



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA
NACIONAL
Educadora de educadores.

**LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA REALISTA COMO CORRIENTE DIDÁCTICA
PARA LA ENSEÑANZA DE LA MULTIPLICACIÓN EN 3º DE PRIMARIA A TRAVÉS
DEL JUEGO.**

**JULIÁN DAVID JIMÉNEZ RAMÍREZ
KELLY LORENA NOGUERA HERNÁNDEZ**

**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE PSICOPEDAGOGÍA
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN INFANTIL
BOGOTÁ D.C., COLOMBIA**

2020



**LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA REALISTA COMO CORRIENTE DIDÁCTICA
PARA LA ENSEÑANZA DE LA MULTIPLICACIÓN EN 3º DE PRIMARIA A TRAVÉS
DEL JUEGO.**

AUTORES

**JULIÁN DAVID JIMÉNEZ RAMÍREZ
KELLY LORENA NOGUERA HERNÁNDEZ**

TRABAJO DE GRADO

**PRESENTADO COMO REQUISITO PARA OPTAR AL TÍTULO DE
LICENCIADOS EN EDUCACIÓN INFANTIL**

TUTORA:

Mtra. CRISTINA CRUZ FONSECA

**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE PSICOPEDAGOGÍA
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN INFANTIL
BOGOTÁ D.C., COLOMBIA**

2020

Tabla de contenido

Introducción	1
1. MARCO CONTEXTUAL	3
1.1. Contextualización	3
1.5. Caracterización.....	16
1.6. Marco Legal.....	17
2. SITUACIÓN PROBLÉMICA	23
2.1. Preguntas problema	25
2.2 Estado del arte – Antecedentes	25
2.3. Justificación	31
3. MARCO CONCEPTUAL.....	33
3.1. Estructura multiplicativa.....	34
3.2. Marco didáctico	54
3.3. Juego como estrategia de implementación.....	59
4. PROPUESTA PEDAGÓGICA	65
4.2. Objetivo general	65
4.2.1. Objetivos específicos.....	66
4.3. Marco metodológico de la investigación	67
5. DESARROLLO Y ANÁLISIS DE LA PROPUESTA PEDAGÓGICA	81
5.1. Actividades de observación.....	81
5.2. Actividades de seguimiento.....	98
5.3. Sobre la propuesta.	122
CONCLUSIONES	124
Referencias	127

Lista de tablas

TABLA 1. PERFILES INSTITUCIONALES.....	6
TABLA 2. CICLOS	8
TABLA 3. TIPOS DE EVALUACIÓN.....	9
TABLA 4. AGENTES DE EVALUACIÓN	10
TABLA 5. ASPECTOS PARA LA PROMOCIÓN.....	10
TABLA 6. CONCEPTOS DE LA EVALUACIÓN.....	11
TABLA 7. CRITERIOS DE PROMOCIÓN NEE.....	12
TABLA 8. CONCEPCIÓN DE APRENDIZAJE.....	13
TABLA 9. MALLA DE MATEMÁTICAS.....	15
TABLA 10. PROBLEMAS DE DIVISIÓN.....	49
TABLA 11. MÉTODOS DE INTERPRETACIÓN.....	69
TABLA 12. CATEGORÍAS Y SUBCATEGORÍAS DE ANÁLISIS.....	71
TABLA 13. CRONOLOGÍA DE LA PROPUESTA, ACTIVIDADES DE OBSERVACIÓN.....	76
TABLA 14. CRONOLOGÍA DE LA PROPUESTA, ACTIVIDADES DE SEGUIMIENTO.....	77
TABLA 15. ESTRUCTURA DE LA TABLA DE ANÁLISIS.....	79
TABLA 16. TABLA DE ANÁLISIS.....	81

Lista de figuras

FIGURA 1. PATIO DE PRIMARIA.....	3
FIGURA 2. MAPA DEL BARRIO.....	4
FIGURA 3. CLASIFICACIÓN POR SEXO.....	16
FIGURA 4. DIAGRAMA DEL MARCO CONCEPTUAL.....	33
FIGURA 5. RELACIONES ENTRE LAS OPERACIONES.....	34
FIGURA 6. EJEMPLO DE PROBLEMA DE COMPARACIÓN Y RAZÓN.....	37
FIGURA 7. PROBLEMAS SIMPLES Y COMPUESTOS ELABORACIÓN PROPIA.....	38
FIGURA 8. PARTES DEL ALGORITMO DE MULTIPLICACIÓN.....	39
FIGURA 9. PASOS PARA SOLUCIONAR EL ALGORITMO DE LA MULTIPLICACIÓN.....	39
FIGURA 10. ALGORITMO DE LA MULTIPLICACIÓN.....	40
FIGURA 11. TÉCNICA DE LOS RECORTADOS.....	40
FIGURA 12. EVOLUCIÓN DE LA TÉCNICA DEL RECORTADO.....	41
FIGURA 13. TÉCNICA DE LA CELOSÍA.....	41
FIGURA 14. ESTRATEGIAS PARA LA MULTIPLICACIÓN.....	42
FIGURA 15. REPRESENTACIONES EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS.....	43
FIGURA 16. MODELOS DE REPRESENTACIÓN.....	44
FIGURA 17. TABLA DE MULTIPLICAR.....	47
FIGURA 18. DIVISIÓN.....	47
FIGURA 19. ALGORITMO DE LA DIVISIÓN.....	48
FIGURA 20. SOLUCIÓN DEL ALGORITMO DE LA DIVISIÓN.....	48
FIGURA 21. TABLA PARA LA DIVISIÓN.....	49
FIGURA 22. MODELO FUNCIONAL.....	50
FIGURA 23. NIVELES DE MATEMATIZACIÓN.....	56
FIGURA 24. TIPOS DE JUEGO.....	61
FIGURA 25. DIAGRAMA DE LAS CATEGORÍAS.....	70

Introducción

Este trabajo surgió de una problemática observada en el ejercicio de práctica de maestros en formación, allí se hizo visible que en el Colegio Ciudadela Educativa de Bosa, algunos estudiantes de segundo grado no estaban comprendiendo el uso de la multiplicación y por ende no lograban considerar su función, importancia y tampoco la manera adecuada de operar con su algoritmo usual, debido a que están habituados a memorizar las tablas de multiplicar y a resolver problemas de tipo multiplicativo con ayuda de la estructura aditiva (sumas reiteradas) sin trascender a los otros tipos de problemas de multiplicación.

Al observar la metodología del profesor titular, para enseñar este tema, se evidenció que existe una relevancia en presentar exámenes en clase, en aras de mecanizar la solución de problemas de tipo multiplicativo únicamente con el algoritmo usual, de la mano de las tablas de multiplicar como ya se mencionó. Además de esto, no se daban dinámicas de retroalimentación de lo que no era entendido por los estudiantes, por tanto, no logran ver que operar con multiplicación va más allá de saberse las tablas de multiplicar o sumar reiteradamente.

Lo anterior despertó el interés de indagar sobre una didáctica de las matemáticas la cual brinde elementos metodológicos, pero también teóricos de cómo abordar las matemáticas, en este caso de la estructura multiplicativa, enfatizando en la multiplicación y todo lo que la compone, para poder hacer el seguimiento y desarrollo de la propuesta; luego de dicha indagación se encontró la corriente de la Educación Matemática Realista, la cual plantea diferentes estrategias con los estudiantes haciendo relación con su realidad próxima para generar mayor interés y lograr una participación activa en el aprendizaje por parte de los estudiantes. Con la intención también de que esta propuesta logre apoyar la formación del maestro titular en esta didáctica, para así trabajar de manera conjunta y que forme parte de un proceso que busca una continuidad y no solo el logro de unos objetivos.

En consecuencia a lo mencionado, se elabora este informe investigativo, el cual se estructura en 5 capítulos: en el primero de estos se expone el marco contextual en el cual, se presenta el escenario y la población con la que se lleva a cabo la propuesta

pedagógica, además también se presentan las políticas educativas, las cuales rigen la educación, puntualmente, la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el país.

En el segundo capítulo se muestra el planteamiento del problema de investigación, la pregunta motivadora, los antecedentes revisados que ayudaron a encausar esta investigación y por último la justificación.

En el tercer capítulo se explicita el lugar de enunciación conceptual del estudio en términos de los enunciados que componen la estructura multiplicativa, así mismo se expone el enfoque didáctico, el cual ya se presentó de manera breve al inicio de esta introducción y por último este capítulo cierra con la conceptualización sobre el juego que fue útil para llevar a cabo el desarrollo de las actividades.

En el cuarto capítulo se presenta la propuesta pedagógica a desarrollar, los objetivos que se buscan alcanzar, se encuentra además el marco metodológico a través de la exposición del diseño de la investigación, así como la ruta metodológica y las fases de investigación.

En el último capítulo se hace el análisis didáctico de las actividades y los resultados.

1. MARCO CONTEXTUAL

1.1. Contextualización

El Colegio Ciudadela Educativa de Bosa (CEB en adelante) está ubicado en la localidad de Bosa, en el barrio Porvenir, fue inaugurado en el año 2008. En este colegio conviven aproximadamente 6800 personas en las dos jornadas, entre estudiantes y docentes provenientes de diferentes sectores de la localidad. De carácter mixto, que alberga población preescolar (ciclo 1), Transición (ciclo 2 hasta segundo) primaria (ciclo 3, de tercero a sexto) y secundaria (ciclo 4 de séptimo a noveno) y también Educación media (ciclo 5 corresponde a décimo y once) en jornada mañana y jornada tarde. (CEB, 2018, p. 5)



Figura 1. Patio de Primaria.

Fuente (tomada de la web)

La población de este colegio es migrante de otras zonas de la ciudad y del país, dado a que a su alrededor se construyeron viviendas de interés social y viviendas de interés prioritario que tienen aproximadamente 10 años de existencia, en donde vive población de estratos 1 y 2, la mayoría, el 75%, pertenece al estrato 2. Dentro de la población atendida, se encuentran aproximadamente el 0,56% de estudiantes que tienen una necesidad educativa especial permanente, siendo el diagnóstico más frecuente. (2018, p. 6)

En la institución se aprecian planes de movilidad para los estudiantes, como “Al colegio en bici” que “es una iniciativa de movilidad escolar sostenible en la que trabajan de la mano las secretarías de Educación y Movilidad” (Alcaldía Mayor de Bogotá, 2018, párr. 3) allí los padres y madres de los estudiantes pueden contar con diferentes rutas y acompañamiento de profesionales para una seguridad y tranquilidad al momento de dirigirse de la casa al colegio y de vuelta.

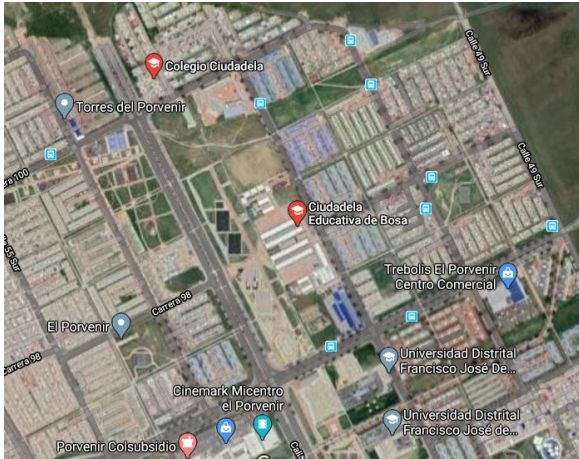


Figura 2. Mapa del barrio.

Fuente: tomada de Goole Mapas

Cerca al colegio se encuentra un Centro de Desarrollo Comunitario (CDC) que brinda capacitación en diferentes áreas laborales y artísticas, una sede de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas con espacios de enseñanza en distintos programas académicos y con una facultad especializada en Ciencias de la Salud y un parque metropolitano para la recreación.

En el colegio CEB, existen varias formas de ver al estudiante desde diversos ámbitos, como son el social, el académico, el político y desde el plano emocional. Para intentar definir estas miradas se hizo una lectura de los diferentes documentos oficiales de la institución entre estos están: el Manual de Convivencia (2018), Sistema Institucional de Evaluación (2018-2) y Malla Curricular de Matemáticas Institucional – JM 2019 (2019).

1.2. Manual de Convivencia

Para empezar, hay que entender que dentro de la misión del colegio está el formar a sus estudiantes de manera integral de inicio a fin, con la intención de que puedan hacer posible la realización de su proyecto de vida, para ello provee a cada estudiante de las herramientas suficientes durante su formación, asimismo, busca que sus estudiantes tengan conciencia de la importancia de la educación:

Como elemento que posibilita mejorar su calidad de vida mediante la apropiación de herramientas y competencias propias de la ciencia, el arte y la tecnología, para proyectarse en la sociedad como un sujeto responsable y transformador de la problemática social, económica, política y ambiental (CEB, 2018, p. 9)

Es por esto que la institución plantea para el año 2020 que sus estudiantes estén formados en un sentido axiológico que le permita proyectarse de esta forma en la sociedad y asumir un compromiso social con el entorno.

Seguidamente, dentro de los principios de la institución está uno de los que más llaman la atención con base en la finalidad del proyecto pedagógico mismo y es el Principio Afectivo, el cual busca:

Estructurar el proceso pedagógico sobre la base de la unidad, de la relación que existe entre las condiciones humanas: la posibilidad de conocer el mundo que le rodea y su propio mundo y al mismo tiempo, la posibilidad de sentir, de actuar, de ser afectado por ese mundo. (2018, p. 10)

Y es que se ha dado a conocer la importancia de las emociones en el proceso formativo, en especial, en el área de matemáticas, siendo una de las disciplinas escolares que generan mayor presión y estrés en los estudiantes, algunos experimentan sentimiento de fracaso por no poder aprender y utilizar la matemática formal (algoritmos, tablas de multiplicar, entre otros) por mostrarse tan abstracta y descontextualizada MEN (1998, pp. 12-24), lo afirmado corresponde a las observaciones de los maestros en formación hechas en la práctica pedagógica 2018-2019 en varias clases, donde lo más común es que los maestros enseñen los diferentes conceptos y procedimientos matemáticos para que sean memorizados y mecanizados, dejando de lado las ideas previas de los estudiantes, lo que ellos viven, lo que pueden construir por sí solos y las matemáticas presente en sus contextos más cercanos, dificultándoles por ende su comprensión.

Igualmente, en el proceso no se enseña a enseñar, donde los mismos compañeros sean quienes enseñen a los demás, donde potencien –en palabras de Vygotsky (1998, p. 133) citado en Rodríguez y Larios (s.f., pp. 101-104) su zona de desarrollo próximo, los estudiantes aprenden lo que sus compañeros ya han interiorizado y pueden dialogarlo de una forma más cercana, con los términos que más empleen y con ejemplos traídos de su contexto.

Siguiendo con lo establecido en el Manual de Convivencia, se definen los perfiles institucionales del rector, los directivos docentes, docentes, estudiantes, padres de familia, administrativos y personal de servicios generales. Dentro de estos los que interesan son docente y estudiante, los cuales son vistos así:

Tabla 1. Perfiles institucionales.

Perfiles institucionales	
Estudiantes	Docentes
<p><i>Gestor de su propio proyecto de vida, capaz de involucrar en él los aspectos (énfasis) ético e intelectual consolidando su identidad, estima y su integración pertinente a la sociedad.</i></p> <p><i>Capaz de emprender estudios superiores en correspondencia con su proyecto de vida, que le permita incursionar en el medio laboral, investigativo y productivo del país, asumiendo retos para la transformación de la sociedad.</i></p> <p><i>Que se valore a sí mismo, que propenda por su calidad de vida y que a través de sus acciones haga evidente la práctica de los valores institucionales abierto al dialogo, que sepa escuchar a los demás y que aporte sus propias ideas, que sea tolerante consigo mismo y con los demás.</i></p> <p><i>Un individuo autónomo, capaz de autorregularse, autogobernarse y con la capacidad de tomar decisiones que contribuyan a la construcción de su proyecto de vida y a la vida en comunidad.</i></p> <p><i>Sentido de pertenencia hacia su institución, demostrándolo con el auto cuidado, el cuidado del otro y de la institución</i></p> <p><i>Líder positivo con un pensamiento crítico, transformador y asertivo en la toma de decisiones.” (2018, pág. 12)</i></p>	<p><i>Un líder con idoneidad profesional, visionario, comprometido, recursivo y colaborador, con un alto sentido de Pertenencia por a la institución, pendiente de su actualización pedagógica, que cumple con sus deberes responsablemente y que propende por la unidad de criterios y el trabajo en equipo.</i></p> <p><i>Apasionado por su profesión.” (2018, pág. 11)</i></p>

Elaboración propia. Fuente: (CEB, 2018, p. 17)

Se aprecia que el rol del docente es de una persona activa y que siempre busca innovar en sus métodos de enseñanza, está comprometida con su quehacer y es definida como integra.

Por otra parte, el perfil del estudiante, se considera como alguien que se ha de formar para unos fines sociales, por ser uno más en la sociedad donde importa el proyecto de vida que se piensa para sí mismo, porque de este depende su inmersión en las dinámicas mismas, teniendo coherencia en lo que siente, piensa y actúa, de allí la importancia de su papel con los demás dentro de su comunidad, pensando su formación en principios de autonomía, estudio permanente y capacidad crítica.

Para finalizar con el Manual de Convivencia, es imperante hablar de sus enfoques, dentro de estos se encuentra el enfoque de derechos humanos, el cual pretende formar

en el ejercicio de los mismos, cada persona desarrolla una capacidad crítica para así poder desenvolverse en la sociedad y allí interactuar junto con los demás, esto exige un cambio en el ejercicio de la educación impulsando el desarrollo de las capacidades de:

Ser, saber y saber hacer en contexto, de movilizar actitudes, habilidades y conocimientos con la realización de acciones, de manera flexible, para que las personas en sus diversos contextos multiétnicos y pluriculturales de interacción, puedan participar activa y responsablemente en decisiones colectivas de manera democrática, resolver conflictos de manera pacífica y respetar la diversidad humana. (2018, p. 19)

Asimismo, se habla del enfoque diferencial, el cual atiende la diversidad presente en la idiosincrasia de cada una de las personas que componen el colegio, es por ello que “abarca la diversidad en la comunidad educativa, (...) y la diferencia, estableciendo enfoques diferenciales por ciclo de vida, condición y género, elementos que no pueden ser ajenos al momento de construir la convivencia al interior de nuestra institución.” (2018, p. 19)

1.3. Sistema Institucional de Evaluación

El Sistema Institucional de Evaluación (SIE en adelante) se consolida como el documento base del Proyecto Educativo Institucional (PEI en adelante) y a la vez hace parte integral de éste. Demanda que se garantice una educación de calidad para todos los estudiantes en pro de su incorporación a la sociedad, para ello han de asumir “una identidad filosófica y pedagógica, y alcance las metas y objetivos educativos, contando con un [SIE] que sea conocido, aplicado y respetado por todos sus miembros.” CEB (2018 - 2, p. 1)

Es por ello que el SIE se asienta sobre unas bases teóricas, legales, políticas y educativas desde las cuales le apuesta a la educación, estas bases comprenden temas de la evaluación, participación y promoción de los estudiantes y demás participantes del proceso educativo de la institución CEB.

Para hablar sobre los temas antes expuestos hay que mencionar las diferentes concepciones que circundan en la institución en clave de comprender la mirada que se

tiene y la propuesta educativa a la que se apuesta, por ello entre los conceptos principales se encuentra:

Concepción de desarrollo humano: en específico trata sobre las posibilidades con las que cuenta cada persona, aquí están sus capacidades, habilidades las cuales se han de potenciar en múltiples dimensiones como son “cognoscitivas, afectivas, sociales, estéticas, morales y espirituales” (2018 - 2, p. 2)

Concepción de estudiante: considerado como “persona crítica autónoma, responsable y comprometida con la construcción de su proyecto de vida y que procura el desarrollo de una sociedad más justa, desde la perspectiva de una ética consciente de los cambios en su entorno cercano y el contexto global.” (2018 - 2, pp. 2,3)

Concepción de aprendizaje: desde una perspectiva constructivista, considera al aprendizaje como:

[E]s el resultado del proceso histórico y social donde el lenguaje desempeña un papel fundamental, pues el conocimiento surge del proceso de interacción entre el estudiante y su entorno social, donde tiene la posibilidad de asimilar, comparar, ensamblar, interpretar y encontrar significados a lo largo de su vida ajustando su nivel de desarrollo cognitivo. (2018 - 2, p. 3)

Concepción de ciclo educativo: es la estrategia que organiza el tiempo, los estudiantes y los procesos educativos, de forma pertinente en busca de facilitar el aprendizaje.

Se puede apreciar en la siguiente tabla:

Tabla 2. Ciclos

CICLOS	PRIMERO	SEGUNDO	TERCERO	CUARTO	QUINTO
Ejes de Desarrollo	Estimulación y Exploración	Descubrimiento y Experiencia	Indagación y Experimentación	Vocación y Exploración profesional	Investigación y desarrollo de la cultura para el trabajo
Impronta del Ciclo	Infancias y construcción de los sujetos	Cuerpo, creatividad y cultura	Interacción social y construcción de mundos posibles	Proyecto de Vida	Proyecto profesional y laboral
Grados	Preescolar, 1º y 2º	3º y 4º	5º, 6º y 7º	8º y 9º	10º y 11º
Edades	5 a 8 años	8 a 10 años	10 a 12 años	12 a 15 años	15 a 17 años

Fuente: Tomado de Rincón (2010, p. 97)

Concepción de periodo académico: es un espacio de tiempo escolar en donde se desarrollan las estrategias de enseñanza, aprendizaje y evaluación. Aquí se llevan a cabo las acciones pedagógicas donde se permite evidenciar los avances de los aprendizajes de cada estudiante. El año se divide en tres periodos académicos, al finalizar cada uno se hace entrega de boletines y al final del tercer se informa sobre la promoción al siguiente ciclo o grado escolar.

Concepción de evaluación: concebida desde lo cuantitativo, asignación de números, y desde lo cualitativo, procesos de los estudiantes en cuanto a fortalezas y aspectos a mejorar. De allí surgen otros tipos de evaluación:

Tabla 3. Tipos de evaluación.

Tipos de evaluación		
Diagnóstica	Formativa	Sumativa
Hace una valoración del estudiante, reconoce fortalezas y debilidades para iniciar un proceso sistemático y permanente en pro de construir aprendizaje.	Se da durante el proceso educativo, permite reconocer el progreso de cada estudiante y las dificultades que presenta, además de herramientas reflexivas para sí, con base en las realimentaciones dadas por el profesor.	Es la que se presenta al final del programa o contenido temático, recoge lo anterior presentado y se muestra de forma más técnica, al recoger las calificaciones de cada estudiante.

Elaboración propia. Fuente: CEB (2018-2)

Pero, asimismo, se pretende hacer partícipe al estudiante de su proceso y de sus compañeros, por ello busca que el estudiante se evalúe y evalúe, durante cualquier momento del proceso, para ello plantea los agentes de la evaluación.

Tabla 4. Agentes de evaluación

Agentes de evaluación para los estudiantes del CEB		
Autoevaluación	Coevaluación	Heteroevaluación
El estudiante reflexiona sobre su proceso, las fortalezas y debilidades, permitiendo brindar herramientas que busquen ser potenciadas o superadas. Lo anterior en un constante <i>“desarrollo de la personalidad y la formación de valores como la responsabilidad y la autonomía.”</i> (CEB, 2018 - 2, pág. 4)	Se da entre pares en busca de fortalecer los procesos de enseñanza – aprendizaje para potenciar las fortalezas y superar las dificultades. Permite formar sujetos críticos y autónomos.	La realiza el docente sobre el proceso de cada estudiante y sus avances, da cuenta de <i>“cómo aprenden, qué aprenden y qué estrategias contribuyen en dicho proceso.”</i> (2018 - 2, pág. 5)

Elaboración propia. Fuente CEB (2018-2)

Concepción de promoción: entiende el paso de un nivel académico a otro superior, se da para comprender el proceso de cada estudiante, y según el MEN y el Decreto 1290 de 2009 debe aportar al proceso de evaluación del aprendizaje lo siguiente:

Tabla 5. Aspectos para la promoción.

<i>“1. Identificar las características personales, intereses, ritmos de desarrollo y estilos de aprendizaje de los estudiantes para valorar sus avances</i>
<i>2. Proporcionar información básica para consolidar o reorientar los procesos educativos relacionados con el desarrollo integral del y la estudiante.</i>
<i>3. Suministrar información que permita implementar estrategias pedagógicas para apoyar a los estudiantes que presenten debilidades y/o desempeños superiores en su proceso formativo.</i>
<i>4. Determinar la promoción de estudiantes.</i>
<i>5. Aportar información para el ajuste e implementación del plan de mejoramiento institucional.”</i> (2018 - 2, pág. 5)

Elaboración propia. Fuente CEB (2018-2)

Dentro de la evaluación se dan otros conceptos que rigen durante todo el proceso educativo, estos son importantes para entender el trabajo educativo.

Tabla 6. Conceptos de la evaluación.

Competencia: “son habilidades cognitivas, actividades de valores, destrezas motoras e informaciones que hacen posibles llevar a cabo y de manera asertiva cualquier actividad” (2018 - 2, pág. 6)
Desempeño: es el proceso que le permite al estudiante aplicar lo que sabe a la resolución de los problemas presentados en clase y en su contexto.
Recomendación: es realizada por el maestro, se trata de una observación que va dirigida a mejorar el proceso de aprendizaje y competencias ciudadanas.
Evaluación trimestral de desempeños: prueba escrita o virtual que presentan los estudiantes al final de cada trimestre, que dan cuenta del proceso de aprendizaje y su preparación para pruebas estandarizadas a nivel nacional.
Actividades de nivelación: se presenta para superar las dificultades, y así alcanzar los desempeños estipulados, se presenta al final de cada trimestre y del año escolar.
Fortaleza: cualidades de los estudiantes, son fundamentales para el logro de objetivos con base en la asimilación de conocimientos, desarrollo de desempeños y mejora de comportamientos.
Dificultad: a nivel procedimental, actitudinal y cognitivo se da al no lograr el cumplimiento y desarrollo de los desempeños.

Elaboración propia. Fuente CEB (2018-2)

Siguiendo con lo estipulado en el SIE, es inherente hablar sobre los estudiantes con otro tipo de capacidades, en el curso se ha hablado del niño SV, de quien no se conoce su diagnóstico, pero con quien se ha compartido la mayoría de experiencias y ha demostrado unas potencialidades que muchas veces se desaprovechan en el aula, debido a que se le da un trato con base en sus limitaciones, frente a esto Armstrong (2010) afirma que “a ojos de muchos educadores y de la sociedad, es preferible que los estudiantes discapacitados actúen del mismo modo que los no discapacitados” (p. 189) a causa del recurrente discurso de los maestros que tratan de referirse a sus estudiantes neurodiversos y las capacidades que no tienen en comparación a los demás estudiantes apartando la vista de todo lo que estos estudiantes pueden demostrar.

Frente a esto último y con base en las observaciones realizadas por los maestros en formación se encontró que a pesar de que el estudiante SV no tiene las mismas facultades para avanzar como los demás estudiantes en el área de matemáticas, él demuestra buenas relaciones interpersonales, para entenderse con sus demás compañeros, ser empático, creativo y buen artista en la creación de dibujos y escritos.

Estudiantes con necesidades educativas especiales: en este apartado se habla desde las políticas de inclusión (1994), política pública de distrital de discapacidad (2007-2020), educación inclusiva (decreto 366 de 2009), gestión de cobertura (Resolución 1203 de 2015), se entiende por inclusión escolar al proceso que apuesta a un enfoque diferencial donde se reconozca a niños, niñas y adolescentes en condición de discapacidad y/o talentos excepcionales, para que se respeten sus ritmos de aprendizaje y se potencien sus capacidades, aquí se entiende la diversidad como un plus para enriquecer el proceso educativo.

En el SIE se proponen los siguientes principios:

1. *Reconocimiento del potencial de aprendizaje.*
2. *Reconocimiento de la diversidad.*
3. *Equidad, dar a cada quien lo que necesita.*
4. *Igualdad de oportunidades.*
5. *Participación social.* (2018 - 2, p. 8)

En el capítulo se reitera que el proceso con cada estudiante de NEE se hace con base en un enfoque cualitativo, donde se potencien sus capacidades, y estas se cualifiquen en la evaluación, y se evalúen más los procesos que los resultados.

Más adelante se habla sobre los criterios de promoción, específicamente para los estudiantes con NEE, allí se explica que para promover a un estudiante se mira su proceso, su evaluación y observación con base en los siguientes criterios:

Tabla 7. Criterios de promoción NEE.

Flexibilización curricular.
Establecimiento de logros mínimos según estilos de aprendizaje.
Adaptaciones didácticas y metodológicas de las actividades escolares.
Evaluaciones diferenciadas.
Elaboración de registros y formatos de seguimiento con base en la metodología, contenidos y evaluación sugerida.
Modificación de los boletines según la flexibilización curricular.
Cumplir con lo estipulado en el SIE.
Generación de estrategias según el proceso de cada estudiante.
Cursar máximos dos años el mismo nivel. (2018 - 2, págs. 11-12)

Elaboración propia. Fuente CEB (2018-2)

Concepción de aprendizaje: en el SIE existe una concepción sobre el aprendizaje, esta se ve expresada en la siguiente tabla.

Tabla 8. Concepción de aprendizaje

TIPO DE APRENDIZAJE	NIVEL DE DESEMPEÑO
Saber Saber: Valorar el nivel de alcance de las metas de comprensión de acuerdo con los desempeños cognitivos.	Cognitivo: Procesos cognitivos Contenidos conceptuales Estrategias cognitivas
Saber Ser: Valorar el nivel de alcance de las metas de comprensión de acuerdo con los desempeños actitudinales y valorativos.	Actitudinal: Procesos socio afectivos Contenidos actitudinales Estrategias motivacionales Convivencia armónica
Saber Hacer: Valorar el nivel de alcance de las metas de comprensión de acuerdo con los desempeños procedimentales.	Procedimental: Procesos psicomotores Contenidos procedimentales Estrategias metodológicas

Fuente: tomado de CEB (2018-2, p. 12)

Para la valoración cuantitativa a nivel institucional, se tiene en cuenta el sistema y escala nacional, que cuenta con desempeños y escala cuantitativa así: desempeño superior (4.6 a 5.0), desempeño alto (4.0 a 4.5), desempeño básico (3.0 a 3.9) y desempeño bajo (1.0 a 2.9)

Seguido, plantea los criterios para asignar estas calificaciones de acuerdo a puntualidad, fraude y entrega a final de cada periodo académico. También se estipula la evaluación en preescolar (que es la misma para los NEE).

Para finalizar, en el apartado se mencionan herramientas metodológicas que también han sido implementadas en el desarrollo de la propuesta pedagógica como son: las disposiciones individuales y grupales de los estudiantes; las fuentes de información como observaciones, diseño y ejecución de proyectos, productos escritos (entre estos diarios de campo, rejillas de observación y seguimiento)

1.4. Malla Curricular de Matemáticas Institucional – JM 2019

Se describe a continuación la Malla Curricular de Matemáticas proporcionada por el director de curso de 305. En esta se estipula lo siguiente:

Existe un **eje de desarrollo socio afectivo** en el cual el estudiante identifica “emociones primarias y secundarias, forma relaciones de amistad identificando intereses y necesidades, analiza de forma básica aspectos de un problema y planea posibles soluciones acordes al contexto” Marín (2019, p. 1)

De igual modo se plantea una **impronta de ciclo** que es Descubrimiento y Experiencia, que de pronto atiende a la metodología de la propuesta, donde los niños y las niñas construyen su conocimiento a partir de la capacidad de descubrimiento y de la posibilidad de experimentar.

Seguido a esto se propone una **base común de aprendizaje** desarrollada a partir del reconocimiento de identidad, apropiación de principios sociales, reflexión y sentido de existencia, interpersonalidad, autorregulación y gestión de proyectos. Después el **perfil del estudiante**, quien será capaz de organizar sus ideas a fin de “resolver problemas matemáticos en diversos contextos; explicando desde sus conocimientos los pasos que se deben seguir o justificación para dar solución.” (2019, p. 1) Igualmente se pone énfasis la escucha y el respeto al otro.

Antes de ahondar en los contenidos se precisan las **competencias para fomentar y potenciar dentro del área** que son: saber-saber (competencias básicas): cultural y artística, Saber ser (competencias ciudadanas), saber hacer (competencias laborales y/o empresariales).

En los contenidos del trimestre 2 se encuentra el pensamiento numérico con relación a la multiplicación, allí se estipulan los siguientes **desempeños de comprensión** (ver tabla 9)

Finalmente traza los contenidos de pensamiento aleatorio, pensamiento espacial, pensamiento métrico, y sus correspondientes desempeños.

Tabla 9. Malla de matemáticas.

Desempeños de comprensión		
Enfoque cognitivo	Enfoque procedimental	Enfoque actitudinal
<p><i>“Escribe la adición de sumandos iguales en forma de multiplicación. Determina los múltiplos de un número. Realiza multiplicaciones hasta por tres cifras. Reparte cantidades en partes iguales. Reconoce la relación entre multiplicación y división. Realiza la prueba de la división.”</i> (Marín , 2019, pág. 3)</p>	<p><i>“Aplica las propiedades de la multiplicación. Aplica el algoritmo de la división. Plantea y resuelve situaciones multiplicativas (multiplicación y división). Resuelve situaciones problemáticas en las cuales se aplican varias operaciones.”</i> (2019, pág. 3)</p>	<p><i>“Respeto el uso de la palabra durante clase. Realiza las actividades propuestas para la clase.”</i> (2019, págs. 3-4)</p>
valoración continua (evaluación)		
<p><i>“Evaluación de adición de sumandos iguales en forma de multiplicación. Evaluación de multiplicaciones hasta por tres cifras. Evaluación de múltiplos de un número. Evaluación de repartición de cantidades en partes iguales. Evaluación de aplicación del algoritmo de la división. Evaluación para determinar de divisores de un número.”</i> (2019, pág. 3)</p>		
Contenidos de pensamiento numérico		
Multiplicación	División	
<p><i>“Términos de la multiplicación. Propiedades de la multiplicación. Multiplicación por una, dos, tres cifras. Múltiplos de un número. Multiplicación por 10, 100 y 1000. Multiplicación abreviada.”</i> (2019, pág. 3)</p>	<p><i>“Relación entre reparto y división. Relación entre multiplicación y división. Relación entre sustracción y división. División exacta. Términos de la división. División inexacta. Divisores de un número. Criterios de divisibilidad. Números primos. Divisiones con dividendo de tres cifras. Prueba de la división. La mitad, la tercera parte y la cuarta parte.”</i> (2019, pág. 4)</p>	

Elaboración propia. Fuente Marín (2018, p. 3)

Para concluir, a la luz de los documentos analizados se puede apreciar que están regidos bajo los mismos postulados de los Lineamientos curriculares de Matemáticas (1998) y los Derechos Básicos de Aprendizaje (2017) los cuales esbozan el rumbo del proceso educativo (enseñanza - aprendizaje) en el aula de las instituciones educativas,

pero aun así se debe pensar en trascender estos documentos, ya que son solo una base, y el papel del maestro es resignificar lo que allí plantean de acuerdo al contexto de los estudiantes, sus necesidades, gustos e intereses, además proponer otras formas de aprender, no solamente a través de enseñanza directa, sino planear y ejecutar actividades más acordes a la realidad de cada uno y una de los estudiantes, teniendo en cuenta siempre sus intereses.

1.5. Caracterización

Los estudiantes del grado 305 se caracterizan por ser muy propositivos en el momento de trabajar en clase o en las diferentes actividades extraescolares, al punto que manifiestan lo que les gusta, cuáles son sus intereses y estos se han aplicado para la

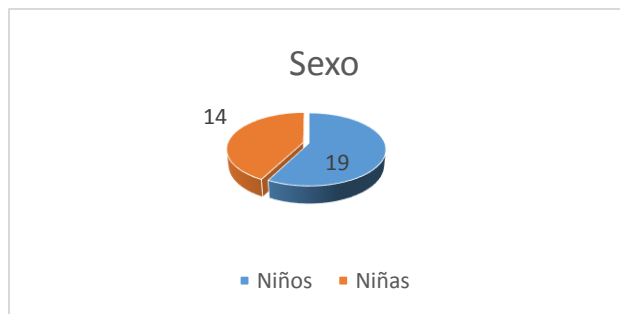


Figura 3. Clasificación por sexo.

Elaboración propia

formulación de nuevas tareas. La generalidad de estudiantes se encuentra entre los 8 y 10 años, algunos repitentes son de 11 años, entre lo que fue segundo (2018) y tercero (2019), la población se divide así: El 58 % de estudiantes son niños, entre ellos se encuentra el niño SV de NEE. Los estudiantes del grupo han demostrado tener gusto por las matemáticas, esto se evidencia en las olimpiadas matemáticas, en las actividades del proyecto pedagógico y en las clases, pero no solo en estos ámbitos, sino que en las observaciones realizadas durante los descansos se identifican juegos que emplean matemáticas, ya sea para contar objetos, sumar puntos, repartir cantidades, entre otros. Igualmente, algunos muestran cualidades artísticas con el dibujo, el canto y el baile, siendo partícipes de las izadas de bandera con presentaciones al público.

Diferentes dinámicas identificadas permiten entender los comportamientos de los estudiantes, como:

- Algunos estudiantes se reúnen por grupos casi siempre con los mismos integrantes.

- No existen rivalidades o disputas.
- Algunos estudiantes prefieren de la compañía del maestro en formación durante los descansos, ya que no tienen suficientes amigos.
 - Entre los estudiantes existen juegos de competencia que son cotidianos: llegar de primeras al salón; llegar de primeras a su pupitre y decir “primis, segus, tercis” en forma de ordinal; alterar el orden de las filas por estaturas; el “rompe huesos” que se juega de a dos, ubicados de perfil (hombro con hombro) y hacen “piedra, papel o tijera” el que pierde debe estirarse abriendo los pies según lo que el otro haya avanzado intercalando sus pasos; y participar con el maestro en formación del juego “el rey de tangamandapio” un juego de competir por encontrar objetos.
 - Las niñas a diferencia de los niños no practican tanto los juegos de balón (o en algunos casos con botellas) sino más que todo juegos de perseguir, de esconderse, entre otros.
 - Son anecdóticos, cuentan chistes, hacen adivinanzas, traen a colación lo que ven en diferentes medios audiovisuales.
 - Se identifican con su grupo cuando interactúan con niños y niñas de otros cursos, ya sea en los descansos o en los juegos intercurso.

Todo lo anterior es observable en los tiempos libres, durante las idas al restaurante y a la salida del colegio, permite entender que los estudiantes reconocen en el juego un medio de interacción con el otro, para probar sus capacidades, sus destrezas, reafirmar su confianza entre ellos, compartir momentos libres y vivir experiencias placenteras de diversión y emoción.

1.6. Marco Legal

Los lineamientos curriculares de matemáticas (1998) del Ministerio de Educación Nacional (MEN en adelante) se crean por la necesidad de orientar el área de matemáticas en el país, con la intención de “ser posibilitador, promotor y orientador de los procesos curriculares que viven las instituciones” (MEN, 1998, p. 4), siendo esta una propuesta que queda a consideración de quienes enseñan matemáticas, y es un texto

sujeto a críticas constructivas y a mejoramiento, para garantizar la calidad de la educación matemática.

Para la estructura curricular los lineamientos plantean elementos tales como los procesos que los niños siguen al aprender y la relación de las matemáticas con la cultura, para que estas contribuyan al desarrollo integral de los estudiantes; puesto que los lineamientos toman postura frente a que la educación matemática debe “propiciar aprendizajes que vayan más allá del aprendizaje de conceptos y procedimientos, sino en procesos de pensamiento ampliamente aplicables y útiles para aprender cómo aprender” (p. 18). Este documento pretende que se transforme la enseñanza de las matemáticas, ya que como se menciona, la matemática debe posibilitarles a los estudiantes su aplicación y relación en ámbitos diferentes a los escolares, por ende “Es necesario relacionar los contenidos de aprendizaje con la experiencia cotidiana de los alumnos” (p.18). En este documento se muestra “una mirada global e integradora del quehacer matemático” (p. 18) resaltando la importancia de construir los conocimientos con los niños y niñas, que sean aplicables en su día a día, según como los requieran y que además sean duraderos, de allí se “propone pues una educación matemática que propicie aprendizajes de mayor alcance y más duraderos que los tradicionales” (p. 18).

Los lineamientos curriculares, con miras a que se favorezca en las escuelas esta nueva forma de concebir el quehacer matemático, propone, para la organización del currículo escolar, tres grandes aspectos: **procesos generales, conocimientos básicos y el contexto**, que se consideran fundamentales para la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas; ya que por una parte están los procesos generales como primer aspecto, que tienen que ver con el aprendizaje, es decir “el razonamiento; la resolución y planteamiento de problemas; la comunicación; la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos” (p. 20). Por otro lado, y como segundo aspecto esta los conocimientos básicos, que hacen referencia a esos conocimientos específicos que desarrolla cada pensamiento matemático y por último plantea al contexto como un recurso en el proceso de enseñanza para que los niños le encuentren más sentido a las matemáticas, a partir de situaciones problemas que pueden surgir del entorno de los estudiantes.

Una vez mencionados los tres aspectos fundamentales en la estructura del currículo, es importante decir aquí, que, dentro de los conocimientos básicos, encontramos los 5 pensamientos que organizan los contenidos matemáticos; para la elaboración de este trabajo es fundamental reconocer el **Pensamiento numérico y sistemas numéricos**. En efecto este pensamiento es entendido como el sentido de comprender los números y sus distintas maneras de ser utilizados; además este “se adquiere gradualmente y va evolucionando en la medida en que los alumnos tienen la oportunidad de pensar en los números y de usarlos en contextos significativos” (p: 26).

Por lo anterior se afirma en los lineamientos, que el pensamiento numérico va más allá que la resolución numérica en papel; un estudiante manifiesta estos pensamientos cuando consigue establecer conexiones importantes para operar, cuando comprende los conceptos y no simplemente cuando logra operar el algoritmo; este documento, propone tres aspectos básicos que ayudan al desarrollo de este pensamiento matemático, los cuales son “Comprensión de los números y de la numeración, Comprensión del concepto de las operaciones y cálculos con números y aplicaciones de números y operaciones” (p. 27), en el primer aspecto se espera que los estudiantes comprendan los conceptos numéricos, el significado del número en sí y su uso cotidiano y la comprensión del sistema de numeración, que abarca su estructura, su organización y su regularidad; el segundo aspecto “se dedica a la comprensión del concepto de las operaciones fundamentales de adición, sustracción, multiplicación y división entre números naturales” (p. 30), los tipos de problemas que se pueden trabajar con cada una de estas operaciones y la comprensión de la relación de las cuatro operaciones. El último aspecto está relacionado con el cálculo y la resolución de problemas, aquí se describe que este debe ir más allá de la simples rutinas de cálculo con lápiz y papel, rescatando la importancia del uso de algoritmos informales, ya que permite que las operaciones sean más dinámicas para los niños y niñas y les ayuda a desarrollar ideas sobre las relaciones numéricas; en este apartado también se mencionan las diferentes estrategias de resolución de problemas y la importancia de los distintos métodos de representación y por último la revisión de datos y resultados.

Por otro lado, encontramos los Estándares Básicos de Competencias (2006) que aparecen posterior a los lineamientos, estos para establecer criterios claros y públicos de

la calidad de la educación en la nación, encargándose de valorar si una persona es realmente competente; se crean además sobre la concepción de:

Superar las visiones tradicionales que privilegiaban la simple transmisión y memorización de contenidos, en favor de una pedagogía que permita a los y las estudiantes comprender los conocimientos y utilizarlos efectivamente dentro y fuera de la escuela, de acuerdo con las exigencias de los distintos contextos (MEN, 2006, p.12).

Ubicando allí un apartado fundamental que respalda la propuesta aquí planteada. Dentro del subtítulo “sobre la noción de competencias matemáticas” menciona que el sentido de ser matemáticamente competente está muy relacionado con los fines de la educación en matemáticas y de la adopción de un modelo coherente; para que las matemáticas sean competentes se requiere del rol activo del docente y que reflexione y se apropie de supuestos como:

Las matemáticas son una actividad humana inserta en y condicionada por la cultura y por su historia, en la cual se utilizan distintos recursos lingüísticos y expresivos para plantear y solucionar problemas tanto internos como externos a las matemáticas mismas. En la búsqueda de soluciones y respuestas a estos problemas surgen progresivamente técnicas, reglas y sus respectivas justificaciones, las cuales son socialmente decantadas y compartidas. (p. 49)

Allí se comparte la noción que tiene Hans Freudenthal sobre las matemáticas, ya que este autor afirma que es una actividad humana, que hace parte del hombre, por ende, no es ajena a la cotidianidad de los sujetos y además está para solucionar problemas que se presentan en el contexto.

En los estándares también se plantean unos contextos de aprendizaje, definiendo primeramente al contexto matemático como “lugar – no sólo físico, sino ante todo sociocultural –donde se construye sentido y significado para las actividades y los contenidos matemáticos, y, por lo tanto, desde donde se establecen conexiones con la vida cotidiana de los estudiantes” (p. 70). En esta definición de contexto, se establece su importancia para la construcción de sentido para los niños y niñas, ya que, si los procesos matemáticos carecen de significado y sentido, el contenido no va a ser de interés y por ende no se generan unos aprendizajes reales para la aplicación en la vida cotidiana.

Dado que este documento plantea un estándar por cada nivel escolar, y teniendo en cuenta que este trabajo tiene particular interés en grado 3; a continuación, se encuentran aquellos logros y aprendizajes (relacionados con el tema de este trabajo) con los que los estudiantes deben culminar el grado tercero:

- *Uso representaciones –principalmente concretas y pictóricas para explicar el valor de posición en el sistema de numeración decimal.*
- *Uso representaciones –principalmente concretas y pictóricas para realizar equivalencias de un número en las diferentes unidades del sistema decimal.*
- *Resuelvo y formulo problemas en situaciones aditivas de composición y de transformación.*
- *Resuelvo y formulo problemas en situaciones de variación proporcional.*
- *Uso diversas estrategias de cálculo (especialmente cálculo mental) y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas.*
- *Identifico, si a la luz de los datos de un problema, los resultados obtenidos son o no razonables.*
- *Identifico regularidades y propiedades de los números utilizando diferentes instrumentos de cálculo (calculadoras, ábacos, bloques multibase, etc.). (p.80).*

Después de los Estándares aparecen los Derechos Básicos De Aprendizaje (2017) (DBA en adelante) que surgen como un conjunto de aprendizajes básicos que se le deben garantizar a todos los niños y niñas en el país, con la finalidad que cada individuo tenga una formación integral en el ciclo escolar; estos aprendizajes están dados para cada grado escolar, desde 1° hasta 11°, en las áreas de lenguaje, matemáticas, naturales y ciencias sociales; los DBA aparecen como enunciado de aquellos aprendizajes mínimos que los estudiantes deben tener según el grado escolar, unas evidencias de aprendizajes y por último unos ejemplos.

Posterior a los Derechos Básicos de Aprendizaje aparece otro documento que retoma los aprendizajes definidos en los “DBA y los pone en diálogo con la organización de cada área definida en los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencias” (MEN, 2017-2, p. 4) de esta manera las mallas de aprendizajes llegan a ordenar los aprendizajes de acuerdo a los pensamientos matemáticos y hacen una

incursión en el ámbito didáctico “con el fin de establecer una conexión transparente entre los “qué es” y unos posibles “cómos” (p. 4). Según esta organización en el grado tercero (3°) del área de matemáticas el Ministerio de Educación propone 15 DBA de los cuales 3 pertenecen al pensamiento numérico; a continuación se citan estos DBA:

1. *Interpreta, formula y resuelve problemas en diferentes contextos, tanto aditivos de composición, transformación y comparación; como multiplicativos directos e inversos.*
2. *Propone, desarrolla y justifica estrategias para hacer estimaciones y cálculos con operaciones básicas en la solución de problemas.*
3. *Establece comparaciones entre cantidades y expresiones que involucran operaciones y relaciones aditivas y multiplicativas y sus representaciones numéricas. (pp. 8-9)*

Así como los enunciados de los DBA en las Mallas de aprendizajes (2017), también están las consideraciones didácticas que este documento aporta a la enseñanza de las matemáticas en cada grado escolar; Además plantean de manera general, que los maestros deben orientar la práctica en el aula, teniendo presente el contexto en donde estas son desarrolladas, así lo sugieren en la cartilla introductoria en la cual se “presentan una serie de situaciones que promueven el aprendizaje. Se trata de sugerencias o ejemplos de contextos y acciones generales a partir de los cuales los docentes pueden definir situaciones para orientar el desarrollo de los aprendizajes a lo largo del año en sus salones de clase” (p. 6). Si bien se mencionan “sugerencia o ejemplos de contexto” los maestros y maestras debe tener presente que cada contexto es diferente y las situaciones de los niños también lo son, incluso si asisten a la misma institución educativa, por lo cual es fundamental e imprescindible que los contenidos del currículo se deben contextualizar y se deben tener en cuenta los saberes previos de los estudiantes, para así lograr avanzar y generar que estos contenidos lleguen a los niños y niñas de manera significativa.

2. SITUACIÓN PROBLÉMICA

La EMR plantea que “las realidades del niño y las situaciones de su contexto son fundamentales para llevar a cabo el ejercicio de matematizar y alcanzar que los estudiantes lleguen al pensamiento formal de manera progresiva y sin dejar de lado al sujeto como ser pensante” (Bressan y otros, 2016, p. 7) esto es contrario a la idea del estudiante pasivo que sentado en su puesto aprende lo visto en clase, aquello que el maestro explica de manera intangible.

Para Miguel de Guzmán (1993) citado por Sierra (2004) las matemáticas han tenido problemas en el proceso de su aprendizaje por el exceso de formalización a la hora de enseñarla, y considera que las matemáticas se deben idear como un “proceso de inmersión en las formas propias de aprender del ambiente matemático” (p. 90), queriendo decir, que el sujeto debería encontrarse con los problemas matemáticos a través de las mismas situaciones que los promueven en la realidad. El autor pone énfasis en la importancia de la motivación, exponiendo que el fracaso matemático de muchos estudiantes se origina cuando se destruye el posicionamiento afectivo inicial porque no se reconocen sus potencialidades en este campo.

Este inconveniente se evidencia cuando en la Institución Ciudadela Educativa de Bosa, en el grado segundo, algunos estudiantes manifiestan miedo frente a los resultados que son entregados después de haber presentado los exámenes, ya que las notas no son del todo buenas y las consecuencias que acarrea para ellos son muy graves a nivel familiar, pues uno de ellos llorando expresaba, “mi papá dijo que iba a regalar mis juguetes si perdía matemáticas”, esto se convierte en algo negativo al momento de aprender en las aulas. Debido a estas condiciones, los estudiantes (no podemos afirmar que todos) se crean unas concepciones de las matemáticas donde tienen un único fin, ser calificados para la aprobación del grado escolar, y que las multiplicaciones son las operaciones de sumas reiteradas y el procedimiento escrito, además que no representan algo relevante para sus vidas.

A lo anterior, se le agregan la insistente necesidad de memorizar las tablas de multiplicar llevando a escribirlas en forma de planas y la realización del algoritmo usual de la multiplicación. A partir de la observación que se realizó de las dinámicas de enseñanza y aprendizaje en las clases, se reconoce que hay una transmisión de saberes

desde la perspectiva clásica o tradicional, lo que lleva a los estudiantes a la resolución mecánica y a llenarse de información más que nada de manera memorística.

Debido a esta metodología observada en clase y la manera como la enseñanza de las matemáticas se ha proyectado en las instituciones escolares, surge la preocupación que motivó la presente investigación, pues se ha evidenciado que la mayoría de los estudiantes no logran comprender el funcionamiento del algoritmo de la multiplicación, ya que el maestro transmite la vía de solución de los ejercicios, siendo el objetivo principal la obtención de resultados acertados y consecuentes con lo explicado por él, y no brinda la posibilidad a los estudiantes de vivir un proceso de participación activa y descubrimientos en los que se puedan llevar a cabo procesos de reflexión. Aquello que los niños y las niñas aprenden se vuelve automático, solo se interesan por conseguir una buena nota y no hay trascendencia de este aprendizaje más allá de los muros del aula.

Por su parte, Lotero, Andrade, E. y Andrade (2011) realizaron una investigación en donde analizaron el desempeño de los estudiantes en el aprendizaje de la multiplicación con respecto a varias situaciones de aprendizaje, allí lograron identificar que aquellas situaciones que involucran la resolución de problemas de la vida, por medio de la multiplicación, generó que los niños y niñas establecieran significados matemáticos para cada situación presentada, llegando a la resolución antes de tener que apelar a las memorísticas tablas de multiplicar, pero que al final éstas son necesarias para operar con el algoritmo usual; los autores además concluyeron que es fundamental que el niño logre conferir significado para así poder trasladar su conocimiento de las tablas de multiplicar, a “modelamiento matemático de situaciones de vida” (p. 59)

Lo antepuesto se contempla también en los planteamientos de la EMR, uno de los principios de este enfoque es el “principio de realidad” el cual se sustenta en que se debe llevar a los niños y niñas a situaciones realistas en contextos diversos, es decir, situaciones de su cotidianidad, en las cuales son válidas las fantasías; esto para que las matemáticas surjan como una matematización de la realidad de los estudiantes donde se puedan hacer uso de modelos que permitan interpretar los problemas que se le presenten y generar diferentes formas de resolución.

Por todos estos precedentes surgen las siguientes preguntas de investigación:

2.1. Preguntas problema

¿Cómo un proyecto de Educación Matemática Realista fortalecerá el pensamiento multiplicativo de los estudiantes del grado 305?

¿Cómo por medio de la corriente didáctica EMR y el juego, los niños y niñas pueden abordar situaciones de su contexto y matematizarlas para alcanzar un aprendizaje de la multiplicación?

Luego del planteamiento de las preguntas orientadoras, se genera una pregunta principal de la investigación ¿Cómo la Educación Matemática Realista puede potenciar en maestros y estudiantes el proceso de enseñanza y aprendizaje de la multiplicación en tercer grado de primaria?, la cual orienta cada una de las etapas de esta investigación.

2.2 Estado del arte – Antecedentes

Un aspecto fundamental que llevó a la realización de este trabajo es el rechazo de la comunidad escolar a las metodologías tradicionales de enseñanza de las matemáticas; esto es evidente en el desinterés que hay por parte de los estudiantes de participar en las clases de matemáticas. Por ello, se ha considerado importante ubicar estudios en relación con el tema de investigación, que permitan conocer las acciones que se han realizado para superar este inconveniente en la educación matemática. Estas se reseñan a continuación:

Las matemáticas han sido concebidas como un campo de conocimiento perteneciente a los estudiosos del tema, debido a que ha sido apartada de las situaciones cotidianas del ser humano, lo que ha llevado a generar profundos estudios que buscan cambiar ese estigma que tienen, una de estas investigaciones la realiza Ricardo Gómez (2012) en su tesis de magíster de la Universidad Nacional titulada *Sensibilidad y Aprendizaje de la Matemática*, que se centra en buscar aquellas “razones por las cuales esta asignatura se dificulta a los estudiantes” (p. 13) por medio del instrumento metodológico de la entrevista logra llegar a su principal conclusión:

Las matemáticas tienen el rigor de todas las disciplinas científicas y para acceder al conocimiento de ellas deben realizarse esfuerzos significativos y las metodologías mal

aplicadas son las que no permiten a los estudiantes encontrarle el verdadero gusto a la asignatura” (p. 53)

Por otra parte Pedro Zamora (2013) en su tesis *Contextualización de las matemáticas* para optar al título de docente en matemáticas, defiende que estos métodos tradicionales de enseñanza, no coinciden con la forma en que los estudiantes en realidad procesan dicha información, ya que ellos aprenden de manera concreta, y por el contrario, la manera como se ha venido enseñando en la mayoría de las escuelas, ha sido de forma abstracta, impidiendo que los estudiantes logren reconocer la utilidad en la vida.

En esta investigación se cita a David A. Kolb (nacido en 1939), autor del aprendizaje experiencial, quien defiende que los estudiantes poseen unos modelos de aprendizajes anclados al sentir, actuar, ver, escuchar y pensar, siendo estos elementos esenciales de una espiral de aprendizaje que puede empezar con cualquiera de los elementos, pero que típicamente empieza con una experiencia concreta.

En consecuencia, Zamora (2013) se enfoca en el modelo de enseñanza-aprendizaje contextual que brinda aportes significativos a este trabajo, puesto que proporciona a los estudiantes una base académica fundamentada.

La teoría del aprendizaje contextual enfoca los múltiples aspectos de cualquier ambiente de aprendizaje. Estos ambientes pueden ser variados, desde la propia aula, a un laboratorio, el patio del colegio, o un lugar de trabajo. Es, por tanto, que, siguiendo este modelo, se alienta a los profesores a diseñar nuevos ámbitos de aprendizaje cambiando el aula, por el patio, por el laboratorio, o por la visita a algún área de trabajo, esto motivará al estudiantado, sacándolo de su rutina habitual, y haciendo que los estudiantes descubran las relaciones existentes entre las ideas abstractas y los contextos en un mundo real (p. 11)

El autor en su investigación llega a conclusiones donde se evidencia que mediante actividades prácticas, el aprendizaje se da de manera más efectiva; también, que los conceptos por medio de la representación en contextos reales y familiares se refuerzan de manera más positiva, además de fomentar el estudio grupal, en donde se fortalece los valores, el respeto y la solidaridad, entre otros.

Otro trabajo encontrado en la búsqueda de antecedentes es una tesis hecha por Alejandra Cuadrado (2015) de la Universidad Pedagógica Nacional para optar al título de:

especialista en pedagogía, titulada *diseño de una propuesta didáctica para mejorar la comprensión de las operaciones matemáticas*, que tiene como principal objetivo, retomar el contexto social de los niños y las niñas como una estrategia para mejorar la comprensión de las operaciones matemáticas. Este trabajo se fundamenta en la didáctica de los juegos tradicionales de los estudiantes. Allí se cita una investigación realizada por Salvador Adela “*El juego como recurso didáctico en el aula de matemáticas*” en donde se plantea que:

El juego es un instrumento didáctico que enfatiza en una pedagogía activa, reemplazando el proceso de aprendizaje pasivo y verbalista que se encuentra en la actualidad, además los juegos permiten la interacción entre sujetos, compartiendo afectos, intercambiando actitudes y puntos de vistas, propiciando espacios de respeto y cooperación dentro de las aulas de clases mejorando los procesos imaginativos y creativos de las personas (1998, p. 26, citado por Cuadrado, 2015, p. 19).

Por una parte, en este planteamiento se defiende la pedagogía activa, que de la mano de la didáctica de la matemática se contrapone al aprendizaje pasivo y verbalista además resalta la importancia de la interacción de los sujetos entre sí con el medio a través del juego.

Otro aporte importante de esta tesis es la investigación de García y Franco, *La didáctica de la geometría Euclidiana*, que enuncia que el mundo matemático se relaciona de manera directa con el entorno natural del ser humano, por ejemplo:

Las diferentes estructuras que vemos en las ciudades, en algunas figuras propias de la naturaleza, por eso las matemáticas se relaciona con la interacción diaria de nuestra vida, en donde a través de la lúdica y el juego puede establecerse formas de razonamiento y comprensión de diferentes situaciones matemáticas planteadas (2006, p. 206, citados por Cuadrado, 2015 p. 95).

De acuerdo con la investigación de Lina Bernate (2014) titulada *Estrategias didácticas para potenciar el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes del grado primero de primaria del colegio Juan Sábalo del municipio de Garzón Huila*, para optar al título de Especialista en Pedagogía de la Universidad Pedagógica Nacional, en la mayoría de los casos, la enseñanza de las matemáticas en el aula de clases se realiza

de forma tradicional y autoritaria. Esto tiene como consecuencia que los estudiantes vivencien las matemáticas como “algo aburrido” o “difícil de aprender”. En este sentido Vygotsky afirma que “el niño no tiene dificultades; la dificultad se presenta cuando queremos que él aprenda el lenguaje de nosotros. Para esto debemos guiar y apoyar; más que imponer nuestros intereses” (1983, citado por Bernate, 2014, p. 205). Esto quiere decir que los maestros deben comenzar a replantear las formas en que enseñan matemáticas a los niños y niñas, porque no se puede continuar transmitiendo un saber de la manera como se ha venido haciendo, porque si el niño no aprende no es porque tenga dificultades, lo hace porque es la metodología la que no logra generar interés en los estudiantes.

En definitiva, la investigación anterior plantea que el objetivo de la enseñanza de las matemáticas debe ser lograr aprendizajes significativos y esto se traduce en que los estudiantes adquieran aprendizajes para la vida y no que únicamente se queden en saberes escolares. El precursor del concepto Aprendizaje significativo afirma que “el aprendizaje ocurre cuando el material se presenta en su forma final y se relaciona con los conocimientos anteriores de los alumnos” (Ausubel, 1963, citado por Bernate, 2014, p. 28). Esto significa que los niños realmente aprenden cuando lo que se les enseña en la escuela tienen relación con su vida diaria, y que el maestro debe darse a la tarea de hacer evidente la relación entre la temática y la realidad de los estudiantes.

En la tesis *¿tengo razones para aprender matemáticas? caracterización de las condiciones del microcontexto y macrocontexto que determinan las justificaciones de los estudiantes*, llevada a cabo por Érica Parra (2015), presentado como requisito para optar por el título de magíster en docencia de las matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, es motivada por una reflexión acerca de las razones que llevan al poco interés de los estudiantes hacia el aprendizaje de las matemáticas, la autora busca identificar aquello que está influyendo en los estudiantes ante la posición de los estudiantes de un grupo del curso 1002 de la IED Julio Garavito Armero al no querer aprender matemáticas. Tomando postura desde la educación matemática crítica, se cita a Velero (2012) identificando que el discurso dominante de este enfoque, toma a los estudiantes únicamente como sujetos cognitivos, es decir un sujeto totalmente racional “cuya acción sucede principalmente en un mundo mental y cuyas dimensiones de interés para el

estudio de la investigación en educación matemática eran únicamente sus procesos de pensamiento matemático” (citado en Parra, 2015, p.13) centrándose específicamente en la comprensión de los procesos de aprendizaje y mejora del rendimiento individual en torno al pensamiento matemático. En este trabajo se menciona que los estudiantes son seres humanos, que además de los procesos cognitivos, también tienen gustos, sentimientos, género, creencias y pertenecen a un contexto social e histórico que influye en la toma de sus decisiones.

En la investigación de la maestra Marta Torrado (2006) titulada *Diseño e implementación de una propuesta de formación de maestros de primaria sobre enseñanza de las matemáticas* para obtener el título de Maestría en educación de la Universidad Pedagógica Nacional, se busca formar a los estudiantes de la licenciatura en Educación Infantil en el área de matemáticas y su didáctica para que puedan diseñar e implementar unidades didácticas con intervenciones pedagógicas acordes al contexto y necesidades de los niños a quienes van dirigidos. En este trabajo la propuesta consiste en implementar una enseñanza de las matemáticas con materiales manipulables que permitan a los maestros evidenciar los conocimientos previos de los estudiantes, las estrategias implementadas para la resolución de problemas, y los errores para una posterior retroalimentación. Estas actividades están contextualizadas y buscan una mayor comprensión en los estudiantes de grado 1 y 2 de básica primaria.

En el trabajo de grado de Stefanni Galvis, Laura Sierra y Cristian Sierra (2014) titulado *Acercamiento al diseño de situaciones didácticas para el desarrollo del pensamiento matemático multiplicativo en el Centro Educativo Libertad* para optar al título de licenciados en Educación Infantil de la Universidad Pedagógica Nacional, se implementa una metodología de enseñanza relacionada con la creación de situaciones didácticas que permitan un mejor y mayor aprendizaje por parte de los estudiantes. Aquí se muestra, cómo se debe reconocer el contexto de los estudiantes y el uso de referentes reales que permitan a estos mismos, reconocer para qué sirve todo lo que aprenden, ya que al aprender de una manera contextualizada, es decir, reconocer un contexto multiplicativo porque es allí donde pueden operar a partir de este contexto.

En esta indagación de antecedentes también se encontró el trabajo de grado de Karen Gaitán y Zulma Medina (2016), titulada *Monstruosamente geométricos: Propuesta*

transversal entre literatura, artes plásticas y geometría espacial para transformar las percepciones sobre las matemáticas en los niños y las niñas de 8 a 10 años de edad en Hogares Club Michín- Ciudad Bolívar, presentado como requisito para el título de licenciadas en pedagogía Infantil de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas es una propuesta que busca integrar las Artes plásticas, la literatura y la geometría espacial en forma sistematizada a un grupo focal de niños de 8 a 10 años que manifiestan un desinterés frente a las matemáticas debido a las prácticas de enseñanza a las que se veían enfrentados en anteriores ocasiones; esta situación condujo a los estudiantes a tener dificultades para resolver los problemas que se les planteaban puesto que no encontraban una forma convencional para hacerlo. La finalidad de este trabajo es deconstruir en los niños, niñas y docentes esas concepciones de matemáticas para que renueven sus prácticas y que no sigan desligando las matemáticas de las otras áreas de conocimiento: posibilitando con esto su aprendizaje.

Por último se encuentra un antecedente bastante significativo en esta búsqueda, su autor es Francia Carmona (2015) y se titula *Educación Matemática Realista como agente articulador en la enseñanza de la teoría de conjuntos en el contexto social*, como requisito para optar al título de licenciada en matemáticas y física de la Universidad de Antioquia; este es un proyecto pedagógico que se desarrolla a partir de la enseñanza Matemática Realista “en el que se resalta el contexto en el desarrollo del pensamiento matemático a partir de la resolución de situaciones problema” (p. 9), este trabajo aborda la teoría de conjuntos articulado a esta corriente didáctica, resaltando la importancia de la realidad y el contexto como instrumentos para que las matemáticas sean comprensibles para los sujetos que las aprenden.

Este trabajo investigativo permitió hacer una reflexión que acerca más a la EMR, por lo que es preciso mencionar su principal hallazgo:

Se logró mostrar a partir de la utilización de la EMR en relación con la teoría de conjuntos que los estudiantes que son intervenidos con propuestas basadas en el EMR aplicadas en el contexto, adquieren mayores niveles de comprensión en relación a otros estudiantes que no fueron intervenidos bajo ésta metodología. (2015, p. 109).

La autora concluye esta investigación resaltando que la EMR permitió a los y las estudiantes tener un mayor nivel de comprensión y además en esta estrategia didáctica

se logran traer a la realidad las nociones de la teoría de conjuntos para gradualmente ir acercándolos a la formalización de la misma.

Este ejercicio investigativo encaminó el análisis de aquellas contribuciones que se han hecho a la enseñanza de las matemáticas y las diferentes metodologías empleadas, permite evidenciar que esta se debe seguir transformando, aunque falta mucho por cambiar la perspectiva de enseñanza de esta disciplina a nivel general. Sólo se encontró una investigación relacionada a la Educación Matemática Realista en el país, pero las demás propuestas que se localizaron, plantean alternativas a la enseñanza tradicional de las matemáticas, que en suma es lo que se quiere aportar, por ello, en este trabajo investigativo se propone continuar aportando al cambio del enfoque de enseñanza-aprendizaje de la matemática; de ahí que a continuación se presenten los elementos que argumentan el desarrollo de esta propuesta pedagógica.

2.3. Justificación

Este trabajo surge del interés de los maestros en formación por sumergirse en los planteamientos de una didáctica de la matemática que sea contraria al paradigma tradicional de enseñanza, en esa búsqueda de referentes se encontró que la Educación Matemática Realista fue una de las primeras en presentar una postura de este tipo, pues critica el conductismo presente en los métodos de instrucción vigentes de esa época, aduciendo que esta se impartía en los centros educativos de la gente del común y la buena educación se daba en los colegios más prestigiosos y/o adinerados:

Hay una cosa que necesitamos [decidir] urgentemente, si la imagen de la matemática es para una élite o para todos – una imagen de la matemática para la totalidad de la educación (Freudenthal, 1973, p. 63, citado por Bressan, Gallego, Pérez y Zolkower, 2016, p. 2)

La EMR se fundamenta en que los niños obtienen aprendizajes significativos “si los contenidos están relacionados directamente con su realidad próxima. Dentro de esta han surgido múltiples estrategias de aprendizaje, para lograr que los alumnos comiencen a interesarse en esta área a partir de la comprensión de que esta hace parte de la vida real y cotidiana del ser humano” (Alsina, A., p. 120). Tiene como fin, que el maestro relacione los contenidos matemáticos con el contexto próximo de los niños y niñas para que ellos

matematicen situaciones de su realidad sean partícipes en sus aprendizajes desde sus experiencias de vida; entendiendo que:

La finalidad de las matemáticas es matematizar (organizar) el mundo que nos rodea, incluyendo a la propia matemática. La matematización es una actividad de búsqueda y de resolución de problemas, pero también es una actividad de organización de un tema (p. 121)

Además de esto las matemáticas se deben comprender como una *actividad humana* Freudenthal (1985) citado por (2009, p. 121)

Asimismo, se pretende implementar la EMR como estrategia didáctica que permita llevar a cabo actividades que logren una reflexión de parte del maestro en su quehacer, para problematizar situaciones cotidianas de los estudiantes que inviten a buscar soluciones a partir de la multiplicación, es decir “convertir un problema contextual en un problema matemático, basándose en la intuición, el sentido común, la aproximación empírica, la observación y la experimentación inductiva. En este proceso se traduce los problemas desde el mundo real al matemático” Freudenthal (1991) citado por Alagia, Bressan y Sadovsky (2005, p. 82). De esta manera se quiere lograr que los estudiantes tengan una mayor comprensión y participación en su proceso, principalmente en el sistema multiplicativo.

Por último, se quiere analizar los resultados de esta implementación y evidenciar los aportes que la propuesta tiene en la construcción del pensamiento multiplicativo en los estudiantes de primaria, y también, los aportes en el quehacer del maestro, para nosotros al estar en un proceso de formación y para la institución, donde se pueda generar un cambio de paradigma para que las matemáticas sean abordadas de esta manera y no de la tradicional, que tanto rezago ha dejado con el tiempo, impidiendo el progreso y construcción de nuevos conocimientos.

Para lograr llegar a la planeación de las actividades que cimentarán esta propuesta pedagógica, es fundamental indagar, reconocer y presentar los aspectos propios de la estructura multiplicativa, por lo que en el siguiente capítulo se puntualizan en aquellas categorías fundamentales que permitieron llevar a cabo la propuesta y posteriormente se hiciera el análisis de resultados de la misma.

3. MARCO CONCEPTUAL

El presente trabajo parte de la teoría Educación Matemática Realista (EMR), su fundador fue Hans Freudenthal (1905-1990), matemático alemán, quien propone la realidad como motivador del aprendizaje de las matemáticas; su idea central se basa en que “la matemática debe estar conectada con la realidad cercana de los alumnos y que debe ser relevante para la sociedad en orden a construirse en un valor humano” (Bressan y otros, 2016, p. 2). La intención en este enfoque es que el contexto y la realidad sean elementos esenciales que movilicen el pensamiento de los sujetos.

El siguiente capítulo contiene los elementos teóricos que conceptualizan los contenidos que respaldan la presente investigación, la cual está organizada en tres aspectos: la primera parte se dedica a la ampliación conceptual de la estructura multiplicativa a partir de aspectos matemáticos que se requiere aprender en la construcción del pensamiento multiplicativo; posterior aparecen la didáctica que sustenta la propuesta, que procura que el proceso de enseñanza/aprendizaje se de manera significativa y que contribuya a que los estudiantes logren comprender y resolver problemas que se les presentan en el contexto; en último, este capítulo concluye con la estrategia didáctica que se desarrolla en el diseño de esta propuesta; optando por el juego como actividad facilitadora del aprendizaje.

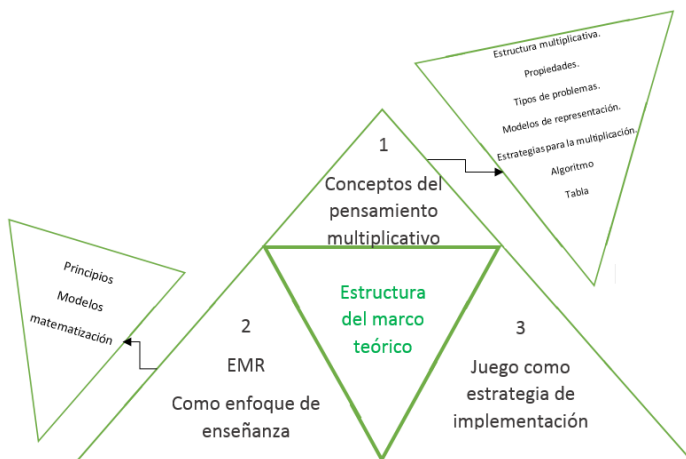


Figura 4. Diagrama del marco conceptual.

Elaboración propia.

3.1. Estructura multiplicativa

De acuerdo con lo planteado por Castro, E., Castro y Rico (1995), “la estructura multiplicativa se basa en la estructura aditiva” (p.54) pero esos aspectos propios de la multiplicación “no son reductibles a aspectos aditivos” (p.54) dado que comenzar a trabajar en el producto exige que el niño tenga un nivel de uso y dominio de los números y que conozca su simbolización; en cambio en el caso de la adición y la sustracción lo anterior se va dando con simultaneidad. Para los autores, los dos términos del producto responden a contextos diferentes; uno de ellos es la cantidad que se repite, es decir el multiplicando y es un número cardinal completo y el otro factor nos dice las veces que se repite la cantidad inicial, o sea multiplicador que es una especie de cardinal de segundo orden y no es concreto como el anterior.

En la propuesta planteada en este trabajo, se asumirá a la estructura multiplicativa con sus aspectos binario, se partirá de esto para la realización del análisis de los resultados que arrojaron la implementación de este trabajo investigativo, ya que como los plantea Carlos Maza, la multiplicación es más que una suma reiterada, sin desconocer que lo es.

Por lo antepuesto, Castro (2001) plantea la relación existente entre las cuatro operaciones aritméticas, por un lado en la estructura aditiva (suma y resta) y la estructura multiplicativa (multiplicación y división), pero también entre estas estructuras: multiplicación con suma y división con resta, para entender mejor, el autor propone la siguiente figura:

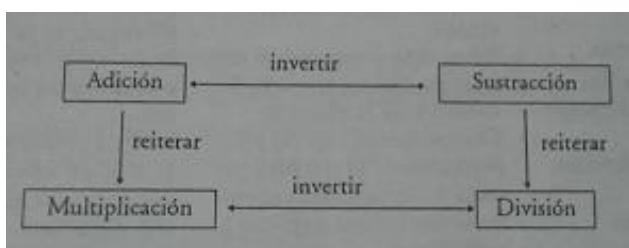


Figura 5. Relaciones entre las operaciones.

Fuente: Castro (2001, p. 213)

3.1.1. Multiplicación

La multiplicación es una operación que ha sido concebida como una suma reiterada, es decir que se suma un número o los cardinales de los grupos de objetos varias veces; Carlos Maza expresa que la multiplicación se entiende como “una operación aritmética

entre números naturales” (1991, p. 17). Tomando como punto de partida dos números y el punto de llegada otro número que puede ser distinto o no de los iniciales; en donde los primeros números pueden ser transformados en el último. Lo que hace que esta operación sea pensada como “una aplicación entre el conjunto $N \times N$ de parejas ordenadas de números naturales y el propio conjunto” (p. 17), es decir que la operación de la multiplicación debe definirse como una aplicación de $N \times N$ en N . No obstante Maza reitera que esta interpretación de la multiplicación es “limitada y menos general” (p. 17) de modo que restringe bastante los resultados.

Por lo anterior, el autor expone la multiplicación como producto cartesiano, poniendo de manifiesto que a y b no solo son distintos, sino que son cardinales de un conjunto de elementos, siendo b un cardinal de un conjunto de conjuntos y a marca el número de elementos que se consideran en el conjunto y c es el conjunto total de elementos que se cuentan al final (p. 18); este explica el número de combinaciones posibles entre distintos elementos, es decir, está vinculado a la idea de conjunto y combinación. Entender la multiplicación de esta manera supone cosas diferentes ya que mientras la primera tiene una concepción unitaria, esta última lo hace sobre una concepción binaria de la misma.

Dadas estas concepciones, Maza aclara que no se trata de quedarse con una, e ignorar la otra, por el contrario, el aspecto binario de la operación es complementario al aspecto unitario; tomar la definición de la multiplicación desde una sola concepción sería limitar la operación, ya que ambas interpretaciones se dan al mismo tiempo.

3.1.2. Propiedades de la multiplicación

La multiplicación como operación cumple unas propiedades que nacen de la necesidad de mostrar su estructura fundamental; estructura que “subyace al conjunto donde se ha definido la operación” (Maza , 1991, p. 62). Los niños y niñas van adquiriendo gradualmente y a distintos ritmos la conciencia de cada una de estas operaciones (Dickson, 1991). Las propiedades multiplicativas son tres según Maza: conmutativa, asociativa y distributiva, las cuales se exponen a continuación:

Primero está la propiedad conmutativa que aparentemente es la más sencilla de descubrir por parte de los niños y niñas, debido a que su principio fundamental se basa en que el orden de los multiplicandos o factores no altera el producto, es decir si tienes 3

paquetes de 50 dulces cada uno y se quiere saber cuántos hay en total, el resultado será el mismo si multiplicamos 50×3 o 3×50 .

Segundo, la propiedad asociativa aparece cuando ya se ha comprendido la propiedad anterior y aplica a la multiplicación de mínimo tres números, en donde el producto es el mismo sin importar como se ubiquen los factores, es decir los números se pueden combinar en cualquier orden. Ejemplo: $(2 \times 3) \times 4$ o $2 \times (3 \times 4)$ o $(2 \times 3) \times 4$, entre otras.

Finalmente Maza define la propiedad distributiva, mencionando que su planteamiento didáctico es muy similar al anterior, pero aquí en esta propiedad la multiplicación puede ser descompuesta en suma o diferencia de otras multiplicaciones “restringida por cuanto suele ser aplicada a números que se descomponen en dos sumados, uno de los cuales es uno o dos como máximo. Esta propiedad aparece muy ligada a la suma reiterada” (p. 66). Un ejemplo sería: “10 veces 5 es lo mismo que 6 veces 5 más 4 veces 5” (Dickson, 1991, p. 260)

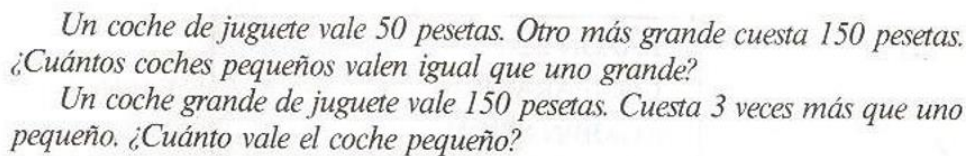
3.1.3. Tipos de problemas

Los problemas que conllevan operaciones de multiplicación, se cuentan dentro de dos clases, acordes a las interpretaciones (ya explicadas en el apartado anterior) que caracterizan esta operación; según Maza estas clases de problema son razón y combinación, los dos problemas multiplicativos se resuelven de manera distinta ya que sus estrategias de resolución son diferentes en cuanto a dificultades, sin embargo, ambos se resuelven utilizando la misma operación: la multiplicación. (1991, p. 27).

Por un lado, el problema de razón, se puede resolver con suma reiterada, disponiéndose una “cantidad inicial que va cambiando a medida que se repite sucesivamente un número de veces” (p. 27) en este caso, como ya se había mencionado, la multiplicación se concibe como una operación unitaria. El problema de combinación dispone de dos cantidades iniciales que son del mismo nivel, las cuales se deben considerar simultáneamente para resolver el problema; los problemas de combinación requieren de un conocimiento maduro de la operación de multiplicar por parte de los estudiantes, este tipo de problema es considerado por el autor como más práctico ya que se resuelve a través de una multiplicación directa; este último responde a un modelo binario y no unitario como el de razón (p. 28)

Asimismo, menciona que los anteriores tipos de problemas son los más usuales, no obstante, “coexisten dos clases más: los problemas de comparación y los de conversión” (p. 33); en los primeros, al igual que en los problemas de razón, su forma habitual de resolverlos es con suma reiterada, pero en estos se repite una cantidad de elementos concretos y manipulables (cantidad extensiva), según el número de la cantidad intensiva que refiere a la consideración de dos magnitudes en relación. Maza menciona que en la práctica no se detectan diferencias importantes entre los problemas de razón y los de comparación, ya que son muy similares.

Aquí un ejemplo para comprender mejor la diferencia.



*Un coche de juguete vale 50 pesetas. Otro más grande cuesta 150 pesetas.
¿Cuántos coches pequeños valen igual que uno grande?
Un coche grande de juguete vale 150 pesetas. Cuesta 3 veces más que uno
pequeño. ¿Cuánto vale el coche pequeño?*

Figura 6. Ejemplo de problema de comparación y razón.

Fuente: Maza (1991, p. 36)

El cuarto tipo de problema multiplicativo que expone el autor es el de conversión, en el cual no ahondaremos ya que es un tipo de problema superior al nivel de básica primaria; estos tipos de problemas corresponden a cuestiones físicas de conversión de medida, por lo cual el autor no recomienda que se enseñe cuando se ofrecen a los estudiante los problemas de multiplicación; sin embargo, se menciona aquí, porque hace parte de la clasificación de los problemas que plantea Maza.

Del mismo modo, Godino , Cid , & Batanero (2004) hacen una clasificación de los problemas multiplicativos, bastante similar a la que hace Maza; pero estos autores proponen una tipología más, que antes no se había mencionado: de estado, que es “cuando expresan el cardinal de un conjunto, el ordinal de un elemento o la medida de una cantidad de magnitud” (p. 269)

Por otra parte, Castro, E. y otros (1995) retoman un análisis que hace Vergnaud (1983) sobre los problemas que conllevan operaciones multiplicativas, estableciendo, como primer orden una separación macro, de dos tipos de problemas, los cuales son: simples y compuestos. El primero de estos se refiere a aquellos problemas “que requieren una y solo una de las operaciones de multiplicación” (p.3). La otra gran estructura es: los problemas compuestos que son aquellos de proporcionalidad, en los cuales intervienen

tres o más magnitudes y que en su resolución se requiere más de dos operaciones, además “requieren de una acción pedagógica estructurada” Castaño , Hojas Pedagógicas, (1995, p. 3) A continuación, se muestra la estructura de los problemas multiplicativos simples y compuestos.

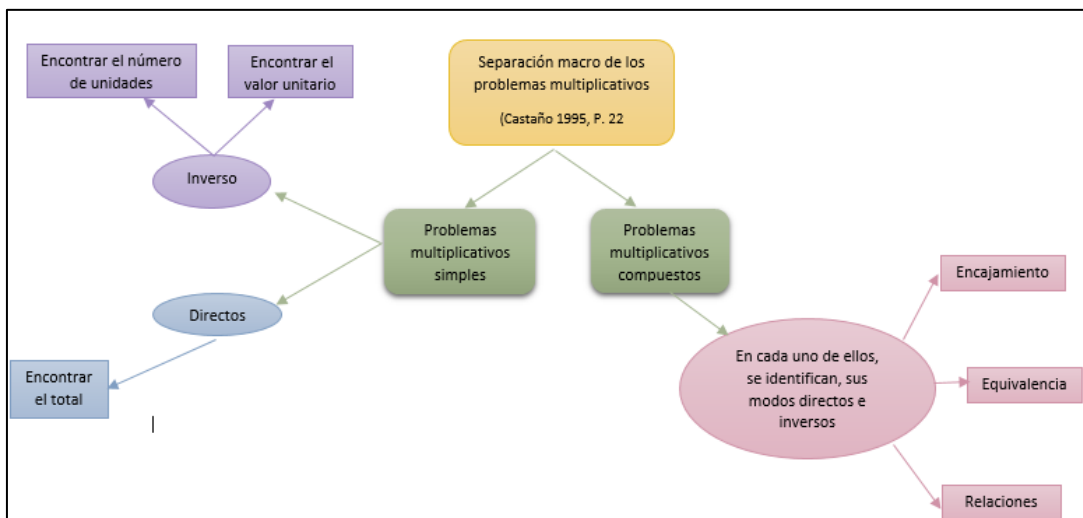


Figura 7. Problemas simples y compuestos Elaboración propia.

Fuente: Castro, E. y otros (1995, pp. 3 - 22)

3.1.4. Algoritmo

Un algoritmo es una serie de reglas que se aplican en un determinado orden, a unos datos establecidos, para llegar a un resultado. Desde los Lineamientos Curriculares de Matemáticas MEN (1998) se plantea que un algoritmo es un conjunto de pasos bien especificados que llevan a un resultado preciso, y que están ligados, en su mayoría, a elaboraciones sintácticas de las expresiones simbólicas del lenguaje matemático.

Por otra parte también se concibe que algoritmo es una secuencia lógica y finita de pasos que permiten solucionar un problema; la utilizada en el algoritmo se basa en la simplificación de operaciones complejas por su gran magnitud numérica.

3.1.4.1. Algoritmo usual de la multiplicación

Según Castro (2001) multiplicar es repetir una cantidad cuantas veces se requiera. La multiplicación está compuesta por tres partes:

3.1.4.2. Partes del algoritmo

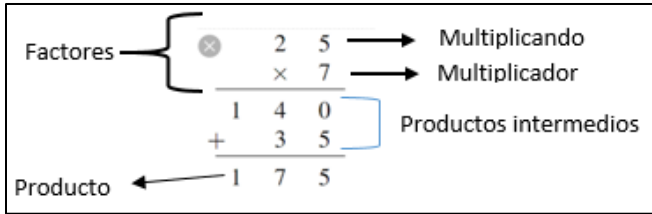


Figura 8. Partes del algoritmo de multiplicación.

Elaboración propia

a) Multiplicando, elemento pasivo o unificador: Es la cantidad que se va a repetir.

b) Multiplicador, agente activo o contador: Es el número de veces que se repite el multiplicando.

c) Producto: Resultado de la

operación entre el multiplicando y el multiplicador.

3.1.4.3. Solución del algoritmo de multiplicar

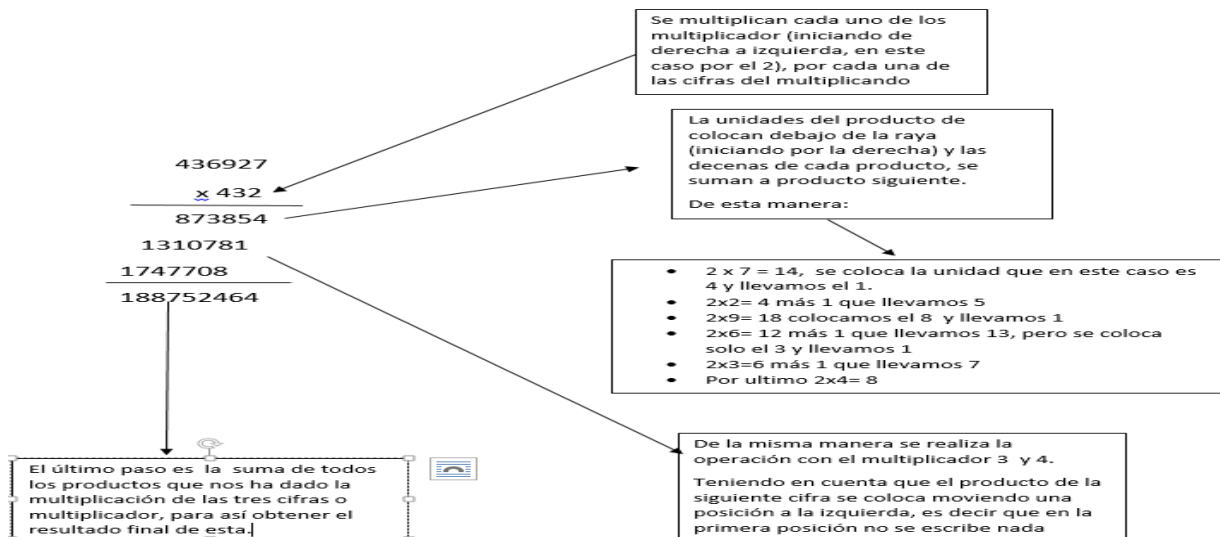


Figura 9. Pasos para solucionar el algoritmo de la multiplicación.

Elaboración propia

3.1.4.4. Consideraciones sobre el algoritmo de multiplicar

Desde los planteamientos de Maza (1991), se enumeran 5 requisitos previos fundamentales para el desarrollo del algoritmo:

1. La memorización de los hechos multiplicativos básicos. 2. La descomposición de un número por el valor posicional de sus cifras, además esa descomposición debe extenderse a posibles descomposiciones múltiples de un número, ya que no tener una

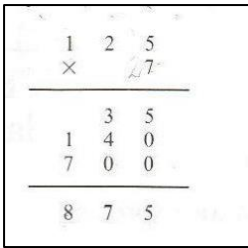


Figura 10. Algoritmo de la multiplicación

Fuente: Maza (1991, p.104)

comprensión sobre este punto, se refleja en el error algorítmico de la presencia de llevadas. 3. En la potencia de diez, el estudiante debe comprender que al realizar la siguiente multiplicación; cuando realiza la acción “7x1, se refiere en realidad a la multiplicación 7 x 100, cuyo resultado es 700” (p.104) Es fundamental que los estudiantes comprendan esto, para así evitar errores de colocación de los resultados parciales. 4. la multiplicación por múltiplos de diez y sus potencias, que se refiere a multiplicaciones por 20... 30... 200, 300, etc. El último requisito previo que menciona Maza es el dominio de las propiedades multiplicativas, ya que las tres propiedades descritas cimientan todo el algoritmo. (Pp. 103 - 104).

3.1.4.5. Otros tipos de Algoritmos de multiplicación

Hay otros tipos de algoritmos llamados no formales, los cuales también permiten llegar al resultado, pero usando técnicas distintas al algoritmo canónico; Chamorro (2003)

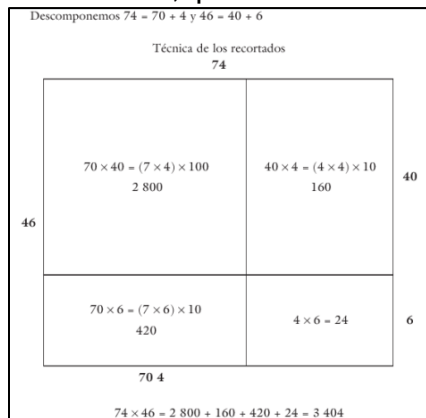


Figura 11. Técnica de los recortados.

Fuente: Chamorro (2003, p. 173)

plantea tres tipos de algoritmo de descomposición, que permite que los niños de manera natural evidencien por ellos mismos la manera en que se van descomponiendo los números.

En la figura 11 se efectúa la operación 74 X 46, a través de la técnica de los recortados, esta se basa en descomponer los números de la siguiente forma:

74= 70 más 4 y 46 = 40 más 6. Luego se multiplican recuadros por recuadros.

Después se suman los resultados obtenidos en cada cuadro y el resultado de esta suma es el producto de la

operación.

En esta técnica se mantiene en todo momento la presencia de los ceros, que son los que marcan el valor de las cifras (unidades, decenas, centenas, etc.).

Como complemento a la técnica anterior, Chamorro muestra la evolución de la técnica de los recortados, acercándola más al algoritmo usual:

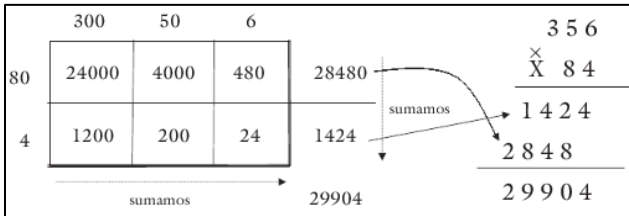


Figura 12. Evolución de la técnica del recortado.

Fuente: Chamorro (2003, p. 174).

En este caso se resuelve el producto 356×84 , su solución es la misma del ejemplo anterior.

A continuación se trata otra técnica que menciona Chamorro, esta técnica llamada la celosía inventada en el siglo XV por el matemático italiano Luca Pacioli, en

esa también se utilizan los cuadros de la siguiente manera:

- Como se va a multiplicar un número de 3 cifras por uno de 2 cifras (356×84), se

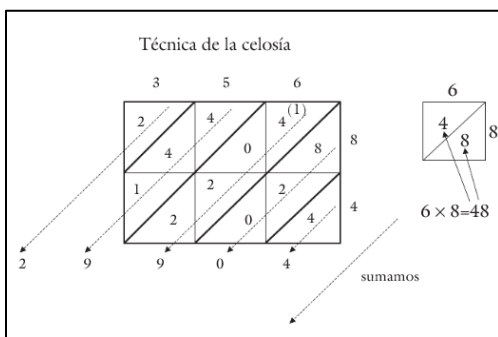


Figura 13. Técnica de la celosía.

Fuente: Chamorro (2003, p. 175)

dibuja una tablita de tres columnas por dos filas.

- Una vez está hecha la tabla, se dividen cada una de sus celdas con una diagonal y se colocan los números que se quieren multiplicar de la manera como muestra en la imagen.

- Luego se anotan los resultados de multiplicar 8×6 , 8×5 , 8×3 y 4×6 , 4×5 , 4×3 .

Y por último se suman los resultados siguiendo las flechas, teniendo en cuenta la colocación de las

cifras.

Por otro lado Castro (2001) hace mención a los algoritmos “no usuales” haciendo alusión a un método utilizado por los niños y es multiplicando con los dedos este aparece de la práctica que se da a menudo, la utilización de los dedos como auxiliar de cálculo en la resolución de los algoritmos, por esto el “sumar y restar con los dedos se considera como un instrumento de cálculo en sí, sometido a una notación propia y a unas reglas particulares” (p. 248), de ahí que se considere como un algoritmo.

El autor Ibañez (2019) también ha investigado sobre el métodos de contar con los dedos, mencionando que esta práctica de multiplicar con los dedos “se utilizaba ampliamente en la Edad Media, y pudo tener su origen en la Antigua Roma y su uso se ha mantenido hasta época reciente en diferentes lugares del mundo” (párr. 4) Este método permite realizar multiplicaciones de números comprendidos entre el 5 y el 10; dicho método tiene una justificación matemática:

Sean a y b dichos números y $a \times b$ su producto: $(a - 5)$ y $(b - 5)$ es el número de dedos levantados en cada mano. El producto $a \times b$, que es un número de dos cifras, tendrá como cifra de las decenas la suma de los dedos levantados en cada mano y como cifra de las unidades el producto de los dedos no levantados en cada una de las manos. (Castro p. 248)

Este método es muy práctico, ya que permite obtener resultados rápidos, y su enseñanza a los niños y las niñas puede resultar muy significativo por permitirles tener una estrategia informal con la cual pueden desenvolverse con facilidad.

3.1.5. Estrategias para la multiplicación

En este apartado se abordan aquellas estrategias que los niños y niñas utilizan en la resolución de problemas que conllevan multiplicación, Castro (2001) indica cinco estrategias iniciales que utilizan los niños, señalando que el uso de estas, varían en función a la edad y el desarrollo escolar que les permite a los niños ir adquiriendo habilidades.

La primera pertenece a la modelación, es decir la utilización de material concreto para organizar la situación problema; la segunda concierne al conteo con los dedos, en donde se utilizan estos para representar los grupos, la tercera estrategia, es la de hechos derivados (p. 226) véase en la figura 14:

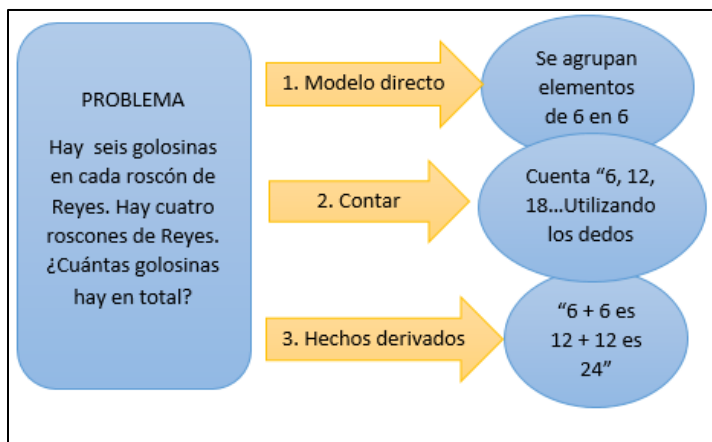


Figura 14. Estrategias para la multiplicación

Fuente: Castro (2001, p. 226)

Las últimas dos estrategias que plantea Castro son repetir patrones numéricos y aplicar hechos numéricos conocidos.

Por otro lado el autor Castaño (1996) en su observación de los procedimientos que siguen los niños para resolver problemas de tipo multiplicativo, identificó que en la construcción de dicho conocimiento ellos atraviesan por

varios momentos o estrategias de resolución:

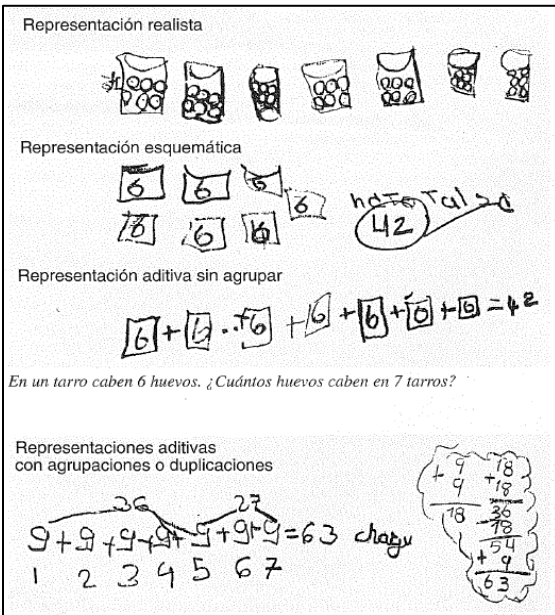


Figura 15. Representaciones en la solución de problemas.

Fuente: Hojas pedagógicas # 3 Jorge Castaño (1996, p. 4)

1. Representación realista: Esta se refiere a dibujos detallados que realizan los niños para representar las situaciones, contando uno a uno los elementos “es como si hicieran una reunión” (p.4).

2. Representación esquemática: los dibujos dejan de ser una reunión de elementos y pasan a estar más esquematizados, se evidencia además agregaciones sucesivas.

3. Representación aditiva: Aquí ya los niños comienzan a abreviar los procedimientos “en unos momentos agrupan algunos sumandos, en otros hacen duplicaciones” (p. 4) en este tipo de representación se evidencia más la noción de adición que el niño va adquiriendo.

4. Representación Multiplicativa: en esta última, los niños ya representan con multiplicación.

Tal como vemos hasta ahora, el uso de estrategias en los niños y niñas es importante para ir teniendo un acercamiento progresivo a la resolución de problemas de carácter multiplicativo, el uso de recursos concretos que a medida que los niños van nutriendo su pensamiento multiplicativo, se van transformando en un carácter formal, permiten que se dé una comprensión en el proceso de resolución, ya que como lo evidencian los autores hasta ahora, se requiere en primera medida recurrir a dibujos, esquemas y demás medios conocidos por los niños y posteriormente la utilización de estrategias que se van alcanzando en el transcurso del aprendizaje.

De acuerdo con Godino, Cid y Batanero (2004) el uso de estas estrategias en la resolución de problemas multiplicativos y de división “no es tan frecuente como si lo es en la suma y en la resta, debido a que la escuela ejerce una fuerte presión en el aprendizaje memorístico de las tablas de multiplicar” (p. 78), lo que impide que los niños lleven un proceso en donde desarrollen estrategias para resolver estos problemas, por el

contrario gracias a la memorización de la tabla, recurren directamente a esta; debido a esta los autores proponen seis estrategias frecuentes en la obtención de resultados a través de la tabla de multiplicar.

La primera de ellas es la “suma reiterada” que consiste en sumar el multiplicando tantas veces como indique el multiplicador, la segunda es “recitar la tabla” para esta, si le piden al niño efectuar la multiplicación 7x8, este recita toda la tabla del 7 hasta llegar al resultado pedido. “Permutar términos” esta consiste en cambiar el orden de los factores, también conocida como multiplicación conmutativa y es una estrategia muy utilizada por los niños; continuamos con “sumar o restar el multiplicando o el multiplicador”, en esta para calcular el producto de ocho por seis, se piensa “ocho por seis, cuarenta y ocho, más ocho, cincuenta y seis o bien ocho por ocho, sesenta y cuatro, menos ocho, cincuenta y seis” (p. 79).

Otra estrategia es “Calcular el doble o la mitad” que consiste en efectuar de la siguiente manera "seis por cuatro; seis por dos, doce, por dos, veinticuatro o siete por cinco; siete por diez, setenta, la mitad treinta y cinco" (p. 79) se hace de ambas manera, ya sea sacando la mitad o el doble. Por ultimo establecen una estrategia bastante utilizada por todos que es “calcular con los dedos” principalmente en la tabla del 9, la estrategia con los dedos resulta muy útil.

Por lo tanto, en relación a las estrategias implementadas para la resolución de problemas multiplicativos, Escobar (2013, párr. 1) plantea que los niños pueden solucionarlos en distintos niveles de abstracción; para ello propone la metodología COPISI en la cual se trabaja con representaciones concretas, pictóricas y simbólicas, los niños pueden transitar desde lo concreto hacia lo abstracto, partiendo de la manipulación

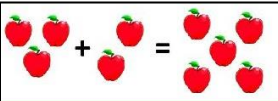
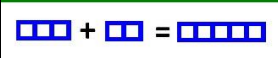
	CO	COncreto
	PI	Pictórico
3 + 2 = 5	SI	Smbólico

Figura 16. Modelos de representación.

Fuente: Escobar (2013, Párr. 1)

de materiales concretos, para posteriormente pasar a las representaciones pictóricas que son aquellas que pertenecen a “esquemas simples (cruces, marcas, círculos, cuadraditos, marco de 10, tabla de 100 y recta numérica) que permite a los estudiantes desarrollar imágenes mentales” (2013. Párr. 2). Después de haber pasado por estas dos formas de

representación, se espera que los niños gradualmente vayan prescindiendo de ellas, para llegar a operar de manera simbólica. (Véase figura 16)

Castro (2001) complementa al decir que el aprendizaje de las matemáticas va de lo concreto a lo abstracto, en contravía al aprendizaje tradicional, de esta manera cuando un estudiante ya reconoce las abstracciones en los materiales, ya que “los números son una abstracción, pero llegado un momento del aprendizaje matemático, estas abstracciones pueden considerarse objetos concretos con los que realizar tareas matemáticas” (p. 48)

Más adelante, define que todos los estudiantes sin embargo aprenden de diferentes formas, en estilos de aprendizajes diversos, algunos orientados al trabajo en grupo, otros en relación a situaciones concretas, también de forma más genérica. Agrega que una variable a tener en cuenta es el “tiempo cognitivo” (p. 50) en relación al tiempo que llegan a emplear en la toma de decisiones al trabajar problemas matemáticos.

Después de haber analizado las diferentes estrategias que han estudiado los autores ya mencionados, se evidencia que en varias de estas hay coincidencia, es decir, se describen la misma, como la suma reiterada que propone Godino, Cid y Batanero (2004), que equivale a la representación esquemática que plantea Castaño (1996) y también los hechos derivados que propone Castro (2001); esto da a conocer que los niños y niñas suelen utilizar las misma estrategias, aunque no quiere decir que sean las únicas a las que acuden, cada sujeto posee esquemas de conocimientos diferentes que les permite adecuar y utilizar las apropiadas para su comprensión, de ahí que las propuestas por estos autores son algunas de las más utilizadas, pero no necesariamente son las únicas válidas para hacer cálculos multiplicativos.

3.1.6. Tabla de multiplicar

La construcción de la tabla de multiplicar es fundamental para el aprendizaje de las operaciones de la estructura multiplicativa, y de la multiplicación en general; tradicionalmente su construcción se ha dado de forma memorística en un orden creciente desde la tabla del 1 hasta la del 10, se inicia trabajando con todos los productos que tienen el mismo multiplicador, comenzando a partir del 2 hasta llegar al 10 y posteriormente se van dando las combinaciones “Al principio no se utiliza el símbolo \times o

el •, sino el término “veces”, que progresivamente se irá sustituyendo por el símbolo”. Castro, E., Castro y Rico (1995). Es importante que se haga la construcción de la tabla con los niños, no solo que sea de manera repetitiva y de memorización, es fundamental que en la construcción los estudiantes sean sujetos activos que también construyen, para así alcanzar una comprensión de las mismas; además se debe iniciar de la idea básica de suma reiterada.

En efecto la tabla de multiplicar debe ser una construcción a la que se le dedique el tiempo necesario ya que es fundamental que los niños y niñas reconozcan el empleo de las mismas en la resolución de problemas, después de esto ya se debe comenzar a exigir poco a poco la memorización, teniendo en cuenta que el énfasis está en la comprensión (p.51). Para la elaboración de la tabla se hace con la de doble entrada, esta se obtiene construyendo un cuadrado dividido en 100 subcuadros de 10 x10, es decir 10 verticales y 10 horizontales, en la primera fila y en la primera columna se colocan los números del 0 al 9 y luego se llena toda la tabla de forma ordenada ya sea por fila o por columna hasta llegar al 100 y completar de rellenar, siguiendo el criterio que se explica a continuación:

Al continuar una fila (o columna) se escribe el mismo número que aparece en su cabecera y se continuará contando (o añadiendo) a “saltos” iguales a los que indique dicho número, por ejemplo, si tratamos de rellenar la fila encabezada por dos escribimos dos en el cuadro siguiente y los restantes los rellenamos contando de dos en dos (o sumando dos cada vez). (p.52).

Para conocer el producto, se establece el punto de encuentro de la fila y la columna, como se muestra en la imagen anterior; teniendo en cuenta que estas están encabezadas por los dos factores que componen el producto. (Véase figura 17)

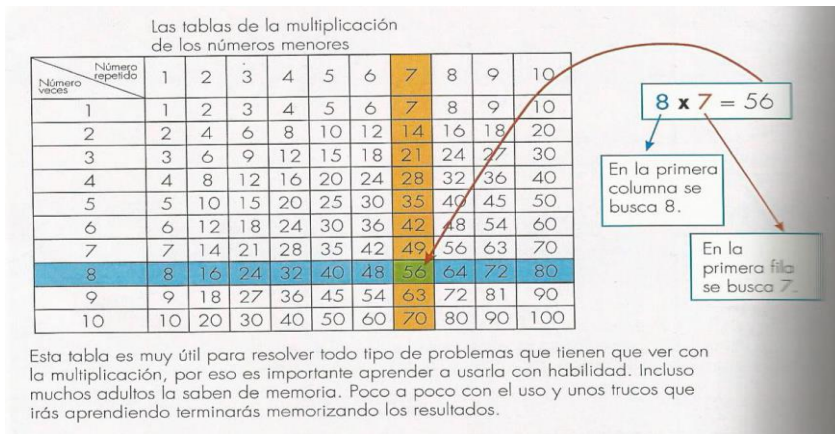


Figura 17. Tabla de multiplicar.

Fuente: MEN (2010, p. 50)

3.1.7. División

Esta operación se concibe como la separación o partición de una cantidad en partes iguales, tanto la multiplicación como la división son operaciones que forman parte de una misma estructura algebraica, en donde el punto de partida es la multiplicación, y posteriormente se define la división a partir de la multiplicación; ambas están directamente relacionadas ya que las operaciones pueden ser convertidas entre sí, es decir “ $a \div b$ con $b \neq 0$ (cero) equivale a que existe un número $c \cdot b = a$ ”, lo que significa que

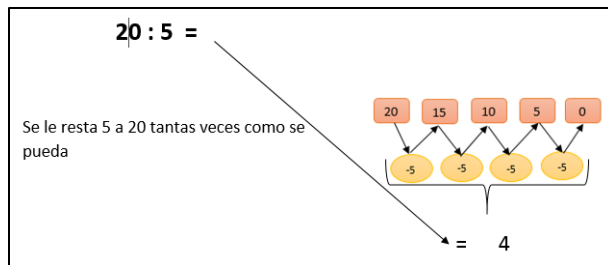


Figura 18. División.

Elaboración propia

se quiere comprobar el resultado de alguna de las dos operaciones, se puede recurrir, ya con el resultado, a realizar la operación contraria, para así evidenciar la relación entre ambas operaciones; mientras que la multiplicación se utiliza para acrecentar, aumentar, reproducir una cantidad, la división por el contrario se utiliza para

indicar una disminución al separar en varias partes no necesariamente iguales, también se emplean términos sinónimos de la división tales como disminuir, decrecer, repartir y distribuir.

La división tiene el carácter o función de abreviar restas repetidas, de lo anterior se puede señalar que la división es la manera corta y rápida de obtener esos resultados.

3.1.7.1. Algoritmo de la División



Figura 19. Algoritmo de la división.

Fuente: Un espacio para profundizar tu aprendizaje

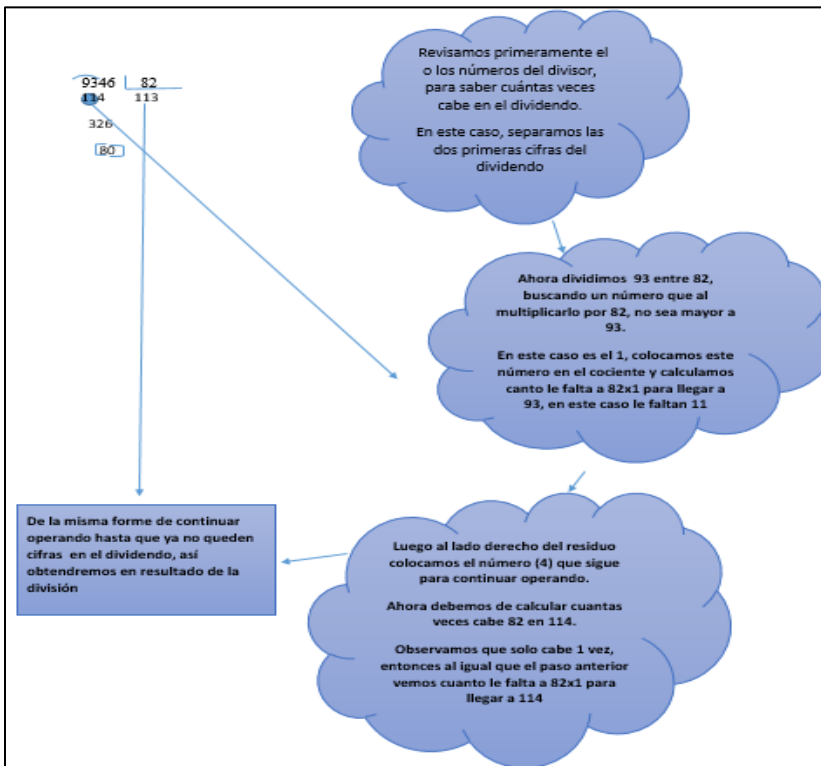
Dividendo: es la cantidad que se quiere **repartir** y por la cual se realiza la división.

Divisor: es el número por el cual se divide la cantidad indicada en el dividendo.

Cociente: es el **resultado** de la división.

Resto: es el número que sobra de la división, es decir, la parte que no se ha podido distribuir. Puede ser cero o un número menor que el divisor

Es importante mencionar que el algoritmo de la división a diferencia de otros, se



resuelve de izquierda a derecha, lo primero que se hace es identificar cuántas cifras tienen el divisor y el dividendo para así saber cómo se debe repartir.

Para explicar cómo se resuelve este algoritmo, se tendrá en cuenta la figura 20.

Figura 20. Solución del algoritmo de la división.

Fuente: elaboración propia

3.1.7.2. Tabla de dividir

Para la división, la construcción de la tabla es la misma, cambia es la manera como se obtiene el resultado, en este caso el cociente y al igual que el algoritmo, la tabla y su uso

para la división se enseña posterior al trabajo con la multiplicación; cuando se llega a este punto, en donde los niños comienzan a comprender el manejo de la tabla para dividir, ya la deben conocer y haber trabajado con ella, por lo cual tomará menos tiempo, ya que la construcción y el manejo para la multiplicación permitió que se interactuara con esta.

Teniendo en cuenta que la tabla es la misma a continuación se explica su uso para obtener el cociente de una división:

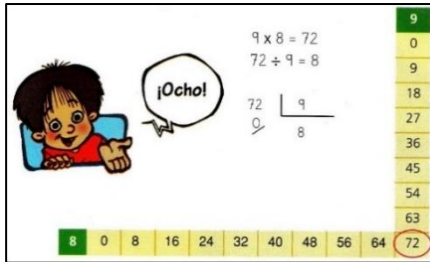


Figura 21. Tabla para la división.

Enseguida “buscaremos el resultado de $72 \div 9 = ?$ Buscaremos en la columna del 9 el número 72 y observaremos el número que encabeza la fila del 72. Ese número, el 8 es el resultado de la división” División con la tabla pitagórica (2020, párr. 1) $72 \div 9 = 8$. De igual manera sabremos que 72 dividido en 8, es 9.

Fuente: División con la tabla pitagórica (2020, párr. 1)

3.1.7.3. Tipos de problemas

En cuanto a los problemas que conllevan operación con la división, requieren un adecuado conocimiento previo de la multiplicación, ya que es importante que se logre establecer la relación de estas dos operaciones, resolviendo la división a partir de la multiplicación; el autor Masa aborda cuatro problemas de división, los cuales se establecen a continuación:

Tabla 10. Problemas de división.

Agrupamiento – razón	Su solución se da por resta reiterada
Partición – razón	A través del reparto
Agrupamiento – comparación	Adición repetida a partir de la cantidad inicial
Partición – comparación	Una cantidad debe repartirse entre un cierto número de grupos de modo que cada grupo reciba el mismo número de elementos.

Elaboración propia. Fuente: Maza (1991, p 37)

3.1.8. Modelos de representación de problemas multiplicativos – división

El uso de modelos hace parte del proceso de resolución de problemas, siendo estos claves para abstraer las diferentes relaciones y transformaciones que ocurren en los contextos numéricos, los modelos de representación, surgen de las ilustraciones y esquemas que los niños y niñas utilizan para alcanzar la comprensión de las distintas situaciones problemáticas; además “Cada operación tiene sus propios modelos que ponen de manifiesto los contextos generales del número y la peculiaridad de cada operación” Castro, Rico y Castro (1995, p. 19). A continuación se presentan los 6 modelos principales que se utilizan para el producto, como ya se mencionó cada uno de ellos enfatiza en un contexto particular.

Modelo Lineal, este es el modelo de recuento, se da sobre la sucesión numérica de a en a hasta hacer n veces el recuento. (1995, p. 46), esta destreza se estimula en los estudiantes, por medio de recuento de 2 en 2, 3 en 3, 5 en 5 etc. La segunda familia de modelos pertenece a los **modelos cardinales** o contextos cardinales, para utilizar uno o los dos factores; los tipos más utilizados de este modelo son: la unión repetida de conjuntos cardinales, la distribución de objetos en esquema rectangular, representación mediante producto cartesiano de dos conjuntos, por último la forma más convencional de representar un producto utilizando conjuntos, es mediante el diagrama de flechas.

El tercer modelo hace referencia a los **modelos con medida** estos se utilizan para las longitudes, siendo las regletas de Cuisenaire el instrumento más adecuado para representar este modelo. El cuarto, es el **modelo numérico** que aparece cuando se considera un contexto simbólico, en este caso en producto es una suma reiterada. **El modelo de razón aritmética**, estos son modelos de razón o comparación, en ellos hay que comparar entre dos conjuntos o dos cantidades, en términos de “cuántas veces más”. Por último encontramos el **modelo funcional** que son aquellos casos en los que el producto aparece con carácter de operador. (Véase figura 22)

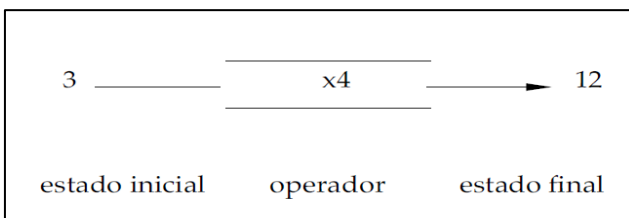


Figura 22. Modelo Funcional.

Fuente: Castro E, Castro y Rico (1995, p. 50)

3.1.9. Errores de aprendizaje

Para Castro (2001) en el aprendizaje de las matemáticas los estudiantes pueden cometer ciertos errores y que estos son “indicadores de la forma en que han comprendido la tarea, es decir, son muestras externas de la estructura mental que se ha formado el alumno que los comete” (p. 53) por tanto plantea que para hacer un análisis de los mismos se debe hacer teniendo en cuenta:

- a) *Saber lo que han aprendido los alumnos/evaluación diagnóstica*
- b) *Profundizar en los significados que atribuyen los alumnos a los conceptos matemáticos (las estructuras conceptuales que se han formado)*
- c) *Hacer matemáticas y estudiar el alcance y significado de las propiedades matemáticas* (p. 54)

El autor continúa hablando de los tipos de errores teniendo una clasificación según aquellas causas que los originan, por ello cita a Socas (1997) quien los identifica así:

- “a) *Errores que tienen su origen en un obstáculo.*
- b) *Errores que tienen su origen en una ausencia de sentido.*
- c) *Errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales.*” (Castro, 2001, p. 55)

Dentro del análisis posterior, se tienen en cuenta las anteriores consignas para reconocer la actividad matematizadora de los estudiantes durante la propuesta.

3.1.10. Material didáctico para la multiplicación y la división

Los materiales didácticos son todos esos objetos que se utilizan para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Se elaboran teniendo una finalidad educativa y algunos de ellos se han popularizado por sus múltiples usos ya que “son modelos físicos de ciertas relaciones matemáticas” (Castro E. , *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria, 2001, pág. 62*) como los bloques de Dienes.

El material didáctico permite observar cómo los estudiantes trabajan los diferentes problemas matemáticos, sean estos con cantidades para contar, imágenes, representaciones de números (puntos, rayas, figuras) o números por escrito. De acuerdo a Escobar (2013) se hace una clasificación de los materiales didácticos de la propuesta así: concretos, están las regletas de Cuisenaire, ranita sumadora, tablero multiplicativo,

entre otros; pictóricos, tales como tablas numéricas, fichas de Multiplin, dominó y bingo matemático. Por último los simbólicos que pertenecen más al pensamiento abstracto como las hojas de anotación y algoritmos.

Por otra parte Chamorro (2005) establece unos criterios mínimos para la elección y utilización del material didáctico, el cual debe ser adecuado para que los estudiantes logren producir un resultado coherente con lo que están trabajando, para ello es fundamental que los maestros en sus planeaciones sepan cuáles son las mejores elecciones. Así la autora propone unas condiciones esenciales que deben reunir los materiales: En primer lugar está la “autonomía de usuario” (p. 265), es decir que el material brinde la posibilidad de actuar sobre él; en segundo lugar el material debe responder a soluciones previamente adoptadas, más precisamente al tema a trabajar; la tercera condición es que el material funcione a las ordenes emitidas por el usuario según el tema a trabajar, finalmente el material debe permitir que el usuario vea el resultado de la acción programada (p.15).

Según Castro, Castro y Olmo (2002) los niños a través de su desarrollo manipulan gran variedad de objetos dependiendo la edad, pasan por unas fases en el uso de éstos, desde bebé “construye sus esquemas perceptivos y motores a partir de materiales como: sonajeros, muñecos, llaves; específicamente pensados para este fin. Así como también de los objetos en su entorno como: cuchara, biberón, botes etc.” (p. 15), luego pasan al periodo simbólico, que es en donde utilizan objetos representativos de su entorno, hasta llegar a una fase más avanzada en donde se le introduce de modo progresivo un material más estructurado, el cual está,

Diseñado especialmente para la enseñanza de las matemáticas, como son los bloques lógicos de Dienes, las regletas de Cuisenaire (o números en color), o los ábacos. Estos materiales no son figurativos y presuponen una mayor capacidad de abstracción, pero a la vez son previos al uso exclusivo de los signos numéricos. Aunque cada tipo de material estructurado ha sido diseñado para favorecer la adquisición de determinados conceptos, la mayor parte de ellos podríamos decir que son multiuso, en la medida que se pueden utilizar para varios conceptos y objetivos. (Castro, Castro y Olmo, 2002, p.15)

Por lo anterior, los materiales didácticos comienzan a ser más apropiados y útiles en el trabajo de los conceptos propios de la matemática, aquí los niños y las niñas van desplazando los juegos simbólicos (escondarse, personificar, entre otros) y se empiezan a familiarizar con este tipo de materiales que les permite hacer representaciones concretas en la resolución de problemas matemáticos. En resumen, el autor reconoce que el pensamiento del niño en la infancia es concreto, pero a medida que va pasando por diferentes etapas de su formación, transita hacia lo abstracto (p.14), por lo cual el material facilita ir alcanzando esas etapas posteriores.

Existe una gran importancia con relación a la enseñanza de las matemáticas, y es que una metodología no puede basarse de manera explicativa con únicamente lápiz y papel, aquí el estudiante toma una postura pasiva, por esto Enrique Castro afirma que:

Investigaciones en educación matemática informan sin embargo, de que esta metodología no es la más apropiada si no va acompañada de otras en las que el alumno se implique de manera más “real” y el aprendizaje se afiance y sea duradero, mediante experiencias relevantes, mediante el uso de materiales didácticos o incluso dramatizando conceptos (Castro, 2001, p. 69)

Lo anterior tiene mayor relevancia si se trabaja por grupos heterogéneos, donde dependiendo los niveles de comprensión de cada estudiante, pueden ir mejorando sus rendimientos, de acuerdo a sus capacidades y a la disposición e interés que impriman en la solución de problemas matemáticos.

Este autor plantea la existencia de dos escenarios en el trabajo con material didáctico, el primero se parte del material y allí el maestro se pregunta qué tipo de actividades son útiles para que estudiantes puedan usarlos. En la segunda se empieza por una actividad pensada y el maestro inicia una búsqueda de aquellos materiales que resulten adecuados para beneficiar el aprendizaje de sus estudiantes (p. 62)

Para ultimar, es importante aclarar que la manipulación del material no es de manera libre, hace parte de actividades dirigidas por el adulto, ya que “a través de las actividades que el niño realiza, con los materiales didácticos, puede avanzar en su proceso de abstracción de los conocimientos matemáticos” (Castro, Castro y Olmo 2002, p. 14), estas actividades dirigidas son fundamentales ya que las ideas abstractas no se dan de forma espontaneas, los estudiantes requieren de las actividades para realizar

operaciones con los objetos, hasta que llegan a interiorizarlas y logran niveles de operación sin el soporte del material, como puede ser apoyándose en los dedos de su mano o haciendo cálculo mental.

3.2. Marco didáctico

En la corriente didáctica originaria en Alemania, conocida como Educación Matemática Realista (EMR en adelante), que reconoce como fundador a Hans Freudenthal (1905 - 1990); busca oponerse al movimiento de matemática moderna de los años 70 y al enfoque mecanicista de la enseñanza. Muchas de las ideas de esta corriente, se desplazaron rápidamente a distintos países de Europa, América, Asia, entre otros; reconociendo como noción central que “la enseñanza de la matemática debe estar conectada con la realidad, permanecer cercana a los alumnos y ser relevante para la sociedad en orden a constituirse en un valor humano” (Bressan y otros, 2016, p. 2). La EMR brinda a los estudiantes la posibilidad de aprender de una forma diferente y más comprensiva.

Esta idea de Freudenthal, aparece de la preocupación esencial de la realidad educativa y académica de su época, ya que se tenía una imagen de las matemáticas, como algo solo para las elites y no para todos; él consideraba que todos los estudiantes debían de tener contactos con el quehacer matemático, debido a que esta es una actividad estructurante u organizadora de matematización que debe estar al alcance de todos los seres humanos. El Grupo Patagónico de Didáctica de la Matemática (GPDM en adelante) reconocen cinco ideas centrales de este enfoque; la primera, considera que los aprendizajes deben partir del contexto y situaciones problemáticas realistas que faciliten la comprensión; la segunda se refiere a la utilización de modelos, tales como esquemas, diagramas, material lingüístico etc. que emergen de la misma actividad y que se considera un apoyo para ayudar a la representación y organización de los contextos y situaciones ya mencionados; en la tercera, el maestro es clave en este enfoque, su papel es llamado como “reinención guiada”, es considerado un guía organizador de la interacción, en la cuarta idea, la interacción de los estudiantes es clave para la construcción del conocimiento, y considera el aprendizaje de las matemáticas como “actividad social” ya que la reflexión colectiva posee un valor grande para la comprensión;

la quinta, la integración de los ejes es fundamental para la resolución de las situaciones reales, ya que se requiere la integración de unidades curriculares porque en la cotidianidad no se encuentran los problemas fragmentados por bloques temáticos. (2016, Pp. 3-6)

Cabe destacar que estas cinco ideas que cimientan este enfoque guían el proceso de matematización progresiva, que es también un elemento esencial en este método de enseñanza-aprendizaje; antes de continuar es importante conocer que es la matematización, la cual significa razonar matemáticamente para llegar a resolver problemas del contexto, para alcanzarlo se debe hacer una búsqueda de lo esencial en las situaciones presentada, en los problemas, en los procedimientos, también incluye la ejemplificación de ideas generales, dicho por Bressan y otros (2016) donde matematizar es “buscar atajos y abreviar estrategias y simbolizaciones iniciales con miras a esquematizarlas, algoritmizarlas, simbolizarlas y formalizarlas” (p. 2). Así mismo el matematizar implica reflexiones acerca de las actividades o problemas situacionales para así conseguir ejecutar modelos y formulaciones que lleven a la resolución.

Por su parte la EMR considera la matematización como un proceso que se desarrolla de manera progresiva, ya que el objetivo de esta es que se dé un pasaje del conocimiento, partiendo del conocimiento informal, al preformal y de este al formal, este pasaje es posible, si se profundiza en “el proceso de matematización y la formulación de secuencias didácticas adaptables a diversas aulas” (Bressan y otros, 2016, p. 6). Para que se dé un proceso de matematización progresiva, este enfoque admite que se debe pasar por distintos niveles de comprensión, los cuales son 4 (situacional, referencial, general y formal) que van acompañados del uso de estrategias, modelos y una constante reflexión. (Véase en la figura 23)



Figura 23. Niveles de matematización.

Elaboración propia, fuente: Bressan y otros (2016, p. 7)

Aun cuando se establece un orden en los niveles de matematización, son dinámicos y los estudiantes pueden pasar de uno a otro siempre que los requieran, ya que ninguno está totalmente separado del otro, además que siempre los de mayor nivel incorporan conocimientos de los niveles inferiores, ya que todos pueden incorporar aspectos de un mismo contenido (p. 8), estos niveles permiten que los niños vayan escalando conocimientos y habilidades que poco a poco los van conduciendo al conocimiento formal o conocimiento propio de las matemáticas.

Otra parte importante de este enfoque es que identifica dos modalidades de matematización: horizontal y vertical, la primera “consiste en convertir un problema contextual en un problema matemático, basándose en la intuición, el sentido común, la aproximación empírica, la observación, la experimentación inductiva” (Bressan, Zolkower y Gallego, 2005, p. 6) y en cuanto a la segunda matematización toma a la matemática misma como objeto de estudio, involucrando procesos de abstracción, para analizarla y hacerla más matemática:

Que cierto aspecto de la actividad matemática de una persona sea llamado ‘vertical’ u ‘horizontal’ depende si la actividad incluye alguna extensión de su realidad matemática. Una actividad de simbolización, por ejemplo, podría ser una actividad de rutina para un alumno. Esto sería un caso de matematización horizontal. Sin embargo, si la misma forma de simbolización involucrara para otro alumno una nueva invención, entonces esto implicaría matematización vertical. (Zolkower, Bressan y Gallego, 2006, p. 20)

En este trabajo se quiere llegar a generar experiencias que surjan de la cotidianidad y de la necesidad del estudiantado, con el fin de que en ellos, se dé una comprensión verdadera y con significación; para esto es fundamental abordar distintos autores que han analizado las posibles causas que propician la incapacidad de los estudiante al interpretar y resolver problemas multiplicativos; la dificultad de los estudiantes, puede radicar en la falta de contextualización de los problemas, menciona debido a que el rol de los contextos es fundamental en la formulación de preguntas, ya que por medio de este, los estudiantes pueden traer sus experiencias y saberes previos, elaborar, argumentar y probar estrategias de resolución, porque se está partiendo de situaciones conocidas por ellos, en donde pueden imaginar las situaciones planteadas, para pasar a la representación y modelización. Es por esto que el contexto cobra gran sentido en la comprensión que los sujetos lleguen a tener.

Generalmente en la enseñanza-aprendizaje de la multiplicación y los problemas que se resuelven con ella, los maestros caen en la utilización de contexto impropriamente usados o en enunciados que contienen términos poco comunes para los niños, esto pasa debido al afán que hay en las escuelas por que los estudiantes aprendan a manejar algoritmos y operar de manera acertada, descuidando con esto la importancia y utilidad del contexto en la significación que los niños hacen, es por esto que Alsina, C (s.f.) menciona que es “importante trabajar la realidad a través de ideas y nociones matemáticas” (p. 10), para así generar un mayor interés en los estudiantes hacia el aprendizaje de los elementos matemáticos.

No cualquier contexto es real, lo real es referido al entorno natural, social y cultural que rodea a los niños y niñas, a partir de esto es que los matemáticos consideran que la matemática es una cultura para actuar, por ello no podemos enseñarla de manera abstracta, porque está hecha para desenvolverse en el mundo real, es por esto que en los problemas que presentamos a los niños debemos acercarlos a su cotidianidad y no intentar fingir una realidad.

Muy a menudo tenemos una tendencia a falsear la realidad creando una ficción en la cual es “la realidad” la que se pone al servicio de la matematización y no al revés. Pero además en el terreno educativo deberíamos tener especial sensibilidad para restringir

la realidad matematizables a los casos que puedan ser de interés para el alumnado. (Alsina, C., 2008, p 3).

Si bien es fundamental que la realidad se logre matematizar para así llegar a la resolución del problema, no podemos restringirnos únicamente a ese aspecto, porque un punto central en la matematización, es que el problema sea real y no que intente parecerse y además genere la falta de interés en los estudiantes, Alsina, C. (2008) hace una crítica a aquellos tipos de problemas que se encuentran en los textos y que no tienen ningún sentido real.

La ley del movimiento de un cuerpo está expresada por la función $e=t^4-3t^3+2t^2$. Halle en qué intervalos de tiempo el móvil avanza en un sentido o en otro.

¡Inadmisibile! Aunque aparentemente aparece un contexto físico de Cuerpo-móvil (¿es un robot? ¿Es una manzana?) Se nos da una función gratuita sin ningún sentido físico (si t se da en segundos ¿...en qué se mide e?). (p. 3)

En la anterior cita se puede observar, esos tipos de enunciados que no están relacionados con la realidad incluso mencionan situaciones absurdas, porque es evidente que lo que interesa es la operación, pero la comprensión y la representación que puedan hacer los estudiantes no es relevante.

Por otro lado cabe mencionar que existen multitud de contextos que permiten promover la actividad matematizadora, Pérez y Bressan (2006) reconocen entre varios a las imágenes, dibujos y fotografías como fuente para el desarrollo y aplicación de ideas matemáticas, resaltando esta herramienta como bueno contexto siempre y cuando “se relacionan con la vida cotidiana y contribuyen a cerrar la brecha entre la matemática escolar y la multitud de manifestaciones que esta disciplina tiene en la vida, las artes, la política, las ciencias, la tecnología, etc.” (p. 1), estas sirve de modelo de apoyo en el proceso de matematización progresiva, ya que por medio de estas el estudiante puede “intuir, estimar, medir, razonar y validar” (p. 1) contraponiéndose a al usos de estrategias abstractas y formales que tradicionalmente se utilizan: además de lo ya dicho las autoras resaltan un aspecto importante en los principios de la EMR y es que el uso de imágenes facilita la integración curricular entre distintas asignaturas y distintos ejes matemáticos.

3.2.1. Realidad

El “mundo real” significa el entorno natural, social y cultural donde vivimos. Y desde las Matemáticas deseamos educar para que las personas puedan beneficiarse de la cultura matemática para actuar, lo mejor posible, en este mundo real que es su mundo. Actuar a nivel personal, social y profesional tanto en el presente inevitable como en el futuro previsible (Alsina, C., 2008, p. 2).

Hablar del mundo real, al que se refiere el enfoque EMR, es referirse al contexto o entorno del presente del estudiantado, la realidad próxima; muchas veces los maestros caen en el error de falsear la realidad acomodándola a la matematización, cuando en realidad es lo contrario lo que debe suceder, la realidad de los estudiantes no la podemos modificar, más bien lo que se hace es organizarla y estructurarla para finalmente extraer de ella elementos importantes para lograr hacer la relación con las matemáticas.

La matemática debe entenderse como una realidad humana, uno de los principios de esta corriente propone que sean de los contextos y las situaciones problemáticas reales, de donde se generen las actividades problematizadoras de los estudiantes; un ejemplo citado por Alsina, C., en su documento geometría y realidad en donde defiende los referentes reales como estrategia de resolución de problema. “Una ventana tiene forma de cicloide. ¡Calcule la superficie del cristal “Horror! Nunca nadie hizo una ventana cicloide...” (2008, p.3). Esta autora, a través de este ejemplo de problemas, evidencia la manera abstracta o el lenguaje que utilizan las escuelas y las editoriales para presentarles ejercicios a los niños, los cuales, consiguen confundir al estudiante y no permiten la relación con la realidad.

3.3. Juego como estrategia de implementación.

El juego es una actividad universal, todas las civilizaciones han jugado y se continúa haciendo, ya que es una expresión natural fundamental en todas las culturas y tiempos, el ministerio de educación menciona que el juego es un reflejo de la cultura y la sociedad, por medio de éste se llega a relacionarse con las personas, el mundo exterior, con los objetos y el espacio, los niños y las niñas “juegan a lo que ven y lo que viven resignificándolo” (MEN, 2014, p. 18), por esta razón el juego hace parte de la elaboración

de mundo en cada sujeto, además de su formación cultural, el juego posee gran fuerza socializadora en el desarrollo infantil (p.18).

Del mismo modo el juego le permite a los sujetos expresar su forma particular de ser y estar en el mundo, por medio de la experimentación y el descubrimiento de sus capacidades, porque a través de éste los niños son participes activos; ante todo la participación en estas actividades de juego se dan de manera voluntaria, el juego es controlado por los mismos niños, son ellos quienes toman decisiones, llegan a acuerdos, demuestran sus capacidades, resuelven problemas y en general son quienes hacen posible y dan sentido al juego. Los niños adaptan el juego de acuerdo con su periodo de maduración intelectual motriz: para los niños en la etapa de primera infancia, “todo es juego y con todo juegan” (Pérez, Carreño y Bermúdez , 2013, p. 37) ya que este hace parte de sus intereses y de su vida en esa etapa, el juego es parte de las satisfacciones personales y sociales en estos niños y niñas.

Son muchas las publicaciones sobre teorías del juego, en general la mayoría de estas asocian el juego con un óptimo desarrollo de los niños y las niñas, ya que en efecto consideran que el juego es fundamental en el progreso de los aspectos motor, psicológicos, la maduración integral, la inteligencia, entre otros, éste se da de manera positiva en los aspectos cognoscitivos, afectivos y sociales, así que el juego estimula el desarrollo en los niños porque a través de este se reconocen las iniciativas y la curiosidad infantil. Se puede agregar que esta actividad promueve la atención y la memoria activa, puesto que mientras juega se concentra mejor y va ampliando la capacidad de recordar más cosas.

Por lo anterior expuesto, el juego cobra gran sentido en las actividades educativas como herramienta didáctica, puesto que es un instrumento de enseñanza participativa que se encamina a desarrollar métodos de dirección, propiciando la adquisición de conocimientos y desarrollo de habilidades que contribuyen a una motivación por el trabajo de las diferentes áreas de conocimiento, es así que Beltrán, Quintana y Ricaurte (2010) plantean el juego como “Actividad amena de recreación que sirve de medio para desarrollar capacidades mediante una participación activa y afectiva de los estudiantes, por lo que en este sentido el aprendizaje creativo se transforma en una experiencia feliz” (p. 16).

3.3.1. Tipos de juegos

El juego les permite a los niños recrear la realidad, y así mismo esta conducta innata de los niños y adultos se ha enriquecido a lo largo de la historia, por esto existen múltiples formas de juego y en relación a esto autores como Piaget, establecieron unas categorías que permiten clasificar los juegos de acuerdo con su aparición progresiva a lo largo de la evolución que los niños tienen en su desarrollo, a continuación, se presentan esas categorías:

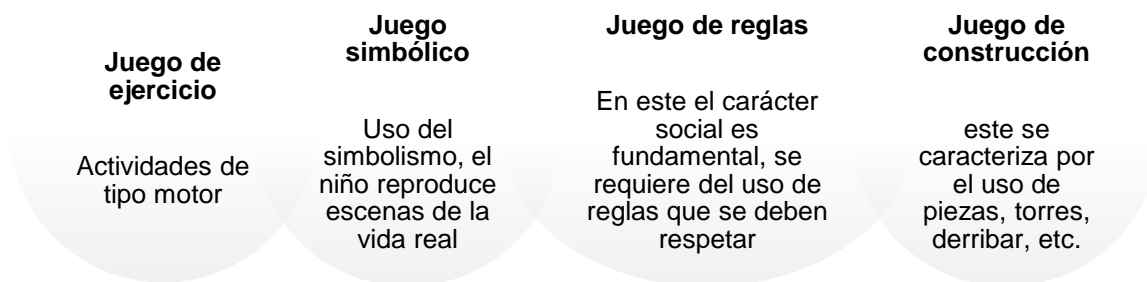


Figura 24. Tipos de juego.

Así como el niño va adquiriendo las habilidades para desenvolverse en cada uno de los tipos de juego, este es también un medio de aprendizaje y es por ello que en la actualidad éste se concibe como una actividad lúdica de aprendizaje escolar ya que tiene un papel fundamental en la educación debido a que integra actividades de percepción, sensoriomotoras, actividades verbales, etc.

Lo dicho hasta aquí supone que el juego posee aportes en el ámbito educativo, sin embargo Mora, Plazas, Ortiz y Camargo (2016) señalan que no se trata de jugar por jugar “es decir el simple activismo y desgaste de energías” (p. 140) por el contrario mencionan que el juego como método de enseñanza y aprendizaje debe de estar acompañado de una intención, una planeación y con unos objetivos específicos; para esto los autores reconocen que es necesario recalcar la importancia de reconocer el propósito de los juegos libres y dirigidos, refiriéndose a que el juego libre no se debe concebir como una pérdida de tiempo o es la forma de tener ocupados a los niños, por el contrario aceptan que “es un modo de favorecer la madurez del pensamiento creativo, así como la forma de incrementar sus capacidades motoras y cognitivas” (p. 140), por consiguiente el juego libre se debe tomar como la posibilidad que tienen los niños de interactuar, crear y

comprender reglas, adaptarse a ciertas pautas y la toma de decisiones en general frente al juego propio.

Lo que se refiere al juego dirigido, es aquel que conduce un adulto, en este se establece un puente entre el niño y el adulto, siendo este un instrumento de aprendizaje y de desarrollo, por lo que es necesaria una asertividad en la toma de decisiones por parte del adulto o los maestros; los autores ya mencionados exponen cuatro diferentes maneras de dirigir los juegos, en primer lugar esta la forma autoritaria, que es cuando la maestra decide todo lo que se va a realizar, la segunda forma es la bilateral, en esta la maestra observa, indaga y permite que se de la democracia, ya que la maestra deja que los niños se expresen, haciendo un ejercicio de observacion que le permite recoger aportes importantes para las proximas planeaciones, pero en este tipo, la maestra es quien finalmente decide. En último lugar, los autores proponen la forma óptima de desarrollar un juego dirigido, siendo aquel en donde la maestra da el modelo de juego y deja que los niños actuen libremente, permitiendo asi que los sujetos disfruten de la experiencia social que les da la oportunidad de desarrollar destrezas.

Cabe destacar que son variadas las combinaciones que se le da a la palabra juego; el autor Caillois (1986) recoge algunos de los significados que se le da a este, en primer lugar hay que mencionar la noción de “resorte principal de la civilización”, resaltando la importancia de este en todas las sociedades, ya que “se apoya en un sistema coherente y equilibrado, tanto de derechos como de deberes como de privilegios y responsabilidades” (p. 17), el juego en sí encierra un sinfín de posibilidades y la capacidad de desarrollar destrezas que posteriormente se verán reflejadas en la vida natural de las personas. Otros de los significados que este autor le da al juego es el de libertad, haciendo énfasis en la facilidad de movimiento, el de libertad útil, pero no desbocada o excesiva, esa libertad según Caillois debe “mantenerse en el seno del rigor mismo para que este adquiera o conserve su eficacia” (p. 12),

Otro de los atractivos del juego es el carácter de regla y competencia, en primer lugar la regla es muy importante y en muchos de los juego imprescindibles, ya que esta define la regularidad de las jugadas, siendo oportunas para la claridad del juego; es la regla la encargada de la “precisión, la pureza y la imparcialidad de un juego” (p. 14), la regla hace que el juego tenga las mismas condiciones para los jugadores ya que no favorece, ni

agrede a nadie, por ello como se ha dicho la regla es sumamente valiosa para dar equilibrio al juego. En cuanto a la competencia, un aspecto importante para Caillois, menciona que estos en particular desembocan en los deportes y tiene gran relación con todo lo que tiene que ver con fuerza, habilidad, ejercicio, entrenamiento, flexibilidad y resistencia, entre otros, son juegos que “refuerzan y agudizan determinada capacidad física” (p. 17). A pesar de todas estas características del juego de competencia y la seriedad de las reglas, el autor menciona que esto no deja que se pierda la capacidad de diversión y disfrute que es un rasgo distintivo de todo juego.

A su vez Caillois establece una categorización según ciertas cualidades y elementos del juego, llegando así a establecer cuatro grandes áreas de clasificación relacionadas al predominio de la competencia, azar, simulacro y vértigo:

La primera categoría se denomina Agón, que pertenece a un grupo de competencias, son tipos de juego que buscan la igualdad de oportunidades que busca que los contrincantes “se enfrenten en condiciones ideales” (p. 43), son juegos que requieren de perseverancia y entrenamiento. La segunda categoría es Alea, está relacionada con la suerte y es muy característica del ser humano, sobre todo el adulto, ya que el juego mediado por el azar, tienen como particularidad que se debe esperar pasivamente la decisión, es un juego donde no hay una acción concreta de la persona, es por esto que no es un juego propio de los niños, porque para ellos “el jugar es actuar” (p. 51) y en este tipo de juego las habilidades de juego no cobran importancia, ya que todo depende de la suerte. En tercer lugar, está la categoría Mimicry, en este el sujeto juega a creer, es decir se despoja de quien es y se reinventa y actúa ser alguien más, este tipo de juego es característico de la habilidad de “hacerse creer o hacer creer a los demás que es distinto de sí mismo. El sujeto olvida, disfraza, despoja pasajera su personalidad, para fingir otra” (p. 52). Por último esta Ilinx que son aquellos juegos que “se basan en buscar el vértigo” (p. 58), es decir aquellos juegos bruscos que tienen la capacidad de hacer perder la lucidez y trastornar la realidad.

3.3.2. *El juego y las matemáticas*

Dado que esta investigación se enfoca en el aprendizaje de la multiplicación, se hace necesario establecer la relación que existe entre la matemática y el juego, muchas de las

características de la actividad lúdica, están presentes en el quehacer matemático, de ahí que se considere a esta ciencia como un juego, habría que mencionar además que ambos son pilares básicos de la cultura humana, dado que el juego como ya se mencionó en este documento, es una actividad natural y esencial, así mismo como lo es la matemática en la vida de un ser humano para hacer cálculos cotidianos, como estimar los gastos del mes, precisar el tiempo que ocupa alguna actividad, entre muchas otras acciones del día a día que requieren de la noción matemática; es por esto que se considera que el primer rasgo en común que tienen esta dupla es el hecho de ser actividades humanas esenciales.

Del mismo modo, Guzmán (1998) expresa que el juego y la matemática tienen en común principalmente su “finalidad y naturaleza profunda” (p. 61), así mismo los primeros acercamientos que un sujeto hace tanto al juego como las matemáticas comienzan con un mismo proceder, ya que “un juego cualquiera comienza con la introducción de una cuantas reglas, algunos objetos iniciales, piezas, cuya función queda definida por dichas reglas, exactamente del mismo modo que los primeros elementos de una teoría matemática” (p. 62). Tanto las teorías matemáticas, como los juegos se van introduciendo de tal forma que se inician con elementos básicos para su aprendizaje, en las matemáticas se inicia con acercamientos simples, explicaciones, ejercicios que parten desde lo concreto, hasta lograr que él sujeto adquiera una comprensión más avanzada y un manejo total de la teoría; esto mismo ocurre con la mayoría de juego, que comienzan con una explicación, una práctica de acercamiento, y a medida que se juega se van adquiriendo habilidades necesarias para llegar a la perspicacia necesaria y la adquisición de estrategias que favorecen el juego.

Al estudiante, el juego le permitirá conocer los resultados y estilos peculiares de sus contrincantes más avanzados, le reconocerá aquellas jugadas más complicadas, más profundas que le requerirá alejarse cada vez más de los elementos básicos; esto Guzmán lo relaciona con el “estadio de asimilación por el estudiante de los grandes teoremas y métodos que se han ido gestando a lo largo de los siglos” (p. 62); también hay una similitud en aquellos problemas inagotables de los grandes juegos, el sujeto trata de resolverlos de manera original, esto, corresponde a la investigación en problemas abiertos de matemáticas.

4. PROPUESTA PEDAGÓGICA

4.1. Descripción de la propuesta

La investigación que se desarrolla en el presente trabajo se basa en la búsqueda de elementos que permitan conocer cómo los estudiantes de tercer grado del CEB logran comprender el uso, la función e importancia de la multiplicación en el ámbito escolar y en la vida diaria de todos y todas; es por esto que se parte de la pregunta: ¿Cómo la Educación Matemática Realista puede favorecer en maestros y estudiantes el proceso de enseñanza y aprendizaje de la multiplicación en tercer grado de primaria? Teniendo presente que la Educación Matemática Realista es un enfoque que plantea la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de manera cercana para los niños y las niñas (Bressan y otros, 2016, p. 2), es decir, donde el proceso se va llevando de manera progresiva, comenzando de lo concreto y manipulable, pasando por las elaboraciones mentales propias hasta alcanzar poco a poco el nivel de abstracción y conceptualización siempre dentro del contexto de los sujetos.

Por lo anterior, las actividades de la propuesta pedagógica fueron pensadas para que los estudiantes se desarrollaran en situaciones que los llevaran a procesos de construcción del pensamiento multiplicativo a través del juego, allí se relacionaron las construcciones individuales y grupales de los estudiantes, con el uso de estrategias informales y el descubrimiento de los fenómenos y los conceptos matemáticos dentro de sus mismas actuaciones, por ello fue imperante comprender primero lo que sabían los estudiantes, de este modo las actividades iniciales se consideran un diagnóstico, que van relacionadas con las cuatro operaciones aritméticas, y después de allí surgieron los siguientes objetivos que orientaron el camino a seguir:

4.2. Objetivo general

- Diseñar e implementar una propuesta didáctica para la enseñanza de la multiplicación dirigida a los niños de grado tercero de primaria, a partir del enfoque Educación Matemática Realista en el colegio Ciudadela Educativa de Bosa.

4.2.1. Objetivos específicos

- Interpretar los diferentes significados que realizan los estudiantes en la resolución de actividades de enseñanza y aprendizaje de la multiplicación, partiendo de la descripción de sus procesos individuales.
- Analizar las estrategias propias de los estudiantes para responder a la solución de problemas de estructura multiplicativa.
- Fomentar experiencias a través del juego, reconociendo a este, como estrategia didáctica articuladora entre la realidad de los niños y las niñas y el aprendizaje de los aspectos de la estructura multiplicativa.

De acuerdo a las evidencias obtenidas en las principales actividades de la etapa de observación se orientó la propuesta al diseño e implementación de actividades que les permitió a los estudiantes posicionarse como actores principales en sus construcciones, y también a los maestros en formación como guías del proceso quienes observaron que los primeros no comprendían adecuadamente el trabajo con multiplicación. Consecuentemente, en las actividades de Bingo matemático, Tabla numérica, y Busquemos el tesoro, se trabajaron problemas de razón, las tablas de multiplicar, los múltiplos de los primeros 11 números, el valor posicional del SND con relación a la multiplicación, entre otros (ver anexo 4), esto se hizo con situaciones que permitieron hacer uso de material concreto y estrategias informales como ya se mencionó.

Como la EMR plantea el trabajo de los estudiantes a través de los niveles de comprensión en las actividades de la etapa de seguimiento (ver anexo 4) se siguió trabajando con la estructura aditiva y estructura multiplicativa, es el caso de las actividades de La ranita sumadora y dominó matemático, actividades que permitieron el trabajo con esquemas, tablas de anotaciones, representaciones simbólicas y pictóricas, en sumas reiteradas y restas reiteradas, más adelante, se encuentra la actividad de examen que permite comprender las estrategias, dificultades y fortalezas de los estudiantes en el uso del algoritmo usual de la multiplicación, insumo vital para el análisis, posteriormente, se proponen con mayor énfasis los problemas verbales, tanto en solución como creación de los mismos, un proceso significativo en el pensamiento multiplicativo

de los estudiantes, esto se aprecia en las actividades de La escalerita, ficha tapada y creemos nuestra propia escalerita. Ya en el Multiplin se emplea la lectura de problemas matemáticos solo con ayuda de imágenes, aquí los estudiantes interpretan, argumentan y solucionan correctamente los problemas. Finalmente, en la actividad de las regletas de Cuisenaire, se trabaja con este material concreto y los estudiantes que a final de año se quedaron en nivelaciones, ellos hicieron composiciones, descomposiciones y algunos problemas de razón, combinación y comparación multiplicativa, cabe resaltar que las propiedades de la multiplicación se trabajaron durante casi todas las actividades, en diferentes representaciones y con apoyo del material concreto.

Para hacer una mejor lectura del desarrollo de las actividades, en el cuadro de análisis didáctico de las actividades matemáticas del capítulo 5 se pueden apreciar.

4.3. Marco metodológico de la investigación

En este capítulo se determinan los instrumentos y técnicas a los que se recurrió para la recolección de la información necesaria, así como también se fijan el tipo de estudio de la investigación y las fases de estos.

Dada la perspectiva de esta investigación, se fundamenta en el enfoque constructivista, el cual sostiene que, según Balcázar, González, Gurrola y Moysén (2013) el conocimiento se deriva de las construcciones propias del individuo, que son resultados de la interacción de sus disposiciones internas, sociales, cognitivas, afectivas y ambientales; de las cuales el sujeto se construye como ser humano. Esta concepción constructivista de aprendizaje y de la enseñanza se organiza en torno a las siguientes tres ideas fundamentales:

1. El estudiante es quien construye su propio conocimiento, en el sentido que es él quien aprende y nadie más puede hacerlo por él, además el sujeto no es activo solo cuando manipula, explora, descubre o inventa, sino también cuando lee y escucha explicaciones.
2. Los estudiantes construyen o reconstruyen objetos de conocimientos que ya están contruidos, por ejemplo, construyen el sistema de lenguaje escrito, pero este sistema ya está elaborado.

3. La función del facilitador no puede limitarse únicamente a crear las condiciones óptimas en las actividades, sino también orientar al estudiantado a que se acerque de forma progresiva a lo que significa y representan los contenidos como saberes culturales.

Por lo anterior, se establece una relación y coherencia del enfoque constructivista con los componentes metodológicos de la Educación Matemática Realista, ya que en ambos es concebido al estudiante como un sujeto que va construyendo sus aprendizajes de modo creciente, en donde ellos son los protagonistas de sus construcciones.

4.3.1. Enfoque de la investigación

Por otra parte, según el interés del presente trabajo, resulta de gran utilidad el enfoque de investigación cualitativa, puesto que según Balcazar y otros (2013) este permite el estudio de la naturaleza profunda de los fenómenos, su estructura dinámica y posibilita la explicación detallada de los comportamientos y manifestaciones de dichos fenómenos; este enfoque tiene a consideración dimensiones de la interacción social, proporcionando información que se dejaría de lado si se estudiara de la forma cuantitativa; por consiguiente la investigación actual toma un carácter cualitativo, ya que propone espacios desde la interacción permanente entre estudiantes-estudiantes y estudiantes-docentes favoreciendo el estudio de los procesos del aprendizaje del pensamiento multiplicativo y todo aquello que emerge de las intervenciones pedagógicas con los estudiantes.

En la investigación cualitativa, el objetivo principal es la descripción y relación entre variables, estas en sus diversas modalidades (*investigación participativa, investigación de campo, participación etnográfica, estudio de casos, etc.*), estos tienen una característica común: referirse a sucesos complejos que tratan de ser descritos en su totalidad, en su medio natural. No hay consecuentemente, una abstracción de propiedades o variables para analizarlas mediante técnicas estadísticas apropiadas para su descripción y la determinación de correlaciones.” Austin Millán (2008) citado en Monje (2011, p. 8)

Cabe destacar que la investigación cualitativa según Millán (2008) busca que el investigador revele aquellos datos de sentido, es decir el significado de aquello que identifica en las personas, que además son subjetivos, dado que no se puede medir, pesar ni contar; en este tipo de investigación no se pueden hacer suposiciones por

adelantado, ya que el investigador debe “proceder a un cuidadoso reconocimiento del contexto del mundo de vida que constituirá su investigación e investiga tratando de conocer íntimamente a la gente” (2011, p. 91) a propósito de estudiar la realidad natural del contexto, tal como sucede para sacar sentido o interpretar los fenómenos, esto va acompañado de la recolección de una gran variedad de materiales que describen las rutinas y las situaciones problemáticas.

Es necesario mencionar que este tipo de investigación no se utiliza por falta de información objetiva, como se puede llegar a pensar, por el contrario la información cualitativa es una excelente herramienta, según Balcázar y otros (2013), debido a que proporciona información objetiva, además suministra información adecuada para responder preguntas que fácilmente no se responden con información cuantitativa, ya que se “requiere de información cualitativa, sobre las vivencias, percepciones, sentimientos y emociones de las personas” (p. 21) este tipo de información no puede llegar a ser cuantitativa, es por eso que esta manera de hacer investigación permite a los estudiosos otras alternativas de llegar al conocimiento para así resolver el problema planteado.

Otro de los objetivos de esta investigación es la comprensión que se centra en la indagación de los hechos, aquí el investigador no descubre, sino que construye el conocimiento, y para que se de esa construcción, la información se analiza desde uno de estos cuatro métodos de interpretación:

Tabla 11. Métodos de interpretación.

<p>Holístico: Este es contextualizado y se orienta según el caso, se resiste al reduccionismo y al elementarismo, es más importante la comprensión que una diferencia.</p> <p>Empírico: este se orienta al campo, su énfasis está en lo observable y es naturalista y se inclina por que su descripción se de en el lenguaje natural.</p> <p>Interpretativo: Aquí los investigadores se basan más en la institución y ponen principal atención a los sucesos relevantes.</p> <p>Empático: Atiende de manera intencional a los actores de la investigación, buscando su marco de referencia, la planificación de su diseño es emergente y sensible.</p>
--

Resulta lógico y razonable establecer que esta investigación entra en el método de análisis empírico, debido a que se pretende analizar los sucesos desde múltiples interacciones que caracterizan todo aquello que se evidencia en la recolección de los datos, en esta investigación se tienen en cuenta diferentes aspectos que intervienen en el aprendizaje de los niños, entre ellos el contexto y las situaciones que provocan motivación y conocimientos en los niños y niñas.

A continuación, se establecen las categorías y sub categorías de análisis que estarán como apoyo para el análisis de los datos recogidos en el trabajo de campo.

Cabe aclarar que cada uno de estos conceptos se encuentra ampliado en el marco conceptual de este documento.

4.3.2. Categorías de análisis – Diagrama

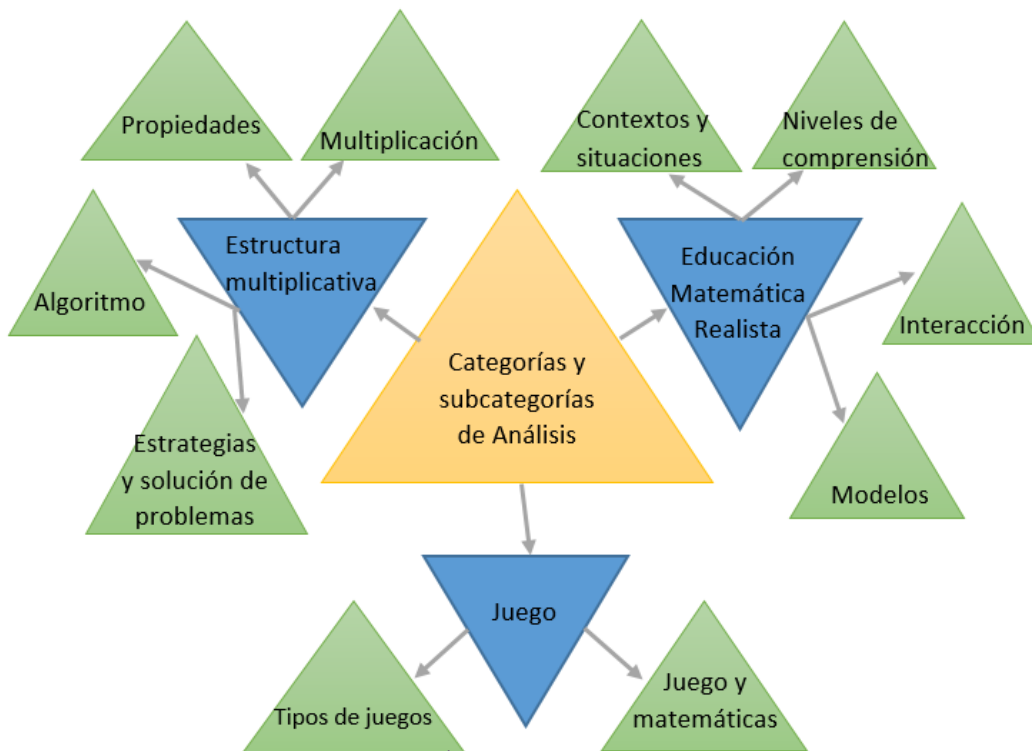


Figura 25. Diagrama de las categorías.

4.3.3. Definición de las categorías de análisis

Tabla 12. Categorías y subcategorías de análisis.

Categoría número 1: Estructura multiplicativa , esta comprende un conjunto de situaciones problema, que requieren de la multiplicación y la división para ser solucionadas, Castro, Rico y Castro (1995) señalan que el desarrollo de la comprensión de este campo conceptual está entre las edades de 7 a 18 años (p. 54).			
Subcategorías			
Multiplicación	Propiedades	Estrategias y resolución de problemas	Algoritmo y tabla de multiplicar
La multiplicación es una operación matemática que se caracteriza por tener un “aspecto Binario” Maza (1991) en su definición la establece como una suma reiterada, pero también le añade su concepción como comparación y producto cartesiano.	En este trabajo se describen las tres propiedades multiplicativas que aborda Maza (1991) conmutativa, asociativa y distributiva	En las Hojas Pedagógicas número 3, Castaño (1996), plantea 4 estrategias que los niños utilizan en la representación y resolución de problemas multiplicativos: Representación realista. Representación esquemática. Representación aditiva Representación multiplicativa Cada una de estas representaciones son momentos por los que los niños pasan para llegar a la construcción de su pensamiento multiplicativo.	Se plantea que un algoritmo es un conjunto de pasos bien especificados que llevan a un resultado preciso, y que están ligados, en su mayoría, a elaboraciones sintácticas de las expresiones simbólicas del lenguaje matemático. La elaboración y comprensión de la tabla de multiplicar es fundamental también para llegar a dicho resultado por eso también es preciso para el desarrollo de las operaciones.
Categoría número 2: Educación matemática realista , esta teoría propone a los estudiantes actividades de organización de situaciones problemáticas genuinas, es decir, que las actividades surjan del contexto mismo de los niños y las niñas con el objetivo de dar lugar a procesos de matematización; así mismo el aprendizaje se debe dar de manera progresiva que involucra distintos niveles que los niños van alcanzando poco a poco y a su ritmo individual. (Bressan y otros, 2016, p.6).			
Subcategorías			
Contextos y situaciones problemáticas realistas	Modelos	Interacción	Niveles de comprensión
Dado que los estudiantes en principio no cuentan con las herramientas matemáticas suficientes, es importante que las reinventen a partir de situaciones realistas	Los modelos como herramientas intermediarias, en la EMR, estos emergen durante el aprendizaje y son objetos de trabajo activos que ayudan a conducir al carácter formal de las matemáticas	La interacción en el aula debe de estar mediada por el maestro, quien es un guía y organizador de la misma, la matemática dentro de la EMR, es una reinención guiada “o sea, un proceso en el que los estudiantes re-inventan ideas y herramientas matemáticas a partir de organizar o estructurar situaciones problemáticas, en interacción con sus pares y bajo la	En la EMR los estudiantes pasan por 4 niveles de comprensión que les permite pasar del conocimiento informal al conocimiento formal, estos niveles son: situacional,

presentadas en contexto.		guía del docente” (Bressan y otros, 2016, p. 5)	referencial, general y formal.
Categoría número 3: Juego , es una actividad universal, todas las civilizaciones han jugado y se continúa haciendo, ya que es una expresión natural fundamental en todas las culturas y tiempos, el Ministerio de Educación menciona que el juego es un reflejo de la cultura y la sociedad, por medio de éste se llega a relacionarse con las personas, el mundo exterior, con los objetos y el espacio, los niños y niñas “juegan a lo que ven y lo que viven resignificándolo” (MEN, 2014, p.18).			
Subcategorías			
Tipos de juegos		Juego en la matemática	
El juego les permite a los niños recrear la realidad, y así mismo esta conducta innata de los niños y adultos se ha enriquecido a lo largo de la historia, por esto existen múltiples formas de juego; según Beltrán, Quintana y Ricaurte (2010) existen cuatro tipos de juego, juegos de ejercicio, juego simbólico, juego de reglas y juego de construcción. Del mismo modo Caillois (1986) establece también 4 tipologías, Agón, Alea, Mimicry e Ilinx.		Tanto el juego como las matemáticas son instrumentos poderosos para la exploración del mundo, tanto por su finalidad y su naturaleza tienen rasgos comunes; incluso la matemática misma es arte y juego, ya que en palabras de Guzmán (1989) “la matemática es un grande y sofisticado juego que además, resulta ser una obra de arte intelectual, portadora de innumerables ocasiones de una gran luz para explorar el universo” (p. 89)	

4.3.4. Recolección de datos

Para la recolección de datos se empieza por la observación, según Hernández, Fernández y Baptista (s.f.) esta consiste en “el registro sistemático, válido y confiable de comportamientos de conducta manifiesta” (p.190) plantean que existen dos tipos de observación: participante y no participante, esta investigación entra en la primera ya que como lo mencionan “el observador interactúa con los sujetos observados” (p.193), asimismo, reconocen que la observación se puede concebir como un sistema el cual cuenta con los siguientes pasos:

1. *Definir con precisión el universo de aspectos, eventos o conductas a observar,*
2. *Extraer una muestra representativa de los aspectos, eventos o conductas a observar,*
3. *Establecer y definir las unidades de observación, y*
4. *Establecer y definir las categorías y subcategorías de observación (p. 190)*

Por todo lo anterior se considera la observación participante como una herramienta importante la cual facilitó la interacción con los estudiantes en el aula y en las actividades, como en el análisis que se hizo de las mismas. Para apoyar este proceso se recolectó información con los siguientes instrumentos:

Diarios de campo: En los diarios de campo se hace una descripción detallada de los hechos más relevantes del día y una reflexión a partir de las experiencias o vivencias, el diario de campo se considera como una herramienta útil en la investigación ya que permite sistematizar, interpretar y analizar las conductas dentro y fuera del aula.

El diario de campo recoge también elementos críticos frente a la práctica educativa, los procesos de enseñanza y aprendizaje y el papel del maestro en formación. Los diarios se inician desde el primer día de práctica, teniendo como estructura, inicio, desarrollo y reflexiones (ver anexo 1).

Fotos y videos: Estos permiten observar las dinámicas de los estudiantes antes, durante y/o después de las actividades, son de gran ayuda ya que sirven para observar elementos importantes que se pasan por alto durante la actividad, por ejemplo: respuestas de los estudiantes, palabras usadas, gestos, comportamientos, actitudes, entre otros. (Ver anexo 2)

Grabaciones: Estas permiten tener mayor fidelidad en la recolección de información al retener con detalle las respuestas de los estudiantes en la mayoría de los casos al final de las actividades, estos momentos se emplearon para conocer las percepciones de los estudiantes acerca de la actividad, como dificultades, pasos a seguir para la resolución de problemas, roles en los grupos e interés por la actividad. (Ver anexo 2)

Hojas de respuestas: Estas se usan para interpretar el trabajo de los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos planteados en las actividades, se encuentran las escaleritas, las fichas (Multiplin), los exámenes, las hojas de anotaciones (Ranita sumadora) las hojas de problemas verbales y escritos, todas las anteriores se interpretaron y analizaron a la luz de los referentes teóricos. (Ver anexo 3).

Diálogo: El poder interactuar con los estudiantes antes, durante, después y fuera de las actividades sirvió a los maestros en formación como puente para conocer y entender a los estudiantes, ya que lo manifestado da cuenta de las dinámicas en el aula y cómo estas afectan en su proceso de aprendizaje.

Actividades: las actividades cuentan con una estructura que permite a los estudiantes hacer uso de una o más operaciones, como plantea la EMR, los estudiantes deben trabajar a partir de los diferentes niveles, de este modo, para trabajar con multiplicación se debe emplear la división, también con la suma que va de la mano de la resta y entre todas existe una interrelación (Castro, 2001, p. 213).

Las actividades como ya se mencionó, buscaban mostrar otras formas de abordar la multiplicación y las demás operaciones a la vez que incluían problemas verbales, escritos, algoritmos, esquemas, formas de representación, material didáctico, todo lo anterior en un contexto cercano a los estudiantes, estas se aprecian en las planeaciones. (Ver anexo 4)

4.3.5. Fases de la investigación

En el proceso de la investigación se trabajó a partir de las siguientes fases:

4.3.6. Fase de observación

Dentro de esta primera fase se buscó reconocer el contexto de la institución, caracterizar la población y acercarse a los estudiantes y maestro titular, además en la interacción dentro de clases se observa una problemática presente en el aula como ya se ha mencionado, está referida al proceso de enseñanza y aprendizaje de la multiplicación.

Este momento es importante ya que permite a los maestros en formación cuestionarse, a la vez que abre la posibilidad de pensar alternativas frente a lo problematizado.

4.3.7. Fase de delimitación

Dentro de la segunda fase fue fundamental la revisión minuciosa de documentos teóricos que permitieran un acercamiento al tema seleccionado para la investigación; reconociendo de esta manera aquellas pesquisas abordadas en el pasado y que tienen relación con lo que aquí se busca desarrollar, se encontró de esta manera unas investigaciones con contenido relevante que permitieron aterrizar ideas y hacer una delimitación del tema.

A partir de estos sustentos teóricos se generó un cuerpo conceptual significativo para los maestros en formación, formando bases para el abordaje del tema a profundidad.

Además, se formularon los objetivos de la investigación, la justificación de la misma y los antecedentes relacionados al tema.

4.3.8. Fase de diseño de actividades

Una parte fundamental de este trabajo es el diseño de actividades; en esta fase se plantean cada una de ellas teniendo en cuenta que cumplan con el objetivo de la propuesta: Fortalecer el pensamiento multiplicativo en los niños y niñas para que puedan abordar situaciones de su contexto y matematizarlas. Para ello es fundamental que el diseño cuente con un hilo conductor que mantiene las actividades conectadas y bajo una finalidad específica dependiendo el momento de implementación de estas.

Dentro de la etapa de las actividades de **observación** se diseñaron e implementaron 8 actividades que permitieron identificar aspectos importantes acerca de los saberes previos de los estudiantes, las estrategias informales, el manejo de la estructura aditiva y multiplicativa.

Después se analizaron las dificultades, los errores y las fortalezas de los estudiantes en el área de matemáticas específicamente en la estructura multiplicativa, teniendo un constante trabajo con la estructura aditiva, además de una interpretación de las respuestas ofrecidas por los estudiantes, éstas sirvieron para comprender las diferentes formas de abordar la solución de problemas matemáticos.

Finalmente, en la etapa de las actividades de **seguimiento** se llevaron a cabo 8 actividades que promovieran el trabajo con problemas de estructura multiplicativa, también en la formulación y creación de problemas verbales, interpretación de problemas representados pictóricamente y con imágenes, uso de las propiedades de la multiplicación, y solución de problemas con composición y descomposición.

Cabe resaltar que durante las dos clases de actividades se promovió el trabajo en equipo, la competencia sana, el juego y la capacidad de argumentación como motores de convivencia., Las actividades se muestran a continuación:

4.3.9. Etapa 1: observación

Tabla 13. Cronología de la propuesta, actividades de observación.

Sesión	Actividad	Tema	Duración	Fecha
1	La ranita sumadora y triqui	Estrategias de problemas aditivos	1 hora y media	30 de agosto de 2018
2	Juego con los dados	Problemas de razón	1 hora y media	6 de septiembre de 2018
3	Tablero multiplicativo	Resolución de problemas	1 hora y media	7 de septiembre de 2018
4	Adivinanzas matemáticas	Resolución de problemas	2 horas	20 de septiembre de 2018
5	Bingo matemático	Problemas de razón	2 horas	28 de marzo de 2019
6	Tabla numérica	Tabla de multiplicar	1 hora	4 de abril de 2019
7	Busquemos el tesoro	Secuencia numérica	1 hora y media	5 de abril de 2019
8	Busquemos el tesoro (segunda parte)	Repartición	2 horas	12 de abril de 2019

4.3.10. Etapa 2: seguimiento

Tabla 14. Cronología de la propuesta, actividades de seguimiento.

Sesión	Actividad	Tema	Duración	Fecha
1	La ranita sumadora	Adición	2 horas	10 de mayo de 2019
2	Juguemos con las restas (dominó matemático)	Restas	2 horas	23 de mayo de 2019
3	Examen de multiplicación	Multiplicación	2 horas	14 de junio de 2019
4	La Escalerita	Resolución de problemas	2 horas	13 de septiembre de 2019
5	Ficha Tapada	Resolución de problemas	1 hora	27 de septiembre de 2019
6	Multiplin	Interpretación de problemas	2 horas	4 de octubre de 2019
7	Creemos nuestras propia escalerita	Creación de Problemas verbales y escritos.	2 horas	17 de octubre de 2019
8	Regletas de Cuisenaire	Elaboración de problemas	2 horas	18 de octubre de 2019

4.3.11. Fase de trabajo de campo, implementación y registro

Luego del planteamiento de las actividades para cada sesión, se hizo la implementación de las mismas con el grupo de estudiantes, las actividades se trabajaron por momentos: inicio, donde los estudiantes conocían el propósito de la actividad y ellos daban sus apreciaciones, también se disponían individualmente, por parejas o grupos; desarrollo central, aquí se hacía entrega del material, los estudiantes hacían exploración

del mismo y el trabajo correspondiente al propósito de la actividad; finalmente en el cierre, los estudiantes hacían entrega del material y se organizaban para dialogar acerca de lo que hicieron en la actividad, lo que sintieron, y si encontraron dificultades, conflictos o problemas.

Con el propósito de hacer el registro de la actividad y las observaciones allí presentes se usó el diario de campo y las rejillas (ver anexo 5), previamente diseñadas para la población seleccionada, allí se establecen las categorías y aspectos fundamentales a los que se les va a hacer la debida interpretación y posterior análisis.

Dentro del trabajo de campo fue fundamental tomar los aportes que los niños hacen e ir haciendo mejoras y poniendo en las actividades los intereses y sugerencias de ellos.

4.3.12. Fase de análisis didáctico de las actividades matemáticas.

Durante los años 2018 a 2019 se crearon e implementaron actividades matemáticas con los grados 205 y 305 respectivamente, posterior a ello se realizó un análisis de éstas para identificar elementos importantes dentro del aula y para los estudiantes, así como para la reflexión en la formación de maestros de Educación Infantil comprometidos con la enseñanza de las matemáticas, de igual forma, se identifican algunas dificultades y fortalezas en el momento de llevar a cabo las actividades teniendo en cuenta las dinámicas de la institución y las personas que conviven en ella.

Según Samper y otros (2018) el análisis didáctico comprende las siguientes fases:

El **análisis de contenido** inicia con la determinación de los contenidos y objetivos, haciendo énfasis en los significados del objeto matemático que se abordarán. Se revisan los objetos (...) involucrados, sus definiciones, representaciones, etc., y los preconceptos que debe tener el estudiante para abordar la tarea. En el **análisis cognitivo**, el profesor establece las competencias que se espera desarrollen los estudiantes, a través de las tareas que se proponen. Durante este análisis también se identifican posibles errores y dificultades asociados a las tareas y al objeto matemático correspondiente. El **análisis de instrucción** se realiza a partir de los dos anteriores. En este momento se diseñan nuevas tareas o se rediseñan las existentes, y se evalúa la pertinencia de estas en relación con los objetivos planteados. Finalmente, el **análisis de actuación** se hace una vez realizadas en el aula las tareas, con base en la reflexión que el profesor hace de las

actuaciones de los estudiantes durante el desarrollo de las tareas, con el fin de llegar a tener una idea detallada y consciente de la eficacia de la tarea implementada, y reconocer el proceso de aprendizaje de sus estudiantes; esto le servirá como punto de partida para iniciar un nuevo análisis didáctico. (Samper, Molina y Plazas , 2017, p. 89)

De acuerdo a lo anterior, las actividades han sido analizadas según la información que se obtuvo en los diarios de campo, material audiovisual como fotos, videos y grabaciones de audio, a partir de la observación hecha por los maestros en formación y el constante diálogo con los estudiantes, seguido se hace una interpretación de la misma y es descrita para dar a conocer el potencial pedagógico de cada actividad a la luz de la matemática realista con ayuda del juego y la teoría matemática, cabe aclarar que estas tres son las categorías de análisis y se encuentran ubicados en la parte inferior de cada cuadro de análisis.

4.3.13. Estructura del cuadro de análisis didáctico de las actividades matemáticas.

A continuación, se muestran los diferentes elementos presentes en cada fase de análisis, de esta forma se abordan más adelante.

Tabla 15. Estructura de la tabla de análisis.

Nombre: Fecha:		
Desarrollo:		
Objetivos:		
Análisis de contenido	Análisis cognitivo	Análisis de instrucción
Preconceptos Conceptos Definiciones o representaciones	Competencias por desarrollar: en esta se pone énfasis en los conocimientos conceptuales y procedimentales de los niños. (Ministerio de Educación Nacional, 2006 , p. 50) Errores y dificultades que pueden ocurrir en la solución de problemas matemáticos.	Diseño y rediseño de las actividades Pertinencia con relación a los objetivos.
Análisis de actuación		

Reflexión de las actuaciones. Idea de la eficacia de la actividad. Reconocer el proceso de aprendizaje de los estudiantes.
Educación Matemática Realista
Contextos y situaciones: Niveles de comprensión: Interacción: Modelos:
Estructura multiplicativa
Multiplicación: Propiedades: Algoritmo: Estrategias y solución de problemas:
Juego
Juego en la matemática: Tipo de juego:

Para continuar, hay que tener en cuenta que el siguiente cuadro se hace el análisis de cada una de las actividades de la propuesta pedagógica y al final se recogen unas apreciaciones generales con relación al aporte de la propuesta en la enseñanza y aprendizaje de la multiplicación con el curso durante la implementación.

5. DESARROLLO Y ANÁLISIS DE LA PROPUESTA PEDAGÓGICA

5.1. Actividades de observación

Tabla 16. Tabla de análisis.

<p>Nombre: La ranita sumadora y triqui. Fecha: 30 de agosto de 2018</p> <p>Desarrollo: es un juego matemático de competencia, en donde los jugadores ponen a prueba sus capacidades intelectuales en la resolución de problemas aditivos, aquí cada niño dispone de unas tapas (de 5 a 10 unidades) y un tablero, en este caso la cubeta de huevos. Debe lanzar las tapas desde cierta distancia e intentar insertarlas en las cavidades del tablero, cada cavidad tiene un color que simboliza unidades, decenas, centenas y/o unidades de mil. Cuando se verifique las tapas que quedaron en el tablero se procede a sumar los puntos.</p> <p>Objetivos: Identificar en los estudiantes el uso de estrategias para resolver problemas aditivos. Observar las dificultades y fortalezas de los estudiantes en el trabajo con problemas aditivos.</p>			 <p style="font-size: small;"> ■ Unidad de mil ■ Centena ■ Decena ■ Unidad </p>
<p>Análisis de contenido</p> <p>Preconceptos: Conteo, agrupación, cantidad, total.</p> <p>Conceptos: Suma, resta, unidades, decenas, centenas.</p> <p>Definiciones: No aplica</p> <p>Representaciones: Concretas. Simbólicas.</p>	<p style="text-align: center;">Análisis cognitivo</p> <p>Competencias: El estudiante logra: Sumar varias cantidades con ayuda de sus dedos. Reconoce las propiedades de la suma. Resuelve y escribe la solución de los problemas aditivos. Verbaliza la solución de los problemas aditivos.</p> <p>Errores: El estudiante no logra: Dar la respuesta correcta a los problemas aditivos. Comprender el trabajo con problemas aditivos.</p> <p>Dificultades El estudiante necesita ayuda para resolver los problemas aditivos. Encuentra dificultad para dar la respuesta correcta a algún problema aditivo.</p> <p>Fortalezas: El estudiante logra: Dar la respuesta correcta al problema aditivo. Argumentar sus respuestas. Ser propositivo y plantear nuevas formas de jugar.</p>	<p style="text-align: center;">Análisis de instrucción</p> <p>El juego es pertinente porque: Permite evidenciar las fortalezas y dificultades de los estudiantes en el trabajo con problemas aditivos. Ofrece material manipulable que permite a los estudiantes apropiarse de la actividad, demostrar interés y evidenciar capacidades en la solución de problemas aditivos.</p> <p>Renovaciones Mejorar el material, los colores de las cubetas de huevos pueden ayudar a reconocer los números separándolos por unidades, decenas, centenas, entre otros.</p>	
Análisis de actuación			
<p>Algunos estudiantes hacen uso de estrategias informales como: sumar con los dedos, sumar de 2 en 2, sumar mentalmente.</p>	<p>La actividad tuvo eficacia en cuanto cumple con los objetivos, al servir como herramienta para la observación del grupo y a su vez promover en los estudiantes el trabajo con problemas aditivos que fortalecen su pensamiento aditivo.</p>	<p>Los estudiantes demuestran capacidades para trabajar en equipo, cuando alguno no puede responder correctamente, además, hay capacidades comunicativas que permiten resolver los conflictos que se presentan en medio del juego.</p>	

	<p>Cada estudiante se encuentra en un momento distinto de aprendizaje, algunos muestran mayor destreza para solucionar los problemas, sumar con mayor rapidez y argumentar mejor sus respuestas.</p>
Educación Matemática Realista	
<p>Contextos y situaciones: Permite que los estudiantes matematicen, es decir, que a partir de lo que están jugando y viviendo sean capaces de reconocer la matemática que emerge al estar en un contexto realista donde deben: hacer fila, esperar el turno, lanzar las fichas o tapas, sumar los puntos y volver a empezar; acciones que se asemejan a muchas de las actividades cotidianas o ya conocidas. Es aquí donde los estudiantes empiezan a representar la situación problemática y buscar diferentes formas de solución, ya que esta es abierta, permitiendo que sean ellos quienes usen conceptos y procedimientos al alcance de sus posibilidades.</p> <p>Niveles de comprensión: los estudiantes se encuentran en un nivel situacional, allí reconocen los problemas y emplean diferentes estrategias de solución para resolverlos (Bressan y otros, 2016, p. 7) incluso se apoyan en conocimientos informales, como los datos recordados.</p> <p>Interacción: El maestro además de observador debe ser creador de actividades que tengan un hilo conductor, que permita a los estudiantes hacer cambio de los niveles de comprensión, los cuales no son estáticos sino flexibles.</p> <p>También se adquiere un papel de guía y es quien permite al estudiante ponerse en contacto con situaciones matematizables.</p> <p>Modelos: Hacen uso de modelos materiales (Bressan y otros, 2016, p. 5) (fichas como unidades, cubetas como tablero y cada cavidad como número de veces que se repite), estar en situaciones paradigmáticas (jugar a llevar más puntos), y el uso de algoritmos o estrategias informales (suma con los dedos, mentalmente, de 2 en 2, entre otros).</p>	
Estructura aditiva	
<p>Suma: La actividad demandó el conocimiento de la estructura aditiva, en este caso la suma como procedimiento que permite trabajar con los números naturales (Castro, 2001, p. 177), que a partir de unas fichas que cada una representa una unidad del orden en que caiga, ya sea unidad, decena o centena, un caso hipotético sería:</p> <p><i>Pedrito lanzó las fichas, de las cuales dos cayeron en el color verde (unidades), dos en el color rojo (decenas) y una ficha en el amarillo (centenas)</i></p> <p>Se observa que el estudiante no empieza por un orden ascendente (de unidades a centenas) o descendente (de centenas a unidades) sino que toma la primera que encuentre y suma, después de sumar todas las fichas de cada orden toma los resultados y los suma y da el resultado final. (Diario de campo, 30 de agosto de 2018)</p> <p>Así: $20 + 2 + 100 = 122$</p> <p>Propiedades: Otros estudiantes por un lado contaban primero las centenas, seguido las decenas y por último las unidades.</p> <p>Así: “tengo un 100 (o una decena) más un veinte (o dos dieces o decenas) más dos, esto es 122. Otros en cambio hacían al contrario, empezando por unidades y terminando en centenas. Lo anterior da pistas para reconocer en los estudiantes el uso de las propiedades de la suma (2001, p. 195)</p> <p>Algoritmo: No trabajaron problemas escritos.</p> <p>Estrategias y solución de problemas: Las estrategias más usadas según lo observado son el conteo con los dedos (2001, p. 194) (Castaño, 1996, p. 4)</p>	
Juego	
<p>Juego en la matemática: Los estudiantes pudieron jugar al triqui, que se relaciona con la ubicación espacial, los ayuda a movilizar el pensamiento lógico, al hacer uso de estrategias o</p>	

habilidades (Caillois, 1986, p. 43) como empezar por el centro; anticipaciones para poder entender que paso seguir, o cómo evitar que le ganen; apropiación de reglas del juego y reconocimiento del otro.

Este juego se considera de Agón (1986) al ser de competencia y poner a prueba las capacidades de cada jugador, la formulación de estrategias y anticipaciones. Igualmente entra en el tipo de juego de reglas (Beltrán, Quintana y Ricaurte, 2010), las cuales son retomadas por los jugadores, para crear armonía durante la ejecución de este.

Para el juego de la ranita sumadora, que es un juego de Agón, los estudiantes pusieron en juego su habilidad para lanzar adecuadamente las tapas a las cubetas, además de

Se les da un papel central a los estudiantes donde activamente participan y son ellos los que observan a los demás compañeros que participen correctamente, den los resultados correctos, no hagan trampa y se apropien de la actividad ayudándoles a entender lo que no puedan.


Fueron propositivos dando sus puntos de vista e ideas para el juego; ser colaboradores como se mencionó, ayudando a los demás compañeros y competitivos de forma sana, es decir, entendiendo que el juego es para aprender, compartir y divertirse (1986, p. 17)


Nombre: Juego con los dados. **Fecha:** 6 de septiembre de 2018


Desarrollo: El maestro en formación pasa puesto por puesto y los estudiantes lanzan los dos dados, deben multiplicar los dos números que obtenga en el lanzamiento.

Objetivos: Reconocer y observar el uso de estrategias formales e informales para resolver problemas multiplicativos del tipo $a \times b = c$ con dados.

Análisis de contenido	Análisis cognitivo	Análisis de instrucción
<p>Preconceptos Suma, sumas reiteradas, cantidad.</p> <p>Conceptos Multiplicación</p> <p>Definiciones No aplica</p> <p>Representaciones Simbólicas y pictóricas.</p>	<p>Competencias El estudiante logra dar respuesta a los problemas de forma verbal. Hacer uso de estrategias mentales para resolver problemas matemáticos. Reconocer la propiedad conmutativa de la multiplicación.</p> <p>Errores El estudiante suma en lugar de multiplicar. No da respuesta a los problemas presentados. No reconoce la propiedad conmutativa de la multiplicación.</p> <p>Dificultades El estudiante ocupa demasiado tiempo para dar la respuesta a una multiplicación de unidades.</p> <p>Fortalezas El estudiante reconoce el problema y da la solución con rapidez. Demuestra conocer los elementos de la tabla de multiplicar. No hace uso de las sumas reiteradas para dar respuesta.</p>	<p>Pertinencia La actividad permite evidenciar en los estudiantes la forma de resolver multiplicaciones de dos dígitos, demostrando que conoce las tablas de multiplicar o que puede llegar a la respuesta con la ayuda de sus dedos, sumas reiteradas o mentalmente.</p> <p>Renovaciones Implementar problemas con suma y resta. Añadir un tercer dado que complejice el problema. Brindar material manipulable para que el estudiante pueda usarlo como soporte para resolver los problemas. Usar un juego más complejo, con tablero y fichas.</p>
Análisis de actuación		

<p>Dentro de las fortalezas, se observa algunos estudiantes que ya tienen como dato recordado algunas tablas, otros simplemente hacen el cálculo de manera mental.</p> <p>Asimismo, la mayoría reconoce la propiedad conmutativa de la multiplicación, cuando se les pregunta por los números que lanzan y dan el resultado y luego a estos se les cambia de orden y resuelven igual.</p>	 <p>Contaban con los números con ayuda de los dedos: Niño AN: cuenta con los dedos y dice “24”, el maestro repite 24 y le pide que rectifique, él mira sus cinco dedos de la mano izquierda y el meñique de la mano derecha y dice “seis” seguido continúa contando “siete, ocho... 18” “dieciocho” dice el niño y el maestro repite lo mismo de él. (Anexo 2.1)</p>
--	--

	<p>Dentro de las estrategias están el uso de los dedos para trabajar los problemas, algunos estudiantes hacían por ejemplo en 5×3, la suma reiterada de $5 + 5 + 5$, otros resolvían contar 3 veces 5 o cinco veces 3.</p> <p>En la imagen se aprecia a la niña DE, ella lanzó los dados y salió 5 y 3, a lo que de su mano izquierda saca 3 dedos y dice “5, 10, 15” (Anexo 2.2), lo hace varias veces y da bien el resultado.</p>
---	---

<p>Hubo estudiantes que evidenciaron dificultades para resolver las multiplicaciones: dando mal el resultado, dando el resultado de una suma, haciendo estimaciones apresuradas o intentando adivinar:</p>	
	<p>Niño AN lanza el dado y sale dos y tres, levanta sus manos y cinco dedos de la mano izquierda con el meñique de la derecha, mira los dados y piensa, luego cuenta desde cuatro en adelante hasta nueve con sus dedos arriba, dice nueve con cara de duda. El maestro repite nueve y dice “¿seguro? Cuéntalas otra vez”</p> <p>Seguido a esto niño JP agrega que está fácil y que “está después del tres, cuente otra vez tres” a lo que el niño AN dice tres, sacando tres dedos y enfatizando, cuenta “cuatro, cinco y seis, seis” dice sonriendo. Vuelve a lanzarlos dados: sale cinco y cinco, se escucha “cinco por cinco” a dos voces, con lo que él responde “50”, ante la negativa cambia de postura y levantando cinco dedos de la mano suma reiteradamente 5, 10, 15, 20 y dice 25 tocando su pulgar, el niño JP finalmente agrega oportunamente “cinco por cinco 25” (Anexo 2.3)</p>

Educación Matemática Realista

Contextos y situaciones: La actividad se ve conectada a la realidad de los estudiantes, los cuales reconocen los dados porque han jugado algún juego de mesa o por el estilo, además que ven en estos la posibilidad de responder a un problema de multiplicación de dos factores cada uno de un dígito, esto es aún más cotidiano para ellos quienes ya han trabajado con sumas reiteradas y multiplicación.

Niveles de comprensión: El maestro en formación piensa la actividad para reconocer en los estudiantes el uso de estrategias informales para responder, también las dificultades presentes en esto.

Asimismo, busca que los estudiantes estén seguros de sus respuestas, buscando que las argumenten.

Por ejemplo, cuando en clase se le pregunta a niña DE, ella responde levantando los dedos y rectificando su respuesta, seguido a esto mostrando los dedos dice los diferentes resultados de manera correcta. (Anexo 2.2 o análisis de actuación)

Estructura multiplicativa

Multiplicación: La actividad demanda de los estudiantes el conocimiento de la multiplicación en este caso las tablas de multiplicar.

Al lanzar los dados el estudiante saca un 2 y un 6, multiplica 2 por 6 igual a 12, pero otros suman de dos en dos seis veces hasta llegar al 12; otros sumarían seis más seis igual a doce y por último alguno sumará dos más seis igual a ocho. Esto se observa y se le pregunta al estudiante sobre la certeza de su respuesta, a lo que cada uno argumenta siguiendo el procedimiento utilizado, ya que no solo importa la respuesta correcta sino la vía de solución.

Propiedades: “Los estudiantes reconocen la propiedad conmutativa de la multiplicación cuando se pregunta por ejemplo: 3 por 5 es 15 y cuánto es 5 por 3, aquí responde de igual forma 15.” (Diario de campo, 6 de septiembre de 2018)

Algoritmo: No se usa.

Estrategias y solución de problemas: Ver análisis de actuación

Juego

Juego en la matemática: La actividad no es un juego propiamente dicho, solamente trae elementos de juegos conocidos por los estudiantes, aquí el lanzamiento de los dados recuerda a juegos como parqués que está asociado a los juegos de Alea (Caillois, 1986), pero a diferencia de este, los dados no se suman sino se multiplican.

De igual forma, los estudiantes se apropian de unas reglas generales, como multiplicar o hacer sumas reiteradas, dar un resultado correcto y hacer uso de las tablas de multiplicar.

Los estudiantes se entretuvieron con la actividad, pues demanda en ellos la capacidad de responder rápido, o pensar formas de responder a la multiplicación.

Nombre: Tablero multiplicativo. **Fecha:** 7 de septiembre de 2018

Desarrollo: Los estudiantes se hacen en grupos de 4, cada uno tiene una cantidad de números y sirven para moverlos de acuerdo con los lanzamientos que haga con los dados y cuyo resultado se obtiene multiplicando los dos números que allí aparezcan.

Objetivos: Identificar la actividad de los estudiantes al participar en el juego matemático.


Reconocer y observar el uso de estrategias formales e informales para resolver problemas matemáticos.

Observar las dificultades y fortalezas de los estudiantes en el trabajo con problemas matemáticos.

Análisis de contenido	Análisis cognitivo	Análisis de instrucción
<p>Preconceptos Multiplicación,</p> <p>Conceptos Propiedad conmutativa</p> <p>Definiciones Resultado de, Si A por B es igual a C, entonces B por A es igual a C.</p> <p>Representaciones Simbólicas y pictóricas.</p>	<p>Competencias El estudiante da respuestas a los problemas de forma verbal. Hace uso de representaciones para resolver problemas multiplicativos. Reconoce la propiedad conmutativa de la multiplicación.</p> <p>Errores El estudiante da un resultado de suma en lugar de multiplicación. No da respuestas a los problemas presentados.</p> <p>Dificultades El estudiante ocupa demasiado tiempo para dar la respuesta a una multiplicación de unidades. No reconoce la propiedad conmutativa de la multiplicación.</p>	<p>Pertinencia La actividad ofrece a los estudiantes la oportunidad de jugar a la vez que resuelven problemas de multiplicación, es por ello que aquí es donde más se evidencian el uso de estrategias, las dificultades y fortalezas de los mismos. De igual forma el juego es atractivo para los estudiantes, dándoles un lugar central, también es visto como un reto para ellos, moviéndolos a</p>

	<p>Fortalezas El estudiante reconoce el problema y da la solución con rapidez. Demuestra conocer los elementos de la tabla de multiplicar. Colabora a sus compañeros a comprender y solucionar los problemas multiplicativos.</p>	<p>actividades menos monótonas. Renovaciones Renovar el material, hacerlo más resistente. Introducir otro tipo de operaciones.</p>
--	--	---

Análisis de actuación

<p>En los grupos se evidencian conflictos los cuales se resuelven dialogando en el grupo, demuestran así, una capacidad comunicativa.</p> <p>También una capacidad de colaborar entre ellos mismos.</p>	<p>Algunos estudiantes demuestran mayores fortalezas que otros, por ejemplo, memorizar la tabla de multiplicar, dar los resultados con rapidez, entre otros.</p>	<p>Los estudiantes usan estrategias para dar los resultados, ya sea contando con los dedos o mentalmente. La niña VN lanza los dados y saca tres y cinco, piensa y mirando hacia arriba como imaginando los números y transformándolos en imágenes mentales responde 15. (Anexo 2.4)</p> 
---	--	---

Los estudiantes demuestran capacidad para responder a los problemas de multiplicación con dos cifras, además reconocen la propiedad conmutativa de la misma.



Se observa una situación particular, el niño MM se queja de una estudiante que va a voltear uno de sus números, al preguntar cuánto se sacó con los dados ella dice “seis por tres es dieciocho” y el niño MM dice “pero ella sacó tres por seis”, el maestro le preguntó cuánto era eso y él niño dijo 18, todos los demás ya se habían dado cuenta, pero él en ese momento empezaba a hacerlo. (Anexo 2.4)

Algunos que no reconocen dicha propiedad caen en cuenta en el trabajo con los dados, y los resultados que son hallados sirven de ejemplo.

Educación Matemática Realista

Contextos y situaciones: La actividad se encuentra como una situación problemática realista, pues permite que el estudiante reconozca el problema, lo represente y haga uso de su conocimiento para responder.

Trae a colación la actividad anterior de los dados por ello los estudiantes ya se encuentran familiarizados, pero le añade un segundo elemento y es el tablero con los productos de las multiplicaciones.

Niveles de comprensión: Se aprecia un nivel situacional donde el estudiante reconoce el problema y nivel referencial al hacer uso de un `modelo de´ para referirse a problemas de tipo multiplicativo, sabe que puede buscar el resultado a través de sumas reiteradas o con uso de la tabla de multiplicar.

En ese momento la niña VN lanza los dados y dice seis por cinco 30, no le sirve, toma los dados y se los pasa a su compañero que espera para lanzarlos (ver figura)



Interacción: Los estudiantes se encuentran muy interesados en la actividad, dentro de esta juegan varias rondas.

Modelos: Pueden hacer uso de un modelo como el material concreto, los dados y el tablero que permiten matematizar la situación multiplicativa.

Estructura multiplicativa

Multiplicación: La actividad pide al estudiante operar con los números presentes en los dados por medio de la multiplicación, seguido a esto hallar ese mismo resultado en el tablero, en la fila de números que le corresponde, si lo tiene lo puede ocultar y así hasta que acabe ocultando todos sus números.



Permite al estudiante hacer anticipaciones cuando ya conoce sus números y saber que son producto de una multiplicación, por ello si tiene un 12 sabe que necesita sacar 2 y 6 o 4 y 3.

El niño JJ después de que sus compañeros terminan de discutir, muestra que solo le queda un número por voltear, seguramente sabe que si tiene x número debe sacar, otros dos que multiplicados den x (Anexo 2.4)

Propiedades: Entienden la propiedad conmutativa de la multiplicación. (Anexo 2.4) (Maza, 1991, p. 65)

Algoritmo: No se usa.

Estrategias y solución de problemas: Hacen uso de estrategias informales como las ya conocidas sumas reiteradas, conteo, o sumas con los dedos.

Juego

Juego en la matemática: el tipo de juego inicial es de reglas (Beltrán, Quintana y Ricaurte, 2010) porque se plantean unas reglas generales, estas se discuten y se interiorizan por grupos, también entra en los juegos de Agón, ya que los estudiantes compiten por ganar, en este caso, ocultar todos sus números, a la vez que entran los juegos de Alea, es decir, de azar al lanzar los dados, ya que el resultado que se obtiene no depende de las capacidades del jugador.

Los estudiantes se emocionan bastante con el juego, lanzan los dados y operan multiplicando o sumando y ceden los dados para que lance su siguiente compañero.

Discuten los resultados obtenidos por cada uno y no permiten errores, porque si estos se presentan ellos mismos entran a corregir, además no permiten la trampa, cuando alguien oculta un número que no haya encontrado la operación que le corresponde.

Discuten las reglas y las acatan en seguida, algunos pensaban en ocultar sus números cuando los compañeros lanzaban y el resultado lo encontraban en sus números, pero el maestro interviene y aclara que sólo voltea el número quien haya lanzado.

Durante la actividad los estudiantes se ven interesados por el juego, participan de varias rondas y se ríen durante el mismo expresando una satisfacción en lo que hacen.

La actividad no se ve como algo obligado sino al contrario los estudiantes buscan la forma de participar, de principio a fin.

Nombre: Adivinanzas matemáticas. **Fecha:** 20 de septiembre de 2018


Desarrollo: Las adivinanzas matemáticas son problemas verbales escritos que los estudiantes resuelven en grupos de 3 a 4 estudiantes, cuentan con situaciones de estructura aditiva y multiplicativa.

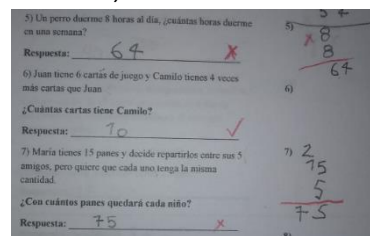
Objetivos: Observar la resolución de problemas verbales de multiplicación (razón y comparación) y división (agrupamiento y partición) con ayuda de datos numéricos y analizar en los argumentos los aspectos de estructura multiplicativa que usan para dar respuesta.

Análisis de contenido	Análisis cognitivo	Análisis de instrucción
Preconceptos Cantidades Repartición	Competencias El estudiante resuelve y formula problemas de tipo multiplicativo	Pertinencia Estos problemas de tipo verbal permiten al estudiante verse conflictuado, ya que

<p>Multiplicación Totalidad Conceptos División Definiciones División: "separación o partición de una cantidad en partes iguales" Veces más. Veces menos. Representaciones Concretas, pictóricas y simbólicas</p>	<p>Resuelve problemas con ayuda de algoritmos. Representa la solución de los problemas gráficamente. Errores El estudiante maneja erróneamente el algoritmo usual de multiplicación. Da el resultado al problema con otro tipo de operación, como suma o resta. Dificultades El estudiante presenta dificultades para multiplicar con el algoritmo usual. No logra comprender los problemas presentados. Fortalezas El estudiante resuelve adecuadamente el problema. Busca otra forma de dar respuesta al problema. Argumenta su forma de llegar a la respuesta.</p>	<p>debe buscar la forma de comprender el problema, asimismo, hallar cómo solucionarlo, ya sea con ayuda de alguna operación y su algoritmo. Los problemas verbales le dan al estudiante unos datos, es con estos que él podrá identificar si su respuesta es o no razonable. El estudiante puede argumentar su respuesta y la forma en que llegó a esta, permitiendo así analizar el uso de diferentes elementos multiplicativos. Renovaciones Ninguna</p>
---	--	---

Análisis de actuación

<p>Con ayuda de la información que se presenta dentro de los problemas verbales los estudiantes interpretaron el problema para buscar la forma de llegar a la solución. (ver figura de solución con dibujos)</p>	<p>En un grupo se observó el uso del ábaco, con este resolvían algunos de los problemas que se encuentran en las adivinanzas matemáticas.</p>		<p>No todos los estudiantes respondieron correctamente, pues se equivocaron al momento de multiplicar, o no dejaban los espacios correspondientes. También, algunos que respondieron correctamente no usaron el algoritmo o no lo dejaron por escrito.</p>
<p>Algunos estudiantes responden erróneamente al dar datos inexactos en problemas que pedían dar números en elementos reales ya presentes (cantidad de días de una semana, cantidad de horas en un día, cantidad de minutos en una hora) (ver figura de problemas no resueltos)</p>	<p>Algunos estudiantes respondieron todos los problemas con multiplicación, habiendo problemas de división. Por ello el uso del algoritmo de la multiplicación fue el camino más rápido para todos al momento de buscar la respuesta, entonces no respondían bien algunos problemas que pedían otra operación.</p>	<p>Algunos estudiantes tomaban los datos numéricos presentados y los operaban con suma, resta o multiplicación, sin comprender si respondían bien o mal la pregunta. (Anexo 3.3)</p>	

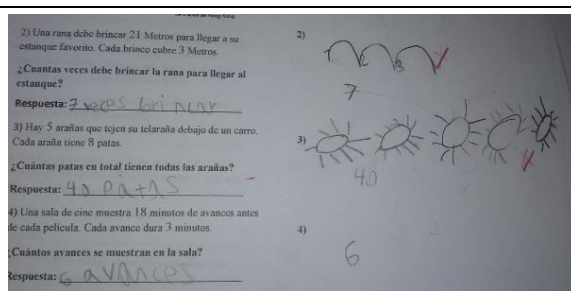


<p>El problema de comparación es complicado aún para los estudiantes al no comprender el término “veces más que” o “veces menos que” también al comprender las sentencias del problema.</p> <p>En el problema 6 dice: “Juan tiene 6 cartas de juego y Camilo tiene 4 veces más cartas que Juan ¿Cuántas cartas tiene Camilo?”</p> <p>Solo 5 grupos respondieron 24. 7 grupos respondieron 10, al sumar las dos cifras. 3 grupos respondieron 16 y 30 respectivamente. 2 grupos no respondieron.</p>	<p>Algunos estudiantes argumentaron qué tipo de problema se le presenta y demuestra la forma en que opera para llegar a un posible resultado, haciendo uso de un lenguaje matemático apropiado.</p> <p>Por otra parte, algunos estudiantes no logran comprender los problemas, por tanto no resuelven ni argumentan sus respuestas.</p>	<p>Los problemas verbales son difíciles de comprender, ya que están acostumbrados a resolver problemas con algoritmo, por ello, la mayoría de estudiantes no lee el problema y toma los datos que se le presentan y los opera, en su mayoría con multiplicación.</p>
---	---	--

Educación Matemática Realista

Contextos y situaciones: Para esta actividad se tomó una situación poco común en el aula y clase de matemáticas, la resolución de problemas verbales de estructura aditiva y multiplicativa.

Modelos: Los problemas buscan ser relacionados a temas conocidos por los estudiantes que no se alejen de su realidad, por ello se emplea un lenguaje familiar para que puedan representarlos, como lo hacen algunos estudiantes de forma gráfica con dibujos (ver figura y anexo 3.1), resolviendo con ayuda de algoritmos.



Permite el uso del sentido común, también de números que no se presentan explícitamente sino a partir de elementos reales ya conocidos como la cantidad de: números de días en una semana, número de horas en un día.

Estructura multiplicativa

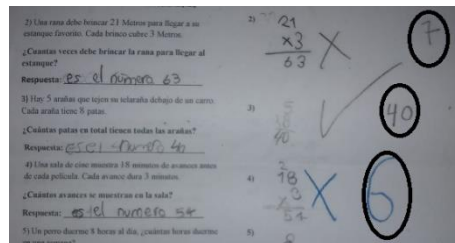
Algoritmo: Los estudiantes se encuentran frente a problemas verbales de estructura aditiva y multiplicativa, en la hoja de respuestas pueden escribir los algoritmos que usaron para dar la respuesta.

Estrategias y solución de problemas: En la mayoría de las hojas se aprecia que solo toman los números que están allí presentes y los operan con multiplicación, algunos leyeron el problema y seguramente interpretaron mal el problema y lo resuelven con una operación que no corresponde.

Algunos estudiantes interpretaron correctamente los problemas y entendieron que algunos eran de repartición y por ende debían hacer restas reiteradas o división.

En otros problemas entendieron que era un problema de razón y operaron con multiplicación, había un problema de comparación y solo un grupo lo respondió correctamente (según algunos son el tipo de problema más difícil) los demás problemas eran de combinación multiplicativa.

Algunos grupos al final entregaron sus hojas para que otro grupo calificara sus respuestas y se halló que:



Algunos grupos calificaron con una x (queriendo significar que quedó mal) la respuesta de un problema, sin embargo el problema estaba bien resuelto.
 Algunos calificaron con x la respuesta a un problema y al frente colocaron la respuesta correcta. (Ver figura y anexo 3.2) los círculos muestran la respuesta correcta y que fue asignada por quien califica.
 Algunos calificaron con un “chulito” (significa que está bien) en respuestas que están mal.

Juego

Juego en la matemática: la actividad no se constituyó como un juego pero los estudiantes se interesaron por la actividad al presentar problemas atractivos en cuanto usaban contextos reales imaginativos. (ver figuras)
 También se plantea que el trabajo sea en parejas elegidas al azar para que los grupos sean más nutridos e interactúen con compañeros con los que usualmente no lo hacen.
 Los estudiantes toman un papel protagónico al ser ellos quienes resuelven los problemas y también los que evalúan las respuestas de sus compañeros.

Nombre: Bingo matemático **Fecha:** 28 de marzo de 2019

Desarrollo: Los grupos de 4 estudiantes, cuentan con un tablero de bingo en cuyos círculos se encuentran productos de una multiplicación que se unen con sus dos factores, o dos factores que se unen con su producto, gana el equipo que complete el tablero según el maestro de los resultados.

Objetivos: Observar la resolución de problemas de estructura aditiva ($a+b=c$, $a-b=c$) y multiplicativa ($axb=c$) trabajando por equipos.

Específicos

Observar el uso de estrategias formales e informales para resolver problemas matemáticos.

Fomentar el trabajo en equipo y la competencia sana a través del juego.

Analizar las dinámicas de convivencia en el aula.

Análisis de contenido	Análisis cognitivo	Análisis de instrucción
<p>Preconceptos Multiplicación</p> <p>Conceptos No aplica</p> <p>Definiciones No aplica</p> <p>Representaciones Simbólicas.</p>	<p>Competencias El estudiante resuelve y formula problemas de tipo multiplicativo Resuelve problemas con ayuda de algoritmos. Trabaja en equipo para llegar a la solución de los problemas matemáticos.</p> <p>Errores Maneja erróneamente el algoritmo de multiplicación. Da el resultado al problema con otro tipo de operación, como suma o resta</p> <p>Dificultades El estudiante presenta dificultades para multiplicar con el algoritmo.</p> <p>Fortalezas El estudiante resuelve adecuadamente el problema. Busca otra forma de dar respuesta al problema.</p>	<p>Pertinencia El juego es pertinente porque permite: A los estudiantes ubicar las respuestas a los problemas multiplicativos y/o aditivos, o viceversa, hallar el problema correspondiente a un resultado dado.</p> <p>Evidenciar el uso de estrategias formales e informales en los estudiantes para resolver los problemas, ya sea verbalmente o por escrito.</p> <p>El trabajo en equipo, al ser por grupos y cada uno debe de trabajar con los demás compañeros para lograr alcanzar las respuestas con exactitud.</p> <p>Renovaciones</p>

	Argumenta su forma de llegar a la respuesta.	Presentar más problemas verbales y no solo del tipo $a \times b = c$ y sus demás formas, tanto en la suma, resta y multiplicación.
Análisis de actuación		
En la actividad se pudo evidenciar un buen trabajo en equipo con actitudes de cooperatividad.	En los momentos que se presentaron conflictos, los estudiantes hicieron solución de estos por medio del diálogo, cuando no hubo necesidad de la intervención del maestro en formación.	Los estudiantes demostraron capacidad para resolver los problemas con rapidez en un juego competitivo que exigía eficacia en el momento de dar las respuestas.
Algunos estudiantes hacen uso de algoritmos para resolver los problemas, por otra parte, hacen uso de estrategias como contar con los dedos, multiplicar con los dedos de forma saltada y cálculos mentales que se aprecian por medio de la observación de los grupos.		
Educación Matemática Realista		
<p>Contextos y situaciones: La actividad se concibe como algo muy conocido por la mayoría de los estudiantes, el bingo se juega en varias partes y todos lo juegan de diferentes formas, por lo tanto, dentro de este contexto realista los estudiantes hacen uso de sus ideas previas y las ponen en práctica, apropiando así también las nuevas reglas que se presentan en el juego matemático.</p> <p>Niveles de comprensión: La capacidad de matematizar de los estudiantes se ve cuando el juego implica ahora la búsqueda de soluciones a problemas multiplicativos, seguido a esto reconocer en su tablero de bingo el producto de una multiplicación o la multiplicación de un producto y no conseguir el mismo número que se dicte para todos, esto supone un nivel referencial (Bressan y otros, 2016) donde la multiplicación se vuelve modelo de resolver estos problemas.</p> <p>Interacción: La interacción con sus pares les permite entender la importancia de los demás en el proceso de aprender, ya que comparten lo que saben y apropian nuevos elementos que los demás traen a colación.</p> <p>Modelos: Se encuentran con un material el cual les permite reconocer los números y resolver problemas con ayuda del modelo que cada uno decida, también pueden hacer uso de un lenguaje matemático apropiado para la resolución de las multiplicaciones.</p>		
Estructura multiplicativa		
<p>Multiplicación: Los estudiantes se encuentran con una actividad grupal la cual pide que tengan conocimientos acerca de la multiplicación, el maestro dice un problema de multiplicación y ellos deben primero resolverlo para hallar el producto, ese producto debe estar en el tablero del bingo y si está gritan ¡BINGO! Para que el maestro verifique y lo pueda tachar, gana quien tache la mayor cantidad de resultados.</p> <p>En un segundo caso el maestro dice un número, ante esto los estudiantes buscan en su tablero una multiplicación que tenga como resultado ese número, gritan bingo y se tacha.</p> <p>Propiedades: Reconocen la propiedad conmutativa de la multiplicación (Maza, 1991, p. 65)</p> <p>Estrategias y solución de problemas: Se identifica la capacidad de resolver problemas de tipo multiplicativo de razón, el reconocimiento de la propiedad conmutativa de la multiplicación, la búsqueda de posibles resultados con relación a un problema y la búsqueda de problemas que respondan a un resultado dado.</p>		
Juego		

Juego en la matemática: según Caillois (1986) este juego es de Agón, ya que los grupos compiten por ganar, es decir, conseguir los resultados de las multiplicaciones primero que los demás, para ello deben trabajar en equipo para lograr un mismo fin. Se identifica en los estudiantes un interés por participar del juego, se muestran competitivos y a la vez dispuestos a participar activamente con ayuda de sus compañeros de equipo, La atención se hace más presente, pues los estudiantes esperan las palabras del maestro para responder en sus tableros, buscar soluciones y ser los primeros. La memoria de datos numéricos se vuelve importante, porque permite a los estudiantes hacer anticipaciones en el juego para dar más rápido las respuestas. Los estudiantes imaginan una situación de competencia por un premio que los lleva a saltar, gritar y reír de emoción al ver que sus respuestas son correctas y están a puertas de ganar.

Nombre: Tabla numérica (demostración) **Fecha:** 4 de abril de 2019
Desarrollo: Los estudiantes reconocen la tabla numérica, sus características y las formas de trabajar a través de saltos (sumas reiteradas) para hallar las tablas de multiplicar y algunos conceptos del sistema de numeración decimal y el valor posicional de los números.
Objetivos: Reconocer la tabla numérica, funcionamiento y características de esta con relación al sistema posicional de los números.
 Reconocer los múltiplos de los números del 1 al 11, para establecer si los estudiantes entienden el funcionamiento de las tablas de multiplicar.

Análisis de contenido	Análisis cognitivo	Análisis de instrucción
<p>Preconceptos Multiplicación.</p> <p>Conceptos Múltiplos de... Línea diagonal. Línea transversal. Secuencia. Tablas de multiplicar.</p> <p>Definiciones No aplica</p> <p>Representaciones Simbólicas.</p>	<p>Competencias El estudiante: Reconoce una secuencia numérica y la representa en un gráfico. Reconoce en una secuencia numérica propiedades de los números (ser par, impar, mayor que, menor que) Reconoce los múltiplos de un número presentados en una secuencia, ya sea saltando número por número o en líneas diagonales. El estudiante hace relación entre la tabla numérica y las tablas de multiplicar.</p> <p>Errores El estudiante no reconoce una tabla numérica y sus propiedades para multiplicar</p> <p>Dificultades La tabla numérica presentada no es entendida como un elemento que aporta características esenciales de los números sino como una tabla con números secuenciales y sin sentido.</p> <p>Fortalezas El estudiante reconoce nuevos elementos para la discusión dentro de la tabla numérica. Es propositivo y le da otros usos a la tabla numérica.</p>	<p>Pertinencia La tabla numérica permite que se trabaje con cualquier estudiante sin importar su nivel de aprendizaje, pues es bastante flexible, al presentarse sus características de forma casi que espontánea, allí puede descubrir por sí mismo las principales propiedades de los números y las relaciones entre ellos, como sus múltiplos que se pueden encontrar de igual forma en las tablas de multiplicar.</p> <p>Renovaciones Se puede utilizar en cualquier actividad que permita recorrer por los distintos números, así que sus renovaciones serían para cumplir con el objetivo de dicha actividad.</p>
Análisis de actuación		

Los estudiantes en un primer momento reconocieron la tabla numérica, los números que están en ella y la forma en que se ordenan secuencialmente.	Empiezan a reconocer propiedades del sistema de numeración decimal, como valor posicional, orden descendente de los números, orden ascendente, de arriba hacia abajo aumenta 10 números, de abajo hacia arriba disminuye 10 números, de derecha a izquierda los números aumentan 1, de izquierda a derecha los números disminuyen 1. (Diario de campo 4 de abril de 2019) (ver figura del tablero de clase)	Reconocen relaciones en los números: mayor que, menor que, los números se repiten de diez en diez, entre otros.
--	---	---

Reconocen la tabla del 9 y la tabla del 11 con ayuda de una línea diagonal que:
“nos muestra que los números: 0, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88 y 99 quedan en medio y son múltiplos del 11. Y una segunda línea que va del 9 al 90, nos muestra que los números que son atravesados son: 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81 y 90, todos estos son múltiplos del 9.”
 (Diario de campo 4 de abril de 2019)

Educación Matemática Realista

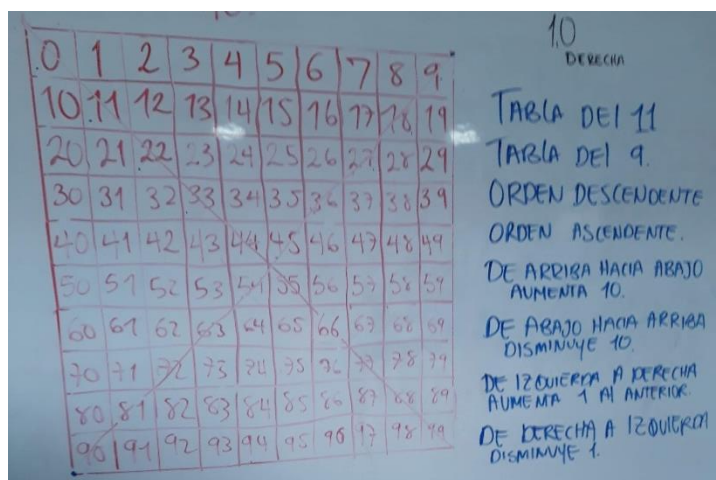
Contextos y situaciones: La tabla numérica se constituye en una situación realista porque los estudiantes han trabajado con los números allí presentes, estos se dan de manera secuencial del 0 al 99, les permite reconocer múltiplos de los números que vienen trabajando en las tablas de multiplicar.

Niveles de comprensión: Permite a los estudiantes hacer uso de sus ideas previas, a la vez que descubren los diferentes usos que puede tener la tabla en la solución de problemas matemáticos de estructura aditiva y estructura multiplicativa. (Diario de campo 4 de abril de 2019)

Modelos: Se puede presentar como un modelo para ser usado en la solución de problemas multiplicativos, ya que es flexible y permite a los estudiantes reconocer el carácter multiplicativo de los números haciendo saltos según la cifra a buscar, también puede ser encontrada con conteo o reconociendo la forma en que se comportan los números, esto se evidencia en la forma que proceden a buscar los múltiplos del 9 y el 11 (Diario de campo 4 de abril de 2019)
 Si llega a ser utilizada como modelo, la tabla no se ve como una herramienta impuesta por el maestro, sino que es el estudiante que reconoce la utilidad de la misma y la pertinencia que pueda tener su uso en la solución de problemas matemáticos.

Estructura multiplicativa

Multiplicación: dentro de la tabla numérica los estudiantes pueden encontrar en un cuadro de diez filas y diez columnas, “Todas las filas van del 0 al 9 (en las unidades o lugar de los unos)” (Seoane, 2008 , p. 12) allí se plantea el conteo de las casillas que es igual a 100, se busca que los estudiantes reconozcan el carácter combinatorio de la multiplicación o producto cartesiano en la tabla al multiplicar $10 \times 10 = 100$ (columnas x filas)



Se identifican los principales múltiplos del 9 y el 11, las cuales se consideran de las tablas de multiplicar más difíciles, sin embargo no solo se busca que reconozcan los múltiplos, sino la forma en que por ejemplo el número 9 se desplaza a través del cuadro y termina en cada múltiplo contando de 9 en 9.

Asimismo, se reconocen elementos importantes en el conocimiento del sistema de valor posicional como: el orden ascendente y descendente de los números a través de la tabla, de diez en diez hacia arriba o hacia abajo, y de 1 en 1 hacia la izquierda o derecha.

Juego

Juego en la matemática: No se dio como juego, pero la actividad es preámbulo a actividades lúdicas, aunque pudieron construir un elemento que les sirve para jugar y aprender. Permite entender el funcionamiento de la tabla, también ayuda a que los estudiantes se ubiquen para poder desplazarse a través de la misma. Les permite poner toda su atención en las diferentes formas que los números se mueven a través de la tabla, esto será importante en las actividades siguientes.

Nombre: Busquemos el tesoro. **Fecha:** 5 de abril de 2019

Desarrollo: Los estudiantes juegan con la tabla numérica (mapa), identificándose como piratas y buscando el tesoro que se halla a partir de los saltos (sumas reiteradas, tablas de multiplicar), reconocen nuevas características de la tabla y cómo trabajar con ella y el algoritmo usual de multiplicación.

Objetivos: Reconocer los números en forma secuencial, de 2 en 2, 3 en 3, y así sucesivamente, hallando patrones.

Reconocer los múltiplos de los números del 1 al 11, para entender el funcionamiento de las tablas de multiplicar.

Multiplicar los números naturales y reconocer patrones en la tabla numérica.

Análisis de contenido	Análisis cognitivo	Análisis de instrucción
<p>Preconceptos Múltiplo. Multiplicación.</p> <p>Conceptos Múltiplos de... Secuencia. Tablas de multiplicar. Números saltados.</p> <p>Definiciones No aplica</p> <p>Representaciones Simbólicas.</p>	<p>El estudiante reconoce una secuencia numérica y la representa en un gráfico. Reconoce en una secuencia numérica propiedades de los números (ser par, impar, mayor que, menor que) Reconoce los múltiplos de un número representados en una secuencia, ya sea saltando número por número o en líneas diagonales. Hace relaciones entre la tabla numérica y las tablas de multiplicar.</p> <p>Errores El estudiante no reconoce una tabla numérica y sus propiedades para multiplicar</p> <p>Dificultades La tabla numérica presentada no es entendida como un elemento que aporta características esenciales de los números sino como una tabla con números secuenciales y sin sentido.</p> <p>Fortalezas El estudiante reconoce nuevos elementos para la discusión dentro de la tabla numérica. Es propositivo y le da otros usos a la tabla numérica.</p>	<p>Pertinencia La tabla numérica permite que se trabaje con cualquier estudiante sin importar su nivel de aprendizaje, ya que es bastante flexible, al presentarse sus características de forma casi que espontánea, ya que puede descubrir por sí mismo las principales propiedades de los números y las relaciones entre ellos, como sus múltiplos que se pueden encontrar de igual forma en las tablas de multiplicar.</p> <p>Renovaciones Se puede utilizar en cualquier actividad que permita recorrer por los distintos números, así que sus renovaciones serían para cumplir con el objetivo de dicha actividad.</p>

Análisis de actuación



Los estudiantes reconocen relaciones entre los números, como ser múltiplo de, también regularidades en la tabla, como la tabla de multiplicar del 2, 3 y 4, entre otros, como se evidencia en la figura.

Por medio de preguntas los estudiantes descubren que pueden hallar regularidades en los números de la tabla, por ejemplo:

“si das pasos de 3 en 3 hasta el 33 ¿qué números pisaste?”

R/ 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30 y 33” (Ver figura del tablero)

Los estudiantes reconocen la tabla numérica como un nuevo elemento que permite encontrar las características de los números y su naturaleza matemática, un ejemplo de esto se expresa así:

“Lo comprobamos con la multiplicación 3×16 , donde se pasó del 3 en 3 dieciséis veces, y como resultado se llegó al 48, para rectificar hicimos el algoritmo de la multiplicación y operamos de igual forma.” (Diario de campo 5 de abril de 2019)

Educación Matemática Realista

Contextos y situaciones: La actividad se muestra interesante para los estudiantes, en cuanto se encuentran en una situación paradigmática: ellos son piratas que buscan un tesoro, las pistas para hallar el tesoro se dan por medio de instrucciones, ejemplo: si das pasos de 2 en 2 hasta el número 20 ¿qué números pisaste? Gracias a esto reconocen los múltiplos del número 2. Esto se comprueba con algunas multiplicaciones.

La EMR plantea que hay contextos imaginarios realistas y el ejemplo anterior sirve como muestra, allí los estudiantes personifican y actúan de acuerdo a lo propuesto.

Dentro de la personificación se encuentra la idea de reconocerse como pirata y buscar el tesoro (números escondidos) dentro del mapa (tabla numérica)

Niveles de comprensión: Se ayudan de sus ideas previas para hacer uso de estrategias o formas de ubicarse dentro de la tabla numérica para hallar regularidades en la misma. Dentro de esas ideas previas se encuentra la que permite que se ubiquen por decenas en forma de columnas (Diario de campo 4 de abril de 2019), esto se habla en la sesión pasada y los estudiantes lo traen a colación.

Modelos: Los estudiantes ya conocen la tabla numérica y entienden cómo se comportan los números 9 y 11 a través de la misma, con esto reconocen los múltiplos de dichos números.

Estructura multiplicativa

Multiplicación: Los estudiantes se encuentran con la tabla numérica hallando los múltiplos de números como 2 y 3 posteriormente al hallar los anteriores pueden encontrar fácilmente los múltiplos de 4 y 6.

Los números dentro de la tabla numérica son coloreados para poder reconocer patrones o “el establecimiento de esas regularidades” (aprender matemáticas a través de proyectos, 2014, párr. 2) a través del recorrido, como se muestra en la imagen, se ve que el dos un número par se mueve a través de las columnas de forma vertical, y el número 3 se mueve de forma diagonal.

Los estudiantes reconocen en la tabla la posibilidad de buscar el número que multiplicado por algún número del 1 al 9 tenga como resultado el número de veces que debe saltarlo. Ejemplo:

¿Cuánto es 3 x 9? Si salta de 3 en 3 nueve veces sabrá que el número al que se llega es el 18.

Juego

Juego en la matemática: Los estudiantes asumieron la actividad también como un juego simbólico (Beltrán, Quintana y Ricaurte , 2010) o mimicry (Caillois , 1986), ya que este permitió que ellos se personificaran en un pirata que recorre la tabla numérica para hallar un tesoro a través de las pistas que se daban, esto genera interés en ellos a la vez que aprenden, sirvió también para generar preguntas que ayudan a entender mejor lo que están haciendo.

La actividad es vista como un juego que permite retener mejor la atención de los estudiantes, algunos participan con mayor intensidad, pues generalmente no lo hacen debido al miedo de confundirse y ser calificado por esta actitud.

La memoria de los estudiantes se nutre cada vez más, porque recuerdan datos numéricos ya trabajados en las tablas de multiplicar, en el conteo y la resolución de problemas de estructura aditiva y multiplicativa.

Resulta interesante esta forma de ver cómo se comportan los números, como sucede en la tabla de multiplicar, y que los niños y las niñas reconozcan esas propiedades sin necesidad de que memoricen como una obligación sino que esto empieza a cobrar sentido, hay una comprensión de los números.

Nombre: Busquemos el tesoro 2da parte. **Fecha:** 12 de abril de 2019

Desarrollo: Se continúa trabajando con la tabla numérica y la situación anterior de los piratas, el mapa y la búsqueda del tesoro, pero en el patio y con una tabla de tamaño gigante, allí los estudiantes usan sus estrategias para ubicar los números de la tabla y completarla.

Objetivos: Observar cómo los estudiantes se ubican dentro de la tabla numérica para poder completar sus números.

Observar el trabajo en equipo para entender las diferentes dinámicas que se presentan.

Análisis de contenido	Análisis cognitivo	Análisis de instrucción
<p>Preconceptos Múltiplos</p> <p>Definiciones No aplica.</p> <p>Representaciones Pictóricas. Simbólicas.</p>	<p>Competencias El estudiante comunica con sus compañeros las ideas que tiene, además emplea estrategias para complementarlas.</p> <p>Ubica los números de forma secuencial dentro de la tabla numérica.</p> <p>Errores El estudiante no logra ubicarse espacialmente dentro de la tabla numérica.</p> <p>Dificultades Dificultades para ubicarse espacialmente dentro de la tabla numérica y encontrar el lugar correcto de los números.</p> <p>Fortalezas El estudiante: Hace uso de lo retomado en clases anteriores y se ubica espacialmente dentro de la tabla numérica para</p>	<p>Pertinencia La actividad recoge los elementos de las dos anteriores actividades para llevarlos a la práctica en el juego. Permite a los estudiantes ponerse en cuestión ya que les exige ubicar fichas numeradas dentro de la tabla numérica, llevando así coherencia con actividades ya vistas, evidenciando las concepciones acerca de la tabla numérica y el fortalecimiento del pensamiento matemático. Predispone al estudiante a actitudes de escucha, atención y trabajo en equipo.</p> <p>Renovaciones Elegir espacios abiertos pero sin flujo de personas que</p>

	hallar el lugar adecuado para los números.	entorpezcan el trabajo de los estudiantes. Al momento de dar las instrucciones o indicaciones ser más preciso.
Análisis de actuación		
Los estudiantes se dispusieron en actitud de atención y escucha, asimismo, a trabajar en equipo para completar la tarea.	Aquí resolvieron los conflictos presentados en medio de la actividad por medio del diálogo y con la intervención de los maestros en formación.	Se evidenciaron actitudes propositivas en algunos estudiantes, lo cual da cuenta de su papel en la actividad como en su proceso de aprendizaje. Los estudiantes mostraron interés en los materiales y en la actividad.
<p>También emplearon estrategias propias para ubicarse en la tabla numérica después de conversar entre ellos, estrategias como: Contar las casillas después de un número que ya esté en la tabla. Buscar la columna que comparte las mismas unidades y llegar hasta este a través de las filas. (ver figura) <i>Los estudiantes se disponen a ubicar los números en la tabla numérica</i></p>		
Educación Matemática Realista		
<p>Contextos y situaciones: Junto con esta actividad y las dos anteriores los estudiantes tuvieron el acercamiento a la tabla numérica, esta vez lograron trabajar en grupos para ubicar los números dentro de la misma. Interacción: A la vez que en estas actividades se da la reinención guiada (Bressany otros, 2005, p. 5) , y es esa oportunidad donde los estudiantes reinventan esas matemáticas ya existentes, pero con la guía constante del maestro quien posibilita las situaciones propicias para que reinventen “modelos, conceptos, operaciones y estrategias matemáticas con un proceso similar a los que usan los matemáticos al inventarlas” (2005, p. 5) Modelos: El interés de los estudiantes por jugar es inminente a la vez que comunican sus ideas, plantean estrategias para ponerlas en práctica seguido deben ubicarse dentro de la tabla numérica que se convierte en un modelo para hallar el lugar del número y así completar la secuencia numérica. La actividad permite que relacionen la tabla con los diferentes problemas matemáticos que se presenten, esto dentro de la matematización misma, “<i>Para sumar avanzamos casilleros y para restar hacemos lo contrario. Por ejemplo, si queremos realizar $23 + 2$, nos posicionamos en el 23 y avanzamos dos lugares</i>” Claudia , (2016, párr. 2) si se multiplica se avanza dando saltos entre los números y para dividir se procede al contrario, contando desde un número, y dando los saltos disminuyendo.</p>		
Estructura multiplicativa		
<p>Multiplicación: Reconocen la tabla numérica para resolver los problemas, ya que esta les permite ubicar los mismos resultados que una tabla de multiplicar, teniendo en cuenta las características específicas mencionadas anteriormente. Por último se sitúan en la tabla numérica que se dispone en el patio, allí deben colocar los números que se le asignan y verificar que sea correcto el lugar.</p>		
Juego		
<p>Juego en la matemática: Entra en la clasificación de juego de construcción (Beltrán, Quintana y Ricaurte , 2010) ya que los estudiantes pueden ser testigos de cómo se va completando la tabla numérica por medio de la acción directa de cada uno de sus compañeros, asimismo, en</p>		

la categoría de juego simbólico (2010) o mimicry (Caillois , 1986) como se menciona en la actividad anterior, pues siguen en la representación de la búsqueda de un tesoro metafórico. Los estudiantes pueden participar con sus pares, allí ponen en juego su conocimiento matemático, pero también la capacidad de cooperar para lograr un mismo fin. Se entretienen resolviendo los problemas, poniendo en discusión las diferentes soluciones, y dialogando para seguir en la actividad. La búsqueda del tesoro se convierte en una metáfora para los estudiantes al momento de jugar aprendiendo y aprender jugando.

5.2. Actividades de seguimiento

Nombre: La ranita sumadora **Fecha:** 10 de mayo de 2019
Desarrollo: Los estudiantes organizados en grupos de 4, lanzan las fichas y hacen la suma de los puntos a la vez que hacen el registro en las hojas de anotaciones, suman todos los puntos del grupo y responden las preguntas en relación al total de puntos.
Objetivos: Evidenciar en los estudiantes la resolución de problemas de estructura aditiva.
Específicos
 Demostrar el uso de estrategias formales e informales para la resolución de problemas matemáticos de estructura aditiva como también sumas reiteradas, uso de gráficas para representar cantidades, análisis y comparación de datos.
 Fomentar el trabajo en equipo y la competencia sana en el juego.

Análisis de contenido	Análisis cognitivo	Análisis de instrucción
Preconceptos Valor posicional de los números. Unidades, decenas y centenas. Conceptos Suma. Definiciones No aplica Representaciones Concretas. Pictóricas. Simbólicas.	El estudiante logra sumar varias cantidades con ayuda de sus dedos. Reconocer las propiedades de la suma (conmutativa, asociativa y distributiva) Resuelve y escribe la solución de los problemas aditivos. Verbaliza la solución de los problemas aditivos. Errores El estudiante no da la respuesta correcta a los problemas aditivos. No logra comprender el trabajo con problemas aditivos. Dificultades El estudiante necesita ayuda para resolver los problemas aditivos. Encuentra dificultad para dar la respuesta correcta a algún problema aditivo. Fortalezas El estudiante logra dar la respuesta correcta al problema aditivo. Argumenta sus respuestas. Es propositivo y plantea nuevas formas de jugar.	Pertinencia Por ser una actividad que ya conocen los estudiantes, se le implementó una adecuación al juego, donde los estudiantes emplean una ficha de anotaciones de los puntos de cada jugador, de esta manera llevan el conteo de los puntos, y al final a la luz de los datos recolectados identificar: el jugador con más puntos, jugadores con la misma cantidad de puntos, el jugador con la menor cantidad de puntos. Renovaciones Se pueden implementar otras formas de recolección de datos para los jugadores, ya sean propuestas por los mismos estudiantes o por el maestro en formación.
Análisis de actuación		
En esta actividad se evidencia el trabajo de los grupos de forma	Los estudiantes hacen el análisis de los datos	Un grupo asignó un ganador sin darse cuenta

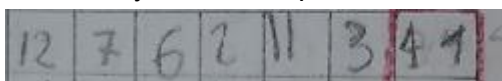
<p>competitiva, pero sin generar conflictos por quién ganó o quién perdió.</p> <p>También el uso de estrategias formales e informales para el conteo de los puntos, ya sea por medio del uso de algoritmos o por conteo de unidades con ayuda de los dedos o mentalmente.</p>	<p>recogidos en las fichas de anotaciones y dan respuesta a las preguntas previamente planteadas.</p> <p>En algunas fichas se encontró: Algunos grupos no hicieron bien la suma de los puntos, en ese caso se pasaban de la cuenta. (ver análisis de Matemática, más adelante)</p>	<p>que en realidad hubo un empate, debido al mal conteo de los puntos.</p> <p><i>“No hubo ganador, hubo empate entre la niña VD y la niña LS, pues la suma total de los puntos del grupo no es de 193 sino 192.”</i> (rejilla nº 1, p. 18) (ver anexo 3.4 y anexo 5.1)</p>
---	--	--

Se pone en evidencia lo que saben los estudiantes sobre suma, como las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva, dando elementos para el análisis de su proceso de aprendizaje. Por ejemplo:

Algunos estudiantes hacen sumas sin importar el orden de los números.

Suman primero las unidades y después las decenas o viceversa, sin ningún problema.

Lo anterior se evidencia en que: “Hacen uso del conteo para la suma, asimismo conteo de memoria y suman los puntos de cada uno.” (Rejilla nº 1, p. 10)



En la figura se aprecian cifras de unidades y decenas ubicadas arbitrariamente, estos fueron sumados seguramente con los dedos o de manera mental.

Educación Matemática Realista

Contextos y situaciones: Esta actividad ya era conocida por los estudiantes, lo que cambia esta vez es que se deben registrar los puntos en una hoja con un cuadro que ha de ser llenado por cada estudiante con su nombre. Lo anterior les da la oportunidad de identificarse con el trabajo que hacen.

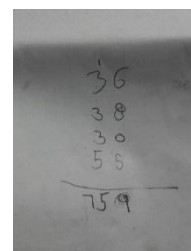
Niveles de comprensión: Los estudiantes se encuentran en un nivel de comprensión más avanzado que la primera vez que participaron en esta actividad, dentro del nivel referencial los estudiantes reconocen el tipo de problemas de la estructura aditiva, en este caso los algoritmos y los diferentes procedimientos son aplicados a problemas que permitieron que surgieran desde un principio.



Modelos: Se observa el uso de modelos como lo plantea la EMR, dentro de estos los materiales (Bressan y otros, 2005, p. 10) (Bressan y otros, 2016, p. 5): cubetas (ver figura), fichas, hoja de registro (Anexo 3.4)

Para la ficha de anotaciones los estudiantes comprenden que tienen que responder las preguntas, por eso los datos allí son interpretados y con base en esto resuelven operaciones con ayuda de algoritmos.

Ejemplo: “los estudiantes haciendo uso de los datos de la columna marcada con rojo, resuelven hacer una suma con ayuda del algoritmo” (rejilla nº 1, p. 5) (ver segunda figura)

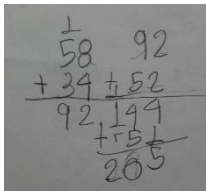


En resumen se usan modelos materiales, esquemáticos y simbólicos.

Estructura aditiva

Suma: Los estudiantes resuelven problemas de estructura aditiva, al tener que sumar los puntos que hacen en los lanzamientos, allí suman de manera mental o con los dedos, seguido

a esto suman la totalidad de los puntos hechos por cada uno y finalmente suman la totalidad de los puntos del grupo.



Algoritmo: En la suma de los puntos individuales algunos estudiantes usaron el algoritmo de la suma.

En la anterior imagen “Como se puede observar suman los dos primeros números de la lista, en este caso $58 + 34$ (se ve como “lleva” las cifras) y da como resultado 92, este a su vez se suma por el tercer número, 52 y da como resultado 144, éste se suma con 51, el último número, y da como resultado 205, que al parecer está mal, ya que esta suma da como resultado 195. Pero viendo bien la imagen estos números estaban escritos pero fueron borrados” (Rejilla nº 1, p. 9-10)

Estrategias y solución de problemas: Así como el anterior grupo, varios mostraron errores al no rectificar los resultados que escriben, errores que son por un número mal operado pero que cambia todo el resultado final.

Los estudiantes responden sobre las preguntas en la hoja, algunos responden mal debido a que en el conteo de los puntos se equivocaron, otros responden correctamente.

Dentro de los modelos más usados está el modelo lineal (Castro, E., Castro y Rico, 1995, p. 46), de recuento de los números, (ver figura en análisis de actuación)

Juego

Juego en la matemática: Entra en los juegos de Agón (Caillois , 1986) ya que los estudiantes compiten por quién obtiene los mejores puntajes, pero de manera un tanto arbitraria deben trabajar en equipo para resolver el cuadro de anotaciones.

Los estudiantes participaron en el juego la ranita sumadora de forma activa, por grupos contaban con una cubeta, fichas y una hoja o ficha de anotaciones, cada uno esperaba su turno y lanzaba, les divirtió la posibilidad de competir con sus compañeros, sobre quién lleva más puntos, quiénes van empatados, quién tuvo menos puntos. (Caillois , 1986, p. 18) (Ver figura en análisis de EMR)

Dentro del juego se presentaron varios conflictos, pero se solucionaron hablando, el maestro medió entre los estudiantes para que lograran llegar a mutuo acuerdo.

Las reglas del juego fueron interiorizadas por los estudiantes y respetadas de la misma manera, algunos implementaron o inventaron (p. 67) otras reglas como: no pisar raya, no lanzar las fichas de una en una, sólo lanzar todas las fichas al tiempo. Estas reglas fueron aceptadas por todos en el grupo.

El juego permite que los estudiantes pongan a prueba su conocimiento en la resolución de problemas aditivos, lo que lleva a que movilicen con mayor agilidad su pensamiento, contrario a estar en situaciones donde resuelven problemas sin sentido en lápiz y papel.

Nombre: Juguemos con las restas (dominó matemático) **Fecha:** 23 de mayo de 2019

Desarrollo: Los estudiantes en grupos de 4, tienen 30 fichas de dominó los cuales se reparten en cantidades iguales, seguido empiezan a unir los problemas con su resultado, o dos problemas cuyo resultado sea el mismo número, gana quien quede sin fichas.

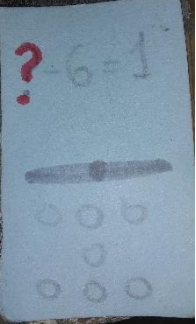
Objetivos: Identificar el manejo de la resta en la resolución de problemas aditivos de cambio de forma verbal y escrita.

Evidenciar el uso del algoritmo o estrategias informales por parte de los estudiantes.

Análisis de contenido	Análisis cognitivo	Análisis de instrucción
Preconceptos Resta, Quitar Sustraer,	Competencias El estudiante reconoce representaciones concretas en forma de problema matemático y busca forma de solucionarlo.	Pertinencia La actividad permite que los estudiantes identifiquen problemas de estructura aditiva por

<p>Menos que.</p> <p>Conceptos Resta</p> <p>Definiciones No aplica</p> <p>Representaciones Concretas, Pictóricas, Simbólicas.</p>	<p>Reconoce representaciones pictóricas en forma de problema matemático y busca forma de solucionarlo.</p> <p>Resuelve problemas de estructura aditiva de cambio con ayuda de algoritmos.</p> <p>Resuelve problemas de estructura aditiva de cambio con ayuda de estrategias informales.</p> <p>Encuentra relaciones entre representaciones concretas, simbólicas y pictóricas.</p> <p>Errores El estudiante no comprende los problemas matemáticos presentados por medio de representaciones pictóricas y concretas.</p> <p>Dificultades El estudiante encuentra dificultades para reconocer los problemas en las fichas. No logra encontrar solución a los problemas presentados en las fichas.</p> <p>Fortalezas El estudiante comprende los problemas matemáticos presentados en las fichas y ayuda a sus compañeros en la comprensión de los mismos.</p>	<p>medio de representaciones pictóricas, simbólicas y concretas.</p> <p>Permite que los estudiantes argumenten sus respuestas por medio del material concreto y de manera verbal.</p> <p>Promueve el uso de estrategias formales e informales para resolver problemas de estructura aditiva.</p> <p>Renovaciones Implementar problemas verbales. Mejorar el material de las fichas de dominó. Mejorar la calidad de las imágenes.</p>
--	--	--

Análisis de actuación

 <p>Los estudiantes comprenden muy bien los problemas presentados en diferentes representaciones, ya sea por medio de dibujos (concreto), números (simbólico) y figuras (pictórico) Escobar (2013, párr. 2).</p> <p>En la figura se aprecia un problema que por incógnita tiene el número 7 y una representación pictórica del 7.</p>	<p>En el desarrollo del juego se evidencia actitudes de trabajo en equipo, competencia sana y proposición.</p> <p>Los estudiantes juegan más de dos rondas lo cual permite identificar el interés por la actividad, el tema y los materiales.</p>	<p>Los estudiantes se apropian rápidamente de los problemas presentados en las fichas, al punto de crear anticipaciones y estimaciones.</p>
--	---	---

Se aprecia que los estudiantes se desenvuelven muy fácil con la solución de problemas aditivos y sustractivos con la mediación de los juegos, contrario a lo que se evidencia en clases cuando se presentan problemas escritos en los exámenes, de lo anterior se deduce que hay que buscar formas de relacionar estos dos tipos de tareas para que los estudiantes puedan responder en ambos de forma adecuada, haciendo uso de sus *estrategias informales* (Castaño , La construcción del pensamiento multiplicativo simple, 1996, p. 4), *algoritmos* (Castro, 2001, p. 233) y *representaciones simbólicas* (2001, pp. 196-198).

Lo anterior se refleja en que los estudiantes pueden llegar a tener un mayor aprendizaje si se brindan diferentes formas de representación de problemas, así:
"a - b = ¿?, Esto es lo mismo que 7 - 4 = ¿? Donde ¿? Es igual a 3
a - ¿? = c, es como si dijera 7 - ¿? = 3 y ¿? Es igual a 4

$\zeta? - b = c$, se puede representar como $\zeta? - 4 = 3$, aquí la incógnita es 7" (diario de campo, 23 de mayo de 2019)

Educación Matemática Realista

Contextos y situaciones: El juego consiste en el dominó, por tanto los estudiantes ya conocen o tienen ideas previas sobre su manejo, así pues se considera un *contexto situacional* (Bressan, 2005, p. 5) dentro del principio de realidad, el juego tuvo modificaciones para cumplir con el propósito matemático.

Niveles de comprensión: Los estudiantes se encontraron con los problemas presentes en las fichas y los interpretaron para poder jugar, al ubicarlas coherentemente.

"Aquí se aprecia que en la incógnita correspondiente a $77 - \zeta? = 70$ y $\zeta? - 4 = 3$ es igual a 7 y que la incógnita de $\zeta? - 1 = 8$ es 9, el mismo nueve de la siguiente ficha." (Diario de campo, 23 de mayo de 2019)

Interacción: Generó interés en los estudiantes al punto que terminaban de jugar, había un ganador y volvían a jugar, algunos memorizaban los datos numéricos de las fichas para poder desenvolverse con facilidad.

Modelos: El material del juego permitió una mayor comprensión de los problemas matemáticos de resta al ser fáciles de reconocer.

Estructura multiplicativa

Multiplicación: Dentro de los **modelos** (Castro, Castro, & Rico, 1995, p. 46) más usados para resolver problemas están:

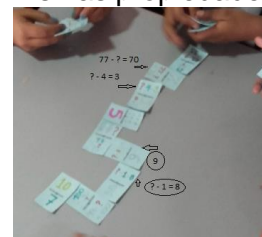
Modelo lineal: los estudiantes cuentan de dos en dos o tres en tres para hallar un resultado.

Modelo numérico: los estudiantes restan cantidades con ayuda de sus números o mentalmente.

Modelo funcional: en las fichas se aprecian problemas donde el resultado o diferencia hace de operador y la incógnita se encuentra en el minuendo o sustraendo. (ver figura en análisis)

Propiedades: Los estudiantes reconocen que la resta no cumple con las mismas propiedades de la suma, donde el orden de los términos, en este caso, sí importa

Estrategias y solución de problemas: Los estudiantes interpretaron las imágenes de las fichas, en términos de representaciones (Castro, 2001, pp. 91-95) se encontraron de tipo concreto mostrando cantidades discretas de objetos reales; pictóricas, con imágenes de cantidades representadas con figuras y simbólicas con ayuda de números naturales, problemas de suma, resta, multiplicación, también números escritos. (ver figura)



Juego

Juego en la matemática: el juego es de Agón (Caillois, 1986) ya que pone a competir a los jugadores, quienes deben hallar la forma de solucionar los problemas, a la vez de ser el primero en quedar sin fichas.

Los estudiantes se vieron muy interesados en el juego, participaron de varias rondas y disfrutaron aprender y poner en práctica su conocimiento.

Dentro de las reglas, se propuso las mismas al juego original, pero en este caso, los estudiantes tenían que unir una ficha con un problema y una ficha con la solución o resultado. (Diario de campo, 23 de mayo de 2019)

Por ser un juego grupal, la interacción con sus pares resultó enriquecedora, donde ellos dialogaban, se corregían entre ellos mismos y se ayudaban.

Los problemas matemáticos le dan un plus al juego, le imprimen una dificultad que los estudiantes asumen de buena manera.

Nombre: Examen de multiplicaciones **Fecha:** 14 de junio de 2019

Desarrollo: Los estudiantes resuelven dos problemas multiplicativos con algoritmo, con base en sus respuestas, se analizan sus estrategias informales, fortalezas y dificultades.

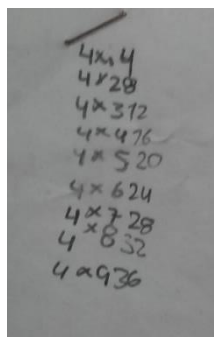
Objetivos: Evidenciar las fortalezas y debilidades de los estudiantes cuando operan con algoritmo usual de la multiplicación.

Evidenciar el uso de estrategias formales e informales en la solución de problemas multiplicativos.

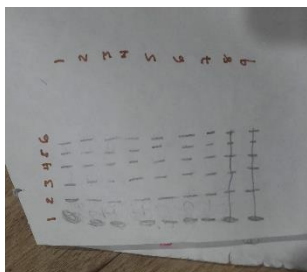
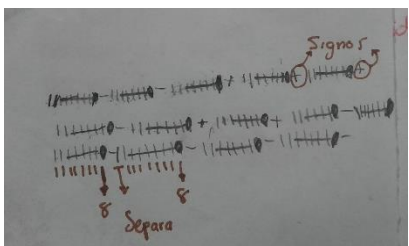
Análisis de contenido	Análisis cognitivo	Análisis de instrucción
<p>Preconceptos Multiplicación Algoritmo de la multiplicación.</p> <p>Conceptos Problemas multiplicativos.</p> <p>Definiciones No aplica</p> <p>Representaciones Simbólicas.</p>	<p>Competencias El estudiante resuelve problemas multiplicativos haciendo uso del algoritmo de la multiplicación. Emplea estrategias informales para la solución de problemas multiplicativos.</p> <p>Errores El estudiante opera erróneamente el algoritmo de la multiplicación.</p> <p>Dificultades El estudiante multiplica bien los números del multiplicador con los números del multiplicando pero no corre los espacios correspondientes a los productos dando un resultado equivocado. Aún no sabe operar correctamente con el algoritmo de la multiplicación.</p> <p>Fortalezas El estudiante opera correctamente con el algoritmo de la multiplicación.</p>	<p>Pertinencia Al ser una actividad de diagnóstico permite evidenciar puntualmente las fortalezas y las debilidades de los estudiantes al momento de operar con el algoritmo de la multiplicación, estos insumos servirán para el análisis, la reflexión y futuras intervenciones en procesos de retroalimentación para los estudiantes.</p> <p>Renovaciones No aplica</p>

Análisis de actuación

<p>En las fortalezas se evidencia que:</p> <p>-Hacen uso de muletillas, marcas o señas para entender con qué números ya han operado.</p> <p>Operan correctamente con el algoritmo de la multiplicación.</p> <p>Asimismo, se aprecian en sus hojas de apoyo el uso de estrategias para operar con el algoritmo, como las siguientes: -Escribir las tablas de multiplicar de algún número "difícil" como el 6, 7, 8 y 9. (Ver figura)</p>	<p>Dentro de las estrategias de los estudiantes, se cuestiona el uso de los palitos para sumar, siendo que la suma debería de ser algo "fácil" para un estudiante que no muestra dificultad para multiplicar los números del multiplicador y multiplicando.</p> <p>El uso de las tablas de multiplicar y su escritura en hojas de apoyo es algo común entre los estudiantes, pero</p>	<p>Del trabajo con el algoritmo se plantea que:</p> <p>-los estudiantes no logran comprender el valor posicional de los números porque existen ideas erróneas que no han sido aún superadas, como que el cero es ausencia de valor, entre otras.</p> <p>-algunos estudiantes no comprenden el uso de "llevar cifras" al momento de multiplicar los números del multiplicador con el multiplicando.</p> <p>-es pertinente el uso de las tablas de multiplicar para resolver problemas multiplicativos con ayuda del algoritmo, pero hay que buscar estrategias didácticas para estas mismas se vuelvan datos numéricos recordados, o</p>
---	---	---



-Dibujan palitos para sumar los números correspondientes a los productos. (Ver figuras)

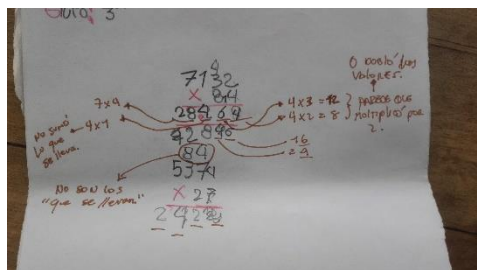


igualmente ha de ser algo que tenga que ser superado, al momento de volverse en datos recordados, o implementar una estrategia mental que les permita llegar al resultado por otras vías.

cálculos mentales para evitar que tengan que ser escritas.

-hay que buscar la forma de enseñar a los estudiantes que los múltiplos del 3 son los mismos que del 6, este es un ejemplo para que comprendan que la dificultad en estos números grandes solo está en los mismos resultados que hay que hallar.

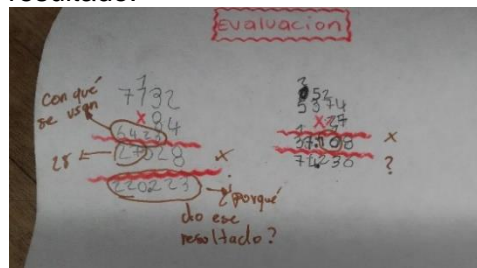
Dentro de las debilidades de la mayoría de los estudiantes se encuentran:



-Opera con el multiplicador y el multiplicando, pero la cifra que "se debe llevar" la coloca en un lugar equivocado. (ver figura)

En la imagen el niño JP, anota mal las cifras "que se llevan"

resultado.



-Al multiplicar por cero no se escribe el cero como un resultado.

-No se corren los espacios entre los diferentes productos. (ver figura)

Se aprecia que la estudiante no multiplica los por la cifra de las decenas del multiplicador, por tanto no obtiene el segundo resultado para hallar el producto.

Educación Matemática Realista

Contextos y situaciones: La actividad parte de un contexto realista al cual se ven enfrentados los estudiantes casi que todos los días y es la presentación de exámenes de matemáticas que deben resolver multiplicaciones con el algoritmo usual. Pero más allá de esto se busca que el estudiante mecanice el algoritmo de la multiplicación, es decir, que lo opere de forma sencilla, memorizando las tablas de multiplicar y el seguimiento de los pasos.

Niveles de comprensión: Para la actividad se busca reconocer las dificultades y estrategias propias de los estudiantes para resolver estos problemas (Rejilla nº 3), lo anterior en pro de ayudarlos a reconocer esas falencias y sobrepasarlas, también entendiendo que las estrategias que usan son únicas dependiendo cada estudiante, así se usen las mismas en varios de ellos.

Modelos: Como se identificó, el modelo usado por los estudiantes es el simbólico Escobar (2013, Párr. 2) o de algoritmo (Bressan y otros, 2016, p. 5) (Ver figuras)

Estructura multiplicativa
<p>Multiplicación: Los estudiantes diariamente presentan exámenes de matemáticas donde encuentran multiplicaciones que deben resolver, en el análisis de los exámenes se encontraron diferentes dificultades como las ya mencionadas en el análisis de actuación.</p> <p>Problemas al llevar o agrupar, al correr los espacios entre productos, al escribir resultados equivocados ante la falta de conocimiento de las tablas de multiplicar, se considera al cero como ausencia de cantidad, por tanto no se escribe, entre otros.</p> <p>Estrategias y solución de problemas: También se identificó el uso de estrategias como: escribir las tablas de multiplicar de los números más difíciles, hacer rayitas o palitos de forma ordenada para contar o sumar, descomponer la multiplicación y resolverla (Castaño, 1996) (Castro, 2001)</p>
Juego
<p>Juego en la matemática: La actividad no entra en la categoría de juego al ser un examen de lápiz y papel para analizar las respuestas de los estudiantes.</p>

Nombre: La escalerita **Fecha:** 13 de septiembre de 2019

Desarrollo: Los estudiantes en grupos de 4, con el tablero, las fichas y los dados van recorriendo por las diferentes casillas donde encontrarán problemas verbales, con algoritmo, figuras geométricas, atajos, gana quien llegue al final del tablero)

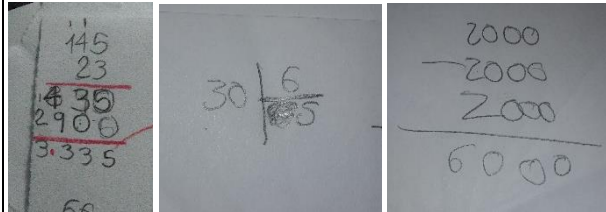
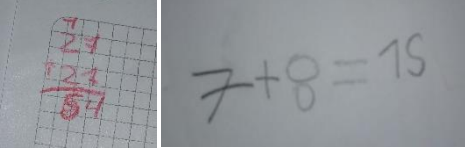
Objetivos: Fomentar el uso de estrategias formales e informales en la solución de problemas multiplicativos.
Promover la solución de problemas multiplicativos de forma verbal y escrita.



Análisis de contenido	Análisis cognitivo	Análisis de instrucción
<p>Preconceptos Medio, un cuarto, un tercio, entre otros. Cuadrado, triángulo, entre otros. Conteo, suma reiterada, algoritmos.</p> <p>Conceptos Multiplicación. Propiedad conmutativa, asociativa y distributiva de la multiplicación.</p> <p>Definiciones Multiplicación, propiedad conmutativa, asociativa y distributiva de la multiplicación.</p> <p>Representaciones Concretas, Simbólicas y</p>	<p>Competencias El estudiante resuelve problemas multiplicativos haciendo uso del algoritmo de la multiplicación. Reconoce representaciones concretas en forma de problema matemático y busca forma de solucionarlo. Reconoce representaciones pictóricas en forma de problema matemático y busca forma de solucionarlo. Resuelve problemas de tipo estructura aditiva con ayuda de algoritmos. Resuelve problemas de estructura aditiva con ayuda de estrategias informales. Encuentra relaciones entre representaciones concretas, simbólicas y pictóricas.</p> <p>Errores El estudiante no da respuesta a ninguno de los problemas presentados en el tablero de juego. No trabaja en equipo.</p> <p>Dificultades Para relacionar los problemas con los diferentes tipos de representación.</p>	<p>Pertinencia Esta actividad es una modificación del juego tradicional de la escalerita, y de la misma tabla numérica que se planteaba en actividades anteriores, por lo tanto promueve el pensamiento matemático de los estudiantes en cuanto plantea actividades de geometría, fraccionarios (cabe aclarar que es por exigencia del plan curricular del curso) de problemas de tipo aditivo, sustractivo y multiplicativo, en forma verbal y escrita.</p> <p>Renovaciones</p>

Pictóricas.	Para reconocer las figuras geométricas. Para operar con los problemas de tipo aditivo, sustractivo y multiplicativo. Fortalezas Reconoce los problemas según la representación que se emplee. Busca una o más formas de resolver un problema matemático.	Las renovaciones pueden ir acorde a los intereses y necesidades de los estudiantes, asimismo, de su curso.
-------------	---	--

Análisis de actuación

Como en las demás actividades hechas en grupos se identificó las actitudes de trabajo cooperativo, competencia sana, y si se presentaban conflictos los estudiantes los resolvían por medio del diálogo o con la intervención del maestro en formación.	En la solución de los problemas verbales, la mayoría de estudiantes hace uso de los algoritmos, ya sea de suma, resta o multiplicación, y de división por una cifra. <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;">  </div> <div style="display: flex; justify-content: center; align-items: center; margin-top: 10px;">  </div> <p align="center">(Ver figuras)</p>	En el trabajo con la escalerita se observaron las diferentes estrategias informales de los estudiantes, como son: conteo con los dedos, entre otros, así: <i>“Los estudiantes hicieron uso de estimaciones e inferencias a partir de los datos de las casillas, además otros para hacer conteo hacen uso de los dedos, o de dibujar palitos y contarlos.” (rejilla de seguimiento nº 3)</i>
---	---	--

En los diferentes problemas los estudiantes reconocen las figuras, imágenes y símbolos que se les presenta. Al final de la socialización de la actividad proponen cambios y renovaciones puntuales al juego, como: niño JH “también debemos poner más sumas, multiplicaciones y divisiones”, niño WV “que hubieran más figuras, más mmm, como más preguntas, multiplicaciones” (diario de campo, 13 de septiembre de 2019) (anexo 2.6)	Se observó interés en el juego y sus distintos materiales, al argumentar lo aprendido con el mismo, de la siguiente forma: Niña CA “A veces las preguntas no eran de matemáticas, sino eran de saltar, de divertirse, pero fueron muy chéveres y nos enseñaron cosas de matemáticas, por ejemplo las multiplicaciones, las divisiones, los fraccionarios” (diario de campo, 13 de septiembre de 2019)(Anexo 2.5)
---	---

Educación Matemática Realista

Contextos y situaciones: La actividad se sitúa en un contexto realista de juego, aquí la escalerita es conocida por los estudiantes y se le hacen unas modificaciones para que cumpla con el propósito matemático.
 Los estudiantes se forman en grupos y pueden encontrar diferentes problemas que son “representables, razonables, imaginables (...) como generadores de su actividad matematizadora” (Bressan y otros, 2016, p. 3)

Por ejemplo: “¿Qué edad tendrás en 20 años?, Si un paquete de papas vale \$2000 ¿cuánto valen 3 paquetes?” (Anexo 3.5)

Interacción: El material del juego permite que los estudiantes se sientan más amenos con la actividad y sus propios compañeros, también comprenden con mayor facilidad los problemas y buscan soluciones más sencillas para los mismos, como por ejemplo calcular de manera mental.

Modelos: Dentro de la EMR los modelos más usados por los estudiantes son, materiales, así se encuentra el tablero de juego, las fichas y los dados; lingüísticos al presentarse problemas verbales de estructura aditiva y multiplicativa, esquemas, ya que el tablero de juego se hizo con el mismo modelo de la tabla numérica usado en actividades anteriores y simbólicos al presentar problemas que los estudiantes resolvieron de forma mental o con algoritmos (Bressan y otros, 2016, p. 4)

Estructura multiplicativa

Multiplicación: Los estudiantes se encontraron con un tablero de 100 casillas, en cada una encontraban problemas verbales y de algoritmos de estructura aditiva y multiplicativa, los problemas debieron ser resueltos para poder conservar el lugar donde cayó o retroceder una casilla.

Propiedades: Hicieron uso de su conocimiento para resolver los problemas, también para implementar las distintas propiedades de la suma y multiplicación, a diferencia de los problemas de resta y división (Castro, 2001, p. 222).

Algoritmo: Reconocieron los problemas y argumentaron sus respuestas, ayudándose de un lenguaje matemático apropiado y procedimientos.

Estrategias y solución de problemas:

Dentro de los modelos para resolver problemas se encuentran:

Modelo lineal: los estudiantes hacen sumas por conteo de dos en dos, tres en tres, cinco en cinco, con ayuda de sus dedos o mentalmente.

Modelo numérico: los estudiantes para hallar el producto de una multiplicación se valen de una suma reiterada, o en caso de división hacen reparticiones o restas reiteradas.

Modelo de razón aritmética: cuando se encuentran con problemas verbales de comparación o razón multiplicativa.

Modelo funcional: dentro de los problemas se encuentra el resultado como incógnita, o alguno de los operadores es la incógnita. (Castro, E., Castro y Rico, 1995, p. 46)

Juego

Juego en la matemática: entra en el tipo de juegos de Agón (Caillois , 1986) aquí compiten cada uno con su ficha para llevarla a la meta, poniendo en juego sus capacidades de resolver los problemas que están en las casillas, asimismo, es un juego de Alea porque los resultados de los dados no depende ellos sino del azar, podría decirse que entra en un último tipo de juego de ejercicio (Beltrán, Quintana y Ricaurte , 2010) ya que en las casillas del tablero se pedía actividades físicas como saltar, recorrer entre otras acciones que se ejecutan con el cuerpo, pensadas para que no se centren en solo estar inmersos en el tablero sin posibilidad de moverse.

Se divirtieron jugando la escalerita, ya que cada jugador cuenta con una ficha y las mismas posibilidades que los demás.

Las reglas del juego son iguales a las del juego original, pero se agregaron otras distintas con el fin que los estudiantes respondieran las preguntas de cada casilla, algunos estudiantes se aprovecharon de la regla que pide que cada jugador al no responder el problema de la casilla en que caiga debe retroceder una casilla, de esta manera no respondía ningún problema y se

devolvía siempre una casilla sin inmutarse, ante esto se intervino para evitar ese comportamiento.
 Los estudiantes se mostraron muy activos y participativos en los diferentes grupos, algunos jugaron más de una vez, de esta manera se identificó que el juego se puede llegar a complejizar un poco más.

Nombre: Ficha tapada **Fecha:** 27 de septiembre de 2019
Desarrollo: Los estudiantes en grupos de 3, resuelven problemas verbales dentro de la hoja, en cada respuesta, hay una ficha la cual ubican en la tabla gigante que está en el patio.
Objetivos: Promover la solución de problemas de estructura aditiva y multiplicativa de forma verbal y escrita.
 Observar y analizar la forma de solucionar los problemas de multiplicación de razón, comparación y combinación, también problemas de división partitiva y de medida.
 Fomentar el uso de la tabla numérica en la solución de problemas multiplicativos.

Análisis de contenido	Análisis cognitivo	Análisis de instrucción
<p>Preconceptos Suma, suma reiterada, resta.</p> <p>Conceptos Multiplicación División</p> <p>Definiciones Algoritmo de multiplicación y de división</p> <p>Representaciones Simbólicas.</p>	<p>Competencias El estudiante resuelve problemas de tipo multiplicativo y aditivo en equipo. Hace uso de estrategias informales para resolver problemas de tipo multiplicativo y aditivo. Hace uso de algoritmos para resolver problemas de tipo multiplicativo y aditivo. Ubica los números de forma secuencial dentro de la tabla numérica.</p> <p>Errores El estudiante no logra ubicarse espacialmente dentro de la tabla numérica.</p> <p>Dificultades Dificultades para ubicarse espacialmente dentro de la tabla numérica y encontrar el lugar correcto de los números.</p> <p>Fortalezas El estudiante hace uso de lo retomado en clases anteriores y se ubica espacialmente dentro de la tabla numérica para hallar el lugar adecuado para los números. Resuelve los problemas de tipo multiplicativo y aditivo y lo socializa con su grupo.</p>	<p>Pertinencia Esta actividad se diferencia de las anteriores de busquemos el tesoro, ya que presenta problemas de tipo verbal y el estudiante al responderlos puede ubicar una ficha dentro de la tabla numérica. Promueve el uso de estrategias informales para resolver los problemas matemáticos. Plantea problemas verbales, importantes para futuras intervenciones, en la que los estudiantes deberán crearlas, planteando problemas y buscando formas de ubicar el cuestionamiento.</p> <p>Renovaciones No aplica.</p>

Análisis de actuación		
Los estudiantes resuelven los problemas en equipo, turnándose para que cada uno pueda resolver la misma cantidad de problemas, a veces, si uno de ellos no comprende el problema, o no da correctamente la respuesta, los demás le ayudan o le corrigen.	Se ubican con mayor facilidad en cuanto a la tabla numérica.	Demuestran diferentes formas de resolver los problemas, ya sea por cálculo mental o con ayuda de los diferentes algoritmos.

Los diferentes conflictos que se presentaron se solucionaron por medio del diálogo y con ayuda del maestro en formación.

Educación Matemática Realista

Contextos y situaciones: La actividad se sitúa en un contexto realista porque plantea el trabajo con problemas verbales los cuales los estudiantes pueden representar, imaginar y resolver con ayuda de su conocimiento en matemáticas, además que se emplea una vez más la tabla numérica, esta se sitúa en el patio del colegio de forma que los estudiantes cambien a entornos diferentes al aula de clase y se apropien de los espacios del colegio, que sirven igualmente para matematizar.

Se hacen de una situación paradigmática, pero en un contexto realista imaginario, por ejemplo, un estudiante plantea la importancia del uso del dinero en la vida real, como en los problemas que están, así este sea imaginario, los estudiantes lo conocen y lo pueden imaginar como si en realidad estuviese ahí.

Niveles de comprensión: Los estudiantes se mueven a través de los distintos niveles de comprensión, en un primer nivel situacional “se da la interpretación de la situación problemática y el uso de estrategias vinculadas totalmente al contexto de la situación misma” (Bressan y otros, 2016, p. 7) es aquí donde se identifica que los estudiantes comprenden los problemas y usan las estrategias que conocen para resolverlas, además en este proceso de matematización horizontal ellos reconocen y encuentran diferentes formas de formular un mismo problema, de esta manera hallan relaciones y regularidades.

Para los siguientes niveles se habla de matematización vertical, y es donde los estudiantes hacen un “ajuste de modelos, la esquematización conceptual y formalización progresiva” (2016, p. 7) esto trata sobre los avances que tienen caracterizados por la diferencia en el tratamiento que ellos dan a los problemas matemáticos.

En un nivel referencial hacen uso de **modelos de**, como lo plantea la EMR, estos modelos se usan para responder un problema con el uso de “las representaciones o modelos gráficos, materiales o notacionales, y las descripciones, conceptos y procedimientos personales que esquematizan” (2016, p. 7) entonces se identifica que los estudiantes hacen uso de estrategias informales que sirven para responder a problemas de estructura aditiva, pero a su vez son usados en la estructura multiplicativa, sin embargo usan conceptos y procedimientos más avanzados como algoritmos, cálculos mentales y la argumentación tan importante en su proceso de pasar de un nivel a otro de la mano de la reflexión, Freudenthal lo define así: La evolución entre niveles se da cuando la actividad en un nivel es sometida a análisis en el siguiente, el tema operatorio en un nivel se torna objeto del siguiente nivel Freudenthal, (1971, p. 417), citado en (2016, p. 7) por ello se considera que los estudiantes han tenido avances notorios al momento de proceder con la resolución de problemas multiplicativos.

Dentro del nivel general se observa que los estudiantes hacen uso de estrategias para un tipo de problemas, es decir, reconocen que algunos modelos son propios para un problema en específico, esto lo hacen apoyándose en el lenguaje de los problemas, por ejemplo en multiplicación se usan palabras como: veces más que, veces menos que, tantos, cuántas veces, entre otros. Pero esto no solo en el lenguaje del problema, sino que abstraen el contexto del problema y operan sobre los datos, es decir, que sin importar la situación problema entienden que el problema se trata de suma, multiplicación o división, esto se comprueba en la forma que argumentan la solución del mismo.



Se observa que con el problema “Pedro quiere comprar pan para hacer sandwiches a sus 6 amigos, él compra un paquete de pan donde vienen 24 tajadas, y con eso preparó todos los que alcanzó a hacer, ¿de a cuántos sandwiches les preparó a cada uno de sus amigos? (Anexo 3.6) Los estudiantes se encuentran con un problema compuesto, para saber cuántos sandwiches se hacen, dividen los 24 panes en dos

(panes x sanduche), seguido dividen los 12 panes en 6, como se ve, el niño JF muestra cómo se reparten de 2 en 2. (Anexo 2.7)

En un nivel formal se trabaja sobre los conceptos y procedimientos propios de la matemática, aunque no es a profundidad, los estudiantes reconocen algunos dentro de su actividad matematizadora, en el caso de la multiplicación reconocen su uso, sus propiedades y el algoritmo usual. Además, reconocen el uso de la división, la suma y resta.

Según la EMR los estudiantes pueden trabajar a través de los diferentes niveles, ya que estos son flexibles y permiten matematizar diferentes situaciones con ayuda de lo aprendido en niveles inferiores.

Modelos: Los estudiantes hacen uso de modelos como los esquemas (tabla numérica), material y lingüístico (problemas verbales), estos permiten que se desenvuelvan con mayor facilidad en su actividad matematizadora.

Estructura multiplicativa

Multiplicación: Los estudiantes se presentan ante la tabla numérica de forma que buscan ubicarse en ella para situar los números que se le asignan, para ello debe responder de igual forma los problemas verbales que encuentran en la hoja de preguntas. Dentro de los problemas encuentran situaciones problemáticas como:

“Un granjero tiene 24 animales en su granja, hay 8 gallinas y 8 patos, ¿cuántos conejos hay en la granja?” (pregunta 8, anexo 3.6)

En este problema los estudiantes pueden hacer uso de una suma, tomando los datos 8 gallinas y 8 patos, sumándolos como si se tratara de un conjunto de animales y contando hasta 24 animales, lo contado desde 16 hasta 24 es la cantidad de conejos, también cabe decir que es la suma de $16 + 8 = 24$.

Resta, tomando el 24 como operador y restando lo que ya se conoce que son 16 animales o una resta sucesiva de $24 - 8 = 16$, $16 - 8 = 8$.

Multiplicación, cuando comprenden que dentro del problema existen tres (3) tipos de animales (conejos, patos y gallinas) estos cuentan con la misma cantidad (8) y si esta es multiplicada se obtiene el número total de animales, 24.

División: igual que en la multiplicación los estudiantes al hallar el resultado dan cuenta que 24 dividido en 3 es igual a 8 (Castro, 2001, p. 213)

Estrategias y solución de problemas: Los problemas verbales se constituyen entonces en una herramienta importante, ya que permite a los estudiantes poner en práctica su conocimiento tanto formal como informal, dentro del formal están los modelos, uso de los algoritmos y procedimientos, también los conceptos que subyacen al problema, y dentro de los informales están las ideas previas acompañadas del uso de estrategias informales como el conteo con los dedos, la escritura de puntos, rayas y demás cosas que se vuelven manipulables para simbolizar cantidades, igualmente está el cálculo mental, dentro de la forma personal que cada uno tenga.

Juego

Juego en la matemática: Los estudiantes se dispusieron en el patio para resolver los problemas de la hoja de preguntas, algunas veces se dispersaron unos estudiantes y se quedaban jugueteando (con otros compañeros, mirando hacia el infinito, distrayéndose con piezas u objetos que llevaran consigo) o hablando entre ellos, de cierta forma evadiendo la actividad. Se observó también que algunos estudiantes se asumían con mayor aptitud para la resolución de los problemas al punto de llegar a acapararlos, por eso se presentó un caso de un estudiante que lloraba, según dice sus compañeras no lo dejaban mirar la hoja de preguntas y los demás se distraían con otras cosas como pensando que ya no serían amigos porque no están jugando juntos.

Para lo anterior se propuso en los grupos que se dividieran los problemas y cada uno tuviera una responsabilidad, pero se observó que no todos los problemas eran comprensibles para una minoría de niños, pues algunos estudiantes aún no manejan bien los problemas verbales.

Es evidente que el componente emocional juega un papel importante en la vida de los niños y las niñas, por ejemplo: un estudiante llorando me dice “es que ellos no me dejan resolver los problemas porque no sé dividir” (diario de campo, 27 de septiembre de 2019, p. 2) seguido a esto el estudiante tomó distancia y se sentó en un rincón. Se intervino y seguido a esto el maestro en formación hizo lo siguiente “Yo lo llamé y reuní a los 3, les comenté que debían colaborar, porque para eso eran un grupo, además ninguno era menos inteligente por no saber algo en específico, que de igual manera todo se aprende en algún momento.” (diario de campo, 27 de septiembre de 2019, p. 2)

Dentro del aula se inició un dialogo entre maestros en formación y estudiantes de 305, ante la pregunta ¿Cuál fue la dificultad de haber trabajado en grupo?, algunos afirmaron que el componente convivencial influyó en las peleas, el trato irrespetuoso, al interior de las discusiones cuando abordaban los problemas matemáticos. Asimismo las responsabilidades de grupo, no recargarle todos los problemas a una persona cuando hay tres personas, los demás pueden adelantar las otras preguntas y no estar jugando. (diario de campo, 27 de septiembre de 2019)

Nombre: Multiplin **Fecha:** 4 de octubre de 2019

Desarrollo: Los estudiantes en parejas, se reparten 10 fichas y cada uno responde el problema que allí se presenta, con base en sus respuestas, argumentos e interpretaciones, se hace el posterior análisis.

Objetivos: Observar la capacidad de los estudiantes para interpretar problemas matemáticos de multiplicación y adición con ayuda de imágenes.


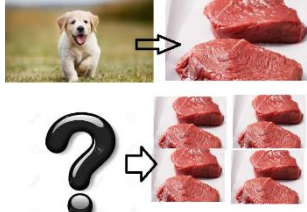
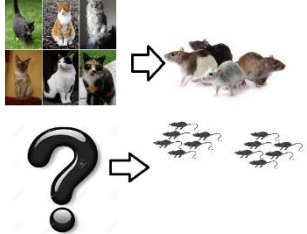
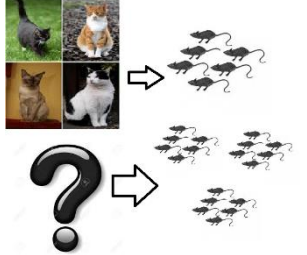
Reconocer en los estudiantes la capacidad de clasificar los problemas matemáticos y buscar la solución con ayuda de estrategias formales e informales.


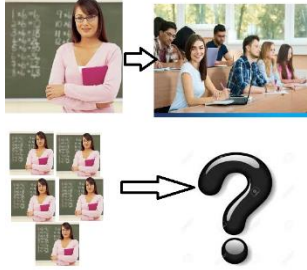




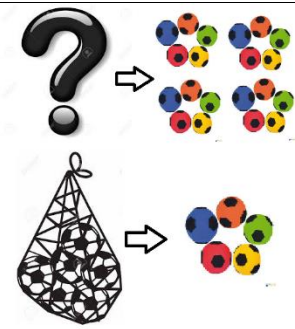

Análisis de contenido	Análisis cognitivo	Análisis de instrucción
<p>Preconceptos Suma Suma reiterada Resta</p> <p>Conceptos</p>	<p>Competencias El estudiante interpreta las diferentes imágenes y figuras, convirtiéndolos en problemas verbales, usando correctamente la lectura de los problemas.</p>	<p>Pertinencia La actividad promueve en los estudiantes la capacidad de interpretar, reconocer, comunicar y solucionar problemas</p>

<p>Problemas multiplicativos de comparación y combinación</p> <p>Definiciones Problemas multiplicativos de comparación y combinación</p> <p>Representaciones Concretas, pictóricas y simbólicas.</p>	<p>Resuelve problemas a partir de lo interpretado.</p> <p>Errores El estudiante no comprende e interpreta las imágenes y figuras presentadas.</p> <p>Dificultades Para reconocer el problema presente en las imágenes o figuras. Para resolver el problema presente en las imágenes o figuras.</p> <p>Fortalezas Reconoce, interpreta y comunica los problemas presentados en las fichas. Verbaliza correctamente un problema a partir de lo interpretado en las imágenes o figuras. Resuelve correctamente los problemas presentes en las imágenes o figuras.</p>	<p>matemáticos por medio de imágenes y figuras. Permite evidenciar la forma en que los estudiantes leen los problemas, usando correctamente la incógnita en forma del cuestionamiento. Permite evidenciar el uso de estrategias formales e informales para la solución de problemas matemáticos.</p> <p>Renovaciones En la calidad de las imágenes. En los tipos de problemas.</p>
Análisis de actuación		
<p>Los estudiantes demostraron una buena capacidad para interpretar los problemas que se planteaban en las imágenes previamente elaboradas. Reconocen en las imágenes el tipo de problema y la solución a este.</p>	<p>Comunican el problema y lo leen de la forma correcta, poniendo énfasis en el lugar de la pregunta o cuestionamiento.</p> <p>Demostraron capacidad para hacer uso de estrategias como, cálculo mental.</p>	<p>Algunos estudiantes que no comprendieron los problemas, pidieron la intervención del maestro en formación para ayudar a interpretar el problema los estudiantes por su parte buscaron la vía de solución del problema.</p>
Educación Matemática Realista		
<p>Contextos y situaciones: La actividad se centra en un contexto realista donde las imágenes (Pérez y Bressan , 2006, p. 1) plasmadas en las fichas del Multiplin dan cuenta de objetos y cosas de la vida real, asimismo, los problemas planteados son de estructura aditiva y multiplicativa, así que permiten potenciar su pensamiento matemático.</p> <p>Niveles de comprensión: El maestro siempre fue un guía en la actividad en cuanto ayudó a los estudiantes a reconocer en las imágenes los problemas matemáticos, primero siendo observador, seguido escuchaba lo que entendían del problema, después ayudaba a leer una parte del problema o toda, haciendo énfasis en la incógnita para que los estudiantes leyeran de la misma manera los demás problemas y además buscaran la forma de resolverlo.</p> <p>Modelos: Dentro de los modelos usados se encuentra el lingüístico, allí se observa que los estudiantes hacen una lectura de los problemas, pero al ser problemas no escritos sino gráficos los interpretan y representan por medio de sus palabras como si fueran problemas verbales, también se tiene en cuenta que las imágenes sirven para simbolizar cantidades y el lugar de la incógnita da a conocer un problema que debe ser resuelto. El modelo gráfico (Bressan y otros, 2016, p. 5) como ya se mencionó también se evidencia en la actividad por medio de imágenes. (ver análisis de matemáticas)</p>		
Estructura multiplicativa		
<p>Para entender los avances en algunos estudiantes se propone interpretar las respuestas ofrecidas por tres parejas diferentes.</p>		

Lo anterior busca reconocer la forma que los estudiantes representan, razonan e imaginan los problemas matemáticos.

Ficha o problema.	Grupo 1 (Niño D y niña A)	Grupo 2 (Niña C y niña V)	Grupo 3 (Niña AM y niña P)
	<p>“21 niños”</p> <p>Niño D responde correcto.</p>	<p>“3 pasteles para 5 niños y un pastel para 2 dos”</p> <p>Las estudiantes hacen un reparto arbitrario, se observan 1 pastel más 3 pasteles, en total 4 y siete estudiantes, al no poder repartir igualitariamente, porque se necesitan 8 niño para cuatro pasteles, lo resuelven de la anterior manera.</p>	<p>“21”</p> <p>Niña V responde correctamente.</p>
	<p>“Hay 4 perros”</p> <p>Niño D responde correcto</p>	<p>“Un perro cada día come 2 pedazos de carne”</p> <p>Interpretan que el perro de la imagen come la cantidad de carne en la imagen.</p>	<p>“4”</p> <p>Niña C responde correctamente.</p>
	<p>“Les toca de a dos”</p> <p>Niña A observa la imagen de 6 gatos y la imagen de 12 ratones, reparte los ratones entre los gatos.</p>	<p>“El gato se comen de a dos ratones”</p> <p>En la imagen inferior derecha se aprecian 12 ratones, y en la superior izquierda 6 gatos, aquí reparten 12 ratones en 6 gatos.</p>	<p>“18”</p> <p>Niña V responde correctamente.</p>
	<p>No responde.</p>	<p>“Todos los días el gato come 6 ratones”</p> <p>En la imagen se aprecian 4 gatos y 4 grupos 6 de ratones, los estudiantes asignan un gato a</p>	<p>“12”</p> <p>Niña V responde correctamente.</p>

		cada grupo de ratones.	
	<p>“5 doctores”</p> <p>Niño D responde correctamente.</p>	<p>“Un doctor para cada paciente de 30 personas”</p> <p>Suman o multiplican la cantidad de personas en la imagen, después anotan que todas las personas son asignadas a un mismo doctor.</p>	<p>“5”</p> <p>Niña C responde correctamente.</p>
	<p>“una maestra”</p> <p>Niña A posiblemente tomó las seis maestras que aparecen en la imagen y las reparte entre los seis estudiantes.</p>	<p>“Para cinco niños una profesora”</p> <p>Asignan una profesora para los estudiantes en la imagen, siendo que hay seis, anotan que hay cinco, seguramente el sexto estudiante se le asigna a la primera profesora de la imagen.</p>	<p>“30”</p> <p>Niña C responde correctamente.</p>
	<p>“Hay 20 manzanas”</p> <p>Niño D responde correctamente.</p>	<p>“Cada canasta lleva una manzana”</p> <p>Cuentan la totalidad de canastas en la imagen y cada una le reparte la cantidad de manzanas.</p>	<p>“20”</p> <p>Niña V responde correctamente.</p>

	<p>No responde</p>	<p>“Para 8 niños se dan por la mitad”</p> <p>Cuentan la totalidad de los niños en la imagen y hacen un reparto de las canicas por la mitad, siendo 5 imposible de dividir en este caso.</p>	<p>“35”</p> <p>Niña C responde correctamente.</p>
	<p>“4 bolsas”</p> <p>Niño D responde correctamente.</p>	<p>“Tocar poner las pelotas de a 5 pelotas en la bolsa”</p> <p>Interpretan que a cada bolsa corresponde la cantidad de balones que se ve, es decir, cinco.</p>	<p>“4”</p> <p>Niña C responde correctamente.</p>
	<p>“5 personas”</p> <p>Niño D responde correctamente.</p>	<p>“Un señor tiene dos manos con 5 dedos”</p> <p>Anotan lo que ven, un señor con dos manos y cada una con cinco dedos.</p>	<p>“5”</p> <p>Niña V responde correctamente.</p>
<p>Observaciones</p>	<p>Niño D responde correctamente los problemas, demuestra capacidad para representar los problemas y llegar a la solución.</p> <p>Niña A lee los dos problemas y los representa como una repartición de unos objetos sobre otros.</p>	<p>Las dos niñas ven en la mayoría de las imágenes problemas de repartición de unos objetos sobre otros, haciendo reparticiones arbitrarias, que no caben en la realidad, o no podrían ser elementos de una situación matemática.</p> <p>Podría decirse que hacen reparticiones con base en su sentido común,</p>	<p>Las dos niñas responden correctamente a la totalidad de los problemas.</p> <p>En la observación de la actividad, la niña C demuestra mayor capacidad de leer los problemas con un lenguaje apropiado, teniendo en cuenta el lugar de la incógnita para ser leído.</p>

		siendo este como ya se mencionaba un tanto arbitrario al no ser exacto.	
--	--	---	--

Dentro del anterior cuadro interesa la forma en que los estudiantes interpretan las imágenes, reconocen y representan el problema, además de las respuestas, siendo estas correctas o no; permite entender la forma en que los estudiantes matematizan este tipo de situaciones que no son generalizables, siendo que todos los grupos cuentan con respuestas variadas, se podría concluir que la diversidad de estudiantes en el aula da cuenta de diferentes procesos de construcción del conocimiento (Castro, 2001, p. 50), algunos procesos se pueden generalizar en cuanto la mecanización de algunos procedimientos o el uso de algoritmos, pero la forma en que matematizan la realidad (ficticia en este caso) es muy diversa como ellos mismos y sus estilos de aprendizaje (2001, p. 50).

Juego

Juego en la matemática: Entra en el tipo de juegos de Agón, al verse la competencia, pero fomentando el trabajo cooperativo en caso de que el compañero no llegue a entender los problemas de las imágenes.

La actividad como juego incluyó varios elementos, primero, los estudiantes reconocieron las fichas, las intercambiaron, se las repartieron y llegaron a competir entre ellos sobre quién respondía más, cabe resaltar que el tipo de competencia que se observó y a la vez se promueve en la actividad y en todas las demás es la competencia sana, se da en medio del juego, donde no importa quién gana o quién pierde porque no hay premios ni castigos, solamente se divierten, aprenden, interactúan con los compañeros, y ponen en práctica su conocimiento.

El juego permitió a los estudiantes retener su atención sobre lo que realizaban, por ello en las diferentes parejas se observó que estaban inmersos en resolver los problemas, interpretando las imágenes y dialogando con su compañero, entre ellos se interpelaron y argumentaron lo que hacían.

La creatividad (Beltrán, Quintana y Ricaurte, 2010, p. 1) se pone en juego, ya que las fichas sirven como detonante para crear otras realidades que los estudiantes expresan por medio de sus palabras, gestos y emociones, por ello se observó que algunas parejas se sumergían en relatos interesantes acerca del significado de las imágenes, las cuales son cercanas a su cotidianidad.

La cooperación entre estudiantes se ve cuando alguno de ellos no entiende un problema y otro llega a explicárselo, a buscar formas de que sea entendible para él, usando un lenguaje cercano pero a la vez apoyándose en el uso de dedos para contar, escribiendo números y usando un lenguaje matemático dentro sus mismas posibilidades.

El juego permite el desarrollo de diferentes destrezas para resolver problemas matemáticos, puesto que al interactuar entre pares se crea un ambiente donde se comparten saberes, formas de proceder frente a los problemas, estrategias informales y demás acciones propias de la actividad matematizadora, entre ellos las aprenden y enseñan en un constante intercambio de palabras que construyen conocimiento.

Nombre: Creemos nuestra propia escalerita **Fecha:** 18 de octubre de 2019

Desarrollo: Los estudiantes en parejas, crean en la tabla numérica su propia escalerita con problemas verbales y de algoritmos, atajos, obstáculos y todo aquello que surja de su imaginación y creatividad.

Objetivos: Fomentar en los estudiantes la creación de problemas verbales y escritos de estructura multiplicativa y aditiva.

Analizar las estrategias para crear problemas matemáticos por parte de los estudiantes.

Análisis de contenido	Análisis cognitivo	Análisis de instrucción
<p>Preconceptos No aplica</p> <p>Conceptos Tipos de problemas multiplicativos</p> <p>Definiciones Problemas de razón, combinación y comparación.</p> <p>Representaciones Concretas, simbólicas y pictóricas.</p>	<p>Competencias Los estudiantes elaboran problemas de tipo verbal, ya sean multiplicativos, aditivos o sustractivos. Elaboran problemas con algoritmos de suma, resta y multiplicación. Demuestran creatividad e imaginación a la hora de crear su propio tablero del juego escalerita.</p> <p>Errores El estudiante plantea problemas que no permiten su interpretación.</p> <p>Dificultades El estudiante no puede elaborar un problema verbal de forma coherente. Plantea problemas incompletos.</p> <p>Fortalezas Elaboración de problemas verbales con más de un cuestionamiento. Elaboración de problemas verbales con coherencia.</p>	<p>Pertinencia La actividad fomenta en los estudiantes la creación de problemas de tipo verbal o con algoritmos. Promueve la creatividad en los estudiantes para redactar problemas innovadores y traídos de su realidad más cercana. Desarrolla la capacidad creativa, al momento de sugerir modificaciones, propuestas, o nuevas formas de plantear problemas.</p> <p>Renovaciones No aplica.</p>

Análisis de actuación

<p>La actividad fue muy productiva en cuanto permitió evidenciar en los estudiantes esa capacidad de imaginación, creatividad e innovación al momento de crear problemas matemáticos.</p>	<p>Demostaron buena capacidad de argumentación al momento de elegir los problemas.</p>	<p>Los estudiantes se mostraron muy propositivos, al traer nuevas estrategias, atajos, comodines, entre otros elementos para enriquecer el juego de la escalerita.</p>
---	--	--

La actividad permitió que los estudiantes se hicieran de un papel activo en la construcción de su conocimiento matemático, puesto que pide de ellos su mayor participación, tanto a nivel cognitivo como social.

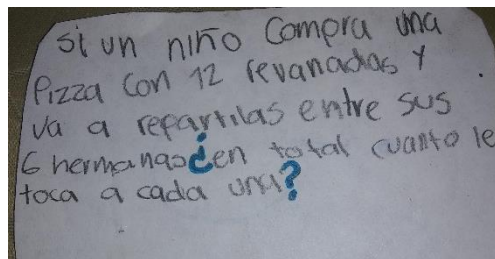
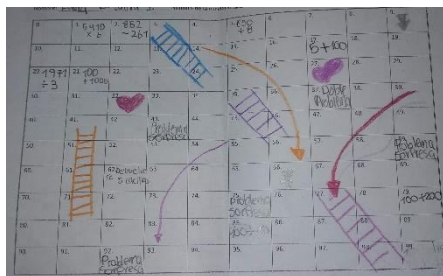
Educación Matemática Realista

Contextos y situaciones: La actividad permitió una vez más traer a colación el trabajo con la tabla numérica, en este caso dentro del juego de la escalerita, a la cual los estudiantes le dieron todo el contenido: problemas verbales, estrategias, atajos, comodines, trampas, imágenes y demás.

Niveles de comprensión: El interés de los estudiante se encontró en poder realizar un buen tablero con problemas interesantes, también innovaron creando tarjetas con los problemas escritos, esto demostró que la actitud propositiva fue esencial en los diferentes grupos, quienes se hacen de un papel activo en su trayecto de aprendizaje (Bressan y otros, 2016, p. 6).

Un ejemplo se aprecia en la figura izquierda

Y un problema verbal encontrado en uno de los “problemas sorpresas” (figura derecha)



Interacción: En la actividad se observó el trabajo entre pares, donde la comunicación asertiva tuvo una función importante en el desarrollo de los trabajos que realizaron los estudiantes, allí hubo un dialogo constante, un compartir de ideas que permitieron imaginar diferentes escenas, también una argumentación y un uso apropiado del lenguaje matemático. Es por lo anterior que la actividad sirvió como situación para que los estudiantes matematizaran desde su propia realidad.

Modelos: Los estudiantes representaron problemas matemáticos de estructura aditiva y multiplicativa y los plasmaron en los tableros de juego, algunos problemas usan modelos gráficos (problemas con imágenes, trampas) lingüísticos (problemas verbales, acciones a realizar, comodines) y simbólicos (problemas con algoritmos).

También cabe resaltar el aporte de las actividades a la actividad matematizadora de los estudiantes, las cuales se han constituido como alternativas al aprendizaje escolar, ya que nutrieron de nuevos elementos su quehacer, apartándose del paradigma de mecanización de procedimientos, memorización de datos y desarrollo de exámenes sin un sentido profundo, al contrario, haciendo de estas formas de trabajar un proceso de construcción constante, que dentro de las matemáticas reclaman también aportes de componentes esenciales como el afectivo, social y lúdico.

Estructura multiplicativa

Multiplicación: Hacen una selección de diferentes problemas matemáticos, dentro de estos se encuentran los problemas verbales, algunos de ellos dentro del mismo tablero o con ayuda de tarjetas, estos son de suma, resta, multiplicación y división. Asimismo, dentro de estos problemas verbales se identifica un uso adecuado del lenguaje matemático, dándole un uso pertinente a la pregunta y también un contexto realista a la misma. (ver imágenes nº en análisis EMR)

Propiedades:

Algoritmo: Plantean problemas con algoritmos, dentro de la mayoría de estos se encuentran la multiplicación (figura izquierda) y división (figura derecha) al ser las operaciones matemáticas recientemente más usadas en clase, y en las mismas actividades de la propuesta pedagógica.

$$\begin{array}{r} 1.5470 \\ \times b \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5.650 \\ \div 8 \\ \hline \end{array}$$

Estrategias y solución de problemas: Ofrecen problemas con imágenes, es decir, al igual que la actividad de Multiplin se apreciaron problemas que exigen ser interpretados y resueltos

con ayuda de una o varias operaciones, también se observó el uso de imágenes que corresponden a fracciones, y en algunos casos el uso de figuras geométricas.

En resumen, los estudiantes demostraron capacidad para la creación de problemas de acuerdo a los conocimientos matemáticos que emplean en la mayoría del tiempo, el predominio de la multiplicación, la división, los fraccionarios y la geometría en situaciones cotidianas para ellos, por ello se considera que la matemática cumple una función social, en cuanto es un saber al alcance de todos, dentro de las posibilidades que lo brindan y los aspectos cognitivos que lo generan.

Juego

Juego en la matemática: Entra en el tipo de juegos de construcción (Beltrán, Quintana y Ricaurte, 2010) ya que pone en juego la creatividad de los estudiantes en la construcción del juego, de los problemas matemáticos y los diferentes obstáculos que se presentan en las casillas.

La creación de la escalerita permitió a los estudiantes ser protagonistas de sus propias herramientas de diversión y aprendizaje, se observó un trabajo

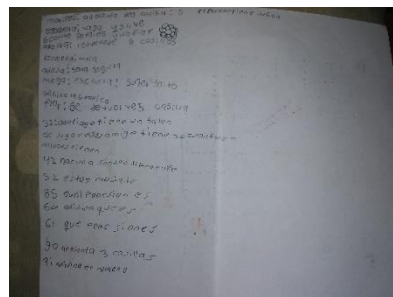


colaborativo donde las ideas se hicieron presentes

acompañadas de la creatividad e

imaginación tanto para decorar el tablero como

para formular y redactar preguntas o



problemas matemáticos; representar problemas con

imágenes; proponer nuevos elementos como trampas, comodines, fichas de apoyo, e instrucciones, como se aprecia en las siguientes imágenes:

Lleno de colores, con diferentes problemas matemáticos escritos, las serpientes y las escaleras sirven de atajos, y las imágenes remiten al uso de tarjetas con diferentes ejercicios para quien los lea.

Al respaldo de la hoja se ven algunos de estos ejercicios, también adivinanzas y atajos.

También se afirmó una vez más que los estudiantes son sujetos activos, contrario a la idea que son recipientes para llenar de contenido, y que éste es recibido de forma pasiva.

Es por ello que el juego por el juego es importante, pero en el proceso de jugar mediando con una disciplina escolar como la matemática hace que el proceso de enseñanza y aprendizaje se vea más fortalecido, pues existe una relación en el momento de juego y de aprendizaje de las matemáticas, aquí “la semejanza de estructura de la matemática y los juegos permite comenzar a ejercitar en estos las mismas herramientas, los mismos procesos de pensamiento que son útiles en los desarrollos matemáticos” (Guzmán, 1989, p. 4) haciendo énfasis en que el juego es una manifestación que se puede comparar con la matemática, el niño que juega aprende unas reglas, destrezas y conocimientos sobre el juego, de la misma forma que lo hace cuando aprende matemáticas. El autor continúa con “las habilidades heurísticas en matemáticas pueden iniciarse con enorme fruto en la práctica y exploración de juegos muy diversos” (p. 4)

Nombre: Regletas de Cuisenaire **Fecha:** 8 de noviembre de 2019

Desarrollo: Los estudiantes de Nivelaciones por individual toman tres fichas de diez motivos diferentes, en total 30 fichas, las cuales reconocen y juegan, además hacen problemas de razón y combinación multiplicativa, también composiciones y descomposiciones a la par que reconocen propiedades del SND.

Objetivos: Proporcionar un material concreto para representar los números.



Elaborar problemas con multiplicaciones, divisiones y resolverlos con ayuda de las regletas.

Análisis de contenido	Análisis cognitivo	Análisis de instrucción
<p>Preconceptos Unidades, decenas, sumas, sumas reiteradas.</p> <p>Conceptos Descomposición y composición de números naturales para afianzar el procedimiento con algoritmo usual de multiplicación.</p> <p>Definiciones Multiplicación y división.</p> <p>Representaciones Concretas. Simbólicas.</p>	<p>Competencias El estudiante trabaja con material concreto y le da un valor numérico a los objetos. Compone y descompone números naturales a partir de las regletas de Cuisenaire. Resuelve problemas multiplicativos de razón, comparación y combinación con ayuda de las regletas de Cuisenaire. Resuelve problemas de división partitiva y de medida con ayuda de las regletas de Cuisenaire.</p> <p>Errores El estudiante no trabaja de manera correcta con las regletas de Cuisenaire.</p> <p>Dificultades Para hacer la trasposición de los objetos a números. De dar un valor numérico y resolver problemas con ayuda de las regletas de Cuisenaire.</p> <p>Fortalezas El estudiante resuelve problemas matemáticos con ayuda de las regletas de Cuisenaire. Propone problemas matemáticos con ayuda de las regletas de Cuisenaire.</p>	<p>Pertinencia Las regletas de Cuisenaire son una herramienta pedagógica más que conocida, que permiten el trabajo con las distintas operaciones matemáticas de suma, resta, multiplicación y división en la educación primaria.</p> <p>Al ser un material concreto permite que los estudiantes puedan resolver problemas al ser reversibles y siempre encontrar regularidades, transformaciones y semejanzas.</p> <p>Renovaciones No aplica.</p>

Análisis de actuación

Se hicieron problemas de composición y descomposición con las regletas, las cuales permite dividir un mismo número en varias partes, como el estudiante MB que descubrió las diferentes formas de representar el número diez con composición.



La actividad permitió que los estudiantes reconocieran en las regletas de Cuisenaire los números naturales.

A través del reconocimiento de números en las regletas, se trabajó con problemas multiplicativos de razón, como el



Y después consiguió multiplicar 8 filas de 10 unidades, lo que le dio como producto 80 unidades.	estudiante JP que “representó 5 x 8 de la siguiente manera” (diario de campo, 8 de noviembre de 2019)
--	---

Educación Matemática Realista

Contextos y situaciones: Dentro de las situaciones problemáticas planteadas en la actividad, los estudiantes pudieron trabajar con el material para resolver las preguntas generadoras, de lo anterior se observó una fuerte argumentación, uso del lenguaje matemático y de las diferentes propiedades de la suma y multiplicación, las regletas permitieron esto por ser reversibles, es decir, se puede trabajar con ellas observando el comportamiento de los números y las cantidades, componiendo y descomponiendo cifras, construyendo y desarmando en la infinidad de posibilidades.

Modelos: La EMR plantea el uso de modelos, dentro de estos están los materiales (Bressan y otros, 2016, p. 5), aquí las regletas de Cuisenaire fueron pertinentes al ser promotoras de la actividad matematizadora de los estudiantes.

La actividad permitió que los estudiantes hicieran uso de este material manipulable, allí lo conocieron, jugaron con él, lo usaron para representar diferentes números y cantidades, también para formular y resolver problemas matemáticos. (ver imagen de análisis de actuación)

Estructura multiplicativa

Multiplicación: Dentro de la actividad se trabajó desde diferentes conceptos, entre estos se encuentra:

Conteo: se contaron las fichas, se colocaron en orden ascendente y descendente.

Agrupamientos: cuenta las fichas y hace grupos de 10 para representar la totalidad de las fichas con varios grupos y unidades.

Valor posicional: se ubicaron las regletas de forma organizada, representando números por unidades, decenas y centenas.

Suma: cuando se tomaban dos o más regletas y se hacía la operación de adición, representando estas dos como un mismo número. Asimismo se trabajó con suma reiterada para dar entrada a la multiplicación.

Resta: contrario a la suma, se tomaba una ficha de mayor número y por medio de una descomposición se hizo la resta.

Multiplicación: se trabajó por producto cartesiano, haciendo filas con las regletas de la misma cantidad, y multiplicando dos de sus lados, se reforzó esta idea con ayuda de sumas reiteradas.

División: se hizo repartición con las regletas con números pequeños, allí se hizo la comprobación con ayuda de la multiplicación o suma reiterada.

Composición y descomposición de números.

Propiedades de la multiplicación: conmutativa cuando se multiplicó los productos cartesianos.

Medida: se trabajó la comparación entre cantidades con ayuda de las regletas como instrumento de medida (Castro, 2001, p. 216) (Castro, E., Castro y Rico, 1995, p. 49)

Un ejemplo de esto se ve en la siguiente situación, cuando se pedía que representaran el número 23 :

“Me dijo que ese era el 23 y por tanto le pedí que enseñara lo que tenía ahí, dijo que era 1 regleta de 10 (naranja), 2 regletas de 5 (verde oscuro) y 1 regleta de 3 (verde claro), que todo sumado da 23. Le dije que ubicara las dos regletas del 5 de tal forma que quedaran igual que la regleta del 10, al ver que estas dos quedaban más grandes dijo él “es que le falta”. Después de varias intervenciones que desviaron lo que se hacía volví a preguntarle al niño JP cuál era el número que iba a representar desde un inicio y dijo 23, me enseñó que la más grande era un 10 y por tanto las dos regletas iguales cada una

era de 5, cuando miró que seguían siendo más grandes les pedí a todos que ubicaran las fichas en el orden del inicio, o sea en forma de escalera y que contaran de 1 en 1 hasta el 5 y mostraran cual les salía, claramente era la ficha amarilla y por tanto Juan Pablo cayó en cuenta de su error, trajo dos amarillas, las comparó con la regleta naranja y estas sí eran iguales.” (diario de campo, 8 de noviembre de 2019)

Juego

Juego en la matemática: Entra en el tipo de juegos de construcción (Beltrán , Quintana y Ricaurte , 2010), como se aprecia en las construcciones libres de los estudiantes.

Antes de dar inicio al trabajo formal con las regletas, los estudiantes pueden conocerlas y jugar con ellas, se observó la construcción de columnas ordenadas de forma ascendente y descendente, de estructuras que representaban elementos reales e imaginados a tamaño escala, como casas, el salón de clases, figuras, comida, entre otros, esto resulta interesante porque demuestra la creatividad y espontaneidad, debido también a la calidad física del material.

Los estudiantes jugaron durante la actividad, pues no sólo se trató de seguir al pie de la letra algo prediseñado, sino que por medio de la exploración misma de las regletas ellos llegaron a los diferentes descubrimientos, esto se vio cuando algunos usaron las regletas y fueron hablando de lo que iban haciendo, asignando elementos matemáticos a sus construcciones y argumentando con base en sus ideas previas.

El uso de material manipulable, permite que la atención de los estudiantes se centre en lo que hacen y construyen, por esto el trabajo individual como grupal dio pistas acerca de cómo piensan los estudiantes al momento de resolver problemas y también de la necesidad de trabajar con el compañero del lado buscando reconocimiento y aprobación.

Al final de la actividad los estudiantes tuvieron un tiempo para jugar, al haber trabajado con los conceptos matemáticos ya mencionados su juego cambió en cuanto buscaban además de construir estructuras y figuras, también libremente hacían juegos matemáticos, sumando, multiplicando y repartiendo.

Elaboración propia

5.3. Sobre la propuesta.

Interesa del análisis anterior sobresalir los diferentes aportes que tuvo la propuesta al desarrollo del pensamiento multiplicativo de los estudiantes, pero así mismo a las propias concepciones de enseñanza de los maestros en formación, para empezar hay que hablar de las situaciones que posibilitaron la actividad matematizadora en los integrantes del curso, quienes siempre fueron muy activos y propositivos, pues más allá de participar con la mayor vehemencia, pudieron moverse a través de los diferentes niveles de comprensión (Bressan y otros, 2016), además de reconocer en sus propias reflexiones los diferentes conceptos y fenómenos matemáticos de la multiplicación.

También decir que los estudiantes se divirtieron bastante en las actividades y que se llegó a confundir las actividades con simples juegos “de paso” que no aportan gran cosa más que un momento de efervescencia entre gestos de emoción y bulla, pero los que tienen ese pensamiento muchas veces ignoran que entre esa algarabía hay niños y niñas que aprenden en movimiento, que movilizan, más allá de su cerebro con los diferentes procesos cognitivos, todo su cuerpo junto con las dimensiones social e interpersonal y su misma inteligencia emocional, hasta ponen a prueba sus propias capacidades y diferentes tipos de inteligencia que por culpa de la inmediatez de las dinámicas escolares se ven invisibilizadas por el afán de diagnosticar y clasificar a los estudiantes en buenos o malos para las matemáticas, haciendo creer que aprender matemáticas no puede ser divertido, grave error.

Por todo lo anterior, al proceso de formación aporta bastante, al permitir comprender que la enseñanza de las matemáticas (y de cualquier área de conocimiento escolar) debe ir ligada a la realidad de los estudiantes, llevando consigo sus intereses como elemento fundamental con situaciones que posibiliten comprender el porqué de sus dificultades en el aprendizaje de la asignatura que no es simplemente una asignatura, sino que es y siempre ha sido una actividad humana – en palabras de Freudenthal – que permite comprender las matemáticas de aquello que se hace en la realidad con toda su complejidad y el conocimiento de ésta debe trascender los muros del aula.

Porque como maestros se puede dejar de lado esos pensamientos negativos acerca de innovar en el aula: llegando a considerar que es imposible debido a las dinámicas que son agotantes, aquellas que se remiten al constante ‘papeleo’, ese que pareciera ser el único medio de dar resultados a la institución sobre el progreso de los estudiantes. Si en realidad se busca dar pruebas de que los estudiantes aprenden que sea por medio de aquellas situaciones que fortalecen el sentido común, la creatividad, la capacidad de asombro, la imaginación y el ánimo por preguntar sobre aquello que nos cuestiona de lo que nos quieren enseñar.

CONCLUSIONES

Como resultado del trabajo investigativo se dan a conocer las principales conclusiones a las que se llegó a través de la búsqueda teórica, la implementación de la propuesta y el análisis de los datos obtenidos que buscan dar cuenta de ¿Cómo por medio de la corriente didáctica EMR y el juego, los niños y niñas pueden abordar situaciones de su contexto y matematizarlas para alcanzar un aprendizaje de la multiplicación?

En primer lugar, el juego como estrategia de implementación permitió que los estudiantes se motivaran y estuvieran en actitud de disposición que dio camino a experiencias significativas, gracias a la participación y aportes que ellos mismos tenían para fortalecer el recorrido de las actividades, asimismo, se evidenció que el hecho de que cada intervención fuera un espacio de juego (con una intención de aprendizaje) permitió que los niños y las niñas participaran de manera natural y libre, reconociendo a sus compañeros, las reglas del juego y las dinámicas del mismo, como si se tratara de una versión a escala de los comportamientos socialmente establecidos y a los que pertenecen como sujetos activos.

Por otra parte, se identifica que, a partir de situaciones y contextos realistas para los niños y las niñas, en las actividades se permite que ellos se identifiquen y se conecten de manera acertada a los problemas matemáticos planteados, ya que al hacer una relación con sus experiencias previas se establece una comprensión precisa que los lleva a encontrar un oportuno procedimiento para la resolución de problemas fijando modelos y estrategias informales.

Por eso la presente investigación permitió reconocer que en la resolución de problemas los niños y las niñas recurren o se apoyan en estrategias informales que les permite organizar aquellas ideas que los llevan a la posible solución del mismo, la estrategias más usuales que se lograron identificar fueron las de representación, en donde por medio de dibujos, puntos, palitos, bolitas y demás elementos propios de los niños, lograban organizar sus ideas. Además de aquellas estrategias que usan está el conteo con los dedos, hacer estimaciones y cálculo mental, las cuales deberían ser

reforzadas para que se constituyan en herramientas claves para su pensamiento multiplicativo.

Otro importante acierto dentro de las actividades, fue el trabajo en equipo por parte de los estudiantes, ya que este permitió que se dieran aportes interesantes entre ellos que les permitieron llegar a reflexiones conjuntas, a partir de las cuales se generaron nuevos conocimientos individuales y grupales; esto es un factor esencial dentro de la EMR, ya que “el aprendizaje de la matemática es considerado como una actividad social donde la reflexión colectiva lleva a niveles de comprensión más altos” (Bressan y otros, 2016, p. 6), es por ello, que a través del trabajo cooperativo los estudiantes lograron enriquecer sus procesos de aprendizaje individuales.

A través de la propuesta pedagógica se logró que los niños y las niñas comprendieran el uso de la multiplicación en situaciones reales del contexto y además que se trascendiera a concebirla desde un carácter más amplio y no solamente desde la suma reiterada, entendiendo así todo lo que acarrea en la estructura multiplicativa.

Para los maestros en formación esta experiencia investigativa les permite llegar a procesos de reflexión importantes en su camino de constitución como educadores que piensan y actúan en pro de los niños y las niñas quienes se ven inmersos en esa tradición mecanicista, que aporta malestares en la construcción de conocimiento, puesto que no permite ver el horizonte de posibilidades que se encuentran en los mismos aportes de los educandos y de aquellas metodologías que resignifican el papel del maestro, el estudiante y el saber.

Es por esto, que se debe comprender los motivos por los cuales surgen estas dinámicas y no caer en pesimismo a la hora de innovar, ya que esta acción permite reconocer que existe un obstáculo el cual debe ser superado a partir de la proposición de alternativas de cambio, las cuales sean acordes a las necesidades del contexto, de la institución y de cada sujeto incluido en el área educativa.

Para la institución CEB queda sugerir la implementación de nuevas metodologías de enseñanza (como se aprecia en los antecedentes pueden ser variadas) que propendan por el trabajo con materiales didácticos que permitan a los estudiantes recorrer en su conocimiento lo concreto paso a paso hacia lo abstracto, un proceso esencial en las matemáticas como ya está más que dicho, asimismo, fomentar en los maestros la pasión

por trabajar a partir de lo que ya conocen sus estudiantes, buscando hacer una interrelación entre sus intereses, necesidades y fortalezas.

Por último, consideramos que el enfoque aquí trabajado puede llegar a ser muy poderoso si se aplica de manera adecuada, comprendiendo todos sus niveles y principios, abriendo nuevas formas de comprender el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Por lo anterior, se presenta la siguiente pregunta que abre el camino a futuras investigaciones ¿Cuáles son las concepciones que tienen los estudiantes de la Licenciatura en Educación Infantil sobre la enseñanza de las matemáticas a través de sus experiencias escolares previas?

Referencias

- Alagia , H., Bressan , A., & Sadovsky, P. (2005). *Reflexiones teóricas para la educación matemática*. Buenos Aires , Argentina : Libros del Zorzal .
- Alsina, A. (s.f.). El aprendizaje Realista: Una contibución de la investigacion en educacion matematica a la formacion de profesorado.
- Alsina, C. (2008). GEOMETRÍA Y REALIDAD. 22. Obtenido de https://jorgefernandezherce.es/charlas/unirioja/varios/geometria_realidad.pdf
- Aprender matemáticas a través de proyectos*. (24 de 02 de 2014). Obtenido de Regularidades numéricas - 1ro. Básico: <http://mates2014efv.blogspot.com/2014/02/regularidades-numericas-1ro-basico.html>
- Armstrong , T. (2010). *El poder de la Neurodiversidad* (2012 ed.). (A. F. Esteban, Trad.) Bogotá, Colombia: Planeta Colombia.
- Balcázar, P., González, N., Gurrola , G., & Moysén, A. (2013). *Investigación Cualitativa* (2006 ed.). México .
- Beltrán , L., Quintana , D., & Ricaurte , D. (2010). *El juego como estrategia pedagógica en el proceso de enseñanza - aprendizaje en el área de lengua castellana*. Bogotá, Colombia : Corporación Universitaria Minuto de Dios.
- Bernate , L. (2014). *Estrategias didácticas para potenciar el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes del grado primero de primaria del colegio San Juan Sábalo del municipio de Garzón Huila*. Bogotá, Colombia : Universidad Pedagógica Nacional .
- Bosa, C. E. (2018 - 2). *Sistema Institucional de Evaluación*. Bogotá, Colombia.
- Bosa, C. E. (2018). *Manual de Convivencia*. Bogotá.
- Bressan , A., Gallego , F., Pérez , S., & Zolkower , B. (2016). *Educación Matemática Realista Bases Teóricas*. Bariloche, Argentina : Grupo Patagónico de Didáctica Matemática. Obtenido de http://gpdmatematica.org.ar/wp-content/uploads/2016/03/Modulo_teoría_EMER-Final.pdf
- Bressan , A., Zolkower , B., & Gallego , F. (2005). *Los principios de la educación matemática realista*. Bariloche, Argentina: GPDM. Recuperado el 2020
- Caillois , R. (1986). *Los juegos y los hombres, La mascara y el vertigo*. México: Fondo de Cultura Económica.
- Carmona , F. (2015). *Educación Matemática Realista como agente articulador en la enseñanza de la teoría de conjuntos en el contexto social*. Antioquia , Colombia : Universidad de Antioquia .

- Castaño , J. (1996). La construcción del pensamiento multiplicativo simple. *Hojas Pedagógicas* 3, 8. Recuperado el 2020
- Castro , E. (2001). *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria* (1 ed., Vol. 1). (E. Castro, Ed.) Madrid, Vallehermoso, España: Síntesis Educación.
- Castro , E., Castro , E., & Olmo, A. d. (2002). *Desarrollo del pensamiento matemático infantil*. Granada, España: Universidad de Granada, Departamento de didáctica de la matemática.
- Castro, E., Castro, E., & Rico, L. (1995). *Estructuras aritméticas elementales y su modelización*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Chamorro , C. (2003). *Didáctica de las matemáticas para primaria*. Madrid. Obtenido de <https://vdocuments.mx/didactica-de-las-matematicas-chamorro-2003.html>
- Claudia , A. (03 de 07 de 2016). *Educación Primaria*. Obtenido de Sumar y restar con la grilla numérica : <https://blogedprimaria.blogspot.com/2016/07/sumar-y-restar-con-la-grilla-numerica.html>
- Cuadrado, A. (2015). *Diseño de una propuesta didáctica para mejorar la comprensión de las operaciones matemáticas*. Bogotá, Colombia : Universidad Pedagógica Nacional .
- Dickson , L. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Labor .
- Escobar , C. (20 de 2 de 2013). *Matemáticas Maravillosas* . Obtenido de COPISI: http://matematicas-maravillosas.blogspot.com/2013/02/copisi_20.html
- Gaitán , K., & Medina , Z. (2016). *Monstruosamente geométricos: Propuesta transversal entre literatura, artes plásticas y geometría espacial para transformar las percepciones sobre las matemáticas en los niños y las niñas de 8 a 10 años de edad en Hogares Club Michín-Ciudad Bolívar*. Bogotá , Colombia : Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Galvis , S., Sierra , L., & Sierra , C. (2014). *Acercamiento al diseño de situaciones didácticas para el desarrollo del pensamiento matemático multiplicativo en el Centro Educativo Libertad*. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional .
- Godino , J., Cid , E., & Batanero , C. (2004). *Matemáticas para Maestros*. Universidad de Granada. Obtenido de http://www.ugr.es/~jgodino/manual/matematicas_maestros
- Gómez, R. (2012). *Sensibilidad y aprendizaje de la matemática*. Palmira, Colombia.
- Guzmán , M. (1998). *Juegos y matemáticas* .
- Hernández , R., Fernández , C., & Baptista , P. (s.f.). *Metodología de la investigación* (cuarta ed.). México: McGraw - Hill. Recuperado el 2020
- Ibañez , R. (29 de 05 de 2019). *Multiplicar con las manos* . Obtenido de Cuaderno de Cultura Científica : <https://culturacientifica.com/2019/05/29/multiplicar-con-las-manos/>

- Lotero, L., Andrade, E., & Andrade, L. (03 de 2011). La crisis de la multiplicación: Una propuesta para la estructuración conceptual. *Voces y Silencios*, 2, 38-64. Obtenido de <https://revistas.uniandes.edu.co/doi/pdf/10.18175/vys2.especial.2011.03>
- Marín, C. (2019). *Malla Curricular de Matemáticas Institucional - JM 2019*. Bogotá, Colombia .
- Maza, C. (1991). *Enseñanza de la multiplicación y la división*. Madrid, España: Síntesis. Recuperado el 2020
- Ministerio de Educación Nacional . (2006). *Estandares Básicos de competencias*. Bogotá, Colombia.
- Ministerio de Educación Nacional . (2014). El juego en la educación inicial. En Ministerio de Educación Nacional , *Serie de orientaciones pedagógicas para a educación inicial en el marco de la atención integral* (pág. 56). Bogotá, Colombia . Obtenido de <http://www.deceroasiempre.gov.co/Prensa/CDocumentacionDocs/Documento-N22->
- Ministerio de Educación Nacional . (2017). *Derechos Básicos de Aprendizaje* (Vol. 2). Bogotá, Colombia : Panamericana de Impresos.
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Bogotá, Colombia.
- Ministerio de Educación Nacional. (2017-2). *Mallas de Aprendizaje*. Bogotá, Colombia.
- Monje , C. (2011). *Metodología de la investigación cualitativa y cuantitativa*. Neiva, Colombia .
- Mora , C., Plazas, F., Ortiz , A., & Camargo , G. (2016). El juego como método de aprendizaje. *nodos y nudos*.
- Parra , E. (2015). *¿tengo razones para aprender matemáticas? caracterización de las condiciones del microcontexto y macrocontexto que determinan las justificaciones de los estudiantes*. Bogotá, Colombia : Universidad Pedagógica Nacional .
- Pérez , M., Carreño , D., & Bermúdez , I. (2013). El juego como necesidad de la sociedad infantil. *Conrado*, 34-43. Obtenido de https://conrado.ucf.edu.cu/index.php/conrado/article/view/102/pdf_6
- Pérez , S., & Bressan , A. (2006). *Imágenes como buenos contextos*. Argentina : GPDM.
- Rincón, C. (2010). La organización escolar por ciclos. Una experiencia de transformación pedagógica en Bogotá. *Educación y Humanismo*, 12(19), 93-104. Obtenido de <file:///C:/Users/lenovo/Downloads/2083-Texto%20del%20art%C3%ADculo-1976-1-10-20170417.pdf>
- Rodríguez, E., & Larios, B. (s.f.). *Teorías de Aprendizaje*.
- Samper, C., Molina , O., & Plazas , T. (04 de 05 de 2018). *Análisis didáctico de tareas matemáticas: un ejemplo para la clase de geometría*. (P. Perry, Editor) Recuperado el

2020, de Magisterio. com.co: [https://www.magisterio.com.co/articulo/analisis-didactico-de-tareas-matematicas-un-ejemplo-para-la-clase-de-geometria#:~:text=El%20an%C3%A1lisis%20did%C3%A1ctico%20es%20la,clases%20\(G%C3%B3mez%2C%202002\).&text=Durante%20este%20an%C3%A1lisis%20tambi%C3%A9n](https://www.magisterio.com.co/articulo/analisis-didactico-de-tareas-matematicas-un-ejemplo-para-la-clase-de-geometria#:~:text=El%20an%C3%A1lisis%20did%C3%A1ctico%20es%20la,clases%20(G%C3%B3mez%2C%202002).&text=Durante%20este%20an%C3%A1lisis%20tambi%C3%A9n)

Seoane, R. (2008). *Recursos en Matemática: Inicial y Primaria* . Caracas - Venezuela : Editorial Laboratorio Educativo.

Sierra, M. (Octubre de 2004). Pensamientos de Miguel de Guzmán acerca de la educación matemática. *Números*, 59, 89-93. Obtenido de <http://www.sinewton.org/numeros/numeros/59/Articulo09.pdf>

Torrado , M. (2006). *Diseño e implementación de una propuesta de formación de maestros de primaria sobre enseñanza de las matemáticas*. Bogotá : Universidad Pedagógica Nacional

Zamora , P. (2013). *Contextualización de las matemáticas*. Colombia . Obtenido de <http://repositorio.ual.es/bitstream/handle/10835/2323/Trabajo.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

Zolkower, B., Bressan , A., & Gallego , F. (2006). *La corriente realista de didáctica de la matemática. Experiencias de un grupo de docentes y capacitadores*. Bariloche, Argentina: Grupo Patagónico de Didáctica Matemática. Obtenido de <http://funes.uniandes.edu.co/16100/1/Zolkower2006La.pdf>