáticas, las prácticas sociales, las redes de prácticas sociales en las que las matemáticas se usan, y los sistemas institucionales que regulan su injerencia y sus responsabilidades sociales y culturales (Valero, 1999 y 2000; Vithal y Valero, 2003; Valero y Skovsmose, 2012; Baptista y Ribeiro, 2019).

Los asuntos investigativos que describí para las últimas dos décadas del siglo XX siguen vigentes en el siglo XXI. Y han cobrado renovado impulso temas que van más allá de preocupaciones por el aprendizaje individual, tales como: las diferencias en el aprendizaje por sexo, clase social y grupo cultural; el aprendizaje, los errores y las dificultades que experimentan los estudiantes cuando trabajan colectivamente; el afecto y las actitudes hacia las matemáticas; las creencias de los profesores y la enseñanza y el aprendizaje a nivel universitario; el diseño de tareas y de ambientes de aprendizaje.

La ampliación de la visión se ha incrementado notoriamente los primeros veinte años del siglo XXI, así como el cúmulo de tópicos de interés. La investigación en educación matemática ha trascendido tanto las fronteras de la institución educativa como la atención a diferentes tipos de poblaciones, para avanzar hacia el análisis de instituciones y sistemas de prácticas en los que la educación matemática tiene lugar o se regula. Algunos asuntos nuevos

que se investigan son: el desarrollo de competencias matemáticas para ser un ciudadano socialmente activo y responsable; la búsqueda de oportunidades para lograr acceso equitativo a ideas poderosas en matemáticas; los factores determinantes de la constitución de escenarios de aprendizaje de las matemáticas; la construcción de currículos orientados a poner las matemáticas al servicio en el desarrollo social; el papel de los ambientes de enseñanza y aprendizaje para reproducir patrones de interacción social competitivos o colaborativos; las adecuaciones de los sistemas de prácticas institucionales para ponerlos al servicio de la educación matemática de niños y jóvenes; las mediaciones tecnológicas y su contribución en la formación de ciudadanos matemáticamente informados; la conformación de redes de aprendizaje de estudiantes y profesores de matemáticas mediadas por tecnologías informáticas; el papel de la educación matemática en los procesos de socialización y configuración de identidades; la responsabilidad de la educación matemática en los procesos de inclusión y equidad social; el desarrollo cultural que se logra a través de la generación de escenarios y comunidades de aprendizaje de las matemáticas en los cuales se aúnan esfuerzos para la resolución de problemas del entorno local; la dimensión política de la educación matemática.

Si el final del siglo xx fue la época de esplendor de los estudios cognitivos, el siglo xxi ha permitido el florecimiento de los estudios socioculturales y el empleo de estrategias investigativas provenientes de las ciencias sociales. Dos indicadores del auge de esta tendencia sociocultural son el surgimiento, en el año 1998, del grupo Mathematics, Education, and Society (MES) —comunidad en la que se discuten las dimensiones sociales, culturales y políticas de la educación matemática, centrando la atención en aspectos metodológicos y de cooperación internacional— y la ampliación de los tópicos de estudio que se discuten en el Congreso Internacional de Educación Matemática y en la Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME).

En Colombia los primeros años del siglo xxi se han caracterizado por el posicionamiento de la educación matemática como campo disciplinar e investigativo en el ámbito académico. El incremento del número de grupos de investigación, que pasó de trece en 1995 (Ortiz, 2001) a alrededor de treinta en 2019, y la cantidad de doctores en el campo, cuyo número era de tres en 1998 y en 2019 supera los cien, son indicadores de la dinámica de crecimiento. También lo son la variedad de eventos que reúnen a la comunidad, tales como: el Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, el Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones, la Escuela Nacional de Historia y Educación Matemática, el Encuentro de Programas de Formación de Profesores de Matemáticas, el

Encuentro Regional de Educación Matemática, el Simposio de Matemáticas y Educación Matemática, el Encuentro de Investigación en Educación Matemática, el Encuentro Colombiano de Educación Estadística, el Coloquio Nacional sobre Problemas y Tendencias en Educación Matemática, etc.

En la tabla 1.3 se encuentra un listado de algunos trabajos investigativos de profesionales colombianos, fruto de tesis doctorales presentadas con posterioridad a 2010. Me valgo de ellos para ilustrar algunas ideas planteadas a lo largo del libro. Otros ejemplos son tomados de artículos de investigación o ponencias hechas en memorias de eventos.

Tabla 1.3 Algunas tesis doctorales de investigadores colombianos 2010-2017

<i>Fecha</i>	<i>Autor</i>	<i>Tesis</i>	<i>Institución</i>
2010	Jorge Enrique Fiallo	<i>Estudio del proceso de demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas en un ambiente de geometría dinámica</i>	Universidad de Valencia, España
2010	Leonor Camargo	<i>Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria</i>	Universidad de Valencia, España
2011	Élgar Gualdrón	<i>Análisis y caracterización de la enseñanza y aprendizaje de la semejanza de figuras planas.</i>	Universidad de Valencia, España
2011	Sandra Evelyn Parada	<i>Reflexión y acción en comunidades de práctica: un modelo de desarrollo profesional</i>	Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. Distrito Federal, México
2011	Walter Castro	<i>Evaluación y desarrollo de competencias de análisis didáctico de tareas sobre razonamiento algebraico elemental en futuros profesores</i>	Universidad de Granada, España
2012	Pedro Javier Rojas	<i>Articulación y cambios de sentido en situaciones de tratamiento de representaciones simbólicas de objetos matemáticos</i>	Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia
2012	Jeannette Vargas	<i>Análisis de la práctica del docente universitario de precálculo: Estudio de casos en la enseñanza de las funciones exponenciales</i>	Universidad de Salamanca, España
2013	Yuly Marsela Vanegas	<i>Competencias ciudadanas y desarrollo profesional en matemáticas</i>	Universidad de Barcelona, España
2014	Luz Edith Valoyes	<i>Colombian teachers' expectations of poor and black students' ability to learn algebra</i>	Universidad de Misuri, Estados Unidos

Tabla 1.3 (continuación)

<i>Fecha</i>	<i>Autor</i>	<i>Tesis</i>	<i>Institución</i>
2014	Rodolfo Vergel	<i>Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años)</i>	Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia
2015	Gilberto Obando	<i>Sistema de prácticas matemáticas en relación con las razones, las proporciones y la proporcionalidad en los grados 3.º y 4.º de una institución educativa de la Educación Básica</i>	Universidad del Valle, Colombia
2016	Edgar Guacaneme	<i>Potencial formativo de la historia de la teoría euclídeana de la proporción en la construcción del conocimiento del profesor de matemáticas</i>	Universidad del Valle, Colombia
2016	Luis Ángel Bohórquez	<i>Cambios de concepciones de estudiantes para profesor sobre su gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje en ambientes de aprendizaje fundamentados en la resolución de problemas</i>	Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia
2017	John Henry Durango	<i>Argumentación en geometría por maestros en formación inicial en práctica pedagógica: un estudio de caso</i>	Universidad de Antioquia, Colombia

Fuente: información recopilada por la autora.

La educación matemática, un campo en pleno desarrollo

En las páginas anteriores he hecho un breve recorrido, no exhaustivo, por el desarrollo de la investigación en educación matemática. Más que agotar temas, líneas y personas (me disculpo de antemano con todos aquellos a quienes no he nombrado), la panorámica que presento muestra la complejidad del campo y la multiplicidad de asuntos de los que se ocupa. El desarrollo investigativo no ha estado marcado por la uniformidad, sino por una creciente complejidad y variedad de perspectivas. En ese sentido, difícilmente alguna estrategia investigativa puede servir para tratar todas las inquietudes del campo. Se requieren esfuerzos venidos de múltiples orientaciones para avanzar hacia las metas de ganar claridad o aportar soluciones, mediante la investigación en educación matemática, a los álgidos problemas que enfrenta la sociedad actual. Es un hecho que el aumento en la calidad de interacciones entre las diferentes opciones investigativas tendrá beneficios innegables para la sociedad.

Aun a riesgo de ser demasiado limitada en la síntesis, puedo decir que la investigación en educación matemática ha tenido una evolución en continua ampliación, en aspectos como los siguientes:

- *La finalidad de la investigación en educación matemática.* Inicialmente enfocada en mejorar la enseñanza de las matemáticas, la investigación avanza hacia descripciones, interpretaciones e inferencias sobre el aprendizaje, el estudio de relaciones entre los tres polos del sistema didáctico, el diseño de tareas, asuntos fuera de la escuela que abarcan redes y sistemas de prácticas relacionados con la educación matemática y el desarrollo de cuerpos de conocimientos compartidos en los que modelos, sistemas, conceptos y teorías son útiles para una variedad de propósitos y en una variedad de situaciones.
- *La población.* El interés por la formación matemática de los maestros da paso a la preocupación por la educación matemática de estudiantes de preescolar, primaria y secundaria, la educación matemática universitaria, la educación matemática no formal y la educación matemática de poblaciones diversas. Esta ampliación del campo de visión tiene que ver con reconocer que la educación matemática es un derecho de todos y cada uno de los seres humanos.
- *Los objetos de estudio.* Los contenidos escolares, la enseñanza de las matemáticas y la formación de maestros de matemáticas, como objetos de investigación, dan paso a inquietudes sobre el aprendizaje, el desarrollo profesional de los educadores, el currículo, la evaluación, las relaciones entre historia, filosofía y educación matemática y los factores sociales determinantes de la educación matemática. Actualmente, los objetos de estudio incluyen los sistemas de prácticas sociales y culturales en los que intervienen las matemáticas y las responsabilidades que la sociedad le asigna a la educación matemática para lograr que cada vez más personas tengan oportunidades de acceso equitativo al conocimiento.
- *Los fenómenos de indagación.* Los estudios sobre habilidades y transmisión de información dan paso a investigaciones sobre concepciones, creencias, comprensión, aprendizaje, significados, mediación, comunicación, escenarios, normas, estatus y prácticas sociales de interacción, participación y comunicación, entre otros.

Enfoques, aproximaciones, metodologías, estrategias y recursos

En la segunda sección de este capítulo presento mi punto de vista sobre la distinción entre enfoque, aproximación, metodología, estrategia y recurso para la investigación. Como no hay uniformidad en la terminología, he escogido una y la uso de manera consistente a lo largo del libro, aunque no por ello considere que es la única opción de organización.

Enfoques empírico-analítico, fenomenológico y sociocrítico en educación matemática

Denomino *enfoque empírico-analítico* al conjunto de supuestos, visiones y prácticas de investigación en educación, que desde un punto de vista usualmente llamado positivista asumen quienes consideran que los hechos de indagación sistemática pueden ser sometidos a manipulación, verificación empírica, deducción y formulación de leyes. Esto porque se presupone la existencia de una realidad universal, cognoscible, independiente del contexto y susceptible de controlar y predecir. Con fundamento en marcos conceptuales preestablecidos, los investigadores buscan regularidades en los hechos educativos, los cuantifican, modelan relaciones entre variables y establecen generalizaciones.

Suponiendo que la investigación puede sustraerse de influencias particulares de los participantes en el estudio (incluyendo los investigadores), el enfoque empírico-analítico admite la posibilidad de acceder de manera neutral a conocimiento objetivo sobre asuntos propios del campo de investigación porque asume que los fenómenos están bien determinados.

Por lo menos durante la primera mitad del siglo xx, la investigación en educación matemática tuvo una fuerte influencia de la investigación en ciencias naturales, psicología y pedagogía y compartió con estos dominios el enfoque empírico-analítico propio de la época. Una de las razones de tal influencia fue que muchas de las investigaciones realizadas en pedagogía y psicología se valían de hechos o situaciones que ocurrían en el ámbito de la educación matemática, para derivar generalizaciones sobre el aprendizaje y la educación, y estas investigaciones fueron la base de los estudios en educación matemática.

El enfoque empírico-analítico en educación tiene como objetivos básicos controlar los elementos involucrados en la acción educativa, explicar hechos y predecir resultados (Kilpatrick, 1992; Gómez, 2000; Villarreal, 2003). Por tal razón, el ejercicio investigativo se suele apoyar en recursos estadísticos de recogida de información, análisis de datos y cuantificación de resultados, que son de larga trayectoria y que se han estandarizado desde hace décadas. Esto hace que el enfoque haya sido denominado, comúnmente, enfoque cuantitativo. Sin embargo, como señala Páramo (2013), lo que define el enfoque

de una investigación no son los procedimientos empleados sino la postura epistemológica que se asuma para identificar problemas, formular preguntas y aproximarse al fenómeno de investigación. Es un error asociar unívocamente el enfoque empírico-analítico con procedimientos cuantitativos de procesamiento y análisis de datos. De hecho, tales procedimientos requieren de un acercamiento cualitativo a la hora de juzgar los datos, por lo que no es productivo asociar el enfoque con el procedimiento.

La principal crítica que se le hace al enfoque empírico-analítico está en que muchas de sus prácticas no se ajustan a la naturaleza de los problemas que atiende la investigación en educación matemática, en donde la institución educativa es el principal escenario, y estudiantes, padres de familia, directivos docentes, diseñadores de currículo, son sus protagonistas. El desajuste se debe a que el pensamiento, las acciones y las interacciones de los actores de los hechos educativos no son susceptibles de control y predicción. Además, porque más allá de obtener conjuntos de valores, tendencias numéricas, correlaciones, modelos de regresión, etc., la investigación en educación matemática busca describir, interpretar y sacar inferencias dotadas de significado acerca de los fenómenos que estudia (Romberg, 1992; Ortiz, 2001; Villareal, 2003), aunque ocasionalmente se valga de procedimientos matemáticos para procesar información. La complejidad de los asuntos investigativos y la gran influencia de una multiplicidad de factores contextuales en las prácticas educativas que tienen que ver con enseñar y aprender matemáticas han conducido la mirada al enfoque fenomenológico.

Denomino *enfoque fenomenológico* al conjunto de supuestos, visiones y prácticas de acercamiento a la investigación que, desde una aproximación antropológica, hermenéutica, o colaborativa social, asumen quienes consideran que los fenómenos de indagación sistemática pueden ser descritos, interpretados, explicados (a fin de construir significados sobre las acciones y discursos humanos) y cuestionados (a fin de buscar alternativas para su transformación). El enfoque fenomenológico es bien recibido en la investigación en ciencias humanas porque, más allá de buscar control y predicción, pretende obtener descripciones, explicaciones e inferencias, fundamentadas y suficientemente significativas de los fenómenos en estudio, que permiten establecer relaciones entre eventos, derivar esclarecimientos útiles y convincentes, hacer hallazgos novedosos, etc.

Denomino *enfoque sociocrítico* al conjunto de supuestos, visiones y prácticas de investigación en educación que plantean una racionalidad dirigida a la consecución de objetivos, en la que intervienen juicios, valores e intereses,

con un expreso compromiso para la transformación social y la emancipación del ser humano. Este enfoque no se concibe ni empírico ni interpretativo. Sus contribuciones surgen de la crítica social, con un marcado carácter autorreflexivo, en estudios de corte comunitario y de investigación participativa. El enfoque sociocrítico es privilegiado en educación matemática, particularmente por quienes se ubican en la corriente de investigación “educación matemática crítica” que fue introducida por Frankenstein, en Estados Unidos, y Skovsmose, en Europa, en la década del ochenta del siglo pasado. Como lo señalan Valero y Skovsmose (2012), esta perspectiva privilegia la conceptualización del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, así como la investigación misma sobre estas, como prácticas sociopolíticas.

La investigación en educación matemática favorece actualmente los enfoques fenomenológico y sociocrítico al tener una visión según la cual no basta con identificar los problemas, analizarlos y construir modelos sobre deficiencias o dificultades. La investigación debe ir más allá para explorar oportunidades para el progreso y buscar soluciones que sean útiles a estudiantes, profesores y agentes educativos, en diferentes entornos culturales, porque responden a la complejidad de las circunstancias particulares (Confrey, 2000; Moschkovich y Brenner, 2000).

Los enfoques fenomenológico y sociocrítico suelen asociarse con procedimientos inductivos no numéricos de recolección de información y análisis cualitativo de datos. Infortunadamente, los procedimientos cualitativos no siempre están bien descritos, los investigadores tienen poca guía y muchas veces actúan a ciegas o de forma muy artesanal (Miles y Huberman, 1994). Por eso, aunque se observa una predisposición al uso de procedimientos cualitativos, los investigadores no niegan la posibilidad de describir y manipular datos matemáticamente si con ello logran profundizar en los fenómenos en estudio y producir resultados útiles y confiables.

Desde mi punto de vista, en consonancia con Páramo (2013) y como lo expresaron Dreyfus y Paola (2004) hace ya más de una década, es tiempo de sobrepasar la dicotomía sostenida entre el uso de procedimientos cualitativos y cuantitativos, dejando de asociarlos con uno u otro enfoque epistemológico, para aprovechar los beneficios de cada uno según los fines de la investigación. Como estos autores señalan, es posible imaginar combinaciones bien estructuradas de procedimientos cualitativos y cuantitativos para lograr diseños investigativos más útiles y válidos que los que se conseguirían empleando solo los de un tipo; esto porque los procedimientos no están comprometidos ineludiblemente con el enfoque. Obviamente, el reto de combinar métodos

va de la mano de un enfoque investigativo claro y de establecer los alcances de cada procedimiento, según los propósitos del estudio.

Aproximaciones en las investigaciones con enfoque fenomenológico o sociocrítico

Los presupuestos sobre la naturaleza del ejercicio investigativo ubican a los investigadores en el enfoque empírico-analítico, el fenomenológico o el sociocrítico. Situados en el enfoque, los intereses investigativos específicos, la perspectiva investigativa y los propósitos de la investigación determinan la aproximación que enmarca un estudio. En los enfoques fenomenológico y sociocrítico, Miles y Huberman (1994) identifican tres aproximaciones que son frecuentes en investigación en educación matemática: interpretativa o hermenéutica, antropológica y colaborativa social (esta última más ligada al enfoque sociocrítico). A continuación, me refiero a cada una.

Aproximación interpretativa o hermenéutica

El interés principal de la *aproximación interpretativa o hermenéutica* es rastrear, sin juzgar, las diversas “capas” de significado que subyacen a las acciones, las interacciones y los discursos de las personas (gestuales, verbales o escritos), vistos como conjuntos de signos. En particular, el investigador en educación matemática busca profundizar en los significados que construyen estudiantes, profesores, agentes educativos, sobre: los objetos y procesos matemáticos, la naturaleza de las prácticas educativas y de evaluación, los factores sociales y culturales determinantes de la cultura escolar, etc.

Dos mecanismos pueden ser empleados por los investigadores para interpretar los signos: a) mediante una aproximación interpretativa fenomenológica, en la que se busca una cercanía total con el fenómeno que se está indagando para conocerlo, comprenderlo y captar su significado “en profundidad” de forma global; b) mediante una aproximación interpretativa interaccionista que se enfoca en interpretar grupos de acciones e interacciones que tienen un interés particular. Estos son empleados, por ejemplo, en las investigaciones de Fiallo (2010), Camargo (2010), Gualdrón (2011), Castro (2011), Vargas (2012), Rojas (2012), Valoyes (2014), Vergel (2014), Obando (2015) y Durango (2017). En cualquiera de los dos casos, los investigadores no están más alejados del fenómeno de estudio que sus informantes y se reconoce que las interpretaciones que logran están influenciadas por sus propias elaboraciones. Los investigadores no intentan extraer información del escenario investigativo

de manera imparcial, sino mediante una coelaboración con los participantes del estudio. Por ello, en esta aproximación, como en las demás que corresponden al enfoque fenomenológico, no se pretende generar leyes generales, sino hacer interpretaciones factibles y útiles (Tobin, 2000).

Aproximación antropológica

De acuerdo con la *aproximación antropológica*, la investigación se enfoca en la identificación de regularidades de comportamientos, acciones y prácticas de grupos humanos en su escenario natural. Para el caso del campo disciplinar de la educación matemática, esta identificación se hace en los escenarios en los que la educación matemática ocurre, se planea o se norma. Las regularidades son detectadas por los investigadores, quienes procuran mimetizarse en el escenario para participar en las prácticas del grupo social en estudio como si hicieran parte de este e identificar y describir eventos cotidianos o inusuales, haciendo énfasis en las particularidades locales. Este es el caso de las investigaciones de Vanegas (2013) y Bohórquez (2016). El resultado del ejercicio les permite detectar patrones expresados por medio de usos, lenguajes, artefactos, rituales y relaciones con los cuales logran hacer inferencias sobre aspectos culturales del grupo social en estudio, interés principal de esta aproximación (Kilpatrick, 1992).

Aproximación colaborativa social

La *aproximación colaborativa social* estudia acciones de colaboración en escenarios sociales. Los directamente implicados en el fenómeno en estudio buscan a investigadores que se sientan cómodos en el escenario social y les piden acompañamiento en tiempo real para estudiar la situación. Investigadores sensibles a las inquietudes de los participantes diseñan junto con ellos un libreto para experimentar una transformación en el escenario. La investigación busca una comprensión más profunda del asunto que les preocupa y, eventualmente, una modificación del ambiente social, gracias a un proceso de indagación crítica que busca detectar y remover estructuras invisibles opresivas. Los investigadores pueden tomar dos posturas: reflexiva, asumiendo una actitud de indagación y cuestionamiento; o dialéctica, adoptando una interpretación opuesta a la de los actores locales, para incentivar la mirada analítica. Para el caso de la investigación en educación matemática, esta aproximación busca generar procesos colaborativos, independientes y autónomos, de búsqueda de información, comprensión y transformación de prácticas relacionadas con la educación matemática, procurando su mejoramiento, a partir de asumir res-

ponsabilidades compartidas (Kilpatrick, 1992; Gómez, 2000; Valero, 2000; Parada, 2011).

Metodología y estrategia investigativa

Denomino *metodología de investigación* al conjunto conformado por un enfoque, una o varias aproximaciones, una o varias estrategias investigativas, un conjunto de recursos y una fundamentación teórica específica que genera la base racional para orientar la investigación de principio a fin. En una metodología, la fundamentación teórica y las estrategias se articulan en una relación estrecha de construcción y reformulación mutua, en la que los principios y conceptos asumidos en la fundamentación teórica definen el espectro de lo que es posible y deseable conocer y de cómo puede ser conocido (Moschkovich y Brenner, 2000; Radford y Sabena, 2015; Saxe, De Kirby, Le, Sitabkhan y Kang, 2015; Spangler y Williams, 2019). La metodología determina el problema a investigar, las preguntas que se hacen, el marco conceptual de referencia, el modelo investigativo, las estrategias y los recursos que se ponen en juego para obtener información y analizarla.

Una medida del avance de un campo disciplinar es la consolidación de metodologías específicas de este, con las cuales conducir sus indagaciones. En ese sentido, desde finales del siglo xx y hasta hoy, los profesionales del campo de la educación matemática han intentado consolidar metodologías propias que contribuyan a la construcción de una identidad disciplinar y permitan reconocer quiénes hacen investigación en el campo (Kilpatrick, 1992). A continuación, a manera de ejemplo, describo brevemente dos metodologías que surgieron en la década del ochenta del siglo pasado (la ingeniería didáctica y el ciclo ACE) y otras dos, que recientemente han empezado a cobrar importancia, dirigidas a analizar procesos de aprendizaje en el aula de matemáticas: la metodología de aproximación semiótica (Radford y Sabena, 2015) y la metodología basada en el modelo para la abstracción de acciones epistémicas anidadas (Dreyfus, Hershkowitz y Schwarz, 2015). Ambas metodologías se fundamentan en principios de la psicología cultural promulgados por Vygotski y por sus discípulos Leóntiev y Davydov.

Ejemplo 1.1 Ingeniería didáctica

La *ingeniería didáctica* es una metodología de investigación que surgió en la década del ochenta cuando el investigador francés Guy Brousseau se dio a la tarea de proponer una forma de indagación específica con base en las teorías

de las situaciones didácticas (Brousseau, 1986) y de la transposición didáctica (Chevallard, 1991). Buscaba una metodología que permitiera enfrentar, de manera autónoma y con independencia de otros campos de conocimiento, fenómenos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en las aulas.

La teoría de las situaciones didácticas parte del supuesto de que el aprendizaje se produce mediante un proceso de adaptación y aculturación como producto de la interacción entre el aprendiz y un medio en el que este actúa para resolver una tarea y que reacciona a las acciones del sujeto. El conocimiento se alcanza cuando las acciones que permiten al estudiante alcanzar la meta se refuerzan, mientras que se desestiman las acciones que no conducen a esta. A partir de esta idea, se entiende que las tareas propuestas a los estudiantes son fruto de una cuidadosa planeación, de tal suerte que: a) el conocimiento matemático que se aprende es precisamente la solución óptima a una situación sugerida en la tarea, la cual se denomina “situación fundamental”; b) la tarea se diseña en un medio que reacciona a las acciones del estudiante positiva o negativamente, según si las acciones van encaminadas o no a la situación fundamental; c) el estudiante es capaz de llegar a la solución óptima, con poca ayuda del profesor en “situación adidáctica”; y d) el profesor tiene la responsabilidad de llevar a cabo procesos de “devolución” (al procurar que sus estudiantes acepten la responsabilidad de resolver la tarea por ellos mismos) e “institucionalización” (al conectar el conocimiento construido por los estudiantes con el conocimiento escolar de referencia) (Artigue, 2015). El diseño investigativo parte de un análisis riguroso de las tareas, en el que se articulan los niveles macro (curricular y didáctico) y micro (de la interacción con el conocimiento y con los interlocutores del aula) (Calderón, 2005). El análisis se realiza desde una perspectiva sistémica y particular. En la primera fase del diseño investigativo se llevan a cabo análisis preliminares (epistemológico, cognitivo y didáctico) del objeto de enseñanza. Estos tienen como fin analizar la naturaleza matemática del objeto de conocimiento y el proceso por el que este transitó históricamente hasta convertirse en objeto matemático; además, indagar por las concepciones, dificultades y obstáculos que han primado sobre el objeto en el ámbito educativo y establecer las restricciones propias de la transposición didáctica. A partir del análisis preliminar, se formulan hipótesis investigativas, se conciben las situaciones didácticas y se lleva a cabo un análisis *a priori* de las variables macro- y microdidácticas, relacionadas con las tareas que se propondrán a los estudiantes. En esta fase se prevén las acciones de los estudiantes en el medio, las interacciones entre los estudiantes y el profesor y las oportunidades que los estudiantes tendrán para aprender, y se analiza cómo y por qué podrán aprender. Después, se lleva a cabo la fase de experimentación, en la que se

ejecuta el diseño en el entorno escolar previsto y se recoge información que pueda dar cuenta de los fenómenos identificados en el análisis *a priori*. Luego se realiza un análisis *a posteriori*, que se compara con el análisis *a priori*, y se evalúa si la situación didáctica tuvo el efecto deseado.

Ejemplo 1.2 Ciclo ACE

El *ciclo ACE* es una metodología de investigación que surgió de los trabajos de Ed Dubinsky, realizados en la década del ochenta del siglo pasado. A partir de un planteamiento constructivista sobre la abstracción reflexiva, desarrollado para la educación matemática, el autor propuso la teoría APOE para el aprendizaje de los conceptos matemáticos, la cual tiene en cuenta cuatro componentes: acciones, procesos, objetos y esquemas. Estos están en la mente de un estudiante al momento de construir significado. La teoría ha sido empleada ampliamente y exitosamente para analizar el desarrollo de conceptos, principalmente en el caso de estudiantes de secundaria y universidad.

La teoría APOE brinda a la investigación una herramienta denominada descomposición genética, que es un modelo hipotético del proceso de construcción mental de los conceptos, por el que un estudiante debería transitar en el proceso de aprendizaje. Con esta herramienta como fundamento conceptual, la estrategia investigativa de la metodología llamada ciclo ACE (sigla derivada de la escritura en inglés de actividades, discusión en clase y ejercicios) consiste en promover, implementar y evaluar situaciones de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en las aulas. Las etapas en las que se desarrolla la investigación incluyen un análisis teórico de los conceptos matemáticos, que da lugar a una descomposición genética preliminar de cada uno, el diseño e implementación de situaciones de enseñanza de tales objetos, en las que los estudiantes se involucran en el escenario usual de las clases de matemáticas, y la evaluación de su aprendizaje en términos de acciones, procesos, objetos y esquemas logrados por ellos. En varias oportunidades esta evaluación conduce a reelaboraciones de la descomposición genética, lo que contribuye a su refinamiento.

Ejemplo 1.3 Aproximación semiótica

La *metodología aproximación semiótica*, propuesta por investigadores como Radford y Sabena (2015) y Vergel (2014), parte de la consideración del aprendizaje como un proceso a través del cual los estudiantes se familiarizan gradualmente con significados matemáticos culturales y formas de actuar y razonar históricamente constituidos. La familiarización no implica acuerdo sino comprensión socialmente responsable y conceptualmente articulada. Lo anterior se logra a través de la actividad, por lo que un aspecto central de la

estrategia es el diseño de tareas para favorecerla. A partir de la identificación de requerimientos curriculares generales y de la caracterización de escenarios escolares particulares, se proponen metas y contenidos específicos mediante los cuales el conocimiento es instanciado. Un análisis epistemológico preliminar contribuye a estructurar las tareas y a seleccionar y secuenciar preguntas y problemas. Las primeras tienen la función de atraer a los estudiantes a una actividad; poco a poco las preguntas y los problemas se vuelven más complejos, lo que lleva a los estudiantes a movilizar el contenido matemático en profundidad.

Como uno de los principios que soporta la metodología es que el aprendizaje es un fenómeno social, la interacción en clase es central en el diseño. Generalmente esta se desarrolla con los estudiantes organizados en pequeños grupos mientras el profesor circula entre ellos y se involucra en discusiones, y no como guía u observador, sino como mediador que forma parte de la actividad. Sin importar qué tan planeada sea la clase, es imposible predecir con exactitud lo que ocurrirá. La clase es vista como un sistema dinámico en el cual suceden eventos de los que emergen significaciones que entran en conflicto. En todo caso, los estudiantes y el profesor se involucran en una actividad sensorial y material en la que recurren a sistemas semióticos a través de los cuales ellos dan forma a sus ideas e intenciones en el marco de vías de pensar y actuar constituidas histórica y culturalmente. En este proceso los estudiantes y el profesor producen acciones multimodales a través de las cuales se producen significados complejos de forma subjetiva.

Para analizar los procesos de objetivación y significación en esta metodología, se recurre a recursos analíticos que permiten rastrear momento a momento la actividad corporal y verbal de los estudiantes y el profesor. Lo que dicen, la entonación y el ritmo con el que hablan, los gestos, las expresiones faciales, la posición del cuerpo, lo que dibujan o representan, lo que manipulan, señalan, miran, etc., todos ellos son importantes ya que son recursos semióticos que, de manera integrada, dinámica, sincrónica o diacrónica, permiten a los estudiantes tomar conciencia de lo que significa pensar y hacer matemáticas. Además de las estrategias, la metodología sugiere algunos constructos con los cuales describir e interpretar el aprendizaje como una actividad mediada por signos. Entre ellos menciono: el nodo semiótico, la contracción semiótica y el bucle semiótico (Vergel, 2014; Radford y Sabena, 2015).

Ejemplo 1.4 Modelo para la abstracción de acciones epistémicas anidadas

La metodología denominada *modelo para la abstracción de acciones epistémicas anidadas* (Dreyfus, Hershkowitz y Schwarz, 2015) está concebida para investigar la construcción de conceptos matemáticos, por parte de los

estudiantes, en contextos sociales de indagación específicos. Se fundamenta en presupuestos socioculturales de la teoría de la actividad, sugeridos por Davydov. Según estos, el conocimiento científico no es una simple expansión de la experiencia personal diaria, sino que requiere formas particulares de pensar que se cultivan activamente y que permiten establecer conexiones internas de ideas, en un proceso que va de la abstracción al análisis y a la síntesis. En un proceso dialéctico, en donde un experto interactúa con novatos, estos últimos avanzan desde formas de pensar iniciales a otras más desarrolladas mediante la negociación de significados. La metodología establece un puente entre la dimensión sociocultural y la cognitiva, al fundamentarse también en la idea de Freudenthal de la “matematización vertical”, para imaginar el aprendizaje como un proceso de reconocimiento de constructos matemáticos previos que son útiles para resolver un problema o enfrentarse a una situación y usar la matemática conocida para acceder a nuevos conocimientos matemáticos.

En la metodología se articulan las siguientes fases. La fase 1, de diseño, en la que se anticipa un conjunto de acciones que los estudiantes y el profesor pueden llevar a cabo a través de una secuencia de tareas que buscan promover la transformación continua de objetos matemáticos (*i. e.*, conceptos, relaciones, estrategias, razonamientos); se pretende que los estudiantes tengan oportunidades para construir nuevos objetos, aplicarlos como herramientas en contextos familiares y usarlos en contextos que requieran la elaboración de otros objetos matemáticos. Es necesario configurar un mecanismo para que los estudiantes establezcan conexiones entre el conocimiento previo y los nuevos objetos y lo integren en formas que no estaban disponibles previamente. La fase 2, de análisis preliminar, en la que se examinan las tareas previstas estudiando posibles caminos para implementarlas y gestionarlas. La atención se centra en el conocimiento que hay que activar para realizar la tarea y en el que se espera emerja en el curso de esta. Para cada objeto de conocimiento los investigadores producen una descripción operativa mediante un conjunto de indicadores que permitan afirmar cuándo un estudiante está expresando o usando tal objeto. El resultado del análisis *a priori* es una estructura de objetos de conocimiento que establece relaciones entre unos y otros y destaca aquellos más inclusivos. La fase 3, de obtención de datos y análisis preliminar, en la que se implementan las tareas y se establece la forma mediante la cual se recopilará la información a analizar. Las interacciones seleccionadas son registradas y estudiadas de tal forma que se obtenga un panorama del proceso entero de aprendizaje. Se llevan a cabo ejercicios de reducción de información, dejando solamente aquella relevante, y esta se fragmenta según cambios en el contenido o en la aproximación que están teniendo los estudiantes; con los fragmentos se construyen episodios. En cada episodio se identifica si

aparece o no un nuevo objeto de conocimiento en uno o más estudiantes en los que se ha enfocado la atención. Para ello se rastrean necesidades en los estudiantes, manifestadas con expresiones de entusiasmo, incertidumbre, sorpresa, curiosidad, desconcierto. Son consecuencia de un conflicto cognitivo, no siempre consciente por parte de ellos, que sirve para identificar y explicar el surgimiento de una actividad de construcción de conocimiento. La fase 5, de análisis en profundidad, en la que se usan los episodios en los cuales se ha apreciado la aparición de un objeto de conocimiento. Se identifican y caracterizan los tres estados epistémicos del proceso de abstracción: a) el reconocimiento de los objetos previos que se tienen a disposición, b) la emergencia de un nuevo objeto de conocimiento a partir de la reorganización de los previos (que se hace explícita en acciones de cálculo, elaboración de esquemas, razonamientos, justificaciones, etc.), y c) la consolidación del nuevo objeto a partir de su uso flexible y de manifestaciones expresas por parte de los estudiantes. El ejercicio analítico tiene como meta develar el proceso por el cual emergen los nuevos objetos de conocimiento como una reorganización vertical de los previos y contribuir a refinar el modelo a través del despliegue del proceso ocurrido en el episodio. En este análisis, realizado intervención por intervención, las definiciones que se han hecho operativas son cruciales. Proveen criterios claros para evaluar si la expresión o la acción de un estudiante es evidencia de la construcción que lleva a cabo.

A falta de metodologías específicas que se ajusten a los fenómenos de interés, los investigadores en educación matemática han optado por desarrollar metodologías propias para sus estudios. Se valen de estrategias provenientes de otros ámbitos investigativos, aunque emplean siempre marcos de referencia que aludan a objetos y procesos matemáticos o a prácticas sociales en las que las matemáticas juegan un papel central. El marco de referencia que guía el diseño investigativo es el que determina que la investigación sea del campo o no, y no la metodología. En ese sentido, sigue siendo válida la afirmación de Gutiérrez (1991) cuando señala que la investigación en educación matemática es de carácter multidisciplinar, más que autónomo.¹

Denomino *estrategia investigativa* al mecanismo que pone en funcionamiento un diseño investigativo en el mundo empírico, permitiendo a los

1 Incluso, a partir de 2005, ha nacido un interés por articular diferentes teorías para hacer investigación colaborativa, como una vía de atender fenómenos complejos y aunar sinergias, marcos de referencia y estrategias investigativas entre diferentes grupos. El proceso se denomina *networking* (Artigue, Bartolini-Bussi, Dreyfus, Gray y Predifer, 2005) y se ha visto como un avance en el crecimiento de la comunidad de investigación en educación matemática.

investigadores conectar sus presupuestos teóricos con formas específicas de obtener información para analizarla (Denzin y Lincoln, 1998). Es el conjunto de prácticas, recursos e instrumentos, organizados de manera más o menos planificada, que se emplea en una investigación para hacer y reportar una indagación disciplinada sobre un asunto de interés. Como indica Villarreal (2003), el término “indagación” se refiere a una búsqueda asociada a interrogantes que se quieren responder. Y el calificativo “disciplinada” pretende señalar que el proceso es sistemático y susceptible de ser auditable, además de que los resultados obtenidos pueden ser públicamente examinados y sometidos a crítica por otros miembros de la comunidad donde se inscribe la investigación.

Las estrategias han surgido del trabajo investigativo en diferentes campos disciplinares y van variando con el tiempo. Se caracterizan por privilegiar ciertas formas de poner el diseño en movimiento, según las inquietudes investigativas y en coherencia con los marcos de referencia. Pero, en cualquier caso, el carácter investigativo de un ejercicio académico se consigue si la estrategia asumida cumple tres características, señaladas por Bishop (1992):

- *Indagación.* Dinámica interrogativa y crítica en la búsqueda intencional y sistemática del conocimiento. En el caso de la investigación en educación matemática, se interroga sobre fenómenos como aquellos señalados en la primera sección de este capítulo.
- *Evidencia.* Información que exhibe la situación sobre la cual se centra la indagación. En el caso de la investigación en educación matemática, como se verá, pueden ser registros de clases o de actividades institucionales, producciones escritas y orales de estudiantes y profesores, textos educativos, programas académicos, documentos históricos, etc.
- *Teoría.* Base teórica que guía la indagación y soporta las afirmaciones que se hacen en el estudio, además de ser un producto esencial de la actividad de investigación. En el caso de la educación matemática, este fundamento está referido a las matemáticas involucradas, aspectos de su enseñanza, su aprendizaje, su evaluación, o a las redes de prácticas o sistemas institucionales que tienen injerencia en la educación matemática.

La indagación y la evidencia dependen de la estrategia, mientras que estas dos, junto con la teoría, determinan la metodología. Cabe mencionar el llamado de alerta que hacen Bishop (1992) y Kilpatrick (1994) al señalar que algunas actividades como la mera acumulación de información, el reporte de un incidente que ocurre accidentalmente, el diseño de materiales de enseñanza, los

ejercicios especulativos sobre cómo enseñar tal o cual asunto, la narración de una experiencia educativa, por sí mismas, no constituyen un ejercicio investigativo, aunque cada una de ellas podría aportar evidencias en algún momento de un proceso de indagación, de acuerdo con la estrategia que se adopte. En el capítulo 3 del libro presento un conjunto de estrategias que son empleadas en investigación en educación matemática por quienes adoptan un enfoque fenomenológico o sociocrítico.

Recursos para obtener información y para analizar datos

Una estrategia se apoya en un conjunto de recursos que se ponen en juego en un diseño investigativo con la intención de llevar a cabo la indagación disciplinada, recabar evidencia acerca del fenómeno estudiado e intervenir sobre la información recolectada, de manera analítica. Los *recursos* son el conjunto de acciones investigativas, técnicas e instrumentos para registrar información, depurarla, construir datos, analizar datos y visualizar hallazgos.

La selección de recursos está determinada por el enfoque, la aproximación investigativa, el marco teórico de referencia, las preguntas de investigación, la estrategia, el contexto experimental y las posibilidades y limitaciones económicas y de tiempo. Por esa razón, cada investigación es única y difícilmente repetible en toda su extensión.

Dadas la diversidad y la complejidad de los asuntos que se investigan en educación matemática, se requieren recursos y formas productivas variadas para enfrentar los fenómenos y tener oportunidades para aclararlos o resolverlos. Pueden ser entrevistas, observaciones directas, artefactos culturales, documentos, materiales audiovisuales, narraciones, fotos e incluso experiencias personales (Denzin y Lincoln, 1998).

Frecuentemente los investigadores en educación matemática se valen de recursos empleados en otros campos, como los de la psicología, la pedagogía, la antropología, la historia y la sociología (Kelly y Lesh, 2000). Pero no por ello adoptan las “metodologías” de estos campos, pues no usan sus marcos de referencia ni tienen las mismas preguntas de indagación. Conviene ser precisos al hablar y hacer referencia a recursos y no a metodologías. Por ejemplo, no es correcto decir “mi metodología es la etnografía”, a no ser que el interés sea producir información referida a la cultura. Pero es posible decir “empleo técnicas etnográficas” para aludir a la forma como se recolectó la información para el estudio.

Termino esta sección haciendo una precisión. Como ya mencioné, es posible que una investigación con enfoque fenomenológico o sociocrítico se valga

de algunos procedimientos cuantitativos, si el diseño investigativo lo requiere. Esto no produce incoherencias epistemológicas si el tratamiento dado a la información numérica recogida se ajusta al enfoque. De hecho, es curioso que, en los últimos diez años, a pesar de prevalecer los enfoques fenomenológico y sociocrítico, hay un renacer de procedimientos cuantitativos empleados en la investigación en educación matemática. Basta echar una ojeada a las actas de las reuniones anuales del PME para corroborar esta afirmación. Según Kelle y Buchholtz (2015), esto puede deberse al impacto que han tenido los estudios evaluativos de desempeño a gran escala, como el Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias (TIMSS, por su sigla en inglés) y el Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA, por su sigla en inglés), y al reconocimiento, cada vez mayor, de las limitaciones de algunos procedimientos cualitativos para atender en profundidad, sin apoyo de procedimientos cuantitativos, los asuntos investigativos. Lo anterior ha llevado a los investigadores a desvincular los procedimientos empleados del enfoque. Los autores invitan a considerar la combinación de procedimientos organizando la investigación en subestudios para atender asuntos particulares en cada uno, de tal forma que los resultados dan cuenta de un fenómeno complejo. Proponen tres formas de combinar los procedimientos cualitativos y cuantitativos:

- *Diseño secuencial cualitativo → cuantitativo.* Procedimientos cualitativos iniciales ayudan a identificar asuntos centrales y a desarrollar conceptos teóricos e hipótesis que pueden ser posteriormente examinadas con procedimientos cuantitativos.
- *Diseño secuencial cuantitativo → cualitativo.* Procedimientos cuantitativos iniciales pueden ser empleados para identificar áreas problemáticas y preguntas de investigación, las cuales pueden ser luego investigadas con ayuda de procedimientos cualitativos.
- *Diseño paralelo cualitativo-cuantitativo.* Los dos tipos de procedimientos se ponen en juego en paralelo buscando recopilar los datos y analizarlos con el apoyo de técnicas provenientes de los dos tipos de procedimientos, para enriquecer la información obtenida por ambas vías.

La combinación puede ir más allá. Por ejemplo, si se estudia un nuevo ambiente de aprendizaje en una práctica escolar, usualmente al inicio del estudio hay poco conocimiento previo acerca de sus efectos y es muy difícil suponer hipótesis que se puedan evaluar en el escenario antes de acceder a este. En ese caso, un estudio exploratorio, usando procedimientos cualitativos, en el que se examinen los efectos del nuevo ambiente de aprendizaje

podría llevar a generar hipótesis que posteriormente puedan testearse con procedimientos cuantitativos. Y posteriormente un nuevo estudio mediante procedimientos cualitativos puede ser útil para profundizar en los hallazgos del estudio realizado cuantitativamente, empleando teorías del campo de la educación matemática que permitan fundamentar interpretaciones. A largo plazo, el análisis cualitativo puede derivar en propuestas de nuevos ambientes de aprendizaje, que también pueden ser investigados empíricamente combinando procedimientos cualitativos y cuantitativos (Kelle y Buchholtz, 2015).

Postura ecléctica o de caja de herramientas

Propongo, en consonancia con algunos investigadores (Romberg y Gómez, 1997; Kelly y Lesh, 2000), ver el ejercicio investigativo en educación matemática desde un punto de vista pragmático. Además de concebirlo como una indagación disciplinada y sistemática, le agrego el calificativo de “auténtica”, es decir, condicionada por las inquietudes genuinas del investigador —lo que le permite capturar de mejor manera la información que necesite, analizarla y producir recuentos consistentes, sistemáticos y científicos de sus hallazgos— y no por el deseo de seguir una aproximación o una estrategia al pie de la letra. Cuidando la coherencia del diseño y la ruta en busca de respuestas a las preguntas, los investigadores pueden combinar aproximaciones, estrategias y procedimientos para construir diseños cuya naturaleza no está necesariamente predeterminada y cuyos recursos sean vistos como el resultado de buscar en una caja de herramientas aquellas que se requieren para enfrentar la tarea. Obviamente, la escogencia de los recursos empleados debe estar convenientemente explicada y justificada por los objetivos investigativos y debe producir diseños coherentemente lógicos.

Este punto de vista y la conciencia de la complejidad de los asuntos que se investigan en educación matemática me lleva a mencionar una tercera aproximación fenomenológica, además de la hermenéutica, la antropológica y la colaborativa social: la aproximación sistémica (Kilpatrick, 1994), que es asumida, por ejemplo, en la metodología de ingeniería didáctica.

Aproximación sistémica

De acuerdo con la aproximación sistémica, la investigación en educación matemática se enfoca en establecer relaciones entre comportamientos, discursos, interacciones, acciones (colaborativas o no), concepciones, significados y prácticas de grupos humanos en escenarios naturales o prediseñados en donde

la educación matemática ocurre, se planea, se transforma o se regula. Para ello, el investigador se vale de aproximaciones antropológicas, interpretativas (fenomenológica o interaccionista) y/o de colaboración social (reflexiva o dialéctica) y de algunos procedimientos usados principalmente en los enfoques fenomenológico o sociocrítico, para construir una estrategia propia que le permita analizar un fenómeno sistémicamente, no de manera aislada, sino en el marco de situaciones complejas.

En una postura ecléctica, como la que defiende, las estrategias y los recursos existentes se independizan de la aproximación, e incluso del enfoque, para ponerse al servicio de la búsqueda metódica. Como lo indican Cook y Reichardt (1986; citados en Sierra, 2011) y Kilpatrick (1994), son más los beneficios que resultan de combinar aproximaciones o estrategias que los de pretender mantener una posición radical; en lugar de acomodar la investigación a un conjunto de estrategias, son estas las que se acomodan a la investigación, a partir de una combinación de pasos y recursos pertinentes y útiles a los fines investigativos. Ello no implica que la combinación de recursos sea un asunto trivial, dejado al azar. Es necesario buscar formas de enriquecer unos recursos con otros y capitalizar la precisión de unos y la autenticidad de otros.