



**UNIVERSIDAD PEDAGOGICA
NACIONAL**

Educadora de educadores

**Facultad De Ciencia Y Tecnología
Departamento De Física**

Fecha: Jun 09, 2025

TRABAJO ELABORADO POR

David Zabala Arenas, Andrés Felipe López

TITULADO

Acercamiento histórico al concepto de entropía como información para el estudio de la evaporación de agujeros negros

SEA ACEPTADO EN CUMPLIMIENTO PARCIAL DE LOS REQUERIMIENTOS PARA EL TITULO

DE

LICENCIADO EN FÍSICA EN EL DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Acercamiento histórico al concepto de entropía como información para el estudio de la evaporación de agujeros negros

Por

David Zabala Arenas, Andrés Felipe López

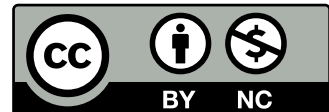
Monografía

Entregado en cumplimiento parcial de los requerimientos
para el grado de Licenciado En Física
en la Facultad de Ciencia y Tecnología en
Universidad Pedagógica Nacional, Jun 2025

Bogotá, Colombia

© 2025 by [HMI² Laboratory, Universidad Pedagógica Nacional](#). All Rights Reserved.
Re-distributed by Universidad Pedagógica Nacional under license with the author.

This work is licensed under a [Creative Commons “Attribution-NonCommercial 4.0 International”](#) license.



This dissertation is online at: <https://sites.google.com/view/hmi2lab/home>

Have you found the limits of your abilities? Even though your technique, physique and mental resolution are all still lacking? Those who're "naturally talented" than you or possess something which surpasses your abilities have been on a different level all along. It's foolish to devote all of your time and energy to bemoaning the fact that it's impossible to overcome that difference, no matter how hard you work, how well you strategize, or who your teammates are. You can complain about that only when you've actually done everything you possibly can. Rather than despairing and giving up because you're not a "genius", believe your strength is not limited to this and continue on the path straight ahead of you...

— Haruichi Furudate

Agradecimientos

Queremos agradecer todas las personas que han sido parte de este proceso, desde que este trabajo no era más que una idea. A quienes nos vieron crecer y confiaron, incluso antes que nosotros mismos, en que lograríamos sacar adelante este proyecto; a nuestras familias, por ese apoyo incondicional a lo largo de toda nuestra formación como licenciados en física; a los docentes de la licenciatura, que aunque no eran nuestros asesores directos, especialmente a la profesora Marina que nos brindó siempre su orientación, consejos y apoyo sincero para estructurar este trabajo de la mejor manera posible. Agradecemos también a Dios, porque en medio de cada situación vivida, de cada dificultad o duda, su guía nos ha sostenido y confiamos en que sus planes seguirán conduciendo nuestros pasos hacia adelante.

Finalmente, yo, Andrés, quiero agradecer especialmente a David, por brindarme toda su confianza para realizar juntos este trabajo. Pasando por medio días y noches de estrés, aún cuando los temas parecían incomprensibles, su paciencia, dedicación y que sabía que siempre contaba con su apoyo me aseguraban que juntos podíamos salir adelante. Gracias también a todas las personas que nos rodearon y que, con sus palabras y acciones siempre confiaron en nosotros.

Dedicatoria

Dedicado a todo estudiante en física y educación que en medio de las dificultades ha podido llevar a cabo su proceso como docente para mostrar al público que las ciencias son accesibles y no es de unos pocos.

Yo, David, le dedico este trabajo a mi mamá y mi abuela que me ha apoyado incondicionalmente en mi proceso y me ha brindado la oportunidad de estudiar, también a mi familia en general que ha visto en mí un potencial, especialmente a mi hermano y mi hermana que me pasaron por estos procesos y me brindaron la mejor ayuda posible. También dedico este trabajo a las únicas dos personas con las cuales compajiné en estos últimos tres años, ya que, así como yo los veo como un $3 \times 10^8/10$, ellos han logrado ver en mí más allá de lo que alguien vería en mí. Finalmente, a pesar de todas las complicaciones y la dificultad de vernos durante muchos años, le dedico este trabajo a mi papá que a pesar del tiempo, buscó la manera de poder estudiar y dedicarse a lo que tanto le gustaba. Y, aunque no haya podido estar presente en su graduación, espero que donde sea que se encuentre pueda estar presente en esta etapa de mi vida.

Índice general

Agradecimientos	v
Contenidos	vii
Índice de Figuras	viii
Índice de Tablas	x
1. Introducción	1
1.1. Marco teórico y planteamiento del problema	1
1.1.1. Las concepciones de la entropía del siglo XIX dentro enseñanza de la termodinámica en el siglo XXI	1
1.2. Planteamiento de la pregunta y objetivos de la investigación	6
1.2.1. Pregunta de investigación	7
1.2.2. Objetivos de la investigación	7
1.3. Metodología	8
2. La transición de la entropía de Clausius, Boltzmann y Planck a la entropía de Shanon, Bekenstein y Hawking	10
2.1. El segundo principio de la teoría mecánica del calor de Clausius	11
2.2. Boltzmann y el modelo mecánico estadístico de la teoría mecánica del calor	15
2.3. La irreversibilidad de los procesos y el segundo principio de la mecánica del calor por Max Planck	20
2.4. Un nuevo ecosistema intelectual: La teoría en telecomunicaciones de Claude Shannon	31
2.5. El segundo principio generalizado de Jacob Bekenstein y Stephen Hawking	41
3. La reversibilidad e irreversibilidad de los procesos y la información inaccesible	45
3.1. Las cantidades macroscópicas y las distribuciones	46
3.2. La toma de medidas y la información en los sistemas	53
4. Evaporación e información no accesible en un agujero negro	63
4.1. La evaporación de los agujeros negros	66
4.2. Entropía de un agujero negro de Schwarzschild	70
4.3. Introducción al problema de la información en los agujeros negros	74

5. Diseño de una propuesta didáctica para la enseñanza de la entropía y su relación con la información	80
5.1. Visión general	80
5.2. Objetivos de enseñanza y de aprendizaje	82
5.2.1. Objetivos de Enseñanza	82
5.2.2. Objetivos de Aprendizaje	82
5.2.3. Contenidos a enseñar	83
5.2.4. Secuencia de enseñanza	83
5.2.5. Actividad 1	84
5.2.6. Actividad 2	84
5.2.7. Actividad 3	85
6. Conclusiones y análisis	87
6.1. Reflexiones sobre la variación conceptual de la entropía	87
6.2. Reflexiones sobre la secuencia didáctica	88
6.3. Conclusiones finales	89
A. Propuesta de actividades para la enseñanza de la entropía y su relación con la información	97
A.1. Actividad 1: Análisis entropía y probabilidad	97
A.2. Actividad 2: Entropía y pérdida de información	99
A.2.1. Procedimiento:	100
A.3. Actividad 3: Entropía en modelos de clasificación estelar	102
A.3.1. Objetivos de enseñanza:	102
A.3.2. Objetivos de aprendizaje:	102
A.3.3. Procedimiento:	103
B. Códigos Python para los modelos de clasificación estelar	107
B.1. Decision tree	107
B.2. Logistic regression	110
C. Derivación de la radiación de Hawking	115
C.1. Preliminares	115
C.2. La segunda cuantización y los espacios de Fock	118
C.3. Transformaciones de Bogolyubov y la distribución de partículas	125
D. Derivación ecuación de campo	132
E. Solución parte temporal y radial	136

Índice de figuras

2.1.	Diagrama del ciclo de Carnot: (1) A→B: Expansión isotérmica temperatura T_h , (2) B→C: Expansión adiabática, (3) C→D: Compresión isotérmica a temperatura T_c , y (4) D→A: Compresión adiabática.	12
2.2.	Diagrama del ciclo de Carnot para un cuerpo parte liquido y parte gas. Elaboración Propia. Rediseño (Clausius, 1879) [1]	13
2.3.	Ciclo con intercambios de calor y variación de temperatura de forma simultánea, Elaboración Propia. Rediseño (Clausius, 1879) [2]	14
2.4.	Diagrama de la distribución de velocidades de maxwell, tomado de Maxwell-boltzmann distribution,” 2005. [Online].[3]	17
2.5.	Proceso irreversible	22
2.6.	Diagrama de un estado macroscópico con sus estados microscópicos	28
2.7.	Volumen dividido en k secciones	30
2.8.	Diagrama TDM	32
2.9.	Diagrama esquemático de un sistema general de comunicación, tomado de [4]	34
2.10.	Árbol de probabilidad para dos periodos de tiempo	37
2.11.	Gráfica de entropía para el sistema de una moneda en función de la probabilidad p , tomado de [4]	39
3.1.	Mismo macroestado tetra para diferentes microestados, Creación propia	48
3.2.	Dos rectángulos donde se generan puntos aleatoriamente, figura inspirada por (Styer, 2019) [5]	52
3.3.	Gráfica para al entropía del sistema con solo una medición de energía y con dos mediciones de energía, utilizando unidades naturales	57
4.1.	Gráfica de masa vs tiempo para agujeros negros de sistemas binarios asumiendo que los fotones tienen dos grados de libertad y el factor del cuerpo gris es de 0,5. Los datos usados fueron recolectados por Grzegorz Wiktorowicz y Chris Belcynski y se tomaron de ([6])	68
4.2.	Gráfica de masa vs tiempo aproximada con $M_0 = M_\odot$, $\Gamma = 1$ y $\gamma = 2$	69
4.3.	Gráfica del la razón de cambios de temperatura y masa de un agujero negro con $M_0 = M_\odot$, $\Gamma = 1$ y $\gamma = 2$	70
A.1.	Representación grafica actividad pinpones, creación propia.	98

A.2. Diagrama de Hertzsprung-Russell, tomado wikimedia, Diagrama de Hertzsprung-Russell [Online] de disponible en: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:HRDiagram-es.png	103
A.3. Árbol de decisión para la clasificación de estrellas	105
B.1. Región de Decisión para Decision Tree, Imagen generada por el siguiente código .	107
B.2. Región de Decisión para Logistic Regression, Imagen generada por el siguiente código	111
C.1. Operador de creación actuando en un espacio de Fock de N partículas	122
E.1. Soluciones de la expansión por polinomios para la parte radial sin sus exponentes complejas	143

Índice de cuadros

3.1. Leyes de la termodinámica y su interpretación bajo la teoría de la información . . .	62
5.1. Resumen de objetivos y preguntas orientadoras	83

Capítulo 1

Introducción

1.1. Marco teórico y planteamiento del problema

1.1.1. Las concepciones de la entropía del siglo XIX dentro enseñanza de la termodinámica en el siglo XXI

A lo largo del tiempo, ciertos conceptos han sufrido distintas maneras de ser interpretados, donde uno de esos ha sido la entropía. Este concepto se ha sometido a distintas interpretaciones mediante el problema de la irreversibilidad de los procesos y el principio de equivalencia de las transformaciones. Por otro lado, dentro del campo de la cosmología, existen ciertos objetos que parecen violar el segundo principio de la termodinámica, los cuales son los agujeros negros. Tal cuestión fue desarrollada por John Archibald Wheeler y su estudiante Jacob David Bekenstein, que se preguntan sobre lo que pasaría con la entropía de una taza que es tragada por un agujero negro; dentro de ese experimento mental se responde que la entropía desaparecería y, por lo tanto, la entropía del universo decrecería, cosa que viola el segundo principio. No obstante, Bekenstein, para responder a tal paradoja, asocia una entropía al agujero negro, pero la interpreta como una medida de información perdida del estado interno del agujero para un observador externo (Bekenstein, 1974)[7], teniendo en cuenta que los procesos de estos objetos son en su mayoría irreversibles. Este planteamiento es motivante para comprender cómo la entropía se relaciona con la información en estos sistemas extremos.

Con base a lo anterior, es de destacar que la entropía es un concepto que nos permite estudiar los procesos termodinámicos porque da cuenta de lo que es posible en la naturaleza, de acuerdo con los planteamientos de Planck, y además si hacemos una revisión de cómo se ha abordado, esto depende del contexto en el que se sitúan los científicos de la época, en este caso Bekenstein que lo pone como medida de información en el marco de la cosmología a diferencia, por ejemplo, de Clausius que la pone como medida de transformación en el marco de los estudios de Carnot sobre las máquinas térmicas (Revolución industrial). En ese orden, un acercamiento histórico permite rastrear el cambio del concepto de entropía en la física y de cómo se integran bajo diferentes formulaciones, donde estas formulaciones nos permiten reflexionar sobre este concepto también desde una perspectiva más moderna, es decir, una época donde la información es el principal insumo para el desarrollo y la toma de decisiones, interpretar la entropía como una medida de información se adecúa más a nuestro contexto a diferencia de los conceptos del siglo XIX. Es decir que, esos conceptos de la entropía llegan a ser algo abstractos dentro de la enseñanza en la actualidad, debido a que “Cada sujeto o colectivo ha de organizar sus propias respuestas en relación con el grado de comprensión” (Garzon Barrios, 2023)[8] dejándolos así a interpretación de cada individuo. No obstante, a pesar de que cada persona puede tener una comprensión diferente, esto puede generar confusiones debido al uso incorrecto del lenguaje y el suponer que las teorías son convergentes, llevando una visión lineal de las ciencias, siendo en el caso de la enseñanza de la termodinámica donde se suele omitir esa distinción de los modelos macroscópicos, microscópicos y mesoscópicos (Garzon Barrios, 2023) [8], donde esa enseñanza de la entropía basada en manuales técnicos y explicaciones faltantes de contexto histórico, ha generado concepciones limitadas y confusas en los alumnos. En diversos currículos colombianos y latinoamericanos se intenta “concretar” el concepto recurriendo al modelo cinético-molecular, sin abordar su trasfondo más amplio (Chaves Vallejo, 2013) [9]. Por ejemplo, se describe el incremento de desorden sin mencionarlo como perspectiva molecular y sin discutir quién introdujo el concepto ni por qué. Cortés Pérez (2016) [10] documenta que metodologías inadecuadas y una débil preparación matemática provocan obstáculos en la enseñanza de la entropía y temas relacionados, donde “...aunque popular, la analogía ‘entropía = desorden’ es incompleta” (Flores Ulloa, 2014) [11]. Esto se debe a que la definición del lenguaje común no explica por qué el hielo (ordenado) tiene menor entropía que el agua líquida (desordenada), donde la visión estadística de Boltzmann resuelve esto vinculando entropía con probabilidad,

no con orden y desorden visual.

Este uso de palabras propias de la ciencia dentro del lenguaje común es un limitante si no se acude al origen de ese concepto, donde un acercamiento histórico al final es un método que aborda directamente las dificultades conceptuales existentes y supera las limitaciones de los enfoques tradicionales, integrando esa variación conceptual. Al presentar este acercamiento histórico, se logra una comprensión integrada del concepto, permitiendo en este caso presentar cómo la entropía surge en distintos contextos, presentando sus diferentes etapas, pasando de un principio físico que parte de un concepto abstracto a un concepto de información.

Rudolf Clausius el primero en formalizar dicho término mientras buscaba comprender el funcionamiento de las máquinas térmicas y describir cómo son las transformaciones de los cuerpos ante intercambios de calor, donde al considerar procesos cíclicos, logró dar cuenta de que el calor no se transfiere de una región fría a una región caliente. Con ello, Clausius centra su trabajo en el estudio de la reversibilidad de los procesos, donde para los procesos irreversibles el calor del sistema deberá ser modificado bajo una transformación del calor, la cual denominó entropía “...tomando la palabra griega transformación” (Clausius, 1869) [1].

La visión de la entropía por parte de Clausius no solo iba ligada a la temperatura del cuerpo sino a la distribución de partículas de este desde una perspectiva mecánica, idea por la cual Ludwig Boltzmann realiza un modelo microscópico en torno a la entropía, buscando comprender el comportamiento de los fenómenos macroscópicos desde una perspectiva más sofisticada. Boltzmann parte desde el estudio de los gases, analizando el movimiento y la organización de las partículas, estableciendo así un desarrollo matemático que tenía en cuenta las energías cinéticas y potenciales de las partículas, donde “...al revisar la organización de las partículas en lo que es un gas, la manera en la cual las partículas estarán distribuidas en dicho sistema no tendrá lo que es una configuración específica sino, por el contrario, que el comportamiento de estas es un comportamiento aleatorio y molecularmente desordenado.” (Boltzmann, 1898)[12]. Bajo esta mirada, describe que las moléculas no guardan ninguna configuración específica, lo que lo lleva a realizar ciertos cálculos matemáticos con el fin de establecer una relación de los estados posibles en los que puede estar

un gas, configurando una cantidad que es proporcional a la cantidad de transformación dada por Clausius.

Max Planck realiza un desarrollo similar al de Clausius del segundo principio, puesto que su interés iba de la mano con la dirección de los procesos, es decir, que para él era importante desarrollar tal principio para la termodinámica. Él nos presenta el segundo principio como la diferenciación de los procesos reversibles e irreversibles en función de la preferencia de la misma naturaleza por los estados finales o iniciales, es decir, que una mayor cantidad de transformación en el sistema implica que la naturaleza está priorizando el estado final, lo que convierte todo ese proceso en irreversible.

Por otro lado, al revisar lo que se entiende por información, encontramos autores como Mensah y Goderre que lo presentan como los datos (hechos, estadísticas, números, símbolos, imágenes, audio, etc) que son estructurados, es decir, contextualizados (Mensah Goderre, 2020)[13]. Además, este término tiene su formalismo dentro de las matemáticas, representando así que la información puede ser cuantificada, idea la cual fue presentada por Claude Shannon en 1948 en su documento “A Mathematical Theory of Communication”, redefiniéndola como entropía de la información. Él nos permite establecer que a mayor entropía, mayor será el contenido de información no conocido en una señal. Del mismo modo, Von Neumann motiva los desarrollos de Shannon, interpretando la entropía como una medida de incertidumbre o información bajo una perspectiva probabilística de los fenómenos térmicos.

De acuerdo con los planteamientos mencionados, al retomar la irreversibilidad de los procesos en general, se observa que a mayor entropía en un sistema también aumenta la preferencia de la naturaleza para estar en un estado final, como lo había planteado Planck, y además existe cierta incertidumbre sobre la información del estado inicial. Esta cuantificación de irreversibilidad e información abordan el mismo concepto, la entropía, como menciona Granger “el hecho de que la información y la irreversibilidad están profundamente ligadas y que la entropía teórica de la información ayude a entender la entropía termodinámica” (Granger, 2013)[14]. Idea que es motivante para establecer esa relación que Bekenstein había propuesto en el estudio de la termodinámica de

los agujeros negros, pero ampliándola bajo un acercamiento histórico que dé cuenta de esos procesos de variación conceptual alrededor de la entropía.

Por otro lado, uno creería que el concepto de entropía, al ser refinado durante los años, fue solucionado teóricamente y es completamente inmutable, dando por hecho las concepciones de esta; sin embargo, como lo menciona Marina Garzón Barrios

”Uno de los problemas en la enseñanza de la física suele ser que los profesores consideramos que las teorías ya estructuradas en los campos de estudio de nuestra disciplina son inmodificables porque los problemas principales se han solucionado y las preguntas nacientes corresponden a nuevas áreas de la ciencia” (Garzón Barrios, 2023) [8]

Esto implica que las múltiples "definiciones" de entropía llevadas a los cursos por los mismos profesores a la luz de los libros de texto utilizados, coexisten sin llegar a contradecirse entre ellos, puesto que hay una dependencia del contexto en donde estamos situados [11] ¹.

Esto motiva más a utilizar la historia como una herramienta que nos permita acercarnos a esas distintas concepciones, hasta su uso en fenómenos más contemporáneos, dejando de lado esas definiciones reduccionistas de la entropía, como la más famosa de "medida del desorden". Donde esta definición utiliza una palabra del lenguaje común que es vaga, ya que, "entropía es una cantidad medible y precisa, mientras que desorden es una cuestión de opinión"(Styer, 2019) [5],². Evidentemente, nuestro trabajo no cuestiona la validez de las definiciones, ya que, de acuerdo con Toulmin, el problema de las definiciones es un problema propio de cómo concebimos esos conceptos para propósitos de la física [15].

De acuerdo con Toulmin, un acercamiento histórico a las ciencias sitúa el desarrollo de las "empresas disciplinarias"; un ecosistema intelectual donde se ubican los científicos; como constelaciones evolutivas de los conceptos, problemas, procedimientos e ideales de las sucesivas generaciones de científicos [16]. Siendo un claro ejemplo el de la entropía, donde las definiciones dadas a través de la historia no llegan a ser lo suficientemente claras y, como consecuencia, se toman

¹Esta es una de las conclusiones a las que Ulloa llegó a partir de su investigación del concepto de entropía dada por profesores universitarios en su tesis doctoral.

²En los siguientes capítulos veremos a lo que se entendía realmente por desorden

distintas maneras de interpretarlo, como lo menciona Malagón y Ayala [17] los conceptos no definen, sino que se presentan como una manera de mirar el mundo, es decir, que el estudiante o la persona común basa esa mirada del mundo bajo un esquema de organización mediante sus experiencias sensoriales. Estos esquemas son usados para el entendimiento de los fenómenos térmicos. Sin embargo, la literatura usada en los cursos de termodinámica toma un camino más algorítmico, libros como “Abbott M. y Van Ness, H”, “Callen, H”, “Reif, F”, “Pippard, A. B” [11] los cuales presentan la entropía de manera matemática y algorítmica sin lograr presentar los fenómenos y el contexto histórico de los cuales el concepto nace.

1.2. Planteamiento de la pregunta y objetivos de la investigación

El concepto de entropía resulta especialmente complejo y abstracto, lo que dificulta su asimilación mediante métodos convencionales. Varios estudios han resaltado que enseñar entropía es todo un desafío porque los estudiantes presentan numerosas dificultades y concepciones erróneas sobre el tema. Por ejemplo, (Karam et al. 2022) destacan que la complejidad matemática intrínseca del concepto y la falta de referencias directas a la vida cotidiana hacen difícil su aprendizaje, y proponen que revisar la formulación original de Clausius podría ofrecer importantes luces pedagógicas; en este sentido, un abordaje histórico permite rescatar las motivaciones y tratamientos originales (Clausius, Boltzmann, Planck) que llevaron al desarrollo de la entropía, brindando un recorrido lógico y motivador. Además, según (Conner, 2008) [18] este tipo de estrategia como acercamiento histórico favorece el éxito educativo en las ciencias al vincular el aprendizaje con la evolución real del conocimiento.

Teniendo en cuenta este desafío para acercarse de manera concisa al concepto de entropía y como se mencionaba anteriormente, se considera pertinente seguir los estándares del MEN y realizar un acercamiento histórico del concepto de entropía de tal manera que se establezca una relación con el concepto de información. Además, al revisar el programa curricular del curso de termodi-

námica de la licenciatura en física de la Universidad Pedagógica Nacional, se menciona que se abordan problemas tales como la direccionalidad e irreversibilidad de los procesos bajo las cuales se define la magnitud de entropía. Por esto mismo, se propone realizar un acercamiento histórico relacionado con un fenómeno de la cosmología que pueda ser usado como complemento en los cursos de termodinámica, donde el acercamiento histórico no es sólo ilustrativo, sino que liga la entropía con problemáticas actuales. Como lo puede llegar a ser la paradoja de la información en los agujeros negros, donde este enfoque histórico permite a los estudiantes comprender el origen de este problema y como vivimos en una era digital centrada en el flujo de información, vincularla con la termodinámica clásica resulta relevante para la cultura científica actual. En conjunto, el acercamiento histórico contextualiza el concepto tanto en desafíos teóricos como en su rol en los futuros licenciados, de tal manera que se subraya su pertinencia, puesto que nos permite expandir esa comprensión de los fenómenos termodinámicos bajo una mirada moderna. Esto con el fin de brindar nuevo material de consulta para los licenciados en física.

1.2.1. Pregunta de investigación

La pregunta que propusimos fue:

¿Qué aspectos de los desarrollos del concepto de entropía nos permiten establecer una analogía con el concepto de información para el estudio del fenómeno de evaporación de los agujeros negros?

1.2.2. Objetivos de la investigación

A partir de la pregunta, propusimos el siguiente objetivo general que pretende dar solución a la problemática ya planteada:

1. Realizar un acercamiento histórico al concepto de entropía de los desarrollos clásicos de Clausius, Boltzmann y Planck y contemporáneos de Shannon, Bekenstein y Hawking para la descripción del fenómeno de evaporación de los agujeros negros proponiendo herramientas didácticas para la enseñanza de la segunda ley de la termodinámica.

Como consecuencia, se plantearon los siguientes objetivos específicos:

1. Presentar los aspectos de los desarrollos del concepto de entropía que permiten establecer una relación con el concepto de información.
2. Abordar la entropía como medida para analizar la reversibilidad e irreversibilidad de los procesos.
3. Describir el fenómeno de evaporación de los agujeros negros bajo la relación establecida entre información y entropía.
4. Diseñar una secuencia didáctica para la enseñanza del concepto entropía y su relación con la información información

1.3. Metodología

Para la elaboración de la monografía se empleará un estudio correlacional, partiendo desde la idea de lo que se entiende como acercamiento histórico, siendo este respectivamente un marco metodológico y epistemológico para la enseñanza, distinto de una simple técnica puntual. Se trata de una estrategia didáctica que integra la evolución conceptual de un tema con su contexto pedagógico, a diferencia de un enfoque meramente temático o una “técnica” específica, el acercamiento histórico refiere a la forma de aproximarse al contenido considerando sus raíces y desarrollo científico. Así, como señalan (Conner, 2008) [18] utilizar un enfoque histórico en la enseñanza de la física es “una herramienta útil, a menudo desaprovechada en el aula”, que puede ser clave para mejorar el aprendizaje en ciencias, donde en su desarrollo se incorporan elementos epistemológicos (cómo se formó el conocimiento) y pedagógicos (cómo enseñarlo) de manera integrada; con el fin de revisar las perspectivas pertinentes, para abordar la relación entre los conceptos de entropía e información. Este enfoque nos facilitará articular la segunda ley de la termodinámica en los agujeros negros y su desarrollo se dividirá en tres fases principales:

1. Revisión de los desarrollos alrededor del concepto de entropía y su relación con el concepto de información, incluyendo trabajos clásicos y contemporáneos desde Clausius-Boltzmann-Planck hasta Shanon-Bekenstein-Hawkings.

2. Análisis de la interpretación de la entropía desde los trabajos de Clausius, Boltzmann y Planck permitiendo revisar la evolución de los sistemas hacia estados de mayor probabilidad y revisando cómo la entropía se utiliza como herramienta para describir la dirección de los procesos termodinámicos distinguiendo entre procesos reversibles e irreversibles.
3. Se llevará a cabo un análisis tanto conceptual como matemático de la cantidad de información y entropía en los agujeros negros, con el fin de investigar cómo este fenómeno contribuye a una mayor comprensión de la entropía en un sistema y cómo este estudio permite reforzar la enseñanza de la termodinámica.

Capítulo 2

La transición de la entropía de Clausius, Boltzmann y Planck a la entropía de Shanon, Bekenstein y Hawking

Con el fin de presentar las diferentes posturas que se tienen del concepto de entropía y su relación con el concepto de información, se considera relevante realizar un análisis de los estudios realizados por diferentes autores que den cuenta de dicha relación entre conceptos. Por ello, este capítulo propone un acercamiento histórico partiendo con Rudolf Clausius, el científico que introdujo por primera vez el concepto de entropía. Donde, a partir de su trabajo, se examinarán las transformaciones y reinterpretaciones de este concepto a lo largo del tiempo, desde la entropía en la teoría mecánica del calor hasta su relación con la información en la teoría de la comunicación y la física de los agujeros negros.

Dicho acercamiento histórico nos permitirá establecer conexiones entre las ideas de Clausius y las desarrolladas posteriormente por Ludwig Boltzmann, Max Planck, Claude Shannon, Jacob Bekenstein, y Stephen Hawking. A través de este recorrido, se buscará entender cómo la entropía, inicialmente concebida en el contexto de la termodinámica, ha llegado a jugar un papel crucial en la comprensión de la información y los procesos irreversibles, especialmente en sistemas extremos como los agujeros negros.

2.1. El segundo principio de la teoría mecánica del calor de Clausius

Las ideas iniciales de entropía comprenden desde 1824 hasta 1865, donde las primeras motivaciones a esta cantidad parten de los estudios de Carnot en su libro "Réflexions sur la puissance motrice du feu et sur les machines propres à développer cette puissance", que muestran los desarrollos de la termodinámica como la conocemos hoy en día; sin embargo, no pudo dar continuidad a su trabajo debido a su fallecimiento en 1832. Afortunadamente, Rudolf Clausius, a partir del trabajo de Carnot, publica nueve artículos entre 1850 y 1865 donde configuraría este concepto de entropía.

Rudolf Clausius fue un físico y matemático alemán, el cual buscaba una expresión matemática que describiera las transformaciones de un cuerpo a partir de intercambios de calor; durante este proceso estableció por primera vez la segunda ley de la termodinámica formalizando así el concepto de entropía. Clausius, retomando los trabajos y perspectivas de Sadi Carnot, se dedicó a comprender las relaciones entre calor y energía o como él lo denominó "Principio de equivalencia de las transformaciones de energía" (Flores Ulloa, 2014)[11].

En su trabajo "The mechanical theory of heat" Clausius presenta los planteamientos realizados para formalizar el concepto de entropía. Esto retomando los trabajos de Sadi Carnot y analizando la equivalencia entre 'Calor' y 'Trabajo', particularmente centrándose en el estudio de las variables de estado de un cuerpo, como presión y volumen, durante un proceso cíclico cerrado, específicamente el ciclo de Carnot.

En la figura anterior, Clausius expone que dado el punto **a** representa un gas en un estado de volumen y presión iniciales que determinan la temperatura inicial **T** de este ciclo. Con el fin de tener una comprensión más completa de los procesos reversibles y la eficiencia máxima de una máquina térmica, Clausius consideró pertinente analizar cada uno de los procesos del ciclo, siendo estos respectivamente:

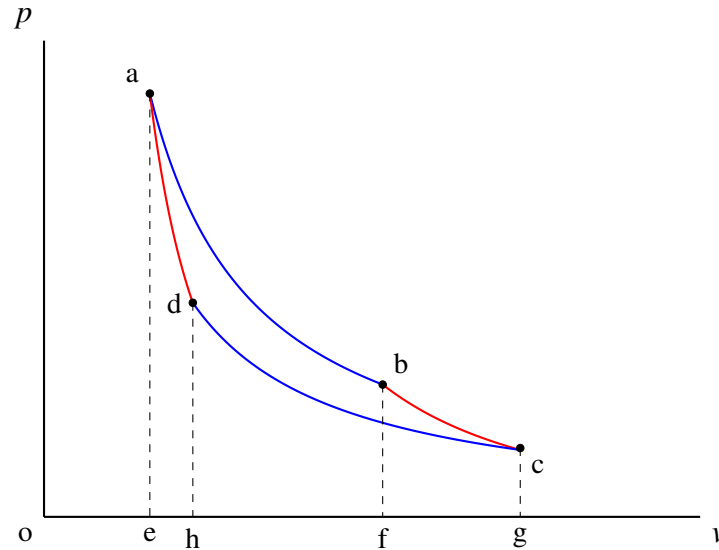


Figura 2.1 – Diagrama del ciclo de Carnot: (1) A→B: Expansión isotérmica temperatura T_h , (2) B→C: Expansión adiabática, (3) C→D: Compresión isotérmica a temperatura T_c , y (4) D→A: Compresión adiabática.

1. **Expansión isotérmica (segmento ab):** Se asume que el gas está en contacto con un cuerpo **K**, a la misma temperatura **T**, y la transferencia de calor no altera esta temperatura.
2. **Expansión adiabática (segmento bc):** Se retira el cuerpo **K**, permitiendo que el gas se expanda sin un intercambio de calor, reduciendo su temperatura hasta **T₂**
3. **Compresión isotérmica (segmento cd):** El gas se empieza a comprimir para volver a su volumen inicial, para ello se supondrá que está en contacto con un cuerpo **K₂** a la misma temperatura **T₂**.
4. **Compresión adiabática (segmento da):** Finalmente se retira el cuerpo **K₂** de tal manera que la presión y la temperatura del gas aumentan hasta regresar a las condiciones iniciales del ciclo.

Posteriormente, Clausius realiza un análisis similar de un proceso cíclico para un sistema compuesto por una mezcla de gas y líquido, dejando de lado esas suposiciones que limitaban la naturaleza de los cuerpos en un sistema termodinámico.

Tras haber realizado el mismo análisis que para la figura 1.1 para la figura 1.2, Clausius concluye que la cantidad de calor convertida en trabajo en un proceso cíclico es independiente de la

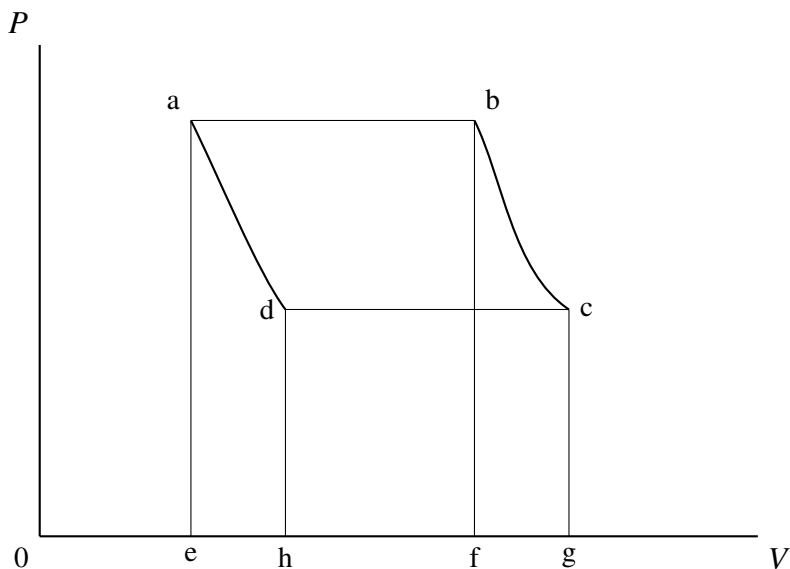


Figura 2.2 – Diagrama del ciclo de Carnot para un cuerpo parte líquido y parte gas. Elaboración Propia. Rediseño (Clausius, 1879) [1]

naturaleza que conforma el medio.

“La cantidad de calor convertida en trabajo; o generada por el trabajo, establece una proporción constante a la cantidad que pasa al cuerpo frío o viceversa.” (Clausius, 1879. Pag 76)[2]

Clausius continúa estudiando diferentes procesos cíclicos más complejos, procesos en los cuales se producen intercambios de calor y variaciones de temperatura simultáneamente. Donde para simplificar el problema menciona que no es posible tomar solo un punto para lograr entender la gráfica, por ello propone dividir el ciclo en pequeñas transferencias de calor de un cuerpo a otro y variaciones de temperatura.

“Podríamos considerar esta variación hecha por un gran número de un gran número de variaciones muy pequeñas, en las cuales tomaremos alternadamente un cambio de temperatura sin transferencia de calor y una transferencia de calor sin un cambio de temperatura”. (Clausius, 1879)[2]

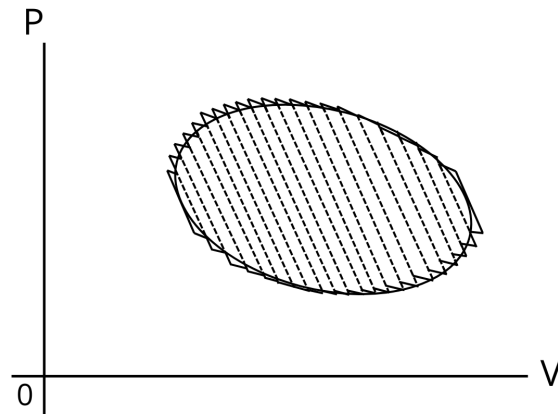


Figura 2.3 – Ciclo con intercambios de calor y variación de temperatura de forma simultánea, Elaboración Propia. Rediseño (Clausius, 1879) [2]

Para lo cual, Clausius propone sumar cantidades infinitesimalmente pequeñas de calor, proceso el cual expresa a partir de la siguiente ecuación:

$$\int \frac{dQ}{T} = 0 \quad (2.1)$$

Esta ecuación de Clausius se logra interpretar como que si dicha integral es igual a cero, el sistema siempre regresará a su estado inicial, implicando una cantidad que depende del estado final que tome el cuerpo, independiente de los procesos dados para llegar a dicho estado y llegándola a describir de la siguiente manera:

“Si en un proceso cíclico reversible, cada elemento de calor absorbido se divide por la temperatura absoluta a la que absorbe, y el diferencial resultante se integra para todo el curso del proceso, la integral obtenida es igual a cero”. (Clausius, 1965, pág. 90) [2]

Finalmente Clausius propone una magnitud nueva la cual denomina entropía, la cual surge bajo el desarrollo y análisis de los ciclos reversibles; donde en estos procesos las transformaciones

de trabajo a calor se pueden realizar de manera ideal. No obstante, para los procesos irreversibles necesitan de una compensación dada la cual no está asociada directamente con el calor o el trabajo, sino con una nueva función de estado que él denomina entropía. De esta manera, Clausius presenta formalmente el concepto con las siguientes palabras:

“Propongo llamar a esta cantidad S la entropía de un cuerpo, tomando la palabra griega $\epsilon\nu\tau\rho\omicron\pi\iota\alpha$ (entropía), que significa “transformación”. El diseño que yo he formado con la palabra entropía, lo hice de manera que se asemejara tanto como fuera posible a la palabra energía” (Clausius, pág. 90, 1865) [2]

Por otra parte, la entropía que propone Clausius no está únicamente ligada a la temperatura de un cuerpo, proponiendo la noción de disgregación para describir el grado de separación de las moléculas en un sistema, reconociendo que las transformaciones implican también cambios en la configuración interna de estas. Donde, bajo esta perspectiva, a diferencia de la de Carnot, que concebía el calor como un fluido, Clausius llega a considerar el análisis microscópico del sistema en torno a la entropía, siendo esta idea la cual más adelante retomará Ludwig Boltzmann en su estudio de la mecánica estadística de los gases, estableciendo una relación entre la entropía y la probabilidad de los estados microscópicos de un sistema.

2.2. Boltzmann y el modelo mecánico estadístico de la teoría mecánica del calor

Como tal, los desarrollos de Clausius iban de la mano de la equivalencia trabajo-calor y la concepción de entropía estaba ligada a las transformaciones que lleva la energía, por eso inicialmente era definida como una medida de transformación o transformación descompensada. No obstante, esta concepción inicial no sería única hasta que en 1872, Boltzmann, en su libro "Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen" lleva a cabo un estudio de los gases donde establece una nueva cantidad.

Ludwig Boltzmann fue un físico austriaco reconocido por su visión atómica de la materia y por sus contribuciones en nociones de estadística y probabilidad en el desarrollo de la teoría cinética de los gases. A partir de las bases establecidas por James Clerk Maxwell, Boltzmann profundizó en la comprensión del comportamiento de las partículas que componen un gas sin fuerzas externas, donde asume condiciones de homogeneidad e isotropía. Esto, motivado por la idea de que la ciencia debía explicar los fenómenos complejos a partir de principios simples, lo cual aplicó en sus estudios sobre la luz, el calor, la electricidad y el magnetismo, reduciendo estos fenómenos al comportamiento de las partículas que conforman un cuerpo, ideas que iban adelantadas para su época.

A diferencia de Rudolf Clausius, quien combinaba las perspectivas macroscópica y microscópica para estudiar los fenómenos termodinámicos, Boltzmann estableció ese vínculo que le permitía describir los fenómenos macroscópicos que observamos en función del comportamiento microscópico de las partículas, dando cuenta así de la segunda ley de la termodinámica y las leyes del movimiento de las partículas de un gas. (Boltzmann, 1964, p. 28)[12]

Estas ideas parten de la teoría cinética de los gases de Maxwell, quien describía la interacción entre partículas y su comportamiento a partir de sus colisiones, atracciones y repulsiones, asignando así una función que determina una distribución de probabilidad de las velocidades de un gas.

Boltzmann consideraba la teoría de Maxwell como el fundamento correcto para explicar el comportamiento aleatorio de las partículas en un gas. En su obra 'Lectures on gas theory' da cuenta de que la distribución de estas partículas está determinada por las velocidades y posiciones de las partículas. Bajo dichas consideraciones establece la organización de las moléculas como:

“... desde el punto de vista de la mecánica, cualquier arreglo de moléculas en un contenedor es posible; en algún arreglo, las variables que determinan el movimiento de las moléculas pueden tener diferentes valores promedio en parte del espacio lleno con el gas que en otra...”

(Flores-Ulloa, pág. 204, 2014) [11]

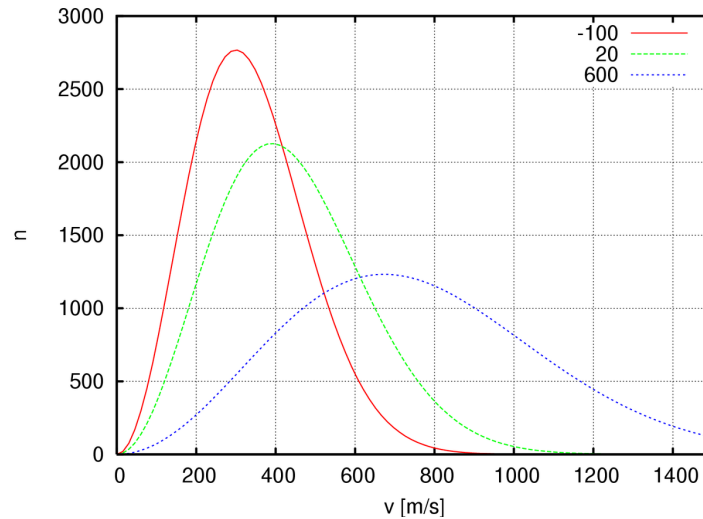


Figura 2.4 – Diagrama de la distribución de velocidades de maxwell, tomado de Maxwell-boltzmann distribution,” 2005. [Online].[3]

Al intentar vincular la segunda ley de la termodinámica con la ley de velocidades de Maxwell, Boltzmann se cruza con el problema de explicar cómo un gas alcanza el equilibrio termodinámico, en el cual las distribuciones de velocidades de Maxwell son válidas. Para ello introdujo una función denotada por la letra H , que describe la evolución temporal del comportamiento de un gas a partir de las velocidades de las partículas de un gas de masa m , de un volumen v y de los choques realizados entre partículas. Representado por la siguiente ecuación

$$H = \int f \log(f) dw + \int f_1 \log(f_1) dw_1 + \dots + \int f_n \log(f_n) dw_n \quad (2.2)$$

Simplificando luego la ecuación a:

$$H = \int f \log(f) dw \quad (2.3)$$

Antes de asignar un significado físico a la función H , Boltzmann analiza el significado matemático en términos de la distribución de velocidades de las partículas y la dirección de estas en un tiempo dado; esto con el fin de simplificar sus resultados partiendo de que “todas las moléculas de un gas tengan una velocidad y vayan en cierta dirección no es menos probable a que cada molécula

tenga la misma velocidad y dirección de movimiento, encontrando que hay muchas más configuraciones igual de probables”, (Boltzmann, 1964) [12] lo cual nos sugiere que existen muchas más configuraciones posibles y equiprobables de las moléculas que contribuyen al comportamiento macroscópico del gas. Boltzmann compara este escenario con un experimento de probabilidad en el que se extraen esferas negras y blancas de una caja. Aunque sacar solo esferas negras no es menos probable que alternar entre negras y blancas, la probabilidad de obtener una combinación equilibrada (por ejemplo, 10 negras y 10 blancas) es mayor, ya que hay muchas más formas de organizar estos resultados.

Boltzmann extiende dicho razonamiento al comportamiento de los gases, donde el hecho de que todas las moléculas tengan exactamente la misma velocidad y dirección no es menos probable que un estado donde cada molécula tenga diferentes velocidades y direcciones. No obstante, cuando se compara este escenario con la distribución de velocidades de Maxwell, descubrimos que existen muchas más configuraciones equiprobables. Para ello, Boltzmann propone la siguiente ecuación, la cual cuenta las configuraciones equiprobables para la distribución de velocidades de las moléculas, lo que permite una comprensión estadística del comportamiento macroscópico del gas a partir de su estructura microscópica.

$$Z = \frac{n!}{(n_1w)!(n_2w)!(n_3w)!...} \quad (2.4)$$

Después de realizar dicho tratamiento probabilístico para las moléculas de un gas, Boltzmann retoma su función $H(t)$ la cual representa el logaritmo de la probabilidad de que el gas se encuentre en un estado determinado, para luego relacionar esta función con la entropía de un gas, dando cuenta de la entropía como el logaritmo natural de estados posibles en los que un gas se puede encontrar (Flores-Ulloa, 2014) [11] Determinando así que:

$$\frac{dH}{dt} < 0 \quad (2.5)$$

Demostrando que H es una función dependiente del tiempo, donde para un estado estacionario

H permanece constante, lo que implica que la distribución de velocidades es molecularmente desordenada y mantiene este comportamiento para cualquier tiempo t .

“...la manera en la cual las partículas estarán distribuidas en un gas no tendrán lo que es una configuración específica si no por el contrario el comportamiento de estas es un comportamiento aleatorio y molecularmente desordenado.” (Boltzmann, 1964) [12]

Finalmente, Boltzmann demostró que H tiende a decrecer con el tiempo, acercándose así a la distribución de velocidades de Maxwell. Este resultado fue problemático en su momento, pues parecía contradecir el axioma de que todos los procesos naturales son irreversibles. Sin embargo, la existencia de la magnitud H como consecuencia del movimiento atómico era una idea revolucionaria, la cual permite estudiar la direccionalidad de los procesos análogamente a la entropía. Como tal, esta cantidad H era proporcional a la misma entropía.

Estas consideraciones resultan de la manera en la que se derivaron estas ecuaciones. Boltzmann propuso que la entropía debía entenderse de forma probabilística, comprendiendo la segunda ley bajo esa preferencia del universo de que para casos igualmente probables presenta una preferencia por los estados finales.

Antes de continuar, algo que es de notar es que estos términos de desorden molecular y orden molecular están ligados a la equiprobabilidad de las configuraciones posibles, es decir que, este término de "desorden molecular" se define como igualdad de probabilidades a priori, lo que implica, es que desorden está relacionado con aquello que no es medible y pueda derivarse de la experiencia.

Pero entonces, ¿quién define entropía como medida del desorden?, ya que vimos que Boltzmann encuentra una cantidad análoga a la entropía a partir del movimiento atómico de los gases que se mide por las distribuciones en sí. Aquella definición fue dada por Hermann Helmholtz en 1882, donde en su memoria "Die Thermodynamik chemischer Vorgänge" ^asume que como el movimiento desordenado de las partículas de gas es del mismo tipo que el movimiento de calor, entonces la medida de entropía sería equivalente a este movimiento desordenado; como tal la equivalencia se hace a partir de esa hipótesis contrastada con la fórmula de Clausius y no a partir de la fórmula

conocida que veremos más adelante. A pesar de que esta asunción sea correcta, hay que reiterar el hecho de que todos estos estudios fueron hechos a partir del análisis de los gases sin fuerzas externas.

Estas ideas influyeron profundamente en el trabajo de Max Planck, quien se centró en estudiar la irreversibilidad de los procesos y las configuraciones que llegan a tomar los sistemas, dando cuenta de la existencia de la entropía.

2.3. La irreversibilidad de los procesos y el segundo principio de la mecánica del calor por Max Planck

El primer principio de la termodinámica consiste más que todo en una ley de conservación de la energía y la equivalencia de la cantidad de calor y trabajo hecho, es decir, que nos da cuenta de una cantidad invariable en todos los procesos. No obstante, tal principio es insuficiente para una descripción completa de los fenómenos térmicos, es ahí donde llega el segundo principio, que, a diferencia del primero, nos da una descripción de la dirección de todo proceso natural; eso significa que la naturaleza de por sí no puede volver al estado que alguna vez fue. Curiosamente, más que darnos una definición de esta cantidad que está relacionada con la acción de la dirección de los procesos naturales, nos describe la necesidad de esta para una teoría mecánica del calor completa y consistente con los fenómenos.

Gracias a los desarrollos matemáticos de Clausius, tenemos una manera rigurosa de describir esa cantidad en términos de los procesos que se llevan a cabo en un sistema. Además, nos brinda una diferenciación en cuanto a las transformaciones que se llevan a cabo, es decir, que se distingue entre una transformación de calor-trabajo a una transformación de trabajo-calor. Por otro lado, las consecuencias de su trabajo nos ponen en juego la dirección del flujo del calor, el cual solo va direccionado de un cuerpo de mayor temperatura a uno de menor temperatura, cosa que podemos hacer al revés si compensamos el sistema, pero naturalmente no ocurre de manera espontánea.

Planck nos brinda una reflexión de los procesos haciendo una distinción entre aquellos que tienen preferencia por los estados iniciales y finales y aquellos que poseen una preferencia exclusiva por los estados finales. Esto se debe a que habrá casos donde, mediante el estado inicial del sistema, podremos revertir a un estado inicial y otros donde tal cambio en la dirección será imposible de desarrollar. Bajo el anterior análisis, Planck distingue dos tipos de procesos:

1. Aquellos que no discriminan entre un estado inicial y final, llamados procesos neutrales (indiferentes).
2. Aquellos que se caracterizan únicamente por los estados finales, llamados procesos naturales (privilegiados).

A simple vista el lector asume que los procesos neutrales contienen solamente procesos reversibles. No obstante, si ponemos en juego un sistema de un determinado objeto cayendo libremente, es de decir que difícilmente podrá volver a su estado inicial, pero mediante la acción de una fuerza externa podremos obligar al objeto a seguir una trayectoria inversa la cual preserva las variables de estado iniciales.

Para lograr entender mejor la distinción de ambos procesos, consideremos uno natural, es decir, que solo tenemos certeza del estado final y no habrá manera de que volvamos a su estado inicial:

Si tenemos un material que bajo un proceso de combustión se convierte en cenizas, el estado final (cenizas) será aquel que permanecerá y no habrá un proceso natural que nos permita regresar al estado inicial del material. Tal hecho se debe a que no existe un proceso que nos permita determinar de qué material eran las cenizas y de qué forma eran; como consecuencia, habrá distintas formas de describir ese estado inicial debido a un proceso natural.

En general, los procesos naturales son procesos irreversibles y los procesos neutrales contienen procesos reversibles e 'irreversibles'.

De manera heurística podemos dar unas consideraciones de todos los procesos existentes, es decir, que:



Figura 2.5 – Proceso irreversible

1. Un proceso no puede ser natural y neutral al mismo tiempo.
2. Un proceso natural no puede ser revertido mediante un proceso natural o neutral; los procesos neutrales pueden ser revertidos si o si el proceso que se usa para tal acción es neutral.
3. Si podemos desmenuzar un proceso natural en una serie de procesos, estos procesos serán de la misma naturaleza que el proceso global, o sea natural.
4. Si después de cierto proceso realizamos un proceso neutral, decimos que aquel proceso era de la misma naturaleza que el siguiente.

De lo anterior, la distinción más importante de los procesos naturales y neutrales es cómo la naturaleza de cada uno de ellos tiene una cierta cantidad de preferencia entre los estados finales e/o iniciales. Evidentemente, la medida de esa preferencia a simple vista es de carácter cualitativo, de la misma manera que desarrollamos el concepto de temperatura; por lo tanto, debemos encontrar algo que contenga las variables de estado del sistema en ambos puntos y nos permita calcular qué tanta preferencia hay. Ese algo será una función que denominaremos S (como Clausius había nombrado la entropía).

Ahora, utilizando cierto proceso que va de un estado inicial con cantidad S a un estado final con cantidad S' podemos distinguir qué tipo de proceso se lleva a cabo con el siguiente análisis:

$$\text{Si } S' - S = 0, \text{ es neutral} \quad (2.6)$$

$$\text{Si } S' - S > 0, \text{ es natural} \quad (2.7)$$

Si revertimos la situación y deseamos pasar de un estado final con cantidad S' a un estado inicial con cantidad S , encontraremos lo siguiente:

$$S' \rightarrow S, \text{ es positivo} \quad (2.8)$$

$$S' \rightarrow S, \text{ es negativo} \quad (2.9)$$

$$S' \rightarrow S, \text{ es nulo} \quad (2.10)$$

Donde el primer y tercer caso pertenecen a los procesos neutrales y el segundo caso a los procesos naturales.

En síntesis, la función propuesta debería ser conocida y además será soporte para dar cuenta de la medida de la preferencia de la naturaleza por los estados iniciales y finales de un sistema. En adición, ambos estados deben estar relacionados, o sea que requerimos que tengan algo que los haga compatibles para poder proceder con el análisis anterior. Planck, en su disertación, nos da las condiciones para que ambos estados sean compatibles.

1. Ambos estados comprometen la misma sustancia en las mismas cantidades.
2. El sistema en ambos estados debe de contener la misma cantidad de fuerzas actuante y todo aquello que interactúa.

Si ninguna de las dos proposiciones se cumple, entonces no hay manera de pasar de un estado a otro debido a su incompatibilidad, y la medida que habíamos desarrollado no tendrá ningún sen-

tido.

Podemos resumir este resultado como un principio:

“En la naturaleza, una transición de estados con cantidades S y S' respectivamente es siempre posible si y solo si contienen la misma cantidad de materia y fuerza en ambas direcciones, si $S' - S = 0$ (por un proceso neutro), sólo del primer estado al segundo si $S' - S > 0$ (por un proceso natural), sólo de la segunda a la primera si $S' - S < 0$ (por un proceso neutral).”

(Planck, pág. 6)[19]

Este desarrollo conceptual reflexiona sobre la interpretación de la cantidad de entropía para todo sistema físico, donde ahora la entropía se concibe como una cantidad que mide la preferencia por los estados finales; sin embargo, el principal problema que encontramos es cómo se cuantifica esta cantidad y bajo qué condiciones podemos describir un sistema que nos permita medir la entropía.

La física del siglo XIX se aceptaba la idea de que el calor era sustancial, que estaba presente en todos los cuerpos. Sin embargo, había otra manera de abarcar la naturaleza del calor, donde *'este se presentaba como un modo de movimiento de los átomos ponderables presentes en los cuerpos y del movimiento del ether y, además, se veía la radiación como un movimiento ondulatorio que se propagaba en el ether'* (Clausius, 1865)[2]. Esta manera de estudiar los fenómenos termodinámicos estaba permeada por una modelización mecánica de ciertas cantidades microscópicas, es decir, un modelo mecánico estadístico. Este modelo nos permite describir un sistema bajo cantidades mecánicas y electrodinámicas que no pueden ser medidas directamente, ya que lo que podemos medir experimentalmente son los valores medios de las características físicas del sistema. Como tal, esta forma de estudiar los sistemas nos da otro tipo de cantidades que llamaremos *unkontrollierbar*¹.

¹Esta palabra en el alemán tiene varias traducciones, tales como, incondicionado, indeterminado, incontrolable, inconmensurable, irregular, uncorrelacionado, no gobernable o al azar. Pero para propósitos de lo que se refiere Planck es mejor tomar la traducción de incontrolable y al azar

Este modelo estadístico descrito por Boltzmann nos brinda un concepto que permite usar probabilidades a las características físicas medibles, es la hipótesis de un *elementar ungeordnet* [20] donde " *la naturaleza de todo proceso que contiene varias partículas que son incontrolables (unkontrollierbar) están en un desorden elemental (elementar ungeordnet)*"(Planck, 1900)[20]. Consecuentemente, este concepto de 'elementar ungeordnet', más allá de la definición a partir de su traducción literal (desorden elemental o caos elemental), implica una imposibilidad de dar cuenta de las medidas de cada parte de un sistema en la naturaleza, donde solo podemos hacer relaciones con los valores medios de las características físicas.

La incontrolabilidad de cada parte que constituye un sistema nos lleva a pensar más allá de esas cantidades microscópicas, algo como lo es una probabilidad, pero una probabilidad ligada a la distribución de ciertos elementos que están en un 'elementar ungeordnet'. Además, puesto que lo mencionado anteriormente en cuanto a la medida de la entropía en los procesos naturales y neutrales generaliza el segundo principio para todo sistema, el estudio de la probabilidad llega a ser conveniente teniendo en cuenta que no pierde invalidez en función del sistema que se estudie, como lo menciona Planck "*la entropía de estos sistemas físicos en sus estados determinados dependen exclusivamente de la probabilidad de estar en esos estados*"[20].

Tenemos dos piezas para deducir una fórmula de entropía distinta a la presentada por Clausius. Donde tenemos la probabilidad y las partes que constituyen un sistema.

Así que la entropía estaría dada por

$$S = f(W) \quad (2.11)$$

Donde W representa la probabilidad ².

Para llevar a cabo esta deducción requerimos de ciertos conceptos de la probabilidad, donde uno de ellos relaciona la probabilidad total de dos eventos independientes como el producto de las probabilidades individuales. Si pensamos en un caso como el de una persona eligiendo la carne para su cena y el evento de que nuestra galaxia colapsará con Andrómeda, entonces la probabilidad de que esa persona esté en un estado donde compra costilla y a su vez nuestra galaxia colapse con

²El uso de la letra W se debe a que en alemán probabilidad se traduce como Wahrscheinlichkeit

Andrómeda es

$$W = W_1 W_2 \quad (2.12)$$

Ahora, si tenemos que S_1 y S_2 son las entropías respectivas de los sistemas separados, de acuerdo con la ecuación 2.12 tendríamos.

$$S_1 = f(W_1) \quad (2.13)$$

$$S_2 = f(W_2) \quad (2.14)$$

Pero de acuerdo al segundo principio de la termodinámica, la entropía es una cantidad aditiva, es decir, que la entropía total está dada por la suma de las entropías independientes.

$$S = S_1 + S_2 \quad (2.15)$$

$$f(W_1 W_2) = f(W_1) + f(W_2) \quad (2.16)$$

Con base a esta ecuación vamos a generar una ecuación diferencial, para eso primero debemos derivar parcialmente respecto W_1 y luego W_2 .

$$W_2 \frac{\partial f(W_1 W_2)}{\partial W_1} = \frac{\partial f(W_1)}{\partial W_1} \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial f(W_1 W_2)}{\partial W_1} + W_1 W_2 \frac{\partial^2 f(W_1 W_2)}{\partial W_1 \partial W_2} = 0 \quad (2.18)$$

Utilizando la ecuación 2.12 podemos obtener una ecuación diferencial ordinaria.

$$\frac{df(W)}{dW} + W \frac{d^2 f(W)}{dW^2} = 0 \quad (2.19)$$

Donde la solución general es

$$f(W) = k \log(W) + C \quad (2.20)$$

Y de acuerdo con 2.11 tendríamos que la entropía en función de la probabilidad es

$$S = k \log(W) + C \quad (2.21)$$

Asumiendo que C es igual $k \log(\text{Const})$, entonces podríamos reducir la ecuación para obtener una relación equivalente a la de Boltzmann.

$$S = k \log(W) \quad (2.22)$$

Aquí la constante k debe ser una constante universal, que debe tener validez así en la tierra como en la galaxia Andrómeda debido al uso de las probabilidades.

Por otro lado, independientemente de que esta relación sea equivalente a la de Boltzmann, Planck establece una diferenciación bajo su interpretación, cuyo significado es:

'Primeramente, la ecuación de Boltzmann carece del factor k y esto se debe a que él utiliza unidades de gramos-moléculas y no al objeto en sí (las moléculas) en sus cálculos. En segundo lugar, Boltzmann no da una definición a la constante aditiva en la ecuación la cual nosotros considerábamos como un factor múltiplo de la probabilidad.'

(Planck, 1900, pág. 120)

[20]

Ya tenemos la manera de cuantificar entropía por medio de probabilidades; no obstante, debemos diferenciar esta probabilidad a la cual denominaremos 'probabilidad termodinámica' y la probabilidad matemática, donde ambas son proporcionales, pero su dominio es distinto. La probabilidad matemática es una fracción en un intervalo cerrado de 0 a 1 y la probabilidad termodinámica es un entero en todo el dominio. En contraste, esta probabilidad genera un nuevo problema el cual radica en la medición de este para obtener un valor numérico, es decir, que debemos definir muy bien esta cantidad para los sistemas mecánicos y electrodinámicos. Consecuentemente, requerimos definir el concepto de estado a la luz de las visiones macroscópicas y microscópicas de los fenómenos termodinámicos.

Retomando lo más fundamental, cuando hablamos de estado no nos estamos refiriendo a una cosa en sí, por el contrario, nos estamos refiriendo a un compendio de cantidades que nos dan

información de cómo está el sistema; por ejemplo, un cuerpo o medio ponderable puede tener estados en función de sus cantidades electromagnéticas, tales como la electrificación, magnetización, polarización, conducción, etc. Simultáneamente, nos brinda la manera en la que los procesos en ese sistema tienen lugar bajo unas condiciones de frontera o iniciales.

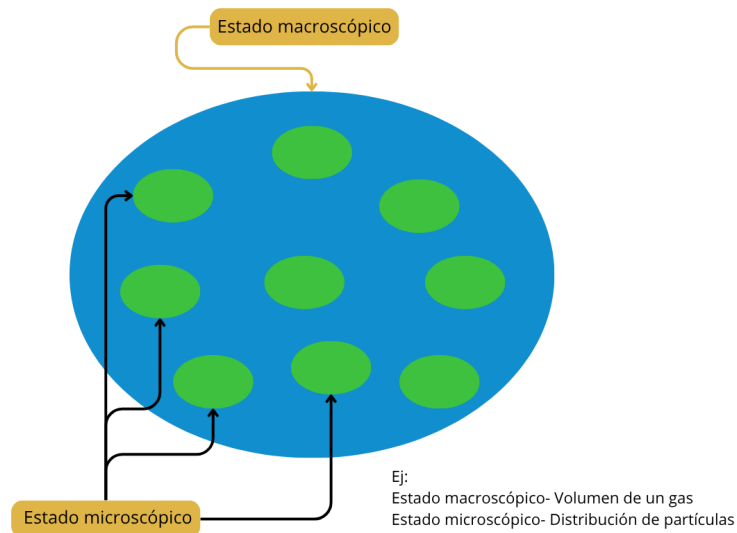


Figura 2.6 – Diagrama de un estado macroscópico con sus estados microscópicos

Un estado lo podemos describir a partir de cantidades microscópicas y macroscópicas, por eso es necesario poder diferenciar los estados que denominaremos microscópicos y macroscópicos de tal manera que podamos expandir nuestra concepción de estado. En ese orden de ideas, un estado microscópico es aquel que es descrito por un observador mecánico y electrodinámico; este contiene toda la información de cada partícula en términos de sus velocidades, posiciones e intensidades de los campos; consecuentemente, la visión microscópica es tan perfecta en un sentido que nos lleva a concluir que la entropía y el segundo principio pierden significado alguno. Por otro lado, un estado macroscópico es aquel que es descrito por un observador termodinámico, en este caso un instrumento de medida. Por otra parte, al hacer estadística de los estados macroscópicos, también debemos considerar que estos contienen una gama de estados microscópicos donde la medida a

obtener es un valor medio de todos los estados microscópicos, tal como se muestra en la figura 2.6. Esto se articula con lo que mencionábamos del *elementar ungeordnet*, donde estos estados macroscópicos tienen lugar bajo el segundo principio en consecuencia de este, tal como lo plantea Planck.

“Por lo tanto, no es la distribución atómica, sino más bien la hipótesis del desorden elemental, la que forma el núcleo real del principio de incremento de la entropía y, por tanto, la condición preliminar para la existencia de la entropía. Sin desorden elemental no hay entropía ni proceso irreversible.”(Planck, 1909) [20]

En ese orden de ideas, se piensa de esta probabilidad como una cantidad macroscópica y, como consecuencia, se suscita una cuestión: ¿Cómo estaría definido un estado macroscópico? Para poder responder la pregunta, se plantea un ejemplo de un sistema de N moléculas confinado en cierto volumen V y, con base en los planteamientos previos, debemos pensarnos en solo las distribuciones de esas moléculas en ese volumen, en lugar de aquellas cantidades microscópicas como consecuencia de la hipótesis del *elementar ungeordnet*. Entonces, se requiere pensar el volumen como un todo que vamos a dividir en secciones G que tendrán cierta cantidad de moléculas y, por lo tanto, definiríamos una distribución macroscópica del sistema.⁴

Ahora sí distinguimos esas secciones de volumen de manera que las enumeramos como en la figura 2.7 y además denotamos la cantidad de moléculas en cada sección como n_1, n_2, \dots, n_k , tendríamos que

$$\sum_{1 \leq i \leq k} n_i = N \tag{2.23}$$

Además, se puede definir una densidad de distribución mediante $\omega_i = \frac{n_i}{N}$, donde se cumpliría la siguiente relación

$$\sum_{1 \leq i \leq k} \omega_i = 1 \tag{2.24}$$

³Planck considera desorden y caos como lo mismo, esto se debe a que las traducciones no literales al alemán dan a entender que se refiere a caos

⁴Hay malos entendidos respecto a lo que se entiende por lo microscópico refiriéndose a cosas pequeñas (moléculas), sin embargo, la definición microestado ya ayuda a distinguir lo micro de lo macro. Por otro lado, la hipótesis de Avogadro respalda el hecho de que cantidades como la presión dependen del número de moléculas y no de la identidad de estas.

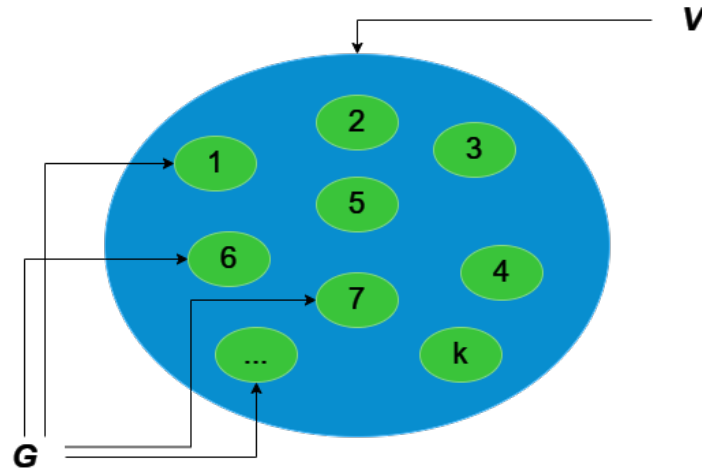


Figura 2.7 – Volumen dividido en k secciones

Esta densidad de distribución puede entenderse como la probabilidad matemática de que una molécula tomada aleatoriamente se encuentre en una determinada sección o simbólicamente.

$$P(n_i) = \omega_i \quad (2.25)$$

La relación entropía depende de una probabilidad termodinámica que representa permutaciones de las partes de un sistema. Como las permutaciones pueden darse de maneras distintas con base en la densidad de las partículas en ciertas secciones, entonces debemos calcular esas configuraciones teniendo en cuenta las permutaciones repetidas. Gracias a los desarrollos de Boltzmann conocemos la fórmula para determinar esas permutaciones de partículas. De acuerdo con la ecuación 2.4 tendríamos que la probabilidad termodinámica es

$$W = \frac{N!}{\prod_{1 \leq i \leq k} n_i} \quad (2.26)$$

En adición, algo que se puede apreciar de esta cantidad es que los números que manejamos son demasiado grandes, puesto que si pensamos sobre el número de partículas, de acuerdo con la hipótesis de Avogadro, encontramos que en un determinado sistema que contiene un mol de cierto gas hay $6,022 \times 10^{23}$ moléculas. Como consecuencia, podemos reformular la ecuación 2.4 utilizando la aproximación asintótica de Stirling.

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad (2.27)$$

De esta manera, la ecuación 2.4 quedaría

$$W = \prod_{i=1}^k \left(\frac{N}{n_i} \right)^{n_i} \quad (2.28)$$

Finalmente, introduciendo esta expresión en la fórmula de entropía que deducimos previamente, tenemos que la entropía está dada por

$$S = -kN \sum_{i=1}^k \omega_i \ln(\omega_i) \quad (2.29)$$

Gracias a este ejemplo logramos encontrar una fórmula que nos permitiría hallar la entropía en función de las probabilidades matemáticas que están determinadas por el cómo dividimos y distribuimos el espacio de ese sistema macroscópico y, en contraste con los planteamientos de Boltzmann, esto generaría lo que Planck denominaría la hipótesis del cuanto, que daría solución a uno de los problemas que la termodinámica clásica no podía describir, es decir, la radiación del cuerpo negro.⁵

2.4. Un nuevo ecosistema intelectual:

La teoría en telecomunicaciones de Claude Shannon

La invención del telégrafo en el siglo XIX trajo consigo una gran gama de desarrollos dentro del estudio de las comunicaciones eléctricas, donde tenemos a Samuel Morse que en 1832 desarrolló su patente de telégrafo estableciendo un sistema de rayas y puntos que se leía a partir de un mecanismo que apagaba y prendía un electroimán.

El sistema de código Morse tuvo refinamientos en cuanto a la asignación de las secuencias de líneas y puntos para cada letra. Donde Alfred Vail le asigna una secuencia reducida de puntos y líneas a las letras que son más frecuentes de encontrar en el idioma inglés, tales como la letra *E* o la secuencia *TH*. Gracias a esto, nos ahorraríamos una gran capacidad y tiempo por mensaje.

Otro de los aportes del telégrafo fue el muestreo de señales de varias fuentes de telégrafos con el fin de convergerlas en una sola. Donde tenemos a Moses Farmer, que durante el siglo XIX,

⁵En el apéndice C se evidencia cómo la segunda cuantización se convierte en un proceso análogo a los desarrollos de Planck y su ley de radiación debido al hecho de que cuantizamos osciladores

configuró un método para transmitir y enviar señales a telégrafos denominado por sus siglas en inglés TDM (time division multiplexing). Años más adelante, a comienzos del siglo XX, ingenieros eléctricos como W. Miner utilizaron un conmutador electromecánico para dividir temporalmente múltiples señales de varios telegrafos 2.8, donde también aplicarían este método a la telefonía; no obstante, los resultados de las señales entrantes no eran entendibles para muestreos con tasas de 3500 a 4300 Hz. Este problema sería el motivante para establecer métodos de modulación para poder mitigar un fenómeno denominado ruido, el cual estaba asociado a la interacción de las líneas de transmisión con otros entes externos que hacía que ciertas señales se perdieran (como el clima).

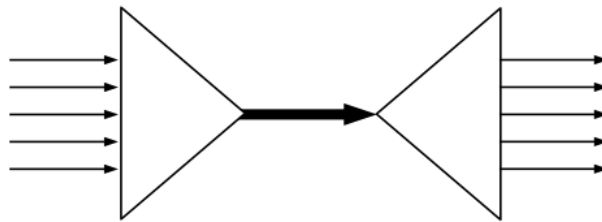


Figura 2.8 – Diagrama TDM

Ya en 1937, Alex Reeves llegó a desarrollar el primer método de modulación llamado *Pulse Code Modulation* (PCM), como solución a la naturaleza aditiva del ruido cuando una señal es llevada por varias líneas de transmisión de mayor longitud. Este ruido era producido cuando las señales eran amplificadas con el fin de recorrer largas distancias, lo que llevaba a pensar que los dispositivos de amplificación no eran suficientes. Reeves propone que la mejor manera de mitigar el problema del ruido a largas distancias era digitalizando las señales analógicas de audio de la telefonía en sí, donde se convertía toda señal en una representación binaria de esta.

Es de destacar que años anteriores (1921), Paul M. Rainey había patentado una máquina que lograba enviar fax mediante telegrafía utilizando una técnica similar al PCM que permitía codificar todos esos escaneos. Sin embargo, a pesar de existir una patente, Reeves desconocía la técnica de Paul debido a que sus intereses no iban de la mano al envío de imágenes, sino que a la transmisión de voz por telefonía a largas distancias y con ruido.

Estos desarrollos en cuanto a los métodos de modulación como una solución al fenómeno del ruido, tienen su análogo a lo que ocurriría con las máquinas térmicas y su eficiencia a la luz de los trabajos de Carnot, donde nos encontramos con un problema vinculado a una cantidad que es transformada para llevar a cabo un proceso de manera eficiente. Es decir, que hay un vínculo entre lo que conocemos como energía e información a partir de dos restricciones de la naturaleza y los procesos que se llevan a cabo con estas dos cantidades.

A lo cual Shannon en 1948, años después de la Segunda Guerra Mundial, se motiva a estudiar la medida de esta cantidad y nos lleva a pensar que el problema se genera cuando se espera obtener el mismo mensaje enviado o un aproximado de este a un punto que recibe el mensaje. Consecuentemente, se genera una perspectiva donde pone en juego el hecho de que '*el mensaje actual no es más que una selección de un conjunto de posibles mensajes*' (Shannon, 1948)[4], es decir, que el proceso de transmitir y recibir mensajes es de carácter estocástico, como si los mensajes fueran *unkontrollierbar*.

La medida de cuánta información ganamos cuando un mensaje es escogido de ese conjunto de mensajes, de acuerdo con Shannon, sería proporcional al número de mensajes o alguna función monótonica de este número; claramente, si este conjunto de mensajes es finito. Para establecer la función que determinaría el contenido de información, se considera la función logarítmica⁶, donde Shannon [4] argumenta la importancia de esta medida bajo los siguientes puntos:

1. Los parámetros usados en ingeniería como el tiempo, el ancho de banda, número de relays, etc varían linealmente con el logaritmo del número de posibilidades.
2. Llega a ser intuitiva, puesto que la manera en la que medimos y relacionamos los fenómenos es de carácter lineal. Por ejemplo, es más intuitivo establecer la medida de temperatura si pensamos la dilatación de los materiales como una función lineal del estado de calentamiento.

⁶La elección de la base del logaritmo llega a ser arbitraria, es decir, que solo cambiaría la manera en la que pensamos en cómo se almacena la información. En este caso se hará uso del logaritmo de base dos, donde las unidades de la medida de información en esta base serán en bits.

3. Bajo una perspectiva más algorítmica y procedimental de las matemáticas, una medida logarítmica es más sencilla de manejar.

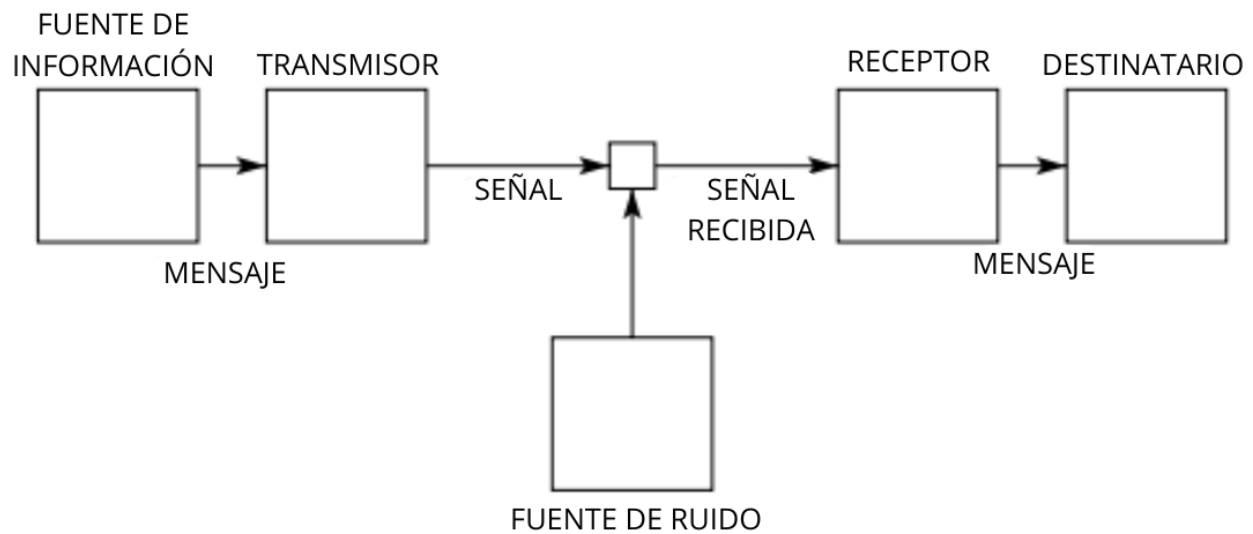


Figura 2.9 – Diagrama esquemático de un sistema general de comunicación, tomado de [4]

Antes de poder formalizar toda esta teoría en primera instancia, vamos a definir un sistema de transmisión de mensajes más general, como se muestra en la figura 2.9:

1. La fuente de información cuyo propósito es producir una secuencia de mensajes o un solo

mensaje para ser comunicado. Estos mensajes pueden ser de cualquier tipo, pasando de una secuencia de letras hasta un espacio vectorial dependiente del tiempo.

2. El transmisor cuya función es lograr producir una señal adecuada para la transmisión a lo largo del canal. Por ejemplo, en el caso de los sistemas multiplex con PCM se deben llevar a cabo unos procesos muestreo, compresión, cuantización y codificación.
3. El canal no es más que el medio por el cual la información es transmitida, ya sean líneas de transmisión o un rayo de luz.
4. El receptor realiza un proceso inverso al del transmisor, reconstruyendo el mensaje a partir de la señal.
5. Finalmente está el destinatario el cual es la persona u objeto que lee el mensaje.

Por otro lado, suscitamos la misma cuestión de la entropía, en este caso, cómo cuantificar esta cantidad asociada a los posibles mensajes que llegan al receptor. Además, teniendo en cuenta que no son secuencias de letras aleatorias, sino que son una disposición del idioma utilizado, como el inglés.

Podríamos pensar en estas fuentes discretas como un generador de mensajes símbolo por símbolo, donde las secuencias a utilizar estarían determinadas por una serie de probabilidades. Esto argumentaría el hecho de que este proceso de enviar y recibir mensajes es un proceso estocástico. Donde haremos la siguiente definición de proceso estocástico:

Todo sistema físico, descrito por un modelo matemático, que genera una secuencia de objetos o eventos que están gobernados por un conjunto de probabilidades es conocido como un proceso estocástico[4]

En contraste con la definición, podemos encontrar ejemplos como:

1. Lenguajes como el inglés, el español, el alemán, etc.
2. Fuentes de información continua que han sido renderizados de tal manera que se discretizan por un determinado proceso, como en el caso de un transmisor con PCM.

3. Algún caso matemático donde definimos de manera arbitraria un proceso estocástico generando un secuencia de símbolos.

Para que toda esta formalización sobre los procesos estocásticos sea significativa para el lector, vamos a considerar un sistema económico como lo es el mismo mercado ⁷. Dentro de este sistema vamos a considerar la evolución temporal del precio de un determinado stock $S(t)$ (o algún sistema que tenga dos eventos), donde cada salto de un periodo a otro da como resultado dos posibilidades: o el stock baja o el stock sube de precio, teniendo así

$$S(t_1) = \begin{cases} d \times S(t_0) & \text{Sí baja} \\ u \times S(t_0) & \text{Sí sube} \end{cases} \quad (2.30)$$

Donde d y u representan la tasa a la que bajan y suben, respectivamente (Shreve, 2004)([22]). Para establecer los símbolos en este sistema, debemos representar el proceso de bajada y subida por símbolos para así generar una cadena de símbolos que represente la evolución de un stock a lo largo de varios períodos de tiempo.

En ese orden, cuando el stock suba de precio vamos a simbolizarlo con la letra H y cuando baje de precio con la letra T , de esta manera tendríamos que S depende también de estos símbolos.

$$S_t(H) = u \times S_{t-1} \quad (2.31)$$

$$S_t(T) = d \times S_{t-1} \quad (2.32)$$

Puesto que t representa períodos de tiempo como los días, semanas, meses, años, etc. Entonces este debería tomar valores enteros positivos.

Por otro lado, estos procesos de subida y bajada, a medida que pasa el tiempo, se pueden representar mediante un árbol de probabilidad, como se muestra en la figura 2.10

Podemos observar en la figura 2.10 que, a medida que pasa el tiempo, el stock depende de una

⁷Este ejemplo fue extraído de (Shreve, 2004) [21]

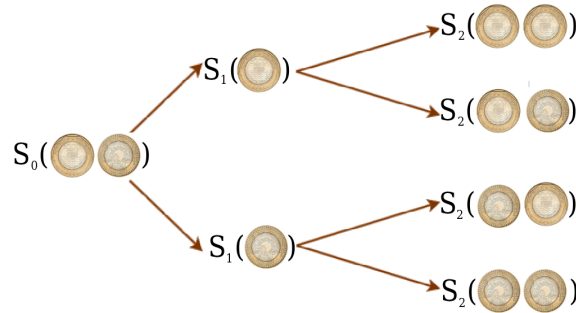


Figura 2.10 – Árbol de probabilidad para dos periodos de tiempo

secuencia de los símbolos H y T , donde estos nos muestran los caminos que toma el stock para llegar hasta cierto valor futuro. En ese orden de ideas, podríamos generar un espacio o conjunto de secuencias de todas las posibilidades para el tiempo 3, el cual simbolizaríamos como Ω

$$\Omega = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\} \quad (2.33)$$

En adición, para generalizar, se puede notar que la cantidad de elementos de ese conjunto depende de cuántos períodos estemos usando con referencia a uno inicial y de cómo podemos permutar esos símbolos, es decir, que la cardinalidad de Ω_k es igual a 2^k . Finalmente, obtendríamos que para un tiempo k el stock en función de cierto camino en ese árbol de probabilidades es

$$S_k(\omega) = S_k(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k) \quad (2.34)$$

Donde $\omega \in \Omega_k$ y $\omega_i \in \{H, T\}$

Como se puede ver, estos procesos se pueden representar por secuencias de símbolos los cuales nos dicen algo del sistema (en este caso, en qué períodos subió o bajó el precio). Por otro lado, Shannon suscita una pregunta cuando se cuestionó sobre cómo podemos cuantificar y medir la cantidad de información producida en un proceso estocástico ⁸ o, en otras palabras, ¿a qué tasa la información es producida en estos procesos estocásticos?

Para responder tal cuestión, supongamos un espacio muestral ⁹ de n eventos con probabilidad

⁸También denominado proceso de Markov

⁹Similar al espacio Ω_k

des p_1, p_2, \dots, p_n . Sabemos las probabilidades de cada elemento de ese espacio de eventos, eso es todo lo que tenemos en cuanto al evento que ocurrirá. ¿Habría una manera de determinar qué tan inciertos estamos respecto al resultado?

Si existe tal medida, la cual vamos a simbolizar como $H(p_1, p_2, \dots, p_n)$, entonces esta medida, de acuerdo con lo que planteamos anteriormente, deberá poseer las siguientes propiedades:

1. H debe de ser una función continua para todas las probabilidades.
2. Si todos los eventos son equiprobables, $p_i = \frac{1}{n}$, entonces H deberá de ser una función monótonica creciente respecto a n .
3. Si todas las posibilidades pueden ser fragmentadas en dos posibilidades sucesivas, la medida H debería de ser una combinación lineal de las medidas H para los valores individuales.

En ese orden, la única función que satisface las asunciones y que representará la cantidad de información no conocida del resultado final es ¹⁰:

$$H = -K \sum_{i=1}^n p_i \log(p_i) \quad (2.35)$$

Donde K es una constante de proporcionalidad.

Se puede apreciar que la fórmula de Shannon tiene la misma forma que la de la entropía que habíamos deducido y también es similar a la fórmula descrita por Boltzmann para desarrollar su teorema H ; no obstante, él no se motiva por los desarrollos clásicos de la mecánica estadística, sino que toma la idea gracias a los desarrollos de Von Neumann en la mecánica cuántica de varias partículas y la termodinámica cuántica que se formaliza en el libro "Mathematical Foundations of Quantum Mechanics". Además, el nombre de entropía a esta medida de información no conocida del resultado final (incertidumbre) se le atribuye a Von Neumann en una conversación con Shannon donde le dice *'Why don't you call it entropy? ... no one understands entropy very well, so in any*

¹⁰No es necesario hacer la derivación explícita, puesto que ya la habíamos deducido mediante los desarrollos de Planck

discussion you will be in a position of advantage.'.

Con base a lo anterior, de la misma manera en la que se establece el teorema de Boltzmann que se mencionó anteriormente, Shannon establece una analogía donde en lugar de medir la entropía de un sistema que tiene cierta probabilidad de estar en un estado determinado, medimos una entropía de un conjunto de probabilidades de un mensaje. Para ejemplificar, consideremos un sistema que posea dos eventos con sus respectivas probabilidades, en este caso, el de una moneda donde cara será simbolizada como H y cruz como T y sus probabilidades $\mathbb{P}(H) = p$ y $\mathbb{P}(T) = 1 - p$.

La entropía de este sistema sería entonces la suma de las entropías individuales $H(H)$ y $H(T)$

$$H = -(p \log(p) + (1 - p) \log(1 - p)) \quad (2.36)$$

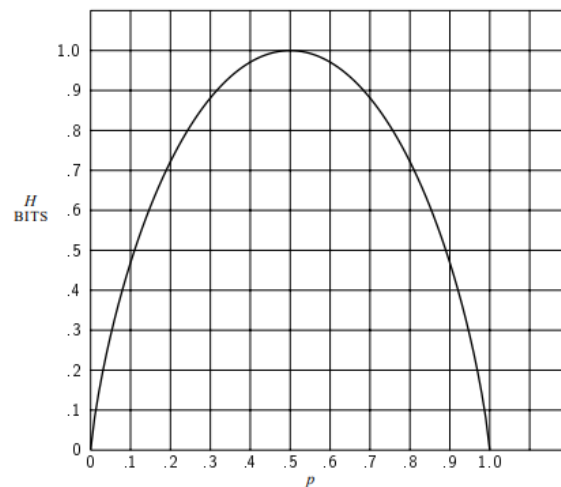


Figura 2.11 – Gráfica de entropía para el sistema de una moneda en función de la probabilidad p , tomado de [4]

La gráfica 2.11 nos puede ilustrar ciertas propiedades de esta cantidad H que son consistentes con lo planteado previamente, donde tendríamos:

1. $H = 0$ si y solo si la probabilidad de que ocurra un evento es nula y la del otro evento es 1, es decir que la entropía sería nula cuando tenemos certeza de la ocurrencia de un evento.
2. H es positiva

3. Si tenemos un número dado de probabilidades, donde todas las probabilidades tienen el mismo valor, entonces tendremos un máximo en $H = \log(n)$ el cual puede ser interpretado como la situación más incierta.
4. Supongamos dos eventos x y y con m y n posibilidades respectivamente. Sea $P(i, j)$ la probabilidad de la ocurrencia conjunta con i para x y j para y . La entropía del evento conjunto es entonces:

$$H(x, y) = - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n P(i, j) \log(P(i, j)) \quad (2.37)$$

Mientras que la entropía de los eventos:

$$H(x) = - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n P(i, j) \log \left(\sum_{k=1}^n P(i, k) \right) \quad (2.38)$$

$$H(y) = - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n P(i, j) \log \left(\sum_{k=1}^n P(k, j) \right) \quad (2.39)$$

Donde tendríamos la siguiente relación

$$H(x, y) \leq H(x) + H(y) \quad (2.40)$$

Estas propiedades generalizan más la fórmula derivada por Planck y Boltzmann para eventos condicionados por otros eventos, donde ahora la medida de incertidumbre de ese sistema no es aditiva (deja de ser una cantidad extensiva).

Para finalizar, todo esto ya nos está mostrando cómo la medida de incertidumbre está ligada a la medida de la entropía. Consecuentemente, esto suscita una cuestión, ¿será posible derivar el segundo principio de la termodinámica $\oint \frac{dQ}{T} \geq 0$ a partir de la fórmula de información/entropía? De ser así, entonces la incertidumbre y la entropía no solamente serían medidas similares, sino que además, serían medidas análogas y alimenta nuestra asunción de que medir cantidad de información no conocida del resultado final es medir la entropía.

2.5. El segundo principio generalizado de Jacob Bekenstein y Stephen Hawking

Jacob David Bekenstein fue un astrónomo y físico teórico reconocido por sus ideas innovadoras, las cuales permitieron establecer una conexión entre la segunda ley de la termodinámica y los agujeros negros. Ideas desarrolladas en su artículo titulado “Black Holes and the Second Law” ([7]), donde Bekenstein trata de resolver la siguiente pregunta: ¿qué ocurre con la entropía cuando la materia cae en un agujero negro? Partiendo de la segunda ley de la termodinámica, donde la entropía total de un sistema aislado nunca debe disminuir.

Bekenstein propone que, al introducir un paquete de entropía en un agujero negro, la entropía del mundo exterior disminuye, y dado que un agujero negro en equilibrio solo se caracteriza por tres propiedades (masa, carga y momento angular), el observador externo no puede determinar la entropía interior del agujero. No obstante, no se puede excluir la posibilidad de que la entropía total del universo haya disminuido en el proceso. ([7])

Bekenstein observó que cuando un objeto con entropía cae en un agujero negro, dicha entropía parece desaparecer para un observador externo. Sin embargo, con el fin de conservar la segunda ley, Bekenstein postula que es necesario un mecanismo el cual conserve dicha entropía. De este modo. Bekenstein retoma las ideas propuestas por resultados de Christodoulou y Hawking, que indican que el área de un agujero negro nunca disminuye sino que aumenta en casi todas las transformaciones; por lo tanto, los agujeros negros al igual que cualquier sistema físico, deben estar sujetos a las leyes de la termodinámica. (Shahar Hod, 2015)

De este modo, Bekenstein introduce así la idea de que la entropía de un agujero negro debería ser proporcional al área de su horizonte de sucesos; mencionando que “El área de un agujero negro parece ser la única de sus propiedades que tiene este comportamiento similar al de la entropía” ([7])

Bekenstein asocia la entropía de los agujeros negros, asumiendo la entropía como medida de falta de información sobre el estado interno del agujero negro, el cual es inaccesible para los ob-

servadores externos. Con el fin de vincular la entropía del agujero negro con su área, se basa en el teorema de área de Hawking, el cual establece que el área del horizonte de eventos de un agujero negro nunca disminuye. De este modo, Bekenstein denota la entropía de un agujero negro S la cual es proporcional a su área A ; para ello propone la siguiente fórmula ¹¹:

$$S_{BH} = \frac{k_b A}{4l_P^{1/2}} \quad (2.41)$$

Donde k_b es la constante de Boltzmann y l_P es la longitud de Planck dada por $\sqrt{\frac{hG}{c^3}}$. Implicando que la entropía de un agujero negro depende directamente del tamaño de su horizonte de eventos.

Bajo el desarrollo de estas ideas, Bekenstein formula lo que se conoce como “La segunda ley generalizada”, donde establece que, en cualquier proceso, “la suma de la entropía del agujero negro S_{BH} y la entropía de la materia o radiación fuera de él, S , no puede disminuir” (Shahar Hod, 2015). De esta manera, aunque la entropía de la materia que cae en un agujero negro desaparezca del universo visible, esta es compensada por un incremento en la entropía del agujero negro, relación que se representa de la siguiente manera:

$$\Delta(S_{BH} + S) \geq 0 \quad (2.42)$$

Tras esto, Bekenstein propone desafiar su ley generalizada, donde, junto a un experimento mental donde un objeto esférico de tamaño finito es absorbido por un agujero negro; dicho cuerpo esférico de masa μ y radio R generaría un incremento ΔA en el área del agujero negro, donde su valor mínimo estaría dado por la siguiente relación:

$$\Delta A_{min} = 8\pi\mu R \quad (2.43)$$

Para este caso se establecería un límite universal establecido como límite de Bekenstein, el cual

¹¹En el capítulo 3 derivaremos esta expresión a partir del número esperado de partículas que sale de un agujero negro

establece un límite en la cantidad de entropía o información que puede ser contenida en un espacio.

Dicha relación estaría dada por

$$S \leq \frac{\pi \mu R}{h} \quad (2.44)$$

Este razonamiento establece un límite para la cantidad de entropía que puede ser contenida en un espacio; lo que nos sugiere que no puede existir una cantidad infinita de información dentro de un espacio finito, razonamiento el cual denota Bekenstein mencionando que dicho límite de entropía asegura que se respete la segunda ley de la termodinámica generalizada en procesos físicos. ([7])

En 1975, Stephen Hawking se encontraba estudiando los efectos cuánticos de los agujeros negros, específicamente el proceso de colapso gravitacional y absorción de partículas, donde al considerar tales efectos "*los agujeros negros logran crear y emitir partículas como si se tratase de un cuerpo radiante*" (Hawking, 1975)[23]. Como consecuencia, estos efectos dan a entender que los agujeros negros eventualmente se evaporarán a tal punto que dejarán de existir, aspecto que violaría la ley del área del horizonte de eventos; no obstante, la ley generalizada de Bekenstein $S + \frac{A}{2}$ se compensaría por la entropía de la materia. En ese orden de ideas, a pesar de que los agujeros negros se evaporen y su horizonte de eventos decrezca, el hecho de tener una transformación que compense la transformación en el área del horizonte, por medio de la emisión de partículas, la entropía total del universo como sistema aislado se mantendría en crecimiento. Esto hace teorizar a Hawking sobre cómo la entropía se puede encontrar en partículas llamadas bariones.

Retomando la discusión de los efectos cuánticos en los agujeros negros, plantear una descripción completa de la gravedad cuántica llega a ser algo de mayor empresa, puesto que la teoría general de la relatividad tiene como objeto principal algo que se le denomina métrica, que está vinculado con los campos de materia modelados por el tensor de energía y momentum, en contraste con la cuántica estos campos de materia tienen un carácter cuántico y su descripción debe de ser modelada, de acuerdo a los postulados de la mecánica cuántica, con un operador hermítico. No obstante, la métrica no tiene la misma característica que la de un observador y no podemos representarla de esa manera, de igual forma, podemos seguir un esquema que sea consistente con ambos modelos haciendo que el tensor de energía y momentum represente un valor esperado, pero

perdería valor cerca de las singularidades [23].

En este orden de ideas, Hawking planteó el modelo de esos campos de materia siguiendo una ecuación de onda con una métrica no plana, que satisface las ecuaciones de campo con un tensor de energía y momentum representando un valor esperado. Sin embargo, se observa que la representación de esos campos de materia en espacios curvos por medio de operadores de creación y aniquilación no se puede dar directamente por sus componentes de frecuencias negativas y positivas, debido a que no hay un solo par de operadores de creación y destrucción que describan este campo, lo que hace que haya una posibilidad de que un observador lejano pueda medir partículas con respecto a un observador en la vecindad del horizonte, es decir, que hay una dependencia de unas regiones específicas del espacio. Sin embargo, las soluciones que expanden los campos forman una base ortonormal que sigue la relación de conmutación.

$$\frac{i}{2} \int_S (f_i^+ \partial_a f_j^- - f_j^- \partial_a f_i^+) d\Sigma^a = \delta_{ij} \quad (2.45)$$

Podríamos seguir abarcando más la discusión de la evaporación de los agujeros negros y la entropía. No obstante, es pertinente articular la medida de incertidumbre con la entropía para así poder darle una interpretación a la entropía de los agujeros negros derivada de la radiación de Hawking.

Capítulo 3

La reversibilidad e irreversibilidad de los procesos y la información inaccesible

"Puesto que cualquier medida siempre puede ser captada con un número suficiente de bits (los bits pueden representar cualquier número, y los números pueden representar medidas de cualquier precisión), hay un sentido por el cual toda medida científica se reduce a bits. Pero, ¿eso implicaría que la realidad misma se reduce a bits? ¿O por el contrario la ciencia, en la medida como está cuantificada, se reduce a bits?"(William Dembski) ¹

Vincular el concepto de información con el concepto de entropía requiere que tomemos un aspecto fundamental en la física, como lo es la medida, puesto que el problema al que los físicos como Planck, Clausius y Boltzmann se encontraban inmersos, era el hecho de que sus modelos acudían a medidas microscópicas, las cuales eran inobservables y por eso se requería que la mecánica estadística y la electrodinámica clásica acudieran a medidas macroscópicas, las cuales pueden ser medidas por un instrumento. En adición, como se había expuesto de los desarrollos de Planck frente a la hipótesis del cuanto, él logra vincular esas medidas macroscópicas como un valor esperado de varias medidas microscópicas, pero cabe destacar que no hay necesidad de pensarnos en las medidas microscópicas en sí, sino que debemos de pensar el sistema como una partición de sistemas que van a representar estados en los que se distribuye el sistema total. En contraste

¹(William Dembski, "How Informational Realism Dissolves the Mind–Body Problem" at Mind and Matter: Modern Dualism, Idealism and the Empirical Sciences (forthcoming))

con la historia, se pudo observar cómo estos físicos medían la entropía mediante distribuciones de probabilidad, es decir que, además de la medición y la irreversibilidad, las distribuciones y la probabilidad serán el puente que nos permitirá converger el concepto de entropía con el de información en los procesos.

En ese orden de ideas, las medidas macroscópicas tendrán su propia distribución a raíz de los posibles estados en los que se distribuye el mismo sistema. Por otro lado, esta idea llega a ser consistente con la misma medición y la teoría del error que le precede a esta. Para poder mostrar este vínculo al lector, acudiremos a los desarrollos propuestos por Jaynes [24] y Cox [25] que nos permitirán articular de manera formal la relación entre entropía e información como medidas análogas de la irreversibilidad.

3.1. Las cantidades macroscópicas y las distribuciones

Para estudiar los sistemas termodinámicos y cómo se cuantifica la medida de entropía en estos, se abordaron dos perspectivas diferentes pero complementarias, siendo estas las distribuciones macroscópicas y las descripciones microscópicas de estos sistemas. La perspectiva macroscópica se centra en las variables de estado del sistema como lo son la presión, la temperatura y el volumen; estas hacen referencia a cómo estas describen el comportamiento del sistema sin considerar las partículas individuales. Por otra parte, la perspectiva microscópica analiza el comportamiento de cada una de las partículas del sistema y cómo cada una de estas interactúa entre sí. Ahora, con dicho análisis, se busca brindar esa correlación entre los estados macro y micro de un sistema que nos permite extraer información de estos y su preferencia por los estados finales.

Con el fin de lograr comprender tanto la relación como la distinción entre microestados y macroestados se puede entender un microestado como la representación de una configuración en específico de todas las partículas de un sistema, teniendo en cuenta su posición, velocidad y momento(variables que son medidas por un observador mecánico). Por otra parte, el macroestado, co-

mo se mencionó anteriormente, está definido por sus propiedades macroscópicas (aquellas que son medidas por un observador termodinámico) también dichas como las variables de estado; aunque distintas configuraciones microscópicas diferentes (microestados) pueden llegar a corresponder al mismo macroestado, las leyes termodinámicas clásicas sólo requieren unos pocos parámetros para caracterizarlo. Dado el macroestado de un sistema en equilibrio, está determinado por estas variables macroscópicas, mientras que cada macroestado dado admite una gran cantidad de microestados consistentes con los mismos valores de E, V, T , etc. (Boltzman, 1898)[12]

Ahora para definir la entropía como la medida en termodinámica y para la descripción de un sistema termodinámico se fundamenta en el estudio de la distribución de probabilidad sobre el conjunto de los estados microscópicos posibles. Para ello, la entropía surge como una magnitud que nos permite calcular qué tan molecularmente desordenado va a estar un sistema a partir de la probabilidad en la que las partículas de este se pueden ubicar y sobre la falta de información accesible para interpretar el sistema. Donde su ecuación está descrita de la siguiente manera:

$$H = - \int \rho \log(\rho) dX \quad (3.1)$$

Donde ρ representa la probabilidad de que una partícula tomada aleatoriamente posea un determinado microestado, teniendo en cuenta que en la configuración de partículas hay unas indistinguibles de otras y donde esta comprensión de los sistemas es esencial, puesto que permite estudiar la evolución de sistemas termodinámicos bajo un punto de vista mecánico-estadístico.

Un ejemplo para visualizar esto sería un macroestado caracterizado por observar un gas saliendo de una tetera a una temperatura y presión cualquiera, sabiendo que dicho sistema puede representarse mediante múltiples arreglos microscópicos distintos de posición y velocidad de las partículas (microestados) cosa que resultará en las mismas propiedades macroscópicas observables. De hecho, según la definición de Boltzmann, la entropía S del sistema estaría definida como:

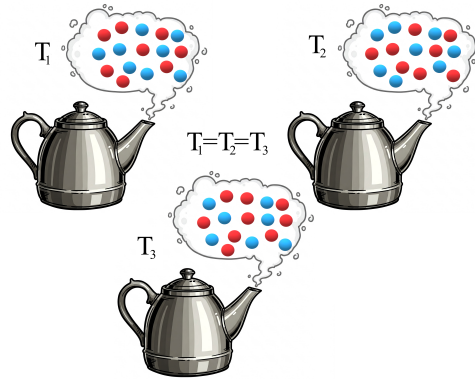


Figura 3.1 – Mismo macroestado tetera para diferentes microestados, Creación propia

$$S = k_B \ln(W) \quad (3.2)$$

donde W es el número de microestados compatibles con el macroestado dado. Así, la entropía cuantifica directamente la multiplicidad de microestados: si W aumenta, S aumenta. En particular, dada esta relación, la entropía es mayor cuando hay más microestados accesibles para el mismo macroestado. (Jaynes, 1965)[26]

Ahora sí consideramos un gas ideal en equilibrio térmico y sin fuerzas externas, las velocidades de las moléculas seguirán la distribución de Maxwell-Boltzmann, la cual describe la probabilidad de que una molécula tomada aleatoriamente tenga una velocidad específica en función de la temperatura del gas. En adición, si consideramos cualquier sistema termodinámico como lo puede ser desde un gas ideal, nos podremos dar cuenta de que esta distribución maximiza la entropía de un sistema bajo las restricciones impuestas por la energía total y el número de partículas. Esto implica que el hecho de que la tendencia de los sistemas al equilibrio no es más que un estado donde la entropía localmente es máxima, donde introducir un objeto como la densidad de probabilidad asociada a los microestados del sistema se configura una visión probabilística de estos fenómenos.

Teniendo en cuenta que la función de la distribución de Maxwell-Boltzmann se expresa de la siguiente manera:

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} \quad (3.3)$$

Siendo m la masa de una molécula en particular, v su velocidad y k_B la constante de Boltzmann y T la temperatura absoluta del gas.

Para ejemplificar cómo la distribución de velocidades de Maxwell-Boltzmann describe un estado de máxima entropía, es relevante ver cómo la medida de entropía en términos de probabilidades nos permite encontrar estas distribuciones en el equilibrio. Para ello, se define la función de densidad de probabilidad de velocidades $\rho(\mathbf{v})$ con entropía estadística (relación entropía Boltzmann–Shannon).

$$S[\rho(q, p)] = -k_B \int \rho \ln \rho d^3 q d^3 p \quad (3.4)$$

$$\int \rho(q, p) d^3 q d^3 p = 1 ; \langle E \rangle = \int E(q, p) \rho(q, p) d^3 q d^3 p \quad (3.5)$$

La primera ecuación representa la medida de entropía, la segunda es una condición propia de las distribuciones las cuales deben de ser normalizadas y la tercera condición representa una medición efectuada al sistema por un instrumento.

Para encontrar la densidad de probabilidad de este estado de mayor entropía, enunciamos el segundo principio de la siguiente manera

$$\delta S[\rho(q, p)] = 0 \quad (3.6)$$

Donde obtenemos las siguientes condiciones a maximizar

$$\delta S = \frac{\partial (-k_B \rho \ln \rho)}{\partial \rho} \delta \rho ; 0 = \frac{\partial \rho}{\partial \rho} \delta \rho ; \delta \langle E \rangle = \frac{\partial (E(q, p) \rho(q, p))}{\partial \rho} \delta \rho \quad (3.7)$$

La condición para maximizar la medida de energía media del sistema viene del hecho de que dentro de este estado de equilibrio, las medidas medias no son tan precisas y por lo tanto nuestra medición del sistema tiene una mayor desviación. En ese orden de ideas, la densidad de probabilidad que maximiza la entropía es

$$\rho(q, p) = C e^{-\beta E(q, p)} \quad (3.8)$$

Considerando la energía de este sistema como cinética y normalizando la función, tenemos la distribución de velocidades de Maxwell.

$$\rho(q, v) = \frac{1}{V} \left(\frac{\beta m}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2}\beta m v^2} \quad (3.9)$$

Siendo esta la base para la obtención de la función completa de velocidades de Maxwell-Boltzmann ².

Bajo este tratamiento matemático se logra dar cuenta de cómo las cantidades que llamábamos "*unkontrollierbar*" se disponen de tal manera que maximizan el número de configuraciones microscópicas bajo las condiciones macroscópicas dadas (medidas del sistema a partir de instrumentos). Siendo en este caso la distribución de Maxwell-Boltzmann la que nos permite posibilitar el mayor número de microestados compatibles con un mismo macroestado; dando de cuenta que el sistema tiende naturalmente a disponerse conforme a esta distribución porque es el estado estadísticamente más probable; por lo tanto, la máxima entropía posible en equilibrio térmico. Este principio da cuenta de la tendencia general de los sistemas a evolucionar hacia estados de mayor entropía, como lo enuncia el segundo principio de la termodinámica. (Boltzmann, 1898) [12]

Por otra parte, cuando se interpreta desde el marco de la teoría de la información, la entropía de Shannon asociada a la distribución de velocidades puede considerarse como una medida de nuestra ignorancia acerca de un estado específico del sistema que toma al final, debido a que disponemos de información limitada sobre la configuración precisa de las velocidades individuales.

En contraste con lo que hemos dicho del desorden, la definición de entropía que había comenzado por Helmholtz es correcta, pero bajo unas condiciones. Estas condiciones que habíamos hecho énfasis durante los desarrollos de Boltzmann, eran la isotropía y homogeneidad dadas por el

²La distribución de Maxwell es la distribución de velocidades al cuadrado, mientras que la que derivamos es la densidad de probabilidad general para ese sistema

estudio de los gases donde no hay fuerzas externas actuando donde uno consideraría uniformidad en todo el recipiente como cualquier fluido compresivo. Sin embargo, si consideramos otras sustancias, como el agua y las sometemos a cambios de fase, veremos que la condición de isotropía y homogeneidad ya no es suficiente para decir que la entropía está creciendo.

Por ejemplo, si hacemos un cambio de fase hielo-agua y agua-vapor, en medio de los dos procesos hay un desequilibrio donde antes de que la sustancia sea totalmente pura (que solo sea agua o sea vapor sin alguna señal de hielo) nada sería uniforme en la mezcla pero cuando alcanza el equilibrio, ahora esa uniformidad existe. Sin embargo, en todo los procesos el calor está creciendo y por lo tanto la entropía está en crecimiento, es decir, que la condición de isotropía y homogeneidad que forma la medida de entropía igual desorden no describe del todo el crecimiento de esta cantidad para otras sustancias.

Por otro lado, como fue definido anteriormente, este desorden molecular no hace referencia como tal a la configuración en sí, si no a la igualdad de probabilidades a priori y contrastado con la hipótesis del desorden elemental (elementar ungeordnet), el desorden implica la existencia de una condición por la cual hay cantidades -microestados- que no podemos medir debido a que son incontrolables (unkontrollierbar). Esta es una condición que es consistente con el segundo principio para los procesos privilegiados (irreversibles), ya que, de ser capaces de controlar todos los microestado de un cierto ensamble que describe un sistema, podemos hacer que los procesos privilegiados sean indiferenciados (reversibles).

Sin embargo, entonces qué mediría la fórmula del logaritmo natural de los microestados, ya que siempre la relacionamos con desorden del lenguaje común de cierto arreglo, por ejemplo en la figura 3.2 hay dos rectángulos donde por dentro de ellos hay puntos generados aleatoriamente, si nos preguntamos cuál es más desordenado de acuerdo con la fórmula $S = k_B \ln W$, encontraremos que en realidad ambos rectángulos tienen la misma entropía, es decir, $S = 0$. Esto se debe a que W representa las posibles permutaciones y ya que en cada rectángulo solo hay una permutación, entonces $W = 1$ (Styer, 2019) [5].

Puesto que que ambas tienen la misma entropía, para la persona que esté leyendo esto, ¿cuál sería el ensamble más desordenado?

Entonces la fórmula de Boltzmann no está midiendo desorden del lenguaje común, está mi-

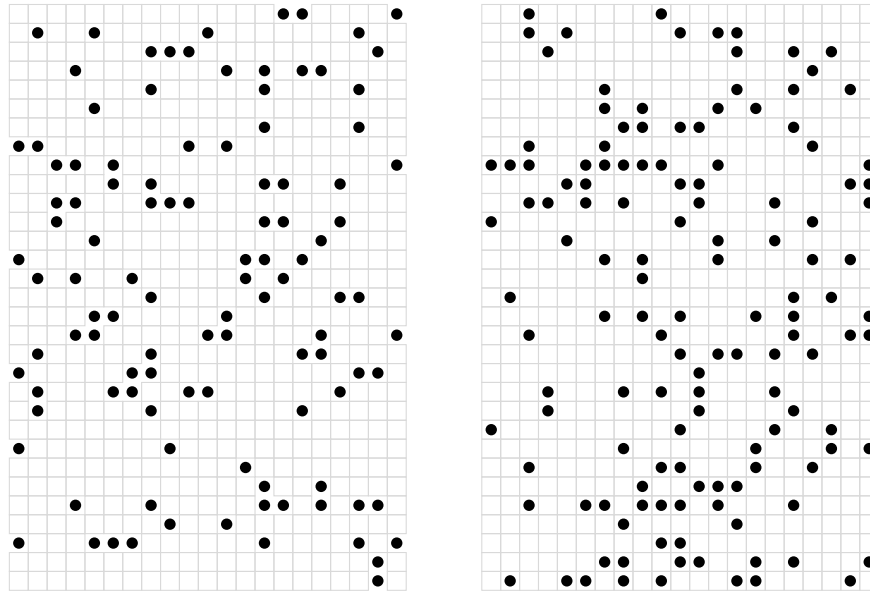


Figura 3.2 – Dos rectángulos donde se generan puntos aleatoriamente, figura inspirada por (Styer, 2019) [5]

diendo la cantidad de permutaciones equiprobables en las cuales las cantidades incontrolables se distribuyen.

En este sentido, bajo las ideas propuestas por E. T. Jaynes y Claude Shannon, la entropía estadística se podría interpretar como esa medida de la información faltante para determinar el microestado del sistema cuando solo se conoce su macroestado. De esta manera, la entropía termodinámica S no solo cuantifica el número de configuraciones posibles, sino que también sería proporcional a la cantidad de información adicional que haría falta para describir el microestado, dando cuenta de cómo un macroestado de baja entropía implica que tenemos mucha información sobre el sistema (pocos microestados compatibles), mientras que un macroestado de alta entropía implica gran incertidumbre microscópica.

Con base a este análisis, por eso de aquí en adelante la entropía en sus distintas representaciones matemáticas que hemos abordado a lo largo del trabajo (desde Clausius hasta Shannon) la vamos a definir como la medida de incertidumbre o información inaccesible sobre de un sistema. Como lo menciona Jaynes

'información' es una elección para describir las expresiones de entropía. Además, se

puede inventar fácilmente situaciones en las que la adquisición de una nueva pieza de información (que un evento previamente considerado improbable, de hecho, haya ocurrido) pueda causar un aumento en la entropía. Los términos 'incertidumbre' o 'incertidumbre aparente'³(Jaynes, 1957)

Esto quiere decir que el término de "información" puede estar vinculado a la entropía, dando cuenta de que a mayor información en un sistema puede influir en la entropía de este, estableciendo así una relación con el grado de incertidumbre o conocimiento disponible sobre un sistema. En contraste con lo que habíamos mencionado de la problemática del ruido en los sistemas de transmisión de mensajes, se encuentra que información es el análogo de la energía, puesto que para reducir la entropía debemos compensar el sistema con energía para llevarlo al desequilibrio; análogamente aquí para compensar el sistema, tenemos que compensarlo con información, evidentemente información es muy general como definía Mensah [13], debemos de situar esta palabra para concebirla dentro de la física.

3.2. La toma de medidas y la información en los sistemas

Con el fin de establecer relaciones entre conceptos cómo lo fue la relación entre entropía, probabilidad e información a través de la formulación estadística de la termodinámica realizada previamente, es pertinente revisar también cómo esta relación se manifiesta en los procesos de observación y medición de sistemas físicos; teniendo en cuenta que la medición no es simplemente una acción técnica; es un proceso epistemológico y sistemático que implica la interacción entre el observador y el sistema observado bajo una estructura lógica que permite la obtención de respuestas ante problemas de indagación, proceso el cual está directamente ligado a la adquisición y procesamiento de la información. (Alvarez, 2011)[28]

Ahora, si se busca establecer vínculos o relaciones entre conceptos, es necesario revisar cómo se definen los conceptos en ciencias, para lo cual Stephen Toulmin, en su obra *The Philosophy of*

³[27]

Science, destaca la complejidad de definir conceptos fundamentales en la ciencia, señalando que:

'Las definiciones son misericordiosamente olvidadas. Y así debe ser. No se requieren definiciones de estos términos y los autores más conscientes de los libros de texto finalmente están dejando de lado incluso el intento de definirlos.'(Toulmin, 1953)⁴

Resaltando así la dificultad de establecer definiciones precisas para conceptos como 'medición' e 'información', los cuales son fundamentales pero a menudo no terminan siendo totalmente claros a la hora de caracterizarlos. Teniendo en cuenta que la medición en particular no solo implica la obtención de datos cuantitativos, sino también la interpretación de estos datos dentro de un marco que les brinde un significado. Además, también existe una divergencia entre las leyes científicas y las generalizaciones lógicas, señalando así la importancia de comprender cómo las mediciones iniciales y las observaciones empíricas se integran en el desarrollo y aplicación de teorías científicas de la siguiente manera:

'Esta divergencia se debe en parte a la confusión de los lógicos entre leyes y generalizaciones: uno dudaría en afirmar, [...], mientras que para establecer la forma de una regularidad en física solo se necesitan unas pocas observaciones cuidadosas, pero esta no es toda la historia. También hay una segunda dificultad relacionada que superar: la de explicar cómo las aplicaciones posteriores de una teoría están relacionadas con las observaciones mediante las cuales la teoría fue originalmente establecida.'(Toulmin, 1953)

Como se observó en el apartado anterior, en el contexto de la termodinámica estadística, la medición adquiere una dimensión adicional al estar relacionada con la entropía y la información. La entropía la llegamos a interpretar como una medida de la incertidumbre o información inaccesible de un sistema, dado su macroestado (medidas tomadas). Así, la medición se convierte en un proceso de reducción de incertidumbre, donde cada observación proporciona información que

⁴[15]

restringe el conjunto de microestados posibles compatibles con el macroestado observado.

Para alimentar esta idea, retomemos un sistema termodinámico en equilibrio; por lo tanto, las probabilidades de los eventos de este sistema están ajustadas de tal manera que maximizan la entropía, lo que implica que estamos en un estado de mayor incertidumbre. Puesto que la información que tenemos de este sistema son las mediciones que tenemos de las cantidades observables (macroestado) y el hecho de que no podamos acceder a las mediciones descritas por observadores mecánicos, nos da a entender que para reducir la cantidad de información no accesible del sistema, tenemos que efectuar más mediciones.

Esto se contrasta con lo que menciona Richard T. Cox en su obra "The Algebra of Probable Inference", donde abarca la medida de entropía dentro de la probabilidad de las inferencias, "...entre mayor sea la entropía de un conjunto de proposiciones, mayor será la cantidad de preguntas para determinar cuál de todas las proposiciones es cierta" (Cox, 1962) [25]. En términos de la física, lo citado por Cox puede formularse de la siguiente manera:

Dado un sistema físico (medido por un observador termodinámico) en equilibrio descrito por un conjunto de afirmaciones y medidas iniciales. Para reducir la entropía de este sistema (la información no accesible), debemos realizar una serie de preguntas y medidas que den cuenta de la certeza de las afirmaciones y medidas iniciales.

Hay que fijarnos que dentro de la probabilidad esta medida de entropía se vuelve una necesidad para poder medir incertidumbre, como en la física que la medida de entropía inicialmente iba de la mano con las transformaciones no compensadas. Pero, cuando se agrega la hipótesis del desorden elemental (elementar ungeordnet), la física y la probabilidad hablan de la misma entropía, a lo cual Shannon contrasta ambos casos con los mensajes, donde la probabilidad permite medir información. Por lo tanto, no es un capricho utilizar la información, es una necesidad generada por el contexto en el que nos situamos propia de la problemática abarcada anteriormente.

Volviendo con la obtención de información, coloquemos un sistema como lo es un gas en términos de proposiciones.

- (P1) Este sistema Σ está en un estado de máxima entropía.
- (P2) El sistema Σ está localizado en un volumen de dimensión L^3 , por lo tanto, puede moverse en coordenadas (q_1, q_2, q_3) en ciertas condiciones de temperatura y presión.
- (P3) El sistema está descrito únicamente por su energía cinética $T(p_i)$

Las proposiciones anteriores tienen cierto valor de entropía de acuerdo con la distribución de Maxwell-Boltzmann que habíamos derivado anteriormente, donde su entropía estaría dada por la fórmula de Shannon.

$$S_1 = -k_B \int_{V, \mathbb{R}} \rho_1 \ln \rho_1 d^3 q d^3 p \quad (3.10)$$

$$S_1 = k_B (\ln Z_1 + \beta \langle T \rangle) \quad (3.11)$$

$$S_1 = k_B \ln Z_1 + \frac{3}{2} k_B \quad (3.12)$$

Ahora supongamos que en nuestro análisis del sistema vimos que en realidad tiene una energía potencial elástica y sigue moviéndose en las tres direcciones. De esta manera, hace que (P3) sea falso y, por lo tanto, el conjunto de proposiciones estaría dado de la siguiente manera:

- (P1) Este sistema Σ está en un estado de máxima entropía.
- (P2) El sistema Σ está localizado en un volumen de dimensión L^3 , por lo tanto, puede moverse en coordenadas (q_1, q_2, q_3) en ciertas condiciones de temperatura y presión.
- (P3) El sistema no está descrito únicamente por su energía cinética $T(p_i)$, sino que también tiene una energía potencial elástica $V(q_i)$ que hace que oscile en tres direcciones.

Con base a este conjunto de proposiciones, la distribución sería

$$\rho_2 = \frac{1}{Z_2} e^{-\beta T - \beta V} \quad (3.13)$$

Donde ahora la entropía del sistema estaría dada de la siguiente forma

$$S_2 = k_B (\ln Z_2 + \beta \langle T \rangle + \beta \langle V \rangle) \quad (3.14)$$

Uno creería que al haber más términos en la expresión de entropía, esto implicaría que la entropía es mayor. No obstante, realizando los cálculos pertinentes, la función S_1 es mayor que S_2 . Donde en la siguiente figura se puede apreciar cómo al hacer la proposición (P3) falsa, logramos hacer que la entropía decrezca. Esto es una consecuencia de lo que habíamos dicho de la compensación de un sistema a partir de la energía, donde ahora al compensar el sistema con información (medición), haría que la entropía decreciera y la información inaccesible del sistema se reduce a comparación de cuando se describía por una cantidad de energía menor.

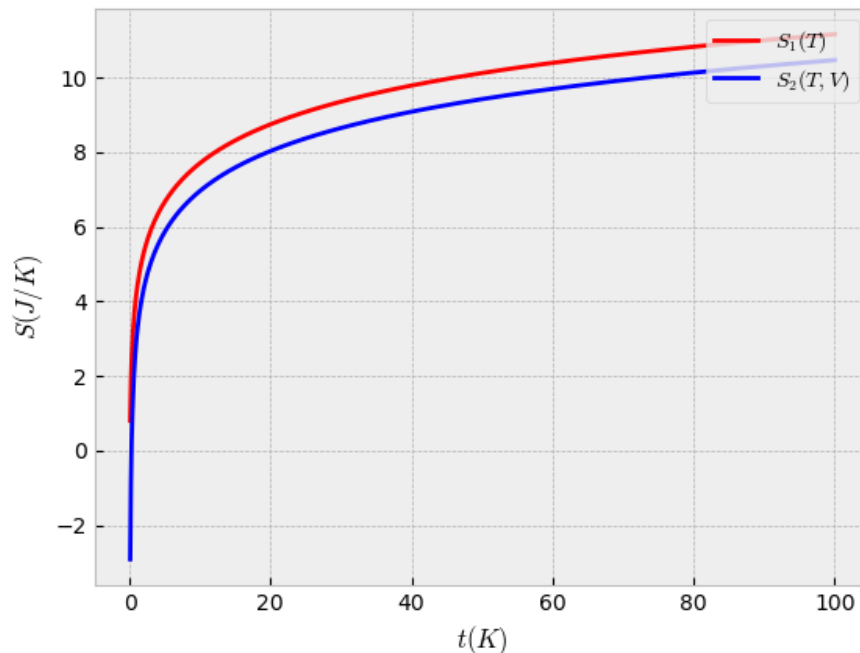


Figura 3.3 – Gráfica para la entropía del sistema con solo una medición de energía y con dos mediciones de energía, utilizando unidades naturales

Por otro lado, al graficar ambas entropías como función de la temperatura, vemos distintos valores; sin embargo, solo los valores de temperatura que cumplen con la condición de que la entropía sea mayor a 0 son físicamente válidos. Esto se debe a que la segunda ley, en términos del equilibrio, requiere que la entropía sea positiva para poder dar cuenta de la tendencia de los sistemas a evolucionar a estados de mayor entropía. Por eso, tanto Shannon en su teoría de la información

como en la teoría de la probabilidad por Cox ”*la entropía de un conjunto de proposiciones mutuamente excluyentes no puede ser negativa*”(Cox, 1962)[25]. Por lo tanto, tanto en la probabilidad como en la física podemos decir que se establece una condición para la evolución de los eventos a estados de mayor incertidumbre.⁵

Esto implica que los estados que pueden darse en el mundo físico, ya sean llevados a cabo por procesos naturales (privilegiados) o neutrales (indiferenciados), deben tener siempre una entropía positiva. En contraste con nuestro ejemplo, para que este sistema describa un estado de equilibrio en la naturaleza, su temperatura no debe ser cercana al 0 absoluto⁶. Por otro lado, una consecuencia del hecho de que la entropía no puede ser negativa viene cuando analizamos las distribuciones, donde estas tienen la forma de una distribución normal en el equilibrio. Aquellas distribuciones tienen una desviación estandar equivalente a $\sigma \simeq k_B T$, cuando tratamos de alcanzar el cero absoluto estamos tratando de alcanzar una precisión cercana a 0 para nuestra medición. Por lo tanto, esta relación implica que no es posible alcanzar mediciones precisas de los sistemas y eso implica que los instrumentos poseen entropía de acuerdo a su precisión.

Debido a que las distribuciones son propias de la medición, podemos generalizar la distribución de Maxwell-Boltzmann para más restricciones a los sistemas; esto implica que podemos describir el sistema bajo otras cantidades que medimos en términos de valores medios como ya habíamos comentado a la luz de las definiciones de Planck (Jaynes, 1957)[24]. No obstante, esto se articula a partir de lo que denominábamos ”*elementar ungeordnet*”.

Formulando este razonamiento, tenemos

Sea $\{Q_j\}$ un conjunto de observaciones (mediciones), existen un conjunto de cantidades 'unkontrollierbar' que distribuyen estas cantidades como consecuencia del desorden elemental.

De tal manera que, haciendo adición a estas cantidades, tenemos que la generalización de la distribución de mayor entropía es:

⁵El lector creará que hay una discontinuidad entre proposiciones y mensajes respecto a lo que Shannon establece, sin embargo, una proposición sigue siendo un mensaje lo cual no genera una pérdida de generalidad en lo establecido en el primer capítulo.

⁶Aquí el lector se habrá dado cuenta que a raíz de este análisis enunciamos lo que se denomina el tercer principio de la termodinámica, la imposibilidad de alcanzar el 0 absoluto

$$\rho(q_i, p_i, X(Q)_j) = \frac{1}{Z} e^{-\beta E - \sum_j \lambda_j Q_j} \quad (3.15)$$

Donde $X(Q)_j$ es la cantidad incontrolable asociada a Q y λ_j es un multiplicador que tiene unidades de $\left[\frac{1}{Q}\right]$.

Donde la entropía se da en términos de cantidades medibles con O representando el número de observaciones.

$$S = k_B \ln Z + k_B \beta \langle E \rangle + k_B \sum_i^O \lambda_j \langle Q_j \rangle \quad (3.16)$$

Este análisis da a entender que la información y la entropía son en esencia cantidades medibles, puesto que, a partir de las afirmaciones y mediciones que hagamos del sistema, podemos establecer qué tanta información no accesible hay y cuántas preguntas y mediciones debemos realizar para reducirla; de manera heurística mostramos que entropía como una cantidad que debe ser medible debe de ser equivalente a otra cantidad que en esencia también es medible a partir de lo que ya estaba predeterminado de las matemáticas que modelan ambos conceptos. Sin embargo, hay sistemas que llevan a cabo procesos naturales de los cuales, por más preguntas y mediciones que realicemos, no habrá manera de reducir su entropía. Es decir, la medición de un sistema que llevó a cabo un proceso natural no puede hacer que la información inaccesible del sistema decrezca, tal como ocurre en los agujeros negros que veremos más adelante.

Retomando el ejemplo de un sistema de cenizas que se dio a partir de un proceso de combustión para ejemplificar los procesos irrversibles (privilegiados). El sistema vivo tuvo cierta cantidad de entropía S_0 y cuando se dio el proceso natural, el sistema tuvo un valor de entropía S_1 , de acuerdo a nuestro razonamiento, para que S_1 decrezca debemos efectuar mediciones y realizar preguntas sobre el sistema. Supongamos el siguiente conjunto de proposiciones.

(P1) Las cenizas están en un estado de máxima entropía.

(P2) El sistema de cenizas fue producto de un proceso de combustión de un ser vivo a 1500°F a 1800°F.

(P3) El sistema tiene elementos provenientes de los huesos de un ser vivo y cierta cantidad de sodio y potasio.

De acuerdo con las tres proposiciones, podemos preguntarnos, ¿el ser vivo es un humano? Al tener ciertas cantidades de materia provenientes de los huesos, podemos asumir que las cenizas son humanas ⁷. En ese orden, si son humanas, hagamos la siguiente pregunta que va a constituir una medida, ¿será que podemos extraer ADN de las cenizas para determinar el sujeto vivo?

Entonces supongamos que nuestra cantidad Q es el ADN que medimos a las cenizas; si se logra determinar la medida, entonces la entropía puede decrecer y tendríamos menos información inaccesible. No obstante, hay investigaciones que por medio de la purificación de las muestras de ADN evidencian que el tiempo útil de estas cenizas es de 2 a 4 horas, es decir, que fuera de ese intervalo no habría manera de obtener esta medida. En adición, aún estando dentro de este intervalo hay más probabilidades de que el ADN haya sido destruido debido a las altas temperaturas (Evans, 2025)[30]

Por lo tanto, tenemos que, a pesar de hacer más preguntas y medidas, no es posible reducir la entropía de este sistema tal que $S_1 < S_2$. De acuerdo con esto, podemos formular el segundo principio en términos de irreversibilidad con la medida de información no accesible.

Dado un sistema que pasa de un estado Σ a Σ' por medio de un proceso natural, no es posible hacer proposiciones y medidas del estado Σ' tal que $S_{\Sigma'} < S_{\Sigma}$. Por lo tanto, la tasa de la información inaccesible del sistema siempre tiende a crecer $\frac{dH}{dt} > 0$ para todos los procesos irreversibles y en consecuencia no es posible conectar el estado Σ' con el estado Σ por medio de otro proceso natural.

Para finalizar este capítulo, es de apreciar que nuestro objetivo en relación con la manera en la que se aborda la entropía para analizar la reversibilidad e irreversibilidad de los procesos se cumplió a raíz de la equivalencia con la información. Por otro lado, realizamos unas formulaciones a

⁷En realidad, hasta para las cenizas de la madera hay concentraciones del 17% al 33% de calcio y 2% a 6% de potasio (Couturier,2015)[29], no obstante para efectos de simplicidad asumiremos cenizas humanas.

la luz del segundo principio que permitan al lector vincular información con elementos propios de la física y las ciencias, como lo es la medida y las proposiciones que hacemos a los fenómenos. Esta generalidad de la equivalencia información inaccesible y entropía nos permitirá analizar la evaporación y puntualmente la entropía de los agujeros negros que habías pospuesto desde el primer capítulo, ya que, llegar de manera abrupta a concebir entropía de los agujeros negros como información sería ignorar los contextos donde los distintos científicos se situaban para desarrollar un problema motivado de un fenómeno.

A continuación, se presenta una tabla comparativa entre las leyes clásicas de la termodinámica y su posible interpretación desde la teoría de la información, retomando elementos como la entropía de Shannon y la noción de información inaccesible, integrando las formulaciones clásicas con las ideas contemporáneas de incertidumbre, entropía de información y accesibilidad del estado físico como lo hemos desarrollado hasta ahora.

Cuadro 3.1 – Leyes de la termodinámica y su interpretación bajo la teoría de la información

Ley	Formulación matemática	Significado físico	Interpretación informacional
0	$T_A = T_B = T_C$ $\delta S = 0$ $\delta H = 0$	Si dos sistemas están en equilibrio térmico con un tercero, entonces están en equilibrio entre sí. La temperatura localmente es constante en el equilibrio.	El equilibrio térmico representa un estado de máxima incertidumbre compatible con las condiciones. El sistema está completamente determinado por su temperatura, pero no por sus microestados.
1	$\Delta U = Q - W$ $\int_{\Omega} d\mathbb{P} = 1$	La energía interna de un sistema es igual al calor recibido menos el trabajo realizado. La energía se conserva.	La energía puede entenderse como la cantidad total de información del sistema, donde la probabilidad que mide esa cantidad de información se conserva. Los cambios en energía corresponden a flujos de información entre el sistema y el entorno.
2	$dS \geq 0$ $dH \geq 0$	La entropía total de un sistema aislado no disminuye. Los procesos irreversibles privilegian los estados finales.	La entropía como medida de incertidumbre tiende a aumentar. La información inaccesible sobre el sistema crece en procesos irreversibles.
3	$T > 0$ $\sigma > 0$	No es posible alcanzar el cero absoluto	No es posible que una medición tenga desviación o incertidumbre nula, siempre habrá una mínima cantidad de información inaccesible.

Capítulo 4

Evaporación e información no accesible en un agujero negro

La relación entre la entropía y el área del horizonte de eventos por Bekenstein en 1972, todavía no constituye un problema de la información en estos objetos, a pesar de que él lo haya interpretado como una medida de información no accesible. No fue hasta que en 1974, Stephen Hawking de manera teórica demuestra que los agujeros negros emiten radiación y eventualmente se evaporan cuando se llegaban a considerar unos objetos tanto matemáticos como físicos llamados campos cuánticos dentro de este espacio clásico. Esto generó un conflicto en lo que se pensaba de los campos estáticos, ya que, para que se emitan partículas, los campos deben ser dinámicos; como ocurre en electromagnetismo, donde solo las cargas aceleradas emiten radiación electromagnética, análisis que realizó Planck para modelar la radiación del cuerpo negro. Este resultado es importante puesto que abre paso al problema de la información.

En ese orden de ideas, es necesario derivar el resultado que obtuvo Hawking antes de llevar la entropía en términos de información, ya que no podemos dar por hecho un fenómeno sin poder demostrarlo y describirlo. En adición, este resultado llega a ser un trabajo de mucha empresa en el sentido de que se requieren conocimientos de teoría de campos cuánticos, una nueva teoría de la física que sigue en desarrollo. Por eso, en el apéndice C se derivó el resultado explicando conceptos necesarios para entender la lógica detrás.

Como se había mencionado en capítulos anteriores, el razonamiento de Hawking consistía en

que todas las interacciones, a excepción de la gravedad, eran de carácter cuántico, es decir, que la métrica seguía siendo clásica, en el sentido de que no se modelaba como un operador hermítico de acuerdo con los postulados de la mecánica cuántica, a diferencia del tensor de energía y momentum, el cual sí era considerado un observador debido a su relación con los campos.

Sin embargo, para que se pueda relacionar la métrica de manera clásica con el operador de energía y momentum, es necesario aplicar un valor esperado a este tensor de tal manera que la ecuación de campo que acopla la métrica y materia sea consistente en la forma matemática.

A este razonamiento para hacer teoría cuántica de campos considerando la gravedad se le denominó aproximación semiclásica, la cual puede ser considerada como una aproximación para una teoría de gravedad cuántica; evidentemente sigue en debate con varias teorías que pretenden mostrar los planteamientos de la relatividad general de Einstein en sistemas cuánticos. Sin embargo, esto no será discutido en este trabajo.

A partir de esta aproximación, Hawking encontró un espectro Planckiano de las partículas que escapan de un agujero negro estático. Sin embargo, el resultado en términos de medida se interpreta como que a distancias lejanas tenemos tiempos cortos para medir una cantidad finita de partículas que se traduce a medir temperatura. Por eso, en la derivación se obtuvo un $\delta(0)$ que implicaba que estábamos midiendo la radiación en un intervalo grande de tiempo, la cual ignoramos bajo la justificación de considerar tiempos cortos ¹.

Como este resultado tiene una similitud a la estadística de Bose-Einstein y al factor que está presente en la ley de radiación de Planck, entonces podemos realizar las siguientes proposiciones:

1. La densidad de distribución es propia de partículas llamadas Bosones.
2. El agujero negro de Schwarzschild emite fotones de todo el espectro electromagnético como si se tratara de un cuerpo negro ².

¹Pasa lo mismo que en el efecto Unruh, donde para medir la temperatura de un observador acelerado tenemos que tener una aceleración de $10^{26}m/s$, sin embargo, las partículas no pueden acelerar por mucho tiempo debido a que superarían la velocidad de la luz

²En general un agujero negro no es un emisor perfecto, esto debido a que hay un proceso de dispersión en el horizonte de eventos que no se tomó en cuenta para la derivación, no obstante, se presenta como un factor multiplicativo y no le quita generalidad al hecho de que los agujeros negros radían un espectro como si fuera un cuerpo negro.

3. Al ser un proceso de radiación, podemos aproximar su evaporación como un proceso isotérmico [31].

Finalmente, esto nos permite realizar una equivalencia entre la estadística de BE y el resultado obtenido:

$$\frac{1}{e^{4\pi\omega' \frac{r_s}{c}} - 1} = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega'}{k_B T}} - 1} \quad (4.1)$$

$$4\pi\omega' \frac{r_s}{c} = \frac{\hbar\omega'}{k_B T} \quad (4.2)$$

$$T = \frac{\hbar c}{4\pi k_B r_s} = \frac{\hbar c^3}{8\pi G M k_B} \quad (4.3)$$

Esto implica que la temperatura de un agujero negro es inversamente proporcional a su masa. Además, se puede inferir que los agujeros negros poseen un calor específico negativo [32], lo que implicaría que a medida que pierden masa, pierden energía.

Por otro lado, los elementos mostrados en capítulos anteriores, tanto matemáticos como propios de las concepciones de los autores tratados, nos permitirán llevar a cabo la necesidad de concebir entropía como información no accesible del sistema para estos cuerpos. Comenzando por el hecho de que la radiación de Hawking tenía un carácter probabilístico, debido a que este se presentaba como un valor esperado de una ocupación. En ese orden de ideas, puesto que los agujeros negros emiten partículas de distintas frecuencias y a la luz del espectro Planckiano poseen una energía $E_i = \hbar\omega_i$, podemos establecer una probabilidad matemática para este sistema de osciladores armónicos con distintos estados de frecuencia.

$$\mathbb{P}(n_i) = \frac{e^{-\beta_{BH} \sum n_i \hbar\omega_i}}{Z} \quad (4.4)$$

Esta probabilidad se puede justificar al considerar que cada frecuencia, entendiéndose como "unkontrollierbar", que disponemos para cierto número de partículas es un evento independiente y, puesto que son eventos independientes, la probabilidad total es el producto de las probabilidades

de todos los eventos ³.

Además, con nuestro número esperado de partículas derivado de la cuantización de un campo escalar

$$\mathbb{E}(n_i) = \sum n_i \mathbb{P}(n_i) = \frac{1}{e^{\beta_{BH} \hbar \omega_i} - 1} \quad (4.5)$$

Con base a lo anterior, podemos aplicar probabilidad e inferencias sobre las cantidades medibles del agujero negro y la radiación, puesto que ya hemos tratado este razonamiento en el capítulo anterior, donde a cada observación le pertenece a una distribución que mide la información contenida.

Por otro lado, antes de pasar al problema de la información y la interpretación de la entropía de los agujeros negros, debemos describir la evaporación de los agujeros negros estáticos.

4.1. La evaporación de los agujeros negros

Bekenstein, al asociar una entropía a los agujeros negros, motivó a Hawking a asociarle una temperatura a estos objetos, temperatura que ya habíamos obtenido previamente (4.3) a partir de una aproximación semiclásica. Gracias a esta aproximación, encontramos que la densidad del número esperado de partículas es propia de un cuerpo negro; por lo tanto, podemos asumir de manera análoga que el agujero negro se está evaporando y, en consecuencia, perdiendo masa.

Para modelar este proceso, vamos a considerar la ley de Stefan-Boltzmann para la luminosidad de un cuerpo radiante.

$$L = \Gamma \gamma \sigma A_H T_{BH}^4 \quad (4.6)$$

Reemplazando la expresión tanto para la masa como el área superficial del agujero negro, tendríamos

$$L = \Gamma \gamma \sigma \frac{\hbar^4 c^8}{256 \pi^3 G^2 k_B^4} \frac{1}{M^2} = \Gamma \gamma \frac{\hbar c^6}{15360 \pi G^2} \frac{1}{M^2} \quad (4.7)$$

³Véase el ejemplo que habíamos utilizado para deducir la fórmula de entropía de Boltzmann

Las constantes extra que aparecen en la ecuación formarían parte de la emisividad de un agujero negro. La razón por la cual aparecen es debido a que en la ecuación de onda en la parte radial hay un término dependiente de l que constituye un potencial central por el cual toda onda que pase por la vecindad de este, será dispersada y, por lo tanto, se atenuará. En ese orden de ideas, este factor da cuenta de la atenuación de las ondas que salen del agujero negro y será un número en un intervalo de 0 a 1 ⁴.

Volviendo con la luminosidad, esta representa la tasa de energía disipada, es decir que, un aumento en la luminosidad es equivalente a un decrecimiento en la energía del agujero negro.

$$-\frac{dE}{dt} = \Gamma\gamma \frac{\hbar c^6}{15360\pi G^2} \frac{1}{M^2} \quad (4.8)$$

Utilizando la equivalencia masa-energía, obtendríamos una ecuación diferencial para la masa del agujero negro.

$$\frac{dM}{dt} = -\Gamma\gamma \frac{\hbar c^4}{15360\pi G^2} \frac{1}{M^2} \quad (4.9)$$

Donde la solución con condición inicial $M(0) = M_0$ es

$$M(t) = M_0 \left(1 - 3\Gamma\gamma \frac{\hbar c^4}{15360\pi G^2 M_0^3} t \right)^{\frac{1}{3}} \quad (4.10)$$

De aquí se puede inferir que el tiempo en el que un agujero negro se evapora completamente es de

$$t_{ev} = \frac{15360\pi G^2 M_0^3}{3\Gamma\gamma\hbar c^4} \quad (4.11)$$

Para ver qué tan grandes son estos valores, se tomaron datos de las masas de sistemas binarios que brillan más dentro del espectro de los rayos X y luego los graficamos como se muestra en la siguiente figura.

⁴En nuestra derivación no obtuvimos una expresión para este factor debido a que se ignoró el número l al hacer que ambos campos estuvieran en ese mismo estado. Sin embargo, para poder obtener valores numéricos de este factor debemos hacer uso de la teoría cuántica de dispersión, comparando nuestras ondas planas que viajan del infinito con las ondas salientes tal que obtendríamos los coeficientes de reflexión y transmisión.

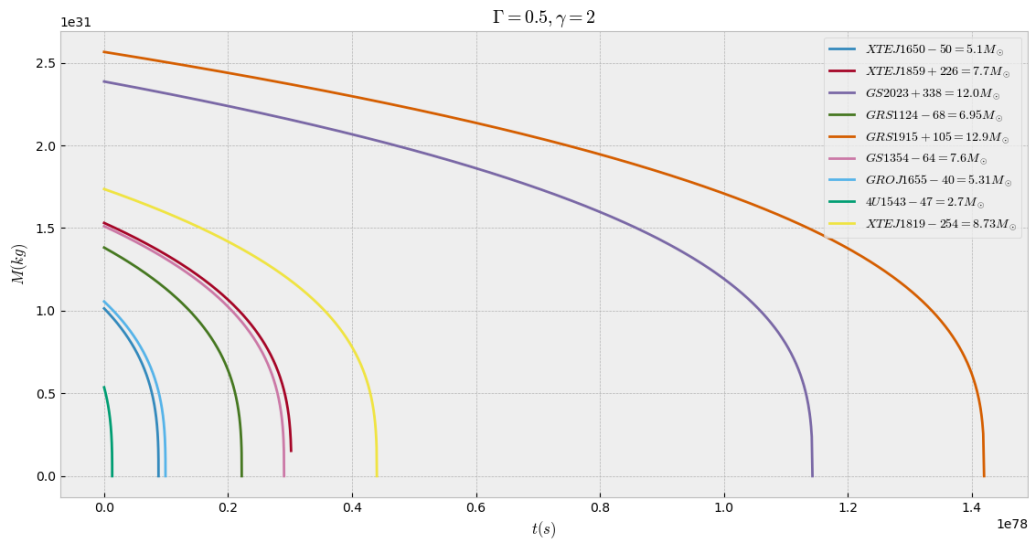


Figura 4.1 – Gráfica de masa vs tiempo para agujeros negros de sistemas binarios asumiendo que los fotones tienen dos grados de libertad y el factor del cuerpo gris es de 0,5. Los datos usados fueron recolectados por Grzegorz Wiktorowicz y Chris Belcynski y se tomaron de ([6])

Como se ve en la gráfica 4.1, el orden de los tiempos de evaporación es de 10^{78} s, esto implica que los agujeros negros tardan en evaporarse aproximadamente $3,171 \times 10^{70}$ años, lo cual es mucho, teniendo en cuenta que la edad del universo es de $13,17 \times 10^9$ años.

Por otro lado, si tomamos intervalos de tiempo lo suficientemente pequeños en comparación con el tiempo de evaporación de un agujero negro, podemos hacer uso de la asunción que hicimos anteriormente, donde la temperatura se mantenía constante. En contraste, para ejemplificarlo, notemos que si $t \ll t_{ev}$, entonces podemos aplicar una aproximación binomial a la ecuación 4.10 tal que la gráfica se vería de la siguiente manera, si además usamos una masa solar.

Como podemos observar en la figura 4.2, la masa cambia de manera lineal para tiempos menores a $1,5 \times 10^{74}$. Si usamos esa relación para ver los cambios de masa y temperatura, tendríamos que en la gráfica 4.3 a los $1,5 \times 10^{74}$ hubo un incremento del 40% en su temperatura, es decir, que, comparado con la edad del universo, los agujeros negros se evaporan isotérmicamente.

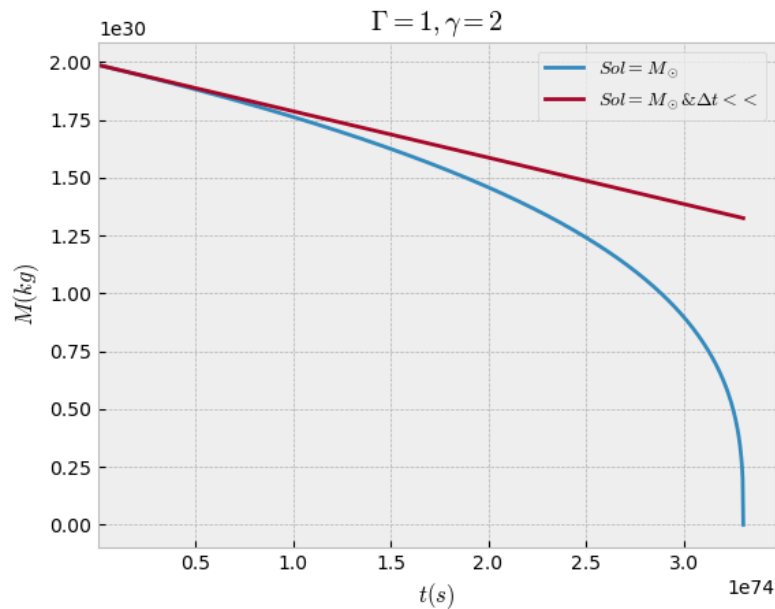


Figura 4.2 – Gráfica de masa vs tiempo aproximada con $M_0 = M_{\odot}$, $\Gamma = 1$ y $\gamma = 2$

Aquí el lector asumiría que al ser una evaporación, entonces los agujeros negros se someten a un proceso reversible. No obstante, si tenemos en cuenta las dimensiones de un agujero negro, es como que un montón de agua se estuviera evaporando, es decir, como la evaporación del agua de mar [31], donde la misma cantidad de agua evaporada no puede volver a condensarse. Entonces lo que hace que la entropía del agujero negro decrezca debido a su evaporación, teniendo en cuenta que es un sistema cerrado, es decir, con energía interna constante $U = const$. Al igual que el agua de mar, sobre su superficie hay una capa de vapor que en este caso serían fotones; los cuales no tienen un potencial químico debido a que no cuesta energía colocar un fotón en este sistema. En consecuencia, cuando el agujero negro pierde energía ΔU , este cambio de energía incrementa la energía del gas de fotones $\Delta E = -\Delta U$; esto implica que el agujero negro actúa como una fuente de calor y es por eso que su temperatura es constante en nuestro límite.

Finalmente, con base en este análisis, podremos retomar la estadística de nuestros fotones emitidos para así calcular la entropía de ese sistema, como la del agujero negro.

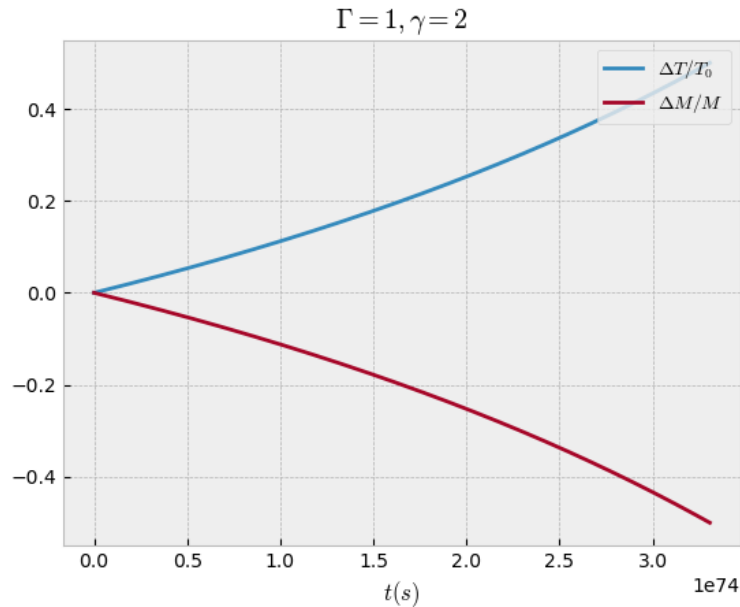


Figura 4.3 – Gráfica de la razón de cambios de temperatura y masa de un agujero negro con $M_0 = M_\odot$, $\Gamma = 1$ y $\gamma = 2$

4.2. Entropía de un agujero negro de Schwarzschild

Como habíamos mencionado en el capítulo anterior, la distribución de probabilidad que maximiza la entropía de un sistema es la de Maxwell-Boltzmann, puesto que es consistente con el segundo principio de la termodinámica enunciado como si fuera el principio de mínima acción que utilizamos para obtener la ecuación de campo.

$$\delta S[\mathbb{P}(\mathbf{X})] = 0 \quad (4.12)$$

Por otro lado, teniendo en cuenta nuestro análisis de la evaporación de los agujeros negros, podemos considerar el agujero negro y los fotones salientes como dos sistemas en contacto. En consecuencia, la entropía total estaría dada por la suma de las entropías de ambos sistemas.

$$S_{total} = S_{BH} + S_{ev} \quad (4.13)$$

Debido a que tenemos dos formas de analizar el sistema, vamos a partir del principio de máxima entropía para después contrastar el resultado con la equivalencia información no accesible-entropía

dada por la probabilidad de los fotones.

Utilizando la suma de las entropías, vamos a maximizar esa cantidad con base al hecho de que la única cantidad que describe un agujero negro de Schwarzschild es su masa, mientras que la del gas es su energía interna promedio.

$$\delta S = \frac{\partial S_{BH}}{\partial M} \delta M + \frac{\partial S_{ev}}{\partial E} \delta E = 0 \quad (4.14)$$

Como habíamos dicho anteriormente, un aumento en la energía del gas de fotones implicaba un decrecimiento en la energía del agujero negro $-c^2 \delta M = \delta E$. Por otro lado, el potencial termodinámico que describe el gas de fotones estaría dado por $dE = T_{BH} dS_{ev} - p dV$ y, en consecuencia, la relación termodinámica es $\frac{\partial S_{ev}}{\partial E} = \frac{1}{T_{BH}}$. Sustituyendo ambas expresiones, tendríamos que

$$\delta S = \frac{\partial S_{BH}}{\partial M} \delta M - \frac{c^2}{T_{BH}} \delta M = 0 \quad (4.15)$$

$$\left(\frac{\partial S_{BH}}{\partial M} - \frac{c^2}{T_{BH}} \right) \delta M = 0 \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial S_{BH}}{\partial M} = \frac{c^2}{T_{BH}} \quad (4.17)$$

$$\Delta S_{BH} = \int_{M_0}^M \frac{8\pi G k_B M}{\hbar c} dM \quad (4.18)$$

$$\Delta S_{BH} = \frac{4\pi G k_B}{\hbar c} (M^2 - M_0^2) \quad (4.19)$$

Finalmente, sabiendo que el área de la superficie del horizonte es $A_H = 16\pi \frac{G^2 M^2}{c^4}$, tendríamos que la entropía de un agujero negro es

$$\Delta S_{BH} = \frac{k_B c^3}{\hbar G} \frac{\Delta A_H}{4} \quad (4.20)$$

Esta es la expresión que Bekenstein deriva a partir de una analogía entre el área del horizonte y la entropía del agujero negro con el objetivo de no violar el segundo principio de la termodinámica.

ca, pero como el agujero se está evaporando, entonces su área está decreciendo. En consecuencia, debe haber un proceso que compense esta transformación.

Ahora contrastaremos este resultado con la información no accesible dada por la distribución de probabilidad de este sistema de osciladores (gas de fotones). Para eso haremos uso de la fórmula de Shannon.

$$H_{ev} = - \sum_{\{n_i \geq 0\}} \mathbb{P}(n_i) \ln \mathbb{P}(n_i) \quad (4.21)$$

Aquí $\{n_i \geq 0\}$ implica que hay varias sumas sobre todos los números de ocupación para cada una de las frecuencias.

$$H_{ev} = \sum_{\{n_i \geq 0\}} \frac{e^{\beta_H \sum n_i \hbar \omega_i}}{Z} \left(\ln(Z) + \beta_H \sum_{i \geq 1} n_i \hbar \omega_i \right) \quad (4.22)$$

$$H_{ev} = \sum_{\{n_i \geq 0\}} \frac{e^{\beta_H \sum n_i \hbar \omega_i}}{Z} \ln(Z) + \sum_{\{n_i \geq 0\}} \frac{e^{\beta_H \sum n_i \hbar \omega_i}}{Z} \beta_H \sum_{i \geq 1} n_i \hbar \omega_i \quad (4.23)$$

$$H_{ev} = \ln(Z) + \beta_H E \quad (4.24)$$

Usando la equivalencia de entropía e información no accesible, tenemos que

$$S_{ev} = k_B \ln(Z) + \frac{E}{T_H} \quad (4.25)$$

Tomando la diferencial de S_{ev} con $\ln(Z)$ constante, tenemos

$$dS_{ev} = \frac{dE}{T_H} \quad (4.26)$$

Utilizando la relación $dE = -c^2 dM$, obtendríamos

$$dS_{ev} = -c^2 \frac{dM}{T_H} = -\frac{8\pi G k_B M}{\hbar c} dM \quad (4.27)$$

A partir de los mismos límites de integración para la entropía de un agujero negro, obtenemos

la misma expresión para la entropía del gas de fotones, sin embargo, esta difiere por un menos.

$$\Delta S_{ev} = -\frac{k_B c^3}{\hbar G} \frac{\Delta A_H}{4} \quad (4.28)$$

En contraste, con el resultado del cambio de entropía de un agujero negro, el cambio de entropía de la distribución del gas de fotones es equivalente en magnitud pero diferente en signo $\Delta S_{ev} = -\Delta S_{BH}$. Esto implica que la transformación del área del agujero negro, reducida, se compensa con la radiación de fotones.

Consecuentemente, esto hace que el segundo principio se generalice de la siguiente forma:

$$dS_{universo} = d(S_{BH} + S_{radiacin+materia}) \geq 0 \quad (4.29)$$

Esta ley generalizada establecida por Bekenstein [7], fue objeto de estudio en un trabajo de la universidad por [32] donde se llega a este resultado a partir de un análisis heurístico; análisis que no realizamos gracias a que derivamos la radiación de Hawking y no tuvimos la necesidad de calibrar las constantes para esta medida de entropía fenomenológica [33]. En ese orden de ideas, no vamos a extendernos en el segundo principio generalizado, por el contrario, vamos a aportar en la interpretación de esta entropía a raíz de la equivalencia con la medida de información y en la manera en la que Bekenstein suscita una reflexión en 1994 en su artículo 'Do we understand black hole entropy?' ⁵ con respecto al rompecabezas de la información perdida que Hawking había discutido en 1976 (un año después de su artículo 'Particle creation by black holes' ⁶) en su artículo 'Breakdown of predictability in gravitational collapse' ⁷.

⁵[33]

⁶[23]

⁷[34]

4.3. Introducción al problema de la información en los agujeros negros

La entropía de un agujero negro, de acuerdo con lo que habíamos establecido anteriormente, depende de una cantidad medible como es el caso de su área (no medible directamente, pero sí a partir de su masa), donde tendríamos que para un agujero negro esta medición de área se puede considerar un valor medio.

$$S_{BH} = \frac{k_B c^3}{\hbar G} \frac{\langle A_H \rangle}{4} \quad (4.30)$$

Sin embargo, ¿qué significa que un agujero negro tenga entropía?, además del hecho de haber vinculado una temperatura, ¿por qué un objeto del cual no puede salir una señal clásicamente tendría una entropía al considerar efectos de creación y aniquilación de partículas?

A lo que Bekenstein abre lugar a varias preguntas sobre sus posibles significados.

¿Es similar a la entropía ordinaria?, ¿Es el logaritmo de los microestados internos del agujero negro? ¿Es el logaritmo del número de maneras en las que se puede formar un agujero negro? ¿Es el logaritmo del número de estados cuánticos del horizonte? ¿Hace referencia a la pérdida de información de acuerdo con el principio de evolución unitaria? (Bekenstein, 1994) [33]

Tomemos unas preguntas y analicemos esta medida. Por ejemplo, si consideramos la entropía de un agujero negro como la entropía de Clausius, entonces el área del agujero negro sería la medida de transformación; sin embargo, esta concepción va de la mano con la transformación de energía y no al cuerpo en sí.

Por otro lado, si tomamos la de microestados internos, tampoco sería conveniente porque una cosa es que los microestados sean incontrolables de acuerdo con la hipótesis del desorden elemental (*elementar ungeordnet*) y otra cosa es que no sepamos aquellas cantidades no medibles debido a que la estructura causal de este espacio solo permite que todo entre en esa superficie encerrada y no salga.

Pero, ahora si tomamos la del logaritmo de las posibles formas en las que se puede crear un agujero negro, esta tiene la misma abstracción que el ejemplo de las cenizas a la luz de la medida de

irreversibilidad, ya que, el estado final después del colapso gravitacional pudo haberse dado por una serie de combinaciones posibles de sistemas binarios. Es decir, estamos midiendo irreversibilidad y combinaciones posibles.

Finalmente, cuando tomamos la de pérdida de información, esta concepción puede abarcar más aspectos, ya que, al solo tener información de la medida del área de la superficie, perdimos información -o la información inaccesible- sobre los estados iniciales (antes del colapso) y los estados de la materia que fue absorbida (los que constituyen los microestados internos). Esto implica que este concepto de información para concebir la entropía en estos sistemas y procesos irreversibles se vuelve significativo cuando nuestra necesidad va de la mano con la medición y la obtención de más información que valide nuestras hipótesis.

No obstante, no es una cuestión de definición, sino de cómo está ligada a los aspectos que mostramos previamente, es decir, medida de un desorden molecular, multiplicidad de microestados compatibles con un macroestado, información inaccesible del sistema, irreversibilidad, etc. Esto alimenta la idea referente a lo que menciona Toulmin sobre cómo las definiciones son misericordiosamente olvidadas [15], mostrando la pregunta a la cual responden en los libros de ciencia.

'Para las preguntas a ser respondidas sobre los puntos, partículas entre otros, no son ¿Qué es un punto?, ¿Qué es un partícula?, etc. Ellas son ¿Qué puede concebirse para propósitos de la física como punto, partícula, etc?' (Toulmin, 1953)[15]

Es decir que durante todo este acercamiento histórico no hubo algún momento donde los autores definieran de manera absoluta la entropía, solo la concebían para sus propósitos, esto a la luz del fenómeno a ser descrito. Además, es consistente con lo que mencionaba Malagón y Ayala respecto a los conceptos, ya que, estos no definen. Aquí nos encontramos con que la concepción de entropía de Bekenstein estaba permeada por el hecho de que la estructura causal de los agujeros negros no permite que la información como señales enviadas por la luz pueda escapar. Por lo tanto, la idea de que entropía midiera información perdida o inaccesible por Bekenstein no era una proposición ad hoc, era una necesidad para concebir la entropía a la luz del fenómeno.

En contraste con lo que nos plantea Bekenstein, la pregunta citada de Toulmin se puede plantear de la siguiente manera:

'Para la pregunta de la entropía de los agujeros negros, no es ¿Qué es la entropía de los agujeros negros?, se trata de responder la pregunta ¿Qué se puede concebir para propósitos de la física como entropía de un agujero negro?'

En ese orden de ideas, nuestra concepción debe ir vinculada a las concepciones tanto de Clausius, Boltzmann y Planck como a las de Shannon, dejando de lado a Hawking y Bekenstein, debido a que ellos plantean este problema. ⁸

Recordemos la probabilidad usada para ese sistema de varios osciladores armónicos a distintas frecuencias. Esta probabilidad es la de máxima entropía y solo es descrita por energías proporcionales a $\sim \hbar\omega$, propias de un estado puramente térmico, dejando de lado los otros microestados (posiciones, momentos y otras cantidades inconmensurables) de sistemas que el agujero negro había absorbido. Para ejemplificar esto a la luz de lo establecido en el capítulo 2, consideremos un sistema en equilibrio en la vecindad del agujero siendo medido por un observador lejano; este sistema estaría descrito por una densidad de probabilidad del tipo ⁹

$$\rho_0(q_i, p_i) = \frac{1}{Z_0} e^{-\beta E} \quad (4.31)$$

Este sistema tiene una entropía de la forma

$$S_0 = k_B \ln Z_0 + \frac{\langle E_0 \rangle}{T_{BH}} \quad (4.32)$$

Al entrar al agujero negro, es llevado por un proceso de evaporación irreversible en un intervalo de tiempo medido por el observador externo, donde ahora el sistema está descrito por fotones de distintas frecuencias y una entropía que solo describe la radiación.

$$\rho_{ev}(n_i, \omega_i) = \frac{1}{Z_{ev}} e^{\beta \sum n_i \hbar \omega_i} \quad (4.33)$$

⁸Para eso era la historia mostrada a lo largo del trabajo, para ver las dinámicas de la labor de varios físicos y cómo a conveniencia de sus necesidades dentro de la física planteaban una concepción de entropía

⁹Podríamos hacer la descripción desde la mecánica cuántica y utilizar operadores de densidad de probabilidad, sin embargo, para mantener la narrativa del capítulo anterior, utilizaremos la densidad de Maxwell-Boltzmann

$$S_{ev} = k_B \ln Z_{ev} + \frac{\langle E_{ev} \rangle}{T_{BH}} \quad (4.34)$$

Esto implica que el sistema que entró después de un tiempo se describe por medio de un estado térmico y mezclado. Cabe destacar que esto incluye una abstracción del estado del campo cuántico, donde Kieffer nos plantea el problema a la luz del final de un agujero negro, donde el campo asociado a este también terminará dentro de ese estado térmico [35] y, como consecuencia, el principio de unitariedad de la mecánica cuántica es violado ¹⁰. Nosotros seguiremos con nuestros planteamientos, puesto que no quitan generalidad al usar densidades de probabilidad como funciones a usarlas como un operador de densidad de probabilidad; además, las probabilidades que utilizamos como funciones corresponden a componentes de ese operador el cual no introducimos dentro de nuestro trabajo porque implicaría extendernos más y dejar de lado las concepciones de entropía.

Volviendo con nuestra manera de formular la entropía como medida de información inaccesible, ya el hecho de que la probabilidad que describe el sistema al realizarse el proceso de radiación no es equivalente a cuando estaba en la vecindad del agujero, nos da a entender que no hay una medida que nos permita reducir la información inaccesible del sistema. Por lo tanto, la entropía de la radiación siempre será mayor que la entropía del sistema que entra al agujero negro.

Como la entropía de la radiación está entrelazada con la entropía del agujero negro, entonces proponemos un conjunto de proposiciones y medidas para el agujero negro que está a punto de evaporarse completamente y pasa a ser solo radiación térmica.

- (P1) El sistema de partículas emitidas a distintas frecuencias se encuentra en equilibrio térmico.
- (P2) La única medida que describe un agujero negro de Schwarzschild es su cantidad de masa.
- (P3) El estado de evaporación solo está descrito por energías proporcionales a las frecuencias de las partículas radiadas.

¹⁰Este principio establece la evolución temporal de un estado cuántico, pero si lo llevamos a la perspectiva de Heisenberg donde los estados no cambian con el tiempo, sino que los observadores, entonces lo que viola este principio es el operador densidad de probabilidad de un sistema

Como queremos que la cantidad de información inaccesible decrezca, entonces deberíamos hacer que (P2) sea falso, tal que ahora la entropía del agujero negro pueda expresarse de la siguiente manera

$$S_{BH} = \frac{k_B c^3}{\hbar G} \frac{\langle A_H \rangle}{4} + \lambda \langle Q \rangle \quad (4.35)$$

Esto implicaría que a razón de esta medida la entropía S_{ev} es menor que la entropía S_{BH} y, por lo tanto, el proceso de evaporación de un agujero negro sería reversible. Sin embargo, (P2) no puede ser falso, ya que la única cantidad presente en un agujero de Schwarzschild es la masa y esto se debe al *teorema sin-pelo*, puesto que 'un observador al infinito no puede predecir el estado interno de un agujero negro aparte de su masa, momento angular y carga' (Hawking, 1976)[34]; esto implicaría que no podemos hacer más medidas del estado del agujero negro a punto de evaporarse.

Por otro lado, si proponemos una medida para el estado térmico final, haciendo que (P3) sea falso, tenemos que su probabilidad y entropía estarían dadas por

$$\rho_{ev}(n_i, \omega_i, X) = \frac{1}{Z_{ev}} e^{-\beta \sum n_i \hbar \omega_i - \lambda Q(X)} \quad (4.36)$$

$$S_{ev} = k_B \ln Z_{ev} + \frac{\langle E_{ev} \rangle}{T_{BH}} + \lambda \langle Q \rangle \quad (4.37)$$

Como este estado térmico se da cuando el agujero está a punto de evaporarse, es decir $M_{BH} \rightarrow 0$, $T_{BH} \rightarrow \infty$, esto haría que el término que mide la energía de las partículas emitidas tienda a ser nulo, es decir que la información de esa medida ya habría desaparecido [34], dejándonos con nuestra medición final. Esto daría como tal las siguientes entropías.

$$S_{BH} = 0 \quad (4.38)$$

$$S_{ev} = \lim_{M_{BH} \rightarrow 0} k_B \ln Z_{ev} + \lambda \langle Q \rangle \quad (4.39)$$

Si quiero que $S_{ev} < S_{BH}$, entonces mi medida del estado térmico final debe hacer que $S_{ev} < 0$.

Sin embargo, como habíamos establecido a la luz de la reflexión de Planck sobre la irreversibilidad, para que un estado, que surge de un proceso neutral (indiferenciado) o natural (privilegiado), sea posible en el mundo físico, su entropía debe ser siempre positiva.

Esta conclusión Hawking la había puesto en términos de hacer que el agujero negro terminara en un estado cuántico puro ¹¹; sin embargo, para que se dé este caso 'debería radiarse una cantidad de similar de entropía negativa en la fase final de la evaporación' [34]¹². Evidentemente, con el solo hecho de que la entropía sea siempre positiva, ya configura este problema de la información como un problema de la irreversibilidad del proceso de evaporación de los agujeros negros, lo que haría pensar que no tan paradójico como se suele afirmar.

Poniendo este análisis en términos de lo que propusimos en el capítulo 2, pero de manera análoga con los agujeros negros.

Dado un agujero negro que pasa de un estado Σ (agujero negro) a Σ' (radiación) por medio de un proceso de evaporación. No es posible hacer proposiciones y medidas del estado Σ' tal que $S_{\Sigma'} < S_{\Sigma}$. Por lo tanto, la tasa de la información inaccesible del estado del agujero negro antes de su evaporación siempre tiende a crecer $\frac{dH}{dt} > 0$ para este proceso de radiación de Hawking y en consecuencia no es posible irradiar una cantidad de entropía negativa en la última fase.

Para finalizar este capítulo, se pudo evidenciar cómo la relación entre información y entropía desarrollada en el capítulo anterior describió la evaporación de los agujeros e introdujo el problema de la información de tal forma que fue consistente con los planteamientos de Hawking. Además, se evidenció el fuerte de este concepto para concebir entropía de los agujeros negros.

¹¹Todo estado cuántico puro cumple la relación de Shannon pero para operadores de densidad de probabilidad, es decir $H = -Tr(\hat{\rho} \ln \hat{\rho})$

¹²De acuerdo con lo que habíamos planteado, la medida extra que le hacemos al estado térmico final debería de constituir una radiación con entropía negativa que sea equivalente en magnitud con la que tiene entropía positiva

Capítulo 5

Diseño de una propuesta didáctica para la enseñanza de la entropía y su relación con la información

En capítulos anteriores se reconstruyó el marco histórico-epistemológico de la entropía e información con el fin de mostrar cómo han variado las interpretaciones de estos conceptos con base en los contextos históricos que permeaban la época; tras este análisis se retoman esos marcos para diseñar una propuesta pedagógica coherente la cual planteamos de tal manera que los estudiantes construyan activamente su entendimiento de la entropía y la información a través de actividades concretas, donde cada una de estas estará contextualizada históricamente, vinculando cada actividad con los marcos teóricos estudiados con el fin de que los alumnos reconozcan el sentido histórico y conceptual de lo que aprenden.

5.1. Visión general

La relación entre el concepto de entropía y el concepto de información ha sido fundamental debido a que nos permite comprender los fenómenos termodinámicos tanto cotidianos como de sistemas extremos como lo son los agujeros negros. Esta secuencia didáctica está diseñada para estudiantes de pregrado de licenciatura en física con intereses en el marco de la cosmología,

partiendo de un estudio detallado del concepto de entropía y su relación con la teoría de la información a través de actividades prácticas y teóricas. En este contexto, la idea de trabajar la relación de dichos conceptos se estructura según un enfoque constructivista de aprendizaje, en el cual los alumnos participan activamente en la construcción de significados. Siguiendo este enfoque, cada actividad combina elementos teóricos y prácticos (debates, experimentos y simulaciones) para que los estudiantes piensen y hagan con el contenido, tal como indica la premisa básica del aprendizaje activo, donde el objetivo principal es que los estudiantes construyan su propio entendimiento del concepto de entropía, relacionándolo con la entropía de información de Shannon.([36])

Desde un punto de vista pedagógico, durante la secuencia se promueve la participación activa de los estudiantes, el desarrollo del pensamiento crítico sobre las diferentes teorías y la capacidad de abstracción de los conceptos, esto con el fin de fomentar un proceso de aprendizaje que promueva el análisis y la reflexión de conceptos complejos en física. Se busca generar esa acción participativa por parte de los estudiantes, por medio de actividades de observación y experimentación, como el uso de modelos y simulaciones de procesos termodinámicos.

Por otra parte, en la presente secuencia se busca que el estudiante consolide una visión integrada de los principios termodinámicos, la cosmología y la teoría de la información, estableciendo así una comprensión sólida de los procesos que describen la evolución y el comportamiento de sistemas termodinámicos. Por esto mismo, a través de las actividades se busca que el estudiante aborde el concepto de entropía históricamente (de Clausius y Boltzmann a Shannon) y comprenda su significado físico mediante experiencias directas, promoviendo al mismo tiempo la discusión, la abstracción y la reflexión crítica (metacognición) sobre lo aprendido.

Para el diseño de esta secuencia se propone una combinación de actividades tanto experimentales como teóricas de tal manera que el estudiante logre una apropiación conceptual; bajo este sentido, se busca no solo transmitir los conocimientos, si no la generación de preguntas orientadoras y el desarrollo de habilidades investigativas de los estudiantes, promoviendo la discusión y el cuestionamiento de los modelos a enseñar dado a través de experimentos dados por la evolución de un sistema hacia estados de mayor probabilidad y la degradación de información en sistemas de

comunicación, permitiendo que los estudiantes comprendan de manera más práctica el comportamiento de la entropía y su impacto en distintos sistemas.

5.2. Objetivos de enseñanza y de aprendizaje

El diseño de la secuencia se sustenta en principios de aprendizaje activo, por lo que los objetivos de enseñanza y de aprendizaje promueven tanto la experimentación como el razonamiento conceptual.([37]).

5.2.1. Objetivos de Enseñanza

1. Facilitar la comprensión del concepto de entropía partiendo del análisis desde su formulación termodinámica clásica hasta su reinterpretación contemporánea como medida de información en cosmología.
2. Guiar al estudiante para que conecten de manera teórica y experimental los conceptos de entropía, información y su relevancia para el estudio de sistemas termodinámicos.
3. Proponer actividades prácticas que ilustren la irreversibilidad y la pérdida de información, vinculándolas con analogías para reforzar la comprensión de la entropía.

5.2.2. Objetivos de Aprendizaje

Al finalizar la secuencia didáctica, los estudiantes podrán:

1. Identificar cómo el concepto de entropía ha transitado desde diferentes formulaciones y su contextualización histórica.
2. Comprender el carácter probabilístico y estadístico de la entropía y su vínculo con la medida de información.
3. Analizar fenómenos termodinámicos complejos empleando el concepto de entropía-información para explicar por qué son procesos irreversibles.

5.2.3. Contenidos a enseñar

Categoría	Contenido	Pregunta orientadora
Conceptuales	Definición de entropía en termodinámica y mecánica estadística.	¿Por qué la entropía se relaciona con el desorden?
	Relación entre entropía e información.	¿Cómo podemos cuantificar la cantidad de información perdida en un sistema físico?
Procedimentales	Experimento de Boltzmann con pinpones blancos y negros.	¿Cómo podemos modelar matemáticamente la evolución de un sistema hacia el estado con mayor entropía?
	Análisis de la pérdida de información mediante código Morse.	¿Cómo afecta la transmisión de información a través de varias personas en su integridad?
Actitudinales	Reflexión sobre la irreversibilidad de los procesos.	Si un sistema tiende a estados más probables, ¿es posible revertir ese proceso de manera espontánea?
	Discusiones crítica entre la implementación de modelos y analogías para la comprensión de conceptos	

Cuadro 5.1 – Resumen de objetivos y preguntas orientadoras

5.2.4. Secuencia de enseñanza

Para el desarrollo de la secuencia didáctica, constará de varias actividades interrelacionadas que permitan guiar al estudiante desde la comprensión preliminar de entropía hacia su aplicación en contextos avanzados. Cada una de estas actividades se encuentran en los apéndices y permitirán dar cuenta de como transicionar en el concepto de entropía para establecer su relación con el concepto de información; por este mismo motivo cada actividad incluye un objetivo general y objetivos de enseñanza y de aprendizaje específicos y se especifica como se plantea cada una de ellas (Revisar los apéndices).

5.2.5. Actividad 1

En esta actividad los estudiantes simulan moléculas de un gas con pelotas de ping-pong dentro de una caja con el fin de hallar la distribución más probable de estas "moléculas" cuando este sistema evoluciona temporalmente. Dicha analogía nos sirve de punto de partida, donde en esta actividad, es crucial guiar a los alumnos para que asocien correctamente la dispersión con el incremento de entropía y no se limiten el concepto a mero desorden desorganizado. Esta actividad enlaza directamente con los conceptos de los capítulos históricos: recuerda la entropía de Clausius como $\Delta S = \frac{Q}{T}$ y, sobre todo, la interpretación estadística de Boltzmann $H = -K \sum_{i=1}^n p_i \log(p_i)$ sobre la probabilidad de los diferentes microestados. Los alumnos pueden distinguir macroestado (distribución inicial versus final) y microestados (posiciones de cada pelota) y comprobar de forma tangible como existen esos estados más probables que otros, de tal manera que el estudiante construye el concepto de entropía, teniendo en cuenta que la ciencia es el producto de una construcción, al igual que lo que ocurre con el aprendizaje.

Por otra parte se plantean preguntas orientadoras, de tal manera que se le puede cuestionar a los estudiantes ¿Qué pasaría si las pelotas pudieran retornar solas al orden inicial? ilustrando así la irreversibilidad de los procesos naturales natural, que conecta con los problemas clásicos de la termodinámica. Además, se puede vincular con la paradoja de los agujeros negros: al igual que es prácticamente imposible recuperar la información de la posición inicial de las pelotas una vez dispersas, surge la cuestión de si la información se pierde al aumentar la entropía, reflejando el dilema de Hawking en un contexto tangible para los alumnos.

5.2.6. Actividad 2

Para esta segunda actividad se propone el teléfono roto, con el fin de observar por medio de la práctica cómo se da la entropía en sistemas de comunicación, donde al final el mensaje final difiere significativamente del original, buscando conectar por medio de esta actividad con la teoría de la información de Shannon. Con el teléfono roto cada transmisión introduciría errores al azar, donde la incertidumbre sobre el mensaje original crece con cada paso. Esta actividad borda el objetivo

específico de mostrar cómo la información decae en procesos reales de transmisión, reforzando la comprensión de la entropía desde la perspectiva de la comunicación. También refuerza el modelo constructivista porque los alumnos “fabrican” el experimento con sus voces y sentidos: construyen el concepto de entropía informacional a partir de su experiencia directa en lugar de recibirlo abstractamente.

Con el fin también de conectar esta actividad con la paradoja de la información, se plantea a los alumnos la analogía con la evaporación de un agujero negro, Hawking sugiere que la información absorbida podría desaparecer en el agujero, lo cual sería similar a que el mensaje original se ha perdido por completo en el juego; Esto nos permite generar un dilema sobre ¿Cómo consideran los alumnos que la información se destruye, o sólo se vuelve imposible de recuperar debido a la entropía creciente del proceso? La discusión resultante acerca de si la información se pierde o simplemente se vuelve indecifrible conecta directamente con la paradoja de la información de los agujeros negros, motivando también a los estudiantes a cuestionar la relación entre entropía y conservación de información, de tal manera que la actividad no sólo ilustra la entropía según Shannon, sino que abre el debate de hasta qué punto un proceso puede destruir información, alineando las preguntas y razonamientos estudiados previamente en este trabajo.

5.2.7. Actividad 3

Para la tercera actividad, se presenta una aplicación un poco más moderna de la entropía lo que es el análisis de datos, específicamente mediante el uso de modelos de machine learning. En este caso, se emplean dos modelos de caso del árbol de decisión y logistic regression, con estos dos los estudiantes analizarán las salidas del código por medio del uso de un software o librería básica (Python con scikit-learn, o Google Colab) para entrenar los modelos de decisión, donde se propone que los estudiantes observen cómo el algoritmo aprende a clasificar o predecir, y se les plantea analizar qué tanto dependen esas predicciones de la información inicial y cuánta incertidumbre (entropía) queda en las clases finales, teniendo en cuenta que los algoritmos buscan minimizar la entropía en cada paso, lo que permite reflexionar sobre la información de un sistema. Permitiendo establecer esa relación con los marcos históricos al mostrar que el concepto de entropía ha migrado, por ejemplo como la misma idea de incertidumbre que manejaban Clausius y Shannon aparece

hoy en los algoritmos que con base a la información de los diferentes sistemas, buscan minimizar la entropía para poder predecir y extraer de manera más óptima la información de los datos.

Al finalizar se propone discutir si en el proceso de aprendizaje, el algoritmo recupera toda la información implícita en los datos de entrenamiento o si por el contrario, parte de esa información “se pierde” debido a la complejidad del modelo o al ruido de los datos. Esta cuestión remite nuevamente a la paradoja de la información sobre ¿Puede un proceso recuperar la información originalmente contenida en un sistema con alta entropía, o esa información permanece oculta o fragmentada? De este modo, se busca acercar a los estudiantes a la idea de entropía en un sistema en este caso tangible (como lo es el modelo de Machine Learning) con la idea de entropía en un agujero negro, reflexionando críticamente sobre analogías y diferencias. Esto promueve la construcción de una postura informada acerca del problema investigado sobre cómo los conceptos teóricos vistos (información, entropía, irreversibilidad) tienen implicaciones en sistemas reales.

Capítulo 6

Conclusiones y análisis

6.1. Reflexiones sobre la variación conceptual de la entropía

A lo largo de los diferentes desarrollos observados en el segundo capítulo, se buscó demostrar cómo la concepción de la entropía ha cambiado y se ha diversificado en distintos contextos, desde su origen en la termodinámica hasta su papel en la teoría de la información y la cosmología. Dicho recorrido que comenzó con Rudolf Clausius, quien establece la entropía como una cantidad física que determina la direccionalidad natural de los procesos termodinámicos; proporcionando las bases que permitieron desarrollar y comprender cómo se distribuye la energía y cómo los sistemas evolucionan hacia los estados finales.

Por otra parte, la interpretación dada por Ludwig Boltzmann introduce una visión mecánico-estadística, en la que se concibe a la entropía como una medida de probabilidad, permitiendo comprender el comportamiento aleatorio sobre la distribución de partículas en un sistema. Esta transición nos permite entender la entropía no solo como una propiedad de los sistemas físicos, sino también como un fenómeno estadístico que describe las configuraciones posibles en un sistema y su tendencia hacia el equilibrio. Donde Max Planck desarrolla esta idea, aplicándola al estudio de procesos irreversibles y la radiación del cuerpo negro, y refuerza la importancia de la entropía como una función que caracteriza el estado de un sistema en relación con su configuración.

Del mismo modo, se realizó una comparación con la teoría de la información propuesta por Claude Shannon, la cual redefine la entropía en términos de incertidumbre y transmisión de men-

sajes en sistemas de comunicación; partiendo del estudio desde el funcionamiento del telégrafo hasta los métodos de modulación, donde, bajo este contexto, la entropía se desarrolla como una herramienta matemática para cuantificar la información no conocida del resultado final que hay en un sistema, revisando la tasa a la que la información es producida en conjuntos de eventos y, con ello, el conjunto de probabilidades establece la medición de información.

Por último, se analizaron las ideas del concepto de entropía por Jacob Bekenstein y Stephen Hawking, las cuales vinculan las leyes de la termodinámica con el comportamiento de los agujeros negros, estableciendo una proporcionalidad entre la entropía en estos sistemas junto al área de superficie de estos; revisando también las ideas bajo las cuales estos generan compensaciones que permiten que la entropía del universo como sistema aislado aumente. De este modo, el acercamiento histórico realizado por medio de estos autores permite apreciar un cambio del concepto de entropía y cómo su alcance se ha expandido para describir tanto sistemas físicos como la cuantificación de información y la pérdida de esta en contextos extremos.

6.2. Reflexiones sobre la secuencia didáctica

La propuesta didáctica desarrollada a lo largo de este capítulo busca integrar explícitamente los marcos epistemológicos e históricos de la entropía con prácticas educativas, donde cada una de las actividades está diseñada para permitir a los estudiantes experimentar y reflexionar sobre la entropía desde distintas perspectivas, como lo son la termodinámica, estadística y el marco de la información bajo un mismo enfoque pedagógico. Siendo de esta manera que cada actividad nos permite junto a los estudiantes experimentar y construir activamente un concepto complejo, ambiguo y profundamente interdisciplinar pasando por las diferentes perspectivas que definen a este. Justificando ante los objetivos generales y específicos del estudio facilitar el aprendizaje significativo al motivar a los estudiantes a descubrir relaciones históricas y conceptuales por sí mismos, donde dichas actividades

En este marco, cada una de las actividades no solo promueve el aprendizaje de la entropía

como propiedad física, sino que tiene como base una reflexión sobre cómo la incertidumbre de un sistema puede medirse, representarse y manejarse en distintos sistemas. Del mismo modo esta propuesta parte desde la enseñanza centrada en el estudiante, donde la construcción del conocimiento en conjunto con base a preguntas orientadoras y la indagación guiada reemplazan a la mera memorización.

Finalmente, el uso de la historia de la ciencia (ilustrada en cada actividad) potencia la comprensión de los alumnos con el fin de seguir la evolución de las ideas de Clausius a Hawking, permitiendo así apreciar la ciencia como un proceso dinámico y cambiante. De este modo, esta propuesta busca fortalecer una visión integral del aprendizaje, donde cada una de las actividades propuestas, la reflexión crítica y la contextualización histórica son recursos primordiales para enseñar la entropía y la información con coherencia conceptual, articulando la enseñanza de la entropía desde esa perspectiva histórica, conceptual y contextual, pasando de lo que pueden considerarse teorías complejas a actividades accesibles para cada uno, donde esta propuesta refleja una visión didáctica que entiende la entropía como un concepto transdisciplinar. Del mismo modo, cabe recalcar que esta secuencia está abierta para poder ser implementada en un futuro debido a que se considera pertinente revisar cómo ha fomentado el pensamiento crítico y el desarrollo de habilidades investigativas y reflexivas para la formación de futuros licenciados en física.

6.3. Conclusiones finales

Con este análisis final de la entropía de los agujeros negros a la luz de los desarrollos establecidos de la relación entropía e información, logramos abarcar de manera sucinta esta problemática respecto al cambio del concepto de entropía mediante un acercamiento de corte histórico. Independientemente de no haber expuesto toda esta problemática del problema de la información en los agujeros negros, debido a su extensión, se pudo introducir de manera satisfactoria tal rompecabezas a partir de la historia misma. Historia a la cual le hacemos énfasis en los siguientes puntos:

- Se presentaron los aspectos del concepto de entropía que permiten relacionarlo con la información, analizando la entropía propuesta por Boltzmann de macroestados, microestados

e irreversibilidad de los procesos y su vínculo formal con la entropía de la información de Shannon, destacando que ambas utilizan la función logarítmica para medir incertidumbre cumpliendo de esta manera el primer objetivo específico al establecer una analogía conceptual clara entre entropía e información.

- Se abordó la entropía como medida de la reversibilidad e irreversibilidad de los procesos y bajo la relación establecida información-entropía, la entropía en procesos irreversibles equivale a una pérdida de información sobre el estado inicial del sistema; en adición mostrando como el segundo principio puede formularse a partir de información; cumpliendo de esta manera el segundo objetivo al resaltar el papel de la entropía en la distinción entre procesos reversibles e irreversibles.
- Se describió el fenómeno de evaporación de los agujeros negros partiendo de la relación establecida entre información y entropía partiendo desde Bekenstein siendo que la entropía del agujero negro mide la información que inaccesible de su estado interno. Luego con Hawking derivando el fenómeno de evaporación de agujeros negros a partir de una aproximación semiclásica, revisando así cómo la evaporación del agujero negro, con la emisión de radiación, refleja un cambio en la entropía del sistema; cumpliendo de esta manera el tercer objetivo específico tras describir dicho fenómeno bajo la relación entre entropía e información.
- Se realizó un análisis para poder dar cuenta de la relación establecida entre información y entropía desde un proceso metacognitivo, partiendo desde una reflexión de como se enseñan los conceptos, llevandolo al diseño de una secuencia didáctica que permite orientar la comprensión de la entropía para futuros docente de física para brindar una nueva comprensión concepto partiendo desde actividades investigativas que interrogaran sobre su significado.

Del mismo modo, acercamiento histórico planteado se justifica plenamente para la enseñanza de la entropía en la formación de licenciados en física. Este método aborda directamente las dificultades conceptuales existentes y supera las limitaciones de los enfoques tradicionales, al integrar

el desarrollo real del concepto, como se ha mostrado a través de los capítulos, conectar Clausius con Boltzmann, Shannon y Bekenstein-Hawking enriquece la comprensión al revelar las raíces y aplicaciones modernas de la entropía. Asimismo, en conjunto el acercamiento histórico contextualiza el concepto presentando desafíos teóricos (como la unificación física en agujeros negros) como en su rol en la sociedad de la información, subrayando su pertinencia epistemológica y pedagógica hoy día. De este modo, el enfoque histórico cumple con los objetivos del trabajo de grado donde también facilita un aprendizaje crítico e integrado del concepto de entropía e información, preparando a los futuros docentes para vincular estos conceptos con las problemáticas científicas y sociales contemporáneas.

Por último, todo el trabajo realizado en esta monografía, nos permitió dar cuenta de una visión diferente sobre los conceptos abordando así poco a poco la pregunta de investigación originalmente planteada, presentando los aspectos del concepto de entropía que facilitan la analogía con la información partiendo desde una base mecánico-estadística, analizando también la irreversibilidad de los procesos (pérdida de información de los estados iniciales) y cómo esto se logra manifestar en sistemas extremos (entropía de Bekenstein-Hawking), mostrando cómo todos ellos nos permiten un desarrollo consistente a la hora de analizar el proceso de evaporación de agujeros negros. Así mismo, partir de la recopilación de información realizada que nos permitió dar cuenta de los aspectos generales para establecer la relación entre conceptos que inicialmente pensábamos desconectados; constituyendo también así un aporte como base un aporte didáctico para futuras implementaciones, donde se sistematizaron los conceptos de forma coherente y pedagógica, facilitando al acceso de temas avanzados que sirva de sustento para futuras investigaciones o discusiones en cuanto a la formación de futuros docentes.

Bibliografía

- [1] J. Clausius, “The mechanical theory of heat.” [Online]. Available: <https://www3.nd.edu/~powers/ame.20231/clausius1879.pdf>
- [2] —, “Ueber verschiedene für die anwendung bequeme formen der hauptgleichungen der mechanischen wärmetheorie,” vol. 201, no. 7, pp. 353–400. [Online]. Available: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/andp.18652010702>
- [3] superborsuk, “Maxwell-boltzmann distribution,” 2005. [Online]. Available: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Maxwell-Boltzmann_distribution_1.png
- [4] C. E. Shannon, “A mathematical theory of communication,” *The Bell System Technical Journal*, vol. 27, no. 3, pp. 379–423, 1948.
- [5] D. Styer, “Entropy as disorder: History of a misconception,” *The Physics Teacher*, vol. 57, no. 7, pp. 454–458, 10 2019. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1119/1.5126822>
- [6] G. Wiktorowicz and C. Belcynski, “Observed Black Hole Masses | stellarcollapse.org — stellarcollapse.org,” <https://stellarcollapse.org/bhmasses.html>, [Accessed 20-04-2025].
- [7] J. D. Bekenstein, “Generalized second law of thermodynamics in black-hole physics,” *Phys. Rev. D*, vol. 9, pp. 3292–3300, Jun 1974. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.9.3292>
- [8] M. Garzón Barrios, “La historia, la fenomenología y la epistemología de la física,” Ph.D. dissertation, 2023.

- [9] P. C. C. Vallejo, “Estudio cualitativo de la termodinámica: una aproximación al concepto de entropía,” <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/21628>, 2013, trabajo de grado. Acceso abierto. Licencia: Atribución-NoComercial 4.0 Internacional.
- [10] M. A. C. Pérez, “La enseñanza de la entropía por medio del constructivismo social de vigotsky en educación superior,” Trabajo de grado, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá D.C., Colombia, 2016, facultad de Ciencias y Educación. [Online]. Available: <https://repository.udistrital.edu.co/handle/11349/4283>
- [11] F. Flores Camacho and N. Ulloa Lugo, “¿cómo enseñan la entropía los profesores universitarios?” vol. 13, no. 2, pp. 201–221, publisher: Universidade de Vigo Section: REEC: Revista electrónica de enseñanza de las ciencias. [Online]. Available: <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4734756>
- [12] B. Ludwig, *Lectures on Gas Theory - Ludwig Boltzmann, Stephen G. Brush*, 1898. [Online]. Available: <http://archive.org/details/lectures-on-gas-theory-ludwig-boltzmann>
- [13] E. Mensah and J. L. Goderre, “Data sources and data tools: Preparing for the open data ecosystem,” in *Public Health Informatics and Information Systems*, J. Magnuson and B. E. Dixon, Eds. Springer International Publishing, pp. 105–127. [Online]. Available: https://doi.org/10.1007/978-3-030-41215-9_7
- [14] L. Granger, “Irreversibility and information,” Ph.D. dissertation, Technischen Universität Dresden, 2013.
- [15] S. Toulmin, *The Philosophy of Science: An Introduction*, ser. Harper Torchbooks/The Science library/TB513. Hutchinson’s University Library, 1953. [Online]. Available: <https://books.google.com.co/books?id=UsXaAAAAMAAJ>
- [16] V. Schmidt, “The historical approach to philosophy of science toulmin in perspective,” *Metaphilosophy*, vol. 19, no. 3-4, pp. 223–236, 1988. [Online]. Available: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.1467-9973.1988.tb00770.x>
- [17] J. F. M. Sánchez, M. M. A. Manrique, and S. S. Osorio, *Construcción de fenomenologías y procesos de formalización: Un sentido para la enseñanza de las ciencias*, 1st ed.

- Universidad Pedagógica Nacional, 2013. [Online]. Available: <http://www.jstor.org/stable/j.ctvfc53hj>
- [18] A. C. Conner, “An historical approach to physics instruction,” Undergraduate Honors Thesis, University of Central Florida, 2008, identifier: DP0022237. [Online]. Available: <https://stars.library.ucf.edu/honorsthesis1990-2015/718/>
- [19] M. Planck, “Über den zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie,” accepted: 2017-06-15T07:08:09Z. [Online]. Available: <https://edoc.hu-berlin.de/handle/18452/734>
- [20] —, “The theory of heat radiation : Planck, Max, 1858-1947 : Free Download, Borrow, and Streaming : Internet Archive — archive.org,” <https://archive.org/details/theoryofheatradi00planrich/page/xii/mode/2up>, 1914, [Accessed 23-09-2024].
- [21] S. Shreve, *Stochastic Calculus for Finance I*. Springer New York, 2004.
- [22] —, *Stochastic Calculus for Finance II*. Springer New York, 2004. [Online]. Available: <https://link.springer.com/gp/book/9780387401010>
- [23] S. W. Hawking, *Particle Creation by Black Holes*, 1975, pp. 85–106. [Online]. Available: https://worldscientific.com/doi/abs/10.1142/9789812384935_0005
- [24] E. T. Jaynes, “Information theory and statistical mechanics,” *Phys. Rev.*, vol. 106, pp. 620–630, May 1957. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.106.620>
- [25] R. T. Cox, “The algebra of probable inference,” 1962. [Online]. Available: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:123721279>
- [26] E. T. Jaynes, “Gibbs vs boltzmann entropies,” *American Journal of Physics*, vol. 33, no. 5, 1965. [Online]. Available: <https://pubs.aip.org/aapt/ajp/article/33/5/391/531425/Gibbs-vs-Boltzmann-Entropies>
- [27] —, “Information theory and statistical mechanics ii.” *Phys. Rev.*, vol. 108, pp. 171–190, Oct 1957. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.108.171>

- [28] C. A. M. Álvarez, *Metodología de la Investigación Cuantitativa y Cualitativa: Guía Didáctica*. Neiva, Colombia: Universidad Surcolombiana, Facultad de Ciencias Sociales y Humanas, Programa de Comunicación Social y Periodismo, 2011. [Online]. Available: <https://www.uv.mx/rmipe/files/2017/02/guia-didactica-metodologia-de-la-investigacion.pdf>
- [29] M. C. Couturier, “Wayback Machine,” 2015. [Online]. Available: https://web.archive.org/web/20150115192130/http://www.ademe.fr/sites/default/files/assets/documents/20140523_fiche-cendre-agriculture-petite-chaufferie.pdf#expand
- [30] G. Evans, “Can you get DNA from ashes?” Feb. 2025. [Online]. Available: <https://alphiolabsusa.com/learning-center/can-you-get-dna-from-ashes/>
- [31] R. Brout, S. Massar, R. Parentani, and P. Spindel, “A primer for black hole quantum physics,” *Physics Reports*, vol. 260, no. 6, p. 329–446, Sep. 1995. [Online]. Available: [http://dx.doi.org/10.1016/0370-1573\(95\)00008-5](http://dx.doi.org/10.1016/0370-1573(95)00008-5)
- [32] J. S. Arenas Beltrán, “Termodinámica de agujeros negros. introducción a la concepción de entropía de acuerdo con la segunda ley generalizada.” 2014. [Online]. Available: <http://repository.pedagogica.edu.co/handle/20.500.12209/2087>
- [33] J. D. Bekenstein, “Do we understand black hole entropy ?” 1994. [Online]. Available: <https://arxiv.org/abs/gr-qc/9409015>
- [34] S. W. Hawking, “Breakdown of predictability in gravitational collapse,” *Phys. Rev. D*, vol. 14, pp. 2460–2473, Nov 1976. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.14.2460>
- [35] C. Kiefer, *Quantum Gravity: Third Edition*, ser. International Series of Monographs on Physics. OUP Oxford, 2012. [Online]. Available: <https://books.google.com.co/books?id=lnDQWIgmP7QC>
- [36] R. D. Manteufel and A. Karimi, “Active learning in thermodynamics by leaving the front of the classroom,” in *Proceedings of the 2017 ASEE Gulf-Southwest Section Annual Conference*, The University of Texas at Dallas. Dallas, Texas: American Society for Engineering Education, 2017.

- [37] Center for Innovative Teaching and Learning, Indiana University. (2024) Active learning. Accessed: 2025-04-26. [Online]. Available: <https://citl.indiana.edu/teaching-resources/evidence-based/active-learning.html>
- [38] L. Parker and D. Toms, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime: Quantized Fields and Gravity*, ser. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2009.
- [39] V. Mukhanov, *Introduction to Quantum Effects in Gravity*. Cambridge University Press, 2007.
- [40] F. Schwabl, R. Hilton, and A. Lahee, *Advanced Quantum Mechanics*, ser. 2008 Springer E-Books. Springer Berlin Heidelberg, 2008. [Online]. Available: <https://books.google.com.co/books?id=o-upPFoJEykC>
- [41] L. Alberte, R. Brustein, A. Khmelnitsky, and A. J. M. Medved, “Density matrix of black hole radiation,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2015, no. 8, Aug. 2015. [Online]. Available: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP08\(2015\)015](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP08(2015)015)
- [42] E. T. Whittaker, “A course of modern analysis; an introduction to the general theory of infinite processes and of analytic functions; with an account of the principal transcendental functions,” <https://archive.org/details/courseofmodernan00whit/page/n7/mode/2up>, 1920, [Accessed 22-01-2025].

Apéndice A

Propuesta de actividades para la enseñanza de la entropía y su relación con la información

A.1. Actividad 1: Análisis entropía y probabilidad

A.1.0.1. Objetivos de enseñanza:

1. Explorar la tendencia natural de un sistema cerrado a evolucionar hacia su configuración de mayor probabilidad.
2. Introducir el concepto de irreversibilidad en sistemas termodinámicos mediante un experimento que permita visualizar el aumento de la entropía.

A.1.0.2. Objetivos de aprendizaje:

1. Comprender experimentalmente cómo un sistema evoluciona hacia estados de mayor probabilidad, siendo que el estado final corresponde a aquel con mayor número de configuraciones posibles.
2. Relacionar la evolución de un sistema con la irreversibilidad de los procesos.

A.1.0.3. Objetivo general:

Experimentar la evolución de un sistema hacia un estado final, siendo esta su configuración de mayor probabilidad, y relacionarlo con fundamentos de la mecánica estadística de Boltzmann.

A.1.0.4. Procedimiento:

En grupos de a 5 estudiantes se dispondrán 20 pinpones blancos y 20 pinpones negros en una caja cerrada. Inicialmente, discutirán y predecirán cuál creen que será la distribución más probable de colores para que las bolas estén agrupadas. Posteriormente, se procederá a agitar la caja y, sin mirar, analizar cuál sería la distribución que toman los pinpones, para continuar retirando una a una las bolas de la caja, registrando cada color obtenido según corresponda; tras tres pruebas realizadas de esta manera se analizarán los resultados comparándolos con sus predicciones sobre la evolución de sistemas cerrados junto a preguntas orientadoras como ¿Qué sucedería si hubieran más pinpones de un color que de otro? y ¿Cómo cambiaría el comportamiento del sistema si el número total de pelotas fuera diferente?

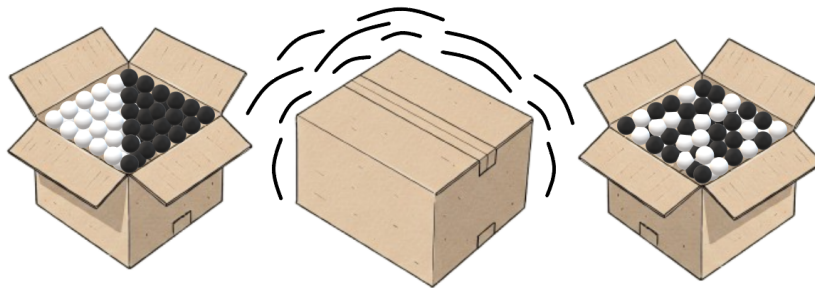


Figura A.1 – Representación grafica actividad pinpones, creación propia.

Con el fin de comprender la evolución de estos sistemas, se tendrá en cuenta la ecuación propuesta por Boltzmann en el documento "Lectures on Gas Theory" calculando así los diferentes estados posibles de distribución para este sistema.

$$P = \frac{(a + b + c + \dots)!}{(a)!(b)!(c)! \dots} \quad (\text{A.1})$$

Donde cada letra representa el número de pinpones de cada color. Con esto se busca fomentar una discusión sobre cómo la probabilidad de obtener cierta configuración particular se relaciona con la cantidad de microestados posibles que lo conforman. Por otra parte, se busca relacionar dicho análisis con el teorema H de Boltzmann, discutiendo así cómo dicha función H disminuye a medida que el sistema evoluciona hacia su distribución de mayor probabilidad; guiando así a los estudiantes a comprender cómo la entropía se relaciona con la cantidad de configuraciones para el sistema y por qué los sistemas tienen esos estados de mayor entropía.

Con esta actividad lo que se pretende es que los estudiantes observen empíricamente un principio fundamental de la mecánica estadística, donde los sistemas tienden espontáneamente hacia aquellos macrostados que poseen el mayor número de microestados accesibles, es decir, hacia configuraciones de mayor entropía. De esta manera, el crecimiento de la entropía puede interpretarse como el incremento de la probabilidad estadística de alcanzar configuraciones más desordenadas. Además, este procedimiento introduce una noción clave para la secuencia: el paso de una descripción determinista (cada bola tiene un color definido) a una descripción probabilística basada en la distribución de estados, lo que prepara conceptualmente a los estudiantes para entender la entropía como medida de incertidumbre o falta de información sobre el sistema.

A.2. Actividad 2: Entropía y pérdida de información

A.2.0.1. Objetivos de enseñanza:

1. Establecer la relación entre la entropía y la pérdida de información en procesos de transmisión de información.
2. Mostrar la degradación de información en sistemas de comunicación.
3. Mostrar la analogía entre la degradación de un mensaje en comunicación y el aumento de entropía en sistemas físicos.

A.2.0.2. Objetivos de aprendizaje:

1. Visualizar y cuantificar el aumento de entropía en un sistema de transmisión de mensajes a medida que se pierde información.
2. Reconocer la conexión conceptual entre entropía, incertidumbre y pérdida de información.
3. Aplicar la ecuación de Shannon para cuantificar la pérdida de información en un sistema de comunicación.

A.2.0.3. Objetivo general:

Comprender cómo la entropía se incrementa en un sistema de comunicación, a medida que se transmite un mensaje, reflejando un incremento en la incertidumbre y la pérdida de información.

A.2.1. Procedimiento:

Para el desarrollo de esta actividad se demostrará cómo la entropía de la información se incrementa a medida que se transmite un mensaje en un sistema de comunicación imperfecto. Del mismo modo, se contrastará la pérdida de información con el aumento de entropía en un sistema termodinámico, para lograr establecer una relación entre entropía e información.

Primeramente se organizaría un "teléfono roto."^{en} el que se realizará la formulación de un mensaje correctamente estructurado el cual funcionará como el punto de referencia para el análisis de la pérdida de información en sistemas de comunicación. Para esto se ubicarán los estudiantes correspondientes en una fila y se transmitirá el mensaje mediante la dinámica del teléfono roto, donde la cadena de estudiantes solo podrá escuchar el mensaje una única vez antes de pasarlo al siguiente, lo cual a la larga y bajo la interpretación de cada uno generará errores en la transmisión de este. Lo que se espera como resultado de las interpretaciones personales es que el contenido del mensaje varíe de manera significativa al acumular las variaciones, alterando así el contenido del mensaje original.

y permitiendo cuantificar la cantidad de entropía en este proceso donde se comparará el mensaje original con el final para identificar la magnitud de esta.

Con el fin de cuantificar formalmente esta pérdida de información, se calculará la cantidad de entropía del mensaje por medio de la ecuación de Shannon mencionada en capítulos anteriores, la cual se expresa de la siguiente manera:

$$H = -K \sum_{i=1}^n p_i \log(p_i) \quad (\text{A.2})$$

Para cuantificar la entropía del mensaje se aplicará de dos maneras, siendo la primera que en teoría reducirá la entropía del sistema y la segunda que cuantificará correctamente cuánto se perdió, donde p_i representará la probabilidad de aparición de cada palabra en el mensaje, y para el segundo en vez de cada palabra cada una de las sílabas contenidas en el mensaje; donde con ayuda de esta ecuación, se calculará la entropía del mensaje inicial y del mensaje final, obteniendo así una medida cuantitativa de la entropía y de cuánto se degradó el mensaje al final de la transmisión, analizando también cómo la cantidad de intermediarios y la complejidad del mensaje afectan el valor de H.

Por otra parte, durante la actividad se propone que los participantes reflexionen sobre las implicaciones de este experimento para comprender cómo este nos permite tener una nueva perspectiva en el contexto de la termodinámica; mencionando cómo la irreversibilidad observada en la transformación del mensaje es análoga a la irreversibilidad de los procesos termodinámicos y de cómo la perturbación en el sistema, a pesar de disminuir o mantener la entropía en el sistema, en el universo va a aumentar. Además del análisis cuantitativo, se promoverá una reflexión por parte de los estudiantes, guiada por preguntas orientadoras como lo llegan a ser ¿Qué estrategias se pueden implementar para reducir la pérdida de información? y ¿Qué factores se identifican en la degradación del mensaje a lo largo de la transmisión? para después del análisis y discusión brindados con estas preguntas, evaluar cómo están comprendiendo los estudiantes el concepto de entropía bajo la siguiente pregunta ¿Cómo se relaciona la pérdida de información observada en la actividad con la

irreversibilidad en sistemas físicos?

Con lo realizado en esta actividad, como se espera transformar el enfoque físico de la entropía en una noción de incertidumbre en sistemas de información, permitiendo a los estudiantes entender que el aumento de entropía también puede interpretarse como la pérdida de información de un sistema, dando cuenta que la entropía no solo cuantifica el desorden molecular o la probabilidad de encontrar un sistema en cierto estado, sino también la falta de información que nos permite describir un sistema. Bajo esta idea, nos permite dar paso a la tercera actividad, donde se aplicará esta visión de la entropía en contextos diferentes, como lo es el análisis de datos en astrofísica, mostrando cómo se puede explicar e implementar en situaciones reales.

A.3. Actividad 3: Entropía en modelos de clasificación estelar

A.3.1. Objetivos de enseñanza:

1. Introducir el concepto de entropía de información en el contexto del análisis de datos y la clasificación astronómica.
2. Analizar la entropía permite para evaluar la incertidumbre en sistemas de clasificación y su relación con la organización de sistemas físicos.

A.3.2. Objetivos de aprendizaje:

1. Evidenciar patrones que den cuenta organización estelar a partir de observaciones gráficas y datos numéricos.
2. Establecer el concepto de entropía como magnitud dependiente de la información que nos brinda un sistema.

Objetivo general:

Analizar cómo varía la entropía en modelos de clasificación estelar, por medio de machine learning para comprender la relación información-entropía.

A.3.3. Procedimiento:

En el marco de la astronomía, podemos encontrar ciertos patrones que evidencian diferencias en los tipos de estrellas. En este caso, usando la magnitud absoluta en función de cantidades observables como la temperatura, el radio relativo o la luminosidad relativa, se logra establecer una distinción entre ellas; del mismo modo, partiremos del análisis para la clasificación de las estrellas mediante los diagramas de Hertzsprung-Russell. Estos diagramas permiten no solo clasificar las estrellas en diferentes clases, sino que también nos permiten comprender la evolución de estas; siendo común leer estos diagramas de tal manera que las estrellas con menor magnitud absoluta son las más brillantes, mientras que aquellas con mayor magnitud absoluta presentan menor brillo.

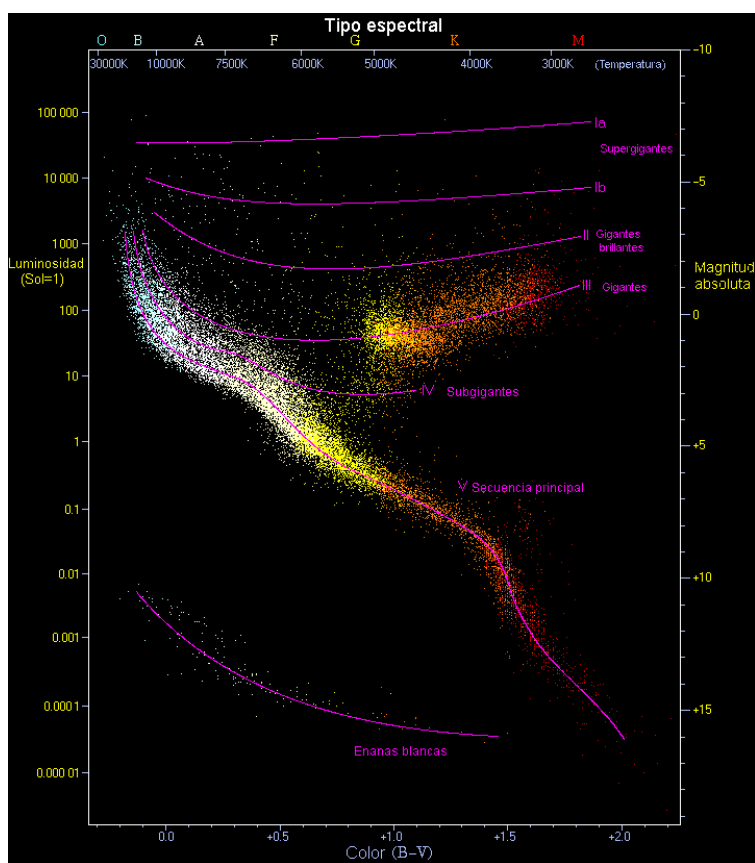


Figura A.2 – Diagrama de Hertzsprung-Russell, tomado wikimedia, Diagrama de Hertzsprung-Russell [Online] de disponible en: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:HRDiagram-es.png>

A partir del análisis del diagrama anterior [A.2], se pueden de por sí ya clasificar en clases los cuerpos estelares; no obstante, con ayuda de una base de datos extraída de Kaggle que es con la

que se busca trabajar, se utilizarían seis clases, las cuales son: Brown Dwarf, Red Dwarf, White Dwarf, Main Sequence, Supergiant y Hypergiant. Con la ayuda de gráficas como Magnitud Absoluta vs. Temperatura, se espera que los estudiantes identifiquen patrones en los datos que les permitan construir hipótesis sobre la organización estelar.

Para el desarrollo de esta actividad, se emplearán dos modelos de machine learning previamente programados (Revisar apéndice B), siendo estos respectivamente un Árbol de Decisión y un modelo de Regresión Logística Multiclase, donde los estudiantes deberán utilizar ambos modelos para predecir la clase estelar de cada estrella en la base de datos y calcular la entropía asociada a cada modelo.

En el caso del Árbol de Decisión, el algoritmo realiza divisiones sucesivas del espacio de características buscando reducir la entropía del sistema en cada nodo, la idea es que los estudiantes calculen la entropía de este modelo para la predicción de los datos; donde se espera obtener una entropía mínima al final de la clasificación, debido a que este algoritmo elige la división que reduce más la entropía, donde la función de entropía de información utilizada será:

$$S = - \sum_{i=1}^n P(i|x_j) \ln(P(i|x_j)) \quad (\text{A.3})$$

Donde $P(i|x_j)$ representa la probabilidad de que una estrella con características x_j pertenezca a alguna de las clases denominadas previamente i , y teniendo en cuenta que cada nodo del árbol contiene una parte de los datos y se evalúa la entropía de esa partición.

Al usar una profundidad de 4, se logra observar que la entropía tiende a un valor mínimo, lo que da a entender que el modelo ganó mayor información alrededor de la clasificación. De acuerdo con ese resultado, se logra establecer una región de decisión, donde los datos están seccionados por rectángulos en lugar de funciones no constantes. (Revisar apéndice B.1)

Para el segundo modelo de aprendizaje el cual es Logistic Regression, funciona asignando probabilidades a cada clase utilizando funciones sigmoides. Con este modelo, se nos permite in-

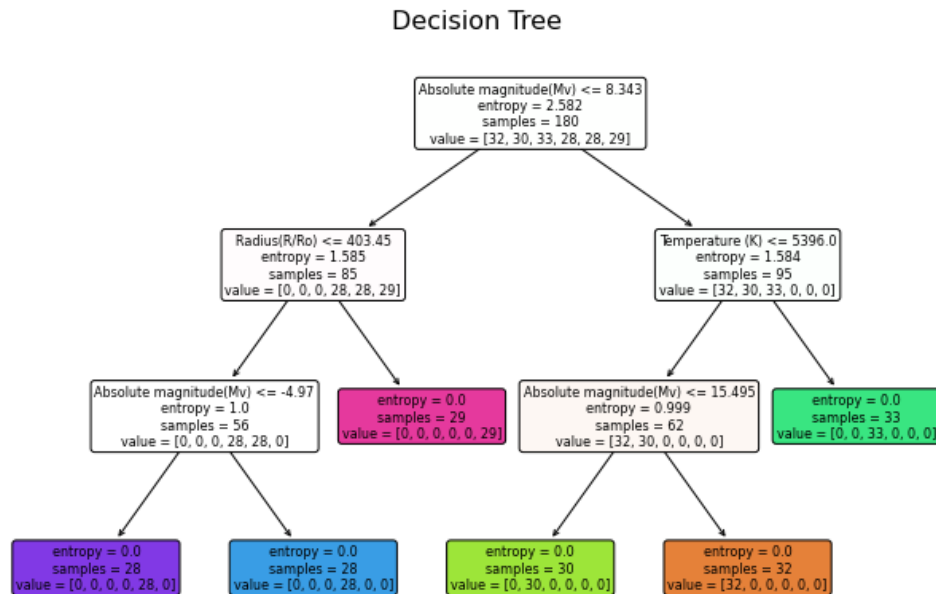


Figura A.3 – Árbol de decisión para la clasificación de estrellas

interpretar cada decisión tomada como una distribución de probabilidad sobre las posibles clases; donde a partir de estas distribuciones, también se puede calcular la entropía del sistema con la misma fórmula de Shannon considerando los valores de probabilidad asociados a cada estrella de tal manera que:

$$S = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^c P_{ij} \log(P_{ij}) \quad (\text{A.4})$$

Donde $P(ij)$ representa la probabilidad asignada por el modelo a que la estrella i pertenezca a alguna de las clases denominadas previamente j , siendo así que se está calculando la probabilidad de que cada dato pertenezca a cada clase y por ende la entropía como la incertidumbre del modelo sobre su predicción.

De esta manera durante el desarrollo de la actividad, se reflexionará sobre el papel que juega cada atributo (temperatura, magnitud, etc.) y sobre la forma en que los modelo gana información para clasificar mejor, similar al proceso de evolución de un sistema físico hacia una organización más probable de manera espontánea; e propondrá a los estudiantes que respondan preguntas orien-

tadoras como lo son ¿Qué tan distinguibles son las clases estelares usando solo dos características? y ¿Qué tipo de información se gana o se pierde al clasificar con diferentes niveles de profundidad del árbol?

Con la actividad propuesta, se espera que los estudiantes revisen ese vínculo de la entropía con la información en diferentes contextos diversos como lo es el análisis de datos y la teoría de la información y la astronomía. La idea es que a través de la aplicación de modelos de clasificación, los estudiantes no solo reconozcan patrones en los datos, sino que directamente vinculen estos patrones con el concepto de entropía, reforzando así la noción de que la entropía no es una propiedad exclusiva de la materia, si no un lenguaje común entre la información, incertidumbre y los estados probables de un sistema.

Apéndice B

Códigos Python para los modelos de clasificación estelar

B.1. Decision tree

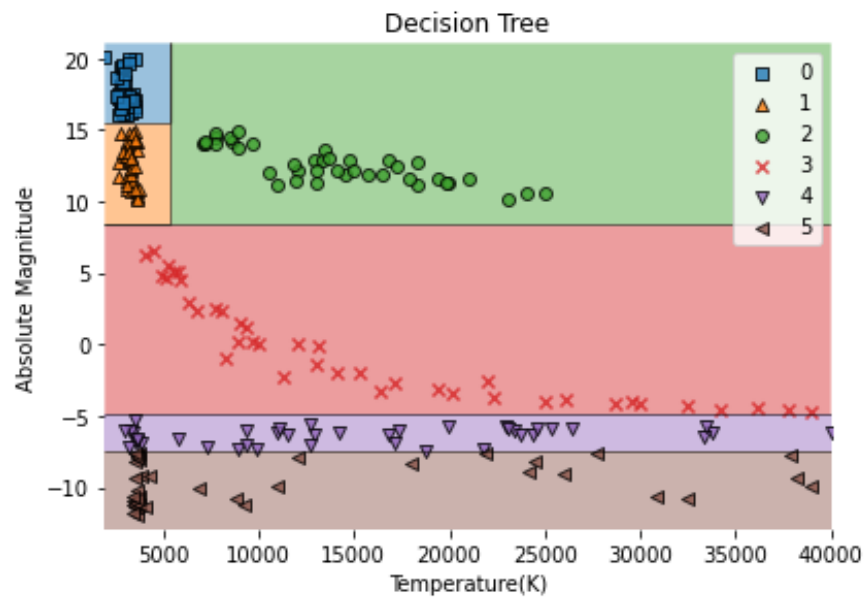


Figura B.1 – Región de Decisión para Decision Tree, Imagen generada por el siguiente código

Listing B.1 – PYTHON script para el modelo de árbol de decisión

```
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
import numpy as np
import seaborn as sns
from sklearn.model_selection import train_test_split
from sklearn.preprocessing import StandardScaler
from sklearn.metrics import accuracy_score

from sklearn.pipeline import make_pipeline
from sklearn.decomposition import PCA
from sklearn.model_selection import StratifiedKFold
from sklearn.model_selection import cross_val_score

from sklearn.tree import DecisionTreeClassifier
from sklearn import tree
from mlxtend.plotting import plot_decision_regions

#Data set

Stars = pd.read_csv("stars.csv")

Stars_1 = pd.DataFrame(Stars.loc[Stars["Star_type"] <= 1 ],
                      columns=["Temperature_(K)",
                              "Luminosity (L/Lo)", "Radius (R/Ro)", "Absolute_magnitude (Mv)", "Star_type"])
Stars_2 = pd.DataFrame(Stars.loc[(Stars["Star_type"] > 1) & (Stars["Star_type"] < 4) ],
                      columns=["Temperature_(K)",
                              "Luminosity (L/Lo)", "Radius (R/Ro)", "Absolute_magnitude (Mv)", "Star_type"])
Stars_3 = pd.DataFrame(Stars.loc[(Stars["Star_type"] >= 4) & (Stars["Star_type"] <= 5)],
                      columns=["Temperature_(K)",
                              "Luminosity (L/Lo)", "Radius (R/Ro)", "Absolute_magnitude (Mv)", "Star_type"])

S_df = pd.DataFrame(Stars,
                    columns=["Temperature_(K)",
                              "Luminosity (L/Lo)", "Radius (R/Ro)", "Absolute_magnitude (Mv)"])

#Create train and test sets

X_train, X_test, y_train, y_test = train_test_split(
    Stars.iloc[:,0:4], Stars["Star_type"], random_state=0)

#Decision tree model

tree_model = DecisionTreeClassifier(criterion="entropy", random_state=1)

tree_model.fit(X_train[["Temperature_(K)", "Absolute_magnitude (Mv)"]], y_train)
```

```

X_combined = np.vstack((X_train[["Temperature_(K)", "Absolute_magnitude(Mv)"]],
                        X_test[["Temperature_(K)", "Absolute_magnitude(Mv)"]]))
y_combined = np.hstack((y_train, y_test))

# St = {0:"Brown Dwarf",1:"Red Dwarf",2:"White Dwarf",
        3:"Main_Sequence",4:"Supergiant",5:"Hypergiant"}
# y_c = []
# for k in range(len(y_combined)):
#     y_c.append(y_combined[k])
#     for l in range(6):
#         if y_c[k]==l:
#             y_c[k]=St[l]

plot_decision_regions(X_combined,
                      y_combined,
                      clf=tree_model)

plt.xlabel("Temperature(K)")
plt.ylabel("Absolute_Magnitude")
plt.legend(loc="upper_right")
plt.tight_layout()
plt.title("Decision_Tree")
plt.show()

feature_names = ["Temperature_(K)", "Luminosity(L/Lo)",
                 "Radius(R/Ro)", "Absolute_magnitude(Mv)"]
plt.figure(figsize=(11,7))
tree.plot_tree(tree_model, feature_names = feature_names,
               filled=True, fontsize=8, rounded=True, impurity=True)
plt.title("Decision_Tree", fontsize=16)
plt.show()

# dt_pipe = make_pipeline(DecisionTreeClassifier(max_depth=2,
                                                criterion="entropy", random_state=1))

# dt_pipe.fit(X_train, y_train)

# predict = dt_pipe.predict(X_test)

# scores = cross_val_score(estimator=dt_pipe,
#                            # X = X_train,
#                            # y = y_train,
#                            # cv=25,

```

```

#                                     n_jobs=1)

# print('Misclassified samples Decision tree w S: %d' % (y_test != predict).sum())
# print('Accuracy Decision Tree: %.2f' % accuracy_score(y_test, predict))

# print("Cross Validation Score", np.mean(scores))

mean_score = []
tree_depth = np.linspace(1, 10, 10)
for i in range(1, 11):

    dt_pipe = make_pipeline(DecisionTreeClassifier(max_depth=i,
                                                    criterion="entropy", random_state=1))
    dt_pipe.fit(X_train, y_train)

    scores = cross_val_score(estimator=dt_pipe,
                              X = X_train,
                              y = y_train,
                              cv=25,
                              n_jobs=1)

    mean_score.append(np.mean(scores))

plt.style.use("bmh")
plt.plot(tree_depth, mean_score, color='red', marker='o', linestyle='dashed',
         linewidth=2, markersize=8)
plt.title("Score_vs_tree_depth", fontsize=16)
plt.xlabel("Tree_depth", fontsize=12)
plt.ylabel("Score", fontsize=12)

```

B.2. Logistic regression

Listing B.2 – PYTHON script para el modelo de regresión logística

```

import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import seaborn as sns
from sklearn.linear_model import Perceptron
from sklearn.model_selection import train_test_split
from sklearn.preprocessing import StandardScaler
from sklearn.metrics import accuracy_score

from sklearn.linear_model import LogisticRegression

```

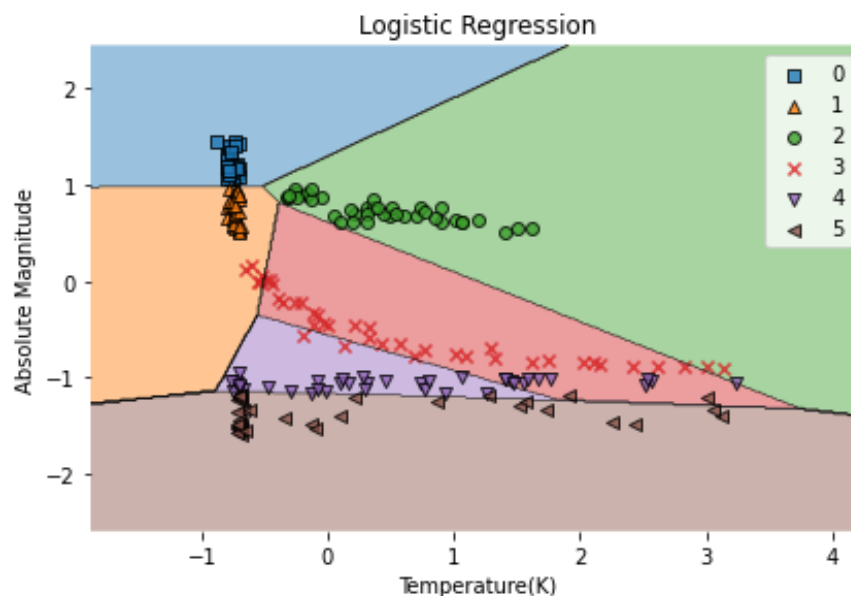


Figura B.2 – Región de Decisión para Logistic Regression, Imagen generada por el siguiente código

```
#Data set

Stars = pd.read_csv("stars.csv")

Stars_1 = pd.DataFrame(Stars.loc[Stars["Star_type"] <= 1 ],
                       columns=["Temperature_(K)", "Luminosity(L/Lo)",
                                "Radius(R/Ro)", "Absolute_magnitude(Mv)", "Star_type"])
Stars_2 = pd.DataFrame(Stars.loc[(Stars["Star_type"] > 1) & (Stars["Star_type"] < 4) ],
                       columns=["Temperature_(K)", "Luminosity(L/Lo)",
                                "Radius(R/Ro)", "Absolute_magnitude(Mv)", "Star_type"])
Stars_3 = pd.DataFrame(Stars.loc[(Stars["Star_type"] >= 4) & (Stars["Star_type"] <= 5) ],
                       columns=["Temperature_(K)", "Luminosity(L/Lo)",
                                "Radius(R/Ro)", "Absolute_magnitude(Mv)", "Star_type"])

S_df = pd.DataFrame(Stars,
                    columns=["Temperature_(K)", "Luminosity(L/Lo)",
                              "Radius(R/Ro)", "Absolute_magnitude(Mv)"])

# St = {0:"Brown Dwarf",1:"Red Dwarf",2:"White Dwarf",
        3:"Main_Sequence",4:"Supergiant",5:"Hypergiant"}
# Cst = {0:"Brown",1:"Red",2:"Blue",3:"Black",4:"Violet",5:"Purple"}
# for k in range(6):
#     plt.scatter(Stars.loc[Stars["Star_type"]==k,"Temperature (K)"],
                  Stars.loc[Stars["Star_type"]==k,"Absolute_magnitude(Mv)"],
```

```
#             c=Cst[k], cmap="rainbow", marker="o", label=St[k])
# plt.legend(loc="upper right")

# plt.xlabel("Temperature (K)")
# plt.ylabel("Absolute magnitude(Mv)")

# plt.show()

#Create train and test sets

X_train, X_test, y_train, y_test = train_test_split(
    Stars.iloc[:,0:4], Stars["Star_type"], random_state=0)

#Standard Scalling

sc = StandardScaler()

sc.fit(X_train)

X_train_sc = sc.transform(X_train)
X_test_sc = sc.transform(X_test)

#Logistic regression

lr = LogisticRegression(C=200, solver="lbfgs", multi_class="ovr")

lr.fit(X_train_sc[:,[0,3]], y_train)

#Graph Coefficients vs Inverse Regularization Value

C = np.linspace(1, 200,10)
Cr1 = []
Cr2 = []
Cr3 = []
Cr4 = []
# for i in C:
#     lr1 = LogisticRegression(C=i, solver="lbfgs", multi_class="ovr")
#     lr1.fit(X_train_sc, y_train)

#     Cr1.append(lr1.coef_[5,0])
#     Cr2.append(lr1.coef_[5,1])
```

```
# Cr3.append(lr1.coef_[5,2])
# Cr4.append(lr1.coef_[5,3])

# plt.plot(C,Cr1,c="Red",marker="o",label="Temperature")
# plt.plot(C,Cr2,c="Blue",marker="o",label="Luminosity")
# plt.plot(C,Cr3,c="Black",marker="o",label="Radius")
# plt.plot(C,Cr4,c="Orange",marker="o",label="Absolute Magnitude")
# plt.legend(loc="upper right")

# plt.title("WC vs C for Hypergiant")
# plt.xlabel("C")
# plt.ylabel("Weight Coefficient")

# y_pred = lr.predict(X_test_sc)

# print('Misclassified samples Logistic w S: %d' % (y_test != y_pred).sum())
# print('Accuracy Logistic: %.2f' % accuracy_score(y_test, y_pred))

from sklearn.pipeline import make_pipeline
from sklearn.decomposition import PCA
from sklearn.model_selection import StratifiedKFold
from sklearn.model_selection import cross_val_score

pipe_lr = make_pipeline(StandardScaler(),
                        PCA(n_components=2),
                        LogisticRegression(C=200, solver="lbfgs", multi_class="ovr"))

scores = cross_val_score(estimator=pipe_lr,
                          X = X_train,
                          y = y_train,
                          cv=25,
                          n_jobs=1)

print("Cross_Validation_Score",np.mean(scores))

from mlxtend.plotting import plot_decision_regions

X_combined = np.vstack((X_train_sc[:,[0,3]], X_test_sc[:,[0,3]]))
y_combined = np.hstack((y_train, y_test))

plot_decision_regions(X_combined,
                     y_combined,
                     clf=lr)
```

```
plt.xlabel("Temperature (K)")
plt.ylabel("Absolute_Magnitude")
plt.legend(loc="upper_right")
plt.tight_layout()
plt.title("Logistic_Regression")
plt.show()
```

Apéndice C

Derivación de la radiación de Hawking

C.1. Preliminares

La base de esta derivación consiste en que el tensor de energía y momentum depende de los campos de materia y, por consiguiente, si los campos no tienen masa, el tensor tendrá componentes nulas. Esto haría que la ecuación de campos quede de la siguiente manera

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{C.1}$$

Donde la única solución estática y sin carga es la solución de Schwarzschild, la cual se representa mediante el elemento de línea

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 \tag{C.2}$$

Por otro lado, para poder modelar los campos en este espacio curvo; por campos nos referimos a funciones escalares ([38]) que, al igual que en la teoría de campos clásica, dan lugar a potenciales de interacción como los potenciales de Yukawa; requerimos utilizar el principio de mínima acción de tal manera que la cantidad de acción de este sistema esté dada por la siguiente expresión ¹

¹Más que una cuestión de interpretación, el hecho de que la forma de nuestra densidad lagrangiana sea tal que no tenga masa en lugar de tener la forma $\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu(\psi)\partial_\nu(\psi) - \frac{1}{2}m^2\psi$, es por propósitos de simplicidad, ya que, al usar ese factor de masa obtendríamos una ecuación de Helmholtz y nos extenderíamos más resolviendo la ecuación.

$$S[\psi(x^\mu), g^{\mu\nu}] = \int \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu(\psi) \partial_\nu(\psi) \sqrt{-g} d^4x \quad (\text{C.3})$$

Para obtener la ecuación de campo a partir de esta expresión debemos minimizar la cantidad de acción y, por consiguiente, se debe variar el integrante siguiendo el principio de los desplazamientos virtuales de manera análoga con los campos.

De aquí se obtiene que la ecuación de campo es una ecuación de onda en el espacio de Schwarzschild de acuerdo con el d'Alambertiano transformado como se puede ver de manera detallada en el apéndice D.

$$\partial_\mu(g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \partial_\nu \psi) = 0 \quad (\text{C.4})$$

$$\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] - \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin(\theta) \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right] - \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} = 0 \quad (\text{C.5})$$

La ecuación es similar a la ecuación de onda en coordenadas esféricas, solo que ahora tenemos el factor $(1 - \frac{r_s}{r})$ lo cual hace que la parte radial sea más complicada. Para encontrar una solución, aplicamos el método de separación de variables, donde asumimos una solución de la forma $\psi = R(r, t)Y(\theta, \phi)$ y la introducimos en la ecuación diferencial.

$$\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \frac{r^2}{Rc^2} \frac{\partial^2 R}{\partial t^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right] - \frac{1}{Y \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin(\theta) \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right] - \frac{1}{Y \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} = 0 \quad (\text{C.6})$$

Llevando los términos que dependen de θ y ϕ al otro lado

$$\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \frac{r^2}{Rc^2} \frac{\partial^2 R}{\partial t^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right] = \frac{1}{Y \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin(\theta) \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{Y \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \quad (\text{C.7})$$

Finalmente, aplicando el método de separación de variables con valor propio $-l(l+1)$ obtendríamos las siguientes ecuaciones

$$\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \frac{r^2}{c^2} \frac{\partial^2 R}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right] + l(l+1)R = 0 \quad (\text{C.8})$$

$$\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin(\theta) \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} + l(l+1)Y = 0 \quad (\text{C.9})$$

Donde las soluciones de las ecuaciones C.9 y C.8 estarían dadas por las siguientes expresiones

$$R_l(t, r) = \sum_{n \geq 0} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} \left[a_{nl}^+(\omega) e^{-i\omega \left[t - \frac{r_s}{c} \ln\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\right]} + a_{nl}^-(\omega) e^{-i\omega \left[t + \frac{r_s}{c} \ln\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\right]} \right] \quad (\text{C.10})$$

$$Y_l^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} e^{im\phi} P_l^m(\cos \theta) \quad (\text{C.11})$$

La solución de la ecuación C.8 tiene su derivación detallada en el apéndice E.

Ahora, vamos a multiplicar ambas soluciones y luego vamos a separar el integrante de tal manera que haya una función con frecuencias positivas y una con frecuencias negativas, para así evitar integrar sobre todos los reales.

$$\psi_l^m(t, r, \theta, \phi) = \sum_{n \geq 0} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^n Y_l^m(\theta, \phi) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} \left[a_{nl}^+(\omega) e^{-i\omega \left[t - \frac{r_s}{c} \ln\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\right]} + a_{nl}^-(\omega) e^{-i\omega \left[t + \frac{r_s}{c} \ln\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\right]} \right] \quad (\text{C.12})$$

Separamos la integral como la suma de una integral en el intervalo $(-\infty, 0]$ y otra integral en $[0, \infty)$

$$\int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} \left[a_{nl}^+(\omega) e^{-i\omega \left[t - \frac{r_s}{c} \ln\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\right]} + a_{nl}^-(\omega) e^{-i\omega \left[t + \frac{r_s}{c} \ln\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\right]} \right] + \int_{-\infty}^0 \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} \left[a_{nl}^+(\omega) e^{-i\omega \left[t - \frac{r_s}{c} \ln\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\right]} + a_{nl}^-(\omega) e^{-i\omega \left[t + \frac{r_s}{c} \ln\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\right]} \right] \quad (\text{C.13})$$

Realizamos la sustitución $\omega = -\omega$ en la segunda integral para así obtener

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} \left[a_{nl}^+(\omega) e^{-i\omega \left[t - \frac{r_s}{c} \ln \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) \right]} + a_{nl}^-(\omega) e^{-i\omega \left[t + \frac{r_s}{c} \ln \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) \right]} \right] \\ & + \int_0^\infty \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} \left[a_{nl}^+(-\omega) e^{i\omega \left[t - \frac{r_s}{c} \ln \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) \right]} + a_{nl}^-(-\omega) e^{i\omega \left[t + \frac{r_s}{c} \ln \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) \right]} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

Utilizando la propiedad E.29, tendríamos

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} \left[a_{nl}^+(\omega) e^{-i\omega \left[t - \frac{r_s}{c} \ln \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) \right]} + a_{nl}^-(\omega) e^{-i\omega \left[t + \frac{r_s}{c} \ln \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) \right]} \right] \\ & + \int_0^\infty \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} \left[a_{nl}^-(\omega) e^{i\omega \left[t - \frac{r_s}{c} \ln \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) \right]} + a_{nl}^+(\omega) e^{i\omega \left[t + \frac{r_s}{c} \ln \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) \right]} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} \left[a_{nl}^+(\omega) e^{-i\omega \left[t - \frac{r_s}{c} \ln \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) \right]} + a_{nl}^-(\omega) e^{i\omega \left[t - \frac{r_s}{c} \ln \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) \right]} \right] \\ & + \int_0^\infty \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} \left[a_{nl}^+(\omega) e^{i\omega \left[t + \frac{r_s}{c} \ln \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) \right]} + a_{nl}^-(\omega) e^{-i\omega \left[t + \frac{r_s}{c} \ln \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) \right]} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

$$\Psi = \Psi_{\leftarrow} + \Psi_{\rightarrow} \quad (\text{C.17})$$

Donde

$$\Psi_{\rightarrow}(t, r, \theta, \phi) = \sum_{n \geq 0} \left(1 - \frac{r_s}{r} \right)^n Y_l^m(\theta, \phi) \int_0^\infty \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} \left[a_{nl}^+(\omega) e^{-i\omega \left[t - \frac{r_s}{c} \ln \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) \right]} + a_{nl}^-(\omega) e^{i\omega \left[t - \frac{r_s}{c} \ln \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) \right]} \right] \quad (\text{C.18})$$

$$\Psi_{\leftarrow}(t, r, \theta, \phi) = \sum_{n \geq 0} \left(1 - \frac{r_s}{r} \right)^n Y_l^m(\theta, \phi) \int_0^\infty \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} \left[a_{nl}^+(\omega) e^{i\omega \left[t + \frac{r_s}{c} \ln \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) \right]} + a_{nl}^-(\omega) e^{-i\omega \left[t + \frac{r_s}{c} \ln \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) \right]} \right] \quad (\text{C.19})$$

C.2. La segunda cuantización y los espacios de Fock

El lector creería que antes de pasar a una segunda cuantización en un espacio curvo, deberíamos enseñar la segunda cuantización en un espacio de Minkowski². No obstante, la manera en la que estamos abordando el problema no requiere que tengamos conocimientos previos, ya que,

²El lector puede inspeccionar el capítulo 4 del libro "Introduction to Quantum Effects in Gravity" de [39] en caso de que vea necesario indagar sobre la segunda cuantización en espacios planos

hasta el momento hemos resuelto las ecuaciones de campo, mediante técnicas para la solución de ecuaciones diferenciales parciales.

Retomando nuestras funciones ψ_{\leftarrow} y ψ_{\rightarrow} , estas requieren ser normalizadas de acuerdo con el producto de Klein-Gordon 2.45. Con base en el producto, se encuentra que la constante de normalización de nuestras funciones es $1/\sqrt{2\omega}$.

Una vez normalizadas nuestras funciones, podemos pensarnos sobre este proceso de segunda cuantización o, como veremos a continuación, una cuantización en términos de operadores de creación y destrucción. No obstante, antes de promover nuestro campo escalar en términos de operadores de creación y destrucción, debemos pensar en el espacio donde estos operadores actúan.

Cuando tenemos un sistema de una partícula en mecánica cuántica, a esta partícula le corresponde un espacio vectorial abstracto llamado espacio de Hilbert. Este espacio contiene como elementos todos los estados en los que esa partícula puede estar. Por otro lado, de acuerdo con los postulados de la mecánica cuántica, la información de esa partícula está contenida en un objeto matemático llamado función de onda ³, la cual evoluciona según la ecuación de Schrödinger.

$$\hat{H}\psi(t, \vec{x}) = i\hbar \frac{\partial \psi(t, \vec{x})}{\partial t} \quad (\text{C.20})$$

Esta ecuación no nos limita en el número de partículas que nuestro sistema pueda tener; de hecho, nuestra función de onda puede contener la información de N partículas donde nuestro Hamiltoniano se convierte en una función con los operadores momentum y potencial de todas las partículas, dando como resultado una ecuación diferencial acoplada.

$$\hat{H}\Psi(t, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) = i\hbar \frac{\partial \Psi(t, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N)}{\partial t} \quad (\text{C.21})$$

Consecuentemente, a cada partícula de nuestro sistema le corresponde su propio espacio de Hilbert; eso implica que el espacio vectorial generado por Ψ es un producto de N espacios de

³Como vimos en el capítulo anterior las probabilidades nos ayudan a cuantificar la información de un sistema, por lo tanto, no deja de tener la misma interpretación en sistemas cuánticos descritos por funciones de onda.

Hilbert.

$$\mathcal{F}_N = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N = \bigotimes_{i=1}^N \mathcal{H}_i \quad (\text{C.22})$$

Como se puede ver, el espacio \mathcal{F}_N tiene la misma analogía que nuestro espacio muestral Ω_k que usamos para la evolución de un precio, puesto que este contiene los distintos estados en los que nuestro sistema se puede encontrar o los distintos macroestados. En adición, si existe un espacio Ω_∞ tal que contenga todas las combinaciones para períodos de tiempo ∞ , entonces podemos realizar una analogía que nos permite generar un espacio \mathcal{F}_∞ que contenga todos los espacios $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_i, \dots, \mathcal{F}_N$. A ese espacio con todas las posibles combinaciones de partículas se le denomina espacio de Fock.

Dentro de este espacio no es tan conveniente utilizar las bases ortogonales de los espacios de Hilbert de cada partícula, es decir, para la partícula k su espacio \mathcal{H}_k tiene como elementos $|1\rangle_k, |2\rangle_k, \dots, |i\rangle_k$ y, por lo tanto, los kets de ese espacio de Fock serían un producto entre los estados de cada partícula.

$$|i_1, i_2, \dots, i_N\rangle = |i_1\rangle_1 \otimes |i_2\rangle_2 \otimes \cdots \otimes |i_N\rangle_N \quad (\text{C.23})$$

En contraste, no es tan eficiente utilizar todos los kets de toda esa colección de espacios de Hilbert, es por eso que si permutamos ese estado y contamos las n_i veces que aparece un estado i (es decir, que estamos mirando la ocupación de un determinado estado), obtendríamos que ese estado se permutó $(n_i)!$ veces mientras que el número total de permutaciones es $N!$. Esto se puede representar si definimos un operador que realice todas las posibles permutaciones ⁴.

$$S|i_1, i_2, \dots, i_N\rangle = \frac{\sqrt{N!}}{\sqrt{(n_1)!(n_2)! \cdots (n_G)!}} \frac{1}{N!} \sum_P P|i_1, i_2, \dots, i_N\rangle \quad (\text{C.24})$$

La razón de los factores que multiplican la suma de las posibles permutaciones es debido a que, como los kets asociados a cada partícula son ortogonales, el estado generado por el espacio

⁴Los primeros capítulos de Advanced Quantum Mechanics de ([40]) desarrollan de manera formal las permutaciones a partir de lo que se conoce como grupo de permutaciones. Por otro lado, no hicimos este proceso detalladamente, puesto que no es objeto de estudio de nuestro trabajo

de Fock debe ser ortogonal aun cuando apliquemos todas las permutaciones posibles.

Ya el lector se habrá podido dar cuenta de que el factor $\frac{\sqrt{N!}}{\sqrt{(n_1)!(n_2)! \dots (n_G)!}}$ no es más que la raíz cuadrada de la probabilidad termodinámica que habíamos introducido en el primer capítulo; eso implica que representa todos los casos favorables en cuanto a las permutaciones posibles en nuestro espacio de N partículas.

Como S aplicado en ese producto de distintos estados mide la ocupación, vamos a simbolizar ese nuevo estado como

$$|n_1, n_2, \dots, n_G\rangle = S|i_1, i_2, \dots, i_N\rangle \quad (\text{C.25})$$

Donde cada n_i representa el número de partículas en el estado i y al ser una ocupación, entonces debe seguir la siguiente relación

$$N = \sum_{i=1}^G n_i \quad (\text{C.26})$$

Todo este proceso nos ayudó a configurar un estado más adecuado para nuestro espacio \mathcal{F}_N que se puede generalizar a un espacio \mathcal{F}_∞ . Ahora se suscita una pregunta referente al uso de los operadores creación y destrucción, ¿qué implicaciones tienen estos operadores en el espacio de Fock?

Para responder tal pregunta, primero generemos un espacio \mathcal{F}_0 el cual no contiene partículas, es decir, que nuestro estado quedaría de la siguiente forma

$$|0, 0, \dots, 0\rangle = |0\rangle \quad (\text{C.27})$$

Este estado se le denomina como estado de vacío, es el estado para un espacio de 0 partículas y, además, representa el estado de menor energía (se le conoce como ground state). Por otro lado, como queremos buscar la manera de pasar de un estado de 0 partículas a uno con más partículas, entonces debemos construir tal mecanismo.

Como habíamos dicho \mathcal{F}_∞ contiene todos los espacios \mathcal{F}_i , entonces podemos construir una función que nos permita transportarnos a cada uno de esos espacios; lo mismo ocurre con los espacios vectoriales \mathbb{R}^n , puesto que podemos utilizar una función que nos permite llevar elementos de \mathbb{R}^m a \mathbb{R}^n . En este caso, la función realiza un proceso como es el de crear una partícula en un estado i y también el de destruir una partícula en el estado i , así como se muestra en la figura C.1.

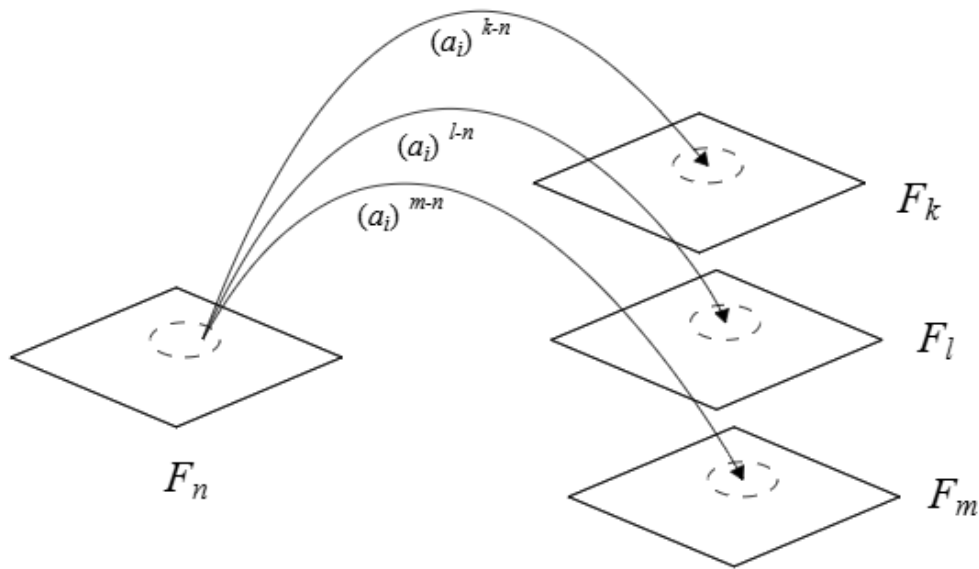


Figura C.1 – Operador de creación actuando en un espacio de Fock de N partículas

De manera formal, esta función se describe de la siguiente forma.

$$(\forall \mathcal{F}_n \wedge \mathcal{F}_m \subseteq \mathcal{F}_\infty) \wedge (\forall m, n \in \mathbb{N}, m > n) \exists (\hat{a}^\dagger : \mathcal{F}_n \rightarrow \mathcal{F}_m) \wedge (\hat{a} : \mathcal{F}_n \leftarrow \mathcal{F}_m) \quad (\text{C.28})$$

Con base a lo anterior, vamos a establecer la siguiente relación con los operadores de creación y destrucción actuando en un ket; además, utilizando las relaciones de completitud y ortogonalidad ([40]).

$$\hat{a}_i^\dagger |\dots, n_i, \dots\rangle = \sqrt{n_i + 1} |\dots, n_i + 1, \dots\rangle \quad (\text{C.29})$$

$$\hat{a}_i |\dots, n_i, \dots\rangle = \sqrt{n_i} |\dots, n_i - 1, \dots\rangle \quad (\text{C.30})$$

No obstante, cuando $n_i = 0$ ocurre un resultado que será importante para calcular el espectro de partículas.

$$\hat{a}_i |\dots, n_i = 0, \dots\rangle = 0 \quad (\text{C.31})$$

En palabras, esto implica que el operador de destrucción aniquila el espacio de Fock y lo reduce a 0. Por otro lado, volviendo con el espacio de Fock de 0 partículas, de aquí en adelante podemos construir un estado general para todo el espacio de Fock a partir del estado de vacío $|0\rangle$.

$$|n_1, \dots, n_i, \dots\rangle = \frac{1}{\sqrt{(n_1)! \dots (n_N)!}} \prod_{i=1}^G (\hat{a}_i^\dagger)^{n_i} |0\rangle \quad (\text{C.32})$$

No es evidente, pero estas relaciones y las de conmutación que vamos a mostrar a continuación para estos operadores son propias de un sistema de partículas llamadas Bosones. Esto se debe a que los bosones, al ser permutados, mantienen una simetría; sin embargo, con los Fermiones existe una asimetría al ser permutados y, en contraste con el principio de exclusión de Pauli, no puede haber una ocupación mayor a 1 ($n_i \leq 1$)⁵.

Volviendo a nuestros operadores, sus relaciones de conmutación son las siguientes:

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j] = 0, [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger] = 0, [\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij} \quad (\text{C.33})$$

Realizando una inspección en el proceso de destruir y crear una partícula en un estado, se tiene lo siguiente:

$$\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i |\dots, n_i, \dots\rangle = \sqrt{n_i} \hat{a}_i^\dagger |\dots, n_i - 1, \dots\rangle = n_i |\dots, n_i, \dots\rangle \quad (\text{C.34})$$

Es decir que aplicar los dos operadores da como resultado el mismo estado escalado por la

⁵No será necesario abarcar los operadores de creación y destrucción con Fermiones debido a que la naturaleza de esta radiación viene del hecho que los osciladores representan Bosones, donde veremos más adelante que son fotones los que se radían.

ocupación de ese estado. A esta relación le denominamos operador número $\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i = \hat{N}_i$ y al igual que las relaciones establecidas con los números de ocupación, podemos establecer un operador número total de partículas $\hat{N} = \sum_{i=1}^G \hat{N}_i$.

Retomando el proceso de segunda cuantización, este va del hecho de que las cantidades medibles deben tener un operador hermítico asignado. Puesto que nuestro lagrangiano contiene una cantidad que al derivarse en el tiempo y en el espacio configura cantidades como momentum canónico $\pi(x^\mu)$ y energía elástica $\phi(x^\mu)$, estas cantidades deben poder transformarse en operadores y seguir unas relaciones de conmutación. No obstante, vamos a proceder tal que los coeficientes de expansión de nuestras funciones se promueven a operadores de creación y destrucción para así convertir nuestro campo ψ . En ese orden, cambiando la simbología de nuestros coeficientes y agregando el factor de normalización, tenemos nuestro campo escalar promovido a operador de campo.

$$\hat{\psi} = \hat{\psi}_{\leftarrow} + \hat{\psi}_{\rightarrow} \quad (\text{C.35})$$

$$\hat{\psi}_{\rightarrow}(t, r, \theta, \phi) = \sum_{n \geq 0} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^n Y_l^m(\theta, \phi) \int_0^\infty \frac{d\omega}{\sqrt{4\pi\omega}} \left[\hat{b}_{nl}^+(\omega) e^{-i\omega \left[t - \frac{r_s}{c} \ln\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\right]} + \hat{b}_{nl}^-(\omega) e^{i\omega \left[t - \frac{r_s}{c} \ln\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\right]} \right] \quad (\text{C.36})$$

$$\hat{\psi}_{\leftarrow}(t, r, \theta, \phi) = \sum_{n \geq 0} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^n Y_l^m(\theta, \phi) \int_0^\infty \frac{d\omega}{\sqrt{4\pi\omega}} \left[\hat{b}_{nl}^+(\omega) e^{i\omega \left[t + \frac{r_s}{c} \ln\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\right]} + \hat{b}_{nl}^-(\omega) e^{-i\omega \left[t + \frac{r_s}{c} \ln\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\right]} \right] \quad (\text{C.37})$$

Ahora los coeficientes $\hat{b}_{nl}^+(\omega)$ y $\hat{b}_{nl}^-(\omega)$ representan los operadores de creación y destrucción respectivamente, con grados de libertad n , l y ω . En adición, en contraste con las propiedades de los coeficientes, se optó por realizar este proceso debido a que estos coeficientes contienen las mismas propiedades que los operadores de creación y destrucción, es decir, que más que un proceso ad hoc, fue un proceso motivado por la naturaleza análoga de estos.

De aquí se proponen las siguientes relaciones de conmutación entre los operadores.

$$[\hat{b}_{nl}^-(\omega), \hat{b}_{n'l'}^-(\omega')] = 0, [\hat{b}_{nl}^+(\omega), \hat{b}_{n'l'}^+(\omega')] = 0, [\hat{b}_{nl}^-(\omega), \hat{b}_{n'l'}^+(\omega')] = 0 = \delta_{nn'l'l'} \delta(\omega - \omega') \quad (\text{C.38})$$

La distribución de Dirac aparece debido a que, a diferencia de los índices n y l , la frecuencia ω es una variable continua.

Por otro lado, como los operadores tienen asignado un estado de vacío, entonces nuestro operador $\hat{b}_{nl}^-(\omega)$ destruye el espacio de Fock de ese vacío.

$$\hat{b}_{nl}^-(\omega) |0_B\rangle = 0 \quad (\text{C.39})$$

Para finalizar esta sección, vamos a proponer las siguientes sustituciones para los términos que aparecen en los exponenciales.

$$u(t, r) = t + \frac{r_s}{c} \ln \left(1 - \frac{r_s}{r} \right), \quad v(t, r) = t - \frac{r_s}{c} \ln \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) \quad (\text{C.40})$$

Estas sustituciones generan un sistema de coordenadas, es decir, representan a un observador alejado de un agujero negro. Este observador mide partículas entrando y saliendo del horizonte; no obstante, su vacío no está definido en r_s y, por lo tanto, este vacío no es un vacío real ([39]). Por otro lado, es de notar que la sustitución hecha representa las coordenadas de Eddington-Finkelstein en la vecindad del horizonte de eventos, lo cual es entendible, teniendo en cuenta que habíamos solucionado la parte radial sobre ese punto singular.

C.3. Transformaciones de Bogolyubov y la distribución de partículas

Al final de la sección anterior nos encontramos con un problema de coordenadas, donde estas coordenadas no son analíticas en el horizonte del agujero negro y no nos permiten describir nuestro campo en ese punto del espacio.

Esto nos motiva a generar un sistema de coordenadas donde nuestro campo sea analítico en ese punto. Por eso, de acuerdo con las siguientes relaciones, podemos proponer otras coordenadas más adecuadas.

$$t = \frac{u+v}{2} \quad (\text{C.41})$$

$$1 - \frac{r_s}{r} = e^{\frac{c(u-v)}{2r_s}} \quad (\text{C.42})$$

Esas exponenciales que aparecen están bien definidas cuando $u \rightarrow -\infty$ y $v \rightarrow \infty$, por eso las nuevas coordenadas que serán analíticas en el horizonte estarán dadas por:

$$U = \frac{2r_s}{c} e^{\frac{cu}{2r_s}} \quad (\text{C.43})$$

$$V = -\frac{2r_s}{c} e^{\frac{-cv}{2r_s}} \quad (\text{C.44})$$

El lector se habrá dado cuenta de que estas son las coordenadas de Kruskal y efectivamente son las mismas coordenadas de Kruskal; sin embargo, para la sustitución agregamos un factor que de $\frac{2r_s}{c}$ para que las coordenadas (U, V) no fueran adimensionales. Aunque, por otro lado, nos motivamos por la manera en la ([39]) derivan el efecto Unruh donde constituyen unas sustituciones de la misma forma para un observador en un marco acelerado con uno en un marco inercial.

Retomando el problema del vacío, puesto que nuestras coordenadas (u, v) no pueden establecer un vacío sin puntos donde no sean analíticas, las coordenadas (U, V) sí pueden configurar el vacío que necesitamos⁶. Con base en lo anterior, vamos a realizar la transformación con nuestro operador campo.

⁶Este problema derivado de la elección de coordenadas, se debe a que si operamos nuestros operadores campo con un ket cualquiera, al evaluarse en puntos singulares como el radio de Schwarzschild, no obtendríamos un resultado definido y no habría manera de determinar cuántas partículas se describen por uno de esos osciladores.

$$\hat{\psi}_{\rightarrow}(t, r, \theta, \phi) = \sum_{n \geq 0} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^n Y_l^m(\theta, \phi) \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{4\pi\omega}} \left[\hat{a}_{nl}^+(\omega) e^{i\omega \frac{2r_s}{c} \ln \frac{cV}{2r_s}} + \hat{a}_{nl}^-(\omega) e^{-i\omega \frac{2r_s}{c} \ln \frac{cV}{2r_s}} \right] \quad (\text{C.45})$$

$$\hat{\psi}_{\leftarrow}(t, r, \theta, \phi) = \sum_{n \geq 0} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^n Y_l^m(\theta, \phi) \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{4\pi\omega}} \left[\hat{a}_{nl}^+(\omega) e^{i\omega \frac{2r_s}{c} \ln \frac{cU}{2r_s}} + \hat{a}_{nl}^-(\omega) e^{-i\omega \frac{2r_s}{c} \ln \frac{cU}{2r_s}} \right] \quad (\text{C.46})$$

Debido a que el proceso que vamos a realizar requiere que nuestra función tenga una forma similar a las funciones que se van a comparar, debemos obtener exponenciales del tipo $e^{i\omega U}$. Para lograrlo, tenemos que fijarnos en que si $\frac{cU}{2r_s} \sim 1$, entonces, utilizando las series de Taylor del logaritmo natural, obtendríamos que $\ln \frac{cU}{2r_s} \sim U - \frac{2r_s}{c}$ y lo mismo con V . Esto da como resultado

$$\hat{\psi}_{\rightarrow}(t, r, \theta, \phi) = \sum_{n \geq 0} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^n Y_l^m(\theta, \phi) \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{4\pi\omega}} \left[\hat{a}_{nl}^+(\omega) e^{-i\omega V} e^{-i\omega \frac{2r_s}{c}} + \hat{a}_{nl}^-(\omega) e^{i\omega V} e^{i\omega \frac{2r_s}{c}} \right] \quad (\text{C.47})$$

$$\hat{\psi}_{\leftarrow}(t, r, \theta, \phi) = \sum_{n \geq 0} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^n Y_l^m(\theta, \phi) \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{4\pi\omega}} \left[\hat{a}_{nl}^+(\omega) e^{i\omega U} e^{-i\omega \frac{2r_s}{c}} + \hat{a}_{nl}^-(\omega) e^{-i\omega U} e^{i\omega \frac{2r_s}{c}} \right] \quad (\text{C.48})$$

Las fases que aparecen ahí no van a afectar nuestro resultado; de hecho, en varias bibliografías las omiten. Nosotros no las omitiremos porque no hay una pérdida de generalidad.

Por otro lado, volviendo al problema, el vacío que es observado por un observador en coordenadas u, v no es el mismo que el de un observador en coordenadas U, V . En adición, esto hace que nosotros configuremos dos vacíos que destruyen su propio espacio de Fock (como el que habíamos establecido previamente)

$$\hat{b}_{nl}^-(\omega') |0_B\rangle = 0, \quad \hat{a}_{nl}^-(\omega) |0_K\rangle = 0 \quad (\text{C.49})$$

Donde, al igual que los operadores $\hat{b}_{nl}^-(\omega')$, $\hat{b}_{nl}^+(\omega')$, los operadores $\hat{a}_{nl}^-(\omega)$, $\hat{a}_{nl}^+(\omega)$ tienen las

relaciones de conmutación.

$$[\hat{a}_{nl}^-(\omega), \hat{a}_{n'l'}^-(\omega')] = 0, [\hat{a}_{nl}^+(\omega), \hat{a}_{n'l'}^+(\omega')] = 0, [\hat{a}_{nl}^-(\omega), \hat{a}_{n'l'}^+(\omega')] = 0 = \delta_{nn'l'l'} \delta(\omega - \omega') \quad (\text{C.50})$$

Como este problema del vacío es dependiente de las coordenadas a escoger, entonces esto configura un problema de observación de distintos espacios de Fock. Por lo tanto, esto motiva a establecer una serie de transformaciones que traduzcan operadores de creación y destrucción en distintos marcos de referencia; a estas transformaciones se les denomina transformaciones de Bogolyubov ⁷.

Para proceder, vamos a considerar que ambos observadores tienen su operador campo en el mismo estado l y n (evidentemente, desde aquí vamos a omitir la suma sobre n y los armónicos esféricos) y lo único que discrepa es la frecuencia observada. Con base en lo anterior, las transformaciones de Bogolyubov de nuestros operadores $\hat{a}_{nl}^-(\omega)$, $\hat{a}_{nl}^+(\omega)$ a operadores $\hat{b}_{nl}^-(\omega')$, $\hat{b}_{nl}^+(\omega')$ están definidas como ⁸

$$\hat{b}_{nl}^-(\omega') = \int_0^\infty (\alpha(\omega', \omega) \hat{a}_{nl}^-(\omega) - \beta(\omega', \omega) \hat{a}_{nl}^+(\omega)) d\omega \quad (\text{C.51})$$

$$\hat{b}_{nl}^+(\omega') = \int_0^\infty (\alpha^*(\omega', \omega) \hat{a}_{nl}^+(\omega) - \beta^*(\omega', \omega) \hat{a}_{nl}^-(\omega)) d\omega \quad (\text{C.52})$$

Para no extendernos demasiado, vamos a sustituir la transformación de los coeficientes en la expresión para las ondas entrantes y reemplazando $\omega \rightarrow \omega'$, así obtenemos.

$$\hat{\psi}_{\leftarrow}(t, r, \theta, \phi) = \int_0^\infty \frac{d\omega'}{\sqrt{4\pi\omega'}} \left[\int_0^\infty (\alpha^*(\omega', \omega) \hat{a}_{nl}^+(\omega) - \beta^*(\omega', \omega) \hat{a}_{nl}^-(\omega)) d\omega \right] e^{i\omega' u} \left[\int_0^\infty (\alpha(\omega', \omega) \hat{a}_{nl}^-(\omega) - \beta(\omega', \omega) \hat{a}_{nl}^+(\omega)) d\omega \right] e^{-i\omega' u} \quad (\text{C.53})$$

⁷Estas transformaciones son un recurso para diagonalizar Hamiltonianos, descritos por unos operadores de creación y destrucción, en términos de otros operadores de creación y destrucción.

⁸Bibliografías como [39], [23], entre otras, suelen poner las frecuencias como índices, sin embargo, consideramos que esto puede generar confusiones y por eso las tratamos como cualquier variable continua, dando a entender que los coeficientes son funciones

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_{\leftarrow}(t, r, \theta, \phi) = & \int_0^{\infty} d\omega \hat{a}_{nl}^+(\omega) \left[\int_0^{\infty} \frac{d\omega'}{\sqrt{4\pi\omega'}} \left(\alpha^*(\omega', \omega) e^{i\omega'u} - \beta(\omega', \omega) e^{-i\omega'u} \right) \right] \\ & + \int_0^{\infty} d\omega \hat{a}_{nl}^-(\omega) \left[\int_0^{\infty} \frac{d\omega'}{\sqrt{4\pi\omega'}} \left(\alpha(\omega', \omega) e^{-i\omega'u} - \beta^*(\omega', \omega) e^{i\omega'u} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{C.54})$$

Como se puede inferir, el campo es el mismo para ambos observadores; por lo tanto, podemos hacer una equivalencia de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{4\pi\omega}} \left[\hat{a}_{nl}^+(\omega) e^{i\omega U} e^{-i\omega \frac{2r_s}{c}} + \hat{a}_{nl}^-(\omega) e^{-i\omega U} e^{i\omega \frac{2r_s}{c}} \right] = \\ \int_0^{\infty} d\omega \hat{a}_{nl}^+(\omega) \left[\int_0^{\infty} \frac{d\omega'}{\sqrt{4\pi\omega'}} \left(\alpha^*(\omega', \omega) e^{i\omega'u} - \beta(\omega', \omega) e^{-i\omega'u} \right) \right] \\ + \int_0^{\infty} d\omega \hat{a}_{nl}^-(\omega) \left[\int_0^{\infty} \frac{d\omega'}{\sqrt{4\pi\omega'}} \left(\alpha(\omega', \omega) e^{-i\omega'u} - \beta^*(\omega', \omega) e^{i\omega'u} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{C.55})$$

Ahora podemos aplicar el proceso de comparación de coeficientes; además, puesto que solo se distinguen por un conjugado, entonces podemos comparar cualquiera de los dos coeficientes.

En ese orden de ideas, para la comparación escogemos solo las expresiones que están multiplicadas por el operador de destrucción y así obtener la siguiente ecuación.

$$\frac{1}{\sqrt{\omega}} e^{-i\omega U} e^{i\omega \frac{2r_s}{c}} = \int_0^{\infty} \frac{d\omega'}{\sqrt{\omega'}} \left(\alpha(\omega', \omega) e^{-i\omega'u} - \beta^*(\omega', \omega) e^{i\omega'u} \right) \quad (\text{C.56})$$

De aquí podemos obtener las siguientes expresiones para los coeficientes α y β

$$\alpha(\omega', \omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{2r_s}{c} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} e^{i\omega' \frac{2r_s}{c} \ln\left(\frac{c}{2r_s\omega}\right)} e^{\pi\omega' \frac{r_s}{c}} \Gamma\left(i\omega' \frac{2r_s}{c}\right) \quad (\text{C.57})$$

$$\beta(\omega', \omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{2r_s}{c} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} e^{i\omega' \frac{2r_s}{c} \ln\left(\frac{c}{2r_s\omega}\right)} e^{-\pi\omega' \frac{r_s}{c}} \Gamma\left(i\omega' \frac{2r_s}{c}\right) \quad (\text{C.58})$$

Finalmente, ambos coeficientes están relacionados de la siguiente manera:

$$|\alpha(\omega', \omega)|^2 = e^{4\pi\omega' \frac{r_s}{c}} |\beta(\omega', \omega)|^2 \quad (\text{C.59})$$

Con las expresiones de ambos coeficientes podemos volver a ese problema de observación,

puesto que, como habías dicho anteriormente, el observador en coordenadas (u, v) mide un espectro de partículas. No obstante, ya que su vacío no está definido en el horizonte, entonces no podemos extraer información en ese punto. Con base en eso, entonces tenemos que observar ese espectro a partir del vacío en coordenadas (U, V) , para eso vamos a tomar el valor esperado del operador número en (u, v) con respecto al vacío $|0_K\rangle$.

$$\langle 0_K | \hat{b}_{nl}^+(\omega') \hat{b}_{nl}^-(\omega') | 0_K \rangle = \langle \hat{N}(\omega') \rangle \quad (\text{C.60})$$

Evidentemente, los operadores $\hat{b}^+ \hat{b}^-$ no pueden actuar directamente con los kets $|0_K\rangle$; por lo tanto, vamos a utilizar la expansión por transformaciones de Bogolyubov.

$$\begin{aligned} \langle \hat{N}(\omega') \rangle = \langle 0_K | & \left(\int_0^\infty (\alpha^*(\omega', \omega) \hat{a}_{nl}^+(\omega) - \beta^*(\omega', \omega) \hat{a}_{nl}^-(\omega)) d\omega \right) \\ & \left(\int_0^\infty (\alpha(\omega', \Omega) \hat{a}_{nl}^-(\Omega) - \beta(\omega', \Omega) \hat{a}_{nl}^+(\Omega)) d\Omega \right) | 0_K \rangle \end{aligned} \quad (\text{C.61})$$

Expandiendo los términos y utilizando las relaciones de conmutación, obtenemos

$$\langle \hat{N}(\omega') \rangle = \int_0^\infty |\beta(\omega', \omega)|^2 d\omega \quad (\text{C.62})$$

Podemos calcular directamente la integral, no obstante, esta va a diverger y no obtendríamos un resultado del cual podamos extraer información. En este orden, tomaremos la relación de conmutación $[\hat{b}_{nl}^-(\omega), \hat{b}_{nl}^+(\omega')] = \delta(\omega - \omega')$ y utilizaremos la expansión por coeficientes de Bogolyubov, donde obtendremos

$$\int_0^\infty (\alpha(\omega', \omega) \alpha^*(\omega'', \omega) - \beta(\omega', \omega) \beta^*(\omega'', \omega)) d\omega = \delta(\omega' - \omega'') \quad (\text{C.63})$$

Teniendo en cuenta que $\omega' = \omega''$, se tiene

$$\int_0^\infty (|\alpha(\omega', \omega)|^2 - |\beta(\omega', \omega)|^2) d\omega = \delta(0) \quad (\text{C.64})$$

Utilizando la relación [C.59](#)

$$\int_0^\infty \left(e^{4\pi\omega' \frac{r_s}{c}} |\beta(\omega', \omega)|^2 - |\alpha(\omega', \omega)|^2 \right) d\omega = \delta(0) \quad (\text{C.65})$$

Despejando para β , concluimos que el valor esperado del número de partículas está dado por

$$\langle \hat{N}(\omega') \rangle = \frac{1}{e^{4\pi\omega' \frac{r_s}{c}} - 1} \delta(0) \quad (\text{C.66})$$

El factor $\delta(0)$ aparece debido a que todo este proceso lo hicimos sobre todo el espacio de frecuencias, lo que implica que ese valor esperado diverge para intervalos de tiempo infinitos ([39]). De acuerdo con lo anterior, podemos ignorarla si interpretamos la exponencial como una ocupación por unidad de tiempo o una distribución [41].

$$\rho(\omega') = \frac{1}{e^{4\pi\omega' \frac{r_s}{c}} - 1} \quad (\text{C.67})$$

Apéndice D

Derivación ecuación de campo

Con base a la siguiente expresión y teniendo en cuenta que la raíz cuadrada del determinante de la métrica no depende del campo y sus derivadas

$$\delta S[\psi(x^\mu), g^{\mu\nu}] = \int \frac{\partial(\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi))}{\partial \psi} \delta \psi \sqrt{-g} + \frac{\partial(\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi))}{\partial(\partial_\mu \psi)} \delta(\partial_\mu \psi) \sqrt{-g} d^4 x \quad (\text{D.1})$$

Para encontrar la ecuación de campo, vamos a realizar una sustitución utilizando la regla del producto en el segundo término.

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial(\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi))}{\partial(\partial_\mu \psi)} \sqrt{-g} \delta \psi \right) = \partial_\mu \left(\frac{\partial(\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi))}{\partial(\partial_\mu \psi)} \sqrt{-g} \right) \delta \psi + \frac{\partial(\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi))}{\partial(\partial_\mu \psi)} \sqrt{-g} \delta(\partial_\mu \psi) \quad (\text{D.2})$$

Despejando $\frac{\partial(\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi))}{\partial(\partial_\mu \psi)} \sqrt{-g} \delta(\partial_\mu \psi)$ y sustituyendo en la expresión anterior obtendríamos

$$\delta S[\psi(x^\mu), g^{\mu\nu}] = \int \frac{\partial(\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi))}{\partial \psi} \sqrt{-g} \delta \psi - \partial_\mu \left(\frac{\partial(\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi))}{\partial(\partial_\mu \psi)} \sqrt{-g} \right) \delta \psi + \partial_\mu \left(\frac{\partial(\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi))}{\partial(\partial_\mu \psi)} \sqrt{-g} \delta \psi \right) d^4 x \quad (\text{D.3})$$

Agrupando los términos con $\delta\psi$ y distribuyendo la integral

$$\delta S[\psi(x^\mu), g^{\mu\nu}] = \int \left[\frac{\partial(\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi))}{\partial \psi} \sqrt{-g} - \partial_\mu \left(\frac{\partial(\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi))}{\partial(\partial_\mu \psi)} \sqrt{-g} \right) \right] \delta\psi d^4x + \int \partial_\mu \left(\frac{\partial(\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi) \sqrt{-g})}{\partial(\partial_\mu \psi)} \delta\psi \right) d^4x \quad (\text{D.4})$$

Si expandimos la segunda integral como la suma de las derivadas parciales respecto a x^μ y teniendo en cuenta que $d^4x = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$, obtendríamos

$$\begin{aligned} \int \partial_\mu \left(\frac{\partial(\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi))}{\partial(\partial_\mu \psi)} \sqrt{-g} \delta\psi \right) d^4x = & \int \partial_0 \left(\frac{\partial(\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi))}{\partial(\partial_0 \psi)} \sqrt{-g} \delta\psi \right) + \partial_1 \left(\frac{\partial(\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi))}{\partial(\partial_1 \psi)} \sqrt{-g} \delta\psi \right) \\ & + \partial_2 \left(\frac{\partial(\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi))}{\partial(\partial_2 \psi)} \sqrt{-g} \delta\psi \right) + \partial_3 \left(\frac{\partial(\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi))}{\partial(\partial_3 \psi)} \sqrt{-g} \delta\psi \right) dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

Donde si evaluamos cada integral de tal manera que seguimos el teorema fundamental de cálculo, cada expresión se evalúa en las fronteras del sistema y de acuerdo con el hecho de que la variación del campo en los extremos es nula, tendríamos que

$$\delta\psi(t_i, r_i, \theta_i, \phi_i) = \delta\psi(t_f, r_f, \theta_f, \phi_f) = 0 \quad (\text{D.6})$$

$$\int \partial_\mu \left(\frac{\partial(\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi))}{\partial(\partial_\mu \psi)} \sqrt{-g} \delta\psi \right) d^4x = 0 \quad (\text{D.7})$$

Finalmente, solo nos quedaría la siguiente integral y como el problema consiste de minimizar la acción, eso implica que la variación de la cantidad de acción del sistema debe de ser igual a 0

$$\delta S[\psi(x^\mu), g^{\mu\nu}] = \int \left[\frac{\partial(\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi))}{\partial \psi} \sqrt{-g} - \partial_\mu \left(\frac{\partial(\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi))}{\partial(\partial_\mu \psi)} \sqrt{-g} \right) \right] \delta \psi d^4x = 0 \quad (\text{D.8})$$

Como sabemos que $\forall x^\mu \in (x_i^\mu, x_f^\mu)$ $\delta \psi \neq 0$, entonces para que la integral sea nula, la expresión que está dentro de los paréntesis debe ser equivalente a 0, dando como resultado la ecuación de movimiento para una densidad lagrangiana en general dentro de un espacio curvo.

$$\frac{\partial(\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi))}{\partial \psi} \sqrt{-g} - \partial_\mu \left(\frac{\partial(\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi))}{\partial(\partial_\mu \psi)} \sqrt{-g} \right) = 0 \quad (\text{D.9})$$

Ahora podemos proceder reemplazando la expresión para nuestro campo

$$\frac{\partial(\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu(\psi)\partial_\nu(\psi))}{\partial \psi} \sqrt{-g} - \partial_\mu \left(\frac{\partial(\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu(\psi)\partial_\nu(\psi))}{\partial(\partial_\mu \psi)} \sqrt{-g} \right) = 0 \quad (\text{D.10})$$

Como se puede ver la densidad lagrangiana no depende del campo, solo de sus derivadas parciales, dando como resultado

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial(g^{\mu\nu}\partial_\mu(\psi)\partial_\nu(\psi))}{\partial(\partial_\mu \psi)} \sqrt{-g} \right) = 0 \quad (\text{D.11})$$

Para hacer todo más explícito, vamos a expandir el lagrangiano y además consideraremos el hecho de que la métrica solo tiene componentes diagonales no nulas.

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial(g^{00}(\partial_0 \psi)^2 + g^{11}(\partial_1 \psi)^2 + g^{22}(\partial_2 \psi)^2 + g^{33}(\partial_3 \psi)^2)}{\partial(\partial_\mu \psi)} \sqrt{-g} \right) = 0 \quad (\text{D.12})$$

Para cada derivada respecto a $\partial(\partial_\mu \psi)$ se tiene que $\frac{\partial(g^{ii}(\partial_i \psi)^2)}{\partial(\partial_\mu \psi)} = 2g^{ii}\delta_i^\mu \partial_i \psi$, dando como resultado

$$\partial_\mu ([2g^{00}\delta_0^\mu \partial_0 \psi + 2g^{11}\delta_1^\mu \partial_1 \psi + 2g^{22}\delta_2^\mu \partial_2 \psi + 2g^{33}\delta_3^\mu \partial_3 \psi] \sqrt{-g}) = 0 \quad (\text{D.13})$$

Reduciendo la sumatoria

$$\partial_\mu (g^{ii}\delta_i^\mu \partial_i \psi \sqrt{-g}) = 0 \quad (\text{D.14})$$

$$\partial_{\mu}(g^{\mu\mu}\partial_{\mu}\psi\sqrt{-g}) = 0 \quad (\text{D.15})$$

Para que la fórmula pueda aplicarse con métricas sin componentes nulas en su, haremos que los dos índices de la métrica sean diferentes y así obtendremos la ecuación de campo.

$$\partial_{\mu}(g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\partial_{\nu}\psi) = 0 \quad (\text{D.16})$$

Apéndice E

Solución parte temporal y radial

$$\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \frac{r^2}{c^2} \frac{\partial^2 R}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right] + l(l+1)R = 0 \quad (\text{E.1})$$

El motivante de esta solución viene del hecho de que la segunda cuantización requiere que expandamos el campo mediante modos de oscilación. En ese orden de ideas, vamos a definir la función $R(t, r)$ como la transformada de Fourier inversa de una función en el dominio de frecuencias.

Mediante las siguientes sustituciones

$$R(t, r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(\omega, r) e^{-i\omega t} d\omega \quad (\text{E.2})$$

$$\frac{\partial^2 R(t, r)}{\partial t^2} = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \zeta(\omega, r) e^{-i\omega t} d\omega \quad (\text{E.3})$$

La ecuación diferencial quedaría de la siguiente forma

$$\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \frac{r^2}{c^2} \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \zeta(\omega, r) e^{-i\omega t} d\omega - \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) r^2 \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(\omega, r) e^{-i\omega t} d\omega \right] + l(l+1) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(\omega, r) e^{-i\omega t} d\omega = 0 \quad (\text{E.4})$$

Simplificando la expresión

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \left(-\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \frac{r^2}{c^2} \omega^2 \zeta(\omega, r) - \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) r^2 \frac{\partial \zeta(\omega, r)}{\partial r} \right] + l(l+1) \zeta(\omega, r) \right) d\omega = 0 \quad (\text{E.5})$$

Para que la integral sea equivalente a 0, entonces la expresión entre paréntesis debe de ser igual a 0, dando como resultado una ecuación diferencial que solo depende de la distancia radial.

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) r^2 \frac{\partial \zeta(\omega, r)}{\partial r} \right] + \left[\frac{\omega^2}{c^2} \frac{r^2}{1 - \frac{r_s}{r}} - l(l+1) \right] \zeta(\omega, r) = 0 \quad (\text{E.6})$$

La presente ecuación diferencial no posee una solución analítica, de hecho, no hay bibliografías que hayan resuelto la ecuación debido a que en varias de estas, donde se deriva la radiación de Hawking, no se requiere solucionar la ecuación en estas coordenadas. Sin embargo, en nuestro caso, trataremos de solucionar la ecuación mediante una expansión en series de potencias porque se encontró un resultado que no se ha visto en varias bibliografías.

Antes de proceder con la solución, es de apreciar que la naturaleza de esta ecuación es similar a la ecuación hipergeométrica¹ y la ecuación P de Riemman[42].

La ecuación hipergeométrica tiene la forma de

$$z(1-z) \frac{d^2 u}{dz^2} + (c - (a+b+1)z) \frac{du}{dz} - abu = 0 \quad (\text{E.7})$$

Una característica de la expansión en series de esta ecuación es la no posibilidad de encontrar una fórmula para los coeficientes del polinomio, donde lo mismo ocurre con la ecuación a resolver.

Aunque la ecuación obtenida es similar a la ecuación hipergeométrica, la solución no se puede dar en términos de la función hipergeométrica de Gauss. A pesar de eso, encontramos que la ecuación pertenece a una clase más general de la ecuación hipergeométrica y la ecuación P de Riemman, donde el caso más general se denominó ecuación diferencial de Mathieu [42].

¹Esta ecuación fue presentada por Gauss

En 1868 Mathieu vinculó la ecuación diferencial de una membrana elíptica con su ecuación[42], de hecho, a sus soluciones se les atribuye como funciones asociadas con el cilindro elíptico. En contraste con nuestro problema, la ecuación de donde surgen esta clase de funciones, es la ecuación de onda en dos dimensiones

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t^2} = \nabla^2 V \quad (\text{E.8})$$

Cuando Mathieu consideró la función $V = u(x,y) \cos(pt + \phi)$ y utilizó coordenadas elípticas de la forma $x + iy = h \cosh(\xi + i\eta)$, donde obtuvo dos ecuaciones del tipo ²

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + (a + 16q \cos 2z)u = 0 \quad (\text{E.9})$$

Dentro de nuestra investigación para solucionar la ecuación de tal manera que fuera conveniente para estudiantes de pregrado, se pudo averiguar que la forma de solucionar la ecuación debería ser similar a la solución de la ecuación de Mathieu en forma de Lindemann cuando se realiza la sustitución $\xi = \cos^2 z$ [42].

$$4\xi(1-\xi) \frac{d^2 u}{d\xi^2} + 2(1-2\xi) \frac{du}{d\xi} + (a - 16q + 32q\xi)u = 0 \quad (\text{E.10})$$

Como la ecuación tiene singularidades en 0 y 1, entonces podemos proponer soluciones del tipo

$$\begin{aligned} y_{00} &= \sum_{n \geq 0} a_n \xi^n, \quad y_{01} = \xi^{\frac{1}{2}} \sum_{n \geq 0} b_n \xi^n \\ y_{10} &= \sum_{n \geq 0} a'_n (1-\xi)^n, \quad y_{11} = (1-\xi)^{\frac{1}{2}} \sum_{n \geq 0} b'_n (1-\xi)^n \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

Para que nuestra ecuación diferencial tenga una similitud con la ecuación de Mathieu, vamos a realizar la sustitución $z = 1 - \frac{r_s}{r}$, donde obtendríamos

$$\frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} \left[z r^2 \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right] + \left[\frac{\omega^2 r^2}{c^2} \frac{r^2}{z} - l(l+1) \right] \zeta = 0 \quad (\text{E.12})$$

Sustituyendo las expresiones $\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{r_s}{r^2}$ y $r = \frac{r_s}{1-z}$, la ecuación quedaría en términos de z de la

²Una derivación más explícita de esta ecuación se obtiene en A course of modern analysis por Whittaker

siguiente forma

$$(z-1)^2 \frac{\partial}{\partial z} \left[z \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right] + \left[\frac{\omega^2}{c^2} \frac{r_s^2}{z(z-1)^2} - l(l+1) \right] \zeta = 0 \quad (\text{E.13})$$

$$z(z-1)^4 \frac{\partial}{\partial z} \left[z \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right] + \left[\frac{\omega^2}{c^2} r_s^2 - l(l+1)z(z-1)^2 \right] \zeta = 0 \quad (\text{E.14})$$

Ahora que obtuvimos una expresión similar con puntos regulares en $z = 0$ y $z = 1$, asumiremos una solución de la forma $\zeta(\omega, z) = z^\alpha \sum_{n \geq 0} a_n z^n$. Es decir que solucionaríamos la ecuación en 0 y esto se debe a que encontramos que para $z = 1$ la función $\zeta(\omega, z) = 0$, esto se puede interpretar de tal manera que a $r \rightarrow \infty$ la parte radial llega a ser nula.

Además, al elegir $z = 0$ esto se traduce a que $r = r_s$, lo que haría que la solución se dé sobre el radio de Schwarzschild y podamos entender la lógica del fenómeno de radiación de Hawking. Esto se debe a que la derivación consiste de comparar las soluciones de la ecuación de campo al infinito con las soluciones sobre la vecindad del horizonte de eventos, por eso solucionamos sobre ese punto.

Por otro lado, la razón por la cual no asumimos un valor arbitrario para α , como con la solución de la ecuación de Mathieu, se debe a que no tenemos criterios para determinar tal valor. Independientemente de eso, mediante la solución por polinomios vamos a determinar ese valor.

Sustituyendo la solución propuesta y expandiendo unos términos

$$z(z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z + 1) \frac{\partial}{\partial z} \left[\sum_{n \geq 0} a_n (n + \alpha) z^{n+\alpha} \right] + \frac{\omega^2}{c^2} r_s^2 \sum_{n \geq 0} a_n z^{n+\alpha} - l(l+1)(z^2 - 2z + 1) \sum_{n \geq 0} a_n z^{n+\alpha+1} = 0 \quad (\text{E.15})$$

$$(z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z + 1) \sum_{n \geq 0} a_n (n + \alpha)^2 z^{n+\alpha} + \frac{\omega^2}{c^2} r_s^2 \sum_{n \geq 0} a_n z^{n+\alpha} - l(l+1)(z^2 - 2z + 1) \sum_{n \geq 0} a_n z^{n+\alpha+1} = 0 \quad (\text{E.16})$$

Distribuyendo la sumatoria

$$\begin{aligned}
& \sum_{n \geq 0} a_n (n + \alpha)^2 z^{n+\alpha+4} - \sum_{n \geq 0} 4a_n (n + \alpha)^2 z^{n+\alpha+3} + \sum_{n \geq 0} 6a_n (n + \alpha)^2 z^{n+\alpha+2} - \sum_{n \geq 0} 4a_n (n + \alpha)^2 z^{n+\alpha+1} \\
& + \sum_{n \geq 0} a_n (n + \alpha)^2 z^{n+\alpha} - \sum_{n \geq 0} a_n l(l+1) z^{n+\alpha+3} + \sum_{n \geq 0} 2a_n l(l+1) z^{n+\alpha+2} - \sum_{n \geq 0} a_n l(l+1) z^{n+\alpha+1} \\
& + \frac{\omega^2}{c^2} r_s^2 \sum_{n \geq 0} a_n z^{n+\alpha} = 0
\end{aligned} \tag{E.17}$$

Agrupamos términos con exponentes iguales y reindexando de tal manera que cada sumatoria tenga la expresión $z^{n+\alpha}$. Luego, expandemos unos términos de las sumatorias para que todas inicien con el mismo valor.

$$\begin{aligned}
& \sum_{n \geq 4} \left[a_n \left((n + \alpha)^2 + \frac{\omega^2 r_s^2}{c^2} \right) - a_{n-1} (4(n-1 + \alpha)^2 + l(l+1)) + a_{n-2} (6(n-2 + \alpha)^2 + 2l(l+1)) \right. \\
& \quad \left. - a_{n-3} (4(n-3 + \alpha)^2 + l(l+1)) + a_{n-4} ((n-4 + \alpha)^2) \right] z^{n+\alpha} \\
& + a_0 \left(\alpha^2 + \frac{\omega^2 r_s^2}{c^2} \right) z^\alpha + a_1 \left((\alpha + 1)^2 + \frac{\omega^2 r_s^2}{c^2} \right) z^{\alpha+1} + a_2 \left((\alpha + 2)^2 + \frac{\omega^2 r_s^2}{c^2} \right) z^{\alpha+2} \\
& + a_3 \left((\alpha + 3)^2 + \frac{\omega^2 r_s^2}{c^2} \right) z^{\alpha+3} - a_0 (4\alpha^2 + l(l+1)) z^{\alpha+1} - a_1 (4(\alpha + 1)^2 + l(l+1)) z^{\alpha+2} \\
& - a_2 (4(\alpha + 2)^2 + l(l+1)) z^{\alpha+3} + a_0 (6\alpha^2 + 2l(l+1)) z^{\alpha+2} + a_1 (6(\alpha + 1)^2 + 2l(l+1)) z^{\alpha+3} \\
& \quad - a_0 (4\alpha^2 + l(l+1)) z^{\alpha+3} = 0
\end{aligned} \tag{E.18}$$

A partir de la ecuación anterior, obtenemos cinco ecuaciones comparando los coeficientes del otro lado de la ecuación.

$$a_0 \left(\alpha^2 + \frac{\omega^2 r_s^2}{c^2} \right) = 0 \tag{E.19}$$

$$a_1 \left((\alpha + 1)^2 + \frac{\omega^2 r_s^2}{c^2} \right) - a_0 (4\alpha^2 + l(l+1)) = 0 \tag{E.20}$$

$$a_2 \left((\alpha + 2)^2 + \frac{\omega^2 r_s^2}{c^2} \right) - a_1 (4(\alpha + 1)^2 + l(l + 1)) + a_0 (6\alpha^2 + 2l(l + 1)) = 0 \quad (\text{E.21})$$

$$a_3 \left((\alpha + 3)^2 + \frac{\omega^2 r_s^2}{c^2} \right) - a_2 (4(\alpha + 2)^2 + l(l + 1)) + a_1 (6(\alpha + 1)^2 + 2l(l + 1)) - a_0 (4\alpha^2 + l(l + 1)) = 0 \quad (\text{E.22})$$

$$a_n \left((n + \alpha)^2 + \frac{\omega^2 r_s^2}{c^2} \right) - a_{n-1} (4(n - 1 + \alpha)^2 + l(l + 1)) + a_{n-2} (6(n - 2 + \alpha)^2 + 2l(l + 1)) - a_{n-3} (4(n - 3 + \alpha)^2 + l(l + 1)) + a_{n-4} ((n - 4 + \alpha)^2) = 0 \quad (\text{E.23})$$

De la primera ecuación tenemos como opción hacer que $a_0 = 0$, sin embargo, esto haría que la solución sea trivial y evidentemente no queremos soluciones triviales. Consecuentemente, la opción más conveniente es hacer que $\alpha^2 + \frac{\omega^2 r_s^2}{c^2} = 0$, de aquí obtenemos un resultado bastante interesante

$$\alpha = \pm \frac{\omega r_s}{c} \quad (\text{E.24})$$

De aquí podemos inferir que existen dos soluciones para la parte radial y como consecuencia toman forma de un oscilador, como veremos más adelante.

Antes de seguir con el análisis debido a las dos soluciones, vamos a darle un vistazo a los coeficientes a_n que tendrían relevancia más adelante. Donde calculando los primeros tres coeficientes, tendríamos

$$a_1 = a_0 \frac{l(l + 1) - 4 \frac{\omega^2 r_s^2}{c^2}}{1 \pm i 2 \frac{\omega r_s}{c}} \quad (\text{E.25})$$

$$a_2 = \frac{a_1 \left(4(1 \pm i 2 \frac{\omega r_s}{c}) + l(l + 1) - 4 \frac{\omega^2 r_s^2}{c^2} \right) - a_0 \left(2l(l + 1) - 6 \frac{\omega^2 r_s^2}{c^2} \right)}{4 \pm i 4 \frac{\omega r_s}{c}} \quad (\text{E.26})$$

$$a_3 = a_2 \frac{4(4 \pm i2 \frac{\omega r_s}{c}) + l(l+1) - 4 \frac{\omega^2 r_s^2}{c^2}}{9 \pm i6 \frac{\omega r_s}{c}} - a_1 \frac{6(1 \pm i2 \frac{\omega r_s}{c}) + 2l(l+1) - 6 \frac{\omega^2 r_s^2}{c^2}}{9 \pm i6 \frac{\omega r_s}{c}} + a_0 \frac{l(l+1) - 4 \frac{\omega^2 r_s^2}{c^2}}{9 \pm i6 \frac{\omega r_s}{c}} \quad (\text{E.27})$$

No expandimos los coeficientes para ponerlos en términos de a_0 , puesto que haría que la expresión sea tan extensa. Independientemente de eso, se infirió que los coeficientes son polinomios del tipo $a_{nl}(\omega) = P_n \left(l(l+1) - 4 \frac{\omega^2 r_s^2}{c^2} \right)$, adicionando el subíndice l por la dependencia de ese parámetro. Además, no seguimos calculando más términos, puesto que no se puede encontrar una expresión para cada término por lo que se había establecido sobre las funciones hipergeométricas y de Mathieus.

Por otro lado, los coeficientes también tienen dos expresiones distintas de tal manera que, si simbolizamos $a_{nl}^+(\omega)$ y $a_{nl}^-(\omega)$ como coeficientes de las soluciones de $\frac{\omega r_s}{c}$ y $-\frac{\omega r_s}{c}$ respectivamente, entonces podemos relacionarlas por el complejo conjugado debido que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{nl}^\pm(\omega) \in \mathbb{C}$, dando como resultado la siguiente relación

$$(a_{nl}^+(\omega))^* = a_{nl}^-(\omega) \quad (\text{E.28})$$

Otra propiedad que se puede inferir, es cuando introducimos $-\omega$ en cualquiera de los dos coeficientes

$$a_{nl}^+(-\omega) = a_{nl}^-(\omega) \quad (\text{E.29})$$

Ahora vamos a expresar la solución $\zeta(\omega, r)$ en términos de nuestras dos soluciones recordando que $z = 1 - \frac{r_s}{r}$

$$\zeta(\omega, r) = \sum_{n \geq 0} \left[a_{nl}^+(\omega) \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{n+i \frac{\omega r_s}{c}} + a_{nl}^-(\omega) \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{n-i \frac{\omega r_s}{c}} \right] \quad (\text{E.30})$$

Expresando la parte imaginaria como una exponencial compleja y factorizando el término de orden n , obtendríamos

$$\zeta(\omega, r) = \sum_{n \geq 0} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^n \left[a_{nl}^+(\omega) e^{i \frac{\omega r_s}{c} \ln(1 - \frac{r_s}{r})} + a_{nl}^-(\omega) e^{-i \frac{\omega r_s}{c} \ln(1 - \frac{r_s}{r})} \right] \quad (\text{E.31})$$

Para finalizar, ahora aplicamos la transformada de Fourier inversa para volver con nuestra función $R(t, r)$ y, además, mostraremos la gráfica de las funciones $\zeta(\omega, r)$ sin sus exponenciales complejas, solo el polinomio expandido hasta 500 iteraciones.

$$R(t, r) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega t} \sum_{n \geq 0} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^n \left[a_{nl}^+(\omega) e^{i \frac{\omega r_s}{c} \ln(1 - \frac{r_s}{r})} + a_{nl}^-(\omega) e^{-i \frac{\omega r_s}{c} \ln(1 - \frac{r_s}{r})} \right] \quad (\text{E.32})$$

$$R(t, r) = \sum_{n \geq 0} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} \left[a_{nl}^+(\omega) e^{-i\omega \left[t - \frac{r_s}{c} \ln(1 - \frac{r_s}{r})\right]} + a_{nl}^-(\omega) e^{-i\omega \left[t + \frac{r_s}{c} \ln(1 - \frac{r_s}{r})\right]} \right] \quad (\text{E.33})$$

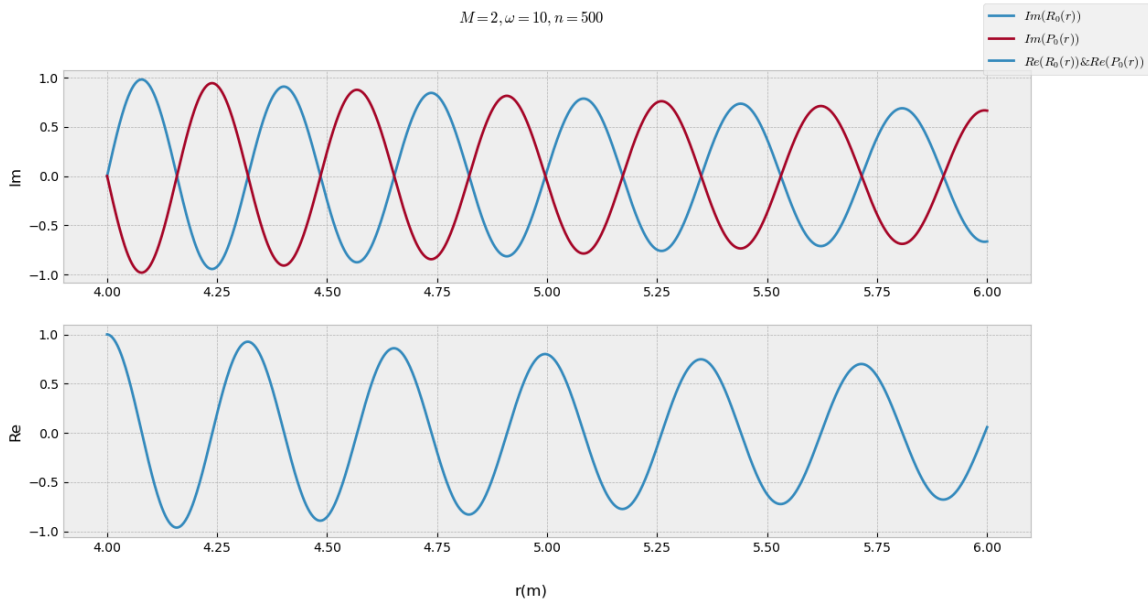


Figura E.1 – Soluciones de la expansión por polinomios para la parte radial sin sus exponentes complejas