



# UNA PROPUESTA DE ENSEÑANZA PARA EL MOVIMIENTO PLANETARIO CLÁSICO Y RELATIVISTA

ANYI MARITZA TACUMÁ GARZÓN

Trabajo de Grado para optar por el Título de Licenciatura en Física

*Asesor:*

NÉSTOR FERNANDO MÉNDEZ HINCAPIÉ

*Línea de Profundización:*

LA ENSEÑANZA DE LA FÍSICA Y LA RELACIÓN  
FÍSICA MATEMÁTICA




UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL  
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
BOGOTÁ, COLOMBIA

2014




*Dedicado  
A Dios y a mi familia  
en especial a mi mamá*

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Escuela de Pedagogía</small>	<b>FORMATO</b>	
	<b>RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE</b>	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 1 de 4	

Información General	
<b>Tipo de documento</b>	Trabajo de Grado
<b>Acceso al documento</b>	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
<b>Título del documento</b>	Una propuesta de enseñanza para el movimiento planetario clásico y relativista
<b>Autor(es)</b>	Anyi Maritza Tacumá Garzón
<b>Director</b>	Néstor Fernando Méndez Hincapié
<b>Publicación</b>	Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional, 2014, 76 páginas
<b>Unidad Patrocinante</b>	Universidad Pedagógica Nacional
<b>Palabras Claves</b>	Leyes de Kepler, Ley de Gravitación Universal, Métrica de Schwarzschild propuesta de enseñanza, C++, unidad didáctica y simulación

1.Descripción
<p>El presente documento muestra el proceso por el cual se logró una herramienta pedagógica que permita una mejor comprensión del concepto del movimiento planetario y su contraste con la parte clásica y relativista desarrollada por Einstein. Para esto se introduce al lector dentro de cada una de las teorías que han sido relevantes para la construcción de estos conceptos, como es el caso de la astronomía en la antigüedad, leyes de Kepler, Ley de gravitación universal de Newton y métrica de Schwarzschild.</p> <p>Posteriormente se muestra la herramienta pedagógica que permitirá dar un enfoque diferente, sobre cada uno de los conceptos en cuestión, y los cambios en las trayectorias de los planetas a la luz de la relatividad general, permitiendo establecer una serie de fases, en donde se tendrá una tarea específica para alcanzar los propósitos esperados.</p>

2.Fuentes
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Adler, R., Bazin, M., &amp; Schier, M. (1965).Introduction to General Relativity. McGraw-Hill.</li> <li>• Arons, A. (1970).Evolución de los conceptos de la Física. Mexico: Trillas.</li> </ul>

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Realidad y Pedagogía</small>	<b>FORMATO</b>	
	<b>RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE</b>	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 2 de 4	

- Bennett, J., Donahue, M., Schneider, N., Voit, M. (2004).The Cosmic Perspective. PEARSON.
- Einstein, A. (1922).Charla: Cómo inventé la Relatividad. Recuperado el 30 de Agosto del 2013, del sitio Web <http://orionastronomia.blogspot.com/2007/08/1-como-invent-la-teora-de-html>
- Feynman, R., Leighton, R., Sands, M. (1964).The Feynman Lectures on Physics. Addison Wesley. Vol I.
- Fonseca, M., Hurtado, A., Lombana, C., & Ocaña, O. (2006).La simulación y el experimento como opciones didácticas integradas para la conceptualización en Física. Revista Colombiana de Física, XXXVIII, Vol (2), pp. 707 - 710.
- Gould, H., Tobochnik, J., & Wolfgang, C. (2007).An introduction to computer simulation methods. Pearson Education, Inc.
- Schwarzschild, K. (1916). Uber das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. Sitzber, Preus. Akad. Wiss, Berlin, pp. 189 -196.
- Tejeiro, J., & Vargas, E. (2008).Simulación numérica de un agujero negro de Schwarzschild. Colombia: Revista Colombiana de Física, Vol (40), No.2, pp. 476-479.
- UNESCO (2005).¿Cómo promover el interés por la cultura científica? Una propuesta didáctica fundamentada para la educación científica de jóvenes de 15 a18 años. Santiago de Chile: UNESCO.


### 3.Contenidos

#### CAPÍTULO I EL MÉTODO CIENTÍFICO COMO INTERVENCIÓN EN EL AULA DE CLASE.

En éste capítulo se muestra lo que se entiende por método científico y sus respectivas fases.

#### CAPÍTULO II GENERALIDADES CLÁSICAS DEL MOVIMIENTO PLANETARIO.

El objetivo del capítulo es mostrar el proceso histórico del movimiento planetario y resaltar los modelos más importantes, hasta llegar a la ley de gravitación universal y las trayectorias clásicas de los planetas.

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Realidad y Pedagogía</small>	<b>FORMATO</b>	
	<b>RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE</b>	
<b>Código: FOR020GIB</b>	<b>Versión: 01</b>	
<b>Fecha de Aprobación: 10-10-2012</b>	<b>Página 3 de 4</b>	

### CAPÍTULO III MOVIMIENTO PLANETARIO DESDE LA RELATIVIDAD GENERAL.

En éste capítulo se muestra las ecuaciones de movimiento para una partícula bajo la métrica de Schwarzschild, y las ecuaciones de movimiento, contrastando con las ecuaciones clásicas del capítulo anterior.

### CAPÍTULO IV DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DEL MÓDULO DIDÁCTICO.

El objetivo del capítulo es mostrar el diseño y construcción del módulo didáctico y el programa en wxDEV-C++. Se muestran algunas trayectorias relativistas en el límite clásico y se propone el módulo didáctico.

Apéndices: Solución de Schwarzschild, código computacional C++ y módulo didáctico.

## 4. Metodología


El enfoque utilizado en el trabajo es cuantitativo (prueba hipótesis a través de una recolección de datos, teniendo en cuenta la medición numérica y el análisis realizado, para establecer pautas y comprobar teorías (Baptista, M., \ Collado, C., \& Hernández, R., 2010)), en este sentido el enfoque es probatorio a través de una secuencia establecida, caracterizada por procesos secuencial e identificada por fases.

El proceso de las fases van acorde a un problema delimitado y preciso, fundamentada por estudio disciplinar, por medio del cual se profundiza en los orígenes del movimiento planetario hasta llegar a la explicación de la Relatividad General, recogiendo datos e hipótesis probatorias, para luego confrontar y acomodar variables para lograr el resultado requerido por el problema delimitado desde un principio.

Ésta metodología intenta que los maestros y estudiantes, en un ambiente de enseñanza-aprendizaje, sean capaces de percibir e interactuar para que la experiencia les resulte significativa.

## 5. Conclusiones

- El programa posibilita mejorar la estructura de este e incluso proponer la solución de otro problema con el programa o la sintaxis de ella.
- Si se utilizan valores muy grandes en la masa y se varía la velocidad establecida el

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <i>Excellence in Education</i>	<b>FORMATO</b>	
	<b>RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE</b>	
<b>Código: FOR020GIB</b>	<b>Versión: 01</b>	
<b>Fecha de Aprobación: 10-10-2012</b>	<b>Página 4 de 4</b>	

planeta sale de su órbita.

- Si la masa se deja dentro de un rango de 1 a 100 y la velocidad igual se mostrará una órbita circular y cerrada.
- Se debe tener en cuenta que el radio y la masa son fundamentales para lograr lo que se quiere observar.
- Eventualmente se puede desarrollar diferentes propuestas dados bajos ciertos parámetros, como el propuesto.
- Posibilita al maestro generar nuevas propuestas de estrategias didácticas y tecnológicas.

<b>Elaborado por:</b>	Anyi Maritza Tacumá Garzón
<b>Revisado por:</b>	Néstor Fernando Méndez Hincapié

<b>Fecha de elaboración del Resumen:</b>	25	02	2014
--	----	----	------

# Índice general

<b>Prefacio</b>	<b>IX</b>
<b>1. EL MÉTODO CIENTÍFICO COMO INTERVENCIÓN EN EL AULA DE CLASE</b>	<b>1</b>
1.1. Caracterización del enfoque cuantitativo . . . . .	3
<b>2. GENERALIDADES CLÁSICAS DEL MOVIMIENTO PLANETARIO</b>	<b>5</b>
2.1. Astronomía en la Antigüedad . . . . .	5
2.1.1. Teoría Geocéntrica . . . . .	6
2.1.2. Teoría Heliocéntrica . . . . .	7
2.2. Leyes de Kepler . . . . .	7
2.3. Ley de Gravitación de Newton . . . . .	9
2.4. Movimiento de una partícula en coordenadas polares . . . . .	11
<b>3. MOVIMIENTO PLANETARIO DESDE LA RELATIVIDAD GENERAL</b>	<b>13</b>
3.1. Solución de Schwarzschild . . . . .	14
3.1.1. Trayectoria de una partícula . . . . .	16
<b>4. DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DE LA SIMULACIÓN</b>	<b>18</b>
4.1. Diseño y construcción de la propuesta de enseñanza . . . . .	21
4.2. Diseño y construcción del programa de simulación . . . . .	23
4.2.1. Requerimientos del sistema . . . . .	23

Conclusiones	26
Bibliografía	28
Apéndice A	
Solución de Schwarzschild	31
Apéndice B	
Código Computacional C++	37
Apéndice C Módulo didáctico	42

# Índice de figuras

1.1. Proceso cuantitativo . . . . .	4
2.1. Concepción del Modelo Geocéntrico . . . . .	6
2.2. Concepción del Modelo Heliocéntrico . . . . .	8
2.3. Elipse y Ley de áreas de Kepler . . . . .	8
4.1. Orbita clásica Masa 3 sin modificación de velocidad . . . . .	19
4.2. Orbita clásica Masa 3 sin modificación de velocidad . . . . .	19
4.3. Orbita clásica Masa 0.01 y velocidad 0.0012 . . . . .	20
4.4. Orbita clásica Masa 0.01 y velocidad 0.0008 . . . . .	20
4.5. Orbita clásica Masa 2 y velocidad 0.06 . . . . .	21

# Prefacio

Motivado por el estudio del universo, el hombre ha planteado diferentes teorías a través de los años, numerosas interpretaciones se dieron en torno a ello, creando movimientos y escuelas dedicadas a la explicación de los fenómenos observados. Todo esto ha motivado la elaboración del presente trabajo de grado, con el fin de proponer una estrategia de aprendizaje, por medio de la construcción de explicaciones, que genere una mejor comprensión del fenómeno observado, en concreto del movimiento planetario.

Pero no sólo es el hecho de responder a un tema netamente académico, para ello se debe tener en cuenta una serie de consideraciones inmersas en el desarrollo de las interpretaciones hasta convertirse en teorías, permitiendo así relacionar aspectos fundamentales en la construcción de ellas, desde la idea más absurda hasta el modelo más complejo que existe al día de hoy, por consiguiente el estudiante puede entrever diversas leyes físicas que explican cómo se ha visto el fenómeno y qué implicaciones académicas o empíricas hay detrás de él.

Para la elaboración del trabajo de grado se tuvo en cuenta tres monografías del Departamento de Física de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN), las cuales fueron referentes para el desarrollo del proyecto, a continuación se presentará cada uno de ellos:

1. Cadena Janeth, *Movimiento de los planetas a través de un software educativo*(2006), monografía dirigida por el profesor Eduardo Garzón. Departamento de Física UPN.
2. Pérez Diego, *Diseño de una herramienta virtual para la enseñanza de la relatividad* (2009), monografía dirigida por el profesor Yesid Cruz. Departamento de Física UPN.
3. Amaya Juana y Vanegas Saúl, *La carga eléctrica como fuente de gravedad* (2008), monografía dirigida por los profesores Monica Valencia y Néstor Méndez. Departamento de Física UPN.

Como puede observarse estas monografías desarrollaron una herramienta facilitadora para el proceso de aprendizaje de los estudiantes, donde involucraron temas de comprensión compleja de una forma didáctica por medio de herramientas tecnológicas, en algunos casos desarrollaron todo un modelamiento matemático para evidenciar y sustentar sus trabajos de grado.

También se encontraron proyectos investigativos de otros espacios educativos, que se relacionan a continuación:

1. Aleman, R. y Pérez, J., *Una nueva propuesta didáctica para la enseñanza de la Relatividad en el bachillerato*(2001), Revista Enseñanza de las ciencias.
2. Pérez, H. y Solbes, J., *Algunos problemas en la enseñanza de la Relatividad*(2003), Revista Enseñanza de las ciencias.
3. Tejeiro, J. y Vargas, E., *Simulación numérica de un agujero negro de Schwarzschild*(2008), Revista Colombiana de Física.
4. Santana, F. y Talero, P., *Experimentos virtuales sobre el movimiento planetario*(2011), Revista Latin American Journal of Physics Education.

Puede notarse que estos trabajos de investigación están enfocados en la enseñanza por medio de herramientas interactivas y en algunas casos evalúan problemas encontrados muy parecido al desarrollado en esta monografía, ya que también utilizan lenguaje de programación en el programa C++ ados en la enseñanza de la Relatividad, pero el más importante de todos es el último artículo, se puede decir que es un traby utilizan un método numérico como solución de los experimentos virtuales propuestos.

De todos estos aspectos relacionados es importante resaltar, el ámbito disciplinar de la física, teniendo en cuenta que el trabajo que aquí se desarrolla muestra la misma importancia en el modelamiento físico y matemático del fenómeno estudiado. Todo ello es para dar un mejor fundamento de lo que se espera aportar, dirigido hacia la enseñanza del fenómeno. Por lo tanto la problemática desarrollada de este trabajo se centra en la siguiente pregunta: *¿Cómo generar interés en estudiantes de último grado de colegio, de tal forma que entienda el comportamiento del movimiento planetario sin necesidad de realizar el conjunto de ecuaciones diferenciales o el protocolo matemático para ello?*

La problemática se orientó de esta forma, considerando que uno de elementos fundamentales en el estudio u aprendizaje de un fenómeno cualquiera, es por medio de la

motivación generada en el sujeto, según (UNESCO 2005) *la falta de interés, e incluso el rechazo hacía el estudio de las ciencias, asociado al fracaso escolar de un elevado porcentaje de estudiantes, constituyen un problema que reviste una especial gravedad*, esto conlleva a la necesidad de generar estrategias que posibiliten la comprensión de sus objetos de conocimiento.

De la misma forma, se debe tener en cuenta que el fenómeno propuesto a estudiar implica ciertas condiciones que demanda en algunos casos dificultades al sujeto. Por ejemplo un tiempo prudente para la observación, formulaciones de leyes físicas modernas que algunas veces desconocen o un interés propio por comprender del tema. El hecho de que existan dificultades no quiere decir que no existan numerosas herramientas o mecanismos que permitan al estudiante comprender del tema, este hecho motivó exponer una propuesta donde el estudiante pueda encontrar una herramienta posiblemente acorde a lo esperado.

En este sentido, el objetivo general que se planteó para éste trabajo es *'Diseñar y proponer una estrategia de enseñanza, donde evidencie el movimiento planetario sin la necesidad de realizar un modelamiento estrictamente matemático'*, con el fin de cumplir éste objetivo se han trazado los siguientes objetivos específicos:

- Realizar una documentación teórica apropiada que permita explicar desde la disciplina el fenómeno propuesto.
- Diseñar un programa donde el estudiante logre simular y explicar el fenómeno a tratar.
- Generar una propuesta de enseñanza, por medio de una secuencia de actividades que constituya la finalidad planteada.

Con base en lo anterior, se llevó a cabo:

1. Un estudio teórico, por medio del cual se profundizó en los orígenes del movimiento planetario hasta llegar a la explicación de la Relatividad General.
2. Diseño y construcción de un programa en un software libre, como herramienta facilitadora para la comprensión del tema.
3. Diseño y construcción de una unidad didáctica.

De este modo se espera que este documento pueda aportar en los procesos de enseñanza - aprendizaje de la física, generando interés y motivación hacia el estudio de las ciencias.

*Anyi Tacumá*

*Bogotá*

*2014*

# EL MÉTODO CIENTÍFICO COMO INTERVENCIÓN EN EL AULA DE CLASE

El avance tecnológico ha fomentado que el docente diseñe nuevas estrategias de enseñanza, permitiendo así que el estudiante evidencie fenómenos que algunas veces debían visualizarse por medio de cálculos u observaciones que tomaban mucho tiempo, sin embargo el uso de estas herramientas pueden causar una mala comprensión de los temas estudiados, según (Fonseca, Hurtado, Lombana, Ocaña, 2006), este problema puede derivarse que en algunos casos se tome estas herramientas tecnológicas como una solución rápida para observar en una clase.

Por eso es primordial establecer una serie de parámetros para generar en el sujeto procesos de aprendizaje acorde a lo que se está trabajando. Según Ardila (2007) *“El método científico es el proceso por el cual los investigadores se esfuerzan colectivamente y a través del tiempo, para construir una representación del mundo lo más exacta posible, es decir, que sea confiable, constante y no arbitraria”*. El autor está señalando que todo proceso tiene un comienzo y un final si así se desea ver, esto depende del producto que se obtenga y el esfuerzo que se realice frente a la investigación.

Así mismo, se debe tener en cuenta unas orientaciones generales para cumplir a cabalidad con la investigación propuesta según (UNESCO, 2005). El esquema de esta estrategia de enseñanza está dado por:

## **Primero**

---

Establecer una situación problemática coherente con la que se va a empezar a investigar. Teniendo en cuenta las ideas, la visión del mundo, las destrezas y las actitudes de los estudiantes y proporcionar una concepción preliminar de la tarea.

### **Segundo**

Proponer a los estudiantes el estudio de las situaciones problemáticas planteadas y la toma de decisiones para que comiencen a elaborar un plan para su tratamiento.

- Delimitar la situación problemática para que así el estudiante pueda hacerse una idea a lo que se quiere llegar.
- Formulación de hipótesis, aquí los estudiantes harán uso de las concepciones previas orientadas a la situación problema.

### **Tercero**

Orientar el tratamiento científico de los problemas planteados.

- La exposición de hipótesis, incluida la invención de conceptos y la elaboración de modelos.
- La elaboración de estrategias (de acuerdo al caso esto puede incluir diseños experimentales) para la contrastación de las hipótesis a la luz del cuerpo de conocimientos de que se dispone.
- La realización de las estrategias y el análisis de los resultados, considerando las predicciones de las hipótesis, cotejándolos con los obtenidos por otros grupos de alumnos y por la comunidad científica, estudiando su coherencia con el cuerpo de conocimientos.

### **Cuarto**

Plantear el manejo reiterado de los nuevos conocimientos en una variedad de situaciones para hacer posible la profundización y afianzamiento de los mismos, asentando un énfasis especial en las relaciones Ciencia/Tecnología/Sociedad que enmarcan el desarrollo científico (propiciando, a este respecto, la toma de decisiones) y dirigiendo todo este tratamiento a mostrar el carácter de cuerpo coherente que tiene toda ciencia. Favorecer, en particular, las actividades de síntesis (esquemas, memorias, recapitulaciones, mapas conceptuales, etc.), la elaboración de productos (susceptibles de romper con planteamientos excesivamente escolares y de reforzar el interés por la tarea) y la concepción

de nuevos problemas.

Cada una de las actividades anteriores tiene un tiempo y un proceso dentro de una secuencia didáctica. De cierta forma, se puede ver cómo la construcción de una solución que en algunas ocasiones se ve imperceptible cuando se trata de situaciones cotidianas, según (Osuna, 2006), la evaluación se aprecia como un instrumento de aprendizaje donde los estudiantes establezcan relaciones o diferencias frente a un grupo investigador y analicen los resultados obtenidos, en algunos casos sirve para direccionar nuevamente la situación problemática propuesta, también se debe tener en cuenta que esta debe ser acorde con lo que se está estudiando para afianzar y obtener resultados esperados por el grupo de investigación.

A continuación se presenta la caracterización del enfoque cuantitativo, como procesos metódicos que posibilitan la descripción y explicación del modelo utilizado.

## 1.1. Caracterización del enfoque cuantitativo

El enfoque cuantitativo prueba hipótesis a través de una recolección de datos, teniendo en cuenta la medición numérica y el análisis realizado, para establecer pautas y comprobar teorías (Baptista, M., Collado, C., & Hernández, R., 2010), en este sentido el enfoque es probatorio a través de una secuencia establecida, caracterizada por procesos secuenciales, este proceso se representa en la figura 1.1 y se identifica por las siguientes fases:

- Se plantea un problema delimitado y preciso, aquí la investigación puede resultar alrededor de varias cuestiones.
- Se realiza la revisión bibliográfica que da cuenta del marco teórico y se plantea las primeras hipótesis.
- Se recoge datos medibles, para generar un primer resultado analizando los datos obtenidos.
- Al realizar el análisis se confronta con las hipótesis propuestas, esto se realiza teniendo en cuenta los conocimientos previos.



Figura 1.1: Proceso cuantitativo según (Baptista, M., Collado, C., & Hernández, R., 2010)

- Al realizar la confrontación del análisis con los conocimientos previos, se crea un patrón orientado al resultado esperado.
- Se establecen los variables a estudiar.
- Por último se realiza una recolección de datos, para analizar y finalizar con un informe de los resultados.

Lo anterior permite establecer una metodología de trabajo a través de una serie de fases, en donde se tendrá una tarea específica para alcanzar los propósitos esperados, teniendo en cuenta que este método por su versatilidad y adaptación puede extraer de cada técnica lo que no sea conveniente para la ejecución del modelo enseñanza-aprendizaje basado en el movimiento planetario. Ésta metodología pretende que los maestros y estudiantes, en un ambiente de enseñanza-aprendizaje, sean capaces de percibir e interactuar para que la experiencia les resulte significativa.

# GENERALIDADES CLÁSICAS DEL MOVIMIENTO PLANETARIO

## 2.1. Astronomía en la Antigüedad

Desde la antigüedad, el hombre buscaba dar soluciones a problemas que se les presentaba en la cotidianidad, como por ejemplo conocer con precisión la duración de un año solar<sup>1</sup>, para así saber con exactitud los periodos de tiempo que tenían para las siembras. De esta manera encontraron una relación entre los acontecimientos celestes y terrestres, teniendo en cuenta que la observación del cielo nocturno, alrededor de tantos años, había promovido suficientes datos e interpretaciones concernientes al movimientos de las estrellas y los astros<sup>2</sup> (Arons, 1970: p 271).

Una de las principales indagaciones del hombre era el universo, a partir de ello llegaron a formular numerosas hipótesis en torno al cielo y la Tierra, así como las causas de sus movimientos. Desde un principio se llegó a establecer el Sol, la Luna y la Tierra con cinco planetas más (Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno) dejando las estrellas y la Vía Láctea fijas sobre una superficie esférica. Asumiendo las siguientes características según (Sepulveda, 2003):

---

<sup>1</sup>Concepción griega del mundo (sepulveda, 2003).

<sup>2</sup>Entiéndase astro como un cuerpo celeste de forma definida

- La Tierra está situada en el centro y gira alrededor de su eje.
- Mercurio y Venus giran alrededor del sol pero éste se encuentra en la primera órbita del sistema.
- Los planetas poseen un movimiento característico en su orientación.<sup>3</sup>

Dentro de las teorías más importantes del Universo en la antigüedad se encuentra la Teoría Geocéntrica y la Teoría Heliocéntrica.

### 2.1.1. Teoría Geocéntrica

Esta teoría fue propuesta por los astrónomos griegos Aristóteles, Apolonio, Hiparco y Tolomeo, caracterizada por:

- Establecer el cielo de forma esférica.
- Establecer la Tierra estacionaria en el centro del Universo.
- Los cuerpos celestes se mueven en círculos cuyo centro a su vez gira alrededor de la Tierra (ver representación en la figura 2.1).
- El planeta y el epiciclo se mueve con razón constante.

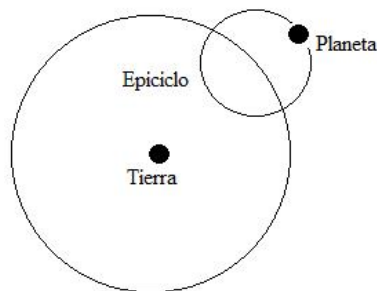


Figura 2.1: Epiciclos en el movimiento planetario

El modelo se acomoda perfectamente para la época ya que no existían los instrumentos suficientes para predecir el movimiento de los planetas<sup>4</sup> y estaba adaptado de

<sup>3</sup>De acuerdo a las observaciones realizadas por Aristarco de Samos (siglo III A.C.) e influenciado por el trabajo de Heráclides de Ponto (siglo IV A.C.) (Arons 1970: p 275).

<sup>4</sup>El desarrollo de instrumentos ópticos de precisión aparecieron aproximadamente 2000 años después de los grandes pensadores griegos (Arons, 1970)

tal forma que los supuestos que tenían para explicar el recorrido de los epiciclos y la proximidad angular del Sol, Mercurio y Venus eran verídicos y aceptados por los entonces astrónomos de la época.

### 2.1.2. Teoría Heliocéntrica

Teniendo en cuenta que el modelo anterior carecía de explicación física y se enfocaba más en una explicación geométrica, el filósofo griego y astrónomo Aristarco concibió en primera instancia la idea de colocar en movimiento la Tierra, pero el que realizó la introducción para darla a conocer mediante un libro fue el astrónomo Nicolás Copérnico, dando las siguientes características:

- El Sol se encuentra en el centro del Universo.
- Establece que los planetas orbitan alrededor del Sol con velocidad constante.
- Establece la rotación y traslación de la Tierra.
- Las estrellas se encuentran fijas y distantes a la Tierra.
- La Luna orbita alrededor de la Tierra.

Esta teoría explica por qué algunos planetas se observan cercanos a la Tierra en determinados tiempos y en otros no como se puede observar en la figura (2.2). De cierta forma le dio un fortalecimiento cuantitativo para la predicción de la trayectoria de los planetas, aunque algunos puntos como la velocidad constante y la órbita circular siguen siendo planteamientos de la teoría anterior.

## 2.2. Leyes de Kepler

Después de ser el asistente del astrónomo Tycho Brahe (1546-1601)<sup>5</sup>, Kepler continuó con las observaciones de su maestro deseando perfeccionar el modelo heliocéntrico;

---

<sup>5</sup>Fiel creyente del modelo geocéntrico, famoso por sus observaciones y registros casi precisos del movimiento planetario.



Figura 2.2: Modelo Heliocéntrico (Bennett, Donahue, Schneider Voit, 2004).

aunque cada uno de ellos tenía un fin diferente para sus observaciones el trabajo realizado por ellos dos logró establecer una descripción más acertada al movimiento planetario.

Al intentar acomodar los datos al modelo copernicano, Kepler descubrió que los datos colocaban la órbita de Marte fuera del esquema del sistema heliocéntrico; esto le demostró que la teoría de esferas concéntricas fallaba para la órbita de Marte (Arons, 1970), además de que tampoco se ajustaba al modelo geocéntrico con los epiciclos .  
cambiar reescribir

Después de estudiar la teoría con los datos tomados durante bastante tiempo, encontró que ésta se podía arreglar considerando la trayectoria como una elipse, de aquí se desprende la primera Ley de Kepler *Cada planeta orbita alrededor del Sol en una elipse, tomando el Sol como uno de los puntos focales.*

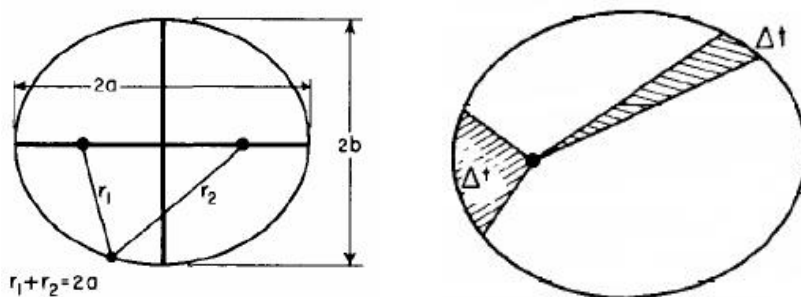


Figura 2.3: La imagen de la izquierda es la explicación de una elipse y la imagen de la derecha muestra la Ley de Áreas de Kepler (Feynman, Leighton & Sands, 1963).

Al encontrar la trayectoria de la órbita de un planeta ver figura (2.3), Kepler deci-

dió buscar la relación de la velocidad de un planeta en cualquier posición de su órbita con la velocidad en cualquier otra posición, llegando a la conclusión que los planetas no se mueven con velocidad uniforme en las cercanías del Sol, si no se mueven más rápido cuanto más cercano están a él y más lento cuanto más lejano se encuentra (Feyman, Leighton & Sands, 1963), a partir de esto deduce la segunda Ley de Kepler *el radio vector desde el Sol al planeta barre áreas iguales en intervalos iguales de tiempo*.

Por último planteó la relación entre dos planetas, teniendo en cuenta el periodo sideral  $T$  (tiempo de revolución del planeta alrededor del Sol) y el radio medio  $r$  de la órbita del planeta, quedando la tercer Ley de Kepler *El cuadrado del periodo orbital de un planeta es directamente proporcional al cubo de la distancia promedio entre el planeta y el sol*.

$$T^2 = Cr^3 \tag{2.1}$$

donde  $C$  es una constante de proporcional que depende de las propiedades del sol con respecto a un planeta, dando el mismo valor para todos los planetas (Tipler, 1989).

## 2.3. Ley de Gravitación de Newton

Las observaciones realizadas por Tycho y las leyes planteadas por Kepler, comprenden y explican el movimiento de los planetas, pero la explicación física de las causas del movimiento no estaba expuesta hasta ese momento. Newton a partir de las bases de la mecánica y el cálculo diferencial planteó la Ley de gravitación relacionándola con la interacción entre dos partículas de la siguiente forma:

De acuerdo con la aceleración centrípeta que viene dada por:

$$\vec{a}_n = -\frac{|\vec{v}|^2}{r}\hat{r} \tag{2.2}$$

donde  $\vec{v}$  es la velocidad del planeta y  $r$  es el radio de la órbita, teniendo en cuenta lo anterior se reemplaza  $\vec{a}_n$  en la segunda Ley de Newton y se toma  $m_p$  como la masa del planeta.

$$\vec{F} = -m_p \vec{a}_n \quad (2.3)$$

Sustituyendo la ecuación (2.2) en la ecuación (2.3) y considerando que  $|\vec{v}| = \frac{2\pi r}{T}$ , (donde  $T$  es el período de la órbita) la segunda Ley de Newton aplicada al planeta es:

$$\vec{F} = -m_p \frac{|\vec{v}|^2}{r} \hat{r} \quad (2.4)$$

$$\vec{F} = -4\pi^2 m_p \frac{r}{T^2} \hat{r} \quad (2.5)$$

Dada la ecuación (2.1), de la tercera ley de Kepler, se despeja  $C$  y se reemplaza en (2.5)

$$C = \frac{T^2}{r^3} \quad (2.6)$$

$$\vec{F} = -\frac{4\pi^2}{C} \frac{m_p}{r^2} \hat{r} \quad (2.7)$$

En el cual  $K_p = \frac{4\pi^2}{C}$  es una constante de proporcionalidad que depende de las propiedades del Sol que es quien ejerce la fuerza.

$$\vec{F} = -K_p \frac{m_p}{r^2} \hat{r} \quad (2.8)$$

La ecuación (2.8) es la fuerza ejercida sobre el planeta por el sol y teniendo en cuenta la tercera Ley de Newton, el Sol estará sometido a una fuerza igual y opuesta por el planeta (Tipler, 1989).

$$\vec{F} = -K_s \frac{M_s}{r^2} \hat{r} \quad (2.9)$$

Donde  $K_s$  es una constante que debe depender de las propiedades del planeta que ejerce la fuerza, y  $M_s$  es la masa del Sol. Igualando las magnitudes de las ecuaciones (2.7) y (2.8) se obtiene:

$$K_p \frac{m_p}{r^2} = K_s \frac{M_s}{r^2} \quad (2.10)$$

$$K_p M_p = K_s m_s \quad (2.11)$$

Por consiguiente, las constantes de los planetas son inversas a sus masas, de ésta relación se logra establecer la constante de gravitación universal<sup>6</sup>  $G$ . Sustituyendo  $K_s$  ó  $K_p$  en sus respectivas formulas se obtiene:

$$\vec{F} = -G \frac{M_s m_p}{r^2} \hat{r} \quad (2.12)$$

Finalmente con lo anterior se obtiene la Ley de Gravitación de Newton *Dos partículas experimentan una fuerza de interacción gravitatoria directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.*

## 2.4. Movimiento de una partícula en coordenadas polares

Las trayectorias de las partículas en cercanía de campos gravitatorios esféricos se describen en coordenadas polares, por lo tanto el problema clásico de los dos cuerpos en coordenadas polares es:

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi, \quad (2.13)$$

y

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \arctan \frac{y}{x} \quad (2.14)$$

La velocidad radial es

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{r} \quad (2.15)$$

---

<sup>6</sup>La constante gravitacional equivale a  $G = 6,670 \times 10^{-11} Nm^2/Kg^2$

La velocidad angular es

$$\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt} = \frac{|\vec{L}|}{mr^2} \quad (2.16)$$

Donde  $\vec{L}$  es la magnitud del momento angular  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ .

El lagrangiano del sistema es:

$$\mathcal{L} = T - V \quad (2.17)$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2] + \frac{GM}{r} \quad (2.18)$$

Las ecuaciones de movimiento son:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \quad (2.19)$$

Al realizar la diferenciación se obtiene las siguientes ecuaciones para  $(r, \dot{r}, \phi, \dot{\phi})$

$$\frac{dr}{dt} = \dot{r} \quad (2.20)$$

$$\frac{d\dot{r}}{dt} = r\dot{\phi}^2 - \frac{GM}{r^2} \quad (2.21)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi} \quad (2.22)$$

$$\frac{d\dot{\phi}}{dt} = -\frac{2}{r}\dot{\phi}\dot{r} \quad (2.23)$$

# MOVIMIENTO PLANETARIO DESDE LA RELATIVIDAD GENERAL

Después de plantear que la velocidad de la luz  $c$  es constante para el vacío, Einstein encontró la importancia de la gravitación, permitiéndole establecer una representación acerca del espaciotiempo. Hay que tener en cuenta que gracias al experimento realizado por el físico inglés Eddington<sup>1</sup> se logró corroborar el planteamiento acerca la teoría de la Relatividad General (**TGR**) donde el espacio y el tiempo no son entidades separadas (Gould, H., Tobochnik, J., & Wolfgang, C., 2007).

Teniendo en cuenta el principio de equivalencia débil (**PED**) “*el movimiento de cualquier cuerpo, independiente de su masa, es el mismo, dadas las mismas condiciones iniciales, posición y velocidad* “ (Tejeiro, 2004). Einstein consideró un ascensor y un observador en su interior, que está en el espacio libre y es acelerado por motores a  $9,8m/s$ , en un segundo caso plateó el ascensor sobre la superficie de la tierra con un observador adentro, esto quiere decir que este ascensor está bajo la influencia del campo gravitatorio. Por consiguiente, si se deja caer un objeto en caída libre en el interior del ascensor, no se puede determinar si el objeto se encuentra en reposo, debido al campo gravitacional o si está acelerando por la fuerza externa que generan los motores.

---

<sup>1</sup> Astrofísico inglés Sir Arthur Stanley Eddington (1822 - 1944) fue uno de los primeros en creer la teoría de la Relatividad General, en 1919 realizó un viaje a las islas Príncipe donde aprovechando el eclipse total de Sol comprobó lo que había establecido Einstein.

Pero si se deja el mismo escenario del experimento anterior, cambiando el objeto en caída por un láser en el ascensor, para cuando se está en el espacio libre la trayectoria del rayo de láser se desviará, debido al sistema acelerado que se produce por la fuerza externa. De aquí que Einstein consideró que el campo gravitacional “*se acopla de la misma manera con todas las formas de energía y materia* “ (Tejeiro, 2004).

En consecuencia, Einstein deduce diez ecuaciones diferenciales de segundo orden acopladas y no lineales, Estas ecuaciones de campo establecen un universo dinámico, esto quiere decir que todas las partículas del universo se encontrarían en constante movimiento, logrando así representar el campo gravitacional en el espaciotiempo.

Se expresan de la siguiente forma:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (3.1)$$

Donde  $R_{\mu\nu}$  es el tensor de Ricci que describe la curvatura del espacio-tiempo,  $R$  es el escalar de Ricci,  $g_{\mu\nu}$  es el tensor métrico que da la medida numérica de la curvatura en cada punto del espaciotiempo,  $\Lambda$  es la constante cosmológica,  $G$  es la constante de gravitación universal,  $c$  es la constante de la velocidad de la luz y  $T_{\mu\nu}$  representa el tensor momentum-energía. Estas ecuaciones establecen que el movimiento y la distribución de la materia están determinadas por los componentes del tensor métrico.

### 3.1. Solución de Schwarzschild

Después de ser publicada las ecuaciones de campo de Einstein, Karl Schwarzschild a los dos meses realizó la primera solución analítica, en el mismo año en que se publicó la Teoría de la Relatividad General; está desarrollada de tal forma que asume una masa puntual  $M$  como fuente generadora de un campo gravitacional en el espaciotiempo, asumiendo las siguientes propiedades:

- Las componentes del tensor métrico no depende del tiempo. (Solución estática).
- Cuando  $r$  tiende al infinito se debe reducir a la métrica de Minkowski. (Solución asintóticamente plana).
- Si  $r$  y  $t$  son constantes entonces el elemento de línea es  $ds^2 = C^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$ . (Solución esféricamente simétrica).

La solución de las ecuaciones de campo está basado en el elemento de línea de Schwarzschild, se considera los requerimientos anteriormente enunciados y se forma un elemento de línea más simple donde el tiempo es independiente y la simetría es radial(para dar cuenta de esto, en los anexos se encuentra la solución de la métrica de Schwarzschild).

Primero el  $ds^2$  debe ser invariante de el tiempo bajo el cambio de  $dt$  por  $-dt$ .

Segundo el elemento de línea debe ser independiente del cambio  $d\theta$  a  $-d\theta$  y un cambio de  $d\varphi$  a  $-d\varphi$ , ésto requiere que no hayan términos de  $drd\theta$ ,  $d\theta d\varphi$ , etc. Por lo tanto el  $ds^2$  queda:

$$ds^2 = Ac^2dt^2 - (Bdr^2 + Cr^2d\theta^2 + Dr^2\sin^2\theta d\varphi^2) \quad (3.2)$$

Donde  $A, B, C$  y  $D$  son funciones de  $r$  y estableciendo que  $C = D$  la ecuación (3.2) queda de la siguiente forma:

$$ds^2 = Ac^2dt^2 - Bdr^2 - C(r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2) \quad (3.3)$$

Realizando la diferencial para  $\hat{r}$ , reemplazando, corriendo simbolos de Christoffel, derivando para que muestre la invarianza en el desplazamiento de cantidades tensoriales en el espacio - tiempo, la métrica de Schwarzschild es

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)(dt)^2 - \left(\frac{dr^2}{1 - 2m/r}\right) - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (3.4)$$

Donde  $m$  esta dada en medidas de longitud  $m = \frac{GM}{C^2}$ . Si  $m$  es pequeña, llegando a cero, se reduce a la métrica de Minkowski. En el apéndice A está desarrollado la solución de Schwarzschild más detallada.

### 3.1.1. Trayectoria de una partícula

De acuerdo al objetivo planteado, para el diseño del programa se tuvo en cuenta las ecuaciones que generarían el movimiento planetario, como referente se utilizó el libro *An introduction to computer simulation methods* de los autores *Gould, H., Tobochnik, J., & Wolfgang, C* donde establece la trayectoria de una partícula en la proximidad de una masa gravitacional, utilizando un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden que satisfacen la función lagrangiana:

$$L(r, \dot{r}, \phi, \dot{\phi}) = \left[ \left(1 - \frac{2M}{r}\right) - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2(\dot{\phi})^2 \right]^{1/2} \quad (3.5)$$

De tal manera que

$$\tau = \int_{\text{evento inicial}}^{\text{evento final}} d\tau = \int_{\text{evento inicial}}^{\text{evento final}} L(r, \dot{r}, \phi, \dot{\phi}) dt \quad (3.6)$$

Debido a las ecuaciones (4.1) y (4.2) el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden es

$$\frac{dr}{dt} = \dot{r} \quad (3.7)$$

$$\frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{4M^3 - 4M^2r - 4M^2r^3\dot{\phi}^2 + 4Mr^4\dot{\phi}^2 - r^5\dot{\phi}^2 + r^2(M - 3M\dot{r}^2)}{(2M - r)r^3} \quad (3.8)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi} \quad (3.9)$$

$$\frac{d\dot{\phi}}{dt} = \frac{2(-3M + r)\dot{r}}{(2M - r)r} \quad (3.10)$$

$$\frac{dt}{dt} = 1 \quad (3.11)$$

Finalmente el sistema de ecuaciones son las variables establecidas en el programa.

# DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DE LA SIMULACIÓN

Como se mencionó anteriormente, el movimiento planetario presenta ciertas características para cada una teorías propuestas a lo largo de la historia, sin embargo existieron dos en especial que marcaron un referente en el estudio de ellas. La primera fueron las leyes de Kepler y la segunda se desglosa de la Teoría General de la Relatividad.

Uno de los objetivos del trabajo es mostrar la trayectorias de un planeta bajo ciertos parámetros dados, a través de una solución numérica en lenguaje de programación de wxDEV-C++, la cual permita a un estudiante de último grado de bachillerato, comprender la diferencia entre la mecánica clásica trabajado durante sus últimos años de estudio en el colegio y la física moderna expuesta como una materia de gran complejidad de entender.

Para el programa se utilizó un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden empleando el método de Runge-Kutta de cuarto orden como método de solución numérica, determinando unas variables específicas para la modelación de la trayectoria de un planeta y de forma adimensional, esto se debe a que el estudio de estas trayectorias es netamente cualitativo. Las ecuaciones utilizadas se pueden ver en el capítulo 3.

La figura (4.1) obedece a una trayectoria circular, debido a la velocidad angular que por defecto está predetermina en el programa, para este caso se dejo la velocidad tal cual como lo arrojó el sistema, visualizando el txt en ningún momento se modifiqué el radio y la velocidad durante su trayectoria.

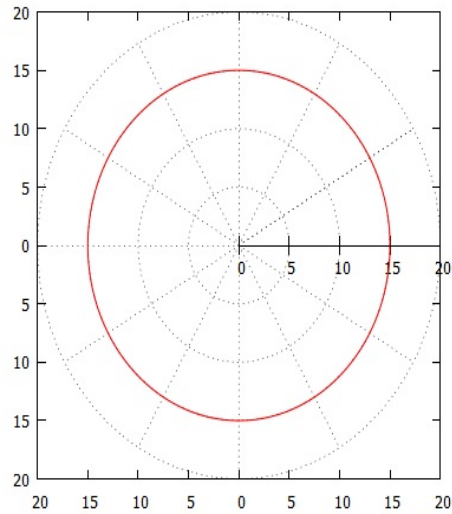


Figura 4.1: Orbita clásica Masa 3 y velocidad 0.029

En la figura (4.2) se utilizó el mismo radio que en la figura (4.1) con la diferencia que la velocidad angular se modificó por un valor un poco más grande del que arrojó el programa, aquí se puede evidenciar, que el planeta no se mantiene en su orbita, tanto su velocidad como su radio no se mantuvieron constantes y el planeta sale expulsado de su orbita, esto se debe a que su peso es más grande que el sol.

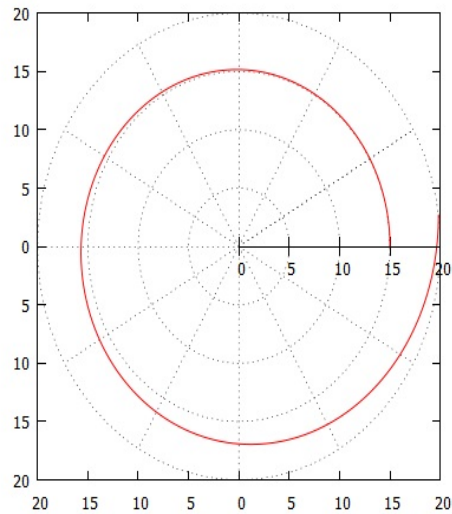


Figura 4.2: Orbita clásica Masa 3 y velocidad 0.03

Otro aspecto importante es cuando se trabaja con valores pequeños en la velocidad angular, se puede visualizar un órbita elíptica como lo predice la Teoría de la Relatividad

---

General, en la figura (4.3) puede verse la trayectoria con bordeada más en unos puntos que en otros.

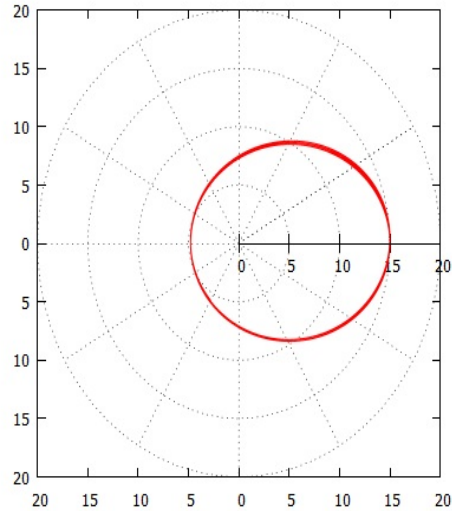


Figura 4.3: Orbita clásica Masa 0.01 y velocidad 0.0012

Pero si se introduce valores más pequeños que el anterior se puede ver claramente que las órbitas no cierran, como se puede notar en la figura (4.4)

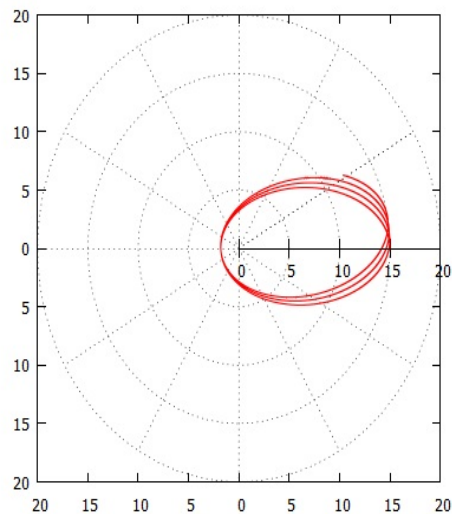


Figura 4.4: Orbita clásica Masa 0.01 y velocidad 0.0008

Por último si se introduce valores grandes de masa y velocidad, muestra como si el planeta estuviera cayendo en el radio de Schwarzschild, como se observa en la figura (4.5)

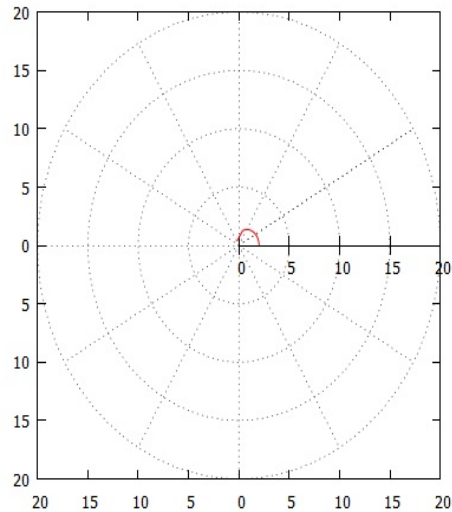


Figura 4.5: Orbita clásica Masa 2 y velocidad 0.06

Se encontró que para valores grandes el comportamiento de la trayectoria de un planeta, señala el decaimiento hacia un agujero negro, pero si sus valores son pequeños las trayectorias son órbita elípticas abiertas, pero si sólo se modifica la masa dentro de los parámetros de  $R = 2M$  la órbita da una circunferencia cerrada, como lo plantea el modelo clásico.

## 4.1. Diseño y construcción de la propuesta de enseñanza

La propuesta de enseñanza-aprendizaje está dirigida a estudiantes de último grado de colegio, estudiantes de primer semestre ó estudiantes de la electiva de astronomía del Departamento de Física de la Universidad Pedagógica Nacional, con la finalidad de generar interés por las ciencias y destacar el proceso investigativo a través del tiempo.

El módulo está conformado por un programa en C++ que dibuje la trayectoria de un cuerpo en presencia de una masa fija y una serie de documentos orientadores, que a su vez plantea cuatro sesiones de clase de la siguiente forma:

- Sesión I: Teorías del movimiento planetario en la antigüedad.
- Sesión II: Formulación de las Leyes de Kepler.

- Sesión III: La ley de gravitación universal.
- Sesión IV: Postulados de la Relatividad General

Adicional a ello se encuentra algunas propuestas que si lo desea el docente las puede tener en cuenta. Los documentos orientadores que se presentan, contienen:

- Nombre de la actividad: Señala la sesión dentro de la secuencia didáctica.
- Estudio cualitativo de la situación problemática. Se plantea una pregunta de investigación, se inspeccionan unos hechos o fenómenos y se busca una dificultad que se encuentre o se interprete para ser objeto de estudio.
- Formulación de hipótesis. Se enuncian conjeturas o posibles soluciones que den respuesta al problema, se formula una hipótesis de investigación, dando un soporte que defina relaciones posibles entre las hipótesis que arrojen, siendo soporte racional.
- Planeación e implementación de estrategias de resolución. Se diseñan pruebas para validar la hipótesis. Se realizan observaciones para probar si la conjetura propuesta es cierta o no.
- Análisis de resultados. se interpretan los resultados acogiéndose al procedimiento más adecuado para la lectura y evaluación de dichos datos.
- Consideración de las hipótesis propuestas. Se acepta o rechaza la hipótesis propuesta. Se interpretan los resultados a la luz del modelo teórico, comparando lo encontrado con lo esperado, se hacen la respectiva corrección del modelo.
- Comunicación de resultados. Se realiza una retroalimentación en grupo, para así afianzar o debilitar el modelo propuesto.

Todas estos componentes estan direccionados para que el estudiante puede trabajar en grupo. Así de esta forma pueda tener en cuenta los criterios fundamentales para evaluar, ante una nueva situación.

## 4.2. Diseño y construcción del programa de simulación

### 4.2.1. Requerimientos del sistema

Utilizando como herramienta y plataforma de programación se usó (wxDEV-C++) en lenguaje C++, se desarrolló un programa que simula el movimiento planetario bajo condiciones controladas para lograr hacer un análisis de los modelos clásicos y relativistas. Para llevar a cabo este programa se tuvo en cuenta unas consideraciones preliminares para su desarrollo que se explicará a continuación:

Según Requerimientos del software (s.f.)La Ingeniería de Software tiene diferentes significados. De las muchas definiciones que existen para requerimiento, a continuación se presenta la definición que aparece en el glosario de la IEEE:

- Una condición o necesidad de un usuario para resolver un problema o alcanzar un objetivo.
- Una condición o capacidad que debe estar presente en un sistema o componentes de sistema para satisfacer un contrato, estándar, especificación u otro documento formal.

Los requerimientos pueden dividirse en *requerimientos funcionales* y *requerimientos no funcionales*. Los requerimientos funcionales definen las funciones que el sistema será capaz de realizar. Describen las transformaciones que el sistema realiza sobre las entradas para producir salidas. Los requerimientos no funcionales tienen que ver con características que de una u otra forma puedan limitar el sistema, como por ejemplo, el rendimiento (en tiempo y espacio), interfaces de usuario, fiabilidad (robustez del sistema, disponibilidad de equipo), mantenimiento, seguridad, portabilidad, estándares, etc.

#### Requerimientos funcionales

- Lo establecido es un programa que tenga la capacidad de graficar la trayectoria relativista general de una partícula con métrica de Schwarzschild.

- Se estableció que tenga una interfaz gráfica que pueda ingresar todos los datos necesarios para su ejecución en éste caso es la generada por la plataforma (wxDEV-C++).
- Al finalizar el proceso de ejecución arroja una gráfica que muestra una trayectoria simulada de acuerdo con los datos suministrados.
- El tiempo de ejecución del programa tardará aproximadamente 3 min o menos de acuerdo a los datos ingresados y recursos de maquina (PC).
- La interfaz de usuario es de fácil manipulación
- Las variables que se consideraron para la elaboración del programa son las siguientes:
  1. Tiempo
  2. Radio
  3. Masa
  4. Tamaño de paso
  5. Método de solución numérico
  6. Condiciones iniciales
- El método de solución numérica que se utilizó en el programa fue el método de Runge-Kutta de cuarto orden.

### **Requerimientos no funcionales**

- El tamaño de paso no puede ser tan grande porque por tiempos de ejecución el código se rompe (bloqueado).
- La interfaz gráfica se trabajará con Gnuplot.
- Su portabilidad será segura y confiable, generando un ejecutable, siempre y cuando éste instalado los programas wxDEV-C++ y Gnuplot.

En el diseño y desarrollo del programa se establecieron las siguientes fases para llevar a cabo con éxito el programa deseado con su única finalidad la simulación de movimientos planetarios.

1. Análisis del problema que se buscaba resolver (se elaboró necesidad que se quería resolver y se generaron posibles soluciones).
2. Diseño de la aplicación (se resolvió la necesidad mediante el código que se escribió wxDEV-C++). El código completo se encuentra en el apéndice B.
3. Fase de pruebas (se realizaron distintas pruebas de la aplicación terminada para establecer que cumpliera con su finalidad).
4. Etapa de verificación, en el momento que fallaba el programa se regresaba al numeral 1 o 2 dependiendo de cómo se haya comportado en la fase de pruebas, después se regresaba al numeral 3.
5. Implementación del programa (se instaló y ejecutó el programa en una computadora distinta para establecer el buen funcionamiento de él, cumpliendo con los parámetros establecidos).
6. Los programas utilizados son de licencia libre, por lo tanto el programa después de un tiempo pueda generar algunos errores.

# Conclusiones

El uso de herramientas tecnológicas nos permiten llevar al aula de clase elementos teóricos de una forma agradable y divertida, como lo afirman (Santana y Talero, 2011) *Permiten acercarse a la solución aproximada e intuitiva de problemas físicos que por su carácter matemático no están al alcance de estudiantes....* Así como los eventos físicos que se pueden estudiar de la Relatividad General.

Uno de las principales razones es la interacción del estudiante con un programa donde evidencia algo que no se puede demostrar tan fácilmente en un experimento. Esto ayuda adquirir una experiencia frente al fenómeno, puesto que se puede manipular algunos contextos que en la vida real no se puede hacer.

Por otro lado se puede evidenciar que en algunos casos no es necesario un modelamiento matemático para introducir al sujeto a un evento que normalmente se considere complejo esto hace referencia a la parte de Relatividad General, pero no quiere decir que el hecho que sea complejo no se deba enseñar o incluso estudiar. Por el contrario, estas problemáticas se deben tratar para así plantear mecanismo o herramientas que puedan aportar a la enseñanza o aprendizaje del ser humano.

Una de las cosas importantes que tiene el programa es que se puede modificar al antojo del usuario, posibilitándolo mejorar la estructura de éste e incluso proponer la solución de otro problema con el programa o la sintaxis de ella. Lo que se espera es que el estudiante pueda visualizar el modelo esperado y pueda concluir a partir de él, esto no quiere decir que con la propuesta de enseñanza ya está todo muy claro sino que pueda evidenciar las variables que se tuvo en cuenta y como a través de ellas modifica los resultados y así poder enfrentarlos con las leyes de la física propuestas, teniendo en cuenta que se trabaja de forma adimensional, ya que el trabajo es netamente cualitativo.

Si se utilizan valores muy grandes en la masa y la velocidad estableciendo valores mayores de lo que establece el programa el planeta sale de su órbita, o si por el contrario la masa se deja dentro de un rango de 1 a 100 y la velocidad igual nos mostrará un órbita circular y cerrada, hay que tener en cuenta que el radio y la masa son fundamentales para lograr lo que se quiere observar, la velocidad tan sólo muestra la dirección que toma el planeta de acuerdo a los valores establecidos.

# Bibliografía

**Abad, A., Docobo, J., & Elipe, A. (2002).** *Curso de Astronomía*. Zaragoza, España: Prensas universitarias de Zaragoza

**Adler, R., Bazin, M., & Schiffer, M. (1965).** *Introduction to General Relativity*. McGraw-Hill.

**Aleman, R., & Pérez, J. (2001).** *Una propuesta didáctica para la enseñanza de la relatividad en el bachillerato*. Enseñanza de las ciencias XIX Vol (2), pp. 335-343.

**Amaya, J. & Vanegas, S. (2008).** *La carga eléctrica como fuente de gravedad*. Trabajo de Grado: Licenciatura en Física. Universidad Pedagógica Nacional.

**Ardila, A. (2007).** *Física Experimental*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias.

**Arons, A. (1970).** *Evolución de los conceptos de la Física*. México: Trillas.

**Asociación astronómica Cielo del Guadaira (2008).** *La posición de la Tierra en la historia*. Recuperado el 30 de Octubre del 2013, del sitio Web [http://www.cielodeguadaira.org/index.php?option=com\\_content&task=view&id=220&Itemid=26](http://www.cielodeguadaira.org/index.php?option=com_content&task=view&id=220&Itemid=26)

**Baptista, M., Collado, C., & Hernández, R. (2010).** *Metodología de la investigación*. México: Mc Graw Hill

**Bisquerra, R. (1989).** *Métodos de investigación educativa guía práctica*. Barcelona: ceac.

**Bennett, J., Donahue, M., Schneider, N., Voit, M. (2004).** *The Cosmic Perspective*. PEARSON.

**Einstein, A. (1922).** *Charla: Cómo inventé la Relatividad*. Recuperado el 30 de Agosto del 2013, del sitio Web <http://orionastronomia.blogspot.com/2007/08/1-como-invent-la-teora-de-la.html>

**Feynman, R., Leighton, R., Sands, M. (1964).** *The Feynman Lectures on Physics*. Addison Wesley. Vol I.

**Fonseca, M., Hurtado, A., Lombana, C., & Ocaña, O. (2006).** *La simulación y el experimento como opciones didácticas integradas para la conceptualización en Física*. Revista Colombiana de Física, XXXVIII, Vol (2), pp. 707 - 710.

**Gould, H., Tobochnik, J., & Wolfgang, C. (2007).** *An introduction to computer simulation methods*. Pearson Education, Inc.

**Hawking, S. (1990).** *Historia del tiempo: Del big bang a los agujeros negros*. Madrid: Alianza Editorial.

**Mora, H. (2004).** *Introducción a C y a métodos numéricos*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias.

**Pérez, H., & Solbes, J. (2003).** *Algunos problemas en la enseñanza de la relatividad*. Enseñanza de las ciencias XXI Vol (1), pp. 135-146.

**Planetario de Bogotá (2006).** *Albert Einstein. El hombre, el científico, el ciudadano*. Bogotá Colección Planetario de Bogotá.

**Requerimientos del software (s. f.)**. Recuperado el 3 de marzo de 2013, del sitio Web.

<http://requerimientos.galeon.com/>

**Santana, F., & Talero, P. (2011)**. *Experimentos virtuales sobre el movimiento planetario*. Latin-American Journal of Physics Education, Vol(5), No. 2 pp. 508-512.

**Schwarzschild, K. (1916)**. *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie*. Sitzber, Preus. Akad. Wiss, Berlin, pp. 189 -196.

**Tejeiro, J. (2004)**. *Fundamentos de la Relatividad General*. Bogotá Universidad Nacional de Colombia, OAN.

**Tejeiro, J. (2004)**. *Sobre la teoría especial de la Relatividad*. Bogotá Universidad Nacional de Colombia, OAN.

**Tejeiro, J., & Vargas, E. (2008)**. *Simulación numérica de un agujero negro de Schwarzschild*. Colombia: Revista Colombiana de Física, Vol (40), No.2, pp. 476-479.

**Tipler, P. (1989)**. *Física*. Barcelona: Reveté. Tomo I.

**UNESCO (2005)**. *¿Cómo promover el interés por la cultura científica? Una propuesta didáctica fundamentada para la educación científica de jóvenes de 15 a 18 años*. Santiago de Chile: UNESCO.

**Wilson, J., Buffa, A., & Lou, B. (2007)**. *Física*. Sexta ed. Pearson Education, Inc.

# Apéndice A

## Solución de Schwarzschild

La solución de la métrica de Schwarzschild es una solución estática, asintóticamente plana y esféricamente simétrica de las ecuaciones de campo de Einstein-Maxwell dadas por

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (4.1)$$

Donde  $G_{\mu\nu}$  es el tensor de Einstein y  $T_{\mu\nu}$  es el tensor momentum-energía de Maxwell, el lado izquierdo de la ecuación describe la geometría del espaciotiempo y el lado derecho describe la distribución distribución de materia y energía  $G_{\mu\nu}$  viene dado por

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad (4.2)$$

Donde el escalar de Ricci ( $R$ ) es cero debido a que se considera el vacío y el tensor momentum-energía  $T_{\mu\nu}$  es 0

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} \quad (4.3)$$

equivalente a

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (4.4)$$

Debido a la simetría esférica se puede escribir la métrica en forma Minkowskiana en coordenadas esféricas como

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (4.5)$$

Cuando se incluye la masa se produce una perturbación en el espaciotiempo y la métrica se modifica de la siguiente forma

$$ds^2 = A dt^2 - B dr^2 - r^2(C d\theta^2 + D \sin^2\theta d\phi^2) \quad (4.6)$$

Por simetría esférica  $C = D = 1$ , puesto que las componentes angulares no se modifican, debido a que la métrica debe ser asintóticamente plana y se debe conservar la asignatura  $-2$  definiendo  $A$  y  $B$  como funciones intrínsecamente positivas

$$A = e^{\nu(r)} \quad B = e^{\lambda(r)} \quad (4.7)$$

Por lo tanto

$$ds^2 = e^{\nu(r)} dt^2 - e^{\lambda(r)} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (4.8)$$

y el tensor métrico queda de la forma

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

y el tensor contravariante se halla a partir de

$$g_{\mu\nu} g^{\nu\varphi} = \delta_{\mu}^{\varphi} \quad (4.10)$$

Donde

$$\delta_{\mu}^{\varphi} = \begin{bmatrix} 1 & si & \varphi = \mu \\ 0 & si & \varphi \neq \mu \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

obteniendo así el tensor métrico contravariante

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

De acuerdo a la ecuación 4.4 se halla el tensor de curvatura de Ricci  $R_{\mu\nu}$  que está definido como

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\beta\nu}^{\beta}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\beta}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma_{\tau\mu}^{\beta} \Gamma_{\beta\nu}^{\tau} - \Gamma_{\tau\beta}^{\beta} \Gamma_{\mu\nu}^{\tau} \quad (4.13)$$

donde los símbolos de Christoffel estan definidos de la siguiente manera

$$\Gamma_{db}^a = \frac{1}{2} g^{ca} \left( \frac{\partial g_{dc}}{\partial x^b} + \frac{\partial g_{cb}}{\partial x^d} - \frac{\partial g_{bd}}{\partial x^c} \right) \quad (4.14)$$

Por lo tanto los únicos símbolos de Christoffel que son diferentes de cero son:

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \frac{1}{2} v', & \quad \Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2} e^{\nu-\lambda} v', & \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} \lambda' \\ \Gamma_{22}^1 = -e^{-\lambda} r, & \quad \Gamma_{33}^1 = -e^{-\lambda} \sin^2 \theta r, & \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta & \quad \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r} & \quad \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \cot \theta \end{aligned} \quad (4.15)$$

Al obtener los símbolos de Christoffel, se utiliza la ecuación 4.14 para hallar  $R_{\mu\nu}$ , donde  $R_{\mu\nu} = 0$  cuando  $\mu \neq \nu$

Para  $R_{00}$

$$R_{00} = \frac{\partial \Gamma_{\beta 0}^{\beta}}{\partial x^0} - \frac{\partial \Gamma_{00}^{\beta}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma_{\tau 0}^{\beta} \Gamma_{\beta 0}^{\tau} - \Gamma_{\tau \beta}^{\beta} \Gamma_{00}^{\tau} \quad (4.16)$$

$$R_{00} = e^{\nu-\lambda} \left( -\frac{1}{4}(\nu')^2 + \frac{1}{4}\nu'\lambda' - \frac{1}{2}\nu'' - \frac{\nu'}{r} \right)$$

Para  $R_{11}$

$$R_{11} = \frac{\partial \Gamma_{\beta 1}^{\beta}}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma_{11}^{\beta}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma_{\beta 1}^{\beta} \Gamma_{\beta 1}^{\tau} - \Gamma_{\tau \beta}^{\beta} \Gamma_{11}^{\tau} \quad (4.17)$$

$$R_{11} = \frac{1}{2}\nu'' + \frac{1}{4}(\nu')^2 - \frac{1}{2}\nu'\lambda' - \frac{1}{r}\lambda'$$

Para  $R_{22}$

$$R_{22} = \frac{\partial \Gamma_{\beta 2}^{\beta}}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma_{22}^{\beta}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma_{\tau 2}^{\beta} \Gamma_{\beta 2}^{\tau} - \Gamma_{\tau \beta}^{\beta} \Gamma_{22}^{\tau} \quad (4.18)$$

$$R_{22} = e^{-\lambda} \left( -\frac{1}{2}\lambda'r + \frac{1}{2}\nu'r + 1 \right) - 1$$

Para  $R_{33}$

$$R_{33} = \frac{\partial \Gamma_{\beta 3}^{\beta}}{\partial x^3} - \frac{\partial \Gamma_{33}^{\beta}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma_{\tau 3}^{\beta} \Gamma_{\beta 3}^{\tau} - \Gamma_{\tau \beta}^{\beta} \Gamma_{33}^{\tau} \quad (4.19)$$

$$R_{33} = \sin^2\theta \left( e^{-\lambda} - \frac{1}{2}r\lambda'e^{-\lambda} + \frac{1}{2}r\nu'e^{-\lambda}r - 1 \right)$$

Ahora se resuelve las ecuaciones de campo dadas en la ecuación 4.4

$$R_{00} = 0$$

$$e^{\nu-\lambda} \left( -\frac{1}{4}(\nu')^2 + \frac{1}{4}\nu'\lambda' - \frac{1}{2}\nu'' - \frac{\nu'}{r} = 0 \right) \quad (4.20)$$

$$-\frac{1}{4}(\nu')^2 + \frac{1}{4}\nu'\lambda' - \frac{1}{2}\nu'' - \frac{\nu'}{r} = 0$$

$$R_{11} = 0$$

$$\frac{1}{2}\nu'' + \frac{1}{4}(\nu')^2 - \frac{1}{2}\nu'\lambda' - \frac{1}{r}\lambda' = 0 \quad (4.21)$$

Sumando la ecuaciones 4.20 y 4.21

$$\lambda' + \nu' = 0$$

$$\int \lambda' = - \int \nu' \quad (4.22)$$

$$\lambda = -\nu + cte$$

$$\lambda + \nu = cte$$

Por la condición de frontera  $cte = 0$ , entonces

$$\lambda = -\nu \quad (4.23)$$

$$R_{22} = 0$$

$$e^{-\lambda} \left( -\frac{1}{2}\lambda'r + \frac{1}{2}\nu'r + 1 \right) - 1 \quad (4.24)$$

Usando las ecuaciones 4.22 y 4.23

$$e^\nu \left( -\frac{1}{2}\nu'r + \frac{1}{2}\nu'r + 1 \right) - 1 = 0$$

$$e^\nu(1 + \nu'r) = 1$$

$$\frac{d}{dr}(re^\nu) = 1 \tag{4.25}$$

$$\int d(re^\nu) = \int dr$$

$$re^\nu = r + cte$$

$$e^\nu = 1 + \frac{cte}{r}$$

con  $cte = \frac{2GM}{c^2}$

$$e^\nu = 1 - \frac{2GM}{c^2r} \tag{4.26}$$

Donde  $M$  es la masa geométrica en unidades de longitud. Por lo tanto la métrica que se obtiene, conocida como la métrica de Schwarzschild es:

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2GM}{c^2r} \right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\left( 1 - \frac{2GM}{c^2r} \right)} + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \tag{4.27}$$

# Apéndice B

## Código Computacional C++

El código del programa de simulación se realizó en wxDEV-C++ 6.10.2, mediante el lenguaje C++, se establecieron como condiciones iniciales el número de ecuaciones, el tamaño de paso y una constante llamada masa, teniendo en cuenta el problema a resolver se declararon las funciones (en este caso se trabajó el método numérico Runge-Kutta de cuarto orden)<sup>1</sup>después se encuentra el cuerpo del programa donde se estableció un .txt y .plt el primero arroja en un block de notas con datos obtenidos de acuerdo al desarrollo del programa, es decir, dependiendo de las variables que se introdujo al programa y el segundo es el ejecutable de Gnuplot para visualizar la gráfica obtenida.

Por otro lado se define los datos que se introduzcan en el ejecutable y se deja establecido la fórmula para hallar la velocidad esto es de acuerdo a la  $\sqrt{\frac{M}{R}}$ , asimismo se deja establecido que cantidad de datos se puede introducir y en que rango, si pasan de los establecidos el programa se rompe, es decir, no ejecuta. Como se visualizará una gráfica se establece la dirección, el rango de la gráfica, el tamaño de la ventana, los datos que se desean graficar y la permanencia de la ventana abierta, esto ayuda a que la ventana de la gráfica se puede cerrar cuando la persona guste. Por último se escribe el método Runge-Kutta de cuarto orden y con base a eso se definen las ecuaciones que se van a utilizar a trabajar.

---

<sup>1</sup>El método numérico Runge-Kutta es uno de los procedimientos más exactos para solucionar las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden con condiciones iniciales. Existen diferentes órdenes del método que son a partir del desarrollo de  $y(x_n + h)$  en serie de Taylor (Mora, 2004).

```
1 #include <iostream>
```

```
2 #include <fstream>
```

```
3 #include <cmath>
```

```
4 using namespace std;
```

### **Definición de constantes**

```
5 const int N = 4; // número de ecuaciones
```

```
6 const double STEP_SIZE = 0.1; // tamaño de paso
```

```
7 const double M=1; // masa
```

### **Declaración de funciones**

```
8 void rungeKutta4 (const double & x, double y[], const double & h, const int & nNum);
```

```
9 double f(const double & x, const double y[], const int & i);
```

```
10 int main(void)
```

```
11 {
```

```
12     ofstream f("r_17_v_14e-5.txt"),c("r_17_v_14e-5.plt");
```

```
13     double x, y[N], R, MAX_X, v;
```

```
14     int i, w;
```

```
15     MAX_X=5000;
```

```
16     cout<<"UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL"<<endl;
```

```
17     cout<<"FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGIA"<<endl;
```

```
18     cout<<"DEPARTAMENTO DE FÍSICA"<<endl;
```

```
19     cout<<" "<<endl;
```

```
20     cout<<"BIENVENIDO AL PROGRAMA DE SIMULACIÓN DEL MOVIMIENTO  
PLANETARIO"<<endl;
```

```

21     cout<<" "<<endl;
22     cout<<"El programa te mostrará la gráfica de una órbita de un planeta con los
    datos"<<endl;
23     cout<<"que introduzcas, debes tener en cuenta la gráfica que deseas"<<endl;
24     cout<<endl;
25     cout<<endl;
26     cout<<"De el valor de r inicial (mayor que 0.01 y menor a 17) ";cin>>R;
27     y[3]=0; // velocidad
28     cout<<"La velocidad angular de circunferencia es "<<sqrt(M/R)/R<<endl;
29     cout<<"Desea cambiarla? (s=1/n=0) ";cin>>w;
30     if(w==0) y[3]=sqrt(M/R)/R;
31     if(w==1) cin>>y[3];
32     y[0]=R; // posición radial
33     y[1]=0; // velocidad radial
34     y[2]=0; // posición angular
35     for(x = 0; x <= MAX_X; x += STEP_SIZE){
36         f<<x<<" "<<y[0]<<" "<<y[1]<<" "<<y[2]<<" "<<y[3]<<endl;
37         rungeKutta4 (x, y, STEP_SIZE, N);
38         if (y[0]<0.01 || y[0]>20 || y[0] == 2*M) break;
39     }
40     f.close();

```

### **Parámetros para graficar en gnuplot**

```

41     c<<"unset key"<<endl;
42     c<<"set polar"<<endl;
43     c<<"set grid polar"<<endl;

```

```

44     c<<<"set xrange[0:20]"<<<endl;
45     c<<<"set size ratio -1"<<<endl;
46     c<<<"plot 'r_17_v_14e-5.txt' u 4:2 w l"<<<endl;
47     c<<<"pause -1"<<<endl;
48     c.close();
49     return 0;
50 }

```

### **Método numérico Runge-Kutta**

```

51 void rungeKutta4(const double & x, double y[], const double & h, const int & nNum)
52 {
53     double hHalf=h/2.0,
54           t1[nNum], t2[nNum], t3[nNum],
55           k1[nNum], k2[nNum], k3[nNum],k4[nNum];
56     int i;

57     for (i=0; i<nNum; i++) t1[i] = y[i]+0.5*(k1[i]=h*f(x, y, i));
58     for (i=0; i<nNum; i++) t2[i] = y[i]+0.5*(k2[i]=h*f(x+hHalf, t1, i));
59     for (i=0; i<nNum; i++) t3[i] = y[i]+    (k3[i]=h*f(x+hHalf, t2, i));
60     for (i=0; i<nNum; i++) k4[i] =          h*f(x + h, t3, i);

61     for (i=0; i<nNum; i++) y[i] += (k1[i]+2*k2[i]+2*k3[i]+k4[i])/6.0;
62 }

```

### **Definición de las ecuaciones de la trayectoria de la partícula**

```

63 double f(const double & x, const double y[], const int & i){
64     if (0 == i) return y[1];

```

```
65     else{
66         if (1 == i) return (4*pow(M,3)4*M*M*y[0]4*M*M*pow(y[0],3)*y[3]*y[3]
+ 4*M*pow(y[0],4)*y[3]*y[3]-pow(y[0],5)*y[3]*y[3]+y[0]*y[0]*M*(1-3*y[1]*y[1])) /
(2*M-y[0])/pow(y[0],3);
67     else{
68         if (2 == i) return y[3];
69         else return 2*(-3*M+y[0])*y[1]*y[3]/(2*M-y[0])/y[0];
70     }
71 }
72 }
```

# Apéndice C

## Módulo didáctico: Movimiento Planetario

**I TEORÍAS DEL MOVIMIENTO PLANETARIO EN LA ANTIGÜEDAD**

**Objetivo**

Identificar el planteamiento histórico del movimiento planetario ideado por el hombre.

1. Discutan en grupos la importancia que tienen las teorías del movimiento planetario en la antigüedad y que implicaciones tienen hasta el día de hoy.

---

---

---

---

---

---

---

2. Se encuentran en la época de los filósofos griegos y desean exponer el modelo que más le ha gustado.

Desde su experiencia ¿Cómo argumentarían esa presentación frente a una comunidad científica (Filósofos)?.



---

---

---

---

---

---

---

3. El sistema geocéntrico argumenta:

---

---

---

---

---



---

---

---

4. El sistema Heliocentrico argumenta:

---

---

---

---

---

---

---

5. De acuerdo con lo anterior crea una teoría acorde a la época y expóngala frente a tus compañeros.



6. Realizar una caricatura con la teoría que más le gustó y explica porqué la escogió.



---

## *II FORMULACIÓN DE LAS LEYES DE KEPLER*

### **Objetivo**

Asociar y comparar las teorías planteadas anteriormente vistas con las leyes de Kepler.

Johannes Kepler (1571-1630) interesado por continuar el trabajo de su maestro Tycho, decidió continuar las observaciones, llevándolo a preguntarse ¿Cómo la trayectoria de los planetas conocidos representan figuras geométricas?

1. En grupos definan ¿qué es una elipse y cuáles son sus componentes? Dibújenla.



Kepler anunció las dos primeras leyes en 1609, año en el que Galileo construyó su primer telescopio.



2. Analicen que datos debió tener en cuenta Kepler para el planteamiento de las leyes. A partir de esto construyan hipótesis para el planteamiento de las leyes.



3. Teniendo en cuenta la hipótesis realizada, discutan con sus compañeros cual es la más viable y ¿por qué?

---

---

---

---

---

---

---

### **Leyes de Kepler**

1. Los planetas se mueven en órbitas elípticas, con el Sol en uno de los puntos focales.
2. Una línea de Sol a un planeta barre áreas iguales en lapsos de tiempos iguales.
3. El cuadrado del periodo orbital de un planeta es directamente proporcional al cubo de la distancia promedio entre el planeta y el Sol.

*Tomado del libro "Física" (Wilson, buffa & Lou, 2007)*

4. Evalúen hasta donde sea posible la contribución de Kepler en la teoría heliocéntrica.

---

---

---

---

---

---

---



Las Leyes del movimiento planetario de Kepler tardaron 15 años en deducir a partir de los datos observados.

5. Después de realizar el análisis de las hipótesis, la contribución de las leyes y reconocer las leyes de Kepler. Observen que planteamiento tuvieron mal y que correcciones se pueden realizar.

---

---

---

---

---

---

---

### III LA LEY DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL

#### Objetivo

Interpretar la ley de gravitación universal para el movimiento planetario.

Newton (1642-1727), desarrollo la Ley de Gravitación Universal mientras estudiaba el movimiento orbital de la Luna, según la leyenda mientras Newton estudiaba le cayó una mañana, esto estimuló a que se realizara la siguiente pregunta ¿Si la fuerza que hace que la manzana acelere hacia el suelo, podría extenderse hacia la Luna y hacerla caer o acelerar hacía la Tierra?



Imagen tomada de:  
<http://eresfisicoynolosabes.blogspot.com/>

1. ¿Qué Hipótesis se pueden formular a partir de la situación?

---

---

---

---

---

---

---

2. Deduzca la Ley Gravitacional Universal a partir de la definición de fuerza y teniendo en cuenta que la aceleración normal o centrípeta es:

$$\vec{a}_n = \frac{\vec{v}^2}{r}$$



3. Confrontar y revisar las hipótesis formuladas anteriormente, justificando si es verdadera o si es falsa.

---

---

---

---

---

---

---

---

4. ¿Cómo interpretar la interacción de dos cuerpos con la Ley de Gravitación Universal?, ¿Cómo afectan sus masas? y ¿Qué pasaría si la distancia aumenta o disminuye?



5. Qué resultados se puede discutir con los compañeros para llegar a una conclusión del tema.
6. Por último ingrese a la página:  
<http://e-ducativa.catedu.es/44700165/aula/archivos/repositorio/3000/3225/html/index.html> y compare lo que ha aprendido hasta ahora.

### III POSTULADOS DE LA RELATIVIDAD

#### Objetivo

Analizar y comparar la teoría clásica del movimiento planetario con los postulados de la relatividad.

**Nota:** Se puede realizar una lectura previa del libro *El abc de la Relatividad* de Bertrand Russell



Imágenes tomadas de “Albert Einstein el hombre, el científico, el ciudadano” (Planetario de Bogotá, 2006)

1. De acuerdo a las imágenes que diferencia encuentra entre el planteamiento de Newton y el planteamiento de Einstein.

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

2. De acuerdo a la situación anterior, plantea una hipótesis de lo que es relatividad.

---

---

---

---

---

---

---

---

3. Teniendo en cuenta la hipótesis realizada, discutan con sus compañeros cual es la más viable y ¿por qué?

---

---

---

---

---

---

---

---

**Postulados de la Relatividad Especial (TER):**

1. *Las leyes físicas son independientes del sistema de referencia inercial.*
2. *La velocidad de la luz en el vacío es constante.*

*Según (Tejeiro, 2004)*



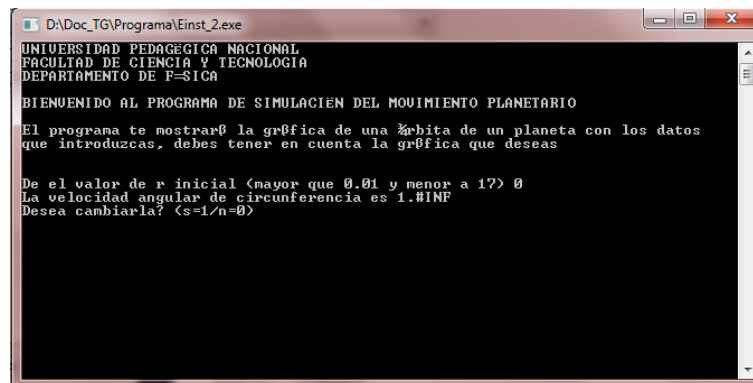
#### IV MOVIMIENTO PLANETARIO CLÁSICO Y RELATIVISTA

##### Objetivo

Analizar y comparar la teoría clásica y relativista del movimiento planetario, a través de un programa desarrollado en wxDEV-C++.

A continuación se trabajará una simulación de la trayectoria de un planeta bajo ciertas condiciones, los pasos a seguir para trabajar en el programa son los siguientes:

- ✓ El programa tiene un ejecutable que indicará los datos que debe suministrar como se muestra a continuación:



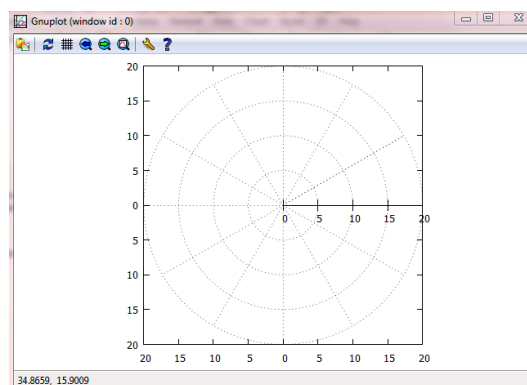
```
D:\Doc_TG\Programa\Einst_2.exe
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

BIENVENIDO AL PROGRAMA DE SIMULACIÓN DEL MOVIMIENTO PLANETARIO

El programa te mostrará la gráfica de una órbita de un planeta con los datos
que introduzcas, debes tener en cuenta la gráfica que deseas

De el valor de r inicial <mayor que 0.01 y menor a 17> 0
La velocidad angular de circunferencia es 1.#INF
Desea cambiarla? <s=1/n=0>
```

- ✓ Las gráficas son visualizadas por medio del programa gnuplot. Debe tener instalado éste software libre.



- ✓ El programa genera un .txt, donde aparecerán los datos recogidos tiempo, radio, masa y velocidad angular.
- ✓ Adicional puede modificar directamente el código del programa si así lo desea, pero debe tener en cuenta que debe tener instalado wxDEV-C++.
- ✓ Los datos que se manejan en el programa se trabajan de forma adimensional.

1. De acuerdo a lo que se ha trabajado anteriormente, ¿Qué hipótesis puede formular o qué espera ver en la simulación?

---



---



---



---



---



---



---



---

2. Teniendo en cuenta la anterior pregunta debe confrontarla con los resultados obtenidos por el programa, pero debe introducir en el ejecutable los siguientes datos:

Radio	Velocidad angular	
	<b>Intervalos de</b>	<b>0</b>
<b>1</b>	0.14 – 0.16	x
<b>0.01</b>	90 – 101	x
<b>2</b>	0.36 – 0.42	x
<b>5</b>	0.001 - 0.01	x
<b>9</b>	0.02 – 0.04	x
<b>14</b>	0.0001 – 0.002	x
<b>17</b>	0.001 – 0.003	x



---

**Nota:** Debe tener en cuenta que la velocidad la puede cambiar tecleando el número 1 ó puede dejar la que calculó el programa tecleando el número 0.

3. Indique con que datos salieron orbitas circulares y orbitas elípticas, si éstas son cerradas o abiertas y que tienen en común para que salgan así.

---

---

---

---

---

---

---

---

4. Ahora pruebe con radios menores a 0.01 y mayores a 17. Explique lo que sucede.

---

---

---

---

---

---

---

---

5. ¿Qué pasaría si el valor de la velocidad para cuando el radio es 17 es igual ó mayor que 1?

---

---

---

---

---

---

---

---

6. Para este punto se debe cambiar la masa en el programa como se muestra a continuación:



```
// Constant definitions  
//  
const int N = 4; // number of equations  
const double STEP_SIZE = 0.1; // tamaño de paso  
const double M=0.01; // Masa
```

Las masas que se utilizarán van de 0.0001 hasta 110.

- Primero dejándolas con la velocidad calculada por el programa y luego variando con valores mayores y menores al obtenido.
7. Indique con que datos salieron orbitas circulares y orbitas elípticas, si estas son cerradas o abiertas y que tienen en común para que salgan así.

---

---

---

---

---

---

---

---

8. Ahora pruebe con masas mayores a 110. Explique lo que sucede.

---

---

---

---

---

---

---

---

9. De los datos obtenidos en las gráficas por la variación del radio, la velocidad y la masa. ¿Qué se puede concluir?

---

---

---

---

---

---

---

---



---

**LECTURAS COMPLEMENTARIAS**

**PRIMERAS TEORÍAS**

Las primeras teorías sobre el origen y funcionamiento del Universo aparecen en la antigua Grecia:

- Para Anaximandro (siglo VII a.C.), la Tierra era de forma cilíndrica y estaba rodeada de una neblina en la que de forma ocasional se abrían agujeros (el sol, la luna y las estrellas) y entonces se podía ver que más allá brillaban el fuego y la luz.
- Filolao de Tarento (siglo V a.C.) formula la idea de una Tierra esférica, único modelo capaz de explicar distintos fenómenos observables.
- Platón (siglo IV a.C.) elaboró la *Teoría Geocéntrica del Universo*, basada en los siguientes axiomas:
  - ✓ La Tierra, esférica, ocupa el centro del Universo.
  - ✓ Los cuerpos celestes son de carácter divino y se mueven en torno a la Tierra con movimientos circulares uniformes.
- La visión del Universo que daba Platón no explicaba las observaciones de los movimientos que los planetas describían en el cielo. Para explicarlos, Eudoxo de Cnido (408-355 a.C.) amplía el modelo de Platón, introduciendo la *teoría de las esferas*, según la cual cada astro es llevado en su giro en torno a la Tierra por una esfera cuyos polos eran llevados por otra esfera concéntrica con la primera que giraba con velocidad uniforme (distinta de la de la primera) alrededor de dos polos distintos de los primeros. Eudoxo necesitó 27 esferas para explicar los movimientos del Universo.
- Aristóteles (384-322 a.C.) aumentó el número de esferas hasta llegar a 55. Las ideas aristotélicas sobre el Universo explicaban los movimientos planetarios suponiendo que los astros estaban en esferas concéntricas. El Universo está constituido por dos regiones esféricas separadas y concéntricas (el *mundo sublunar* y el *mundo supralunar*). La Tierra ocupa el centro en la región de los elementos, donde el elemento fuego se superpone al aire, éste al agua y éste al elemento tierra. Más allá en la esfera lunar se encuentra la región etérea de los cielos, cuyo elemento es la inalterable quinta esencia. Los movimientos aquí son circulares y perpetuos.

**ATENAS**

Con el debilitamiento de Atenas, se inicia en la cultura griega la etapa helenística o alejandrina. Con ella, el nuevo astrónomo desarrollaba un verdadero programa de investigación y valoraba la observación sistemática y cotidiana. Construyen numerosos instrumentos, perfeccionan otros e inventan diversas herramientas matemáticas que les permiten llegar a soluciones concretas, expresadas mediante ecuaciones y magnitudes reales:

- Aristarco de Samos (310-230 a.C.) ideó métodos matemáticos para calcular la relación entre los diámetros de la Tierra y la Luna, la distancia entre la Tierra y la Luna (en función del diámetro de la Tierra) y la distancia entre la Tierra y el Sol (en relación a la distancia entre la Tierra y la Luna). La imprecisión de los instrumentos de medida utilizados le condujo a la obtención de valores bastante inexactos, aunque los métodos son absolutamente correctos. Mantenía la teoría de un modelo heliocéntrico, con la idea de un Universo en el que el centro del sistema planetario

es el Sol en torno al cual giran la Tierra y el resto de los planetas excepto la Luna, que gira en torno a la Tierra. Esta idea no llegó a tener éxito porque era demasiado prematura para su cultura.

- Eratóstenes de Cirene (273-194 a.C.), sucesor del anterior, ideó un método para medir la circunferencia máxima terrestre y, por tanto, el diámetro de la Tierra.
- Hiparco (siglo II a.C.) estudió el movimiento del Sol, observando que no tiene siempre la misma velocidad. Propuso un modelo según el cual el Sol se mueve en un círculo, que llamó epiciclo; el centro del epiciclo a su vez se mueve en torno a la Tierra, describiendo otro círculo llamado deferente. Calculó la distancia Tierra-Luna, utilizando el diámetro de la Tierra calculado por Eratóstenes y la relación de Aristarco.
- Tolomeo (siglo II d.C.) continuó el trabajo de Hiparco. Construyó un modelo centrado en la Tierra, denominado geocéntrico, que describió en su obra *Almagesto*. En esencia describía el movimiento del Sol con una trayectoria aproximadamente circular y período de un año. El movimiento de los planetas tenía que justificarse como un movimiento compuesto, similar al de un punto animado de un movimiento de rotación alrededor de un punto, que a su vez se desplaza en una órbita circular alrededor de la Tierra. La órbita solar se denomina eclíptica y la del planeta alrededor de su centro, epiciclo. Estas suposiciones permitían predecir los eclipses de Sol y de Luna, movimientos planetarios, etc.

Tolomeo admitió que las observaciones de estos movimientos podían ser también explicadas suponiendo la revolución alrededor de la Tierra de 24 horas de este a oeste de la esfera de las estrellas fijas, o al revés, de la Tierra de oeste a este en el mismo tiempo.

El modelo geocéntrico dominó la astronomía hasta la aparición de los escritos de Copérnico (1473-1543). El mismo año de su muerte fue publicado su libro *De revolutionibus orbium caelestium*. En él se proponía una nueva ordenación del Universo conocido diferente de la del modelo de Tolomeo.

*Artículo Tomado de "La posición de la Tierra en la historia"*

[http://www.cielodeguadaira.org/index.php?option=com\\_content&task=view&id=220&Itemid=26](http://www.cielodeguadaira.org/index.php?option=com_content&task=view&id=220&Itemid=26)

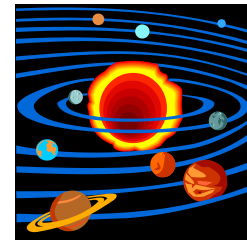
## **FUERZAS DE LA NATURALEZA**

Las partículas portadoras de fuerzas se pueden agrupar en cuatro, de acuerdo con la intensidad de las fuerzas que transmiten y con el tipo de partículas con las que interactúan. Es necesario señalar que esta división en cuatro clases es una creación artificiosa del hombre; resulta conveniente para la construcción de teorías parciales, pero puede no corresponder a nada más profundo. En el fondo, la mayoría de los físicos esperan encontrar una teoría unificada que explica las cuatro fuerzas, como aspectos diferentes de una única fuerza. En verdad, muchos dirían que este es el objetivo principal de la física contemporánea. Recientemente, se han realizado con éxito diversos intentos de unificación de tres de las cuatro categorías de fuerza.

La primera categoría es la fuerza gravitatoria. Esta fuerza es universal en el sentido de que toda partícula la experimenta, de acuerdo con su masa y energía. La gravedad es más débil, con diferencia, de las cuatro fuerzas; es tan débil que no la notamos en absoluto si no fueran por dos propiedades especiales que posee: puede actuar a grandes distancias, y es siempre atractiva. Esto explica que las muy débiles fuerzas gravitatorias entre las partículas individuales de dos cuerpos grandes, como la Tierra y el Sol, pueden sumarse todas y producir una fuerza total significativa.

Las otras tres fuerzas o bien son de corto alcance, desde el punto de vista mecánico - cuántico de considerar el campo gravitatorio, la fuerza entre dos partículas materiales se representa transmitida por una partícula de espín llamada gravitón. Esta partícula no posee masa propia, por lo que la fuerza que trasmite es de largo alcance. La fuerza gravitatoria entre el Sol y la Tierra se atribuye al intercambio de gravitones entre las partículas que forman estos dos cuerpos. Aunque las partículas intercambiadas son virtuales, producen ciertamente un efecto medible: ¡hacen girar la tierra alrededor del sol!. Los gravitones reales constituyen lo que los físicos clásico llamarían ondas gravitatorias, que son muy débiles, y tan difíciles de detectar que aún no han sido observadas.

La siguiente categoría es la fuerza electromagnética, que interactúa con las partículas cargadas eléctricamente, como los electrones y los quarks, pero no con las partículas sin carga como son los gravitones. Es mucho más intensa que la fuerza gravitatoria: la fuerza electromagnética entre dos electrones es aproximadamente un millón de billones de billones de billones (un 1 con cuarenta y dos ceros detrás) de veces mayor que la fuerza gravitatoria. Sin embargo, hay dos tipos de carga eléctrica, positiva y negativa. La fuerza entre dos cargas positivas es repulsiva, al igual que la fuerza entre dos cargas negativas, pero la fuerza es atractiva entre una carga positiva y una negativa. Un cuerpo grande como la Tierra o el Sol, contiene casi el mismo número de cargas positivas y negativas. Así, las fuerzas atractiva y repulsiva entre las partículas individuales casi se cancelan entre sí, resultando una fuerza electromagnéticamente muy débil. Sin embargo, a distancia pequeñas, típicas de átomos y moléculas, las fuerzas electromagnéticas dominan. La atracción electromagnética los electrones cargados negativamente y los protones del núcleo cargados positivamente hace que los electrones giren alrededor del núcleo del átomo, igual que la atracción gravitatoria hace que la Tierra gire alrededor del sol.



La tercera categoría es la llamada fuerza nuclear débil, que es la responsable de la radioactividad y que actúa sobre todas las partículas materiales de espín  $\frac{1}{2}$ , pero no sobre las partículas de espín 0, 1 ó 2, tales como los fotones y gravitones. La fuerza nuclear débil no se comprendió bien hasta 1967, en que Abdus Salam, del Imperial College de Londres, y Steven Weinberg, de Harvard, propusieron una teoría que unificaba esta interacción con la fuerza electromagnética, de la misma manera que Maxwell había unificado la electricidad y el magnetismo unos cien años antes. Surgieron que además del fotón había otras tres partículas de espín 1, conocidas colectivamente como bosones vectoriales masivos, que transmiten la fuerza débil. Estas partículas se conocen como  $W^+$  (que se lee W mas),  $W^-$  (que se lee W menos) y  $Z^0$  (que se lee Z cero), y cada una posee una masa de unos 100 GeV (GeV es la abreviatura de giga electrón-voltio, o mil millones de electrón-voltios).

La teoría de Weinberg-Salam propone una propiedad conocida como ruptura de simetría espontánea. Esto quiere decir que lo que, a bajas energías, parece ser un cierto número de partículas totalmente diferentes es, en realidad, el mismo tipo de partículas, solo que en estados diferentes. A altas energías todas estas partículas se comportan de una manera similar. El efecto es parecido al comportamiento de una bola de ruleta sobre la rueda de la ruleta. A altas energías (cuando la rueda gira rápidamente) la bola se comporta esencialmente de una única manera, girando dando vueltas una y otra vez. Pero conforme a la rueda se va frenando, la energía de la bola disminuye, hasta que al final la bola se para en uno de los treinta y siete casilleros de la rueda. En otras palabras, a bajas energías hay treinta y siete estados diferentes en los que la bola puede existir. Si por algún motivo, solo pudiéramos ver la bola a bajas energías, entonces ¡pensaríamos que había treinta y siete tipos diferentes de bolas!

En la teoría Weinberg-Salam, a energías mayores de 100 GeV, las tres nuevas partículas y el fotón se comportarían todas de una manera similar. Pero a energías más bajas, que se dan en la mayoría de las situaciones normales, esta simetría entre partículas se rompería.  $W^+$ ,  $W^-$  y  $Z^0$  adquirirán grandes masas, haciendo que la fuerza que transmiten fuera muy corto alcance. En la época en que Salam y Weinberg propusieron su teoría, poca gente les creyó y, al mismo tiempo, los aceleradores de partículas no eran lo

---

suficientemente potentes como para alcanzar las energías de 100 GeV requeridas para producir partículas  $W^+$ ,  $W^-$  o  $Z^0$  reales.

No obstante, durante los diez años siguientes, las tres predicciones de la teoría a bajas energías concordaron también con los experimentos que, en 1979, Salam y Weinberg fueron galardonados con el premio nobel de física, junto con Sheldon Glashow, también de Harvard, que había sugerido una teoría similar de unificación de las fuerzas electromagnéticas y nucleares débiles. El comité de los premios nobel se salvó del riesgo de haber cometido un error al descubrirse, en 1983 en el CERN (Centro Europeo para la Investigación Nuclear), las tres partículas con masa compañeras del fotón, y cuyas masas y demás propiedades estaban de acuerdo con las predichas por la teoría. Carlo Rubbia, que dirigía el equipo de varios centenares de físicos que hizo el descubrimiento, recibió el premio Nobel, junto con Simón Van der Meer, el ingeniero del CERN que desarrollo el sistema de almacenamiento de antimateria empleado.

El éxito de la unificación de las fuerzas electromagnéticas nucleares débiles produjo un cierto número de intentos de combinar estas dos fuerzas con la interacción nuclear fuerte, en lo que se ha llamado teorías de gran unificación (o TGU). Dicho nombre es bastante ampuloso: las teorías resultantes ni son tan grandes, ni están totalmente unificadas, pues no incluyen la gravedad. Ni siquiera son realmente teorías completas, porque contienen un tipo de parámetros cuyos valores no pueden deducirse de la teoría, sino que tienen que ser elegidos de forma que se ajusten a los experimentos. No obstante, estas teorías pueden constituir un primer paso hacia una teoría completa y totalmente unificada.

La idea básica de las TGU es la siguiente: como se mencionó arriba, la interacción nuclear fuerte se hace menos intensa a altas energías; por el contrario, las fuerzas electromagnéticas y débiles, que no son asintóticamente libres, se hacen más intensas a altas energías. A determinada energía muy alta, llamada energía de la gran unificación, estas tres fuerzas deberían tener todas la misma intensidad y solo se, por lo tanto, aspectos diferentes de una única fuerza. Las TGU predicen, además, que a esta energía las diferentes partículas materiales de espín  $\frac{1}{2}$ , como los quarks y los electrones, también serían iguales, y se conseguirían así otra unificación.

El valor de la energía de la gran unificación no se conoce demasiado bien, pero probablemente tendrá que sé cómo mínimo de mil billones de GeV. La generación actual de aceleradores de partículas puede hacer colisionar partículas con energías aproximadamente 100 GeV, y están planeadas unas máquinas que elevarían estas energías a unos pocos de miles de GeV. Pero una máquina que fuera lo suficientemente potente como para acelerar partículas hasta la energía de la gran unificación tendrá que ser tan grande como el sistema solar, y sería difícil que obtuviese financiación en la situación económica presente.

Así pues, es imposible comprobar las teorías de gran unificación directamente en el laboratorio. Sin embargo, al igual que en el caso de la teoría unificada de las interacciones electromagnética y débil, existen consecuencias a baja energía de la teoría que si puede ser comprobada.

La más interesante de ellas es la predicción de que los protones, que constituyen gran parte de la masa de la materia ordinaria, pueden decaer espontáneamente en partículas más ligeras, tales como antielectrones.

Esto es posible porque la energía de la gran unificación no existe ninguna diferencia esencial entre un quark y un antielectrón, los tres quarks que conforman el protón no tienen normalmente la energía necesaria para poder transformarse en antielectrones, pero muy ocasionalmente alguno de ellos podría adquirir suficiente energía para realizar la transición, porque el principio de incertidumbre implica que la energía de los quarks dentro del protón no puede estar fijada con exactitud. El protón decaería entonces. La probabilidad de que un quark gane la energía suficiente para esa transición es tan baja que probablemente tendríamos que esperar como mínimo un millón de billones de años (un 1 seguido de treinta ceros). Este periodo es más largo que el tiempo transcurrido desde el big bang, que son unos meros diez mil millones de años aproximadamente (un 1 seguido de nueve ceros).

Así, se podría pensar que la posibilidad de desintegración espontánea del protón no se puede medir experimentalmente. Sin embargo, uno puede aumentar las probabilidades de detectar una desintegración, observando una gran cantidad de materia con un número elevadísimo de protones. (Si por ejemplo, se observa un número de protones igual al de 1 seguido de treinta y un ceros por un periodo de un año, se esperaría, de acuerdo con la TGU más simple, detectar más de una desintegración del protón).

La cuarta categoría de fuerza es la interacción nuclear fuerte, que mantiene a los quarks unidos en el protón, y a los protones y neutrones juntos en los núcleos de los átomos. Se cree que esta fuerza es transmitida por otra partícula de espín 1, llamada glucon, que solo interactúa consigo misma y con los quarks. La interacción nuclear posee una curiosa propiedad llamada confinamiento: siempre ligan a las partículas en combinaciones tales que el conjunto tal no tiene color.

No se puede tener un único quark aislado porque tendría un color (rojo, verde, o azul). Por el contrario, un quark rojo tiene que juntarse con un quark verde y uno azul por medio de una “cuerda” glucones (rojo + verde + azul = blanco). Un triplete así constituye un protón o un neutrón. Otra posibilidad es un par consiste en un quark y un anti quark (rojo + anti rojo, verde + anti verde, azul + anti azul = blanco).

Tales combinaciones forman partículas conocidas como mesones, que son inestables porque el quark y el anti quark se pueden aniquilar entre sí, produciendo electrones y otras partículas. Similarmente el confinamiento impide que se tengan glucones aislados, porque los glucones en sí también tienen color. En vez de ello, uno tiene que tener una colección de glucones cuyos colores se sumen para dar un color blanco. Esta colección forma una partícula inestable llamada glueball (bola de glucones).

El hecho del confinamiento nos imposibilite la observación de un quark o de un glucon aislados podría parecer que convierte en una cuestión metafísica la noción de la misma de considerar a los quarks y a los glucones como partículas. Sin embargo, existe otra propiedad de la interacción nuclear fuerte, llamada libertad asintótica, que hace que los conceptos de quark de glucon estén bien definidos.

A energías normales, la interacción nuclear fuerte es verdaderamente intensa y une a los quarks entre sí fuertemente. Sin embargo, experimentos realizados con grandes aceleradores de partículas indican que a altas energías la interacción fuerte se hace mucho menos intensa, y los quarks y los glucones se comportan casi como partículas libres.

Diversos experimentos de este tipo han sido llevados a cabo, pero ninguno ha producido una evidencia definitiva sobre el decaimiento del protón o del neutrón. Un experimento utilizó ocho mil toneladas de agua y fue realizado en la misma salada de Murtón, en Ohio (para evitar que tuviera lugar otros fenómenos, causados por los rayos cósmicos, que podrían ser confundidos con la desintegración de protones). Dado que no se observó ninguna desintegración de protones durante el experimento, se puede calcular que la vida media del protón debe ser mayor de diez millones de billones de años (un 1 y treinta y un ceros). Lo que significa más tiempo que la vida media predicha por la teoría de gran unificación más simple, aunque existen teorías más elaboradas en las vidas medias predichas son mayores.

Experimentos todavía más sensibles, involucrando incluso mayores cantidades de materia, serán necesarios para comprobar dichas teorías.

*(Tomado del libro “historia del tiempo” de Stephen W. Hawking)*

## **COMO INVENTÉ LA TEORÍA DE LA RELATIVIDAD**

---

“No es fácil hablar de cómo alcance la idea de la teoría de la relatividad, hay muchas complejidades ocultas que motivaron mi pensamiento. Y el impacto de cada una fue diferente en los diferentes pasos del desarrollo de la idea. No voy a mencionarlos todos aquí, ni tampoco enumeraré los artículos que he escrito sobre el tema, en su lugar describiré el desarrollo de mi pensamiento directamente conectado al tema.

Fue hace casi diecisiete años cuando por primera vez tuve una idea en el desarrollo de la relatividad. Aunque no puedo decir exactamente de donde vinieron mis ideas, tengo la certeza de que estaban contenidas en el problema de las propiedades ópticas de los objetos en movimiento. La luz se propaga a través del mar de Éter por el cual se mueve la Tierra. Trate de encontrar evidencias claras del movimiento del Éter respecto a la Tierra en la literatura pero no pude.

Entonces quise verificar el flujo del Éter respecto a la Tierra, o en otras palabras el movimiento de la tierra. La primera vez que pensé sobre el problema no dudaba de la existencia del Éter o del movimiento de la Tierra a través de él. Ideé entonces el siguiente experimento usando dos termocuplas: ubicar dos espejos para reflejar la luz de una misma fuente en una dirección paralela al movimiento de la Tierra y otra antiparalela a él, si asumimos que hay una diferencia en la generación de energía entre ambos rayos podemos usar las termocuplas para medirla. Aunque es un experimento muy similar al de Michelson, nunca trate de llevar a cabo este experimento.

Mientras pensaba sobre el problema en mis años de estudiante, me entere del extraño resultado del experimento de Michelson. Pronto llegué a la conclusión de que nuestras ideas relativas al movimiento del Éter eran incorrectas, si asumíamos el resultado nulo del experimento de Michelson como un hecho. Este fue el primer paso que me llevo a la teoría de la relatividad. Así llegué a la conclusión que el movimiento de la Tierra no puede ser detectado por ningún experimento óptico, aunque la Tierra está rotando respecto al Sol.

Tuve la oportunidad de leer la monografía de Lorentz de 1895. Él discutía y resolvía completamente el problema de la electrodinámica hasta la primera aproximación (a primer orden), es decir despreciando términos de orden superior a  $v/c$ , donde  $v$  es la velocidad del objeto en movimiento y  $c$  la velocidad de la luz en el vacío. Entonces trate de discutir el experimento de Fizeau bajo el supuesto de que las ecuaciones de Lorentz debieran ser validas tanto en el sistema de referencia del objeto en movimiento como en el sistema de referencia en el vacío como lo hizo originalmente Lorentz. Para entonces yo estaba ya firmemente convencido de la validez de la teoría electrodinámica de Maxwell-Lorentz. Además el supuesto de que esas ecuaciones debieran ser validas en el sistema de referencia del móvil llevaba al concepto de invariancia de la velocidad de la luz, el cual contradecía la ley de adición de velocidades usado en mecánica.

¿Por qué esos dos conceptos se contradecían? Me di cuenta que esta dificultad era muy complicada de resolver. Gaste casi un año tratando de modificar la idea de Lorentz con la esperanza de resolver este problema.

Por casualidad un amigo mío en Bern (Michelle Besso) me ayudo. Era un día hermoso aquel en el que lo fui a visitar con este problema. Comencé mi conversación con él del siguiente modo: “Últimamente he estado trabajando en un problema difícil. Hoy vine a combatir contra él junto a usted.” Discutimos cada aspecto del problema. Entonces rápidamente comprendí donde yacía la clave para este problema. Al otro día volví a visitarlo y, sin siquiera saludar, le dije: “Gracias, He resuelto completamente el problema.” Un análisis del concepto de tiempo fue mi solución. El tiempo no puede definirse en forma absoluta, y hay una relación indisoluble entre tiempo y velocidad de propagación de una señal. Con este concepto nuevo pude resolver todas las dificultades completamente por primera vez.

Dentro de cinco semanas la teoría especial de la relatividad estaba completa. No tenía ninguna duda de que la teoría era razonable desde un punto de vista filosófico. También encontré que la nueva teoría está

de acuerdo con el argumento de Mach. En oposición a la teoría general de la relatividad, en la cual el principio de Mach fue incorporado a la teoría, el principio de Mach tiene (solo) implicaciones indirectas sobre la teoría especial.

Así fue como se creó la teoría especial de la relatividad.

Mis primeras ideas sobre la teoría general fueron concebidas dos años después, en 1907. La idea ocurrió repentinamente. Estaba insatisfecho con la teoría especial pues esta estaba restringida a sistemas de referencia en moviéndose con velocidades constantes el uno respecto del otro y no podía aplicarse al movimiento general de dos sistemas de referencia. Me esforcé en intentar resolver esta restricción y quería formular el problema en el caso general.

En 1907 Johannes Stark me pidió que escribiera una monografía sobre la teoría especial de la relatividad para la revista *Jahrbuch der Radioaktivitat*. Mientras lo escribía llegué a darme cuenta que todas las leyes naturales podían ser discutidas dentro del marco dado por la teoría especial de la relatividad, salvo la ley de gravedad. Quise encontrar las razones de esto pero no pude dar con este objetivo fácilmente.

El aspecto más insatisfactorio del problema era el siguiente: Aunque la relación entre inercia y energía estaba dada explícitamente en la teoría especial de la relatividad, la relación entre inercia y peso, o entre energía y campo gravitacional, no estaba claramente dilucidada. Sentía que este problema no podía ser resuelto desde la teoría especial de la relatividad.

Un día, la respuesta apareció surgió repentinamente. Estaba sentado en mi escritorio de la oficina de patentes en Bern. De pronto un pensamiento se me presentó: si un hombre cae libremente, no siente su peso. Estaba desconcertado. Este simple experimento pensado me causó una gran impresión. Él me llevó a una teoría de la gravedad. Continué mi pensamiento: Un hombre cayendo está acelerando. Luego lo que él siente y juzga es referido a un sistema acelerado. Decidí extender la teoría de la relatividad a sistemas acelerados. Sentía que haciendo esto estaría resolviendo el problema de la gravedad simultáneamente. Un hombre cayendo no siente su peso porque en su sistema de referencia aparece un nuevo campo gravitatorio que cancela al campo debido a la Tierra. En el sistema acelerado necesitamos un nuevo campo gravitatorio.

No pude resolver el problema en forma completa inmediatamente. Me tomó ocho años antes de obtener la solución completa. Durante esos años obtuve respuestas parciales al problema. Ernst Mach fue una persona que insistía en la idea que los sistemas relativamente acelerados eran equivalentes. Esta idea contradice la geometría Euclidiana, pues en el sistema acelerado la geometría Euclidiana no puede aplicarse. Describir las leyes físicas sin usar geometría es como intentar expresar nuestras ideas sin palabras. Necesitamos de las palabras para poder expresarnos. ¿Cómo podríamos expresar nuestro problema? No fue hasta 1912 cuando este problema fue resuelto, cuando descubrí que la teoría de superficies de Karl Friedrich Gauss podía ser la clave del misterio. Encontré que las coordenadas de superficie de Gauss podían esconder algún significado para este problema. Entonces no sabía que Bernhard Riemann (quien había sido alumno de Gauss) había discutido los fundamentos de la geometría en profundidad. Casualmente recordé las clases de geometría en mis años de estudiante (en Zúrich) en manos de Carl Friedrich Geiser donde discutía la teoría de Gauss. Descubrí que los fundamentos de geometría poseían un profundo significado físico para este problema.

Cuando volví de Praga a Zúrich, mi amigo el matemático Marcel Grossman estaba esperándome. Él me había ayudado antes abasteciéndome con la literatura matemática cuando yo trabajaba en la oficina de patentes en Bern y tenía algunas dificultades para obtener artículos matemáticos. Primero me enseñó el trabajo de Curvastro Gregorio Ricci y después el trabajo de Riemann. Discutí con él respecto a sí el uso de la teoría de Riemann, o en otras palabras el uso del concepto de invariancia de los elementos de línea,

---

podía resolver el problema. Escribimos un artículo al respecto en 1913, aunque no pudimos dar con las ecuaciones correctas para la gravedad.

Estudie las ecuaciones de Riemann en detalle solo para encontrar los motivos por los cuales no pudimos hallar el resultado deseado de este modo.

Tras dos años de esfuerzo, descubrí que había cometido errores en mis cálculos. Volví a la ecuación original usando la teoría de invariancia y trate de construir las ecuaciones correctas.

¡En dos semanas las ecuaciones correctas aparecieron frente a mí!

Respecto a mi trabajo posterior a 1915, me gustaría mencionar solo el problema de la cosmología. Este problema dice relación con la geometría del universo y el tiempo. Los fundamentos de este problema provienen de las condiciones de borde de la teoría general de la relatividad y la discusión del problema de la inercia de Mach. Aunque no entendí exactamente las ideas de Mach respecto a la inercia, estas tuvieron gran influencia en mi pensamiento.

Resolví el problema de la cosmología imponiendo invariancia sobre las condiciones de borde para las ecuaciones de gravedad. Finalmente elimine los bordes imponiendo un universo cerrado. Como resultado la inercia surge como una propiedad de la materia interactuante y esta no debería existir si no hubiera otra materia para interactuar. Creo que con este resultado la teoría general de la relatividad puede ser satisfactoriamente entendida desde un punto de vista epistemológico.

Este es un breve viaje histórico por mis pensamientos en la creación de la teoría de la relatividad”.

*Charla dada por Einstein: cómo inventé la Relatividad (1922). Traducción Álvaro Núñez  
Artículo Tomado de <http://orionastronomia.blogspot.com/2007/08/1-como-invent-la-teora-de-la.html>*