

**Material didáctico para la enseñanza y el aprendizaje de las series geométricas**

Angie L. Linares y Lina J. Pinzón

Facultad de Ciencia Tecnología, Universidad Pedagógica Nacional

Trabajo de Grado

Lyda Mora

**Nota del autor:**

Angie Linares, Departamento de Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional – Bogotá D.C.; Lina Pinzón, Departamento de Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional – Bogotá D.C.

Este trabajo fue realizado con la ayuda de la profesora Lyda Constanza Mora Mendieta, del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

Cualquier mensaje con respecto al presente trabajo debes ser enviado al departamento de matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, D.C., Colombia o

[allinaresl@upn.edu.co](mailto:allinaresl@upn.edu.co) – [ljpinzona@upn.edu.co](mailto:ljpinzona@upn.edu.co).

Material Didáctico Para la Enseñanza y Aprendizaje de las Series Geométricas

Angie Lorena Linares Linares

Lina Johana Pinzón Amado

Trabajo de grado

Profesora

Lyda Constanza Mora Mendieta

Profesora Departamento de Matemáticas

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de Matemáticas

Bogotá, D.C.

29 de abril 2024

### **Dedicatoria**

*A Dios, por darme su amor y la certeza de que siempre puedo confiar en Él. Gracias por ser mi guía e iluminar mi camino en los momentos más oscuros. Y gracias por darme la fortaleza y sabiduría necesaria para alcanzar este logro.*

*A mi mami Gladys, cuyo amor incondicional y apoyo inquebrantable han sido el sustento de mi vida. Gracias por creer en mí incluso cuando yo dudaba, por escucharme siempre, por tus sacrificios han sido mi pilar y mi inspiración constante. Este logro es tan tuyo como mío.*

*A mi papi Nelson, por estar siempre orgulloso de mí y por dar todo por mi bienestar, por ser mi mayor ejemplo de fortaleza en la dificultad. Tú dedicación y amor han sido mi mayor motivación. Gracias por enseñarme a creer en mí y a luchar por lo que quiero con determinación.  
¡Los amo infinitamente!*

*A mi hermano Stiven, por tu confianza y tu sonrisa diaria que ilumina mis días y me llena de esperanza. Tu alegría y optimismo me han dado fuerzas en los momentos más duros. Gracias por recordarme siempre la importancia de mantener una actitud positiva.*

*A mi hermana Juliana, mi confidente y amiga incondicional. Gracias por estar siempre dispuesta a escucharme, por tus consejos, tus palabras de aliento y por apoyarme sin reservas. Tu compañía ha sido esencial para mantenerme firme en este momento.*

*A mi hermano Dilan, por ser mi felicidad y por estar siempre dispuesto a ayudarme. Tu alegría contagiosa, tu compañía y tu disposición para apoyarme en todo momento me han dado la fuerza para seguir adelante.*

*Y a Lina, mi amiga y compañera de este trabajo, por brindarme sus conocimientos y ser un ejemplo de perseverancia y disciplina. Por tu amistad sincera y por compartir conmigo este desafío académico. Gracias por estar a mi lado en cada etapa de este proceso. Gracias por tu apoyo, tu dedicación y por estar a mi lado en los momentos de incertidumbre y alegría. Este logro también es tuyo.*

*-Angie Linares.*

***Dedicatoria***

*Es para mí es un honor dedicar este trabajo primeramente a Dios por darme este regalo tan maravilloso, a mi compañera y amiga de tesis Angie Linares, a nuestra directora del trabajo de grado Lyda mora, quien siempre nos acompañó, apoyo e impulso a desarrollar y finalizar este trabajo. Por último, a mi familia especialmente a mi madre, mi padre y hermanos quienes siempre me ofrecieron su ayuda y apoyo incondicional.*

*-Lina Pinzón*

### Agradecimientos

*En primer lugar, quiero expresar mi más sincero y profundo agradecimiento a Dios, por ser mi guía y fortaleza en cada momento de este arduo camino. Sin Su luz y bendiciones, este logro no habría sido posible. A Él le debo todo.*

*A mi familia, mi roca y pilar fundamental, les debo todo. A mis padres, por su amor incondicional, su paciencia infinita y su confianza en mí, que nunca flaquearon. A mis hermanos, por su apoyo constante y sus palabras de aliento que siempre me dieron fuerza para seguir adelante.*

*A mi querido tío Vidal, querida tía Gladys y mis primos Brayan y Camilo, cuyas sabias palabras y constante respaldo fueron importantes en los momentos difíciles. Su apoyo inquebrantable y sus palabras siempre llenas de ánimo y consejos me han dado la fortaleza necesaria para continuar.*

*A mi amiga Sara, gracias por tu lealtad y por los innumerables momentos de alegría, consuelo y comprensión. Tu amistad ha sido un pilar esencial en este viaje, un verdadero regalo que valoro profundamente.*

*A mi profesora Lyda, asesora de este trabajo de grado, le expreso mi más profundo respeto, gratitud y admiración. Su dedicación, paciencia y muchos conocimientos no solo guiaron este proyecto, sino que también me inspiraron a ser mejor cada día. Su apoyo constante y su amistad han sido invaluable para mi desarrollo académico y personal.*

*A mis queridas amigas que me dejo la universidad, Laura D, Daniela y Laura C. Su compañerismo y apoyo incondicional han sido una fuente constante de fortaleza y ánimo. Cada momento compartido, cada risa y cada obstáculo superado juntas ha creado un vínculo que atesoro profundamente. Gracias por comprenderme sin palabras y por ser mi familia en este trayecto universitario. Les estaré eternamente agradecida por su generosidad y amistad.*

*A los estudiantes de décimo grado del Colegio Isabel Segunda, su entusiasmo y disposición para colaborar en este proyecto fueron esenciales. Gracias por su participación y por permitirme aprender tanto de ustedes. Su colaboración ha sido fundamental para el éxito de este trabajo.*

*Y finalmente, mis amigos Jhon D, Lina O, Lizeth M y Juan V. personas cuya presencia y apoyo fueron invaluable. Sus palabras de ánimo y su disposición para ayudar me dieron la fuerza para continuar cuando las cosas se pusieron difíciles. Cada uno de ustedes ha dejado una huella imborrable en mi corazón.*

*Gracias a todos, de todo corazón. Este logro no hubiera sido posible sin ustedes.*

*-Angie Linares*

### *Agradecimientos*

*En especial, quiero agradecer a Dios, quien me guio para escoger esta carrera y me ofreció los recursos económicos y el entendimiento para culminar todos los espacios que en algún momento no pensé alcanzar.*

*Al colegio Isabel II, en especial la profesora Ivonne, quien nos brindó el espacio para realizar la prueba piloto del material y las tareas, y permitió dar por culminada esta etapa de nuestra carrera.*

*Por otro lado, agradecer a mi familia, quienes me apoyaron durante estos 6 años con sus palabras de apoyo y aliento para seguir y no rendirme, en especial mi hermana Erika Pinzón, quien me ayudo en la construcción del material sacrificando muchas veces su descanso y mi hermano Edwin Pinzón, quien nos brindó su conocimiento y tiempo para el diseño del material. También a Maquila Internacional de Confecciones, la empresa en la que he laborado por más de 6 años, especialmente a mi jefe Yaneth Uribe, un ser humano maravillo, quien siempre me ayudo a cuadrar los horarios de tal manera que pudiera estudiar y trabajar.*

*Por ultimo y no menos importante, a mi compañera de trabajo de grado Angie linares, quien me ofreció su amistad sincera desde inicio de mi carrera, además quien se atrevió a iniciar este proyectó conmigo, a Lina Ortega de mis grandes amigas, a quien admiro, respeto y quiero con todo mi ser, a Laura Cacais, una fiel representante de Dios en la tierra, a quien admiro y espero verla prontamente graduada, a mi amigo Juan Pablo Vargas, quien fue mi compañero durante mis últimos años en la licenciatura, tanto en lo personal como en lo académico, quien compartió sus conocimientos siempre que lo necesite, a Laura Devia y Daniela Gámez, grandes amigas que siempre no solo en lo académico, sino también en lo personal; y finalmente a todos aquellos que me brindaron su cariño, su amistad, su preocupación y compañía: Diego miranda, Jhon Dueñas, Geovanni López, Harvyn Montenegro, Miguel Angel Montealegre y Daniela Güiza, para todos ellos mis más grandes deseos y prosperidad en este nuevo camino.*

*-Lina Pinzón*

## Tabla de contenido

<b>INTRODUCCIÓN .....</b>	<b>18</b>
<b>CAPÍTULO I. PRELIMINARES.....</b>	<b>21</b>
<b>1.1. Justificación .....</b>	<b>21</b>
<b>1.2. Objetivos .....</b>	<b>24</b>
1.2.1. Objetivo general .....	24
1.2.2. Objetivos específicos.....	24
<b>CAPÍTULO II. MARCO DE REFERENCIA.....</b>	<b>25</b>
<b>2.1. Series.....</b>	<b>25</b>
2.1.3. Convergencia y divergencias de las series .....	30
2.1.4. Tipos de series .....	36
<b>2.2. Serie geométrica .....</b>	<b>37</b>
2.2.1. Elementos de una serie geométrica .....	40
2.2.2. Convergencia de la serie geométrica .....	42
2.2.3. La Paradoja de la dicotomía .....	46
<b>2.3. El material didáctico y los recursos .....</b>	<b>50</b>
2.3.1. Criterios de tipificación de material didáctico.....	51
<b>2.4. Asuntos de la enseñanza y el aprendizaje sobre las series.....</b>	<b>55</b>
2.4.1. Sistema de representación .....	55
2.4.1.1. Sistema representación simbólico.....	56
2.4.1.2. Sistema representación verbal.....	56
2.4.1.3. Sistema representación gráfica .....	56
2.4.2. La visualización.....	57
2.4.3. Material didáctico y recursos para la enseñanza del objeto series .....	58
<b>2.5. Lugar de las series en el currículo escolar colombiano.....</b>	<b>65</b>
2.5.1. Resolución 277 de 1975 .....	65
2.5.2. Renovación curricular.....	67
2.5.3. Lineamientos curriculares en Matemáticas .....	71
2.5.4. Estándares básicos de competencias en matemáticas.....	72
2.5.5. Derechos básicos de aprendizaje .....	74
2.5.6. Libros de texto escolares .....	75
2.5.6.1. Serie de MATEMÁTICAS Para básica secundaria y Media Espiral 9. ....	75

2.5.6.2. DELTA ¡Te conecta con el Mundo! Número 9. Norma (2008). .....	76
2.5.6.3. Retos Matemáticas 9. Editorial Norma.....	76
2.5.6.4. Los Caminos del Saber, Matemáticas 9°. Editorial Santillana (2013).....	77
2.5.6.5. SECUENCIAS Matemáticas 9, Libros y Libros S.A.S (2016).....	78
<b>CAPÍTULO III. METODOLOGÍA .....</b>	<b>80</b>
<b>3.1. Diseño de material y tareas preliminares.....</b>	<b>81</b>
3.1.1. Construcción del marco de referencia .....	81
3.1.2. Selección de series geométricas convergentes a estudiar con la propuesta.....	82
3.1.3. Construcción de las series en el material manipulativo (boceto – recorte y pintura)..	85
3.1.4. Planteamiento general de la secuencia de tareas .....	88
3.1.4.2. Objetivos de aprendizaje.....	89
3.1.4.3. Estándares básicos de competencias matemáticas.....	89
3.1.4.4. Marco teórico para el diseño de las tareas .....	90
3.1.5. Planteamiento detallado de las tareas vinculado al material manipulativo .....	90
3.1.5.1. Tarea Ambientación.....	92
3.1.6. Construcción de los kits de series en material manipulativo.....	97
<b>3.2. Diseño de material y tareas definitivas.....</b>	<b>100</b>
3.2.1. Gestión del sitio de pilotaje .....	100
3.2.2. Pilotaje.....	101
3.2.3. Diseño del formulario.....	106
3.2.4. Análisis de insumos recolectados (diario de campo y formulario) .....	109
3.2.4.1. Sobre el material .....	110
3.2.4.2. Sobre las tareas .....	114
3.2.5. Construcción definitiva de los kits de series y documentos final de las tareas .....	117
<b>4.1. Descripción del material .....</b>	<b>120</b>
4.1.1. Descripción del material «Series Geometry LyAnLi» .....	120
4.1.2. ¿Cómo usar el material? .....	125
<b>4.2. Tareas .....</b>	<b>126</b>
4.2.1. Conocimientos previos .....	126
4.2.2. Descripción de las tareas .....	127
4.2.2.1 Tarea 1. Ambientación.....	127
4.2.2.2 Tarea 2. Reconoce el material.....	128

4.2.2.2.1. Tarea 2.1. En sus marcas listos, ¡Arma!.....	129
4.2.2.2.2. Tarea 2.2. Representación de fracciones .....	130
4.2.2.2.3. Tarea 2.3: Selecciona la pareja ideal .....	131
4.2.2.3. Tarea 3. Identificar los elementos que componen la serie. ....	132
4.2.2.3.1. Tarea 3.1: Identificación de los términos de las series y sumas Parciales. ..	132
4.2.2.3.2. Tarea 3.2: Identificación de la razón común. ....	133
4.2.2.3.3. Tarea 3.3. Identificación de la convergencia.....	134
4.2.2.4. Tarea 4. Recopilación de los resultados obtenidos .....	136
4.2.2.5 Tarea 5. Expresión general .....	137
<b>CAPÍTULO V. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....</b>	<b>139</b>
<b>5.1 Conclusiones .....</b>	<b>139</b>
<b>5.2. Recomendaciones .....</b>	<b>145</b>
<b>5.3 Bibliografía .....</b>	<b>146</b>
<b>5.5. Anexos .....</b>	<b>152</b>
5.5.1. Anexo A.....	152
5.5.2. Anexo B.....	¡Error! Marcador no definido.
5.5.4. Anexo C.....	159
5.5.5. Anexo D.....	161
5.5.6. Anexo E.....	162
5.5.7. Anexo F.....	174
5.5.8 Anexo G.....	185
5.5.9 Anexo H.....	217
5.5.10. Anexo I.....	222
5.5.11. Anexo J.....	224

### Lista de figuras

<b>Figura 1</b>	Representación gráfica en GeoGebra la sucesión $1, 12, 13, 14, 15, \dots, 1n, \dots$	27
<b>Figura 2</b>	Representación gráfica en GeoGebra de la sucesión $3, 5, 7, 9, 11, \dots, 2n + 1, \dots$	27
<b>Figura 3</b>	Representación en GeoGebra de la sucesión $0, 13, 12, 35, 23, \dots, n - 1n + 1, \dots$	28
<b>Figura 4</b>	Representación gráfica en GeoGebra de la serie $n = 1 \infty 12n$	31
<b>Figura 5</b>	Representación geométrica de la serie $n = 1 \infty 12n$	32
<b>Figura 6</b>	Representación geométrica de la serie $n = 1 \times 12n$	32
<b>Figura 7</b>	Representación gráfica de GeoGebra en el plano cartesiano de la serie $n = 1 \infty n$	35
<b>Figura 8</b>	Representación gráfica en GeoGebra de la serie $n = 1 \infty 13n$	39
<b>Figura 9</b>	Representación geométrica de la serie $n = 1 \infty 13n$	39
<b>Figura 10</b>	Representación gráfica en el plano cartesiano de la serie $n = 1 \times 5n$	40
<b>Figura 11</b>	Demostración gráfica de la serie geométrica	45
<b>Figura 12</b>	Trayecto realizado por el corredor	47
<b>Figura 13</b>	Serie geométrica $1/4$	59
<b>Figura 14</b>	Serie geométrica $1/3$	59
<b>Figura 15</b>	Serie geométrica $1/5$	60
<b>Figura 16</b>	Serie geométrica $(-1/2)$	60
<b>Figura 17</b>	Serie geométrica $4/5$	61
<b>Figura 18</b>	Serie geométrica $1/2$	61
<b>Figura 19</b>	Serie geométrica $1/5$	62
<b>Figura 20</b>	Serie geométrica $1/7$	62
<b>Figura 21</b>	Serie geométrica $1/9$	63
<b>Figura 22</b>	Serie geométrica $7/8$	63

<b>Figura 23</b> Serie geométrica 1/16.....	64
<b>Figura 24</b> <i>Objetivos generales del curso VI Análisis matemáticos</i> .....	66
<b>Figura 25</b> <i>Representación de la paradoja de la dicotomía propuesta por de Zenón</i> .....	70
<b>Figura 26</b> <i>Definición de Serie geométrica del libro Los caminos del saber</i> .....	78
<b>Figura 27</b> <i>Diagrama fases de construcción material didáctico y tareas</i> .....	80
<b>Figura 28</b> Serie Cola-Dino.....	82
<b>Figura 29</b> Serie Caracolí .....	83
<b>Figura 30</b> Serie Mountain .....	83
<b>Figura 31</b> Serie Cruz-Griega.....	84
<b>Figura 32</b> Serie Boot.....	84
<b>Figura 33</b> Serie Pinski.....	84
<b>Figura 34</b> <i>Borrador y boceto de la serie Mountain</i> .....	85
<b>Figura 35</b> Borrador y boceto de Serie Cola-Dino .....	86
<b>Figura 36</b> Piezas recortadas de la serie Caracolí.....	86
<b>Figura 37</b> <i>Pintando serie Pinski y serie Boot</i> .....	87
<b>Figura 38</b> <i>Marco de la serie Cola-Dino</i> .....	87
<b>Figura 39</b> <i>Avances del material preliminar</i> .....	88
<b>Figura 40</b> Vista del material preliminar desarmado.....	93
<b>Figura 41</b> Vista del material preliminar armado.....	93
<b>Figura 42</b> Representación gráfica 1/2 .....	93
<b>Figura 43</b> Representación gráfica 1/4 .....	94
<b>Figura 44</b> Expresión simbólica Serie Pinski.....	94
<b>Figura 45</b> Material didáctico asociado a la expresión.....	94

<b>Figura 46</b> <i>Fotografía de serie Pinski con la identificación de sus partes</i> .....	95
<b>Figura 47</b> <i>Material principal serie Mountain</i> .....	96
<b>Figura 48</b> <i>Convergencia serie Mouantain</i> .....	96
<b>Figura 49</b> <i>Tabla para llenar los datos de la serie</i> .....	97
<b>Figura 50</b> <i>Kit serie Caracolí</i> .....	98
<b>Figura 51</b> <i>Kit serie Cola-Dino</i> .....	98
<b>Figura 52</b> <i>Kit serie Cruz-Griega</i> .....	98
<b>Figura 53</b> <i>Kit serie Pinski</i> .....	98
<b>Figura 54</b> <i>Kit serie Boot</i> .....	99
<b>Figura 55</b> <i>Kit serie Mountain</i> .....	99
<b>Figura 56</b> <i>Kit serie Fish</i> .....	99
<b>Figura 57</b> <i>Kit serie Piramidal</i> .....	99
<b>Figura 58</b> <i>Momento en el pilotaje en la realización de la tarea concéntrese</i> .....	101
<b>Figura 59</b> <i>Interacción entre intérprete- estudiantes y FEM</i> .....	102
<b>Figura 60</b> <i>Estudiantes con material Cruz-griega</i> .....	103
<b>Figura 61</b> <i>Foto en la que se nombran las piezas del material</i> .....	103
<b>Figura 62</b> <i>Convergencia de la serie Caracolí</i> .....	105
<b>Figura 63</b> <i>Tabla de completar elementos de la serie</i> .....	105
<b>Figura 64</b> <i>Algunas preguntas del formulario sobre el material</i> .....	107
<b>Figura 65</b> <i>Algunas preguntas sobre criterios de tipificación</i> .....	107
<b>Figura 66</b> <i>Algunas preguntas del formulario con base en las tareas</i> .....	108
<b>Figura 67</b> <i>Plantilla de análisis de insumos</i> .....	110
<b>Figura 68</b> <i>Modificaciones al material</i> .....	111

<b>Figura 69</b> <i>Ajustes en algunos colores del material</i> .....	111
<b>Figura 70</b> <i>Justificación para eliminar serie Piramidal</i> .....	112
<b>Figura 71</b> <i>No se realiza cambios respecto al criterio de modalidad</i> .....	113
<b>Figura 72</b> <i>Algunas ventajas y desventajas del material</i> .....	114
<b>Figura 73</b> <i>Modificación en la actividad de concéntrese</i> .....	115
<b>Figura 74</b> <i>Modificación en las instrucciones de las tareas</i> .....	116
<b>Figura 75</b> <i>Modificaciones para diseñar una nueva tarea</i> .....	117
<b>Figura 76</b> <i>Construcción del material series Cruz-Griega definitivo en MDF</i> .....	117
<b>Figura 77</b> <i>Material principal de serie Caracolí terminado</i> .....	118
<b>Figura 78</b> <i>Anverso de Serie Fish</i> .....	120
<b>Figura 79</b> <i>Reverso de la serie Fish</i> .....	121
<b>Figura 80</b> <i>Piezas adicionales serie Fish</i> .....	121
<b>Figura 81</b> <i>Set de expresiones Serie Fish</i> .....	122
<b>Figura 82</b> <i>Set de fichas con números fraccionarios</i> .....	122
<b>Figura 83</b> <i>Set de fichas con letras alfabéticas</i> .....	122
<b>Figura 84</b> <i>Fotografía de la serie Fish con sus partes</i> .....	123
<b>Figura 85</b> <i>Ficha técnica del kit serie Fish</i> .....	123
<b>Figura 86</b> <i>Cuadernillo de tareas</i> .....	124
<b>Figura 87</b> <i>Parte 1 del concéntrese</i> .....	127
<b>Figura 88</b> <i>Parte 2 del concéntrese</i> .....	128
<b>Figura 89</b> <i>Vista del material definitivo desarmado</i> .....	130
<b>Figura 90</b> <i>Vista del material definitivo desarmado</i> .....	130
<b>Figura 91</b> <i>Material serie Caracolí</i> .....	131

<b>Figura 92</b> Representación de fracción material definitivo.....	131
<b>Figura 93</b> Expresión simbólica de la serie Cruz-Griega.....	132
<b>Figura 94</b> Material didáctico definitivo asociado a la expresión.....	132
<b>Figura 95</b> <i>Serie Cola-Dino con sus fichas para identificar las piezas</i> .....	133
<b>Figura 96</b> Material definitivo de la serie Pinski.....	135
<b>Figura 97</b> Convergencia de la serie Pinski con material definitivo.....	135
<b>Figura 98</b> <i>Tabla para completar los datos de la serie Mountain</i> .....	137
<b>Figura 99</b> Video Mathematical Visual Proofs.....	138
<b>Figura 100</b> <i>Portada del cuadernillo</i> .....	138

### Lista de Tablas

<b>Tabla 1</b> <i>Definiciones de Sucesión</i> .....	25
<b>Tabla 2</b> <i>Definiciones de Serie</i> .....	28
<b>Tabla 3</b> <i>Tipos de series</i> .....	36
<b>Tabla 4</b> <i>Definiciones de series geométricas</i> .....	37
<b>Tabla 5</b> <i>Criterios de tipificación del material didáctico</i> .....	51
<b>Tabla 6</b> <i>Representaciones de series geométricas Mathematical Visual Proofs</i> .....	59
<b>Tabla 7</b> <i>Series elegidas preliminares</i> .....	82
<b>Tabla 8</b> <i>Estándares básicos de competencia asociados</i> .....	89
<b>Tabla 9</b> <i>Descripción de las fases para las tareas</i> .....	90
<b>Tabla 10</b> <i>Representación serie Caracolí desarmado y armado</i> .....	92
<b>Tabla 11</b> <i>Ejemplo de fracciones serie Cola-Dino</i> .....	93
<b>Tabla 12</b> <i>Expresión simbólica serie Pinski material preliminar</i> .....	94
<b>Tabla 13</b> <i>Identificación de la convergencia serie Mountain</i> .....	96
<b>Tabla 14</b> <i>Kits de las Series geométricas</i> .....	98
<b>Tabla 15</b> <i>Material definitivo de Serie Fish armado y desarmado</i> .....	129
<b>Tabla 16</b> <i>Ejemplo representación de fracciones</i> .....	130
<b>Tabla 17</b> <i>Expresión simbólica definitiva correspondiente a la serie Cruz-Griega</i> .....	131
<b>Tabla 18</b> <i>Expresiones algebraicas con sus términos al infinito</i> .....	134
<b>Tabla 19</b> <i>Convergencia de la serie Pinski</i> .....	135
<b>Tabla 20</b> <i>Enlaces para acceder a los videos de cierre</i> .....	138

### Resumen

Este presente documento expone el proceso de construcción de un material didáctico y manipulativo que pretende favorecer la enseñanza y el aprendizaje de las series geométricas convergentes. El material se acompaña de tareas dirigidas a estudiantes de educación secundaria o media (14-16 años).

Para fundamentar la creación de este material se llevó a cabo una revisión bibliográfica que abordó aspectos relativos a las series geométricas desde un punto de vista tanto matemático como curricular. La primera versión del material didáctico fue implementada en estudiantes de décimo grado del colegio Isabel II I.E.D en la jornada de la mañana. Esta implementación permitió evaluar la pertinencia y eficacia del material en relación con los objetivos planteados inicialmente, los cuales aludían al estudio y reconocimiento de las series geométricas y sus elementos.

Para valorar su pertinencia y eficacia, se emplearon tres instrumentos de recolección de información: diarios de campo, formulario y guías de trabajo. Estos instrumentos proporcionaron datos cualitativos y cuantitativos que fueron analizados para diseñar una propuesta final del material y las tareas. El análisis de los datos recopilados permitió realizar ajustes y mejoras al material inicial.

*Palabras claves: aprendizaje, enseñanza, estudiantes, material didáctico, serie, tareas.*

### Abstract

This document presents the process of constructing a didactic and manipulative material aimed at enhancing the teaching and learning of convergent geometric series. The material is accompanied by tasks directed at secondary or middle school students (14-16 years old).

To support the creation of this material, a bibliographic review was conducted, addressing aspects related to geometric series from both a mathematical and curricular perspective. The first version of the didactic material was implemented with tenth-grade students at Isabel II I.E.D. School during the morning session. This implementation allowed for the

evaluation of the material's relevance and effectiveness in relation to the initially stated objectives, which referred to the study and recognition of geometric series and their elements.

To assess its relevance and effectiveness, three data collection instruments were used: field journals, a questionnaire, and work guides. These instruments provided qualitative and quantitative data that were analyzed to design a final proposal for the material and tasks. The analysis of the collected data allowed for adjustments and improvements to the initial material.

**Keywords:** learning, teaching, students, didactic material, series, tasks.

## Introducción

El presente trabajo, asociado a nuestro interés por la creación del material didáctico útil para la enseñanza y aprendizaje, surge tras cursar la asignatura Sucesiones y Series de nuestro proceso formativo para ser profesoras de matemáticas, orientado por profesor Edgar Páez en 2022-1. Él nos generó atracción, interés y motivación por el mundo de las series. En el semestre 2022-2, la profesora Lyda Mora propone crear un material para la enseñanza de las series, procurando una perspectiva alternativa para abordar este tema en el aula. Esta propuesta nos llamó la atención, motivo por el cual decidimos diseñar un material específico centrado en la enseñanza de series geométricas.

Se diseñó, entonces, un material didáctico que se denominó «Series Geometry LyAnLi», sobre el que basa este documento. Este material se compone de seis kits llamados Serie Caracolí, Serie Cola-Dino, Serie Cruz-griega, Serie Pinski, Serie Mountain y Serie Fish. Esto está acompañado de tareas que constan de cinco fases, en las que se encuentran nueve tareas prácticas, de las cuales cinco contienen una guía de apoyo, encaminadas al descubrimiento de los elementos que componen las series geométricas y su convergencia. La idea del material surge, puesto que, al realizar una revisión en diferentes fuentes como libros, investigaciones y páginas en internet, se halló que en la actualidad no se cuenta con material didáctico para la enseñanza y aprendizaje de las series en aula; pretendemos contribuir con una herramienta que pueda apoyar a otros profesores que deseen abordar estos temas.

Para cumplir con el cometido, se diseñó una propuesta preliminar del material didáctico y de las tareas, sobre lo que se llevó a cabo una prueba piloto en el colegio Isabel II I.E.D. La prueba se realizó con estudiantes de décimo grado, entre los que se encontraban estudiantes Sordos. Los datos obtenidos fueron fundamentales para realizar cambios y mejoras en el material didáctico y las tareas, contribuyendo así a la construcción de la propuesta final. Este material se entrega al laboratorio de didáctica de las matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, para uso de otros docentes que lo requieran.

Este documento está constituido por cinco capítulos. En el primero, se presenta la justificación de la propuesta del diseño del material didáctico, además de los objetivos

planteados para el desarrollo del presente trabajo. El segundo presenta nuestro marco conceptual, conformado por cuatro partes: series, series geométricas, material didáctico y marco didáctico.

Así, primero exponemos el marco de referencia que sistematiza una revisión bibliográfica sobre las series, con las cuales precisamos enunciados de definiciones sobre objetos clave (sucesiones, series y tipos de series, convergencia y divergencia de las series). Luego, aludimos fuentes sobre las series geométricas, a partir de los cuales proponemos una definición de serie geométrica para este trabajo. De acuerdo con los documentos se definen los elementos y la convergencia de la serie geométrica, finalmente se presenta un problema lógico planteado por el filósofo griego Zenón de Elea, la paradoja dicotomía relacionada con el objeto matemático de este trabajo. Enseguida, se expone una caracterización de material didáctico según los criterios de tipificación (su utilidad, su contenido, criterio y su modalidad de uso). Finalmente, en la sección Marco Didáctico, se aborda la definición de un sistema de representación y sus diferentes tipos. También se incluye la definición de visualización, esto por cuanto es el proceso fundamental que se experimenta con el uso del material que aquí se propone. Finalmente, se realiza una revisión bibliográfica sobre el lugar de las series en el currículo escolar colombiano, tomando como referencia documentos como la Resolución 277, la renovación curricular, los lineamientos curriculares, los estándares básicos de competencias matemáticas, los derechos básicos de aprendizaje y algunos textos escolares.

Al respecto del tercer capítulo, relativo a la Metodología del estudio, se presentan las fases para el alcance del propósito de este trabajo. La primera, habla sobre el diseño de material didáctico y tareas preliminares; la segunda, sobre el diseño definitivo del material didáctico y las tareas. Para el diseño preliminar del material didáctico y de las tareas, inicialmente, se realiza una revisión documental del marco matemático y didáctico de las series (marco de referencia), esta revisión nos permitió identificar los posibles grados escolares a los cuales podría dirigirse el diseño del material para realizar posteriormente la prueba piloto del mismo. Luego, se eligieron varias series geométricas convergentes que se plasmaron en el material concreto, y con ello se hace la versión preliminar del material y el planteamiento de la secuencia de tareas.

En esta sección se encuentra una descripción detallada de las tareas acompañadas del material, aquí se especifica lo que se espera que el estudiante realice. Por último, se encuentra la

propuesta final del material y las tareas, que se realizó con base en los datos recolectados de tres instrumentos: diarios de campo, formulario y guías de trabajo, producto del piloto.

En el cuarto capítulo se realiza una descripción detallada de los elementos que componen el material didáctico «Series Geometry LyAnLi» y cada uno de sus kits; además, se exponen las instrucciones sobre cómo usarlo, así como la presentación final de las tareas que acompañan el material didáctico.

Finalmente, en el último capítulo se presentan las conclusiones obtenidas durante el desarrollo y pilotaje del material didáctico y las tareas; además, de establecer algunas recomendaciones para futuros profesores que desean implementar el material para la enseñanza y aprendizaje en el aula.

Vale decir que, luego de las referencias bibliográficas, se incluyen anexos que contienen las guías propuestas para cada tarea, la versión preliminar de las tareas, la encuesta de satisfacción aplicada a los estudiantes, la docente e intérpretes; la tabla de análisis de los instrumentos de recolección (diarios de campo, formulario y guías de trabajo); por último, la guía práctica para los profesores que hace parte integral del material.

## CAPÍTULO I. Preliminares

### 1.1. Justificación

A lo largo de nuestra formación académica en la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, se nos ha inculcado la importancia de planear una clase significativa y alternativa a lo tradicional. Para favorecer dicho objetivo, una de las recomendaciones es usar materiales didácticos o recursos educativos. No obstante, incorporar material didáctico en las clases a veces se dificulta, entre otras razones, por la poca existencia de material apropiado y pertinente; esto lleva a que, en ciertas oportunidades, se opte por no incluirlo. Por otro lado, diseñar y preparar material didáctico efectivo requiere de tiempo de preparación que en ocasiones no es remunerado para los profesores. Desde la planificación hasta la creación o adquisición de materiales, siendo entonces una inversión no solo de tiempo, sino también de dinero.

Durante nuestra experiencia en el aula de clases como profesoras, hemos evidenciado el potencial que tiene el uso de materiales, juegos o recursos didácticos en el aula de matemáticas. La implementación de estas herramientas permite a los estudiantes emplear la manipulación como medio de aprendizaje.

Como propuesta del presente trabajo de grado, se diseña el material didáctico «Series Geometry LyAnLi» el cual, pretende favorecer la enseñanza y aprendizaje de las series geométrica convergentes en el aula; el estudiante podrá ver, tocar y manipular el material, que apoya el logro de la comprensión significativa del concepto matemático, mediante el sentido del tacto y la visión.

Este material está dirigido especialmente para la enseñanza de las series geométricas convergentes, porque no se dispone de este, ni en el laboratorio de didáctica del Departamento de Matemáticas de la UPN, ni en lo consultado en documentos y en el buscador de Google; además, porque consideramos que este material podría ser provechoso, no solo para estudiantes de la educación secundaria y media, sino para los futuros docentes de matemáticas.

Según López (2014), la aplicación de las series numéricas en el desarrollo del pensamiento lógico-matemático es crucial, ya que permite a los estudiantes reflexionar sobre la importancia del

inter-aprendizaje mediante técnicas innovadoras. Esto fortalece habilidades cognitivas como el razonamiento lógico y espacial, deductivo e inductivo, y mejora la capacidad de resolver problemas, lo que es esencial para el desarrollo del pensamiento crítico y creativo en matemáticas. La inclusión de series numéricas en el aula potencia la concentración, creatividad y la capacidad de visualizar problemas desde diferentes perspectivas, facilitando la enseñanza de otros conceptos matemáticos. Ángel y Rojas (2013) “la comprensión matemática de un concepto comienza con el manejo de un objeto físico o mental”, promoviendo así el desarrollo de competencias matemáticas fundamentales como interpretar, argumentar, calcular, modelar, razonar, relacionar y representar, especialmente en relación con el pensamiento variacional y geométrico.

Por lo mencionado anteriormente, el estudio de las series geométricas convergentes es de importancia en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas porque:

Las sucesiones reales son un tema de estudio interesante debido a la noción de convergencia, un concepto fundamental en las matemáticas (Verdugo, 2020, p. 72). Según Gaxiola e Ibarra (2016), un aspecto importante en el estudio de sucesiones es su relación con la identificación y obtención de patrones, una temática presente en la educación básica desde el primer año de primaria (Gaxiola e Ibarra, 2016, p. 82). A nivel universitario, las sucesiones y series presentan uno de los objetos más difíciles para los estudiantes de diversas carreras, ocupando un lugar importante en la matemática debido a sus múltiples conexiones con aplicaciones en la ingeniería y otros importantes objetos matemáticos como funciones y límites (Malla, 2020, p. 5).

El estudio de las sucesiones y series es fundamental para fomentar el pensamiento variacional en el aula, ya que permite analizar tanto las variaciones en los elementos que las componen como la manera en que dichas variaciones se producen. Además, las representaciones gráficas de las sucesiones y series facilitan la visualización de conceptos matemáticos abstractos, ayudando a los estudiantes a comprender mejor las propiedades y patrones de las secuencias numéricas y reforzando su capacidad para relacionar conceptos teóricos con representaciones visuales concretas.

En conclusión, el material didáctico «Series Geometry LyAnLi» potencia el conocimiento tanto de los estudiantes como de los profesores, promoviendo así el desarrollo de la interpretación, motivación y deseo por aprender, especialmente en el ámbito de las series geométricas. Como

resultado, los estudiantes se espera que adquieran la habilidad de manipular, visualizar e identificar los elementos que conforman las series geométricas convergentes.

## **1.2. Objetivos**

### ***1.2.1. Objetivo general***

Diseñar un material didáctico que busca favorecer procesos de enseñanza y aprendizaje de las series geométricas convergentes en contextos educativos de básica secundaria y media.

### ***1.2.2. Objetivos específicos***

- Profundizar acerca de las series geométricas convergentes y los elementos que las componen, a partir de una revisión bibliográfica que permita caracterizarlas.
- Diseñar tareas en torno a las series geométricas convergentes utilizando el material didáctico construido, que permita, por ejemplo, identificar las características de una serie geométrica.
- Hacer una prueba piloto del material didáctico y las tareas planteadas, en la que participen estudiantes de básica secundaria y media o de primeros semestres de educación superior en la UPN.
- Analizar el desarrollo de la prueba piloto, para identificar ventajas y desventajas del material didáctico y las tareas propuestas, con el fin identificar elementos para hacer ajustes al material diseñado.

## CAPÍTULO II. Marco de referencia

En este capítulo se presentan los constructos matemáticos, didácticos y curriculares que fundamentan la elaboración del material didáctico propósito de este trabajo. Para ello se hizo necesario abordar diferentes definiciones de serie, de diversos textos matemáticos para, con base en ello, definir el objeto *serie geométrica*; también se identifican algunos ejemplos de este tipo de series, las cuales se pretenden llevar al plano físico; de otro lado, se aborda qué se entiende por material didáctico. Por último, se aborda la ubicación y presencia de las series en el currículo de educación básica secundaria y media en Colombia a partir de los diferentes referentes curriculares.

Tras una revisión documental sobre los objetos sucesión, serie y serie geométrica, se seleccionan varias definiciones que se enlistan a continuación; estas permitieron llegar a una elección de la definición de sucesión, la definición de serie y la de serie geométrica, base de este trabajo.

### 2.1. Series

Antes de abordar la definición de serie es necesario precisar la definición de sucesión. En la siguiente *Tabla 1* se presentan algunas definiciones propuestas por diferentes autores sobre el concepto de sucesión.

**Tabla 1**

*Definiciones de Sucesión*

Autor	Definición de sucesión
Donado y Espinosa (1997)	<p>Una sucesión de números reales es una función <math>f</math> cuyo dominio es el conjunto de los números naturales (<math>\mathbb{N}</math>) y cuyo rango es el conjunto de los números reales (<math>\mathbb{R}</math>).</p> <p>Como el dominio es siempre <math>\mathbb{N}</math>, una sucesión queda identificada mediante el conjunto de sus imágenes, así:</p> $\{f(1), f(2), \dots, f(n), \dots\}$

---

El cual es usual representarlo dando por sobreentendida la función como:

$$\{a_1, a_2, \dots, f(n), \dots\} \text{ o simplemente } \{a_n\}$$

De  $a_n$  se dice que es el  $n$ -ésimo término de la sucesión. (p. 2).

Salazar y Acevedo (1997)

(...) una función " $f$ " cuyo dominio son casi todos los enteros positivos. Si el recorrido es un subconjunto de los números reales,  $f$  se dice una sucesión real y si el recorrido es un subconjunto de los números complejos,  $f$  se dice una sucesión compleja. El  $n$ -ésimo término de la sucesión " $f$ " se denotará por  $f(n)$  o en forma sucinta por  $a_n$  y la sucesión misma por  $\{a_n\}$  o  $\{f(n)\}$  o  $(a_n)$ . En la práctica basta con especificar el término general  $a_n$ , si no hay riesgo de confusión. (p. 2)

Larson (2019)

(...) una función cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos. Aunque una sucesión es una función, es común representar las sucesiones empleando subíndices en lugar de la notación habitual de la función. Por ejemplo, en la sucesión

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 2, & 3, & 4, \dots & n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \dots & \downarrow \\ a_1, & a_2, & a_3, & a_4, \dots & \dots \end{array}$$

al 1 se le asigna  $a_1$ , al 2 se le asigna  $a_2$ , y así sucesivamente.

Los números  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \dots$  son los términos de la sucesión. El número  $a_n$  es el término  $n$ -ésimo de la

sucesión, y la sucesión completa se denota por  $\{a_n\}$ . (p. 596)

---

Así, se precisa la definición construida a partir de las definiciones citadas anteriormente, que es la considerada para este trabajo:

Una sucesión es un conjunto ordenado de números  $\mathbb{R}$ , esto es:  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ , tal que el número  $a_1$  recibe el nombre de primer término,  $a_2$  es el segundo término y, en general,  $a_n$  es el  $n$ -ésimo término de la sucesión; donde  $n \in \mathbb{Z}^+$  y  $a_n \in \mathbb{R}$  la cual se denota de la siguiente manera:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

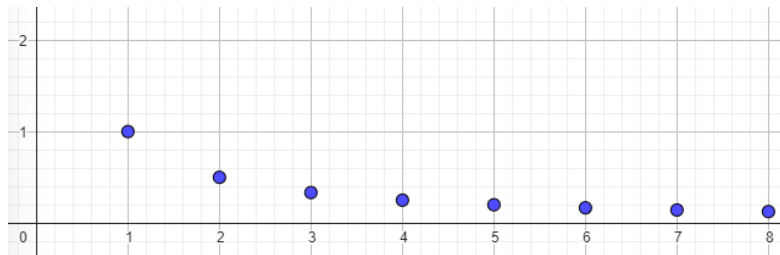
A continuación, se encuentran algunos ejemplos de sucesiones; mediante las *Figuras 1, 2* y *3* se exponen su, respectiva, representación gráfica en el plano cartesiano.

Ejemplos:

$$1. \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

**Figura 1**

Representación gráfica en GeoGebra la sucesión  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$

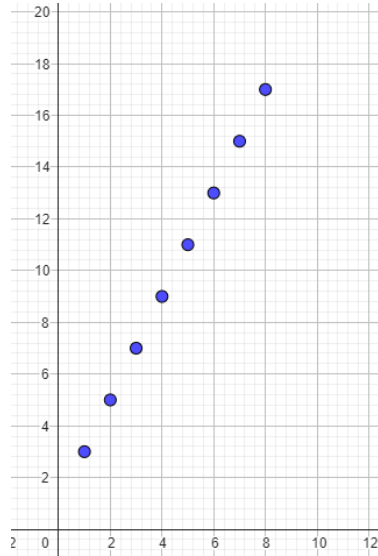


*Nota.* Fuente: autoría propia.

$$2. \quad 3, 5, 7, 9, 11, \dots, 2n + 1, \dots$$

**Figura 2**

Representación gráfica en GeoGebra de la sucesión  $3, 5, 7, 9, 11, \dots, 2n + 1, \dots$

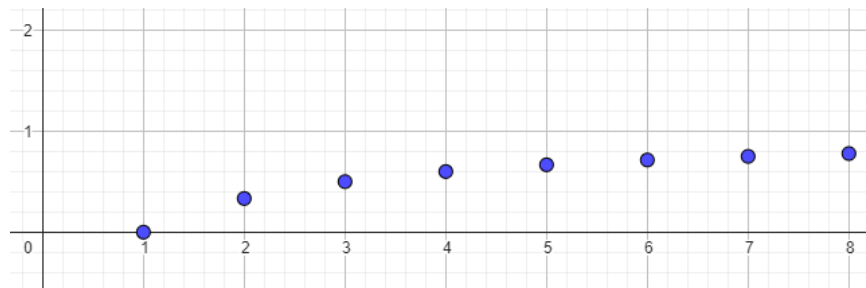


*Nota.* Fuente: autoría propia.

$$3. \quad 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{n-1}{n+1}, \dots$$

**Figura 3**

*Representación en GeoGebra de la sucesión  $0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{n-1}{n+1}, \dots$*



*Nota.* Fuente: autoría propia.

A continuación, en la *Tabla 2* se presenta las definiciones encontradas después de una revisión bibliográfica en diferentes fuentes del concepto de serie:

**Tabla 2**

*Definiciones de Serie*

Autor	Definición de Serie
Linés (1991)	<p>Una sucesión <math>\{A_n\}</math> cuyos términos pertenecen a <math>\mathbb{R}</math> o a <math>\mathbb{C}</math>, la sucesión <math>\{a_n\}</math> de las sumas parciales está definida por:</p> $A_1 = a_1, \quad A_2 = a_1 + a_2, \dots, \quad A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \dots$ <p>En forma breve se escribe <math>A_n = \sum_{k=1}^n a_k</math> ” (p. 152).</p>
Larson (2019)	<p>Si <math>a_n</math> es una sucesión infinita, entonces</p> $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ <p>Es una serie infinita (o simplemente una serie). Los números <math>a_1, a_2, a_3, \dots</math> son los términos de la serie. En algunas series es conveniente empezar con el índice <math>n = 0</math> (o algún otro entero). Como convenio de escritura, es común representar una serie infinita simplemente como <math>\sum a_n</math>. (p. 608)</p>
Ramírez et al. (2015)	<p>La serie de una sucesión (<math>S_n</math>) es la suma de sus términos”. Además, establecen que la suma de los <math>n</math> primeros términos de una sucesión se indica como:</p> $\sum_{i=0}^n a_i = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ <p>y si la sucesión es infinita se escribe de la siguiente manera</p> $\sum_{i=0}^{\infty} a_i = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ <p>(p.485)</p>

Con base en las definiciones ya mencionadas, se construirá la definición que usada durante el desarrollo del presente trabajo.

Una serie en  $\mathbb{R}$  es la suma de los términos  $a_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , de una sucesión  $S_n$ , cuyos términos  $a_n$  pertenecen a  $\mathbb{R}$  y  $n$  pertenece a  $\mathbb{Z}^+$ , la cual se denota de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \dots$$

Seguidamente, se encuentran algunos ejemplos de series.

Ejemplos:

$$1. \sum_{i=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$$

La sucesión asociada a la serie es:  $H_n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot 2^n = 2 + (-4) + 8 + (-16) + 32 + \dots$$

La sucesión asociada a la serie es:  $R_n = 2, -4, 8, -16, 32, \dots$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} = 2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \dots$$

La sucesión asociada a la serie es:  $P_n = 2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

La sucesión asociada a la serie es:  $Q_n = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$

### 2.1.3. Convergencia y divergencias de las series

En el siguiente apartado se muestran ideas generales sobre la convergencia de una serie, para ello se utilizarán distintas representaciones, la numérica, la gráfica en el plano cartesiano y una que se ha decidido llamar geométrica, relacionada con los propósitos de este trabajo de grado; además, se expone similarmente sobre la divergencia de una serie, para ello se acude a las representaciones: numérica y gráfica en el plano cartesiano.

Cuando se habla de la convergencia de una serie, se refiere a que la suma de todos los términos es un número en específico. A continuación, se muestra, a través de un ejemplo, de cómo se puede determinar, empíricamente, la convergencia de una serie. Sea la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ ; esto es:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

Numéricamente se tiene, para esta serie que algunas de sus sumas parciales son:

$$S_1 = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0.75$$

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0.875$$

$$S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16} = 0.9375$$

$$S_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{31}{32} = 0.96875$$

...

$$S_{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512} + \frac{1}{1024} + \frac{1}{2048} + \frac{1}{4096} = \frac{4095}{4096}$$

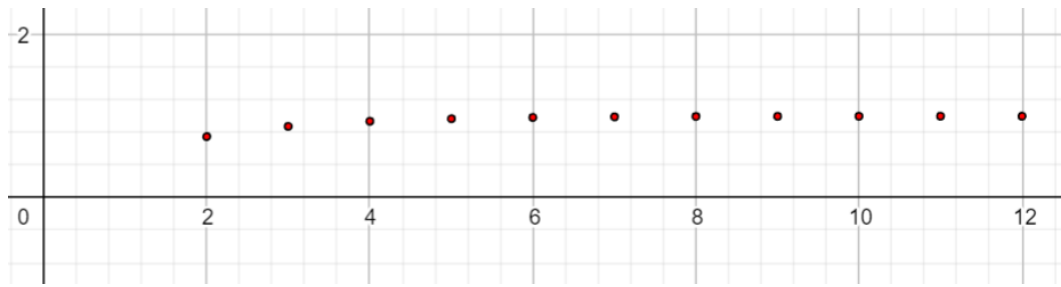
$$= 0.999755$$

Como se observa, y a pesar de ser esto insuficiente, pues son muy pocos términos, se puede inducir que a medida que aumentan los términos de las sumas parciales de la serie, su suma se aproxima a 1, concluyendo (por el proceso de inducción) que la sucesión de las sumas parciales posiblemente converge a 1, es decir, que la serie posiblemente converge a 1.

Otra manera de inducir la convergencia, es decir, que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  converge a 1 es a través de la representación gráfica de las sumas parciales de la serie, en el plano cartesiano, lo que se muestra en la *Figura 4*:

#### **Figura 4**

*Representación gráfica en GeoGebra de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$*

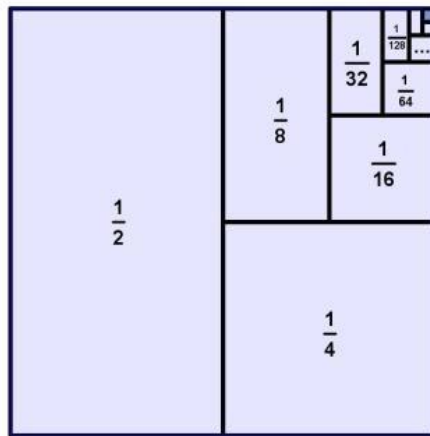


Nota. Fuente: Jiménez (2018), (<https://www.geogebra.org/m/t6qv2ztd>)

Otra representación que permite ayudar a convencerse del resultado inducido empíricamente  $r$ , es decir, es a través de una representación geométrica como la que se muestra en la *Figura 5*.

**Figura 5**

Representación geométrica de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

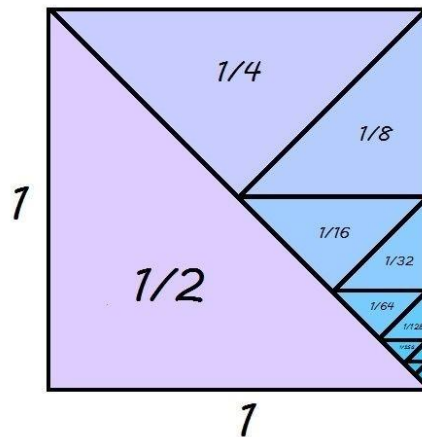


Nota. Fuente: Patrick Honner (2010) Mr. Honner (<https://mrhonner.com/archives/1680>).

A continuación, en la *Figura 6* se puede observar otra representación de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ .

**Figura 6**

Representación geométrica de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$



Nota. Fuente: Amadeo Artacho (2018), (<https://acortar.link/kH0qCS>).

En la *Figura 5* y *6*, permite visualizar que la serie converge a 1, esto es posible al observar que a medida que se subdivide el cuadrado en partes cada vez más pequeñas, este queda cubierto por completo.

Por último, para estar más seguros de la convergencia de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  se puede hacer acudir a la representación numérica y al concepto de límite a partir de la forma general de sus sumas parciales, aunque esto no siempre es posible hacerlo, ya que para todas las series no es posible determinar la forma general de sus sumas parciales.

Siguiendo con el ejemplo y tomando sumas parciales indicadas anteriormente, esto es:

$$S_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

$$S_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$$

De lo anterior es posible inducir un patrón:

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n}$$

Una vez obtenida la forma general de las sumas parciales, se puede entonces encontrar el límite de las sumas parciales de la serie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2^n - 1}{2^n} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{2^n} \right) = 1$$

Concluyendo así que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  es convergente y su suma converge a 1.

Cuando se habla de una serie que diverge, se puede determinar siempre que el límite no existe o cuando la suma de sus sumas más parciales no se aproxima a un número en específico; esto se ilustra por medio de un ejemplo utilizando la forma numérica y gráfica en el plano cartesiano.

Se usará la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} n$ :

Primeramente, calculemos las sumas parciales:

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 1 + 2 = 3$$

$$S_3 = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$S_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

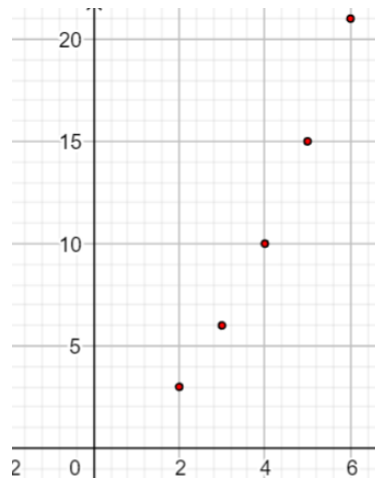
$$S_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

Se puede observar que a medida que aumentan los términos en las sumas parciales, no se aproxima a un número específico, intuyendo así la divergencia de la serie.

Si se acude a graficar en el plano cartesiano algunas de las sumas parciales de esta serie como se ve en la *Figura 7*, se vislumbra que la sucesión correspondiente tiende a crecer indefinidamente:

### Figura 7

Representación gráfica de GeoGebra en el plano cartesiano de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} n$



*Nota.* Fuente: autoría propia.

Se observa en la *Figura 7*, los términos de la sucesión no tienden a un número en específico, sino que crecen cada vez más, entonces, la serie diverge.

Una vez se determine la forma general de las sumas parciales, es posible entonces aplicar el límite y de esta manera confirmar la divergencia de la serie.

La forma general de las sumas parciales de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \text{ es: } S_n = 1 + 2 + \dots + n + \dots = \frac{n(n+1)}{2}$$

Aplicando el límite en la forma general de las sumas parciales se obtiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n}{2} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + n) = \infty$$

Finalmente se concluye que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} n$  diverge, puesto que no se aproxima a un valor en específico.

Es posible determinar la convergencia de las series siempre que sea posible determinar la forma general de sus sumas parciales, en ocasiones no es posible determinar este dato, debido a que no es siempre posible encontrar un patrón regular de las sumas parciales de la serie.

#### 2.1.4. Tipos de series

En los libros de cálculo se presentan diversos tipos de series, algunos de los cuales se enumeran en la *Tabla 3*. Las definiciones y más ejemplos de cada tipo de serie encontradas en textos académicos se muestran en el *anexo A*.

**Tabla 3**

*Tipos de series*

#	Nombre	Ejemplo
1	Serie $p$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$
2	Serie armónica	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$
3	Serie alternante	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n+2} = \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \frac{5}{6} + \dots -$
4	Serie oscilante	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} 2n = 2 - 4 + 6 - 8 + \dots - \dots$
5	Serie de potencias	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots$
6	Serie telescópica	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

#	Nombre	Ejemplo
7	Serie de Taylor y Maclaurin	$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$
8	Serie geométrica	$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots$

*Nota.* Tipos de series que existen encontradas en textos académicos acompañado de un ejemplo.

Fuente: autoría propia.

Para determinar la convergencia de los tipos de series mencionadas anteriormente, es necesario tener en cuenta algunas condiciones dependiendo del tipo de serie, por ejemplo: la serie tipo  $p$ , converge siempre que  $p > 1$  y diverge si  $0 < p \leq 1$ , por otro lado, la serie alternante converge siempre que: la sucesión  $a_n$  es monótona, decreciente y su  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

Dado que las series geométricas son el tema principal de este trabajo, se les dará un tratamiento similar al abordado con los objetos sucesión y serie.

## 2.2. Serie geométrica

En la *Tabla 4*, se presentan las definiciones concepto de serie geométrica propuesto por varios autores:

**Tabla 4**

### *Definiciones de series geométricas*

Autores	Definición de serie geométrica
Apóstol (1967)	(...) Esta serie se genera por adiciones sucesivas de los términos de una progresión geométrica y tiene la forma $\sum x^n$ donde el término $n$ -simo $x^n$ es la potencia $n$ -sima de un número real fijo $x$ . Es conveniente empezar con $n = 0$ , entendiendo que el primer término inicial es $x^0$ es igual a 1. Sea $S_n$ la suma $n$ -sima parcial de esta serie, de manera que:

---


$$S_n = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} \text{ (p. 474)}$$

Stewart (2018) Para Una serie geométrica es una sucesión de números tales que cada uno de ellos (salvo el primero) es igual al anterior multiplicado por un número constante llamado razón, que se representa por  $r$ . (p. 710)

Pérez (2020) Una serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  se dice geométrica si existe  $r \in \mathbb{R}$  tal que

$$a_n = r^n,$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . (p. 9)

---

Seguidamente, se encuentra la definición de serie geométrica que se tomará como base para este trabajo, construida a partir de las definiciones mencionadas anteriormente:

**Serie geométrica:** Una serie geométrica es una serie cuyos sumandos, salvo el primero  $a$ ,  $a \in \mathbb{R}^+$  es igual al anterior multiplicado por un número constante llamado razón común, representada por  $r$ ,  $r \in \mathbb{R}$ . Es decir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \dots$$

es una serie geométrica, siempre que  $r$  sea un número real.

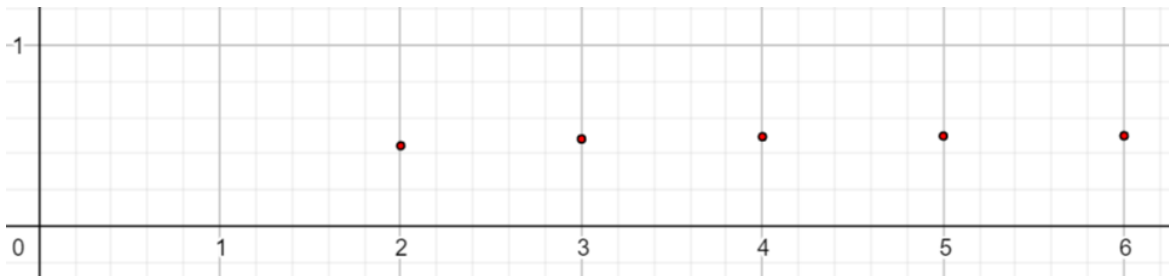
Estos son algunos ejemplos de series geométricas:

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$ , abordada en la sección convergencia de las series.
2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} \dots$

La cual se puede representar en el plano cartesiano como se observa en la *Figura 8 y 10*, o mediante una representación geométrica como se ve en la *Figura 9*.

**Figura 8**

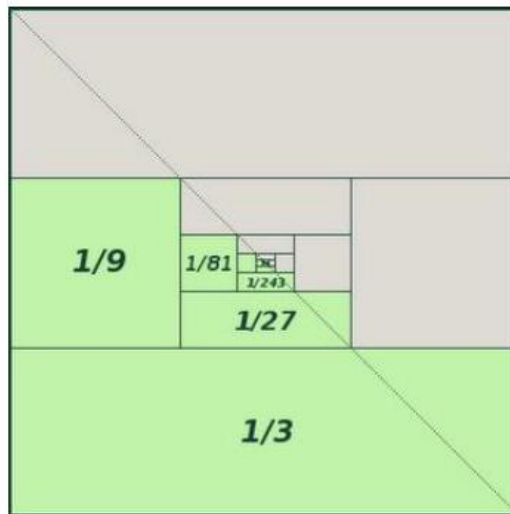
Representación gráfica en GeoGebra de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$



Nota. Fuente: Jiménez, (2018), <https://www.geogebra.org/m/t6qv2ztd>.

**Figura 9**

Representación geométrica de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$

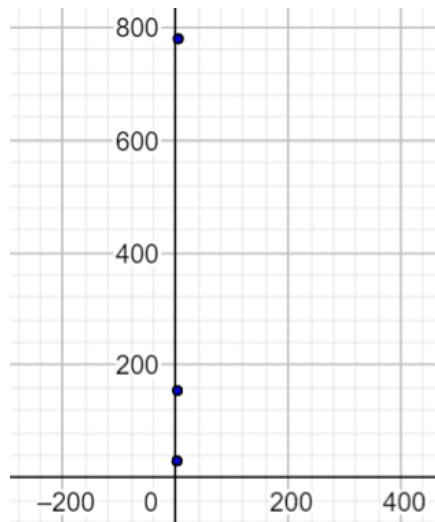


Nota. Fuente: Antonio Montalbano, sin fecha, aurasma. (<https://acortar.link/O9O0vD>)

3.  $\sum_{n=1}^{\infty} 5^n = 5 + 25 + 125 + \dots + \dots$ , cuya representación en el plano es la siguiente:

**Figura 10**

Representación gráfica en el plano cartesiano de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} 5^n$



*Nota.* Fuente: Jiménez (2018). <https://www.geogebra.org/m/t6qv2ztd>

Como se observa, las series geométricas tienen algunos elementos que las hacen representativas.

### 2.2.1. Elementos de una serie geométrica

Sea la serie geométrica:

$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \dots$ ,  $r$  y  $a$  números reales, los elementos que la componen son:

**$a$** : primer término y es una constante

**$r$** : razón común

**$S_n$** : sucesión de sumas parciales de la serie.

Esto es:

$$S_1 = a$$

$$S_2 = a + ar$$

$$S_3 = a + ar + ar^2$$

...

$$S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}, \quad r \text{ y } a \text{ números reales.}$$

Así, para la serie prototipo que se ha utilizad; esta es:

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

Se tiene que:

Primer término:  $a = 1/2$

Razón común:  $r = 1/2$

Y su sucesión de sumas parciales es:

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n}$$

Y, como ya se mostró, la serie converge a 1

Ahora, si se considera la serie geométrica  $\sum_{n=1}^{\infty} 5^n = 1 + 5 + 25 + 125 + \cdots$ , también ejemplificada anteriormente; se tiene que:

$a = 1$  y  $r = 5$

Y sus primeras sumas parciales son:

$$Q_1 = 1 = 1$$

$$Q_2 = 1 + 5 = 6$$

$$Q_3 = 1 + 5 + 25 = 31$$

$$Q_4 = 1 + 5 + 25 + 125 = 156$$

Mientras que esta serie diverge como también se expuso antes.

En consecuencia, algunas series geométricas son convergentes y otras no. Ahora bien, ¿de qué depende la convergencia de una serie de este tipo? Los explicamos en lo que sigue.

### 2.2.2. Convergencia de la serie geométrica

Considerando la serie geométrica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot r^{n-1} = a + ar + ar^2 + \dots + \dots$$

Tal que  $a$  es una constante y  $r \in \mathbb{R}$ , la serie geométrica diverge si  $|r| \geq 1$  y converge al valor  $\frac{a}{1-r}$  si  $|r| < 1$

Para demostrar lo anterior se inicia suponiendo que  $a = 1$ , la demostración se divide en los siguientes casos:

#### Caso 1.

Si  $r = 1$ , se tiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} 1^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{1} = \sum_{n=1}^{\infty} 1^n = \sum_{n=1}^{\infty} 1$$

Entonces

$$T_1 = 1, T_2 = 2, T_3 = 3, \dots, T_n = n$$

Tomando el límite de la  $(n + 1)$ -ésima suma parcial

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + (n + 1) = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 1)(n + 2)}{2} = \infty$$

Por tanto, la serie diverge; esto es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1^n \rightarrow \infty$$

Es decir, la serie geométrica, con la condición de  $a = 1$ , diverge si  $r = 1$ .

#### Caso 2.

Si  $r = -1$ , entonces se tiene la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(-1)}$$

Se sabe que:  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$  es una serie oscilante y como:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \text{ no existe}^1$$

Entonces

$$- \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \text{ No existe}$$

### Caso 3.

Si  $r \neq 1$  y  $r \neq -1$ , entonces la serie desarrollada queda:

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} = 1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1} + \dots$$

La sucesión de sumas parciales es:

$$S_n = 1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1} \quad (1)$$

Al multiplicar por  $r$  a ambos lados de la igualdad anterior, se obtiene:

$$rS_n = r + r^2 + r^3 + \dots + r^n \quad (2)$$

Al restar la expresión (1) y (2), se obtiene:

$$S_n - rS_n = 1 - r^n$$

Y luego, se factoriza la expresión de la izquierda, así:

$$S_n(1 - r) = 1 - r^n$$

Al despejar  $T_n$ , resulta lo siguiente, lo cual es posible porque  $r \neq 1$  :

---

<sup>1</sup> El límite no existe, cuando  $n$  es un número par se obtiene 1 y cuando  $n$  es impar se obtiene  $-1$ , por lo que la serie oscila entre  $-1$  y  $1$ , es decir no se aproxima a ningún número.

$$S_n = \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - r^n}{1 - r} = \frac{1}{1 - r} \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - r^n)$$

Para resolver este límite, se consideran los siguientes casos:

### Caso 3.1.

Primeramente, se analiza el caso en el que  $|r| > 1$ ; es decir:

$$r > 1 \text{ o } r < -1$$

Si  $r > 1$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty$$

Y si  $r < -1$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n \text{ no existe}$$

$$\therefore \frac{1}{1-r} \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - r^n) \rightarrow \infty$$

Entonces la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$  diverge si  $|r| > 1$

### Caso 3.2.

Por último, se estudia el caso en el que  $|r| < 1$ ; o sea:

$$-1 < r < 1$$

En este caso:  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ .

Entonces:

$$\frac{1}{1-r} \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - r^n) = \frac{1}{1-r} \cdot (1 - 0) = \frac{1}{1-r}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} = \frac{1}{1-r} \text{ cuando } |r| < 1$$

En conclusión:



Las series geométricas sirven como herramienta para la interpretación de algunas paradojas, entre ellas la paradoja de Zenón, especialmente la paradoja de la dicotomía; con ayuda de las series geométricas la paradoja de Zenón se puede expresar de la forma  $\frac{T}{2^{n-1}}$ , dada la importancia de esta paradoja en la Historia de las matemáticas se presentará a continuación.

### 2.2.3. La Paradoja de la dicotomía

Zenón de Elea (495-435 a. de C) fue un filósofo griego que hace 2400 años desató una crisis en la matemática antigua, planteando ciertas paradojas ingeniosas, algunas de estas paradojas fueron: la paradoja de la dicotomía, la paradoja de Aquiles, la paradoja de la flecha, entre otras; en esta ocasión se presentará la paradoja de la dicotomía la cuál es enunciada por Apóstol (1967) de la siguiente manera:

Un corredor no puede alcanzar nunca la meta porque siempre ha de recorrer la mitad de una distancia antes de recorrer la distancia total. Es decir, cuando haya recorrido la primera mitad, tendrá que correr la otra mitad. Cuando haya recorrido la mitad de ésta, le quedará todavía la cuarta parte, cuando haya corrido la mitad de esta cuarta parte, le quedará la octava parte y así sucesiva e indefinidamente. (p.457)

El razonamiento que planea Zenón consiste en suponer que un corredor se mueve en línea recta de un extremo de un lugar a otro, subdividiendo el trayecto en un número indefinido de segmentos cada vez más pequeños (Apóstol, 1967).

En el primer momento del corredor ha recorrido  $\frac{1}{2}$  del total de la distancia, luego recorre  $\frac{1}{4}$  del trayecto, seguidamente recorre  $\frac{1}{8}$  del trayecto y así sucesivamente. Finalmente, cada una de las distancias realizadas por el corredor se pueden escribir de la siguiente manera:  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$

Para recorrer cada uno de las distancias es necesario una cantidad positiva de tiempo, por ejemplo, en el inicio de la carrera el tiempo inicial sería  $t_0$ , cuando ha transcurrido el primer momento, el tiempo es  $t_1$ , en donde el corredor ha recorrido  $\frac{1}{2}$  de la distancia total, para el momento dos, el tiempo necesario es  $t_2$  y la distancia recorrida por el corredor debe ser la primera más  $\frac{1}{4}$  de la distancia faltante, es decir  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ , de la misma manera para el  $t_3$  la distancia recorrida sería entonces  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$  y así sucesivamente para cada uno de los momentos; al hacer

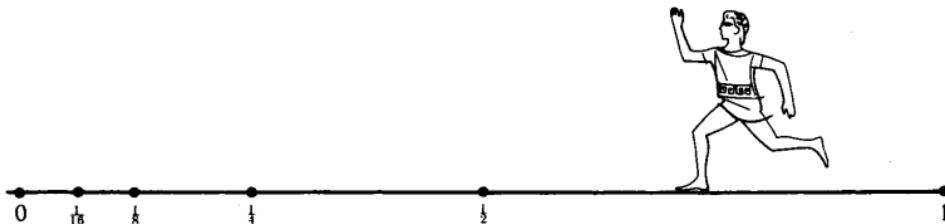
uso del sentido común, el tiempo utilizado para recorrer el total del trayecto es posible obtenerlo al sumar las cantidades del tiempo empleado en cada una de las posiciones del trayecto.

Considerando que el número de momentos en el trayecto es indefinido, se puede decir que no es posible determinar el tiempo que tarda el corredor en llegar a la meta, es decir, que la suma del tiempo empleado en cada instante recorrido no puede ser finita.

Por otro lado, al suponer que el corredor recorre el trayecto a una velocidad constante, teniendo en cuenta el sentido común, se puede afirmar que el total de tiempo utilizado para llegar a la meta es el doble del tiempo empleado para recorrer la mitad de la distancia; es decir el tiempo puede ser expresado en términos finitos contradictorio a lo expresado por Zenón. Concluyendo así que la paradoja de Zenón es una paradoja, porque la situación planteada contradice cualquier experiencia cotidiana, al considerar que el tiempo necesario para recorrer un número infinito de momentos es finito. La *Figura 12* ilustra esta paradoja.

### Figura 12

*Trayecto realizado por el corredor*



*Nota.* Tomado de *Calculus Volumen I*, (P- 458), por Tom Apóstol, 1999. Fuente: Reverte ediciones.

Para resolver la paradoja de Zenón se supone que el corredor, corre a una velocidad constante, inicialmente se necesita  $T$  minutos para la primera mitad del recorrido  $\frac{1}{2}$ , luego  $\frac{T}{2}$  para  $\frac{1}{4}$  del recorrido del recorrido, un  $\frac{T}{4}$  para un  $\frac{1}{8}$  del recorrido y un  $\frac{T}{8}$  para un  $\frac{1}{16}$  del recorrido. En general, se puede expresar la distancia comprendida entre  $\frac{1}{2^n}$  y  $\frac{1}{2^{n+1}}$  en donde se necesitará  $\frac{T}{2^n}$  minutos. La suma de lo anteriormente descrito se puede expresar de la siguiente manera:

$$T + \frac{T}{2} + \frac{T}{4} + \frac{T}{8} + \cdots + \frac{T}{2^n} + \cdots$$

Esta suma es conocida cómo la suma de la serie infinita. Desde el punto de vista de la física un corredor que va una velocidad constante llegará a la meta en el doble del tiempo que necesita para llegar a la mitad del recorrido, entonces, la suma de los momentos recorridos por él corredor se puede expresar de la siguiente forma:

$$T + \frac{T}{2} + \frac{T}{4} + \frac{T}{8} + \cdots + \frac{T}{2^n} + \cdots = 2T$$

Siendo así, se nombra esta serie como  $S_n$ , la cual se puede expresar como:

$$S_n = T + \frac{T}{2} + \frac{T}{4} + \frac{T}{8} + \cdots + \frac{T}{2^n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T}{2^n}$$

Por lo anterior es posible expresar las sumas parciales de  $S_n$  como:

- $S_1 = T$
- $S_2 = T + \frac{T}{2} = \frac{3T}{2}$
- $S_3 = T + \frac{T}{2} + \frac{T}{4} = \frac{7T}{4}$
- $S_4 = T + \frac{T}{2} + \frac{T}{4} + \frac{T}{8} = \frac{15T}{8}$

Induciendo así la siguiente fórmula general de las sumas parciales:

$$S_n = \left( \frac{2^{n+1} - 1}{2^n} \right) T \quad \text{tal que } n \in \mathbb{Z}^+$$

Entonces:

$$T + \frac{T}{2} + \frac{T}{4} + \frac{T}{8} + \cdots + \frac{T}{2^{T-1}} = \left( \frac{2^{T+1} - 1}{2^T} \right)$$

Para conocer la convergencia o divergencia de la serie tomamos el límite de  $S_T$ :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2^{T+1} - 1}{2^T}$$

Como 2 es constante, por la ley del múltiplo constante para el límite, es válido reescribirlo de la siguiente manera:

$$2 \cdot \left(1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 2 \cdot (1 - 0) = 2$$

Como el límite de la forma general de las sumas parciales se aproxima a un número en específico, en este caso 2, es posible afirmar entonces que la serie converge.

Entonces la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{T}{2^n}$ , como se observa, es una serie geométrica tal que:

T: primer término

$\frac{T}{2}$ : razón común

Las series son una herramienta fundamental que permiten explorar conceptos abstractos como el infinito. A través de representaciones algebraicas, las series pueden expresar de manera precisa y concisa patrones infinitos. Un ejemplo de ello es “la sucesión 1, 2, 3, 4, 5, 6 ... tiene infinitos términos debido a que dado un número  $n$  siempre se puede hallar su sucesor o  $n + 1$ ” (Páez y Bejarano, p.36). Otro ejemplo de esto es la serie geométrica, en la que cada término se obtiene multiplicando el anterior por una constante, conocida como razón común; así mismo, la serie converge a un valor finito, lo que sugiere que incluso en un conjunto infinito de términos, la suma total puede ser finita. Esto muestra cómo la representación algebraica puede ayudarnos a conceptualizar y entender el infinito de una manera concreta, siendo este conocido como el infinito actual.

Por otro lado, las representaciones numéricas permiten calcular aproximaciones de la suma de una serie utilizando un número finito de términos, un ejemplo de esto son las sumas parciales de la serie geométrica, en cuantos más términos incluyamos en nuestra suma, más cerca estaremos del valor real. Este proceso de aproximación numérica nos ayuda a entender el infinito de una manera práctica, conocido como el infinito potencial.

En conclusión, como lo mencionan Páez y Bejarano (2022) “una cosa es poder hacerlo y otra es, tenerlo ya hecho” (p.36), aludiendo a la distinción entre infinito potencial y al infinito actual respectivamente; además, las series nos permiten explorar el infinito actual a través de representaciones algebraicas, mientras que las representaciones gráficas y numéricas nos ayudan a identificar y comprender el infinito potencial, facilitando así la exploración de los conceptos del infinito en las matemáticas.

### 2.3. El material didáctico y los recursos

Los materiales didácticos se han convertido en una herramienta importante en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, siendo fundamental en el proceso de aprendizaje, puesto que aporta a la comprensión de un concepto matemático. Torres y Casallas (2021) mencionan que “La manipulación permite el descubrimiento de propiedades de los objetos matemáticos por medio de los sentidos” (p. 209); en este mismo sentido Dienes (citado por Resnick, 1990) afirma que “las materializaciones múltiples facilitan el proceso de ordenación y clasificación que es la abstracción de un concepto” (p. 149).

Distintos autores han propuesto caracterizaciones para el término material didáctico. Para Morales (2012), por ejemplo, material didáctico es “el conjunto de medios materiales que intervienen y facilitan el proceso de enseñanza-aprendizaje” (p. 10). Estos pueden ser físicos o virtuales, y despiertan interés en los estudiantes y sirve de apoyo para el profesor en el aula; un material didáctico permite adaptarse a cualquier contenido.

Torres y Casallas (2021) ponen el acento en el material como mediador de la comprensión, así, definen material como “cualquier objeto manipulativo que puede mediar para la comprensión de un saber. Puede ser estructurado o no estructurado.” (p. 3), refiriéndose al material estructurado como aquel creado especialmente para el uso exclusivo de la enseñanza y aprendizaje, en este caso, de las matemáticas. Mientras que el material no estructurado es aquel que no ha sido diseñado con el propósito específico de generar algún aprendizaje, pero que puede usarse para ello. En donde la manipulación de los objetos juega un papel importante, para la uso y comprensión de un concepto por medio de los sentidos, puesto que, “permiten imaginar la situación planteada y representarla a través de un modelo” (Alcina y Planas, 2008, como se citó en Morales 2012).

Resnick (1990) menciona que el material estructurado “materializa características, tanto cualitativas como cuantitativa de las matemáticas” (p. 144), es decir, permite experimentar propiedades de un concepto matemático, lo cual, se puede favorecer con el acompañamiento de tareas apropiadas, que contribuyen al estudiante de pasar de lo concreto a lo simbólico.

Las tareas, las guías o talleres, los videos, entre otras herramientas o recursos sirven de apoyo para alcanzar los objetivos establecidos, por ejemplo, con la implementación del material

didáctico. Sobre los recursos también hay sus distinciones y posturas. Torres y Casallas (2021) definen recurso como: “Herramienta de apoyo con una intención preestablecida. Puede ser manipulativo o de ayuda al estudio” (p. 208), recurso manipulativo es aquel que sirven como un canal de exploración, expresión y cálculo; y los recursos como ayuda al estudio son aquellos que se ocupan, en ocasiones, de algunas funciones del profesor, siendo un apoyo para la enseñanza.

Para la apropiada incorporación del material didáctico en el aula es el docente quien juega un papel fundamental, debido a que es él quien promueve su uso, logrando así que los estudiantes consigan materializar algunos aspectos abstractos de un concepto matemático a partir de lo concreto y físico, aportando al aprendizaje significativo.

A partir de lo anterior, para este trabajo se considera como material didáctico matemático cualquier objeto concreto, físico y manipulativo, que permita y facilite la comprensión específica de un objeto matemático, para el que el uso de los sentidos del tacto y la visión sean una herramienta fundamental.

Seguidamente, se presenta la *Tabla 5* en la que se describen los criterios de tipificación del material didáctico, el cual se clasifica según su utilidad, contenido matemático, versatilidad, criterio y modalidad de uso según los autores:

Flores et al. (2011) y Mendoza et al. (s.f.)

### 2.3.1. Criterios de tipificación de material didáctico

**Tabla 5**

*Criterios de tipificación del material didáctico*

<b>Criterio de tipificación</b>	<b>Definición</b>	<b>Clasificación</b>
<b>Según su utilidad</b>	Inicialmente, para clasificar el material didáctico es necesario dar respuesta a la pregunta ¿Para qué sirve? Y ¿En qué momento de utiliza?, dicho lo anterior, el	Hace referencia al material diseñado para introducir un tema, por ejemplo: los ábacos, las regletas de Cuisenaire y los bloques base 10.
	<b>Pre-instruccional</b>	

<b>Criterio de tipificación</b>	<b>Definición</b>		<b>Clasificación</b>
	material didáctico se puede clasificar	<b>Construccional</b>	Hace referencia al material diseñado como apoyo para trabajar un tema o concepto, por ejemplo: los tangram, los pentominós y los geoplanos.
		<b>Pos-instruccional</b>	Hace referencia al material diseñado para repasar un tema ya tratado, por ejemplo: dominós algebraicos, loterías y dados numéricos.
<b>Según su contenido matemático</b>	De acuerdo con el contenido, los materiales se clasifican en materiales de	<b>Contenido geométrico</b>	Uso de materiales relacionados con el estudio propio de la geometría, en temas como: formas o figuras en el plano, semejanza, congruencia de triángulos, noción de área y volumen.
		<b>Contenido aritmético</b>	Uso de materiales relacionados con temas propios de la aritmética, que permite enseñar: sistemas de numeración,

<b>Criterio de tipificación</b>	<b>Definición</b>	<b>Clasificación</b>
<b>Contenido algebraico</b>		<p>los números, operaciones aritméticas, etc.</p> <p>Uso de materiales vinculados con la rama de las matemáticas que posibilita el estudio de contenidos del algebra como: la factorización, sistemas de ecuaciones, polinomios cuadráticos, entre otros.</p>
<b>Contenido estadístico y probabilístico</b>		<p>Uso de material relacionado directamente con la rama de las matemáticas que estudia la estadística, como: gráficas, análisis de datos, conjuntos de datos, probabilidad, entre otros.</p>
<b>Contenido de análisis (cálculo)</b>		<p>Uso de material relacionado con la rama de las matemáticas que estudia el cálculo, gráficas de funciones, estudio y análisis del movimiento, por medio de software especializados.</p>

<b>Criterio de tipificación</b>	<b>Definición</b>	<b>Clasificación</b>	
<b>Según el criterio</b>	Los materiales didácticos se pueden clasificar con base en los siguientes criterios	<b>Versatilidad</b>	Hace referencia a la capacidad que tiene el material para el estudio de uno o varios conceptos y propiedades matemáticas.
		<b>Edad escolar</b>	Se refiere a la edad adecuada para el uso e implementación del material.
		<b>Vinculación prioritaria</b>	Se refiere al material relacionado únicamente a un concepto matemático determinado.
<b>Modalidad de uso</b>	Los materiales didácticos se utilizan en la educación matemática con tres objetivos diferentes	<b>Para favorecer la adquisición de rutinas</b>	Diseñado principalmente para un uso específico, principalmente de consolidación de conceptos o ejercitación de procedimientos.
		<b>Para modelizar ideas y conceptos matemáticos</b>	Diseñado para modelar algunas características o propiedades de un concepto matemático, en ocasiones este no permite

Criterio de tipificación	Definición	Clasificación
		reconocer todas las propiedades del concepto, por ejemplo: el geoplano es una herramienta útil para construir figuras geométricas, pero con este material no es posible construir un triángulo equilátero.
	<b>Para plantear problemas</b>	Son materiales didácticos que no generan respuesta a conceptos o procedimientos, en ocasiones el material puede ser un generador de preguntas.

## 2.4. Asuntos de la enseñanza y el aprendizaje sobre las series

En este apartado se detalla el marco didáctico relacionado con las series; en principio, se describen los sistemas de representación y sus tipos; además, se alude a la visualización por ser fundamental en el proceso de manipulación del material didáctico; finalmente se mencionan algunos materiales didácticos para la enseñanza de las series.

### 2.4.1. Sistema de representación

Según Rico et al. (2008), “Los sistemas de representación son centrales en la caracterización del significado de las nociones matemática, contribuyen a la comprensión de conceptos y procedimientos” (p. 15). De acuerdo con el sistema, es posible destacar algunas de

las características o propiedades del objeto. Los sistemas de representación permiten organizar y estructurar la información; sus tipos son: sistema simbólico, sistema verbal y el sistema gráfico.

### 2.4.1.1. Sistema representación simbólico

Se refiere a la representación de los objetos mediante símbolos, entre los que se incluyen las cifras habituales representación numérica para denotar las cantidades. En las series geométricas se encuentran dos tipos de representación simbólica, así:

Representación simbólico-numérica larga:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

Representación simbólico-numérica corta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

Representación simbólica-algebraica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \dots$$

### 2.4.1.2. Sistema representación verbal

Se refiere a la forma como se expresa y como se describe un objeto matemático de forma escrita y oral; en el caso de las series geométricas, tenemos, por ejemplo: «la serie de un medio», para referirse a  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$ . También se usa esta representación cuando se define una serie geométrica, por ejemplo:

**Serie geométrica:** Una serie geométrica es una serie cuyos sumandos, salvo el primero, es igual al anterior multiplicado por un número constante llamado razón común, representada por  $r$ ,  $r \in \mathbb{R}$ .

### 2.4.1.3. Sistema representación gráfica

También conocido como representación visual; se refiere a la forma de interpretación del objeto mediante tablas, gráficas, mapas, dibujos, ilustraciones e imágenes; por ejemplo, en la

*Figura 13*, se observa una representación gráfica, en el plano cartesiano, para la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$  y otra representación gráfica de la misma serie con base en un triángulo rectángulo. Este último caso, suele denominarse representación gráfica-geométrica o solo representación geométrica. De acuerdo con la *Figura 4*.

Otro ejemplo se puede ver en la *Figura 5*, se observa una representación gráfica en imagen o dibujo para la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ .

Tanto las representaciones gráficas como las simbólicas tienen un lugar en la teoría del aprendizaje significativo de Bruner (1964 citado por Resnick y Ford, 1990), las primeras nominadas como representaciones icónicas y las segundas de la misma manera (simbólicas); no obstante, Bruner incluye como primer nivel del sistema de representaciones a las manipulativas, también llamadas enactivas, físicas o concretas, aquí es donde se ubican los materiales o recursos didácticos.

#### ***2.4.2. La visualización***

La visualización se puede definir como “el conjunto de procesos y habilidades de los sujetos para formar, trazar y manipular imágenes mentales o físicas, usándolas efectivamente para establecer relaciones entre objetos matemáticos” (Jiménez et al. 2011, p. 211, citado en Torres y Casallas 2021). Con esta caracterización, un material didáctico se convierte en una herramienta que puede promover en los estudiantes el desarrollo del proceso visualización. Esto debido a que, “sirve para darle a los conceptos de las matemáticas una representación visual o física que facilite la comprensión de los temas” (Guerrero, 2019, p.1).

La visualización en el aula es fundamental para promover un aprendizaje significativo y resolver las dificultades que enfrentan los estudiantes, ya que muchas de estas dificultades provienen de la naturaleza formal y abstracta de los conceptos matemáticos. Además, la enseñanza de las matemáticas mediante la visualización mejora la comprensión y enriquece el conocimiento en diversos campos de estudio al involucrar el uso de los sentidos, como la visión, permitiendo que los estudiantes capten mejor la realidad que los rodea.

Además, Gutiérrez et al. (2018) mencionan que para desarrollar el proceso de visualización se debe considerar dos tipos de datos, datos externos (e.g., imágenes, figuras,

información verbal,) y datos internos (e.g., las imágenes mentales, el pensamiento visual y razonamiento matemático). Estos diversos tipos de datos permiten una interpretación más intuitiva de los datos y conceptos matemáticos, asunto clave cuando se usa material didáctico en procesos de aprendizaje.

### ***2.4.3. Material didáctico y recursos para la enseñanza del objeto series***

En la presente sección se alude a los diferentes materiales didácticos asociados con la enseñanza de las series. En un principio, mencionamos algunos materiales didácticos manipulables utilizados y un recurso digital, disponible en la web, que puede ser útil para la enseñanza y aprendizaje de las series en el aula.

Después de realizar una revisión bibliográfica en diferentes libros y páginas web, acerca de material didáctico para la enseñanza y aprendizaje de las series en la educación básica secundaria, media y primeros semestres de educación superior, no se encontró alguno referido a ello. Sin embargo, sí se encontró alguna referencia para el contexto estudiantes de básica primaria como palillos o palitos de paleta, policubo y materiales no estructurados como juegos para reforzar series numéricas (ver, por ejemplo, el canal de YouTube «Con mami aprendo» disponible en <https://www.youtube.com/watch?v=QPk7hZOtahk>).

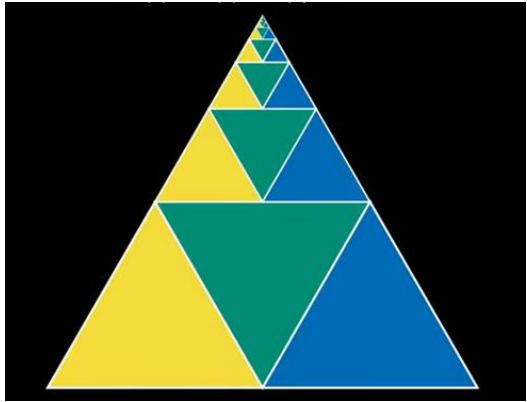
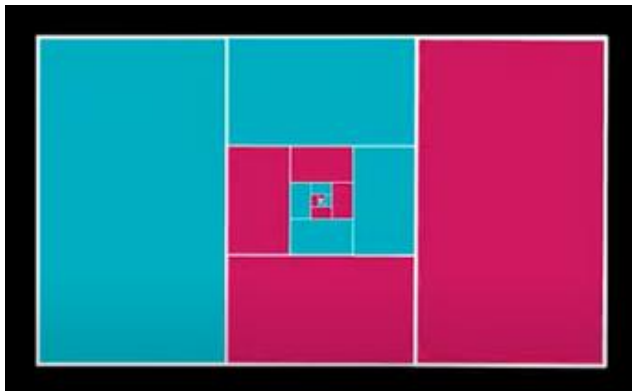
Si bien no logramos encontrar material físico para la enseñanza de las series para niveles educativos diferentes al de básica primaria, sí se encuentran recursos didácticos disponibles en la web que pueden ser de gran ayuda durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de las series. Uno de ellos es el canal en YouTube «Mathematical Visual Proofs».

En «él se encuentran algunos videos sobre representaciones geométricas de manera gráfica con ilustraciones de diferentes conceptos matemáticos que se enseñan durante la educación secundaria y superior de una forma llamativa. Entre los videos se encuentran algunos relacionados con sucesiones y series, en especial con las series geométricas. El canal ofrece algunos videos que muestran la representación geométrica y simbólica de algunas series geométricas, estas permiten observar algunos de sus elementos, como: la suma, convergencia, primer término y razón común. También, se puede experimentar, a través de la visualización, la noción infinito y convergencia tras la serie.

A continuación, en la *Tabla 6* se muestran las series geométricas encontradas en el canal de YouTube citado, con su respectiva representación geométrica-gráfica y simbólica.

**Tabla 6<sup>2</sup>**

*Representaciones de series geométricas Mathematical Visual Proofs*

#	Simbólicamente	Gráficamente
1.	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{3}$ $\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left(\frac{1}{4}\right)^4 + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n + \dots = \frac{1}{3}$	<p><b>Figura 13</b> <i>Serie geométrica 1/4</i></p> 
2.	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{2}$ $\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \left(\frac{1}{3}\right)^5 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n + \dots = \frac{1}{2}$	<p><b>Figura 14</b> <i>Serie geométrica 1/3</i></p> 

<sup>2</sup> Las representaciones gráficas en imágenes de las series geométricas que aparecen en esta tabla fueron tomadas del canal de YouTube «Mathematical Visual Proofs». Fuente: Mathematical Visual Proofs [video], sin autor, 2022, Beautiful Geometry behind Geometric Series (8 dissection visual proofs without words). <https://www.youtube.com/watch?v=JteQEN1XPyc&list=PLZh9gZlvXQU-s-xO5Z-dJ92Hzomhh3sfj7>

#	Simbólicamente	Gráficamente
---	----------------	--------------

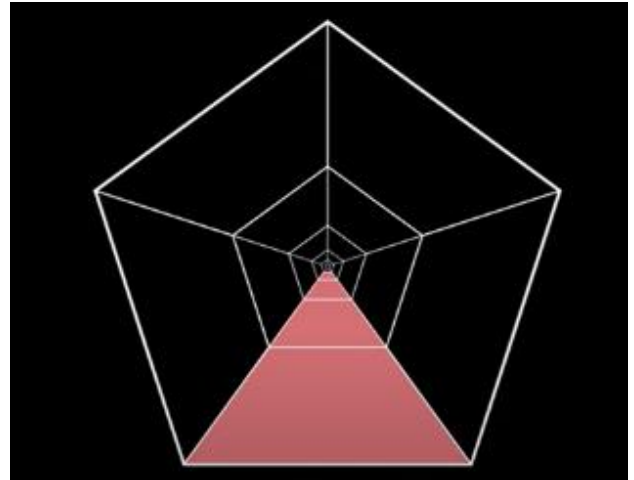
3.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^n} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{6^4} + \dots + \frac{1}{6^n} + \dots = \frac{1}{5}$$

Figura 15

Serie geométrica 1/5



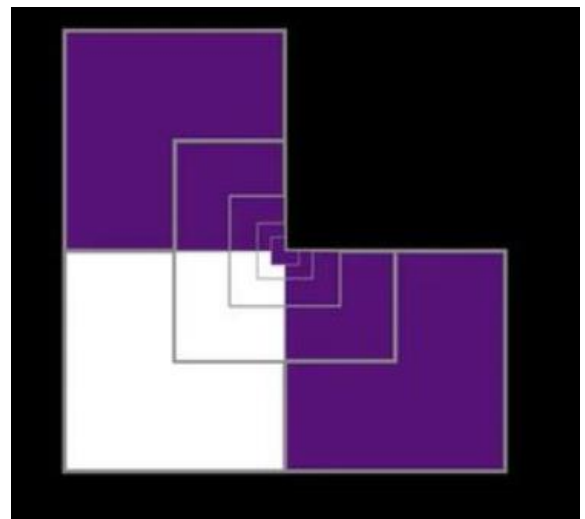
4.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^n = \frac{2}{3}$$

$$1 - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 - \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \dots - \left(\frac{1}{2}\right)^n + \dots = \frac{2}{3}$$

Figura 16

Serie geométrica (-1/2)

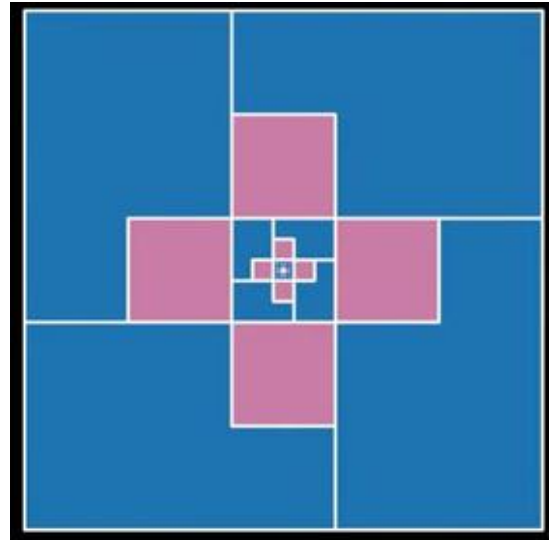


#	Simbólicamente	Gráficamente
---	----------------	--------------

5.

$$4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} = 1$$

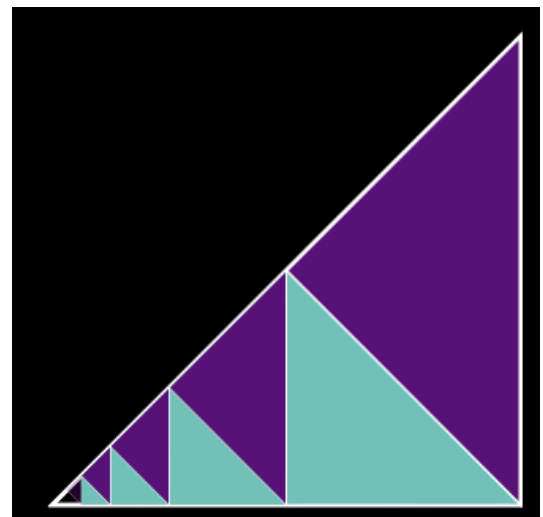
$$4 \cdot \frac{1}{5} + 4 \cdot \frac{1}{25} + 4 \cdot \frac{1}{125} + \dots + 4 \cdot \frac{1}{5^n} + \dots = 1$$

**Figura 17***Serie geométrica 4/5*

6.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 1$$

**Figura 18***Serie geométrica 1/2*

#

Simbólicamente

Gráficamente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

7.

$$\frac{1}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^3 + \left(\frac{1}{5}\right)^4 + \dots + \left(\frac{1}{5}\right)^n + \dots = \frac{1}{4}$$

Figura 19

Serie geométrica 1/5



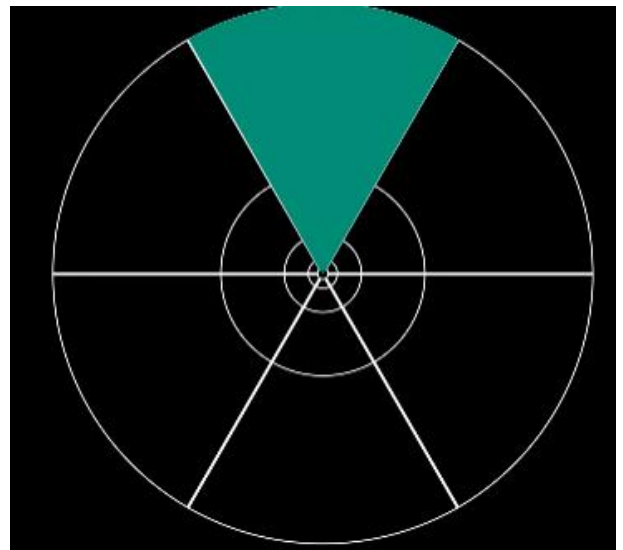
Figura 20

Serie geométrica 1/7

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{7}\right)^n$$

8.

$$\frac{1}{7} + \left(\frac{1}{7}\right)^2 + \left(\frac{1}{7}\right)^3 + \left(\frac{1}{7}\right)^4 + \dots + \left(\frac{1}{7}\right)^n + \dots = \frac{1}{6}$$



9.

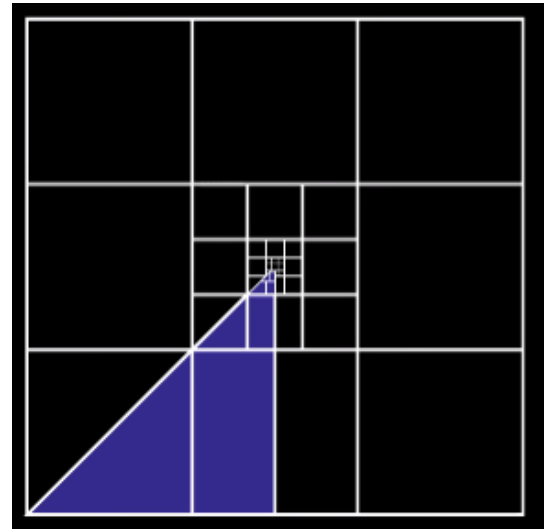
#	Simbólicamente	Gráficamente
---	----------------	--------------

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9^n}$$

**Figura 21**

*Serie geométrica 1/9*

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{9^4} + \frac{1}{9^5} + \dots + \frac{1}{9^n} + \dots = \frac{1}{8}$$



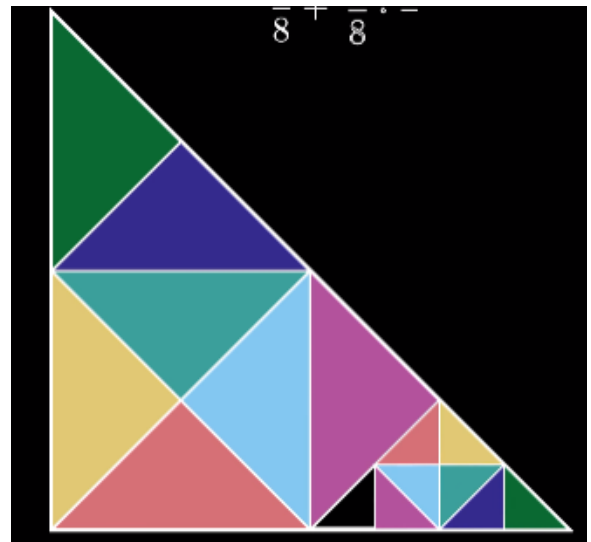
**Figura 22**

*Serie geométrica 7/8*


$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{8^n}$$

10.

$$\frac{7}{8} + \frac{7}{8^2} + \frac{7}{8^3} + \frac{7}{8^4} + \frac{7}{8^5} + \dots + \frac{7}{8^n} + \dots = 1$$



11.

#	Simbólicamente	Gráficamente
	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8 \cdot 2^n}$	<p><b>Figura 23</b> <i>Serie geométrica 1/16</i></p>
	$\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{95} + \dots + \frac{1}{8 \cdot 2^n} + \dots = \frac{1}{4}$	

*Nota.* Series geométricas encontradas en el canal de You Tube «Mathematical Visual Proofs» (2021) con su representación simbólica y gráfica. Fuente: autoría propia.

## 2.5. Lugar de las series en el currículo escolar colombiano

A continuación, se analizarán algunos documentos que han guiado el currículo escolar colombiano, centrandó la atención en el lugar que el objeto *series geométricas* ocupa en él.

Estos documentos serán presentados de manera cronológica de la siguiente manera: Resolución 277 de 1975, renovación curricular, lineamientos curriculares de matemáticas, en adelante –lineamientos–, estándares básicos de competencias en matemáticas en adelante –estándares– y derechos básicos de aprendizaje en matemáticas, en adelante –derechos básicos–.

### 2.5.1. Resolución 277 de 1975

Este documento fue diseñado como una renovación del currículo en Colombia para programas de estudio en la educación media, teniendo en cuenta los programas de estudios adoptados en 1974 y de las resoluciones correspondientes a las modalidades de bachillerato en las siguientes áreas: Matemáticas, Sociales, Ciencias, Estética y Educación Física; en este caso se hará mención del área de Matemáticas.

Este documento está organizado a través de seis cursos, los de 1.º a 6.º de bachillerato, hoy 6.º a 11.º: Curso I: ARITMÉTICA Y NOCIONES DE GEOMETRÍA, Curso II: ARITMÉTICA Y GEOMETRÍA, Curso III: ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA, Curso IV: ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA, Curso V: GEOMETRÍA ANALÍTICA Y TRIGONOMETRÍA, Curso VI: ANÁLISIS MATEMÁTICO.

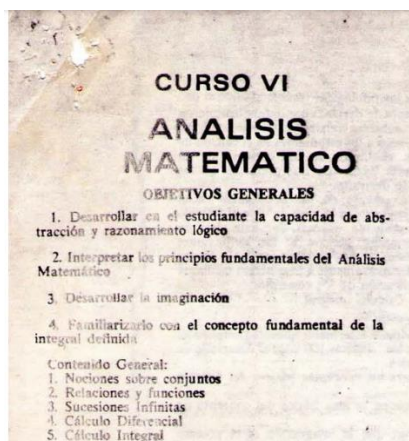
Cada curso está dividido por unidades, estas tienen un objeto matemático como título, cada unidad está diseñada bajo unos objetivos específicos, los cuales se espera que el estudiante cumpla, seguidamente de una lista de contenidos que el profesor deberá enseñar. El curso VI (o sea el de 6.º de bachillerato), «Análisis matemático», además de lo mencionado, propone actividades de aprendizaje como sugerencias didácticas para ayudar al estudiante en la comprensión del tema, puesto que los niveles del curso tienen un nivel más complejo.

En el curso VI se encuentran los contenidos: concepto de sucesión, representación gráfica, clasificación, acercamiento de la sucesión del límite, el concepto del límite de una

sucesión, entre otras. Este curso tiene como objetivo desarrollar en el estudiante la capacidad de abstracción y razonamiento, interpretar los principios fundamentales del análisis matemático, desarrollar la imaginación y familiarizarlo con el concepto fundamental de la integral definida, como se muestra en la *Figura 24*.

### Figura 24

*Objetivos generales del curso VI Análisis matemáticos*



*Nota.* Contenido general que aborda la renovación curricular 277. Fuente: *Resolución 277 Programa de matemáticas*, (p. 13), por Ministerio de educación, (1975), MEN Editorial.

El curso VI consta de cinco unidades las cuales son:

Nociones sobre conjuntos, relaciones y Funciones, sucesiones Infinitas, cálculo Diferencial y cálculo Integral, en cada unidad se establece objetivos específicos que el estudiante debe alcanzar, “las tres primeras unidades contienen conceptos básicos que debe poseer un estudiante que desee iniciar un curso elemental de cálculo diferencial e integral” (M.E.N., 1975) p.13). En la unidad N°3, «Sucesiones infinitas» se tratan los temas: sucesión números reales, clasificación de las sucesiones, propiedades fundamentales de los límites, definición intuitiva del concepto de continuidad, ejemplos para calcular o deducir el término  $n$ -ésimo y comentarios acerca de la paradoja de Zenón, en especial de la del corredor.

Seguidamente del contenido que el profesor debe desarrollar, este documento propone, como sugerencia didáctica, actividades de aprendizaje que complementen el tema enseñado, entre las cuales se encuentra la conceptualización de la paradoja de Zenón, presentándolo de la siguiente manera: “presentar a los estudiantes comentarios acerca de la

paradoja de Zenón, llamada del Corredor, que crea una crisis en la matemática antigua” (Resolución 277 de 1975, p.14).

Esta era la propuesta curricular que había para la enseñanza y aprendizaje en matemáticas, en la que se puede observar que para ese entonces las sucesiones eran un tema de estudio mientras que las series no.

### ***2.5.2. Renovación curricular***

En 1991 se da la conocida Renovación curricular, en este marco se publican unos documentos dirigidos a los profesores, en dónde se presentan algunas sugerencias metodológicas que el docente puede poner en práctica para el cumplimiento del currículo establecido.

La propuesta curricular inicia con un marco general, en el que se realiza una introducción de lo que se va a encontrar en el programa de matemáticas para la educación básica. Posteriormente, se encuentra el enfoque, el cual está dividido en dos partes; primero, la justificación, en esta se habla de la importancia que tienen las matemáticas en la humanidad y, en segundo lugar, el enfoque de sistemas; adicionalmente, muestra el paso de la matemática conceptual a la matemática abstracta.

Por otro lado, se nombran los objetivos que debe cumplir el estudiante, los cuales están categorizados en clase A “objetivos generales del área” y la clase B “objetivos generales del área en la educación básica”. Se espera que en la clase A el estudiante alcance once objetivos y en la clase B veinte; en la clase A algunos de los objetivos a alcanzar son: desarrollar habilidades que le permita razonar lógica, crítica y objetivamente, ampliar su capacidad para realizar generalización interpretar la realidad a través de modelos matemáticos, entre otros; para la clase B son: realizar operaciones entre conjuntos, identificar diferentes sistemas métricos, calcular longitudes, áreas y volúmenes de figuras.

Luego, se alude a la estructura del área de Matemáticas en el que señala la organización de los contenidos, el orden y secuencia, el grado de profundidad, desarrollo del enfoque, los contenidos de la básica secundaria de 6.º a 9.º, los cuales se distribuyen de la siguiente manera: sistemas numéricos, sistemas geométricos, sistemas métricos, sistemas

analíticos, sistemas de datos, sistemas lógicos, sistemas de conjuntos y sistemas de relaciones y operaciones, seguidamente de la explicación de lo que estudia cada sistema.

Además, la renovación curricular anexa dos tablas en la que se presentan los contenidos básicos. La primera explicita los contenidos para la educación básica primaria, y la segunda, los contenidos para la educación básica secundaria, es decir, de grado 6.º a 9.º, con su respectivo sistema y temas a desarrollar en cada uno de los cursos.

En los contenidos para grado 9.º aparecen: funciones de gráfica y ecuaciones lineales, funciones y ecuaciones cuadráticas, solución de ecuaciones cuadráticas, factor común, cuadrado perfecto, diferencia de cuadrados, función cúbica y ecuaciones cúbicas, función exponencial, polinomios de una variable, operaciones:  $+$ ,  $-$ ,  $\times$ ,  $\div$ , sucesiones y series: límites, progresiones, decimales infinitos e interés: simple y compuesto.

Respecto al contenido, este documento consta de VII unidades, la unidad V, titulada «Sucesiones, serie y sus aplicaciones a las matemáticas financieras», consta de tres ítems: introducción, objetivos generales, objetivos específicos, contenidos y sugerencias metodológicas.

En la introducción del capítulo V se realiza un preámbulo de los temas a desarrollar entre los cuales se encuentra: la noción intuitiva del límite, progresiones aritméticas y sus aplicaciones, la paradoja de Zenón y préstamos de interés simple y compuestos.

Entre los objetivos generales se encuentran:

Reconocer sucesiones y series, reproducir y extender esquemas o patrones que se repiten, afinar habilidades mentales del pensamiento inductivo, como detectar, reproducir y extender esquemas o patrones que se repiten, estudiar algunas sucesiones y series específicas, reconocer intuitivamente el concepto de límite, reconocer progresiones aritméticas y progresiones geométricas, entre otros. (renovación curricular 1991, p.136)

Dentro de los objetivos específicos se encuentra: “*Reconocer una serie como una sucesión formada por la suma de términos de otra sucesión*”. (MEN, 1991, p. 162)

Dentro del contenido propuesto se encuentra: la “sucesión como función, sucesiones infinitas y finitas, sucesiones crecientes y decrecientes, serie, límite de sucesiones crecientes y decrecientes, serie aritmética, números pitagóricos, límite de una

progresión geométrica, serie geométrica, límite de una serie geométrica, decimales infinitos periódicos, las paradojas de Zenón de Elea, sucesión de los montos a interés compuesto, valor presente y valor futuro de un capital”.

La propuesta curricular incluye la siguiente definición de serie geométrica: “*La sucesión formada por las sumas parciales finitas de los  $n$  primeros términos de una progresión geométrica se llama Serie geométrica.*

$$\text{Si } \langle a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \rangle$$

*es una progresión geométrica finita, la serie geométrica correspondiente es*  $\langle a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n \rangle$ ” (MEN, 1991, p.178)

Luego está la demostración de la suma de los términos de la serie geométrica acompañada de un ejemplo.

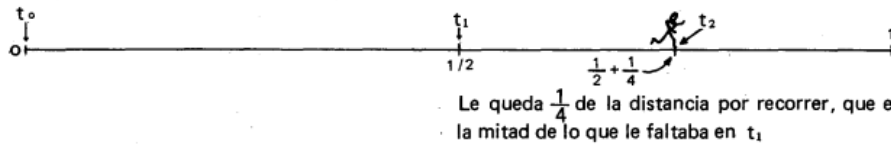
Se continúa con la explicación sobre el límite de una serie geométrica, mediante algunos ejemplos y preguntas como, ¿Tiene límite esta sucesión? ¿Por qué?

Por último, en relación con las series geométricas, el documento presenta una propuesta como actividad aprendizaje, mediante dos de las cuatro paradojas de Zenón, siendo estas una aplicación de límites, sucesiones y series infinitas. Entre las dos paradojas que menciona el MEN está la paradoja de la dicotomía, en un principio, explica en qué consiste, acompañándola de algunas imágenes que permiten dar una claridad de la idea que tenía Zenón sobre la paradoja, como se observa en la *Figura 25*.

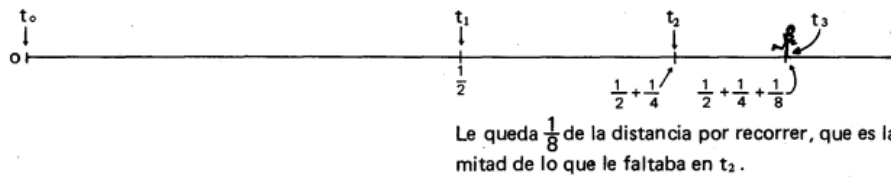
**Figura 25**

*Representación de la paradoja de la dicotomía propuesta por de Zenón*

Luego en  $t_2$  ya avanzó  $\frac{1}{4}$  más de la distancia, y el recorrido total es:  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ .

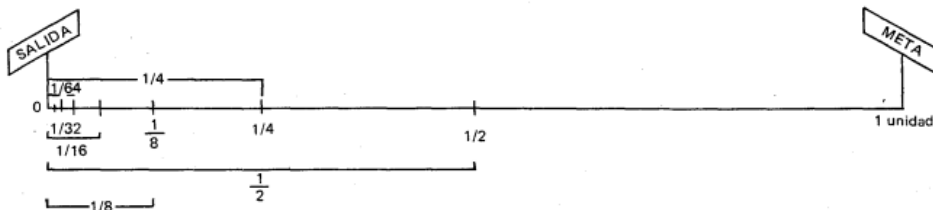
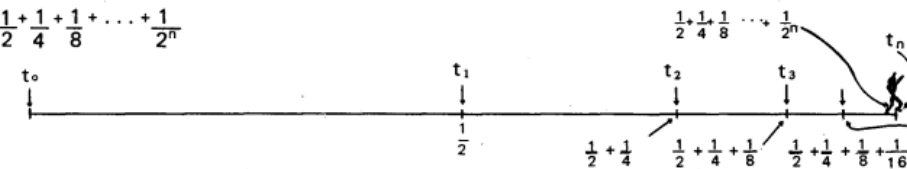


Después en  $t_3$  recorre  $\frac{1}{8}$  más de la distancia y hasta ese instante ha recorrido:  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ .



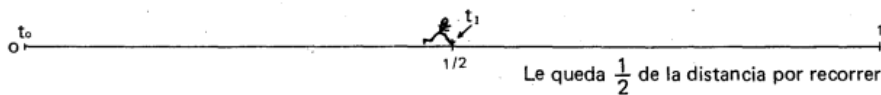
Cuando ha transcurrido el enésimo instante, o sea en el tiempo  $t_n$  el móvil avanzó  $\frac{1}{2^n}$  más de la distancia, y el recorrido total es:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}$$



Veamos ahora la distancia total recorrida por el móvil en cada momento o instante, arrancando en el punto 0 a la hora  $t_0$ .

Cuando ha transcurrido el primer instante o sea en el tiempo  $t_1$ , ha recorrido  $\frac{1}{2}$  de la distancia:  $\frac{1}{2}$ .



*Nota.* Explicación como surge la serie por medio de la paradoja de la dicotomía. Fuente: *Renovación curricular*, (p.183), Ministerio de Educación, 1991, MEN editorial.

Seguidamente, hay una alternativa para resolver dicha paradoja, dejando dos preguntas que pueden ser de interés para el lector, acerca de la existencia del límite y cómo es posible hallarlo, estas son: ¿Tiene límite esta serie? ¿Cuál es el límite?

Finalmente, se concluye con algunas discusiones y observaciones sobre la paradoja de Zenón, algunas de estas son:

- Aunque la sucesión de Zenón, que está formada por los trayectos recorridos en cada instante, es decreciente, sin embargo, la serie de Zenón es creciente.
- La sucesión de Zenón tiene límite cero, porque cada trayecto va siendo cada vez más pequeño, y llega un momento en que por pequeño que sea la distancia fija desde el origen que uno quiere estipular, todos los demás términos van a estar más cerquita del origen que de lo que se estipuló.
- Por lo tanto, uno podría responderle a Zenón que el límite de la serie de los puntos en donde se encuentra el móvil es uno, y que por lo tanto el móvil sí llegaría a uno” (MEN, 1991, p. 185)

En conclusión, la propuesta de programa para grado noveno de la Renovación curricular de 1991 incluye el estudio de las series, entre ellas, la serie geométrica, su convergencia y una propuesta didáctica para enseñar este tipo de series, como la paradoja de la dicotomía de Zenón.

### ***2.5.3. Lineamientos curriculares en Matemáticas***

La serie lineamientos curriculares matemáticas del año 1998 es un documento diseñado por el Ministerio de Educación Nacional en conjunto con docentes, quienes proponen la implementación en el currículo mediante procesos, contextos y conocimientos.

En la búsqueda de información asociada con series y sucesiones, el documento no contiene estudios relacionados a estos temas, salvo una situación referida al desarrollo del proceso de razonamiento, en la que se involucra la progresión aritmética. La situación es esta: “Las medidas de los ángulos de un triángulo forman la progresión aritmética  $AB$ ,  $CD$ ,  $EF$  sobre la que se sabe: la diferencia es  $FF$ ,  $EF$  es primo y  $AB$  es un cuadrado. ¿Cuáles son las medidas?” (MEN, 1998, p.62).

#### ***2.5.4. Estándares básicos de competencias en matemáticas***

Los estándares básicos de competencias en matemáticas son el producto de un trabajo en conjunto con el MEN y las facultades de educación del país (Ascofade) siendo estos una guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer en relación con las matemáticas.

Se inicia detallando la importancia de las matemáticas en la educación, en la que se espera, formar ciudadanos competentes en la sociedad. Al igual que en los lineamientos curriculares, en este documento se hace alusión a los cinco procesos matemáticos los cuales son: formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar, y formular y ejercitar procedimientos. Estos procesos están relacionados con las competencias, el desarrollo adecuado de cada proceso logrando formar ciudadanos matemáticamente competentes, permitiendo que cada estudiante pueda ir pasando por los distintos conocimientos básicos, como lo son: el numérico, espacial, métrico o medida, el aleatorio y probabilístico y el variacional.

En el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, como su nombre lo dice, hace referencia a la variación y el cambio, al estudio de regularidades y patrones. Según el MEN (2006):

El desarrollo de este pensamiento se inicia con el estudio de regularidades y la detención de los criterios que rigen esas regularidades o reglas de formación para identificar el patrón que se repite periódicamente. Las regularidades (entendidas como unidades de repetición) se encuentran en sucesiones o secuencias que presentan objetos, sucesos, formas o sonidos, uno detrás de otro en un orden fijado o de acuerdo con un patrón. De esta manera, la unidad que se repite con regularidad da lugar a un patrón. (p. 66)

También, se hace referencia a las sucesiones, pues se dice que las sucesiones no deben ser explícitamente numéricas, también hay sucesiones de figuras o letras, siempre que sea posible expresar el siguiente elemento o término de manera oral o escrita, mediante dibujos y otras representaciones, las cuales permitan establecer el patrón o regularidad en la sucesión. El MEN (2006) plantea que es necesario incluir este tipo de actividades ya que estas permiten:

Para desarrollar este pensamiento desde los primeros niveles de la Educación Básica Primaria son muy apropiadas, entre otras, las siguientes actividades: analizar de qué forma cambia, aumenta o disminuye la forma o el valor en una secuencia o sucesión de figuras, números o letras; hacer conjeturas sobre la forma o el valor del siguiente término de la secuencia; procurar expresar ese término, o mejor los dos otros términos siguientes, oralmente o por escrito o por medio de dibujos y otras representaciones, e intentar formular un procedimiento, algoritmo o fórmula que permita reproducir el mismo patrón. Calcular los siguientes términos, confirmar o refutar las conjeturas iniciales e intentar generalizarlas (p.67)

Se encuentran algunos estándares de competencias relacionados con las sucesiones, algunos de estos en el ciclo uno de básica primaria de 1.º a 3.º. Lo que se espera aprenda el estudiante al terminar grado 3.º es:

- Reconozco y describo regularidades y patrones en diferentes contextos (numérico, geométrico, musical, entre otros)
- Construyo secuencias numéricas y geométricas utilizando propiedades de los números y de las figuras geométricas. (p. 81)

Para el ciclo de 4.º a 5.º, se mencionan los siguientes estándares propuestos en el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos los cuales se relacionan de manera implícita con el estudio de las series:

- Predigo patrones de variación en una secuencia numérica, geométrica y gráfica.
- Describo e interpreto variaciones representados en gráficos. (p. 83)

En el ciclo de 6.º a 7.º, en el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, se plantea el siguiente estándar relacionado con las series geométricas:

“Describo y represento situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas)” (p.85).

Para el ciclo 8.º a 9.º, se propone los siguientes estándares, en el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos:

- Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a pruebas conjeturas.

- Analizo los procesos infinitos que subyacen en las notaciones decimales (p.87)  
Por último, en el ciclo 10° a 11°, plantea los siguientes estándares, en el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos:

- Utilizo las técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos (p.89)

En conclusión, en los estándares básicos de competencias matemáticas se vislumbra la enseñanza de las sucesiones en la educación básica primaria, de manera intuitiva, como proceso, pero, parece que no como objeto, pues la relación con estas es a través de las sucesiones. Y, aunque no se evidencia el concepto de serie, se encuentran algunos estándares relacionados implícitamente con la enseñanza y aprendizajes de las series en la educación básica secundaria y media concernientes al tratamiento de procesos infinitos numéricos.

### ***2.5.5. Derechos básicos de aprendizaje***

El MEN presenta en el 2016 los Derechos básicos de aprendizaje (DBA), siendo este un conjunto de aprendizajes estructurales; es decir, un conjunto de conocimientos, habilidades y actitudes que otorgan un contexto cultural e histórico a quien aprende (MEN, 2016, p. 6).

La estructura de los DBA está compuesta por tres elementos centrales que son: el enunciado, las evidencias de aprendizaje y el ejemplo

Para grado noveno, se plantea el siguiente DBA:

Grado 9°

- Utiliza los números reales, sus operaciones, relaciones y representaciones para analizar procesos infinitos y resolver problemas.
- Utiliza procesos inductivos y lenguaje simbólico o algebraico para formular, proponer y resolver conjeturas en la solución de problemas numéricos, geométricos, métricos, en situaciones cotidianas y no cotidianas (pp.67-71).

En conclusión, es evidente en los documentos del currículo colombiano de la actualidad como: serie de lineamientos curriculares matemáticas (1998), estándares básicos

de competencias en matemáticas (2006) y derechos básicos de aprendizaje (2016) no se encuentra las series como objeto matemático a enseñar o aprender de manera explícita. En los estándares, si bien no se observa el objeto en cuestión de forma directa, se encuentran algunas someras relaciones en ciertos estándares. Por otro lado, se evidencia que, en el pasado, en particular, en la renovación curricular de 1991, sí se hallaban las series en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Actualmente, aunque los profesores son los llamados a construir su propio currículo, algunos de ellos no cuentan con la formación suficiente para hacerlo, por lo que muchos utilizan libros de texto como base para planear su enseñanza. Reconociendo esta realidad, a continuación, se muestran algunos libros de textos en los que se propone el estudio de las series, algunos ejemplos y actividades.

#### **2.5.6. Libros de texto escolares**

En el siguiente apartado, se enlistan algunos libros de texto escolares de las editoriales más reconocidas en nuestro entorno, utilizadas en algunos colegios bogotanos, en ellos se logra observar una propuesta para la enseñanza de las sucesiones y series en el aula.

- Serie de MATEMÁTICAS para básica secundaria y media Espiral 9. Editorial Norma (2007)
- DELTA ¡Te conecta con el mundo! Número 9. Norma (2008)
- Retos matemáticas 9. Editorial Norma (2012)
- Los caminos del Saber, Matemáticas 9°. Editorial Santillana (2013)
- SECUENCIAS matemáticas 9. Libros y libros S.A.S (2016)

##### **2.5.6.1. Serie de MATEMÁTICAS Para básica secundaria y Media Espiral 9.**

**Editorial Norma (2004).** El texto titulado “Serie de MATEMÁTICAS para básica secundaria y media Espiral 9”, de autoría William Estrada, Vladimir Moreno y Fernando Novoa (2007), en la unidad 4, aborda el estudio de sucesiones y series, sucesiones aritméticas y geométricas, serie aritmética y *serie geométrica*, función inversa, función exponencial, entre otros.

La estructura de esa unidad es: inicia con el estudio de la sucesión; posteriormente, alude a la explicación de serie, habiendo explicado los términos de una sucesión y cómo se

conforma. Seguidamente, se desarrolla la idea de la serie aritmética, luego continúa con el planteamiento de serie geométrica, la cual define como: La suma de los términos de una sucesión geométrica se denomina **serie geométrica**. (p. 165).

Luego, propone la demostración de la  $n$ -ésima suma parcial de la serie geométrica, acompañado de algunos ejemplos, para finalizar propone un taller en el que se pretende que el estudiante calcule la suma de algunas series geométricas.

#### **2.5.6.2. DELTA ¡Te conecta con el Mundo! Número 9. Norma (2008).**

El texto titulado “DELTA ¡Te conecta con el mundo! Número 9”, de autoría de Soraya Padilla, Carmen Samper, Mabel Toquica, Andrés Báez y Vladimir Moreno (2008). En la unidad 3, propone los siguientes objetos matemáticos a desarrollar: funciones, funciones crecientes y decrecientes, función inversa, función exponencial, sucesiones, progresiones aritméticas, series aritméticas y geométricas, entre otros.

El texto inicia con algunos ejemplos de interés simple y compuesto, inicialmente definiendo lo que es una progresión aritmética y posteriormente con la suma primeros  $m$  términos de una progresión aritmética y progresión geométrica; además se expone la demostración de la suma de términos consecutivos de una progresión geométrica, de razón ( $r$ ) y primer término  $a_1$ , ejemplos y finaliza con un taller, en el que se plantean ejercicios para determinar la suma de los términos de una progresión, ejercicios de interés simple y compuesto, como último ejercicio se propone determinar el área de todos los triángulos que se suprimen de los del triángulo de Sierpinski.

#### **2.5.6.3. Retos Matemáticas 9. Editorial Norma.**

El texto “retos matemáticas 9”, de autoría de Soraya Padilla (2012), está conformado por nueve unidades. El texto propone, en la unidad 7, el siguiente contenido: sucesiones, progresiones aritméticas y geométricas, series, series aritméticas y geométricas, interés simple y compuesto, matemática recreativa y finaliza con una prueba saber.

En relación con las series, en principio, el texto propone un ejemplo de aplicación de las series en un contexto real relacionado con el salario mensual de una persona y dos propuestas de aumento, para que el estudiante logre identificar cuánto dinero recibirá después de 5 años y cuál de ellas debería aceptar; posteriormente, plantea la definición de

serie, acompañado de un ejemplo con su respectiva solución y finaliza con un taller de competencias con cuatro ejercicios propuestos para el estudiante.

De la misma manera el texto aborda el tema 5 titulado “Series aritméticas y series geométricas”. Para ello propone un ejemplo relacionado con el salario mínimo de un trabajador, seguidamente la definición de serie geométrica como: Se llama serie geométrica a la serie asociada a una progresión geométrica.

La suma de los  $n$  primeros términos de una progresión geométrica son:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{(r^n - 1)}{r - 1}, r \neq 1 \quad (\text{p. 161})$$

Por último, propone un taller de competencias, relacionado a la serie geométrica y aritmética.

#### **2.5.6.4. Los Caminos del Saber, Matemáticas 9°. Editorial Santillana (2013).**

El texto titulado “Los caminos de saber, Matemáticas 9°”, de autoría de Ricardo de Armas, Marysol Ramírez, Martha Acosta, Juan de Jesús Romero, Jeinsson Gamboa, Valeria Rojas, Angélica Chappe, Dorys Morales y Francia Salazar (2013), se encuentra compuesto por diez unidades. La unidad 7 propone el estudio de las sucesiones y series. El libro de texto sugiere que el estudiante inicie con el estudio de las sucesiones y posterior a ellas, con las series, donde se desarrollan los siguientes temas: definición sucesión, definición de serie, definición sumatoria y algunos ejemplos de series. Luego, el texto hace alusión a los tipos de serie como: la serie aritmética y geométrica, seguidamente hay algunos ejercicios de repaso como: problemas de aplicación, determinación de los términos de la serie, del primer término, de la razón común y el valor de las sumas de los términos de las progresiones geométricas dadas.

Entre los tipos de serie se menciona la serie geométrica.

Como se puede ver en la *Figura 26*, se inicia con la definición de serie geométrica como: “A la suma de los primeros  $n$  términos de una progresión geométrica de le llama serie geométrica y se simboliza como  $S_n$ ” (p. 205), además incluye la demostración de la suma  $n$ -ésima parcial de la serie geométrica y por último hace alusión la paradoja de Zenón, como un ejemplo de la serie geométrica en la Historia de las matemáticas.

**Figura 26**

*Definición de Serie geométrica del libro Los caminos del saber*

### 2.4 Serie geométrica

A la suma de los primeros  $n$  términos de una progresión geométrica se le llama serie geométrica y se simboliza como  $S_n$ .

Para hallar la suma de los  $n$  términos de una progresión geométrica se utiliza la fórmula:

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}, \text{ con } r \neq 1.$$

Esta fórmula se deduce como:

Sea  $S_n$  la suma de los primeros  $n$  términos de una progresión geométrica. Es decir:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

Se suman los  $n$  términos de la progresión.

$$S_n \cdot r = \frac{a_1 \cdot r}{a_2} + \frac{a_2 \cdot r}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1} \cdot r}{a_n} + a_n \cdot r$$

Se multiplica por  $r$ .

$$S_n \cdot r = a_2 + a_3 + \dots + a_n + a_n \cdot r$$

Se reemplaza  $a_1 \cdot r$  por  $a_2$ ,  $a_2 \cdot r$  por  $a_3$ , ...

$$-S_n = -a_1 - a_2 - a_3 - \dots - a_n$$

Se multiplica la ecuación de  $S_n$  por  $-1$ .

$$S_n \cdot r - S_n = -a_1 + a_n \cdot r$$

Se suman las dos ecuaciones anteriores y se simplifica.

$$S_n \cdot (r - 1) = -a_1 + (a_1 \cdot r^n) \cdot r$$

Se factoriza y se reemplaza  $a_1$  por  $a_1 \cdot r^{n-1}$ .

$$S_n \cdot (r - 1) = -a_1 + a_n \cdot r^n$$

Se multiplican las promesas.

$$S_n \cdot (r - 1) = a_1(r^n - 1)$$

Se factoriza.

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$$

Se despeja  $S_n$ .

#### Historia de las matemáticas

##### Paradoja del corredor Zenón de Elea (495-435 a. C.)

La paradoja del corredor dice: un corredor no puede alcanzar nunca la meta porque siempre debe recorrer la mitad de la distancia total. Luego, la mitad de la mitad. Es decir,  $\frac{1}{4}$ , posteriormente, la mitad de esto y así sucesiva e indefinidamente. Por tanto, nunca llegará a alcanzar la meta.

*Nota.* Definición, demostración y ejemplo de serie geométricas que se encuentra en la historia de las matemáticas. Fuente: *Los caminos del saber matemáticas 9º*, (p. 205), por Ricardo Costa et al., 2013, Santillana editorial.

El texto finaliza, con algunos ejemplos sobre suma de progresiones aritméticas.

#### **2.5.6.5. SECUENCIAS Matemáticas 9, Libros y Libros S.A.S (2016).**

El texto titulado “SECUENCIAS matemáticas 9” de autoría Janneth Carvajal, Viviana Manrique, Claudia Vargas y Luis Castro, está constituido por diez unidades. En la unidad 10, nombrada «Sucesiones», el libro de texto propone el estudio de las sucesiones, progresiones aritméticas y progresiones geométricas, en esta se hace referencia a las series geométricas.

Continúa con las progresiones geométricas, interpolación de medios geométricos y finalmente con las series geométricas, que define como: Para una progresión geométrica, es posible establecer una serie asociada. En este caso, la serie se denomina serie geométrica. (p. 307). Acompaña la definición con algunos ejemplos de series geométricas y muestra cómo es posible determinar la suma de los primeros  $n$  términos de la serie, finalizando con un taller en el que se plantean ejercicios en la que se debe determinar si las sucesiones propuestas son progresiones geométricas, construir progresiones geométricas con ciertas características y además, propone representaciones geométricas de series en la que se

espera que los estudiantes calculen la suma de los primeros diez términos y halle su término general.

En conclusión, se observa que en varios textos escolares (e.g., Serie de matemáticas para básica secundaria y media Espiral, Delta ¡te conecta con el mundo! Número 9, Caminos del saber matemáticas, 9°, Exploradores matemáticas, 9°, Retos matemáticas 9°, los caminos del saber, matemáticas 9° y secuencias matemáticas 9°), Se propone el estudio de las series en grado noveno; sin embargo, se encuentra un error en algunos libros de texto al explicar series (e.g...), puesto que, la definición propuesta no describe lo que es una serie geométrica, sino lo que es la suma n-ésima parcial de la serie.

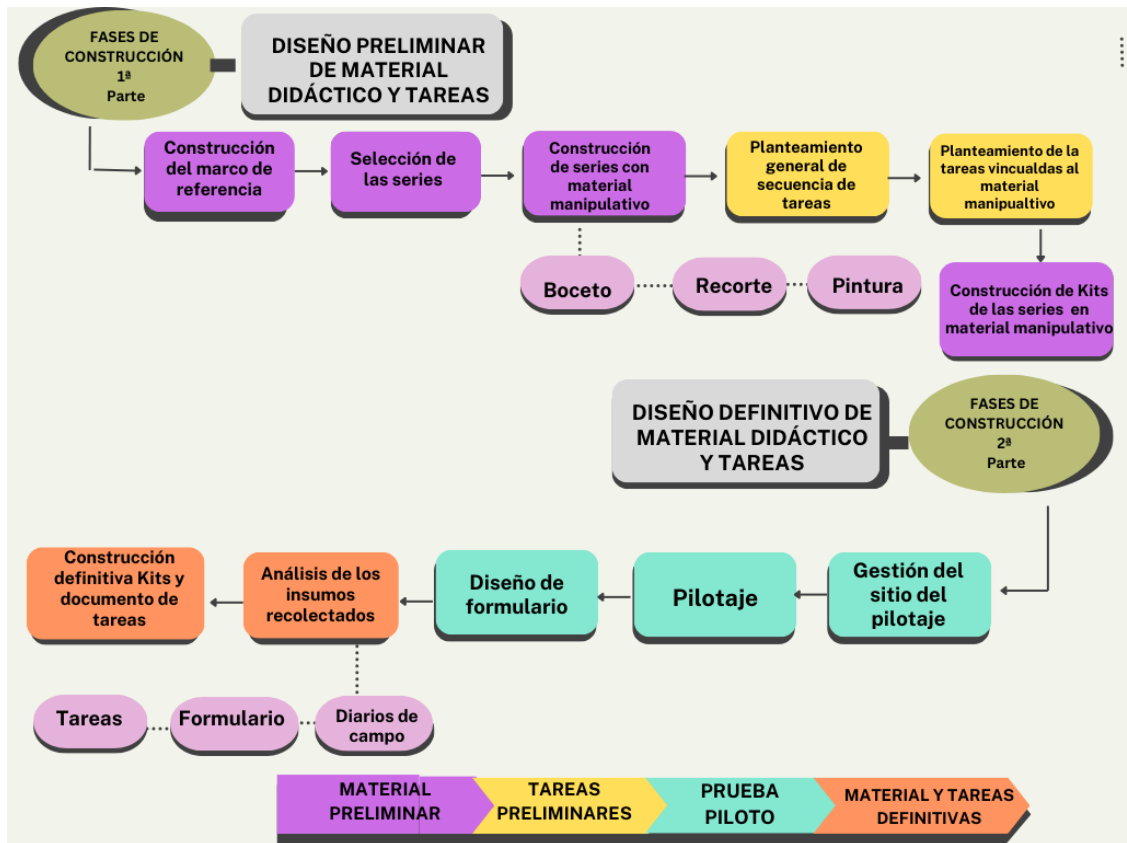
Así que, aunque en los referentes curriculares vigentes en Colombia (lineamientos, estándares y derechos básicos) no se encuentra el término serie o serie geométrica de manera explícita, ello no implica que tales objetos no se consideren en libros de texto, y, por ende, este planeado desde ellos, abordarlos en procesos de enseñanza. Podría ser que el interés por planear su estudio tenga que ver con su papel para enriquecer el estudio de la variación, el cambio, la aproximación y los procesos infinitos

### CAPÍTULO III. Metodología

En este capítulo se presenta el proceso de construcción del material didáctico producto de este trabajo de grado y las tareas diseñadas que acompañan el material. Por medio del diagrama de la *Figura 27* se muestra las fases que se llevaron a cabo para tales diseños.

**Figura 27**

*Diagrama fases de construcción material didáctico y tareas*



*Nota.* Este diagrama permite ver el proceso que se llevó para la construcción del material didáctico para la enseñanza de series geométricas convergentes. Fuente: autoría propia.

Seguidamente, se realiza una descripción de cada fase y subfases del proceso de construcción del material didáctico y de las tareas.

### **3.1. Diseño de material y tareas preliminares**

En este apartado se encuentra una descripción de la fase preliminar del material didáctico y las tareas. En primera instancia, se presenta la construcción del marco de referencia, en el que se describe la consulta de los diferentes referentes bibliográficos que fueron necesarios para la construcción del material; seguidamente, la selección de las series que se utilizaron como ejemplo para el diseño del material. Además, se muestra el proceso de construcción de las series con el material manipulativo, bajo tres subfases: boceto, corte y pintura. Por otra parte, se expone el planteamiento general de las secuencias de tareas, con el fin de dar respuesta al objetivo general del trabajo de grado, así mismo, el planteamiento detallado de las mismas y finalmente la construcción de los kits de series en material manipulativo.

#### ***3.1.1. Construcción del marco de referencia***

Para el diseño de la propuesta preliminar del material didáctico se realizó una consulta bibliográfica del marco matemático y didáctico de las series y estudio detallado de lo correspondiente. En relación con marco matemático, se indagó en particular sobre las series, sus elementos y convergencia, en libros de texto como: Cálculo volumen I, calculo con funciones de una variable (Apóstol, 1967), Cálculos trascendentes tempranas (Stewart, 2018) y Cálculo 1 de una variable novena edición (Larson 2019). Seguidamente, se realizó un estudio de los documentos con relación al marco didáctico, con el propósito, de definir material didáctico y los criterios de tipificación del material. Por otro lado, se llevó a cabo un análisis de los diferentes documentos curriculares de Colombia acerca de la enseñanza de las series geométricas, con la intención de reconocer el lugar de las series en el currículo colombiano, así como el papel que desempeñan en la educación en matemáticas; finalmente, se realizó la lectura de algunas fuentes bibliográficas, con el propósito de presentar lo significativo de los procesos de representación y visualización al usar material didáctico.

Esta revisión bibliográfica permitió identificar los grados escolares a los cuales va dirigida la construcción del material y tareas, así mismo, definir las características que tendrá el material, de acuerdo con los criterios de tipificación, todo esto desarrollado en el marco de referencia, en respuesta al objetivo inicialmente planteado en el presente trabajo.

### 3.1.2. Selección de series geométricas convergentes a estudiar con la propuesta

En la construcción del marco de referencia para el diseño de la primera propuesta del material, se realizó una búsqueda en diferentes fuentes como libros, videos *online*, trabajo de grados, entre otros, con el propósito de localizar la existencia de algún material didáctico, juego o recurso utilizado para la enseñanza de las series en el aula. Durante la búsqueda se encontró el canal de YouTube, «*Mathematical Visual Proofs*» como recurso educativo, el cual tiene videos de algunos conceptos matemáticos, basados fundamentalmente en representaciones geométricas; este canal fue el principal insumo para la selección de las series. Estas series se pueden ver en la *Tabla 7*.

Después de elegir estas series, se consideró asignarles nombres distintivos y llamativos que estuvieran relacionados con su forma visual. De esta manera, se podría diferenciar a la expresión algebraica que corresponde cada serie. Estos nombres fueron creados por las Futuras Educadoras Matemáticas en adelante (FEM), autoras del trabajo.

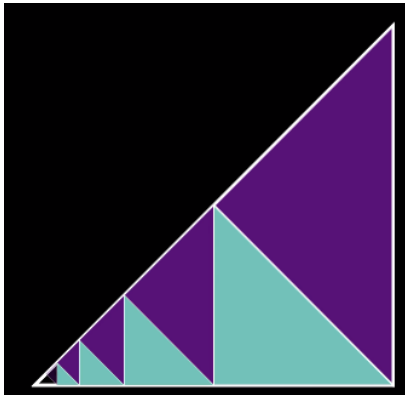
**Tabla 7<sup>3</sup>**

*Series elegidas preliminares*

Representación geométrica	Representación algebraica
---------------------------	---------------------------

**Figura 28**

*Serie Cola-Dino*



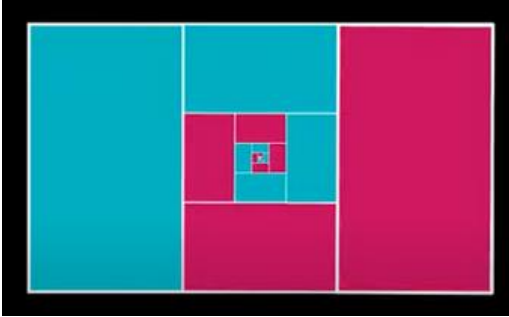
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \dots$$

<sup>3</sup> Series geométricas seleccionadas para construir el material manipulativo. fueron tomadas del canal de YouTube «*Mathematical Visual Proofs*». Fuente: Mathematical Visual Proofs [video], sin autor, 2022, Beautiful Geometry behind Geometric Series (8 dissection visual proofs without words). <https://www.youtube.com/watch?v=JteQEN1XPyc&list=PLZh9gzIvXQU-s-xO5Z-dJ92Hzomhh3sfj7>

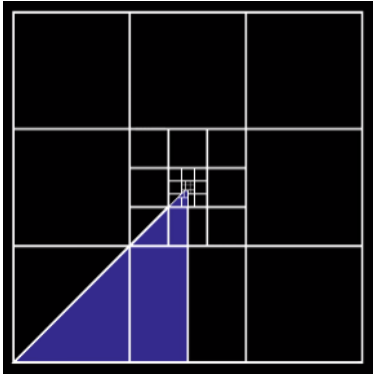
---

**Representación geométrica**
**Representación algebraica**


---

**Figura 29***Serie Caracolí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \left(\frac{1}{3}\right)^5 + \dots$$

**Figura 30***Serie Mountain*

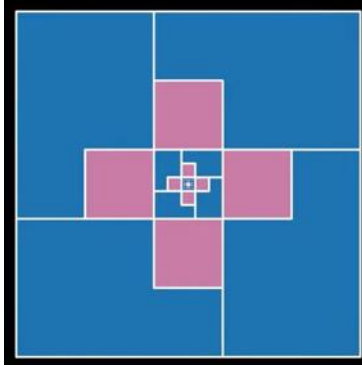
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9^n} = \frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{9^4} + \dots$$


---

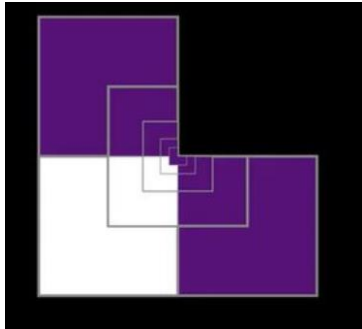
---

**Representación geométrica**
**Representación algebraica**


---

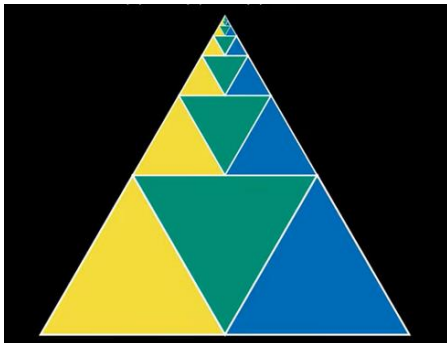
**Figura 31***Serie Cruz-Griega*

$$4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} = 4 \cdot \frac{1}{5} + 4 \cdot \frac{1}{25} + 4 \cdot \frac{1}{125} + \dots + 4 \cdot \frac{1}{5^n} + \dots$$

**Figura 32***Serie Boot*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 - \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 - \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \dots$$

$$- \left(\frac{1}{2}\right)^n + \dots$$

**Figura 33***Serie Pinski*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left(\frac{1}{4}\right)^4 + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n + \dots$$


---

*Nota.* Series geométricas seleccionadas del canal de You Tube «Mathematical Visual Proofs» (2021) con su representación geométrica y algebraica para construcción del material. Fuente: autoría propia.

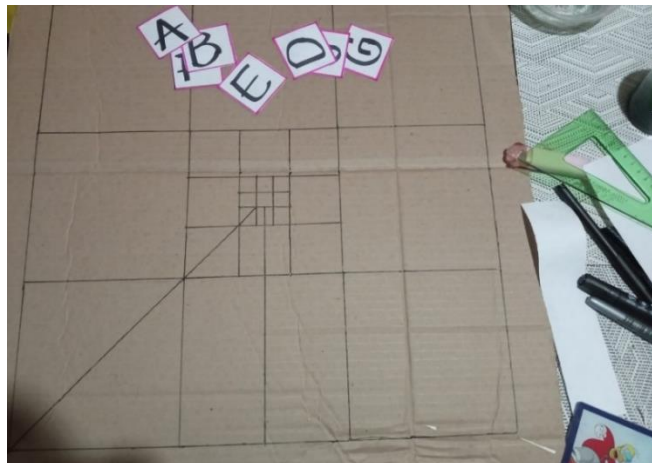
La información completa sobre los elementos de estas series geométricas seleccionadas se encuentra en el *anexo B*.

### **3.1.3. Construcción de las series en el material manipulativo (boceto – recorte y pintura)**

Una vez seleccionadas las series geométricas y teniendo en cuenta que cada representación de las series requería distintos cortes, se optó por diseñar en un material de fácil manipulación, el cartón, las representaciones gráficas correspondientes, citadas en la tabla previa. Luego de elegido el material, se procedió a realizar los bocetos con el uso de herramientas como regla, compás, borrador y lápiz. Los tamaños del material se adecuaron al tamaño de la lámina de cartón. De acuerdo con la representación gráfica de la serie que se estaba diseñando, las piezas se dividían en partes iguales de tal forma que se utilizara toda o gran parte de la lámina de cartón, puesto que, un tamaño adecuado permitiría mayor visualización de las particiones en las piezas. Como se observa en la *Figura 34*, se puede ver un borrador del proceso de construcción correspondiente a la serie *Mountain* y en la *Figura 35*, se puede ver un boceto de la serie *Cola-Dino*.

#### **Figura 34**

*Borrador y boceto de la serie Mountain*



*Nota.* Dibujo a lápiz y regla en el cartón de la serie Mountain. Fuente: autoría propia.

**Figura 35**

*Borrador y boceto de Serie Cola-Dino*

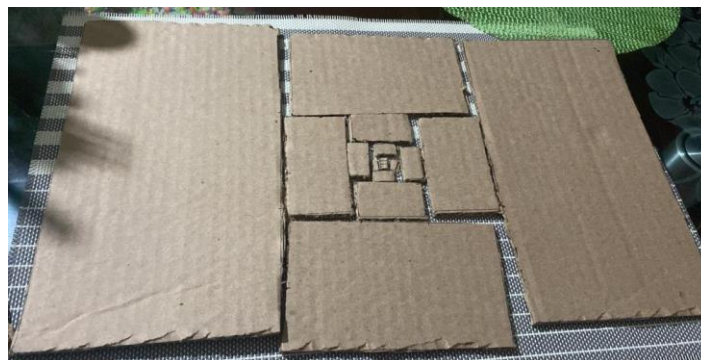


*Nota.* Dibujo a lápiz y regla en el cartón de la serie Cola-Dino. Fuente: autoría propia.

Realizado el boceto a lápiz de cada serie se cortaron las piezas del material, como se puede ver en la *Figura 36*, para la serie *Caracolí*.

**Figura 36**

*Piezas recortadas de la serie Caracolí*



*Nota.* Material recortado de la serie Caracolí con tijeras y bisturí. Fuente: autoría propia.

Después de realizar el recorte del material, se pintaron las piezas, como se observa en la *Figura 37*.

### Figura 37

*Pintando serie Pinski y serie Boot*



*Nota.* Proceso de pintar la serie Pinski y Serie Boot con vinilos de colores fluorescentes y encendidos.

Fuente: autoría propia

También se decidió diseñar un marco como base de cada serie como se observa en la *Figura 38*, esto con el fin de armar y organizar el material, dicho marco contaba con la forma de la serie.

### Figura 38

*Marco de la serie Cola-Dino*



*Nota.* Proceso de construcción del marco de la serie Cola-Dino. Fuente: autoría propia

A continuación, en la *Figura 39* se muestra un collage del proceso de construcción del material preliminar de las series.

### **Figura 39**

*Avances del material preliminar*



*Nota.* Recuento de los avances de construcción de cada una de las series geométricas. Fuente: autoría propia

#### **3.1.4. Planteamiento general de la secuencia de tareas**

Para el diseño y creación de las tareas se organizó un documento que contenía los siguientes elementos: objetivos de enseñanza, objetivos de aprendizaje, los estándares básicos de competencia asociados, un breve marco teórico, presentación del material didáctico y la formulación de la secuencia de tareas incluyendo las guías de trabajo propuestas. Enseguida se expone el contenido de los elementos y una breve descripción de lo hallado allí.

##### **3.1.4.1. Objetivos de enseñanza**

Los objetivos de enseñanza planteados fueron los siguientes:

- Apoyar la enseñanza de algunas series geométricas convergentes a través del uso de material didáctico acompañado de tareas que faciliten su comprensión.
- Diseñar tareas que permitan identificar los elementos que componen la serie geométrica convergente mediante el uso del material didáctico construido para tal fin.

#### 3.1.4.2. Objetivos de aprendizaje

Enseguida, los objetivos de aprendizaje:

- Identificar los elementos que componen una serie geométrica convergente mediante el material didáctico *LyAnLi*.
- Relacionar el lenguaje algebraico y el lenguaje visual, mediante la representación de las sumas parciales de algunas series geométricas convergente.
- Aproximar a los estudiantes al concepto del infinito.
- Lograr desarrollar procesos inductivos, mediante el uso material didáctico.

#### 3.1.4.3. Estándares básicos de competencias matemáticas.

En este apartado se ubica los estándares básicos de competencias matemáticas asociados a las series geométricas, como se observa en la *Tabla 8*, dispuestos en los documentos del MEN.

**Tabla 8**

*Estándares básicos de competencia asociados*

	<p>Describo y represento situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas).</p>
<p>Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos</p>	<p><b>1.</b> Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a pruebas conjeturas.</p> <p><b>2.</b> Analizo los procesos infinitos que subyacen en las notaciones decimales.</p>

*Nota.* Estándares básicos de competencias relacionados con series geométricas presentados por MEN (2006) en su documento llamado Estándares básicos de competencias. Fuente: autoría propia.

#### 3.1.4.4. Marco teórico para el diseño de las tareas

Esta sección incluye apartados del marco de referencia expuesto para el diseño de las tareas, en relación con las series geométricas, en la que se tuvo en cuenta su definición y sus elementos, acompañado de algunos ejemplos.

Posteriormente, se realizó la planeación de las tareas que se diseñaron para lo cual se decidió seguir estas fases:

1. Ambientación
2. Reconocimiento del material
3. Identificación de los elementos de las series
4. Recopilación de los resultados obtenidos

Cada una de las fases ya mencionadas, serán detalladas en la siguiente sección.

#### 3.1.5. Planteamiento detallado de las tareas vinculado al material manipulativo

En esta sección se detalla cada una de las tareas diseñadas que acompañan el material, las cuales tiene como objetivo identificar los elementos que conforman la serie geométrica. En la *Tabla 9* se encuentra una pequeña descripción de cada una de las fases de las tareas.

**Tabla 9**

*Descripción de las fases para las tareas*

#	Fase	Descripción	Desarrollo en pilotaje
1	Ambientación	En esta fase se propone un concétrese, en donde se pretende recordar algunos conceptos previos necesarios para el desarrollo de las actividades posteriores. Se abordan temas como: potenciación, suma de números fraccionarios, representación gráfica de números fraccionarios, representación decimal	Previamente de iniciar la clase, se organizaron las mesas de trabajo con 5 o 6 puestos, teniendo en cuenta la cantidad de material disponible para todo el curso, razón por la que se organizaron 6 grupos; aunque en esta fase la participación era individual cada estudiante se ubicó en una mesa de trabajo de su preferencia.

#	Fase	Descripción	Desarrollo en pilotaje
2.	Reconocimiento del material	<p>de números fraccionarios y partes de una fracción.</p> <p>Esta fase tiene como propósito que cada estudiante explore el material, para esto, se propone tres partes: la primera asociada al reconocimiento del material, la segunda relacionada con la representación de fracciones propias del material y una tercera asociada al proceso de relación entre la representación manipulativa y la representación algebraica.</p>	<p>La tarea se desarrolló con los mismos grupos de trabajo organizados en la actividad anterior.</p>
3.	Identificación de los elementos de la serie	<p>Esta tarea tiene como objetivo relacionar los elementos de las series con el material, para ello, se proponen tres partes:</p> <p>La primera, busca identificar los términos que componen la serie con ayuda del material, la segunda, tiene como finalidad identificar la razón común entre los términos de la serie y la tercera tiene como objetivo, identificar la convergencia de la serie.</p>	<p>La tarea se desarrolló con los mismos grupos de trabajo organizados en las actividades anteriores.</p>

#	Fase	Descripción	Desarrollo en pilotaje
4.	Recopilación de los resultados obtenidos	Como última tarea, se propone una tabla, la cual, tiene como finalidad recoger los datos obtenidos en las fases anteriores.	La tarea se desarrolló con los mismos grupos de trabajo organizados en las actividades anteriores.

### 3.1.5.1. Tarea Ambientación

Esta tarea tiene como objetivo recordar algunos conceptos previos necesarios para desarrollar las tareas propuestas. Algunos de los conceptos previos abordados son: representación de números fraccionarios y algunas de sus representaciones gráficas asociadas con figuras geométricas, partes de una fracción, adición de números fraccionarios, potenciación, y representación decimal asociada a una fracción. Para ello se propone un «Concéntrese», en el que cada estudiante debe seleccionar una pareja de cartas e indicar si dichas cartas son o no son pareja, el estudiante que acierte en la pareja de cartas obtiene un punto, los puntos obtenidos por cada estudiante son sumados al grupo con el que el estudiante desarrolle las demás tareas posteriores.

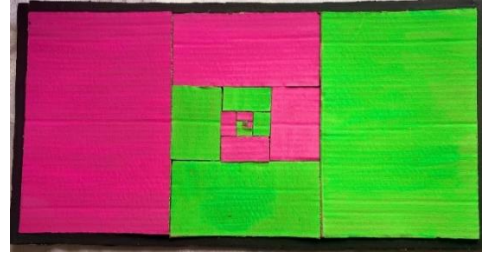
### 3.1.5.1. Tarea 2. Reconocimiento del material.

Esta tarea está compuesta por tres partes: la primera de ella titulada «En sus marcas listos, ¡arma!», en donde los estudiantes pueden manipular y reconocer el material (las piezas, los colores, los tamaños y la textura). En la *Tabla 10* se puede apreciar un ejemplo del material a entregar, desarmado ver en *Figura 40*, y, cómo queda armado ver *Figura 41*.

**Tabla 10**

*Representación serie Caracolí desarmado y armado*

Material desarmado	Material armado

**Figura 40***Vista del material preliminar desarmado***Figura 41***Vista del material preliminar armado*

*Nota.* Ejemplo de la serie Caracolí como se ve el material armado y desarmado. Fuente: autoría propia.

Con la segunda tarea se pretende que los estudiantes representen, con el material entregado, tres o cuatro fracciones. En la *Tabla 11* se puede apreciar la representación de dos fracciones con material didáctico de la serie Cola-Dino.

**Tabla 11***Ejemplo de fracciones serie Cola-Dino*

Fracción	Representación con el material
----------	--------------------------------

$$\frac{1}{2}$$

**Figura 42***Representación gráfica 1/2*

Fracción	Representación con el material
----------	--------------------------------

**Figura 43**

*Representación gráfica 1/4*

$$\frac{1}{4}$$



*Nota.* Ejemplo con la serie Cola-Dino de como el estudiante debería representar las fracciones asignadas. Fuente: autoría propia.

Con la última tarea se espera que cada grupo de estudiantes asocie adecuadamente el material armado a una expresión algebraica, para ello, inicialmente, se entrega un paquete con cinco expresiones algebraicas diferentes, cada grupo debe seleccionar una de ellas, teniendo en cuenta las tareas previamente realizadas. En la *Tabla 12* se observa la serie *Pinski* con su expresión algebraica asociada y el material didáctico construido.

**Tabla 12**

*Expresión simbólica serie Pinski material preliminar*

Expresión simbólica	Material didáctico
---------------------	--------------------

**Figura 44**

*Expresión simbólica Serie Pinski*

$$\frac{1}{4^1} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4}$$

**Figura 45**

*Material didáctico asociado a la expresión*



*Nota.* Ficha con la representación simbólica que le pertenece a la serie Pinski. Fuente: autoría propia.

### 3.1.5.2. Tarea 3. Identificar los elementos que componen la serie.

Esta tarea está compuesta por tres partes; la primera parte titulada «identificación de los términos de las series y sumas parciales»; la segunda, «Identificación de la razón común» y la tercera, «Identificación de la convergencia». La primera tarea de este conjunto tiene el objetivo de identificar los términos que componen la serie, mediante preguntas como:

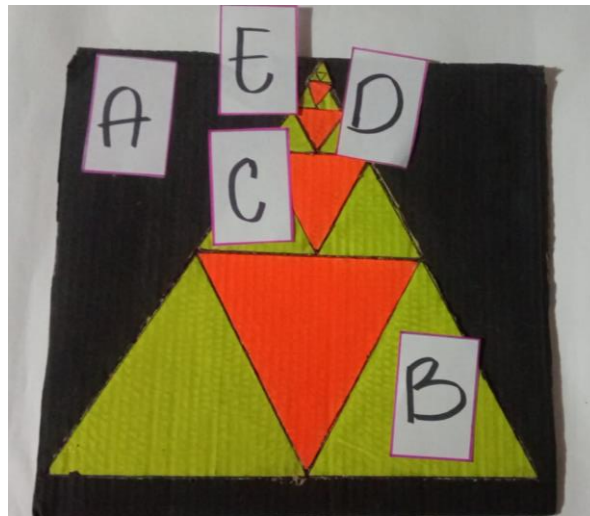
1. ¿Cuál fracción representa la pieza B con respecto a la pieza A?
2. ¿Cuál fracción representa la pieza C con respecto a la pieza A?
3. Suma la fracción obtenida en el punto anterior con la obtenida en este punto escribe la respuesta como fracción y su notación decimal.

Todas las preguntas planteadas en esta tarea se encuentran en la guía de 3.1 del *anexo C*.

Para el desarrollo de la tarea se hace entrega, a cada grupo, de una imagen de la serie que está trabajando, en la que se encuentran nombradas las piezas de la serie con las letras A, B, C, D, E, F, G, H e I, como se observa en la *Figura 46*.

#### Figura 46

*Fotografía de serie Pinski con la identificación de sus partes*



*Nota.* Con el set de fichas se nombra cada pieza de la serie Pinski. Fuente: autoría propia.

La segunda parte de la tarea 3, titulada «Identificación de la razón común», tiene como objetivo identificar la razón común de la serie, con ayuda de la imagen entregada en la primera parte y la guía 3.2, en la cual se proponen preguntas como:


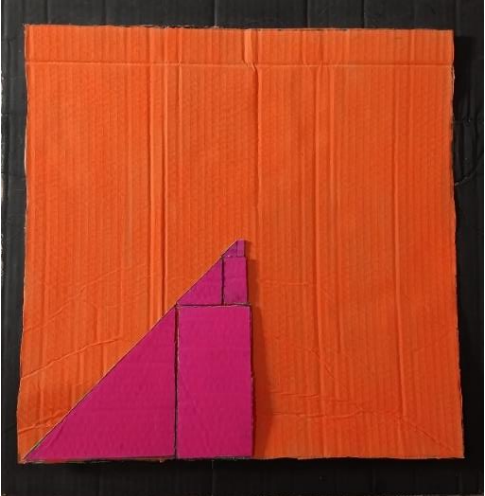
1. ¿Cuál fracción representa la pieza B con respecto a la pieza A?
2. ¿Cuál fracción representa la pieza D con respecto a la pieza C?
3. ¿Cuál fracción representa la pieza E con respecto a la pieza D?

La tercera parte de la tarea 3 tiene como objetivo identificar la convergencia de la serie; para su desarrollo se propone la guía 3.3, en esta tarea se debe relacionar las piezas con la unidad como se observa en la *Tabla 13*.

**Tabla 13**

*Identificación de la convergencia serie Mountain*

*Nota.* Convergencia de la serie Mountain cuando se sobrepone las piezas con la pieza unidad. Fuente:


Serie	Convergencia numérica	Convergencia geométrica
<p><b>Figura 47</b> <i>Material principal serie Mountain</i></p> 	$\frac{1}{8}$	<p><b>Figura 48</b> <i>Convergencia serie Mountain</i></p> 

**3.1.5.3. Tarea 4. Recopilación de los resultados obtenidos**

Esta tarea tiene como objetivo reunir todos los resultados obtenidos en las tareas anteriores, para esto, se entrega a cada grupo de trabajo una tabla correspondiente a la serie que se está trabajando, en la que se debe completar la expresión algebraica, primer término, razón común, términos de la serie y convergencia. Como se puede ver en la *Figura 49*, los datos que tienen la tabla son: imagen del material entregada y las sumas parciales.

**Figura 49**

*Tabla para llenar los datos de la serie*

Expresión algebraica	Material entregado	Elementos					
		Primer término	Razón común	Términos de la serie	Suma parciales	Convergencia	
					$S_1 = \frac{1}{2}$ $S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ $= 0.75$ $S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ $= 0.875$ $S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$ $= 0.9375$ $S_5 = 0.96875$		

*Nota.* Ejemplo de la tabla de la serie Cola-Dino que se entrega en la tarea 4. Fuente: autoría propia.

**3.1.6. Construcción de los kits de series en material manipulativo**

Con el objetivo de que los estudiantes diferencien las series y las asocien con lo que se puede percibir en el material, en relación con su forma y diseño, se decide nombrar cada una de ella y paralelamente al diseño de las tareas se decide construir el kit, en el que se incluye un set de piezas adicionales, un set de fichas de expresiones algebraicas y set de fichas con las letras A, B, C, D, E, F, G, H y I. Durante la construcción de los kits se consideró necesario trazar en el reverso del material, la partición de la pieza más grande a la más pequeña, esto para facilitar la representación de los términos de la serie. A continuación, en la tabla 10, se encuentran los *kits* con su respectivo nombre y los demás elementos que lo componen.

Para la implementación de la prueba piloto, se decide incluir dos nuevas series llamadas serie Piramidal y Serie Fish, estas con el fin de suplir la serie Boot previamente seleccionada, ya que esta es una serie geométrica alternante y para su desarrollo era necesario que los estudiantes contaran con un

mayor dominio conceptual y de aprendizaje del tema, como esta serie ya se había construido, se decide incluirla en la prueba piloto, como una serie adicional en el caso de que algún grupo de estudiantes culminara las tareas propuestas con la series entregadas. En la *Tabla 14*, se observa las series preliminares diseñadas para la implementación de la prueba piloto.

**Tabla 14**

*Kits de las Series geométricas*

---

### Series Geometry LYANLI

---

**Figura 50**

*Kit serie Caracolí*



**Figura 51**

*Kit serie Cola-Dino*



**Figura 52**

*Kit serie Cruz-Griega*



**Figura 53**

*Kit serie Pinski*



---

## Series Geometry LYANLI

---

**Figura 54***Kit serie Boot***Figura 55***Kit serie Mountain***Figura 56***Kit serie Fish***Figura 57***Kit serie Piramidal*

*Nota.* Material didáctico preliminar de los kits de las series geométricas con sus piezas adicionales y set de fichas. Fuente: autoría propia.

Antes de la implementación de la prueba piloto se envió a cada estudiante un formato de consentimiento, establecido por la Universidad Pedagógica Nacional, el cual debían firmar los padres de familia, con la finalidad de desarrollar las actividades planeadas bajo las normas legales. Antes de iniciar la primera sección del pilotaje este fue recogido por las Futuras Educadoras Matemáticas en adelante FEM.

### **3.2. Diseño de material y tareas definitivas**

En esta fase se realiza las modificaciones finales del material y tareas con base en la información recolectada en el pilotaje, a través de los siguientes instrumentos: formulario, diario de campo y guías de trabajo. Enseguida, se encuentra información detallada de la gestión del lugar de pilotaje, del pilotaje mismo, del diseño de los formularios, análisis de los insumos recolectados y construcción definitiva de los *kits* de las series.

#### **3.2.1. Gestión del sitio de pilotaje**

Para la logística y gestión del lugar donde llevó a cabo el pilotaje del material, se realizaron, simultáneamente con la construcción definitiva del material, los trámites correspondientes para obtener el permiso por parte de una institución escolar. Ello condujo a contar con la disposición del colegio Isabel II, lugar en el cual una de las autoras del trabajo de grado realizaba su práctica. Esta institución se encuentra ubicada en la localidad de Kennedy; cuenta con cursos de transición, básica primaria, básica secundaria y media fortalecida, con énfasis en álgebra y economía; el colegio se reconoce por ser una institución educativa de inclusión en la que se encuentran no solo estudiantes oyentes sino estudiantes Sordos.

Teniendo en cuenta el marco teórico curricular, la aplicación del pilotaje se debía realizar en los grados noveno, décimo o undécimo. Por tal motivo, se habló con la profesora a cargo del área de matemáticas –Ivonne Aldana, egresada de la UPN-, quien estaba a cargo de estos grados, para establecer hora y fechas en las que se iban a implementar las tareas diseñadas usando el material construido. Se acordaron las semanas del 20 octubre al 07 de noviembre de 2023; también se acordó el que el curso en el que realizaría la implementación sería 1002, el cual contaba con estudiantes Sordos y oyentes.

### 3.2.2. *Pilotaje*

El pilotaje de las tareas y material diseñado se realizó durante tres sesiones de clase (20 de octubre, 3 noviembre y 7 de noviembre del 2023), en compañía de la profesora titular del curso, y el intérprete de lengua de señas correspondiente; se acordó con la profesora asignaría nota de cada tarea; esto, como calificación para cierre de periodo.

#### 3.2.2.1. *Sesión 1 del pilotaje.*

La primera sesión se realizó el 20 de octubre de 2023 en el horario el 10:30 a.m. a 12:15 p.m. En esta se implementó la tarea de ambientación, el concéntrese.

Como aún no se habían organizado los grupos de trabajo, la participación era individual. A continuación, se puede observar en la *Figura 58* la participación de los estudiantes, además de la intérprete como apoyo de los estudiantes Sordos en la tarea de ambientación.

#### **Figura 58**

*Momento en el pilotaje en la realización de la tarea concéntrese*



*Nota.* Momento de la primera sesión de la aplicación del pilotaje con la intérprete comunicándose con los estudiantes Sordos. Fuente: autoría propia.

Una vez terminada la tarea de ambientación, se procedió a armar los grupos de trabajo de cuatro o cinco estudiantes; a cada grupo se le hizo entrega del material principal de los kits «Series Geometry LyAnLi» reportados en la *Tabla 14*. Específicamente, a cada grupo se le entregó el material asociado a una serie y se nombró con el nombre de la serie correspondiente.

Posterior a la actividad de ambientación, se desarrollaron las tareas 2.1, 2.2 y 2.3. Para la tarea 2.2, a cada grupo se le entregó entre cuatro a cinco fracciones, y para complementar la tarea se dio paso a la tarea 2.3; para esta, los estudiantes debían tener en cuenta las tareas anteriores. A cada grupo se repartió un set con cinco expresiones algebraicas, cada grupo debía seleccionar la expresión que creía tenía relación con el material didáctico que representaba la serie a desarrollar. La culminación de estas tareas fue retomada en la sección del viernes 3 de noviembre.

En la *Figura 59* se puede apreciar momentos durante el desarrollo de las tareas.

### **Figura 59**

*Interacción entre intérprete- estudiantes y FEM*



*Nota.* Momentos donde las FEM estaba explicando a estudiantes Sordos y la intérprete estaba señalando lo explicado. Fuente: autoría propia

En la Figura 60 se puede ver al grupo de la cruz griega realizando tarea 2.2 llamada Representación de fracciones

### Figura 60

*Estudiantes con material Cruz-griega*



*Nota.* Momento donde se estaba explicando como representar el número fraccionario  $\frac{4}{25}$  con el material.

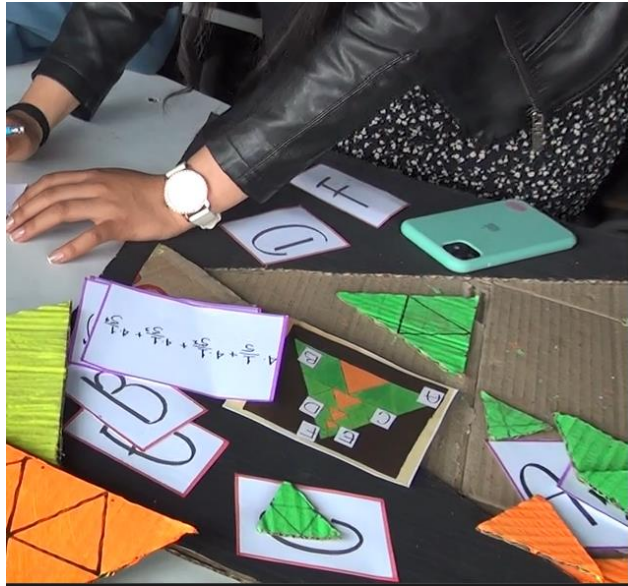
Fuente: autoría propia.

#### 3.2.2.2. Sesión 2 del pilotaje.

Esta sesión de pilotaje se realizó el viernes 3 de noviembre de 2023 en el horario 11:30 a.m. a 12:15 p.m. Inicialmente se realizó una retroalimentación de lo visto en la clase anterior, planteando algunas preguntas abiertas a los estudiantes, respecto a lo que recordaban de la clase previa, se realizaron algunas apreciaciones en relación con los resultados obtenidos durante las dos tareas terminadas; seguidamente, se procedió a entregar la tarea 3. Para la tarea 3.1, se entregó a cada grupo de trabajo un set fichas que contenía las letras A, B, C, D, E, F, G, H y I; incluida una foto de la serie en la que se observa el nombre de cada una de las piezas del material con su respectiva letra, como se observa en la *Figura 61*. Los hallazgos obtenidos debían ser anotados en la guía que se encuentra en el *anexo C*. También, en el *anexo D* se muestran las fotos de entregadas a los grupos, correspondiente a la tarea.

### Figura 61

*Foto en la que se nombran las piezas del material*



*Nota.* Foto de la serie Piramidal donde se nombran las piezas. Fuente: autoría propia.

La tarea 3.2 era similar a la anterior, en ella el estudiante debía encontrar la razón común entre los términos encontrados en la tarea anterior, para ello debían utilizar las mismas letras entregadas y, mediante una fracción, indicar la relación entre las piezas señaladas, de la misma forma escribir los hallazgos obtenidos en la guía correspondiente a la tarea 3.2. No todos los grupos lograron terminar la tarea, por lo que se les indicó que en la siguiente sesión de clase se continuaría con la misma. Este día se observó gran participación por parte de los estudiantes, en particular de los estudiantes Sordos.

### **3.2.2.3. Sesión 3 del pilotaje.**

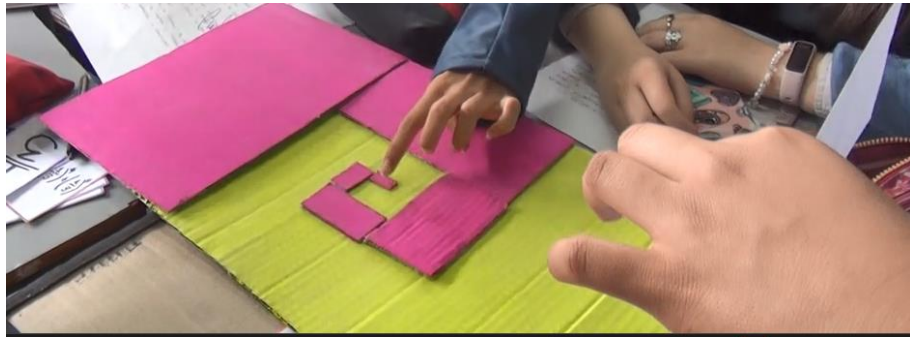
Esta sesión de clase se desarrolló el martes 7 de noviembre en el horario de 6:20 a.m. a 08:00 a.m., al igual que la sesión anterior, se inició la clase realizando una retroalimentación de las tareas realizadas; es decir, la tarea 3.1 y parte de la 3.2. Como algunos grupos no habían culminado las guías, se entregaron nuevamente para su finalización.

Debido a que el desarrollo de las tareas en esta sesión de clase no fue de la misma manera en todos los grupos, se procedió a dar instrucciones por grupo a medida que iban terminándolas. Al igual que la sesión anterior se percibe mayor participación de los estudiantes Sordos a comparación de los oyentes, incluso la habilidad para resolver las tareas propuestas es mayor en estos estudiantes. En esta sección se realizaron las siguientes tareas:

Culminación de las tareas 3.1, 3.2 y desarrollo de la tarea 3.3, la cual consistía en identificar la convergencia de la serie. En esta, los estudiantes debían utilizar la pieza A o unidad, y debían sobreponer en ella las piezas que indicaba la guía. Los estudiantes debían expresar mediante una fracción la relación entre la unidad y las piezas sobrepuestas, a esto se le llamaría convergencia de la serie. En la *Figura 62* se evidencia parte del trabajo de este día.

### **Figura 62**

*Convergencia de la serie Caracolí*



*Nota.* Estudiantes representando la convergencia en la serie Caracolí. Fuente: autoría propia

En la tarea 4, los estudiantes tuvieron que llenar una tabla con los descubrimientos realizados en las actividades previas. Esta tabla permitió retroalimentar lo encontrado previamente. Los estudiantes completaron la tabla con los elementos de la serie y su convergencia, de acuerdo con la serie asignada, como se puede apreciar en la *Figura 63*.

### **Figura 63**

*Tabla de completar elementos de la serie*



*Nota.* Estudiantes llenando tabla de la tarea 4 de la serie Fish. Fuente: autoría propia

Posteriormente, como cierre, se proyectaron algunos videos del canal de YouTube «Mathematical Visual Proofs»; estos videos permitieron dar un cierre a todas las tareas realizadas. Esta tarea generó conmoción, motivación y admiración en los estudiantes al ver cada una de las series que se habían manipulado. Durante el video, las FEM realizaron algunos comentarios necesarios en relación con el material y los videos, como: «No solo existen las series del material diseñado, existen otras que no se tuvieron en cuenta para el diseño del material». Al finalizar la presentación de cada serie la FEM menciona que «en el video se puede observar por qué la convergencia es  $\frac{1}{3}$ », «actualmente no se cuenta con el material didáctico para la enseñanza de las series», «se puede observar la diferencia entre el material didáctico y el video, puesto que las particiones del material son finitas, pero el video proporciona una visión (intuitiva) infinita del mismo “y “este material permite dar una noción del infinito». Por último, se solicitó a los estudiantes diligenciar una encuesta de satisfacción, la cual tenía como objetivo identificar percepciones sobre las tareas y el material, así como recolectar recomendaciones.

En el *anexo C*, se encuentra la propuesta detallada de las tareas diseñadas, además de los diarios de campo de los días en que se realizó el pilotaje en la institución, que se encuentran en el *anexo F*.

### **3.2.3. Diseño del formulario**

Paralelamente al pilotaje, se diseñó un formulario dirigido a estudiantes y docentes a cargo, con el fin de identificar ventajas y desventajas del material didáctico y las tareas propuestas. El formulario se distribuyó en tres partes, basadas en marco de referencia.

El formulario costaba de 33 preguntas en total, la mayor parte de estas preguntas fueron tipo Likert, posteriormente, se realiza la descripción de cada sección.

#### **3.2.3.1. Parte uno. Preguntas relacionadas con el material didáctico.**

Apoyadas principalmente en la definición de material didáctico propuesta en el marco de referencia, se plantearon ocho preguntas como se ve en la *Figura 64* relacionadas con el tamaño, color, tipo de material de construcción y nombre del material didáctico, cinco de tipo Likert y tres con respuesta múltiple y concreta.

**Figura 64**

*Algunas preguntas del formulario sobre el material*

¿Consideras que el tamaño de las fichas del material fue adecuado?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
¿Consideras que el tamaño del material en general fue adecuado?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
¿El color del material fue apropiado?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
¿Consideras que el material fue fácil de manipular para el desarrollo de las actividades propuestas por las docentes en formación?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
¿Considera usted que el nombre del material fue adecuado?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

*Nota.* Preguntas del formulario relacionadas al material como parte de insumo para analizar.

Fuente: autoría propia.

### 3.2.3.2. Parte dos. Preguntas de acuerdo con los criterios de tipificación del material.

Esta sección consta de catorce preguntas tipo Likert, estas relacionadas con los criterios de tipificación del material mencionados en el marco teórico del presente trabajo: según su utilidad, según su contenido, según el criterio y su modalidad de uso. Ver *Figura 65*..

**Figura 65**

*Algunas preguntas sobre criterios de tipificación*

¿Considera usted que el material puede ser utilizado para repasar el tema "Series Geométricas"?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
¿Considera usted que con este material permite trabajar temas relacionados con el álgebra?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
¿Considera usted que con este material permite trabajar temas relacionados con la geometría?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
¿Considera usted que con este material permite trabajar temas relacionados con la estadística?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
¿Considera usted que con este material permite trabajar temas relacionados con el cálculo?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

*Nota.* Preguntas del formulario relacionadas a los criterios de tipificación como parte de insumo para analizar. Fuente: autoría propia.

### 3.2.3.3. Parte tres. Preguntas con base a las tareas diseñadas.

Esta sección se compone de seis preguntas tipo Likert, en relación con las tareas y la manipulación del material didáctico. Una muestra de estas tareas se observa en la *Figura 68*.

#### Figura 66

*Algunas preguntas del formulario con base en las tareas*

¿Fue fácil representar fracciones con ayuda del material?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
¿Qué tan fácil fue asociar la representación algebraica al material?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
¿El material le permitió identificar los términos que componen la serie?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
¿El material le permitió identificar con facilidad la razón común entre los términos?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
¿El material le permite identificar visualmente la convergencia de la serie?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

*Nota.* Preguntas del formulario relacionadas a las tareas como parte de insumo para analizar.

Fuente: autoría propia.

Las otras seis preguntas constan de información general del estudiante, profesor e intérprete, además se anexan dos preguntas abiertas al final de la encuesta, relacionada con cambios, sugerencias o felicitaciones relacionadas con el material o con la gestión de las docentes en formación. En el *anexo E* se puede ver el formulario completo.

### 3.2.4. Análisis de insumos recolectados (*diario de campo y formulario*)

En esta sección se analiza los insumos recolectados para llegar a la versión final de los productos de este trabajo (material didáctico y tareas). La información recogida se basó en tres insumos: diario de campo, formulario y guías. Los datos obtenidos de estos insumos se organizaron en una tabla titulada «Tabla para análisis del pilotaje» diseñada por las FEM, la cual se encuentra en el *anexo G*; esta se organizó de la siguiente manera: tres tipos de filas, las de color blanco corresponden al análisis del diario de campo; las de color azul, al formulario y las de color naranja, al análisis de las guías. Por otro lado, la tabla contiene ocho columnas, en las tres primeras se organizó la información a partir de dos aspectos principales, los cuales son: el material didáctico y las tareas. En relación con el material se tuvo en cuenta: tamaño de las fichas, tamaño del material, color, material de construcción, nombre del material y manipulación; con respecto al tipo de material didáctico, se consideró, los criterios de tipificación: según su utilidad (pre- instruccional, co-instruccional y Pos-instruccional), según el contenido matemático (algebraico, geométrico, estadístico, aritmético y cálculo), según su criterio (vinculación prioritaria y versatilidad, edad específica ) y según la modalidad de uso (adquisición de rutinas, modelización de conceptos matemáticos y planteamiento de problemas). En las siguientes tres columnas se clasificó la información obtenida de los insumos, con respecto a las ventajas, desventajas y ni ventajas ni desventajas del material y las tareas. Por último, en las dos columnas nombradas «Modificación de la tarea o material y justificación de la decisión» se registran los cambios a realizar del material o tareas y su debida justificación.

En relación con las tareas se analizó cada tarea por separado de la siguiente manera: tarea 2.1, reconocimiento del material; tarea 2.2, representación de fracciones; tarea 2.3, asociación de la representación algebraica al material; tarea 3.1, identificación de los términos y sumas parciales de la serie; tarea 3.2, identificación de la razón; tarea 3.3, identificación de la convergencia y finalmente, la tarea 4, recopilación de los datos obtenidos. Como última parte de la tabla se analizaron otros tipos de aspectos como: participación de estudiantes sordos, la tarea de ambientación (concéntrese), metodología para el desarrollo de las tareas, otros espacios (espacios adicionales para la aplicación del pilotaje) y finalmente, se consideraron otros asuntos (encuesta de satisfacción y videos del canal de YouTube «Mathematical Visual Proofs». En la *Figura 67* se muestra plantilla de la tabla de análisis utilizada.

**Figura 67***Plantilla de análisis de insumos***TABLA PARA ANÁLISIS DEL PILOTAJE**

			Ventajas	Desventajas	Ni ventajas Ni Desventajas	Modificación a tarea o material	Justificación de la decisión
<b>Material didáctico</b>	<b>Presentación (objeto físico)</b>	<b>Tamaño de las fichas</b>	<b>DIARIOS DE CAMPO</b>				
			<b>FORMULARIO</b>				
			<b>GUÍAS</b>				

Para analizar los diarios de campos, se tomaron fragmentos relevantes de lo reportado en el documento, estos datos se clasificaron como ventajas, desventajas y ni ventaja ni de ventaja, siendo estos los datos suministrados en la tabla para determinar cambios o no en el material y tareas. Para el análisis del formulario, se realizó un análisis estadístico de las 36 personas encuestadas, de las cuales fueron 33 estudiantes (25 oyentes y 8 Sordos), una profesora y 2 intérpretes; con relación a las respuestas obtenidas, se consideraron los datos con mayor preferencia, teniendo en cuenta las respuestas y sus porcentajes. Para el análisis de las guías, se tuvo en cuenta las respuestas correctas e incorrectas, en relación con el cumplimiento de los objetivos planteados por cada tarea.

Enseguida se presentan los hallazgos obtenidos referentes al material didáctico y luego, los asociados a las tareas. También se exponen las decisiones tomadas a partir de tales hallazgos.

**3.2.4.1. Sobre el material**

En relación con el material, se realizan cambios en dos aspectos, primero la presentación del objeto físico y segundo, con base en los criterios de tipificación, se describen las decisiones tomadas, luego de analizar tabla de análisis del pilotaje. Para ello, se tomó la información recolectada de los tres insumos. En cuanto al aspecto físico, no se realizan cambios con respecto a el tamaño de las fichas, tamaño del material y nombre del material, esto por cuanto el 75.7%, 69.7% y 78.8% de las personas encuestadas manifestaron están de acuerdo. Un ejemplo de ellos se puede observar en la *Figura 68*.

**Figura 68***Modificaciones al material*

			Ventajas	Desventajas	Ni ventajas Ni Desventajas	Modificaci n a tarea o material	Justificación de la decisión
Material didáctico	Presentaci ón (objeto físico)	Tamaño de las fichas	El 75,7% está muy de acuerdo o algo de acuerdo que el tamaño de las fichas es adecuado.	9,1% está muy en desacuerdo con que el tamaño de las fichas sea adecuado.	15,2% no está ni de acuerdo ni se de acuerdo con que el tamaño de las fichas sea adecuado.	Ninguna modificación respecto al tamaño de las fichas.	No se realiza modificación, puesto que, el diseñar fichas más pequeñas puede dificultar el desarrollo de la actividad por la manipulación de estas. Por otro lado, el diseñarlas más grandes implica diseñar el material más grande de lo propuesto.
					No aplica para las guías		
		Tamaño del material	El 69,7% está muy de acuerdo o algo de acuerdo que el tamaño del material es adecuado.	15,1 % está muy en desacuerdo o algo en desacuerdo con el tamaño del material «Un poco más pequeño (el material) (...) Para que no se dificulte su transporte» (Profesora).	No aplica	Ninguna modificación	No se realiza modificación del material, puesto que el objetivo de este es que se evidencie la mayor cantidad de términos posibles. Así que con un material más pequeño es imposible realizar varias particiones.

Por otro lado, se decide realizar cambios en: el color, material de construcción y manipulación del material, debido a que se observa en el diario de campos y en el formulario, dificultades en el desarrollo de la tarea 3.3 (convergencia de la serie); puesto que un estudiante menciona en el formulario «*Quizá sea bueno que el material tenga un solo color por ambos lados*», posteriormente, se observa que es válida la modificación del color. Para la serie Cola-Dino se decide pintar de fucsia todas las piezas principales por su reverso y las piezas adicionales por ambos lados de color fucsia, excepto la pieza que representa  $\frac{1}{2}$ , esta sería pintada de color naranja y, para la serie Cruz-griega, pintar el reverso de las piezas principales de color naranja y las piezas adicionales el anverso de color amarillo y el reverso de color naranja, esto en pro del desarrollo de la tarea 3.4 convergencia y 2.2 representación de fracciones. Como observa en la *Figura 69*

**Figura 69***Ajustes en algunos colores del material*

			Ventajas	Desventajas	Ni ventajas Ni Desventajas	Modificación a tarea o material	Justificación de la decisión
				«(...) en la serie Cola Dino, se observa dificultad en el grupo de trabajo, puesto que, las piezas no tenían un mismo color, se les pidió que intentaran verlas de un solo tono, y sobre ponerlas unidad» (Diario de campo. Serie Cola Dino).		1. Serie Cruz griega: Se debe pintar el reverso de las piezas principales de color naranja y las piezas adicionales de color amarillo por el anverso y reverso de color naranja.	Es necesario pintar algunas piezas del mismo color, para facilitar el desarrollo de las tareas, en especial la tarea 3.3 «convergencia de las series».
		Color	72,7 están muy de acuerdo o algo de acuerdo con el color del material.	9,1 % están muy en desacuerdo con el color del material. «Quizá sea bueno que el material tenga un solo color por ambos lados» (Estudiante. Serie Cruz griega)	18,2 % no están en desacuerdo ni de acuerdo con el tamaño del material.	2. Para la serie Cola-Dino se pintarán el reverso de las piezas principales y las piezas adicionales del color fucsia, excepto la pieza adicional que representa $\frac{1}{2}$ esta se pintara de color naranja; para las demás series no abra modificación.	
			Se identifica que el usar dos colores facilitó el reconocimiento de las fracciones; ya que, se evidencia en las guías que utilizaron los mismos colores para representar las fracciones de la tarea 2.2.				

Con relación al material de construcción, se decide diseñar el material en madera, siendo este un material que proporciona rigidez y exactitud en sus medidas; además, por observación de un estudiante se decide añadir una ficha técnica, en la que se detalla los elementos que componen los kits, esto con el fin de facilitar el control del material entregado y el desarrollo de las tareas con un material firme.

Por último, referente a la manipulación del material, se decide eliminar la serie Piramidal; puesto que, se identifica, en el diario de campo y las guías, como se observa en la *Figura 70*, que hubo dificultad para desarrollar las tareas propuestas con esta serie, por lo que se necesitó acompañamiento permanente de las FEM para la culminación de las tareas, así se considera la eliminación de la serie en la versión definitiva del material, pues es de un nivel de mayor complejidad y no coincidiría con el nivel de las demás series.

### Figura 70

*Justificación para eliminar serie Piramidal*

			Ventajas	Desventajas	Ni ventajas Ni Desventajas	Modificación a tarea o material	Justificación de la decisión
		Manipulación	El material fue de fácil manipulación.	Se evidencia que el grupo a cargo de la serie Piramidal presenta dificultades para manipular el material, puesto que el diseño de la serie era más abstracto y para realizar con éxito las primeras tareas, los estudiantes debían contar un proceso de visualización más desarrollado.		Se determina, no diseñar la serie para la propuesta final	Por la dificultad presentada para la comprensión de esta en el aula, puesto que se requirió apoyo permanente de las FEM para la culminación de las actividades y tareas propuestas.
	No aplica						
			Se observa en la tarea 2.2, los estudiantes a cargo de la serie Piramidal presentan dificultades para manipular el material y con este representar las fracciones propuestas, puesto que solo logran representar 2 de 3 propuestas.				

Con respecto a los criterios de tipificación del material, en aspectos: según su modalidad y según sus criterios, no se realizan cambios, puesto que más del 50% de las personas encuestadas estuvieron de acuerdo con que el material puede ser utilizado por estudiantes de cualquier edad, incluso puede ser útil para la enseñanza de otros conceptos matemáticos, también puede ser empleado para memorizar un algoritmo o para modelizar algunos conceptos matemáticos. Ver *Figura 71*.

### Figura 71

*No se realiza cambios respecto al criterio de modalidad*

			Ventajas	Desventajas	Ni ventajas Ni Desventajas	Modificación a tarea o material	Justificación de la decisión
	Modalidad de uso	Adquisición de rutinas	66,6 % está muy de acuerdo o algo de acuerdo que el material ayuda a memorizar un método matemático.	18,2 % está muy en desacuerdo o algo en desacuerdo que el material ayuda a memorizar un método matemático.	15,2 % no está de acuerdo ni en desacuerdo que el material ayuda a memorizar un método matemático.	No hay modificación	Inicialmente se había pensado que el material serviría de apoyo para memorizar métodos matemáticos.
			Se evidencia en las tareas 3.1 y 3.2 que los estudiantes identifican patrones numéricos, realizando el mismo procedimiento reiterativamente.				

Finalmente, se realizan cambios en los criterios de tipificación según su contenido y según su utilidad, puesto que más del 60% de los encuestados afirmaron que el material puede ser utilizado para la enseñanza en distintas ramas de las matemáticas; previamente se había considerado útil para enseñar

temas relacionados con la geometría, álgebra y aritmética, pero se evidencia que se puede ser útil para la enseñanza del cálculo.

#### **3.2.4.2. Sobre las tareas**

En cuanto a las tareas, los cambios se realizan con base en la información suministrada en los diarios de campo y el formulario, se inicia describiendo las tareas de las que no se realizan cambios y posteriormente a las que se realizan cambios.

En las actividades 2.3 «Selecciona la pareja ideal», 3.1 «Identificación de los términos de las series y sumas parciales», 3.2 «Razón común», 3.3 «Convergencia de la serie» y la 4 «recopilación de los datos obtenidos», no se realizan cambios; debido a que los estudiantes no presentan dificultades para el desarrollo de estas tareas. Teniendo en cuenta que el 69.7 %, 66.6%, 66.7 y 66.6%, respectivamente, de las personas encuestadas, afirman estar de acuerdo con las tareas propuestas, solo en la tarea 3.1, se presentó una dificultad en la operación de números fraccionarios, teniendo en cuenta que este objeto matemático no está relacionado directamente con la tarea, pero si con la ambientación; es decir, en la actividad de concéntrese. Por lo anterior, no se realiza cambio a esta tarea, pero si en el concéntrese, lo cual se describe más adelante. Además, como se ve en la *Figura 72*, se considera necesario incluir un cierre de la tarea, esto con el objetivo de reconocer los hallazgos encontrados y su relación con la serie.

#### **Figura 72**

*Algunas ventajas y desventajas del material*

			Ventajas	Desventajas	Ni ventajas Ni Desventajas	Modificación a tarea o material	Justificación de la decisión
			<p>1. Se organizan las mesas de trabajo.</p> <p>2. En cada mesa se coloca el material con los nombres de los integrantes.</p> <p>3. Entrega de un paquete con 6 fichas bibliográficas, que tenían expresiones algebraicas de los distintos materiales.</p> <p>4. Se realiza retroalimentación de las actividades realizadas en la sección anterior.</p> <p>5. Se observa participación de todos los grupos de trabajo, en especial de los sordos, quienes son los primeros en terminar.</p> <p>6. Al respaldo de esta deberán escribir los nombres de los integrantes de los grupos.</p> <p>7. Con el objetivo de orientarlos, se les indica que la expresión algebraica asociada al material se encuentra relacionada con las fracciones representadas en la actividad anterior.</p> <p>8. Una de las FEM, lleva el control en el tablero de los puntos obtenidos en cada actividad.</p>	<p>1. Se observa confusión frente al desarrollo de la actividad, puesto que, algunos grupos estaban realizando las sumas que se expresaban en la ficha o escogían una de las fichas al azar sin tener en cuenta nada de lo hecho previamente en las actividades anteriores.</p> <p>2. Se identifica un poco de dificultad con el grupo de la serie piramidal para entender la representación de <math>\frac{16}{81}</math>, por lo cual fue necesario una intervención más profunda de las FEM.</p>		<p>No se realiza cambio.</p> <p>Una vez finalizada la tarea, es necesario realizar una aclaración acerca de los datos encontrados que relación tienen con la serie.</p>	

En relación a la actividad de ambientación, que tenía como objetivo recordar algunos conceptos matemáticos necesarios para el desarrollo de las tareas planteadas, por medio de un concéntrese; como se ve en la *Figura 73*, se decide incluir suma de fracciones con denominadores grandes, puesto que, en la actividad 2.3 en las que se debe realizar las sumas parciales de las fracciones, se evidencia dificultad para operar estos fraccionarios, por lo anterior se consideró incluir ejercicios similares que sirvan de repaso para el desarrollo de esta tarea.

**Figura 73**

*Modificación en la actividad de concéntrese*

			Ventajas	Desventajas	Ni ventajas Ni Desventajas	Modificación a tarea o material	Justificación de la decisión
			<p>1. Se observa participación de todos los grupos de trabajo incluso los grupos con estudiantes sordos.</p> <p>2. Se contó con un intérprete quien brindó apoyo constata en el grupo.</p> <p>3. Los estudiantes Sordos comprendieron la actividad, además son bastante competitivos.</p> <p>4. Las FEM realizan retroalimentación. La actividad fue demasiado provechosa y entretenida.</p>	<p>1. Funcionamiento correcto de instrumento tecnológico (cable HDMI).</p> <p>2. Dificultades de los estudiantes en conceptos previos.</p>		<p>Incluir en la actividad de ambientación (concéntrese) ejercicios que incluyan fracciones con denominadores grandes, para recordar cómo se operan este tipo de fracciones.</p>	<p>Se evidencia en el aula, dificultad para realizar las sumas parciales, puesto que los denominadores eran cada vez más grandes y esto dificultó sumar los términos.</p>

Por otro lado, en las tareas 2.1 «En sus marcas listos, ¡Arma!» y la 2.2 «Representación de fracciones», se observa en la información suministrada por los diarios de campo, la necesidad de incluir instrucciones adicionales, puesto que la información dada no fue clara, entre las instrucciones adicionales se encuentra: en la actividad 2.1, armar el material teniendo en cuenta la forma, el color, tamaño de las piezas y nombre del material, y en el tarea 2.2, utilizar todo el material para representar las fracciones propuestas, tener en cuenta los colores de las piezas para la representación de fracciones y no sobreponer una pieza sobre otra para representar las fracciones; además, se identifica en la información suministrada por el formulario que en promedio el 71.25% de las personas, afirman estar de acuerdo con las tareas propuestas, por lo cual no se realiza cambio en ellas, salvo en las instrucciones ya mencionada. Como se observa en la *Figura 74*.

**Figura 74**

*Modificación en las instrucciones de las tareas*

		Ventajas	Desventajas	Ni ventajas Ni Desventajas	Modificación a tarea o material	Justificación de la decisión
	<b>Representación de fracciones (2.2)</b>	1. Se entrega a cada grupo un pequeño paquete de fichas, el cual contenía 4 a 5 fracciones. 2. Se entrega un paquete de piezas adicionales del material, que podrían ser útiles para la representación de las fracciones. 3. Las FEM brindan apoyo a los grupos que iban realizando la representación validando si esta correcta o no. 4. Se les indicó las instrucciones de la primera guía, la cual debían diligenciar con base a la actividad anterior. 5. Observa que gran parte de los grupos lograron responder la guía. 6. Las FEM proporcionan pistas para representar las fracciones con el material.	1. Se observa la construcción de las fracciones solo con algunas piezas del material. 2. No se consideraron otras posibles representaciones con el material.		Incluir las siguientes instrucciones para desarrollar la actividad: 1. Usar TODO el material como parte entera. 2. Tener en cuenta los colores para representar las fracciones. 3. No sobre poner pizas en otras para representar la fracción.	Se evidencia en el aula, que muchos estudiantes utilizando solo una parte del material para representar las fracciones propuestas, aunque el proceso no está mal, es necesario que se use el material completo para lograr observar las cualidades y características de la serie.
		78,8 % está muy de acuerdo o algo de acuerdo que es fácil representar fracciones con ayuda del material.	9,1 % está muy en desacuerdo o algo en desacuerdo que es fácil representar fracciones con ayuda del material.	12,1% no está de acuerdo ni en desacuerdo que es fácil representar fracciones con ayuda del material.		

Finalmente, como se ve en la *Figura 75* se decide incluir una tarea 5, titulada «Expresión algebraica general», puesto que, se observa en la actividad de cierre (videos Mathematical Visual Proofs) que tiene como objetivo mostrar los videos de las series trabajadas con el material didáctico. Desde de la noción del infinito característica que no es posible mostrar con el material físico, muchos estudiantes observan diferencias entre las expresiones numéricas mostradas en el video y las expresiones numéricas trabajadas durante las tareas; por lo que se decide incluir esta actividad

adicional en la que se aborde y se explique la relación entre la representación simbólico-numérica larga y la representación simbólico-numérica corta (sumatoria).

### Figura 75

#### *Modificaciones para diseñar una nueva tarea*

	<b>Otras actividades</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Para finalizar se les informa que deben diligenciar una encuesta de satisfacción que al igual que las otras actividades tenía nota.</li> <li>2. Se envió el enlace a un grupo en WhatsApp que tenía el curso, para responder la encuesta de satisfacción.</li> <li>3. Se procedió a mostrar los videos del canal de YOUTUBE de Visual Proof, de las series trabajadas en el aula.</li> <li>4. Se observan algunas expresiones de emoción y sorpresa por los grupos.</li> <li>5. Las FEM mencionan, que en la actualidad no se cuenta con material físico concreto para trabajar series y series al infinito.</li> <li>6. De manera inesperada se observa mucha emoción en esta actividad.</li> </ol>	El formulario no permite ingresar más de una respuesta por correo, así que se presentó un poco de desorden por esto.		Se considera necesario explicar la forma corta de la expresión algebraica de la serie mediante el uso de la sumatoria.	Se observa que muchos estudiantes al ver el video se preguntaban por qué eran tan diferentes las expresiones que se trabajaron con la mostrada en el video, esto con el objetivo de aclarar que son la misma expresión solo que una es la expresión corta que incluía el símbolo matemático de la sumatoria y la otra la expresión larga.
--	--------------------------	--	--	--	--	---

Por último, si el lector desea más información referente a la tabla de análisis, esta se puede encontrar en el *anexo G*.

#### **3.2.5. Construcción definitiva de los kits de series y documentos final de las tareas**

En esta sección se realiza la descripción de la construcción final del material didáctico y las tareas. Con relación al material, luego de un análisis de los insumos de recolección de datos, se toman decisiones con respecto a los cambios del material construcción, color y tamaño para el material didáctico, se valida con un carpintero, quien sugiere realizar el material en MDF de 5mm, por sugerencia de él, ya que, al elaborar las piezas estas se pueden romper o curvar.

Para la selección del tamaño del material, se decide llevar los diseños preliminares creados para la aplicación del pilotaje a la carpintería; con el fin, de utilizarlos como guía y boceto para el diseño del material final. Como se observa en la *Figura 76*.

### Figura 76

#### *Construcción del material series Cruz-Griega definitivo en MDF*



*Nota.* Boceto en material MDF de la serie Cruz-griega. Fuente: autoría propia

Posteriormente de realizado el corte y diseño de cada una de las series, se buscaron las pinturas acordes al material preliminar. Después de una búsqueda exhaustiva, se decide utilizar pintura vinilo tipo 1, colores primarios (intensos), puesto que lo ideal era utilizar los mismos colores del material preliminar, por lo que se hace necesario preparar y combinar varios tonos para obtener el color deseado.

Una vez pintado el material, se da inicio a realizar los trazos de las particiones que van en el reverso del material, como se realizó en el material preliminar. Por último, como se ve en la *Figura 77* se procede a lacar todo el material, esto con el fin, de mantener y conservarlo en un estado óptimo y agradable a la vista.

### **Figura 77**

*Material principal de serie Caracolí terminado*



*Nota.* Material principal definitivo de la serie Caracolí luego de ser pintado y lacado. Fuente: autoría propia.

En cuanto a las tareas, se realizan los cambios sugeridos por los estudiantes, docentes y los obtenidos en los insumos de recolección. Algunos de los cambios realizados fueron: tarea 1, ambientación, incluir operaciones entre fraccionarios con denominadores mayores a los inicialmente considerados, puesto que se observó dificultad para operar este tipo de fracciones durante la prueba piloto. En la tarea 2, reconocimiento del material, se decide incluir instrucciones adicionales para el desarrollo de las subtareas propuestas y, por último, se decide incluir una tarea adicional, titulada: «Tarea 5. Expresión algebraica general», esta se incluye debido a que durante la prueba piloto se observa que muchos estudiantes no logran encontrar la relación entre las representación simbólico-numérica trabajadas (larga), es decir, las entregadas en el set de fichas para la tarea 2.3, con la representación simbólico-numérica corta (sumatoria) mostrada en los videos en el canal de YouTube «*Mathematical Visual Proofs*» como cierre de la tarea 4, por lo que se decide necesario incluir esta actividad con el fin de mostrar la relación entre las dos expresiones. La versión definitiva de las tareas se encuentra en la siguiente sección.

## CAPÍTULO IV. Material didáctico

### 4.1. Descripción del material

En el presente capítulo se encuentra la descripción detallada de los elementos que componen cada del kit del material «Series Geometry LyAnLi» y sus funciones; también, se explica el uso adecuado del material. Así mismo, se presenta la propuesta final de las describiéndolas, incluyendo imágenes de apoyo con la propuesta final del material.

#### 4.1.1. Descripción del material «Series Geometry LyAnLi»

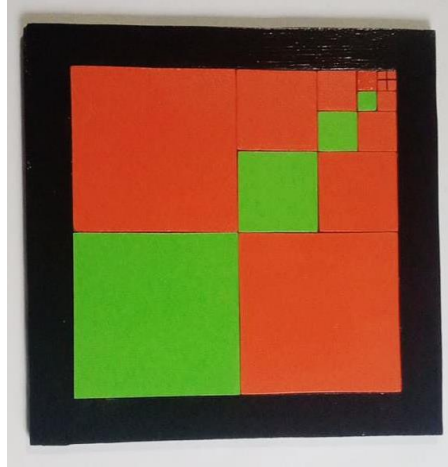
El material «Series Geometry LyAnLi» está compuesto por seis kits llamados: Serie Caracolí, Serie Cola-Dino, Serie Cruz-griega, Serie Pinski, Serie Mountain y Serie Fish, este ha sido creado en el marco del trabajo de grado: «Material didáctico para la enseñanza y aprendizaje de las series geométricas».

El material fue diseñado en madera MDF de 5.0 mm, material que ofrece firmeza y rigidez; los demás componentes del kit los cuales son: set de seis expresiones algebraicas, set de fraccionarios, set de fichas con las letras A, B, C, D, E, F, G, H y I e imagen de la serie y clasificación de las piezas, se diseñaron en papel opalina y papel laminado, esto para garantizar su duración. También, se cuenta con una ficha técnica para cada kit, en la que se describe cada uno de los partes que la compone. Cada kit está conformado por:

1. Piezas que conforman las series o piezas principales con su respectivo marco. Estas piezas tienen anverso ver *Figura 78* y reverso ver *Figura 79*.

#### **Figura 78**

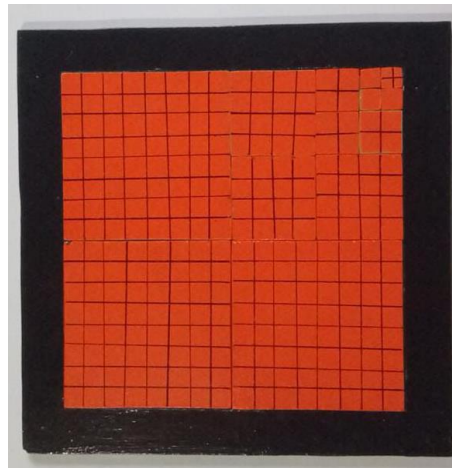
*Anverso de Serie Fish*



*Nota.* Vista principal del material didáctico serie Fish. Fuente: autoría propia

**Figura 79**

*Reverso de la serie Fish*

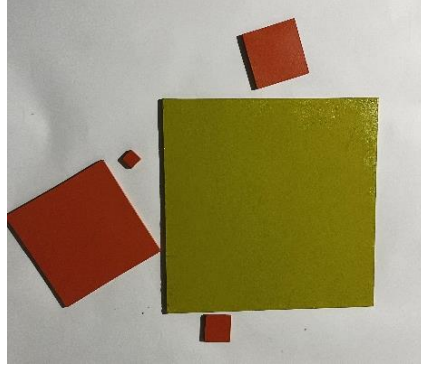


*Nota.* Vista de la parte de atrás del material didáctico principal de la serie Fish. Fuente: autoría propia.

2. Piezas complementarias, por ejemplo, ver *Figura 80*.

**Figura 80**

*Piezas adicionales serie Fish*

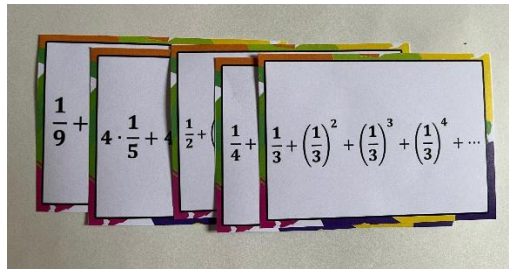


Nota. Piezas adicionales de la Serie Fish para la realización de las tareas diseñadas. Fuente: autoría propia

3. Set de expresiones algebraicas ver *Figura 81*.

**Figura 81**

*Set de expresiones Serie Fish*

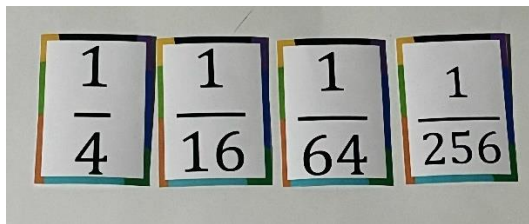


Nota. Set de cinco expresiones correspondientes para cada serie, Fuente: autoría propia

4. Set de fraccionarios ver *Figura 82*.

**Figura 82**

*Set de fichas con números fraccionarios*



Nota. Set de números fraccionarios correspondiente a cada término de la serie, Fuente: autoría propia

5. Set de fichas con las letras A, B, C, D, E, F, G, H, y I ver *Figura 83*.

**Figura 83**

*Set de fichas con letras alfabéticas*



*Nota.* Set de fichas con letras para nombrar las partes del material, Fuente: autoría propia

6. Imagen de la serie y clasificación de las piezas ver *Figura 84*.

**Figura 84**

*Fotografía de la serie Fish con sus partes*

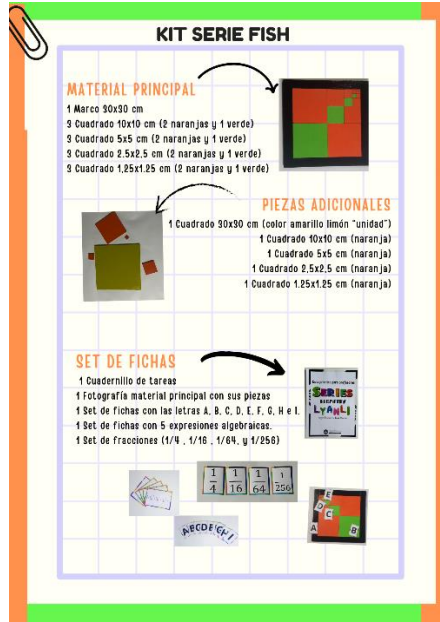


*Nota.* Fotografía que hace parte del kit para poder identificar cada parte del material, Fuente: autoría propia

7. Ficha técnica del material ver *Figura 85*, en la que se describen algunas características y elementos que componen el material.

**Figura 85**

*Ficha técnica del kit serie Fish*

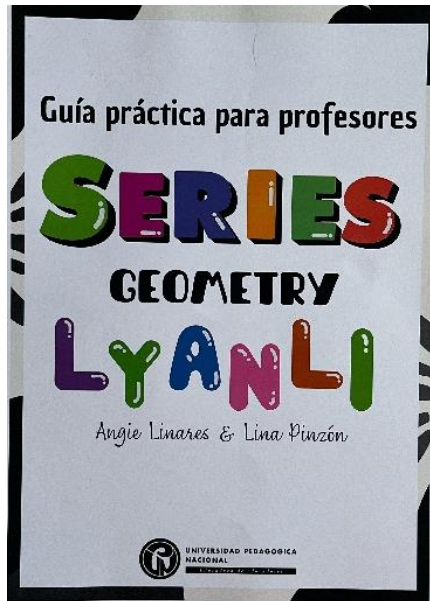


Nota. Ficha técnica que tiene la lista de todas las partes que está conformado el kit con medidas, colores y demás. Fuente: autoría propia

8. Cuadernillo (guía práctica para profesores), en el cual se presentan las cinco tareas a desarrollar con el material ver *Figura 86*.

**Figura 86**

*Cuadernillo de tareas*



*Nota.* Cuadernillo de tareas es una guía práctica para que los profesores tengan presente al momento de hacer uso del material. Fuente: autoría propia.

Este material didáctico se diseñó con base en los siguientes criterios de tipificación:

- Según su utilidad: El material puede ser co-instruccional, utilizado para introducir un tema, las series geométricas convergentes; pre-instruccional, como refuerzo para el mismo concepto; o pos-instruccional, para revisar y repasar el contenido enseñado.
- Según el contenido matemático: Este material se diseñó principalmente para la enseñanza y aprendizaje de las series geométricas convergentes; por otro lado, puede ser de utilidad para la enseñanza y aprendizaje de otros conceptos matemáticos como: números racionales, operaciones entre número racionales, secuencias, patrones, semejanza y congruencias de figuras, medida de ángulos, simetría, introducción a la noción del infinito, límites, sucesiones y series.
- Según el criterio: Para usar este material de manera efectiva, es importante considerar dos aspectos principales: la edad del estudiante, se espera que se encuentre desde los 14 años en adelante, y el concepto matemático específico que se desea enseñar. El material está diseñado para cubrir uno o varios conceptos y propiedades matemáticas, además de ayudar en el desarrollo de diversas habilidades y procesos matemáticos.
- Según la modalidad de uso: Este material será de gran utilidad para modelizar ideas y conceptos, es decir, permite reconocer propiedades y características de los objetos matemáticos, mediante los sentidos de la visión y el tacto, por ejemplo, mediante la visión es posible determinar característica como tamaños, formas, patrones, regularidades y colores, así mismo el tacto permite armar, tocar, sentir, organizar, ubicar, girar, rotar, etc.

#### **4.1.2. ¿Cómo usar el material?**

El uso del material y elementos que lo componen dependen de las tareas a desarrollar. No obstante, se menciona, enseguida, algunos de los componentes y su uso:

- La *ficha técnica* es recomendable para que el profesor y el estudiante tengan control y registro de todos los elementos que componen cada kit.
- El *marco* de cada serie es indispensable para que el estudiante tenga un elemento orientador al

armar cada serie; además, como base para ubicar las piezas dentro de este, de acuerdo con la tarea que se esté realizando en el momento.

- Para el desarrollo de la tarea 2.1, titulada «**En sus marcas listos, ¡Arma!**» (ver guía práctica para profesores en el anexo J), se usa únicamente las piezas principales por el anverso y el marco.
- Para tarea 2.2, «**Representación de fraccionarios**» (ver guía práctica para profesores), se usa las piezas principales (anverso y reverso), las piezas adicionales, set de fraccionarios y el marco.
- En la tarea 2.3 «**Selecciona la pareja ideal**» (ver guía práctica para profesores), se usa las piezas principales por el anverso, set de expresiones algebraicas y el marco.
- Para la tarea 3.1 “**Identificación de los términos de las series y sumas parciales**” y 3.2 “**Identificación de la razón común**”, se usan las piezas principales por el anverso, set de letras A, B, C, D, E, F, G, H e I; y la imagen con la clasificación de las piezas.
- En la tarea 3.3 “**Identificación de la convergencia**”, se usa una de las piezas completaría la pieza A y las piezas principales del color que requiera la tarea.

## 4.2. Tareas

En esta sección se hace la presentación final de las tareas para el uso del material didáctico; además, de los conocimientos previos necesarios para el desarrollo de estas.

### 4.2.1. Conocimientos previos

Para el desarrollo de las tareas planteadas es necesario que los estudiantes cuenten con los siguientes conocimientos previos para que la clase en la que se use el material sea óptima; estos conocimientos favorecen el uso del material didáctico.

A continuación, se detallan los conocimientos previos matemáticos que el estudiante debería tener para el desarrollo de las tareas: Identificación de las partes de una fracción, habilidad para sumar números fraccionarios expresados con fracciones, representación gráfica de números fraccionarios, interpretación de las fracciones como relación parte-todo, representación decimal (decimales finitos y periódicos) y como fracción de números racionales, conversión de fracciones a expresiones decimales y propiedades de la potenciación.

### 4.2.2. Descripción de las tareas

En esta sección se realiza una descripción detallada de las tareas diseñadas para la implementación y uso del material didáctico en el aula.

#### 4.2.2.1 Tarea 1. Ambientación

Para iniciar, se considera importante recordar algunos conocimientos previos que serán necesarios para el desarrollo de las siguientes tareas. Se plantea, entonces, un “Concéntrese”, con este se abordan conceptos matemáticos que abordan que tiene como objetivo recordar algunos conceptos matemáticos que son fundamentales para el desarrollo de las demás tareas, como: representación de números fraccionarios y algunas de sus representaciones gráficas asociadas con figuras geométricas, partes de una fracción, adición de números fraccionarios con fracciones, potenciación, y representación decimal asociada a una fracción. Para abordar estos conceptos se recomienda utilizar como estrategia el «Concéntrese».

La partida inicia seleccionando un estudiante al azar, quien tendrá que elegir una pareja de cartas, el estudiante deberá responder si son o no parejas, en caso de que responda:

*No:* se oculta la pareja de nuevo, así sea correcta.

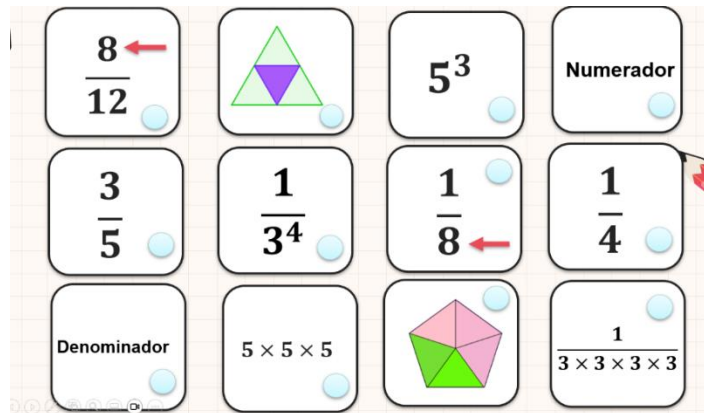
*Sí:* debe responder por qué son pareja.

Si el estudiante no puede explicar, no entiende o muestra alguna confusión al responder si son o no pareja, el profesor interviene haciendo preguntas que lleven a otros estudiantes a hacer relaciones que les permitan decidir sobre el emparejamiento con el objetivo de aclarar y resolver inquietudes en los estudiantes.

Las fichas que se proponen para el concéntrese son las siguientes ver *Figura 87* y *88*:

### Figura 87

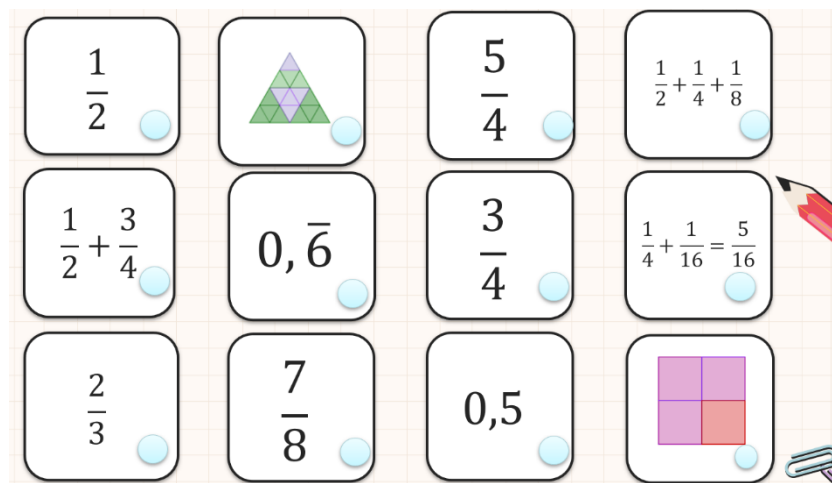
*Parte 1 del concéntrese*



*Nota.* Primeras tarjetas para emparejar que tiene propósito reforzar conocimientos previos. Fuente autoría propia

### Figura 88

*Parte 2 del concéntrese*



*Nota.* Segundas tarjetas para emparejar que tiene propósito reforzar conocimientos previos. Fuente autoría propia

#### 4.2.2.2 Tarea 2. Reconoce el material

Para dar inicio con las tareas se pedirá a los estudiantes que conformen grupos de cinco a seis personas. Cada grupo será nombrado de acuerdo con el nombre del kit asignado; seguidamente, a medida que se van desarrollando las tareas propuestas se irá entregando parte del kit necesario para el cumplimiento de las tareas.

**NOTA:** Cada grupo debe desarrollar todas las tareas propuestas con el material entregado inicialmente; es decir, el material no se va a rotar.

Con esta tarea llamada “Reconoce el material”, se espera que el estudiante manipule, mueva y organice el material, para ello se proponen las siguientes tareas:

**La tarea consta de tres partes:**

- En sus marcas listo, ¡Arma!
- Representación de fracciones.
- Selecciona la pareja ideal.

**4.2.2.2.1. Tarea 2.1. En sus marcas listos, ¡Arma!**

Inicialmente se formarán grupos de cinco a seis estudiantes, a cada grupo se le hará entrega de un material desarmado; cada grupo deberá armarlo de la manera que considere correcta, antes de iniciar la tarea se dan las siguientes indicaciones:

- Para armar el material, se debe tener en cuenta el nombre del material.
- Tener en cuenta los colores, tamaños y forma de las piezas que conforman el material.

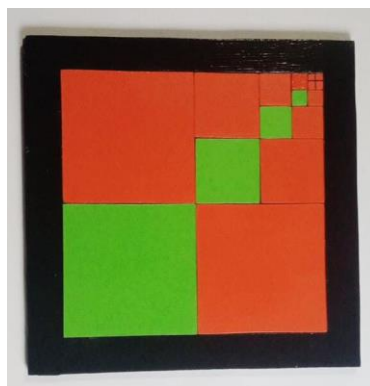
En caso de que los estudiantes presenten confusiones, el profesor los guiará.

A continuación, se muestra en la *Tabla 15* cómo se hará entrega del material (desarmado) ver *Figura 89*-columna 1- y cómo se espera que se arme el material ver *Figura 90* -columna 2.

**Tabla 15**

*Material definitivo de Serie Fish armado y desarmado*

Material desarmado	Material armado
--------------------	-----------------

**Figura 89***Vista del material definitivo desarmado***Figura 90***Vista del material definitivo desarmado*

*Nota.* Ejemplo de cómo se debe realizar la tarea 2.1. Fuente: autoría propia.

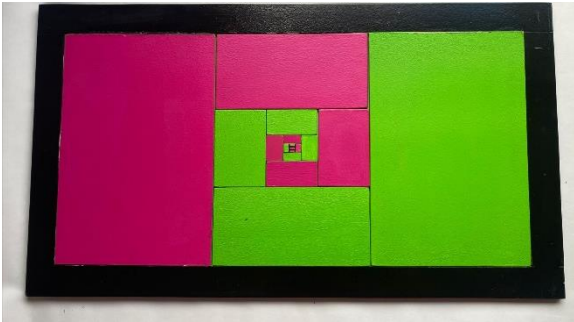
#### **4.2.2.2.2. Tarea 2.2. Representación de fracciones**

Con ayuda del material, se pide a cada grupo que represente las fracciones indicadas en el set de fracciones entregados, se les dice que tengan en cuenta que el material tiene un reverso, que también lo pueden utilizar para la representación de las fracciones con el material entregado. Por último, se da las siguientes indicaciones:

1. Usar TODO el material como el TODO o la UNIDAD para representar las fracciones que se solicitan.
2. Tener en cuenta los colores para representar las fracciones.
3. No sobreponer piezas en otras para representar la fracción.

En seguida, se encuentra en la *Tabla 16* la fracción  $\frac{1}{3}$  a representar con el kit “Caracolí”:

**Tabla 16***Ejemplo representación de fracciones*

**Material****Fracción****Posibles respuestas esperadas****Figura 91***Material serie Caracolí***Figura 92***Representación de fracción material definitivo*

$$\frac{1}{3}$$

*Nota.* Representación de  $\frac{1}{3}$  de la serie Caracolí. Fuente: autoría propia.

#### **4.2.2.2.3. Tarea 2.3: Selecciona la pareja ideal**

A cada grupo se le hace entrega de el set de fichas que contienen varias expresiones algebraicas. Se pide a cada grupo que elija una de las fichas entregadas, la que considere es la asociada al material, para ello se les dice que deben tener en cuenta las fracciones que se muestran en la expresión simbólica (numérica) y las representadas en la tarea 2.2, esto en caso de ser necesario.

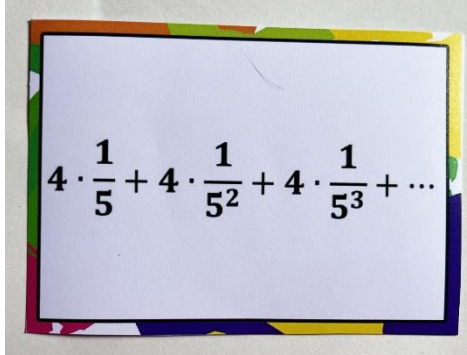
Se espera que cada grupo asocie las expresiones simbólicas con el material como se observa en la *Tabla 17* de la siguiente manera:

**Tabla 17**

*Expresión simbólica definitiva correspondiente a la serie Cruz-Griega*

<b>Expresión simbólica</b>	<b>Material didáctico</b>
----------------------------	---------------------------

**Figura 93***Expresión simbólica de la serie Cruz-Griega*



$$4 \cdot \frac{1}{5} + 4 \cdot \frac{1}{5^2} + 4 \cdot \frac{1}{5^3} + \dots$$

**Figura 94***Material didáctico definitivo asociado a la expresión*

*Nota.* Ejemplo de la expresión simbólica asociada la serie Cruz-Griega. Fuente: autoría propia

#### **4.2.2.3. Tarea 3. Identificar los elementos que componen la serie.**

Esta tarea esta divida en tres partes.

Tarea 3.1. Identificación de los términos de las serie y sumas parciales.

Tarea 3.2. Identificación de la razón común.

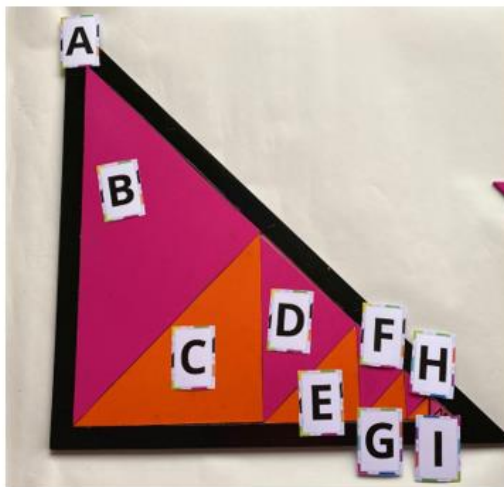
Tarea 3.3. Identificación de la convergencia.

##### ***4.2.2.3.1. Tarea 3.1: Identificación de los términos de las series y sumas Parciales.***

Con esta tarea se espera que los estudiantes logren identificar los elementos que componen la serie, además de encontrar las sumas parciales de la misma. Para ello, se hace entrega, a cada grupo de estudiantes, de un set de fichas con las letras A, B, C, D, F, G, H y I una imagen de la serie con las letras, como se ve en la *Figura 95* con el propósito que cada grupo nombre cada una de las piezas del material, de la siguiente manera:

**Figura 95**

*Serie Cola-Dino con sus fichas para identificar las piezas*



s

*Nota.* Fotografía que tiene cada kit para nombrar las partes de material. Fuente: autoría propia.

Al finalizar la tarea, el profesor “a modo de conclusión” menciona que, las sumas realizadas en los puntos anteriores, se les llama “**sumas parciales**” de una serie y cada uno de sus sumandos “**términos**” de la serie, además se mencionan las relaciones o similitudes encontradas en las fracciones obtenidas, es decir, al escribir las fracciones obtenidas de las sumas parciales en su notación decimal, se puede observar que se va acercando a un número en específico, que es conocido como **convergencia de la serie**.

#### **4.2.2.3.2. Tarea 3.2: Identificación de la razón común.**

Con esta segunda parte de la tarea 3, se espera que los estudiantes logren encontrar la “Razón común” de los términos que componen la serie; al igual que las tareas anteriores, se hará entrega a cada grupo de una guía en la que deberán responder a las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál fracción representa la pieza B con respecto a la pieza A?
2. ¿Cuál fracción representa la pieza C con respecto a la pieza B?
3. ¿Cuál fracción representa la pieza D con respecto a la pieza C?

4. ¿Cuál fracción representa la pieza E con respecto a la pieza D?
5. Plantea una conclusión respecto a lo hallado en los numerales anteriores, escribe dicha conclusión de la manera más clara y completa posible.

Al finalizar la tarea, el profesor “a modo de conclusión” mencionarán que la relación encontrada en los términos de las series, esto es, entre las fracciones de las piezas dadas respecto a todo el material, se le llama “**Razón Común**”.

#### 4.2.2.3.3. Tarea 3.3. Identificación de la convergencia.

En esta tarea, se espera que el estudiante identifique el valor al que converge cada una de las series que han representado con el material didáctico, para ello, se pedirá a cada grupo que observe el material armado y encuentre la relación de las siguientes piezas de las series:

1. Serie **Caracolí** las piezas *verdes* con la *amarilla* “unidad”.
2. Serie **Cola-Dino** las piezas *fucsias* con la pieza *verde* “unidad”.
3. Serie **Cruz-Griega** las piezas *naranjas* con la pieza *verde* “unidad”.
4. Serie **Pinski** las piezas *naranjas* con la pieza *fucsia* “unidad”.
5. Serie **Fish** las piezas *verdes* con la pieza *amarilla* “unidad”.
6. Serie **Mountain** las piezas *fucsias* con la *naranja* “unidad”

Esta relación se conoce como **convergencia de la serie**; siendo el material didáctico una representación parcial de las sumas parciales de las series, puesto que, las series utilizadas para la elaboración del material son series infinitas, lamentablemente en el material no es posible capturarlo.

A continuación, en la *Tabla 18* se muestra la representación algebraica completa de las series:

**Tabla 18**

*Expresiones algebraicas con sus términos al infinito*

Material didáctico	Expresión algebraica completa
Serie Cola-Dino	$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \dots$

---

 Serie Caracolí

$$\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \left(\frac{1}{3}\right)^5 + \dots$$


---

*Nota.* Expresiones algebraicas completas de la serie Cola-Dino y Caracolí. Fuente: autoría propia.

Para lograr el objetivo se dan las siguientes instrucciones orientadoras:

- Identifica la unidad y ubícala en el marco.
- Ubica la fracción que representa el primer término (teniendo como referencia la serie completa), de la misma manera ubica el segundo y así sucesivamente.
- Ahora responde, ¿Qué fracción representan las piezas en relación con la unidad?

Se espera que cada grupo asocie su material a la siguiente fracción, se finaliza la tarea, indicando que la fracción encontrada por cada uno de los grupos de trabajo se llama “**convergencia**” de la serie. En la *Tabla 19* se halla la convergencia de cada serie, por ejemplo, en la tabla se observa la convergencia para el caso de la serie Pinski.

**Tabla 19**

*Convergencia de la serie Pinski*

---

**Material didáctico**

**Convergencia**

**Material didáctico con su convergencia**

---

**Figura 96**

*Material definitivo de la serie Pinski*



$\frac{1}{3}$

**Figura 97**

*Convergencia de la serie Pinski con material definitivo*



*Nota.* Convergencia de la serie Pinski cuando se sobrepone las piezas con la pieza unidad. Fuente: autoría propia.

A modo de conclusión el profesor dice que el resultado obtenido de la tarea anterior se conoce como **convergencia**, es decir, el valor al que converge la serie. Además, se muestra la relación entre lo obtenido en esta tarea con la tarea de las sumas parciales, siendo esta otra manera con la que se puede determinar la convergencia de la serie.

#### 4.2.2.4. Tarea 4. Recopilación de los resultados obtenidos

Como tarea final se hace entrega “a cada grupo de estudiantes” de una tabla incompleta, la cual tiene como objetivo recoger la información encontrada durante el desarrollo de las tareas anteriores.

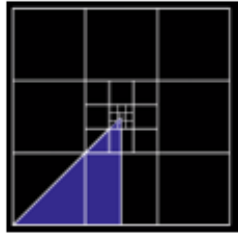
Finalmente, el(la) profesor(a), da las indicaciones para diligenciar cada una de las columnas que componen la tabla:

- **Material entregado:** en este espacio, los estudiantes deberán dibujar el material entregado inicialmente, se espera que incluyan detalles como color, figuras, particiones, etc.
- **Expresión algebraica:** en este apartado los estudiantes deben escribir la expresión algebraica asociada al material entregado.
- **Primer término:** en esta columna, los estudiantes deberán escribir la fracción encontrada en la actividad 3 de la pregunta 1.
- **Términos:** en esta columna los estudiantes deberán escribir las fracciones encontradas en la actividad 3. (solo las fracciones no las sumas).
- **Sumas parciales:** en esta columna, cada grupo deberá escribir las sumas parciales encontradas en la actividad.
- **Convergencia:** en esta parte, los estudiantes deberán ingresar la información encontrada en la tarea 5 del punto 5.

A continuación, se encuentra en la *Figura 98* la tabla que es entregada a cada grupo de estudiantes.

**Figura 98**

Tabla para completar los datos de la serie Mountain

#	Expresión algebraica	Material entregado					
			Primer término	Razón común	Términos de la serie	Suma parciales	Convergencia
							

*Nota.* Tabla diseñada con el fin de recopilar información de las tareas diseñadas


#### 4.2.2.5 Tarea 5. Expresión general

Esta tarea tiene como objetivo implementar el uso de la sumatoria para expresar el término general de la serie, de forma corta; para ello, se propone una tarea en la que se utiliza un ejemplo de la representación numérica-algebraica de una serie, en la que, mediante el uso de la sumatoria, es posible expresarla de forma corta. Luego de la explicación de dicho ejemplo, se propone una guía 5, (la guía se encuentra al final de las tareas) a cada grupo de trabajo en la que deben pasar de la expresión algebraica «larga» dada inicialmente a la expresión «corta» mediante el uso de la sumatoria. Para una consulta más detallada de la tarea puede consultar el anexo H.

Como **tarea 6 o tarea de cierre**, si es gusto del profesor se propone presentar “a todo el grupo de estudiantes” unos videos con una duración máxima de uno a dos minutos, tomados del canal de YouTube «*Mathematical Visual Proofs*». Los cuales aportan a la conclusión de todo lo realizado, con el material y las tareas, porque permite visualizar las series manipuladas de manera animada. Así se cierran las tareas propuestas alrededor de las convergencias de algunas series geométricas.

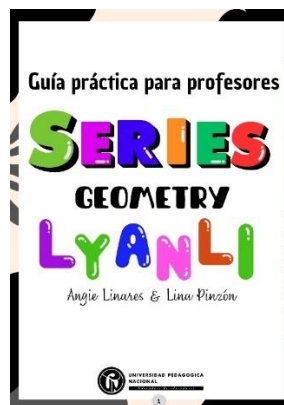
A continuación, en la *Tabla 20* se presenta un ejemplo de lo enlaces del video donde presentan diferentes series geométricas. Los enlaces de cada serie los puede consultar en el anexo I.

**Tabla 20***Enlaces para acceder a los videos de cierre*

Enlace	Código QR
<a href="https://www.youtube.com/watch?v=JteQEN1XPyc&amp;t=47s">https://www.youtube.com/watch?v=JteQEN1XPyc&amp;t=47s</a>	<p data-bbox="1013 375 1344 428"><b>Figura 99</b> <i>Video Mathematical Visual Proofs</i></p> 

*Nota.* Ejemplo del enlace para acceder a la tarea de cierre. Fuente: autoría propia.

La descripción detallada de las tareas y uso del material didáctico se encuentra en el cuadernillo «Guía práctica para profesores Series Geometry LyAnLi», la portada del cuadernillo ver *Figura 100* el cuadernillo definitivo de tareas se encuentra en el *anexo J*.

**Figura 100***Portada del cuadernillo*

*Nota.* Cuadernillo diseñado para ser una guía para los profesores en uso del material «Series Geometry LyAnLi». Fuente: autoría propia-

## **CAPÍTULO V. Conclusiones y recomendaciones**

### **5.1 Conclusiones**

A partir del trabajo desarrollado, este capítulo se presentan las conclusiones de los aprendizajes obtenidos a lo largo del diseño de este trabajo. También, se dan recomendaciones para próximas aplicaciones de uso del material, basadas en las opiniones y análisis del pilotajes e insumos recolectados.

Respecto el objetivo general del presente trabajo el cual consistió en diseñar un material didáctico que favorece la enseñanza y aprendizaje de algunas series geométricas convergentes en el aula, se puede concluir que:

#### **En relación con el aprendizaje de los estudiantes (Sordos y oyentes)**

1. El uso de los sentidos del tacto y la visión se mostró crucial en la utilización del material, ya que estos sentidos desempeñaron un papel fundamental en el desarrollo de las tareas asignadas. En los estudiantes Sordos se observó facilidad en las tareas 3.1, 3.2 y 3.3 las cuales requerían con un proceso de visualización más desarrollado; por otro lado, en los estudiantes oyentes, se evidencia el desarrollo de todas las tareas planteadas. En este contexto, los estudiantes Sordos se beneficiaron notablemente de esta modalidad sensorial. Su participación no solo fue activa, sino que también destacó significativamente durante la aplicación del material didáctico y en la realización de las tareas.
2. El material didáctico facilitó la comprensión de las series geométricas en los estudiantes Sordos; esto se evidenció durante la aplicación de la prueba piloto, puesto que, realizaban las tareas propuestas en menor tiempo que los estudiantes oyentes. El uso de los sentidos del tacto y la visión fueron claves para el desarrollo de las tareas propuestas.

#### **En relación con la enseñanza**

3. La prueba piloto reveló que los estudiantes enfrentan desafíos en el proceso de visualización. Específicamente, en la serie piramidal, puesto que esta, generó mayor dificultad y confusiones,

ya que identificar las particiones resultó ser complicado para ellos. Esto evidencia la necesidad de fortalecer habilidades de visualización y razonamiento abstracto para mejorar su comprensión y manejo de otras series con esta particularidad.

4. Durante el proceso de puesta en escena del material y las tareas se puso en evidencia la importancia de diseñar clases diferentes. que llamen el gusto y atención de los estudiantes, en donde se incluyan herramientas como el material didáctico que logren cambiar la idea que las matemáticas son aburridas, siendo accesibles para unos sí y para otros no, ya que el uso de material didáctico ubica a los estudiantes en un mismo nivel, independientemente de si tienen o no conocimientos previos sobre el tema.
5. Incluir los videos canal de YouTube *Mathematical Visual Proofs*, como cierre de las tareas, permitió reforzar/corroborar los hallazgos previamente realizados por los estudiantes con la manipulación del material y las tareas propuestas, con respecto a la convergencia de las series que les había correspondido. El material didáctico, las tareas y los videos logran ser una tripla perfecta para el aprendizaje de la convergencia de series geométricas.
6. La implementación del material didáctico con estudiantes Sordos fue de gran aprendizaje y satisfacción, puesto que, a pesar de no haberlo considerado, fue evidente que el material y las tareas pueden favorecer los procesos de aprendizaje en poblaciones diversas, como en este caso, estudiantes Sordos.
7. Consideramos que la incorporación de material didáctico en el aula debe estar respaldada por un objetivo claro, adecuarse al contexto de enseñanza y al tipo de aprendizaje que se promueve. Basándonos en nuestra experiencia en el aula, podemos afirmar que el uso de material didáctico puede ser esencial para facilitar un aprendizaje significativo en los estudiantes. Al integrarlo en las clases, se fomenta la motivación, el interés y la curiosidad de los estudiantes por comprender cómo funcionan los conceptos matemáticos. Como docentes, es crucial ofrecer una perspectiva renovada de las matemáticas, y la implementación de material didáctico en el aula se presenta como una herramienta valiosa para lograrlo.

### **En relación con el diseño del material**

8. La prueba piloto, del material didáctico y de las tareas planteadas, a estudiantes de grado décimo del colegio Isabel II, jornada mañana, fue un acierto en el proceso de diseño del material ya que permitió validarlo y recolectar información valiosa para la versión definitiva de

los recursos construidos.

9. Los tres insumos utilizados para la recolección de datos que se usaron durante el pilotaje, que incluyeron los diarios de campo, el formulario y guías de trabajo, fueron fundamentales para identificar las ventajas y desventajas del material y tareas, estos insumos facilitaron una análisis detallado y preciso contribuyo en las mejoras del material y tareas en pro de la enseñanza y aprendizaje de las series geométricas.
10. El material didáctico se diseñó teniendo en cuenta los criterios de tipificación consultados y referenciados en el capítulo II. Esto nos permite afirmar que el material didáctico «Series Geometry LyAnLi» satisface los siguientes criterios de tipificación: que puede ser utilizado para introducir un tema como: series geométricas, fraccionarios, semejanza y congruencia de figuras geométricas; para apoyar un tema o para repasar un tema: números fraccionarios, proceso de visualización, figuras geométricas, patrones, sucesiones. También, puede ser útil para la enseñanza de conceptos matemáticos relacionados con geometría, álgebra, cálculo y aritmética, la enseñanza de algunos conceptos o propiedades matemáticas como: introducción a las series, secuencias, fracciones, semejanza de figuras, patrones, entre otras, el material puede ser usado para la adquisición de rutinas o para modelizar alguna idea o conceptos matemático como: identificación de los términos, sumas parciales y convergencia de la serie geométrica, además de modelas conceptos matemáticos como: semejanza y congruencia de figuras, el concepto del infinito, patrones, etc., por lo anterior se considera un material estructurado.
11. Gracias a la participación con estudiantes Sordos en el pilotaje, se puede inferir que el material didáctico “Series Geometry LiAnLy” es un material inclusivo, puesto que puede ser utilizado por estudiantes con discapacidades auditivas.

#### **En relación con el pilotaje del material y tareas**

12. Se cumplió el objetivo propuesto, puesto que, durante la implementación de las tareas mediadas con el material presentado en este trabajo, el material didáctico permitió promover el aprendizaje de aspectos matemáticos en las series geométricas convergentes como: la convergencia, razón común y sus términos. El material facilitó y aportó al aprendizaje de los estudiantes, como se evidenció en la prueba piloto.
13. Las tareas diseñadas en torno a las series geométricas utilizando el material didáctico construido, contribuyeron a identificar las características de una serie geométrica, por medio de cinco fases, que incluyeron nueve tareas prácticas. Estas tareas requerían utilizar el material

didáctico construido y desarrollar una guía propuesta, logrando, además, fase a fase, que el estudiante reconociera los elementos de la serie geométrica y su convergencia.

### **En relación con los aprendizajes propios de las diseñadoras**

14. En este trabajo, nosotras logramos profundizar sobre nuestro conocimiento de sobre series geométricas (específicamente, aquellas que convergen) y los elementos que las componen, a partir de una revisión bibliográfica que permitió caracterizarlas. Para ello, se tomaron textos como Apóstol (1967), Donado y Espinosa (1997), Larson (2019) y Stewart (2019), entre otros, que aportaron diversas definiciones, ejemplos y representaciones (gráfica y Simbólico-numérica) de las series a partir de lo cual se plantó la definición que orientó el diseño de las tareas y del material.
15. El material didáctico se decide dejar como memoria en el laboratorio de didáctica de las matemáticas del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, esto con el fin de que sea de provecho para profesores de matemáticas en ejercicio y futuros profesores de matemáticas, siendo este una herramienta útil para la enseñanza de las series geométricas convergentes.
16. La realización de la prueba piloto dejó muchos aprendizajes y satisfacción. El lograr implementar el material diseñado nos permitió ver cómo los estudiantes usaban y entendían el material. En donde, los estudiantes hacían algunos comentarios como «tiene la forma de un caracol, por eso se llama Caracolí » o en la serie Mountain «esa parte rosada tiene forma de montaña » ; también, como desarrollaban las tareas y cómo llegaban a encontrar cada elemento de la serie, por ejemplo, cuando desarrollaron la tarea 3.3 convergencia de las series, realizaron los comentarios como: « las piezas rosadas caben ocho veces», «las fichas verdes son  $\frac{1}{3}$  del total» , el escuchar esto fue de mucho agrado ver y escuchar, lo que un día fue una idea ahora era una realidad fructífera.
17. La experiencia de sistematizar en un documento el proceso de investigación formativa realizado como FEM fue, sin lugar a duda, un desafío importante. Esto se debió principalmente a la necesidad de llevar a cabo una revisión bibliográfica exhaustiva para fundamentar nuestro trabajo y, al mismo tiempo, centrarlo en nuestro objeto matemático específico. Generado en nosotras un desafío por comprender las diferentes propuestas por varios autores con respecto conceptos como: Sucesión, serie y series geométricas; también el diferenciar y seleccionar

aquellas que consideramos acordes al enfoque del presente trabajo. Además, el establecimiento de una postura propia basada en dichas definiciones implicaba una tarea ardua, ya que debíamos sintetizar y consolidar ideas provenientes de múltiples fuentes, integrándolas de manera coherente para construir una definición sólida que sirviera como la base fundamental de nuestro trabajo.

18. Al indagar sobre el lugar de las series en el currículo colombiano, nos sumergimos en una búsqueda detallada que nos reveló algunas sorpresas. Identificamos, por ejemplo, que las series no son un tema propiamente abordado en los documentos curriculares actuales. Sin embargo, al indagar más, encontramos que el estudio de este objeto estaba sugerido en documentos curriculares antiguos, como en la renovación curricular de 1991. Por otro lado, se encontró que, en textos escolares de educación básica, el estudio de las series geométricas es un tema para desarrollar independientemente de su aparición explícita en los documentos que proponen lineamientos curriculares.
19. El seleccionar las series adecuadas para la creación del material, como ya se ha mencionado anteriormente nos basamos en el canal de YouTube, *Mathematical Visual Proofs*, el cual ofrecía infinidad de series geométricas, por lo que el seleccionarlas requirió es proyectar e imaginar su construcción concreta, como podría llevarse al aula, además de lo entendible que podrían ser estas para los estudiantes.
20. El diseñar tareas acordes al objetivo establecido inicialmente, requirió el pensar cómo los estudiantes podrían llegar a lo que esperábamos, pensar que tan provechoso sería proponer cada una de las tareas, además de incluir instrucciones entendibles, claras y concisas que encaminaran a los estudiantes al objetivo establecido; generando en nosotras preocupación en la posibilidad de no lograr la solución de las tareas propuestas.
21. El desafío más significativo para nosotras fue la creación del material didáctico, que abarcó aspectos como el tamaño, color, material de construcción y elementos complementarios para alcanzar nuestros objetivos. Este proceso demandó tiempo, recursos económicos, creatividad e imaginación. Aunque el canal de YouTube, *Visual Proofs*, nos proporcionó una base para el diseño de las series, trasladar esa idea a un material tangible implicó numerosas pruebas y ajustes. Esta experiencia nos llevó a comprender que diseñar material didáctico es un desafío importante para los profesores en formación de matemáticas, puesto que, se requiere una inversión considerable de tiempo, creatividad y recursos económicos. Es comprensible que

muchos docentes opten por no emprender este camino debido a las limitaciones en alguno de estos aspectos.

22. Si no hubiéramos optado por la creación del material didáctico, no sabríamos lo que implica diseñar un material didáctico; esta fue una experiencia que va más allá de la creación de recursos para la enseñanza. Implica un proceso de aprendizaje, crecimiento personal y profesional, en el que se desarrollan habilidades pedagógicas, académicas, creativas, trabajo en grupo y tecnológicas.

En resumen, con lo mencionado en el transcurso de las conclusiones del presente trabajo, se puede afirmar que el uso de material didáctico «Series Geometry LyAnLi» y las tareas que lo acompañan facilita el aprendizaje de las series geométricas en el aula, logrando un aprendizaje significativo en los estudiantes.

El diseño de este material didáctico para las series geométricas ha sido una herramienta valiosa para facilitar el aprendizaje de este concepto matemático. Al integrar una variedad de recursos visuales y manipulables, tareas prácticas apoyadas en el material, creando un entorno de aprendizaje estimulante y accesible para los estudiantes, logrando así la comprensión conceptual y la aplicación práctica, este material didáctico ha promovido un aprendizaje significativo que trasciende del solo memorizar fórmulas.

Se espera que este material sea de ayuda a los estudiantes de educación secundaria, media o universitaria que lo utilicen para contribuir a la comprensión de las series geométricas y la convergencia de algunas de estas, las representadas con el material diseñado, así como a fortalecer sus habilidades de visualización.

Además, este material también ha destacado la importancia de del uso e implementación en la enseñanza de las matemáticas. Al utilizar una variedad de enfoques pedagógicos como: el enfoque constructivista, por competencias y humanista, además, se pudo llegar a una amplia gama de estilos de aprendizaje como el visual y el táctil, así mismo, el mantener el interés de los estudiantes al abordar el estudio matemático del objeto serie geométrica convergente.

En última instancia, este material didáctico representa un paso adelante en nuestro compromiso de proporcionar una educación matemática de calidad que inspire a los estudiantes y los prepare para el éxito académico y profesional en el mundo actual. Sin embargo, se reconoce que siempre hay oportunidades de mejora, esperando seguir perfeccionando nuestras prácticas educativas en el futuro.

## 5.2. Recomendaciones

A continuación, se presentan algunas recomendaciones que se deben tener en cuenta para el uso e implementación del material «Series Geometry LyAnLi» en el aula, además de una propuesta para aquellos que estén interesados en abordar las series geométricas con fracciones impropias:

- Para el uso del material es necesario que el docente a cargo tenga el conocimiento básico sobre qué es una serie, una serie geométrica y las partes que la componen.
- Para el uso del material didáctico el docente debe tener claridad en relación con la implementación del material, para que tenga la facilidad de distinguir los elementos que compone la serie geométrica de cada kit, con el fin que logre dar las instrucciones adecuadas con relación al uso del material y las tareas.
- Se deja a sugerencia la construcción en MDF de las series Piramidal y Boot, para la enseñanza y aprendizaje de las series geométricas de cursos avanzados, por ejemplo: de educación superior o con estudiantes de altas capacidades.
- Se deja como propuesta final, para quien se interese, diseñar representaciones gráficas para otras series geométricas, con fracciones impropias como:  $\sum 5 \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$  o  $2 \left(\frac{3}{4}\right)^n$ , presentando otro escenario con fracciones impropias y su representación en comparación a las propuestas en el presente trabajo.

### 5.3 Bibliografía

Apóstol, T. (1967). *Cálculos volumen I, cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal*. Reverte S.A. <https://calculounicaes.files.wordpress.com/2012/04/calculo-volumen-1-de-tom-apostol.pdf>

Ángel, M. P. y Rojas Tovar, A. (2013). *El caso de los procesos infinitos en los libros de texto de matemáticas en 8° y 9°*. [Ponencia]. Colombia. <https://www.uptc.edu.co/export/sites/default/eventos/2013/cf/eime/doc/PonenciaMagdaAngel.pdf>

Bejarano Ruiz, K. A. y Páez Pinzón, E. J. (2022). *Una revisión a los distintos usos del concepto del infinito a través de la historia*. Colombia. [Trabajo de grado]. <http://repositorio.pedagogica.edu.co/>

Bernal Vargas, C. E. y Castro Díaz, L.A. (2013). *Historia de tres mujeres matemáticas en cómic*. Colombia [Trabajo de grado]. <http://repositorio.pedagogica.edu.co/>

Bonifaz, J. y Winkelried, D. (2003). *Matemáticas para la economía dinámica*. (primera edición corregida). Universidad del pacífico. <https://repositorio.up.edu.pe/bitstream/handle/11354/975/AE44.pdf?sequence=11&isAllowed=y>

Carvajal, Alvarado J., Manrique Pérez, V., Vargas Guerrero, C. y Castro, L. A. (2016). *Secuencias matemáticas 9*. Libros & Libros S.A.S.

Con Mami. (24 de enero del 2022). *3 juegos para reforzar series numéricas*. [Archivo de Video]. YouTube. [https://www.youtube.com/watch?v=QPk7hZOtahk&ab\\_channel=ConMami](https://www.youtube.com/watch?v=QPk7hZOtahk&ab_channel=ConMami)

- Corbalán, F. (2002). *Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato*. Síntesis S.A.
- Corredor Ramírez, D. N. y Gordillo López, L.T. (2020). *Partetouille y Fractionary: Juegos para la enseñanza de las fracciones*. [Trabajo de grado]. <http://repositorio.pedagogica.edu.co/>
- De Armas Costa, R. J., Ramírez Rincón, M., Acosta, M. L., Romero Roa, J., Gamboa Sulvara, J. G., Celi Rojas, V., Morales Jaime, D. J. y Salazar Suarez, F. L. (2013). *Caminos del saber, matemáticas 9°*. Santillana S.A.
- Donado Nuñez, A. y Espinosa Manrique, G. (1997). *Sucesiones de números reales*. Universidad pedagógica nacional.
- Educapeques. (s.f). *Series numericas- estimula la atención y concentración infantil*.  
<https://www.educapeques.com/recursos-para-el-aula/series-matematicas.html>
- Estrada García, W. F., Moreno Gutiérrez, V. y Novoa Ramírez, J. F. (2007). *Serie de matemáticas para básica secundaria y media Espiral 9*. Norma.
- Facultad de ingeniería UDELAR (s.f.). *Cálculo diferencial e integral en varias variables*.  
[https://eva.fing.edu.uy/pluginfile.php/286292/mod\\_resource/content/1/CDIVV-series.pdf](https://eva.fing.edu.uy/pluginfile.php/286292/mod_resource/content/1/CDIVV-series.pdf)
- Flores, P., Lupiañez, J. L., Berenguer, L., Marín, A. y Molina, M. (2011). *Materiales y recursos en el aula de Matemáticas*. Departamento de didáctica de la matemática de la Universidad de Granada.
- Fuentes Vargas, J. R., Mardones Herмосilla, V. A. y Zarate Melo, F. J. N. (2020). *Sucesiones y series de funciones*. [Memoria]. Universidad del Bio-Bio, Chillán. [Repositorio Digital - Sistema de Bibliotecas Universidad del Bio-Bio \(SIBUBB\): Página de inicio \(ubiobio.cl\)](#)

- Garzón Aguilar, C. L. y Vivas Sarmiento, J. R. (2017). *VARITAS TRIMOV: Un acercamiento a los poliedros*. [Trabajo de grado]. <http://repositorio.pedagogica.edu.co/>
- Gaxiola, C. y Ibarra, S. (2016). Sugerencia para la enseñanza de sumas y sucesiones de números en el bachillerato. *Revista Electrónica AMIUTEM*. Vol. IV, No. 1. 79-89.
- Gómez, P. Mora, M. F. y Velasco, C. (2018). Análisis de instrucción. *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula* (pp.197-268). Ediciones Uniandes.
- Guerrero, J. S. (2019). *Diseño de actividades con el uso de la visualización para apoyar el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas en ciclo IV*. Colombia.[Trabajo de grado]. <http://repositorio.uan.edu.co>.
- Gutiérrez, A., Beltrán, M., Benedicto, C., Ramírez, R. y Jaxe, A. (2018). *Visualization abilities and complexity of reasoning in Mathematically gifted students' collaborative solutions to a visualization task: A networked analysis*. n K. S. S. Mix & M. T. Battista (Eds.), *Visualizing mathematics. The role of spatial reasoning in mathematical thought* (pp. 309-337). Cham, Switzerland: Springer.
- Malla Buchhorsts, K. (2020). *Una Propuesta Didáctica para la enseñanza de las sucesiones y los procesos infinitos desde la mirada de la Teoría de los Registros de Representación Semiótica*. [Trabajo de grado para Magister]. Chile. <https://repositorio.uc.cl/>.
- Mateos Ortés, M. (2012). *¿Cómo enseñar sucesiones lineales? razonamiento inductivo y hoja de cálculo*. [Trabajo de grado para Master]. Cantabria. <https://repositorio.unican.es>.
- Mathematical Visual Proofs. (23 de febrero del 2023). *Beautiful Geometry behind Geometric Series (8 dissection visual proofs without words)*. [Archivo de Video].

[https://www.youtube.com/watch?v=JteQEN1XPyc&t=18s&ab\\_channel=MathematicalVisualProofs](https://www.youtube.com/watch?v=JteQEN1XPyc&t=18s&ab_channel=MathematicalVisualProofs)

Mathematics dictionary. (s.f.). *Serie oscilante*.

<http://www.mathematicsdictionary.com/spanish/vmd/full/o/oscillatingseries.htm>

Ministerio de Educacion Nacional (1991). *Propuesta programa curricular*. M.E.N.

Ministerio de Educacion Nacional (4 de febrero de 1975). *Resolucion 277*. M.E.N.

Ministerio de Educacion Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencia*. MEN.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares. Areas obligatorias y fundamentales*. MEN.

Ministerio de Educación Nacional. (2016). *Derechos Básicos De Aprendizaje*. MEN.

Mendoza, Torres L. M., Quintanilla Batallanos, V. A. y Gallardo Romero, J. (s.f.). *Recursos y materiales didacticos para la enseñanza de las matemáticas*.

<https://www.yumpu.com/es/document/read/21743000/recursos-y-materiales-didacticos-mendoza-quintanilla-gallardo>

Morales Muñoz, P. A. (2012). *Elaboración de material didáctico*. Mexico: Red tercer milenio S.C.

Muñoz, C. (2014). *Los materiales en el aprendizaje de las matemáticas*. [Trabajo de grado para licenciatura]. La Rioja. <https://investigacion.unirioja.es>.

Nelsen, R. (1993). *Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking*. The Mathematical Association of America.

Larson, R. y Edwards, B. H-. (2019). *Cálculo 1 de una variable novena edición*. Mc Graw Hill.

- Linés Escardó, E. (1991). *Principio de análisis matemático*. Reverté S.A.
- López, Reyes H. M. (2014). *Las series y el desarrollo del razonamiento lógico matemático en los estudiantes de segundo año de bachillerato del colegio fiscomisional tirso de molina*. [Tesis de Magíster]. Ambato. <https://repositorio.uta.edu.ec>.
- Padilla Chasing, S., Samper de Caicedo, C. Toquica, M. L., Báez, A. D. y Moreno Gutiérrez, V. (2008). *Delta ¡te conecta con el mundo! Número 9*. Norma.
- Padilla Chasing, S. (2012). *Retos matemáticas 9*. Norma.
- Páez Pinzón, E. J. y Bejarano Ruiz, K. A. (2022). *Una revisión de los distintos usos del concepto de infinito a través de la historia*. [Trabajo de grado]. <http://repository.pedagogica.edu.co>.
- Pérez Ortiz, P. (2009). Trabajar con sucesiones en el aula. *Innovación y experiencias educativas*. 1-11. [https://archivos.csif.es/archivos/andalucia/ensenanza/revistas/csicsif/revista/pdf/Numero\\_19/P-ATRICIA\\_PEREZ\\_2.pdf](https://archivos.csif.es/archivos/andalucia/ensenanza/revistas/csicsif/revista/pdf/Numero_19/P-ATRICIA_PEREZ_2.pdf)
- Pita Ramírez, L. J. y Samboní Trujillo, Y. T. (2012). *Cuento para motivar el aprendizaje de la adición entre números enteros: tres zonas, un misterio*. [Trabajo de grado]. <http://repository.pedagogica.edu.co>.
- Ramírez, K., Zambrano, M. y Iglesias Inojosa, M. (2015). *Sucesiones y series en el libro matemática de 4to año de la colección bicentenario*. [Memoria]. VIII jornada de investigación en Educación Matemática, UPEL Maracay. <https://docplayer.es/50522975-Sucesiones-y-series-en-el-libro-de-matematica-de-4to-ano-de-la-coleccion-bicentenario-resumen.html>
- Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. L. y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de números naturales. *Revista Suma*, (58), 7-23.

- Riesnick. (1990). La enseñanza de las estructuras de las matemáticas. Paidós (Ed.), Barcelona: La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos (pp.127-156)
- Salazar Caicedo, J. A. y Acevedo Frias, B. (1997). *Sucesiones y series numérica*. Universidad Nacional. [josealonsosalazarcaicedo.1997\\_Parte1.pdf](http://josealonsosalazarcaicedo.1997_Parte1.pdf) (unal.edu.co)
- Hernán Sigüero, F. y Carrillo Quintela, M. E. (1991). *Recursos en el Aula de matemáticas (34)*. Síntesis.
- Stewart, J. (2018). *Cálculos trascendentes tempranas. (8ta Edición)*. Cengage Learning.
- ThemeXpose. (27 de septiembre de 2021). *Fichas para trabajar una serie numérica*. Materiales educativos para maestra. <http://www.materialeseducativosmaestras.com/p/fichas-para-series-numericas.html>
- Torres Puentes, E. y Casallas Rodríguez, L. A. (2021). Fichas para trabajar series numéricas. *Materiales, recursos y juego: una distinción y relación necesaria en el aula de matemáticas.*,20(2), 206-215.
- Universidad de sonora. (s.f.). *Elementos de cálculo integral y álgebra lineal*. [http://mat.uson.mx/~jldiaz/NotasCD-1/Series/Tipos\\_de\\_Series\\_2.htm](http://mat.uson.mx/~jldiaz/NotasCD-1/Series/Tipos_de_Series_2.htm)
- Verdugo, P. (2020). Aproximación a la enseñanza de las sucesiones de números reales por medio de los espacios de trabajo matemático. *Revista chinela de educación matemática*, 12(2), 71-80. <https://doi.org/10.46219/rechiem.v12i2.28>.

## 5.5. Anexos

### 5.5.1. Anexo A

#### Tipos de Series

**Serie  $p$ .** Bonifaz y Winkelried (2003) definen la serie “ $p$ ”, también **Llamada serie hiperarmónica la cual está definida como:**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots$$

$$p > 0 \quad (\text{p.46})$$

**Serie Armónica.** Bonifaz y Winkelried (2003) afirman que cuando  $p = 1$ , la serie “ $p$ ” es conocida como **serie armónica; esta es:**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

El nombre de la serie se debe a que la serie es muy utilizada en el modelado de vibraciones de cuerdas musicales. (p.47)

**Serie Alternante.** Salazar y Acevedo (1997) definen una serie alternante como:

“Sea una  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  una serie de términos positivos. Diremos que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - \dots$$

O la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 \dots$  es una serie alternante.” (p.116)

Ejemplos:

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n+2} = \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \frac{5}{6} + \dots - \dots,$
2.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3+4} = \frac{1}{5} - \frac{4}{12} + \frac{9}{31} - \frac{16}{68} + \dots - \dots,$
3.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^2+1} = -\frac{1}{2} + \frac{4}{5} - \frac{9}{10} + \frac{16}{17} - \dots + \dots,$

**Serie Oscilante.** La serie oscilante es un caso particular de la serie alternante, esta serie no converge y además su suma oscila continuamente, es decir en ocasiones la serie oscila entre límites u oscila sin límites.

Ejemplos:

1.  $Y_n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \dots$
2.  $W_n = 2 - 4 + 6 - 8 + \dots$

(Mathematics dictionary , s.f.)

**Serie de Potencias.** Salazar y Acevedo (1997) definen una serie potencias como:

Una serie de potencias en  $(x - a)$ , es una serie de la forma  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \dots$ , donde  $x$  es una variable real,  $a_0, a_1, a_2, \dots$ , son los coeficientes de la serie y  $a$  una constante, es el centro. Si  $a = 0$ , se obtiene la serie de potencias en  $x$ :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots \text{ (p. 125).}$$

Ejemplos:

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots$
2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n} = (x-3) + \frac{(x-3)^2}{2} + \frac{(x-3)^3}{3} + \dots$
3.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n \cdot 2^n} = \frac{(x-1)}{2} + \frac{(x-1)^2}{8} + \frac{(x-1)^3}{24} + \dots$

**Serie Telescópica.** Apóstol (1967) define la serie telescópica como:

Aquellas series  $\sum a_n$  tales que cada término se pueda expresar como una diferencia de la **forma:**  $a_n = b_n - b_{n+1}$ .

(p. 472)

Ejemplos:

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ , se puede expresar como  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$
2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)(n+x+1)(n+x+2)}$ , se puede expresar como  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{(n+x)(n+x+1)} - \frac{1}{(n+x+1)(n+x+2)} \right)$

**Series de Taylor y de Maclaurin.** Larson (2019) define Serie de Taylor y de Maclaurin como:

“Si una función  $f$  tiene derivadas de todos los órdenes en  $x = c$ , entonces la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n = f(c) + f'(c)(x-c) + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n + \dots$$

Se llama serie de Tylor para  $f(x)$  en  $c$ . Además, si  $c = 0$ , entonces la serie es conocida como la de Maclaurin para  $f$ . (p. 679).

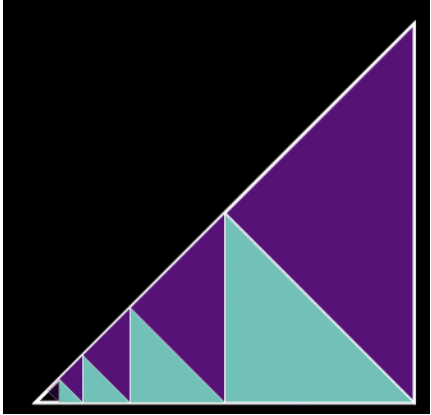
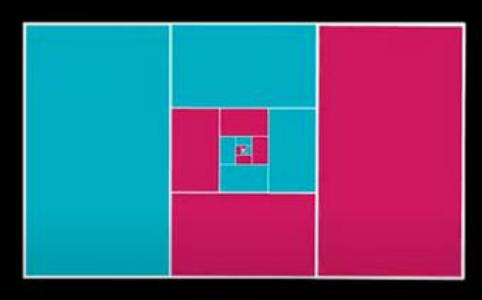
Ejemplos de series de Tylor:

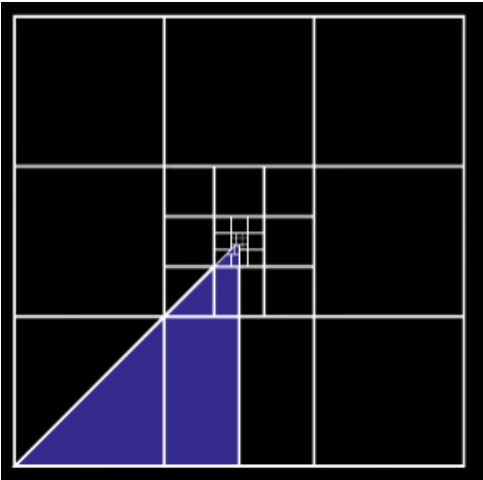
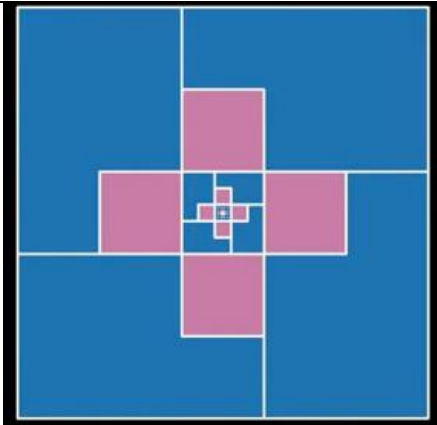
$$1. \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

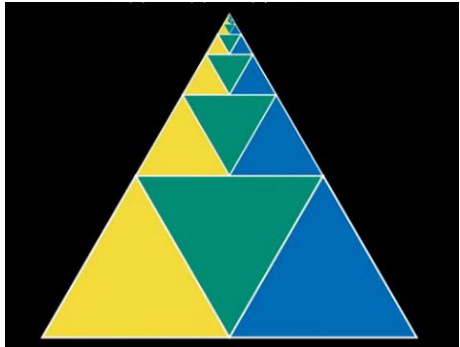
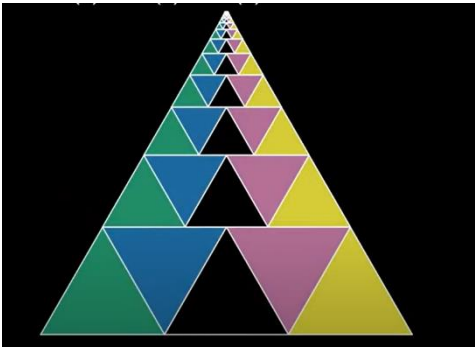
$$2. e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$3. \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 - \frac{1}{10!}x^{10} + \dots$$

### 5.5.3 Anexo B



N°	Simbólicamente	Geoméricamente	Elementos					Convergencia
			Primer término	Razón común	Sucesión de los términos	Suma parcial	Sucesión de términos de la serie	Valor
1.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$	$S_1 = \frac{1}{2}$ $S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 0.75$ $S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 0.875$ $S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 0.9375$ $S_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = 0.96875$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots +$	1
	$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \dots = 1$							
2.	$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^i = \frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots$	$S_1 = \frac{1}{3} = 0.33$ $S_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = 0.44$ $S_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} = 0.48$ $S_4 = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} = 0.49$ $S_5 = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} = 0.49$	$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots +$	$\frac{1}{2} \cong 0.5$
	$\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \left(\frac{1}{3}\right)^5 + \dots = \frac{1}{2}$							

N°	Simbólicamente	Geoméricamente	Elementos					Convergencia
			Primer término	Razón común	Sucesión de los términos	Suma parcial	Sucesión de términos de la serie	Valor
3.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9^n}$		$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9^n}$	$\frac{1}{9}, \frac{1}{81}, \frac{1}{729}, \frac{1}{6561}, \dots$	$S_1 = \frac{1}{9} = 0.111$ $S_2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{81} = 0.1234$ $S_3 = \frac{1}{9} + \frac{1}{81} + \frac{1}{729} = 0.12482$ $S_4 = \frac{1}{9} + \frac{1}{81} + \frac{1}{729} + \frac{1}{6561} = 0.12498$ $S_5 = \frac{1}{9} + \frac{1}{81} + \frac{1}{729} + \frac{1}{6561} + \frac{1}{59049} = 0.124998$	$\frac{1}{9} + \frac{1}{81} + \frac{1}{729} + \frac{1}{6561} + \dots +$	$\frac{1}{8} = 0.215$
	$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \dots = 1$							
4.	$4 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{5^i} = 1$		$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}, \frac{4}{25}, \frac{4}{125}, \frac{4}{625}, \dots$	$S_1 = \frac{4}{5} = 0.8$ $S_2 = \frac{4}{5} + \frac{4}{25} = 0.96$ $S_3 = \frac{4}{5} + \frac{4}{25} + \frac{4}{125} = 0.992$ $S_4 = \frac{4}{5} + \frac{4}{25} + \frac{4}{125} + \frac{4}{625} = 0.998$ $S_5 = \frac{4}{5} + \frac{4}{25} + \frac{4}{125} + \frac{4}{625} + \frac{4}{3125} = 0.999$	$\frac{4}{5} + \frac{4}{25} + \frac{4}{125} + \frac{4}{625} + \dots +$	1
	$4 \cdot \frac{1}{5} + 4 \cdot \frac{1}{25} + 4 \cdot \frac{1}{125} + \dots + \frac{1}{5^n} + \dots = 1$							

N°	Simbólicamente	Geoméricamente	Elementos					Convergencia
			Primer término	Razón común	Sucesión de los términos	Suma parcial	Sucesión de términos de la serie	Valor
5.	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{3}$		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{256}, \dots$	$S_1 = \frac{1}{4} = 0.25$ $S_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = 0.31$ $S_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} = 0.32$ $S_4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} = 0.332$ $S_5 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \frac{1}{1024} = 0.333$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \dots +$	$\frac{1}{3}$
	$\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left(\frac{1}{4}\right)^4 + \dots = \frac{1}{3}$							
6.	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n = \frac{4}{5}$		$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}, \frac{16}{81}, \frac{64}{729}, \frac{256}{6561}, \frac{1024}{531441}, \dots$	$S_1 = \frac{4}{9} = 0.444$ $S_2 = \frac{4}{9} + \frac{16}{81} = 0.641$ $S_3 = \frac{4}{9} + \frac{16}{81} + \frac{64}{729} = 0.729$ $S_4 = \frac{4}{9} + \frac{16}{81} + \frac{64}{729} + \frac{256}{6561} = 0.768$	$\frac{4}{9} + \frac{16}{81} + \frac{64}{729} + \frac{256}{6561} + \dots +$	$\frac{4}{5}$
	$\frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^3 + \left(\frac{4}{9}\right)^4 + \dots = \frac{4}{5}$							

## 5.5.4. Anexo C

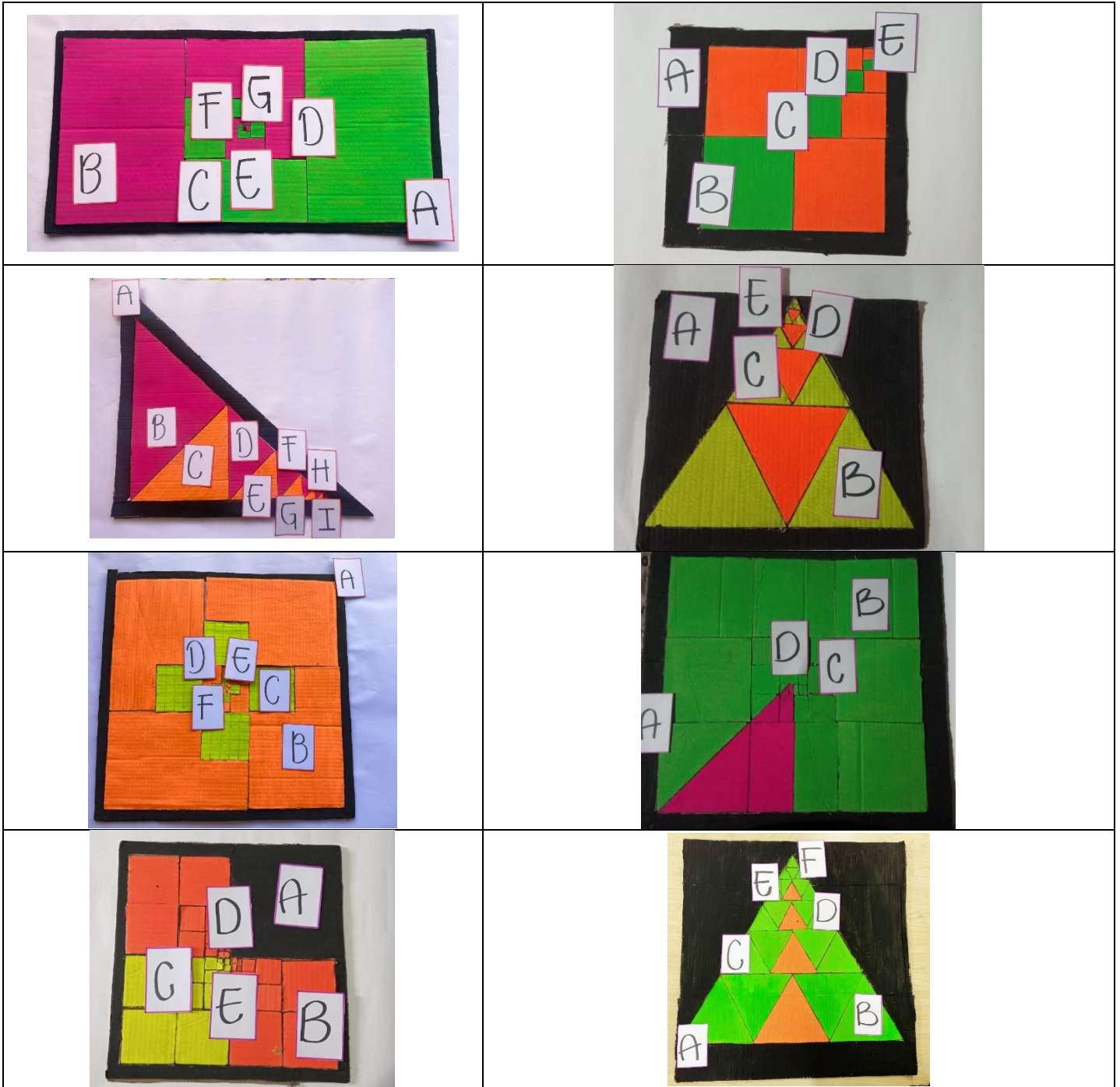
## Guía 3.1 propuesta para el desarrollo de la tarea 3.1

 <b>UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL</b> <i>Educadora de educadores</i>	<b>Facultad de Ciencia y Tecnología</b> <b>Licenciatura en Matemáticas</b> <b>Colegio Isabel II JM</b> <b>TAREA 3.1</b> <b>Futuras Educadoras Matemáticas (FEM): Angie Linares y Lina Pinzón</b>																					
<p>Observa el material responde las siguientes preguntas y completa la tabla:</p> <p>1. ¿Cuál fracción representa la pieza B con respecto a la pieza A?</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="width: 50%;">Piezas</th> <th style="width: 50%;">Fracción</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="height: 100px;"></td> <td></td> </tr> </tbody> </table> <p>2.</p> <p>a) ¿Cuál fracción representa la pieza C con respecto a la pieza A?</p> <p>b) suma la fracción obtenida en el punto anterior con la obtenida en este punto escribe la respuesta como fracción y su notación decimal.</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="width: 25%;">Piezas</th> <th style="width: 25%;">Fracción</th> <th style="width: 25%;">Suma de fracciones</th> <th style="width: 25%;">Notación decimal de la suma de fracciones</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="height: 80px;"></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table> <p>3.</p> <p>a) ¿Cuál fracción representa la pieza D con respecto a la pieza A?</p> <p>b) De la misma manera, suma las fracciones obtenidas en los puntos anteriores con la obtenida en este.</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="width: 25%;">Piezas</th> <th style="width: 25%;">Fracción</th> <th style="width: 25%;">Suma de fracciones</th> <th style="width: 25%;">Notación decimal de la suma de fracciones</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="height: 80px;"></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>			Piezas	Fracción			Piezas	Fracción	Suma de fracciones	Notación decimal de la suma de fracciones					Piezas	Fracción	Suma de fracciones	Notación decimal de la suma de fracciones				
Piezas	Fracción																					
Piezas	Fracción	Suma de fracciones	Notación decimal de la suma de fracciones																			
Piezas	Fracción	Suma de fracciones	Notación decimal de la suma de fracciones																			

<p>4.</p> <p>a) ¿Cuál fracción representa la pieza E con respecto a la pieza A?</p> <p>b) Suma todas las fracciones incluyendo la obtenida en esta.</p>			
Piezas	Fracción	Suma de fracciones	Notación decimal de la suma de fracciones
<p>5. ¿Encuentras alguna relación en los resultados obtenidos en la columna cuatro en la notación decimal de la suma de las fracciones ?, si o no ¿Cuáles?</p>			

5.5.5. Anexo D

Imágenes de apoyo entregadas para el desarrollo de las tareas 3.1 y 3.2



### 5.5.6. Anexo E

#### Formulario

[Encuesta de satisfacción del Material Didáctico Series Geometry LyAnLi \(3\) \(office.com\)](#)

## Encuesta de satisfacción del Material Didáctico Series Geometry LyAnLi (3)

Te queremos agradecer por tu disposición en el transcurso de las clases para la culminación de las actividades planteadas.

La encuesta que encuentras a continuación nos permitirá analizar qué tan acertadas fueron las tareas propuestas y el material con el que trabajaste, en relación con el aprendizaje de las series geométricas. Y a partir de ello, determinar qué debemos mejorar.

\* Obligatorio

1. ¿Cuál es tu nombre completo? \*

Escriba su respuesta

2. ¿Cuál es tu rol en el colegio? \*

- Profesor
- Estudiante oyente
- Estudiante Sordo
- Intérprete

\* Obligatorio

Sección estudiantes

3. Selecciona el nombre de la serie con la que trabajaste \*



Serie Caracolí



Serie Cruz-Griega



Serie Mountain



Serie Fish



Serie Pinski



Serie Piramidal

4. Responde, de la manera más honesta, las siguientes preguntas en relación con el material utilizado para el desarrollo de las actividades:

\*

	Muy en desacuerdo	Algo en desacuerdo	Ni de acuerdo ni en desacuerdo	Algo de acuerdo	Muy de acuerdo
¿Consideras que el tamaño de las fichas del material fue adecuado?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
¿Consideras que el tamaño del material en general fue adecuado?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
¿El color del material fue apropiado?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
¿Consideras que el material fue fácil de manipular para el desarrollo de las actividades propuestas por las docentes en formación?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
¿Considera usted que el nombre del material fue adecuado?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

5. ¿Le harías algún cambio? \*

Si

No

**En caso de que responda si**

6. ¿Cuál? \*

Escriba su respuesta

7. ¿Por qué? \*

Escriba su respuesta

**En caso de que responda No, paso a la siguiente sección de preguntas**

6. Responde, de la manera más honesta, las siguientes preguntas en relación con la utilidad del material utilizado para el desarrollo de las actividades: \*

	Muy en desacuerdo	Algo en desacuerdo	Ni de acuerdo ni en desacuerdo	Algo de acuerdo	Muy de acuerdo
¿Considera usted que el material puede ser utilizado para introducir el tema "Series geométricas"?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
¿Considera usted que el material puede ser utilizado como apoyo para trabajar el tema "Series Geométricas"?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
¿Considera usted que el material puede ser utilizado para repasar el tema "Series Geométricas"?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
¿Considera usted que con este material permite trabajar temas relacionados con el álgebra?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
¿Considera usted que con este material permite trabajar temas relacionados con la geometría?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

¿Considera usted que con este material permite trabajar temas relacionados con la estadística?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
¿Considera usted que con este material permite trabajar temas relacionados con el cálculo?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
¿Considera usted que con este material permite trabajar temas relacionados con la aritmética?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
¿Considera usted que el material permite trabajar diversidad de conceptos matemáticos?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
¿Considera usted que el material puede ser utilizado para abordar un tema en específico de matemáticas distinto a las series geométricas?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
¿Considera que el material puede ser utilizado por estudiantes de diferentes edades?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

¿Considera que el material debe ser utilizado específicamente para cierta edad en especial?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
¿Considera usted que el material puede ser de ayuda solo para la memorizar un método matemático?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
¿Considera usted que el material puede ser de ayuda únicamente para representar características de un concepto matemático?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

7. Responde de la manera más honesta las siguientes preguntas en relación con los logros y avances obtenidos con las tareas propuestas a realizar con ayuda del material \*

	Muy en desacuerdo	Algo en desacuerdo	Ni de acuerdo ni en desacuerdo	Algo de acuerdo	Muy de acuerdo
¿Fue fácil armar el material ?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
¿Fue fácil representar fracciones con ayuda del material?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
¿Qué tan fácil fue asociar la representación algebraica al material?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
¿El material le permitió identificar los términos que componen la serie?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
¿El material le permitió identificar con facilidad la razón común entre los términos?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
¿El material le permite identificar visualmente la convergencia de la serie?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

8. Si tiene alguna sugerencia, observación, recomendación o felicitación para las docentes en formación, por favor escríbela a continuación.

Escriba su respuesta

9. Por último, si tiene alguna sugerencia, observación, recomendación o felicitación del material, por favor escríbela a continuación. \*

Escriba su respuesta

En caso de que el rol sea de profesor o interprete el formulario es el siguiente

### Sección líderes(as)

3. Responde de la manera más honesta las siguientes preguntas en relación con el material utilizado para el desarrollo de las actividades:

\*

	Muy en desacuerdo	Algo en desacuerdo	Ni de acuerdo ni en desacuerdo	Algo de acuerdo	Muy de acuerdo
¿Consideras que el tamaño del material fue adecuado?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
¿Consideras que el tamaño de las fichas fue adecuado?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
¿El color del material fue adecuado?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
¿Consideras que el material que se usó para diseñar el material didáctico fue el óptimo?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
¿Consideras que es fácil, sencillo y simple el material que se usó para desarrollar las actividades propuestas por las docentes en formación?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

¿Considera usted que el nombre del material fue adecuado?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
---	-----------------------	-----------------------	-----------------------	-----------------------	-----------------------

4. ¿Le harías algún cambio? \*

Sí

No

4. ¿Le harías algún cambio? \*

Sí

No

5. Responde, de la manera más honesta, las siguientes preguntas en relación con la utilidad del material utilizado para el desarrollo de las actividades: \*

	Muy en desacuerdo	Algo en desacuerdo	Ni de acuerdo ni en desacuerdo	Algo de acuerdo	Muy de acuerdo
¿Considera usted que el material puede ser utilizado para introducir el tema "Series geométricas"?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
¿Considera usted que el material puede ser utilizado como apoyo para trabajar el tema "Series Geométricas"?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
¿Considera usted que el material puede ser utilizado para repasar el tema "Series Geométricas"?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

¿Considera usted que con este material permite trabajar temas relacionados con el álgebra?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
¿Considera usted que con este material permite trabajar temas relacionados con la geometría?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
¿Considera usted que con este material permite trabajar temas relacionados con la estadística?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
¿Considera usted que con este material permite trabajar temas relacionados con el cálculo?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
¿Considera usted que con este material permite trabajar temas relacionados con la aritmética?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
¿Considera usted que el material permite trabajar diversidad de conceptos matemáticos?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
¿Considera usted que el material puede ser utilizado para abordar un tema en específico de matemáticas distinto a las series geométricas?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

¿Considera que el material puede ser utilizado por estudiantes de diferentes edades?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
¿Considera que el material debe ser utilizado específicamente para cierta edad en especial?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
¿Considera usted que el material puede ser de ayuda solo para la memorizar un método matemático?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
¿Considera usted que el material puede ser de ayuda únicamente para representar características de un concepto matemático?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

6. ¿Considera usted que el material puede ser de ayuda solo para la memorizar un método matemático? \*

- Muy en desacuerdo
- Algo en desacuerdo
- Ni de acuerdo ni en desacuerdo
- Algo de acuerdo
- Muy acuerdo

7. ¿Considera usted que el material puede ser de ayuda únicamente para representar características de un concepto matemático? \*

- Muy en desacuerdo
- Algo en desacuerdo
- Ni de acuerdo ni en desacuerdo
- Algo de acuerdo
- Muy acuerdo

8. Responde de la manera más honesta las siguientes preguntas en relación con los logros y avances obtenidos con las tareas propuestas a realizar con ayuda del material \*

	Muy en desacuerdo	Algo en desacuerdo	Ni de acuerdo ni en desacuerdo	Algo de acuerdo	Muy de acuerdo
¿Fue fácil armar el material ?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
¿Fue fácil representar fracciones con ayuda del material?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
¿Qué tal fácil fue asociar la representación algebraica al material?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
¿El material le permitió identificar los términos que componen la serie?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
¿El material le permitió identificar con facilidad la razón común entre los términos?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
¿El material le permite identificar visualmente la convergencia de la serie?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

9. Si tiene alguna sugerencia, observación, recomendación o felicitación para las docentes en formación, por favor escríbela a continuación.

Escriba su respuesta

10. Por último, si tiene alguna sugerencia, observación, recomendación o felicitación del material, por favor escríbela a continuación. \*

Escriba su respuesta

### 5.5.7. Anexo F

#### **Diarios de campo**

**Fecha: viernes 20 de octubre**

**FEM: Angie Linares y Lina Pinzón**

#### **“Aplicación Prueba piloto sesión 1”**

Inicialmente se organizaron siete mesas de trabajo con 5 sillas, de tal forma que cada estudiante que ingresó al salón se ubicó en una de ellas, se evidencia que los estudiantes Sordos se ubican todos al costado izquierdo del salón con su intérprete y los estudiantes oyentes a la derecha.

Antes de iniciar se solicitaron los consentimientos a los estudiantes para poder iniciar con la grabación, en donde la mayoría lo entregaron y aceptaron, solo un estudiante Sordo nos indicó que no permitía que lo grabaran, por lo que la profesora Ivonne lo llevo al aula de Sordos.

Como se había planeado, se da inicio con el concétre, pero se presentaron dificultades con el cable HDMI retrasando el inicio de la actividad, mientras se resolvía dicha situación, se procede a recibir y recoger los consentimientos firmados por los acudientes de los estudiantes.

Se da inicio expresando nuestro agradecimiento a los estudiantes y profesora por su ayuda para el desarrollo de la actividad, se explica el objetivo de esta y cómo se van a ir desarrollando cada una de las tareas, además de informales que se dará nota calificable para el cuarto periodo.

Durante el desarrollo del concétre, se observa participación de todos los grupos de trabajo incluso los grupos con estudiantes Sordos, puesto que afortunadamente se contó con un intérprete quien brindo apoyo constante en los grupos.

Actividad Concétre: El inicio de esta actividad fue demasiado entretenida y llamativa para ellos, porque unos mencionaron que pensaban que se iba a realizar una “clase normal”, se trató de hacer todo de forma equitativa, se tenía ese susto de cómo lo iban tomar los estudiantes sordos, el cómo nos íbamos a comunicar con ellos y para sorpresa de nosotros son muy competitivos y comprendieron a la perfección la actividad.

En el concétre solo se identificaron dificultades en la suma de fracciones porque no entendían, por lo que fue necesario que las FEM realizarán la retroalimentación, el resto la actividad fue demasiado provechosa y entretenida.

Una vez finalizado el concétre, se procedió a desarrollar la primera actividad, la cual consistía en armar el material, antes de entregar el material, las FEM mencionan algunas recomendaciones frente al uso del material y el nombre de cada uno, el cual será el nombre de cada grupo de trabajo; una vez se entrega el material se dan unos minutos para que cada grupo lo manipule y reconozcan cada una de sus piezas. Después damos inicio tipo “competencia” con la instrucción el primero que lo arme viene toma

el marcador y escribe el nombre de su material en el tablero.

A continuación se da la instrucción de armarlo, se observa motivación por los grupos por armarlo, varios grupos entregan el material armado incorrectamente, por el afán de ganar, acomodaron las fichas “sin sentido”, por lo que las FEM proceden a dar una pista a todos los grupos, indicando que para armarlo se debe mantener la secuencia de colores y forma del material, luego una estudiante dijo “serie caracolí pues forma de caracol”, por lo que solo los mire a los ojos muy sorprendida, luego otro grupo escucha y dijeron “Mountain pues montaña” y lo mismo sucedió con cruz griega y piramidal, afortunadamente todos los grupos logran armar el material con la relación del nombre y con las pistas dadas por las FEM.

En la segunda actividad, titulada “reconocer el material” en la primera parte de la actividad, se entrega a cada grupo un pequeño paquete de fichas, el cual contenía 4 a 5 fracciones, dependiendo del material, se le informa a todos los grupos, que deben representar cada fracción con el material entregado, además se entrega un paquete de piezas adicionales del material, que podrían ser útiles para la representación de las fracciones; durante el desarrollo de la tarea, se observa que algunos grupos proponen la construcción de las fracciones solo con algunas piezas del material, representaciones que no estaban mal, ya que son otras maneras de hacerlo, pero se les indica a todos los grupos, que deben utilizar todo el material para representar las fracciones, que la unidad de mitad debe ser la misma. Las FEM brindan apoyo a los grupos que iban realizando la representación validando si esta correcta o no, al igual que las demás actividades se observa participación de todos los grupos de trabajo, en especial de los Sordos, quienes son los primeros en terminar.

Como última actividad se hace entrega de un paquete con 6 fichas bibliográficas, que tenían expresiones algebraicas de los distintos material, se le indica a los grupos de trabajo, que deben seleccionar una de las fichas, la cual deben relacionar con el material y al respaldo de esta deberán escribir los nombres de los integrantes de los grupos, se observa confusión frente al desarrollo de la actividad, puesto que, algunos grupos estaban realizando las sumas que se expresaban en la ficha o escogían una de las fichas al azar sin tener en cuenta nada de lo hecho previamente en las tareas anteriores; con el objetivo de orientarlos, se les indica que la expresión algebraica asociada al material se encuentra relacionada con las fracciones representadas en la actividad anterior.

***Fecha: viernes 3 de noviembre***

***FEM: Angie Linares y Lina Pinzón***



***“Aplicación Prueba piloto sesión 2”***

Inicialmente se organizan las mesas de trabajo al igual que la sección anterior, en cada mesa se coloca el material con los nombres de los integrantes, de manera que cada estudiante que ingrese al aula se ubique en el grupo correspondiente.

Se da inicio, preguntando a los estudiantes, ¿recuerdan lo que se hizo la clase anterior?, una de las estudiantes contesta que se realizó un juego que consistió en buscar las parejas, donde las FEM responden, “si la actividad del concéntrese”, otros respondieron “armamos el material correctamente”, “se realizaron representaciones de algunas fracciones con el material y finalmente se asoció el material a una expresión algebraica”. Las FEM, respondieron que estaban en lo correcto por lo que este día, se iba a seguir trabajando con el material, así que se les invita a tener disposición y se recuerda que las guías que iban a desarrollar se tomaran como notas finales.

Luego, se les indicó las instrucciones de la primera guía, la cual debían diligenciar con base a la actividad anterior, en esta se encontraban dos columnas la primera debían escribir la fracción y en la segunda dibujar la representación gráfica de esta, donde se hizo énfasis en que se soluciona usando TODO el material con tamaños proporcionales o iguales, se hace énfasis en que debe ser utilizado todo, puesto que en la clase anterior se evidenció que utilizaban solo una parte de esta para representar las fracciones.

Se hace entrega a cada grupo de la guía de trabajo.


 Facultad de Ciencia y Tecnología  
 Licenciatura en Matemáticas  
 Colegio Isabel II JM  
**Tarea 2.2**  
 Futuras Educadoras matemáticas (FEM): *Angie Linares y Lina Pinzón*


Con el material entregado representa las fracciones dadas y completa la siguiente tabla, si encuentras otras representaciones de la misma fracción, dibuja las posibles, siempre que no sean iguales a las ya encontradas.

Fracción	Representación gráfica de la fracción con el material entregado

Las FEM estaban brindando un apoyo constante a quienes tuvieran preguntas frente el desarrollo de esta, para esta actividad se empleó aproximadamente de treinta a cuarenta minutos, se observa que gran parte de los grupos lograron responder la guía.

Se identifica un poco de dificultad con el grupo de la serie piramidal en entender la representación de  $\frac{16}{81}$ , por lo cual fue necesario una intervención más profunda de las FEM, el resto de equipos a veces se confundían en la fracciones más grandes, las FEM, les daban pequeñas pistas como “ tienen que representar la fracción pero las fichas deben ser iguales o proporcionales” o “miren la fracción que construyeron anterior y miren el tamaño que sigue a es que usaron “, eran pistas que les permitían entender casi que inmediatamente.

Seguidamente, se procede a dar las instrucciones de la segunda guía, tarea 3.1 donde se iba a empezar a introducir más claramente las partes de una serie geométrica, la cual se encontraba en la guía:

Facultad de Ciencia y Tecnología  
Licenciatura en Matemáticas  
Colegio Isabel II JM  
**TAREA 3.1**  
Futuras Educadoras Matemáticas (FEM): Angie Linares y Lina Pinzón

Observa el material responde las siguientes preguntas y completa la tabla:

1. ¿Cuál fracción representa la pieza B con respecto a la pieza A?

Piezas	Fracción

2.

a) ¿Cuál fracción representa la pieza C con respecto a la pieza A?

b) suma la fracción obtenida en el punto anterior con la obtenida en este punto escribe la respuesta como fracción y su notación decimal.

Esta guía iba acompañada de las fichas las cuales contenían unas letras:



También una foto del material que a cada uno le correspondía en la que se podía apreciar como debían nombrar cada una de ellas, las FEM hace entrega del material y pasan por cada una de las mesas, recordando las instrucciones de la actividad.

Durante el desarrollo de esta actividad, se evidenciaron pocas dificultades, aunque la suma de fracciones y su representación de forma decimal genero dificultad en los grupos; en algunos casos realizaban la suma de fracciones mal por lo que claramente su forma decimal también estaba mal. El grupo de la serie piramidal, presento muchas dificultades para representar las fracciones con el material, puesto que, el diseño de esta serie es diferente a las demás, en el sentido que sus particiones no se podían ver tan fácil por lo que una de las FEM interviene ayudarles, pero no logra explicarles adecuadamente, por lo que se llama a la otra FEM, quien deja de lado el material y resuelve la situación acertadamente encaminando el desarrollo de la actividad a partir de lo algebraico.

Los demás grupos de estudiantes realizaron todo de una manera adecuada, cada que tenían una pregunta o duda, llamaban a las FEM. Se pudo observar que al inicio no era muy clara la instrucción de continuar con la suma, pensaban que era innecesario, pero al momento de que iban solucionando una tras otras, se les facilitaba más puesto que algunos decían “Ah, es como el paso anterior”, comentarios como estos nos dejaban ver la comprensión precisa de ellos.

Se observa que los grupos de los estudiantes Sordos logran finalizar la actividad con éxito y de primeras que los estudiantes oyentes, donde la interprete nos dicen, “*lo que pasa es que ellos son muy visuales y todo se lograban muy rápido porque es un material llamativo y práctico*”, se procede a entregar la tercera guía, muy similar a la anterior, se dan instrucciones con ayuda de la interprete.

Como el tiempo ya estaba finalizando se procede a recibir las guías de los otros grupos, mientras dos representantes del curso proceden a realizar a dar una información al curso referentes a las “chaquetas de once”. Antes de recoger el material uno de los grupos hace entrega de la tercera guía y las FEM mencionan que se espera dar por terminadas las actividades en la próxima sección, en donde además deberán diligenciar una encuesta de satisfacción y algunos gritan “profes quédense más tiempo con nosotros”

Este día fue un poco estresado, por la situación ocurrida con el grupo de serie piramidal, ya que los estudiantes se desanimaron al ver que los demás grupos avanzaban, entendían y ellos no podían con las fracciones, en ese momento una FEM se preocupó por el miedo que se desanimaran y no siguieran con la misma actitud, pero solo se les ocurrió en decirle *“La profesora los tiene como referencia que son los más pilos, por tal motivo los escogimos para que trabajaran con la serie con más dificultad, así que no queden mal”*. Se logró que se motivaran un poco y buscar una nueva estrategia, apenas se terminó la clase nos dijeron la próxima clase vamos a hacer los mejores.

Otro motivo porque se sintió fuerte, es que todos estaban muy activos gritando, llamándonos porque sabían que esas guías iban hacer las notas, entonces querían que todo les quedara perfecto y dieron su mejor esfuerzo, ya que con esas notas se cerraba el cuarto periodo, eso fue un plus para nosotras porque todos tenían el empeño y trabajaban en orden y juiciosos.

***Fecha: martes 7 de noviembre***

***FEM: Angie Linares y Lina Pinzón***

***“Aplicación Prueba piloto sesión 3”***

La clase se desarrolló de 6:10 am a 8:00 am en el horario de clase “economía” debido a que ya se estaba finalizando el periodo escolar fue necesario que un profesor nos cediera el espacio en el cual afortunadamente se pudo realizar la clase. Antes de iniciar la clase se espera al profesor de economía para presentarnos y explicarle un poco del trabajo que se estaba desarrollando, una vez ingresa el profesor, el menciona a los estudiantes que trabajaremos paralelamente y que el estará llamando uno por uno, para que no se desordenen y puedan ir trabajando en las actividades que nosotras teníamos planeados, por solicitud del docente se dan 5 min para que cada estudiante llene su autoevaluación, finalizada esta actividad se da inicio a nuestra actividad.

Antes de iniciar la tarea se realiza una retroalimentación en el tablero a modo de explicación y concretar lo que se trabajó en la clase anterior de las actividades realizadas, en donde ya se había dado inicio a la actividad 3.1 (términos de la serie) y algunos grupos la actividad 3.2 (razón común), a modo de ejemplo se toma la actividad 3.1 del grupo cruz – griega, se escribe en el tablero las fracciones escritas por los estudiantes en el grupo y se indica que dichas fracciones se llama los **términos de la serie** y la primera de ella se conocerá como **primer término**, además se reescribe en el tablero las sumas que hizo el grupo en la guía, para obtener una conclusión general de lo observado, puesto que evidenciamos que algunos grupos no escribieron la conclusión, razón por la que se decide enfatizar en ello, se realizan preguntas al grupo de los datos observados en el tablero y teniendo en cuenta las respuesta dadas se elabora una conclusión que fue similar a la dada por el grupo. Todos hacían caras de sorpresa y no creer esa relación que lo común del resultado de las sumas parciales era un mismo número y que se iba acercando a otro, un estudiante dice “es decir, que la siguiente suma parcial va a dar similar o igual al número decimal”.

Se entregan a los grupos la tarea 3.1 para que la completen la conclusión observada en su material, además se entrega la tarea 3.2 a los grupos puesto que también les hacían falta la conclusión y otros aun no la habían iniciado, se pasa por cada uno de los grupos, reiterando las indicaciones de la actividad 3.2, debido a que gran parte de los grupos no habían empezado esta actividad. Una vez terminada esta actividad, se le decía a cada grupo que el valor encontrado en esta actividad se le conoce **razón común**. Se presta apoyo en especial al grupo de la serie Piramidal, debido a que en la sección anterior se presentó dificultad para la representación de las fracciones con el material; para el desarrollo de la actividad 3.1 (términos de la serie), se les pidió que reescribieran las fracciones mediante potencias de tal manera que el numerador y el denominador de cada fracción sea el mismo, el grupo tenía dos fracciones

$$\frac{4}{9}$$

$$\frac{16}{81}$$

para esta fracción se les pidió que reescribieran el 16 como una potencia de base 4, uno de los integrantes dijo que se podía escribir como  $4^2$ , luego se les pidió que lo hicieran de la misma manera con el denominador a lo que ellos respondieron que se podía escribir como  $9^2$ , ahora, con base a lo obtenido del primer y segundo término, se les pregunta ¿Cuál sería el tercer término?, algunas de las respuestas dadas por el grupo es que se multiplicaría por tres la primera fracción, se realiza la multiplicación y se les pregunta si hay relación de este tercer término con los anteriores, hasta que uno de los chicos menciona que es  $\frac{4^3}{9^3}$  siendo esta la respuesta correcta, al preguntarle cual sería el siguiente, menciona que sería el mismo pero a la cuatro, ahora para la actividad 3.2, se les pregunta dada la fracción

$\frac{4}{9}$  como obtiene  $\frac{4^2}{9^2}$ , la respuesta dada por los integrantes del grupo es multiplicar por el mismo, se les pregunta cuál es el mismo, a lo que ellos responden que por  $\frac{4}{9}$ .

Ahora se les pregunta, de  $\frac{4^2}{9^2}$  cómo obtiene  $\frac{4^3}{9^3}$ , para esta parte los estudiantes presentan un poco de dificultad, al identificar la fracción que al multiplicarla por la primera obtenga la segunda, pasado un tiempo, logran determinar que al igual que la primera es  $\frac{4}{9}$ , se finaliza diciendo al grupo que se conocerá esa fracción como razón común, puesto que es la misma en cada par de fracciones consecutivas.

Se observa que, en los demás grupos, logran resolver la actividad 3.2 (razón común), porque el uso del material les facilitó mucho, pudimos observar cómo usaban la parte entera del material, sobreponían las otras fichas, hacían cuentas, festejaban porque les salía y entendían, se pudo observar que cuando un integrante que no entendía el otro compañero le explicaba manipulando el material, con frases como “*Mira Patiño, tienes la unidad entera, colocas esta parte b encima que fracción representa, cuenta 1,2,3,4*”. Charlas de ese estilo que las FEM escuchaban permitía traer paz, tranquilidad y satisfacción que estaban haciendo bien las cosas.

Seguidamente se hace énfasis en que a la fracción encontrada se le llamará en adelante como razón común, a medida que iban terminando los grupos se iba entregando la actividad 3.3 (convergencia) una vez entregada se iban dando las instrucciones para desarrollar la actividad.

Se brinda acompañamiento a los grupos, quienes en su mayoría logran obtener la fracción que representa la unidad en relación a las fichas de un color en particular, en la serie caracolí, no sabían

cómo ubicar las piezas, la FEM les ayuda a ubicarlas sobre la base (unidad) de la misma forma que se hizo en la actividad inicial, al hacerlo se observa que logran identificar que las piezas de color son  $\frac{1}{2}$  del total, por otro lado en la serie Cola dino, se observa que presentan dificultad, puesto que las piezas no tenían un mismo color, se les pidió que intentaran verlas de un solo tono, se tomó la unidad, se ubicó la pieza B y se les pidió que indicaran mediante una fracción que porción representa la pieza B en relación a la unidad, los estudiantes mencionan que es  $\frac{1}{2}$  del total, ahora se les pide que ubiquen todas las piezas, luego de esto se les hace nuevamente la pregunta pero ahora en relación de todas las piezas, mientras piensan y discuten, concluyen que es la misma unidad, es decir 1; de la serie Cruz – griega se observa que tomaron como denominador 625 siendo esta las particiones del material y empezaron a ubicar cada una de las piezas, obteniendo entonces  $\frac{625}{625}$ , es decir, 1.

A medida que iban terminando se les hacía entrega de la tabla, la cual debían diligenciar, según los datos obtenidos, por grupo se les iba indicando:

Debian escribir la expresión algebraica que ellos marcaron al inicio de las actividades, los términos de la serie que se habían encontrado en la actividad 3.1 y que también podían observar en la expresión algebraica, en la columna de razón común debían escribir la fracción encontrada en la actividad 3.2 y la convergencia en la actividad anterior, no se presentó dificultades en el desarrollo de esta actividad.

Ya para finalizar se les informa que deben diligenciar una encuesta de satisfacción que al igual que las otras actividades tenía nota, para el desarrollo de esta actividad se envió el link a un grupo en WhatsApp que tenían del curso, pero al ingresar les pedía correo y muchos de los estudiantes no tenían correo o el correo ingresado no les deja pasar con él, una de las FEM escribió su correo institucional con la contraseña, para que cada estudiante lograra ingresar, pero el formulario no permite ingresar más de una respuesta por correo, así que se presentó un poco de desorden por esto, hasta que afortunadamente la FEM ingresa al formulario en donde logra modificarlos para que no solicite correo para contestar la encuesta, afortunadamente todos los estudiantes logran responder la encuesta sin dificultad.

Para finalizar y dar cierre a las actividades, se procedió a mostrar los videos del canal de YOUTUBE de Visual Proof, de las series trabajadas en el aula, a medida que se iban pasando los videos, se observan algunas expresiones de emoción y sorpresa por los grupos, puesto que a medida que iban saliendo las serie con ella se mostraban sus términos, su expresión general y su convergencia, se escucharon a varios grupos decir “si ve que sí”, “yo sabía que si era eso”, “nos quedó bien”, entre otras a medida que se iban mostrando los videos, Las FEM mencionan, que en la actualidad no se cuenta con material físico concreto para trabajar series y series al infinito, por esto, se realiza la propuesta del material que ellos utilizaron como una herramienta manipulable para trabajar las series, pero el material solo permite observar ciertas particiones, pero como se observa en los videos las particiones se pueden realizar infinitas veces. De manera inesperada se observa mucha emoción en esta actividad. Por último, se pide una foto grupal como cierre de las actividades.





CRUZ GRIEGA
-------------

Tarea 2.2

Facultad de Ciencia y Tecnología  
Licenciatura en Matemáticas  
Colegio Isabel II JM  
Tarea 2.2  
Futuras Educadoras matemáticas (FEM): Angie Linares y Lina

Nombre de Grupo: Cruz Griega  
Integrantes: Yianela González - Karen Acosta  
Camilo González - Kevin Gómez

Con el material entregado representa las fracciones dadas y completa la siguiente tabla, si encuentras otras representaciones de la misma fracción, dibuja las posibles, siempre que no sean iguales a las ya encontradas.

Fracción	Representación gráfica de la fracción con el material entregado
$\frac{4}{5}$	
$\frac{4}{25}$	
$\frac{4}{625}$	
$\frac{4}{125}$	

Tarea 3.1

Facultad de Ciencia y Tecnología  
Licenciatura en Matemáticas  
Colegio Isabel II JM  
TAREA 3.1  
Futuras Educadoras Matemáticas (FEM): Angie Linares y Lina Pinzón

Serie Cruz-Griega.

Nombre del grupo: Cruz Griega  
Integrantes: Camilo González - Yianela González  
Kevin Gómez - Karen Masquera

Observa el material responde las siguientes preguntas y completa la tabla:

- ¿Cuál fracción representa la pieza B con respecto a la pieza A?
  - Multiplica la fracción obtenida por cuatro

Piezas	Fracción	Resultado Final
A-B	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$ ✓

- ¿Cuál fracción representa la pieza C con respecto a la pieza A?
  - Multiplica por cuatro la fracción obtenida
  - suma el resultado final obtenido en el punto anterior con la obtenida en este punto, escribe la respuesta como fracción y su notación decimal.

Piezas	Fracción	Resultado Final	Suma de fracciones	Notación decimal de la suma de fracciones
A-C	$\frac{1}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{120}{125}$	0,96 ✓

- ¿Cuál fracción representa la pieza D con respecto a la pieza A?
  - Multiplica por cuatro la fracción obtenida
  - De la misma manera, suma el resultado obtenido en los puntos anteriores con la obtenida en este.

Piezas	Fracción	Resultado Final	Suma de fracciones	Notación decimal de la suma de fracciones
A-D	$\frac{1}{125}$	$\frac{4}{125}$	$\frac{15.500}{15.625}$	0.96

4.



- ¿Cuál fracción representa la pieza E con respecto a la pieza A?
- Multiplica por cuatro la fracción obtenida
- suma el resultado obtenido en los puntos anteriores con la obtenida en este.

Piezas	Fracción	Resultado Final	Suma de fracciones	Notación decimal de la suma de fracciones
A-C	$\frac{1}{625}$	$\frac{4}{625}$	$\frac{9.750.000}{9.765.625}$	0.9984

- ¿Encuentras alguna relación de los resultados obtenidos en la columna cinco en la notación decimal de la suma de las fracciones?, si o no ¿Cuáles?

Se encuentra relación en los puntos A-B, A-C y A-D, con su notación de 0.96

Tarea 3.2


**Facultad de Ciencia y Tecnología**  
**Licenciatura en Matemáticas**  
**Colegio Isabel II JM**  
**Tarea 3.2**  
**Futuras Educadoras Matemáticas (FEM): Angie Linares y Lina Pinzón**


**Nombre del grupo:** Cruz Griega  
**Integrantes:** Yianela Gonzalez - Karen Mosquera  
 Camilo Gonzalez - Kevin Gomez.

Con base al material entregado y lo hasta hora realizado, responder las siguientes preguntas:

- ¿Cuál fracción representa la pieza B con respecto a la pieza A?

Piezas	Fracción
A-B	$\frac{1}{5}$

- ¿Cuál fracción representa la pieza C con respecto a la pieza B?

Piezas	Fracción
B-C	$\frac{1}{5}$

- ¿Cuál fracción representa la pieza D con respecto a la pieza C?

Piezas	Fracción
C-D	$\frac{1}{5}$

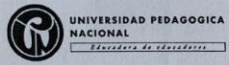

- ¿Cuál fracción representa la pieza E con respecto a la pieza D?

Piezas	Fracción
D-E	$\frac{1}{5}$

- Plantea una conclusión respecto a lo hallado en los numerales anteriores, escribe dicha conclusión de la manera más clara y completa posible.

La conclusión es que la relación entre todos los cuestionamientos es que su resultado final es  $\frac{1}{5}$

Tarea 3.3


**Facultad de Ciencia y Tecnología**  
**Licenciatura en Matemáticas**  
**Colegio Isabel II JM**  
**Tarea 3.3**  
**Futuras Educadoras Matemáticas (FEM): Angie Linares y Lina Pinzón**


**Integrantes:**

Observen el material armado y encuentren la relación de las **piezas totales naranjas y amarillas** para la **serie Cruz-griega** en relación con la unidad (el material completo). Es decir ¿cuál fracción representan todas las piezas naranjas y amarillas del total del material?

La fracción que representa todas las piezas unidas es de  $\frac{625}{625} = 1$  ✓  $\frac{50}{50}$



## 5.5.8 Anexo G

Tabla de análisis de los insumos de recolección

				<b>Desventajas</b>	<b>Ni ventajas Ni Desventajas</b>	<b>Modificación a tarea o material</b>	<b>Justificación de la decisión</b>
<b>Material didáctico</b>	<b>Presentación (objeto físico)</b>	<b>Tamaño de las fichas</b>				Ninguna modificación respecto al tamaño de las fichas.	No se realiza modificación, puesto que, el diseñar fichas más pequeñas puede dificultar el desarrollo de la actividad por la manipulación de estas.  Por otro lado, el diseñarlas más grandes implica diseñar el material más grande de lo propuesto.
			El <b>75,7%</b> está muy de acuerdo o algo de acuerdo que el tamaño de las fichas es adecuado.	<b>9,1%</b> está muy en desacuerdo con que el tamaño de las fichas sea adecuado.	<b>15,2%</b> no está ni de acuerdo ni se de acuerdo con que el tamaño de las fichas sea adecuado.		
					No aplica para las guías		
		<b>Tamaño del material</b>			No aplica	Ninguna modificación	No se realiza modificación del material, puesto que el objetivo de este es que se evidencie la mayor cantidad de términos posibles. Así que con un material más pequeño es imposible realizar
			El <b>69,7%</b> está muy de acuerdo o algo de acuerdo que el tamaño del material es adecuado.	<b>15,1 %</b> está muy en desacuerdo o algo en desacuerdo con el tamaño del material	<b>15,2 %</b> no están de acuerdo ni es desacuerdo con el tamaño del material.		

				<b>Desventajas</b>	<b>Ni ventajas Ni Desventajas</b>	<b>Modificación a tarea o material</b>	<b>Justificación de la decisión</b>
				«Un poco más pequeño (el material) (...) Para que no se dificulte su transporte» (Profesora).			
		<b>Color</b>		«(...) en la serie Cola Dino, se observa dificultad en el grupo de trabajo, puesto que, las piezas no tenían un mismo color, se les pidió que intentaran verlas de un solo tono, y sobre ponerlas unidad» (Diario de campo. Serie Cola Dino).		1. Serie Cruz griega: Se debe pintar el reverso de las piezas principales de color naranja y las piezas adicionales de color amarillo por al anverso y reverso de color naranja.  2. Para la serie Cola-Dino se pintarán el reverso de las piezas principales y las piezas adicionales del color fucsia, excepto la pieza adicional que representa ½ esta se pintara de color	Es necesario pintar algunas piezas del mismo color, para facilitar el desarrollo de las tareas, en especial la tarea 3.3 «convergencia de las series».
			72,7 están muy de acuerdo o algo de acuerdo con el color del material.	9,1 % están muy en desacuerdo con el color del material. «Quizá sea bueno que el material tenga un solo color por ambos	18,2 % no están en desacuerdo ni de acuerdo con el tamaño del material.		

				<b>Desventajas</b>	<b>Ni ventajas Ni Desventajas</b>	<b>Modificación a tarea o material</b>	<b>Justificación de la decisión</b>
				lados» (Estudiante. Serie Cruz griega)		naranja; para las demás series no abra modificación.	
			Se identifica que el usar dos colores facilitó el reconocimiento de las fracciones; ya que, se evidencia en las guías que utilizaron los mismos colores para representar las fracciones de la tarea 2.2.				
		<b>Material de construcción</b>	Material llamativo y práctico para los estudiantes Sordos	Firmeza del material (se sugiere “un material más firme”)	«Puedes hacer una lista de los materiales que se usan, para los grupos que no pierdan las figuras Grandes hasta las más pequeñas» (Estudiante).	1. El material se diseñará en madera, puesto que, este es más firme y sus medidas serán más exactas facilitando el uso del material. 2. Se añadirá una ficha técnica al kit en la que se detallará los elementos que conforman cada kit.	Facilitar el manejo del material a la hora de armarlo. Facilitará el control del material entregado a cada grupo de estudiantes.
			78,8 % están muy de acuerdo o algo de acuerdo con que manipular el material fue fácil.	9,1% están muy en desacuerdo con que el material es fácil de manipular	12,1 % no están en desacuerdo ni en acuerdo sobre la manipulación del material.		

				<b>Desventajas</b>	<b>Ni ventajas Ni Desventajas</b>	<b>Modificación a tarea o material</b>	<b>Justificación de la decisión</b>
					No aplica		
		<b>Nombre del material</b>	El nombre de cada uno de los kits fue apropiado, puesto que fue asociado a la forma de este, en el aula muchos estudiantes asociaban el nombre a la forma en que se armaba la serie, esto se observó en la tarea.			Ninguna modificación	Más del <b>50%</b> de las personas encuestadas están de acuerdo con los nombres establecidos para cada serie.
			<b>78,8 %</b> está muy de acuerdo o algo de acuerdo con el nombre del material.	<b>9,1 %</b> está muy en desacuerdo con el nombre del material.	<b>12,1%</b> no está en desacuerdo ni de acuerdo con el nombre del material		
					No aplica		
		<b>Manipulación</b>	El material fue de fácil manipulación.	Se evidencia que el grupo a cargo de la serie Piramidal presenta dificultades para manipular el material, puesto que el diseño de la serie era más		Se determina, no diseñar la serie para la propuesta final	Por la dificultad presentada para la comprensión de esta en el aula, puesto que se requirió apoyo permanente de las FEM para la culminación de las actividades y tareas propuestas.

				<b>Desventajas</b>	<b>Ni ventajas Ni Desventajas</b>	<b>Modificación a tarea o material</b>	<b>Justificación de la decisión</b>
				abstracto y para realizar con éxito las primeras tareas, los estudiantes debían contar un proceso de visualización más desarrollado.			
			No aplica				
				Se observa en la tarea 2.2, los estudiantes a cargo de la serie Piramidal presentan dificultades para manipular el material y con este representar las fracciones propuestas, puesto que solo logran representar 2 de 3 propuestas.			
	<b>Según utilidad</b>	<b>Preinstruc cional</b>	72,7 % está muy desacuerdo y algo de acuerdo con que el material es óptimo para	15,2 % está muy en desacuerdo con que el material no es óptimo para	12,1% no está ni de acuerdo ni en desacuerdo el uso del material para	Inicialmente se había diseñado el material de tipo co-instruccional, pero es evidente que el material puede ser una	Se realiza el cambio con relación a los datos obtenidos, dejando a consideración del docente la utilidad que desee darle al material.

				<b>Desventajas</b>	<b>Ni ventajas Ni Desventajas</b>	<b>Modificación a tarea o material</b>	<b>Justificación de la decisión</b>
			introducir el tema de series geométricas.	introducir el tema de series geométricas	introducir el tema series geométricas.	herramienta para introducir, apoyar o para repasar un tema.	
					Se evidencia en las guías que el material se puede entregar previamente al desarrollo de las guías, sin afectar el desarrollo de esta.		
		<b>Coinstruccional</b>	Representar cada fracción con el material entregado				
			75,7% está muy de acuerdo y algo de acuerdo con el material como apoyo para trabajar el tema series geométricas	12,1% está muy en desacuerdo o algo en desacuerdo con el material como apoyo para trabajar series geométricas	12,2 % no está de acuerdo ni en desacuerdo con el material como apoyo para la enseñanza de series geométricas		
					Se puede observar en las guías, que el material se entregó paralelamente al desarrollo de estas.		
		<b>Posinstruccional</b>					
			75,8 % está muy de acuerdo y algo de acuerdo, que el material sirve	15,1 % está muy en desacuerdo o algo en desacuerdo, que	9,1% no está ni de acuerdo ni en desacuerdo que el material sirve		

				<b>Desventajas</b>	<b>Ni ventajas Ni Desventajas</b>	<b>Modificación a tarea o material</b>	<b>Justificación de la decisión</b>
			como repaso del tema series geométricas.	el material no funciona como repaso del tema series geométricas.	como repaso del material.		
					No aplica		
	<b>Según contenido</b>	<b>Álgebra</b>	Asociar el material a una expresión algebraica.				
			75,8 % está muy de acuerdo o algo de acuerdo que el material permite trabajar temas relacionados con el álgebra.	12,1% está muy en desacuerdo y algo en desacuerdo, que el material permite trabajar temas relacionados con el álgebra.	12,1% no está de acuerdo ni en desacuerdo, que el material permite trabajar temas relacionados con el álgebra	Se incluye el material para estudio del cálculo.	Se evidencia el trabajo de conceptos asociado directamente a la rama del cálculo.
			Se observa el uso del algebra para expresar de forma numérica los términos que componen la serie, dicho términos eran obtenidos mediante la solución de las tareas 3.1, 3.2, 3.3 y 4.				

				<b>Desventajas</b>	<b>Ni ventajas Ni Desventajas</b>	<b>Modificación a tarea o material</b>	<b>Justificación de la decisión</b>
		<b>Geometría</b>	72,7% está muy de acuerdo o algo de acuerdo que con el material se puede trabajar temas relacionados a geometría.	15,1% está muy en desacuerdo o algo en desacuerdo con que el material permite trabajar temas relacionados a la geometría.	12,1 % no está de acuerdo ni en desacuerdo		
			Se evidencia el estudio de la geometría, puesto que, el material son representaciones geométricas de la serie, en donde el estudiante debía identificar que representación tenía ciertas piezas con relación a todo el material.				
		<b>Estadística</b>	63,6 % está muy de acuerdo o algo de acuerdo que el material se puede trabajar temas relacionados a la estadística	12,1 % está muy en desacuerdo o algo en desacuerdo, que el material permite trabajar temas	24,2% no está de acuerdo ni en desacuerdo, que el material permite trabajar temas relacionados a la estadística		

				<b>Desventajas</b>	<b>Ni ventajas Ni Desventajas</b>	<b>Modificación a tarea o material</b>	<b>Justificación de la decisión</b>
				relacionados a la estadística			
					No aplica		
		<b>Cálculo</b>	60,6 % está muy de acuerdo o algo de acuerdo que con el material se puede trabajar temas relacionados al cálculo	18,2 % está muy en desacuerdo o algo en desacuerdo con que el material permite trabajar temas relacionados al cálculo	21,2 % no está de acuerdo ni en desacuerdo con que el material permite trabajar temas relacionados al cálculo		
			Se evidencia en la tarea 3.1, un acercamiento al infinito al identificar las relaciones en las sumas parciales de los términos que componen las series.				
		<b>Aritmética</b>	Representar cada fracción con el material entregado				
			63,6 % está muy de acuerdo o algo de acuerdo que con el material se puede trabajar temas	15,1 % está muy en desacuerdo o algo en desacuerdo con que el material permite trabajar temas	21,2 % no está de acuerdo ni en desacuerdo con que el material permite trabajar temas relacionados a la aritmética.		

				<b>Desventajas</b>	<b>Ni ventajas Ni Desventajas</b>	<b>Modificación a tarea o material</b>	<b>Justificación de la decisión</b>
			relacionados a la aritmética	relacionados a la aritmética			
			Se observa el uso operaciones como suma de fracciones, conversión de fracciones a números decimales, uso de las propiedades de las potencias, operaciones entre números racionales, etc. Relacionadas directamente con el estudio de la aritmética.				
	<b>Según criterio</b>	<b>Vinculación prioritaria</b>	<b>69,7 %</b> está muy de acuerdo o algo de acuerdo que el material permite trabajar diversidad de conceptos matemáticos.	<b>15,1%</b> está muy en desacuerdo o algo en desacuerdo que el material permite trabajar diversidad de conceptos matemáticos.	<b>15,2 %</b> no está de acuerdo ni en desacuerdo con que el material permite trabajar diversidad de conceptos matemáticos.	No se realiza cambios	El material puede ser utilizado por estudiantes de cualquier edad, además con él se pueden estudiar varios conceptos o propiedades matemáticas y aunque este diseñado propiamente para la enseñanza de las series geométricas, puede ser utilizado para la enseñanza de otros conceptos.
					Se diseño el material pensando en la enseñanza y aprendizaje de las		

				<b>Desventajas</b>	<b>Ni ventajas Ni Desventajas</b>	<b>Modificación a tarea o material</b>	<b>Justificación de la decisión</b>
					series, pero en ellas se observa el trabajo indirectamente de otros conceptos matemáticas.		
		<b>Versatilidad</b>					
			72,7% está muy de acuerdo o algo de acuerdo que el material puede ser utilizado para enseñar un tema distinto a las series geométricas	12,1 % está muy en desacuerdo o algo en desacuerdo que el material puede ser utilizado para enseñar un tema distinto a las series geométricas	15,2 % no está de acuerdo ni en desacuerdo con que el material puede ser utilizado para enseñar un tema distinto a las series geométricas		
			Se observa el estudio y refuerzo de otros conceptos matemáticos diferente a las series.				
		<b>Edad específica</b>					
			60,6 % está muy de acuerdo o algo de acuerdo que el material puede ser usado por diferentes edades.	18,2 está muy en desacuerdo o algo en desacuerdo que el material puede ser usado por diferentes edades.	21,2 % no está de acuerdo ni en desacuerdo que el material puede ser usado por diferentes edades.		



				<b>Desventajas</b>	<b>Ni ventajas Ni Desventajas</b>	<b>Modificación a tarea o material</b>	<b>Justificación de la decisión</b>
			mismo procedimiento reiterativamente.				
		<b>Modelización de ideas o conceptos matemáticos</b>	66,7 % está muy de acuerdo o algo de acuerdo que el material puede ser de ayuda para representar características de un concepto matemático	18,2 % está muy en desacuerdo o algo en desacuerdo que el material puede ser de ayuda para representar características de un concepto matemático	15,2 % no está de acuerdo ni en desacuerdo que el material puede ser de ayuda para representar características de un concepto matemático	No hay modificación	El material se diseñó principalmente con el propósito de modelizar conceptos matemáticos en especial las series geométricas.
			Se observa la transición de lo numérico a lo geométrico, esto se observa en la tarea 2.2 y viceversa en la tarea 2.1, en la que los estudiantes deben asociar el material entregado a unas de las expresiones algebraicas dadas.				

				<b>Desventajas</b>	<b>Ni ventajas Ni Desventajas</b>	<b>Modificación a tarea o material</b>	<b>Justificación de la decisión</b>
		<b>Planteamiento de problemas</b>			No aplica	No hay modificación	
					No aplica		
					No aplica		
<b>Tareas</b>	<b>Reconocimiento del material (2.1)</b>	<p>1.Las FEM mencionan algunas recomendaciones frente al uso del material.</p> <p>2.Se nombra el material.</p> <p>3.Entrega el material para que cada grupo lo manipule y reconozcan cada una de sus piezas.</p> <p>4.El primero que lo arme viene toma el marcador y escribe el nombre de su material en el tablero.</p> <p>5.Motivación por los grupos por obtener los puntos al armarlo.</p> <p>6.Las FEM proceden a dar una pista a todos los</p>	<p>Varios grupos entregan el Material armado incorrectamente, por el afán de ganar acomodando las fichas sin sentido.</p>			<p>Agregar instrucciones adicionales para efectuar con éxito la tarea:</p> <p>Relacionar el nombre de la Serie con la forma en que debe ir armada.</p> <p>Tener en cuenta el orden de colores y tamaños de las piezas.</p>	<p>Inicialmente cada grupo de trabajo arma el material sin ningún orden o sentido, se evidencia que muchos lo hacen mal, por lo cual, se considera necesario incluir más Instrucciones para evitar esto en próximas secciones.</p>

			<b>Desventajas</b>	<b>Ni ventajas Ni Desventajas</b>	<b>Modificación a tarea o material</b>	<b>Justificación de la decisión</b>
		<p>grupos, indicando que para armarlo se debe mantener la secuencia de colores y forma del material.</p> <p>7. Afortunadamente todos los grupos logran armar el material con la relación al nombre o con las pistas de las FEM.</p>				
		<b>63,7 %</b> está muy de acuerdo o algo de acuerdo que el material fue fácil de armar	<b>18,2 %</b> está muy en desacuerdo o algo en desacuerdo que el material fue fácil de armar	<b>18,2 %</b> no está de acuerdo ni en desacuerdo que el material fue fácil de armar		
				No aplica		
	<b>Representación de fracciones (2.2)</b>	<p>1. Se entrega a cada grupo un pequeño paquete de fichas, el cual contenía 4 a 5 fracciones.</p> <p>2. Se entrega un paquete de piezas adicionales del material, que podrían ser útiles para la</p>	<p>1. Se observa la construcción de las fracciones solo con algunas piezas del material.</p> <p>2. No se consideraron otras posibles representaciones con el material.</p>		<p>Incluir las siguientes instrucciones para desarrollar la actividad:</p> <p>1. Usar <b>TODO</b> el material como parte entera.</p> <p>2. Tener en cuenta los colores para representar las fracciones.</p>	<p>Se evidencia en el aula, que muchos estudiantes utilizando solo una parte del material para representar las fracciones propuestas, aunque el proceso no está mal, es necesario que se use el material completo para lograr observar las cualidades y características de la serie.</p>

				<b>Desventajas</b>	<b>Ni ventajas Ni Desventajas</b>	<b>Modificación a tarea o material</b>	<b>Justificación de la decisión</b>
		<p>representación de las fracciones.</p> <p><b>3.</b>Las FEM brindan apoyo a los grupos que iban realizando la representación validando si esta correcta o no.</p> <p><b>4.</b>Se les indicó las instrucciones de la primera guía, la cual debían diligenciar con base a la actividad anterior.</p> <p><b>5.</b>Observa que gran parte de los grupos lograron responder la guía.</p> <p><b>6.</b>Las FEM proporcionan pistas para representar las fracciones con el material.</p>				<b>3.</b> No sobre poner pizas en otras para representar la fracción.	
		<b>78,8 %</b> está muy de acuerdo o algo de acuerdo que es fácil representar fracciones con ayuda del material.	<b>9,1 %</b> está muy en desacuerdo o algo en desacuerdo que es fácil representar fracciones con	<b>12,1%</b> no está de acuerdo ni en desacuerdo que es fácil representar fracciones con ayuda del material.			

			Desventajas	Ni ventajas Ni Desventajas	Modificación a tarea o material	Justificación de la decisión
			ayuda del material.			
		Se observa que cada grupo logra realizar las representaciones de fracciones de manera correcta y apropiada.				
	<b>Asociación representación algebraica y material (2.3. selecciona la pareja ideal)</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Se organizan las mesas de trabajo.</li> <li>2. En cada mesa se coloca el material con los nombres de los integrantes.</li> <li>3. Entrega de un paquete con 6 fichas bibliográficas, que tenían expresiones algebraicas de los distintos materiales.</li> <li>4. Se realiza retroalimentación de las actividades realizadas en la sección anterior.</li> <li>5. Se observa participación de todos los grupos de trabajo, en</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Se observa confusión frente al desarrollo de la actividad, puesto que, algunos grupos estaban realizando las sumas que se expresaban en la ficha o escogían una de las fichas al azar sin tener en cuenta nada de lo hecho previamente en las actividades anteriores.</li> <li>2. Se identifica un poco de dificultad con el grupo de la serie piramidal para entender la representación de</li> </ol>		<p>No se realiza cambio.</p> <p>Una vez finalizada la tarea, es necesario realizar una aclaración acerca de los datos encontrados que relación tienen con la serie.</p>	

				<b>Desventajas</b>	<b>Ni ventajas Ni Desventajas</b>	<b>Modificación a tarea o material</b>	<b>Justificación de la decisión</b>
			<p>especial de los sordos, quienes son los primeros en terminar.</p> <p><b>6.</b> Al respaldo de esta deberán escribir los nombres de los integrantes de los grupos.</p> <p><b>7.</b> Con el objetivo de orientarlos, se les indica que la expresión algebraica asociada al material se encuentra relacionada con las fracciones representadas en la actividad anterior.</p> <p><b>8.</b> Una de las FEM, lleva el control en el tablero de los puntos obtenidos en cada actividad.</p>	<p><math>\frac{16}{81}</math>, por lo cual fue necesario una intervención más profunda de las FEM.</p>			
			<p><b>69,7 %</b> está muy de acuerdo o algo de acuerdo que es</p>	<p><b>12,2 %</b> está muy en desacuerdo o algo en</p>	<p><b>18,2 %</b> no está de acuerdo ni en desacuerdo que es</p>		

			<b>Desventajas</b>	<b>Ni ventajas Ni Desventajas</b>	<b>Modificación a tarea o material</b>	<b>Justificación de la decisión</b>
		fácil asociar la representación algebraica al material	desacuerdo que es fácil asociar la representación algebraica al material.	fácil asociar la representación.		
				No aplica		
	<b>Identificación de los términos y sumas parciales de la serie (3.1)</b>	<p>1.se procede a dar las instrucciones de la segunda guía, tarea 3.1.</p> <p>2.Se entrega fichas con las letras A, B, C, D, E, F, G, H e I.</p> <p>3.También una foto del material que a cada uno le correspondía en la que se podía apreciar como debían nombrar cada una de ellas.</p> <p>4.Las FEM hace entrega del material y pasan por cada una de las mesas, recordando las instrucciones de la actividad.</p> <p>5.La FEM apoya al grupo de la</p>	<p>1.Realizaban la suma de fracciones mal, por lo que claramente su forma decimal también estaba mal.</p> <p>2.El grupo de la serie piramidal, presento muchas dificultades para representar las fracciones con el material, puesto que, este está diseñado diferente a las demás en el sentido que sus particiones no se podían ver tan fácil.</p> <p>3.Se pudo observar que al inicio no era muy</p>		<p>Se decide eliminar la serie Piramidal, puesto que, en el desarrollo de las actividades se observó bastante dificultad.</p> <p>Una vez finalizada la tarea, es necesario realizar una aclaración acerca de los datos encontrados que relación tienen con la serie.</p>	<p>Se observa que todos los grupos avanzan sin mayor dificultad, pero el grupo a cargo de la serie piramidal presenta bastantes dificultades, por lo que las FEM deben realizar apoyo constante y pensar en otras alternativas que le permita al grupo desarrollar las tareas propuestas.</p>

				<b>Desventajas</b>	<b>Ni ventajas Ni Desventajas</b>	<b>Modificación a tarea o material</b>	<b>Justificación de la decisión</b>
		<p>serie piramidal encaminando el desarrollo de la actividad a partir de lo algebraico.</p> <p>6. Se observa que los grupos de los estudiantes sordos logran finalizar la actividad con éxito y de primeras que los estudiantes oyentes.</p> <p>7. Se logró motivar un poco y buscar una nueva estrategia, al grupo a cargo de la serie piramidal.</p> <p>8. se escribe en el tablero las fracciones escritas por los estudiantes en el grupo y se indica que dichas fracciones se llama los <b>términos de la serie</b> y la primera de ella se conocerá como <b>primer término.</b></p>	<p>clara la instrucción de continuar con la suma.</p> <p>4. Se tenía preocupación por el grupo de la serie piramidal, ya que los estudiantes se desanimaron al ver que los demás grupos avanzaban</p>				

				<b>Desventajas</b>	<b>Ni ventajas Ni Desventajas</b>	<b>Modificación a tarea o material</b>	<b>Justificación de la decisión</b>
		<p>9. Se entregan a los grupos la guía tarea 3.1 para que la terminen escribiendo la conclusión observada en su material.</p> <p>9. Se presta apoyo en especial al grupo de la serie Piramidal, debido a que en la sección anterior se presentó dificultad para la representación de las fracciones con el material.</p> <p>10. Para el desarrollo de la actividad 3.1 (términos de la serie), se les pidió que reescribieran las fracciones mediante potencias de tal manera que el numerador y el denominador de cada fracción sea el mismo.</p>					

				<b>Desventajas</b>	<b>Ni ventajas Ni Desventajas</b>	<b>Modificación a tarea o material</b>	<b>Justificación de la decisión</b>
		<p><b>11.</b> Ahora, con base a lo obtenido del primer y segundo término, se les pregunta ¿Cuál sería el tercer termino? (serie piramidal)</p>					
		<p><b>69,7%</b> está muy de acuerdo o algo de acuerdo que el material permite identificar los términos que componen la serie.</p>	<p><b>15,2 %</b> está muy en desacuerdo o algo en desacuerdo que el material permite identificar los términos que componen la serie.</p>	<p><b>15,2 %</b> no está de acuerdo ni en desacuerdo que el material permite identificar los términos que componen la serie</p>			
		<p>Se evidencia el desarrollo de las guías con éxito, aunque para ellos se prestó mucho apoyo de las FEM.</p>	<p>Se observa dificultades, cuando realizan las sumas parciales de los términos, en ocasiones no recordaban o no comprendían que debían sumar los términos anteriormente encontrados.</p>	<p>Se considera necesario incluir un ejemplo que les facilite el desarrollo de la tarea.</p> <p>Se evidencia mucha dificultad para realizar la suma con los datos correctos.</p>			

				<b>Desventajas</b>	<b>Ni ventajas Ni Desventajas</b>	<b>Modificación a tarea o material</b>	<b>Justificación de la decisión</b>
			<p>1. Se entrega la guía a desarrollar, y se dan indicaciones de su desarrollo.</p> <p>2. Apoyo de la interprete.</p> <p>3. Se realiza una retroalimentación en el tablero como explicación y concretar lo que se trabajó en la clase anterior de las actividades realizada.</p> <p>4. Se realizan preguntas al grupo de los datos observados en el tablero y teniendo en cuenta las respuestas dadas se elabora una conclusión que fue similar a la dada por el grupo.</p> <p>5. Se entrega la tarea 3.2 a los grupos puesto que también les hacían falta la conclusión</p>			<p>Ninguna modificación</p> <p>Una vez finalizada la tarea, es necesario realizar una aclaración acerca de los datos encontrados que relación tienen con la serie.</p>	<p>No se evidencia dificultad para desarrollar la tarea.</p>

				<b>Desventajas</b>	<b>Ni ventajas Ni Desventajas</b>	<b>Modificación a tarea o material</b>	<b>Justificación de la decisión</b>
		<p>y otros aun no la habían iniciado.</p> <p><b>6.</b>Una vez terminada esta actividad, se le decía a cada grupo que el valor encontrado en esta actividad se le conoce <b>razón común.</b></p> <p><b>7.</b> La actividad 3.2, se les pregunta dada la fracción <math>\frac{4}{9}</math> como obtiene <math>\frac{4^2}{9^2}</math></p> <p><b>8.</b>Se finaliza diciendo al grupo que se conocerá esa fracción como razón común, puesto que es la misma en cada par de fracciones consecutivas.</p> <p><b>9.</b>Logran resolver la actividad 3.2 (razón común), porque el uso del material les facilitó mucho.</p>					

				<b>Desventajas</b>	<b>Ni ventajas Ni Desventajas</b>	<b>Modificación a tarea o material</b>	<b>Justificación de la decisión</b>
		<p><b>10.</b>Se pudo observar que cuando un integrante que no entendía el otro compañero le explicaba manipulando el material.</p>					
		<p><b>66,7 %</b> está muy de acuerdo o algo de acuerdo que el material permitió identificar la razón común entre los términos.</p>	<p><b>18,2 %</b> está muy en desacuerdo o algo en desacuerdo que el material permitió identificar la razón común entre los términos.</p>	<p><b>12,1 %</b> no está de acuerdo ni en desacuerdo que el material permitió identificar la razón común entre los términos.</p>			
		<p>Se evidencia que fue clara la guía propuesta, no presentaron dificultad para desarrollarla, las conclusiones obtenidas al final de la actividad</p>					

				<b>Desventajas</b>	<b>Ni ventajas Ni Desventajas</b>	<b>Modificación a tarea o material</b>	<b>Justificación de la decisión</b>
			fueron las esperadas.				
	<b>Identificación de la convergencia (3.3)</b>	<p>1.Relación en los datos obtenidos al realizar las sumas parciales entre los elementos que conforman la serie.</p> <p>2.Se brinda acompañamiento a los grupos, quienes en su mayoría logran obtener la fracción que representa la unidad en relación con las fichas de un color en particular.</p> <p>3.Se brinda apoyo en la serie caracolí, en ubicar las fichas en la pieza A, debido a que no logran identificar la convergencia, se les pide que vayan ubicando cada una de las piezas que representar los</p>	<p>En la serie coladino, se presentó dificultad, puesto que la serie tenía las piezas de varios colores, y la instrucción de la tarea decía que debía ubicar las piezas de color “distinto” en la unidad o pieza A.</p>	<p>1. A medida que iban terminando los grupos se iba entregando la actividad 3.3 (convergencia) una vez entregada se iban dando las instrucciones para desarrollar la actividad</p>	<p>Una vez finalizada la tarea, es necesario realizar una aclaración acerca de los datos encontrados que relación tienen con la serie.</p>		

				<b>Desventajas</b>	<b>Ni ventajas Ni Desventajas</b>	<b>Modificación a tarea o material</b>	<b>Justificación de la decisión</b>
		<p>términos de la expresión algebraica dada en la tarea 2.3, esto les ayuda a llegar a la conclusión de la que la serie converge a 1.</p> <p><b>4.</b>Logran identificar que las piezas de color son <math>\frac{1}{2}</math> del total.</p> <p><b>5.</b>La serie Cruz – griega se observa que tomaron como denominador 625 siendo esta las particiones del material y empezaron a ubicar cada una de las piezas, obteniendo entonces <math>\frac{625}{625}</math>, es decir, 1.</p>					
		<b>66,6 %</b> está muy de acuerdo o algo de acuerdo que el material permite identificar la convergencia de la serie.	<b>15,2 %</b> está muy en desacuerdo o algo en desacuerdo que el material permite identificar la	<b>18,2%</b> no está de acuerdo ni en desacuerdo que el material permite identificar la convergencia de la serie.			

				<b>Desventajas</b>	<b>Ni ventajas Ni Desventajas</b>	<b>Modificación a tarea o material</b>	<b>Justificación de la decisión</b>
				convergencia de la serie.			
		Se evidencia que se desarrolla la actividad sin dificultad.					
	<b>Tarea 4 recopilación de los datos obtenidos</b>	<p>1.A medida que iban terminando se les hacía entrega de la tabla.</p> <p>2.Se dan indicaciones de los datos que debían escribir en cada columna de la tabla.</p>			Al finalizar la actividad, se mostraron los videos en donde permite visualizar las series en su representación geométrica y algebraica, muchos estudiantes observaron diferencia en la expresión trabajada y en la mostrada en los videos, debido a que la mostrada en el video representaba la expresión general de la serie mediante la sumatoria. Por lo que consideramos incluir una actividad final	No se realiza ningún cambio	

				<b>Desventajas</b>	<b>Ni ventajas Ni Desventajas</b>	<b>Modificación a tarea o material</b>	<b>Justificación de la decisión</b>
					adicional en la que ellos puedan pasar de la expresión algebraica larga a la expresión algebraica con la sumatoria.		
			Se desarrollo con éxito la actividad final, la cual consistía en recopilar los datos obtenidos en una tabla.				
<b>Otros</b>	<b>Participación de estudiantes Sordos</b>		<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Organización de los estudiantes Sordos separados de los oyentes.</li> <li>2. Presencia de intérprete.</li> </ol>	Participación parcial del grupo de los estudiantes Sordos (un estudiante no participó en la primera sesión de clase porque no estaba de acuerdo con la grabación)		El material puede ser trabajado con estudiantes oyentes y sordos.	Al inicio del diseño del material, este estaba pensado para estudiantes oyentes, pero por razones externas, el pilotaje se realizó con estudiantes sordos y oyentes, en donde no se presentó dificultad en el desarrollo y manipulación del material y las tareas.
			<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Se observa participación de todos los grupos de trabajo incluso</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Funcionamiento correcto de instrumento tecnológico (cable HDMI).</li> </ol>		Incluir en la actividad de ambientación (concéntrese)	Se evidencia en el aula, dificultad para realizar las sumas parciales, puesto que los denominadores eran

				<b>Desventajas</b>	<b>Ni ventajas Ni Desventajas</b>	<b>Modificación a tarea o material</b>	<b>Justificación de la decisión</b>
	<b>Actividad de ambientación (Concéntrase e mediado por TIC)</b>		<p>los grupos con estudiantes sordos.</p> <p><b>2.</b>Se contó con un intérprete quien brindo apoyo constate en el grupo.</p> <p><b>3.</b>Los estudiantes Sordos comprendieron la actividad, además son bastante competitivos.</p> <p><b>4.</b>Las FEM realizan retroalimentación. La actividad fue demasiado provechosa y entretenida.</p>	<b>2.</b> Dificultades de los estudiantes en conceptos previos.		ejercicios que incluyan fracciones con denominadores grandes, para recordar cómo se operan este tipo de fracciones.	cada vez más grandes y esto dificultó sumar los términos.
	<b>Metodología para el desarrollo de las tareas</b>		Explicitación del objetivo de las sesiones y de la logística de las tareas, esto ofrece claridad a los estudiantes sobre lo que se espera de las tareas.			Ninguna modificación.	

				<b>Desventajas</b>	<b>Ni ventajas Ni Desventajas</b>	<b>Modificación a tarea o material</b>	<b>Justificación de la decisión</b>
	<b>Otro espacio</b>		La docente Ivonne logra acordar un espacio con otro docente para lograr finalizar la actividad.			Ninguna modificación.	
	<b>Otras actividades</b>		<p><b>1.</b> Para finalizar se les informa que deben diligenciar una encuesta de satisfacción que al igual que las otras actividades tenía nota.</p> <p><b>2.</b> Se envió el enlace a un grupo en WhatsApp que tenía el curso, para responder la encuesta de satisfacción.</p> <p><b>3.</b> Se procedió a mostrar los videos del canal de YOUTUBE de Visual Proof, de las series trabajadas en el aula.</p> <p><b>4.</b> Se observan algunas expresiones de emoción y</p>	El formulario no permite ingresar más de una respuesta por correo, así que se presentó un poco de desorden por esto.		Se considera necesario explicar la forma corta de la expresión algebraica de la serie mediante el uso de la sumatoria.	Se observa que muchos estudiantes al ver el video se preguntaban por qué eran tan diferentes las expresiones que se trabajaron con la mostrada en el video, esto con el objetivo de aclarar que son la misma expresión solo que una es la expresión corta que incluía el símbolo matemático de la sumatoria y la otra la expresión larga.

				<b>Desventajas</b>	<b>Ni ventajas Ni Desventajas</b>	<b>Modificación a tarea o material</b>	<b>Justificación de la decisión</b>
			sorpresa por los grupos. <b>5.</b> Las FEM mencionan, que en la actualidad no se cuenta con material físico concreto para trabajar series y series al infinito. <b>6.</b> De manera inesperada se observa mucha emoción en esta actividad.				
			•	•			
			•	•			

	Diarios de campo
	Formulario
	Guías



### 5.5.9 Anexo H

#### Propuesta general de la tarea 5

##### Tarea 5: Expresión algebraica general

Para concluir las tareas propuestas, a modo de cierre las FEM, mostrarán el uso de la sumatoria y sus propiedades para expresar la forma general algebraica de la serie. Se definirá la serie geométrica y sus elementos, de la siguiente manera:

**Definición:** Una serie geométrica es una serie cuyos sumandos, salvo el primero, es igual al anterior multiplicado por un número constante llamado razón común, representada por

$$r, \quad r \in \mathbb{R}.$$

Es decir:

$r$ : razón

$a$ : primer termino

La suma de los términos se expresa de la siguiente manera:

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \dots$$

A continuación, se propone el siguiente ejemplo en el que las FEM en el tablero indicaran el primer término, su razón común y su expresión algebraica:

##### Actividad:

Encuentre la expresión algebraica de la serie geométrica con los siguientes datos:

$$r: \frac{1}{10}$$

$$a: \frac{1}{10}$$

Las FEM, reescribes la expresión algebraica y sustituyen los datos dados en la actividad de la siguiente manera:

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{10} \left(\frac{1}{10}\right) + \frac{1}{10} \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \frac{1}{10} \left(\frac{1}{10}\right)^3 + \frac{1}{10} \left(\frac{1}{10}\right)^4 + \dots$$

Se les explicará como mediante las propiedades de la potenciación ( $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$ ) es posible simplificar la expresión anterior, de la siguiente manera:

$$\frac{1}{10} + \left(\frac{1}{10}\right)^{1+1} + \left(\frac{1}{10}\right)^{1+2} + \left(\frac{1}{10}\right)^{1+3} + \left(\frac{1}{10}\right)^{1+4} + \dots$$

Obteniendo entonces la siguiente expresión:

$$\frac{1}{10} + \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^3 + \left(\frac{1}{10}\right)^4 + \left(\frac{1}{10}\right)^5 + \dots$$

Para finalizar la actividad, se mostrará el uso de las sumatoria y sus propiedades para simplificar la expresión anterior, para ello se tendrá en cuenta la siguiente expresión:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \dots$$

Para poder obtener la expresión corta mediante la expresión de la sumatoria, para ello, se realiza la sustitución de los datos proporcionados en la actividad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{1}{10} + \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^3 + \left(\frac{1}{10}\right)^4 + \left(\frac{1}{10}\right)^5 + \dots$$

Se sustituye entonces los datos de  $r$  y  $a$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10} \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} = \frac{1}{10} + \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^3 + \left(\frac{1}{10}\right)^4 + \left(\frac{1}{10}\right)^5 + \dots$$

Entonces se obtiene la expresión general:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10} \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$$

Para simplificar la expresión se puede utilizar una de las propiedades de la potenciación utilizada anteriormente, de esta manera, obtenemos la siguiente expresión:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n$$

Siendo esta la expresión general de la serie. Con el objetivo de que cada grupo aplique lo aprendido en la explicación anterior, se pedirá que realicen este mismo procedimiento con las expresiones algebraicas de cada una de las series, para ello se hará entrega de la siguiente guía a cada grupo de trabajo.



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA  
NACIONAL  
*Educadora de educadores*

**Facultad de Ciencia y Tecnología**  
**Licenciatura en Matemáticas**  
**Tarea 5**

1. Escriba la expresión algebraica seleccionada de la serie asignada

Expresión algebraica

2. Identifique el valor de  $a$  : primer término y  $r$ : razón común

$a$ : primer término	$r$ : razón común

3. Escribe la expresión algebraica mediante el uso de la sumatoria, recuerde usar propiedades de la potencia para simplificar la expresión lo mejor posible

Expresión algebraica corta

Finalmente, en caso de que, sobre tiempo, se retira el material, se rota y se inicia nuevamente con las tareas desde el inicio, con el fin, de que estudiantes logren observar las diferencias y características que tienen cada una de las series; en caso de no contar con más tiempo a modo de cierre se presentan los siguientes videos para concluir realizado en clase.

### 5.5.10. Anexo I

#### Enlaces y QR para el desarrollo de la tarea 6

Serie Geométrica	Enlace	QR
Serie Caracolí	<a href="https://www.youtube.com/watch?v=RmTZmNrKqss&amp;t=15s">https://www.youtube.com/watch?v=RmTZmNrKqss&amp;t=15s</a>	
Serie Cola-Dino	<a href="https://www.youtube.com/watch?v=saJJGNlSfn8">https://www.youtube.com/watch?v=saJJGNlSfn8</a>	
Serie Cruz-griega	<a href="https://www.youtube.com/watch?v=y7afEXYeC4">https://www.youtube.com/watch?v=y7afEXYeC4</a>	
Serie Pinski	<a href="https://www.youtube.com/watch?v=8i1xj5ORwUw&amp;list=PLZh9gzIvXQUsgw8W5TUVdtF0q4jEJ3iaw">https://www.youtube.com/watch?v=8i1xj5ORwUw&amp;list=PLZh9gzIvXQUsgw8W5TUVdtF0q4jEJ3iaw</a>	
Serie Fish	<a href="https://www.youtube.com/watch?v=hMEIXCzk9DI">https://www.youtube.com/watch?v=hMEIXCzk9DI</a>	
Serie Mountain	<a href="https://youtu.be/nQb11RIEXkI?si=xbNv7i6SjR_lgVw1">https://youtu.be/nQb11RIEXkI?si=xbNv7i6SjR_lgVw1</a>	

---

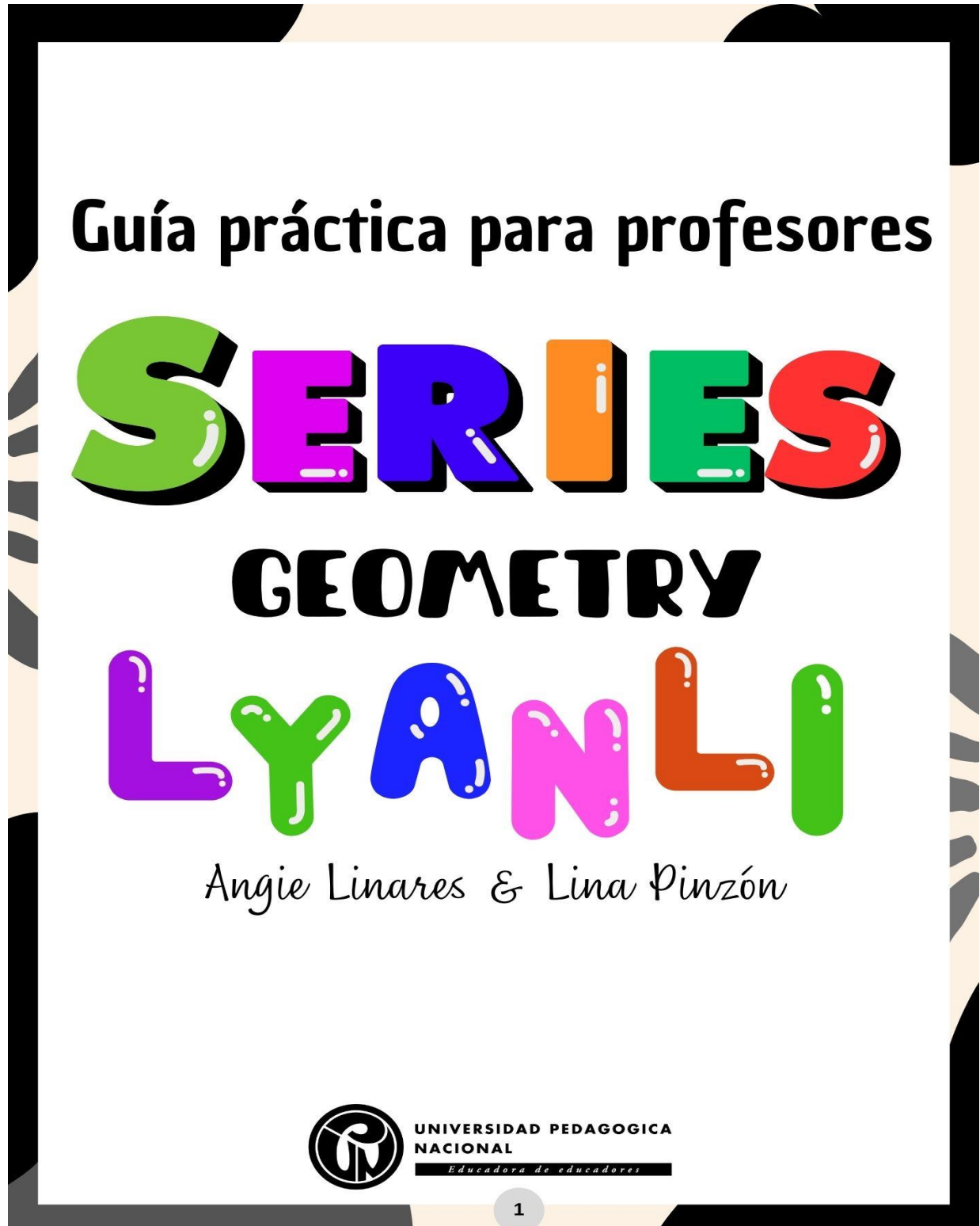
Otras series  
geométricas

<https://www.youtube.com/watch?v=JteQEN1XPyc&t=47s>



## 5.5.11. Anexo J

## Guía práctica para profesores



Series Geometry LyAnLi

## Tareas matemáticas para la enseñanza y el aprendizaje de series geométricas convergentes

### Guía práctica para docentes

Título original: Series Geometry LyAnLi

**Autoras:** Linares Linares Angie Lorena  
Pinzón Amado Lina Johana  
Maestras de matemáticas en formación inicial.  
Licenciatura en matemáticas UPN.

**Revisado:** Mora Mendieta Lyda Constanza  
Profesora de UPN

Universidad Pedagógica Nacional  
Facultad de Ciencia y Tecnología  
Licenciatura en Matemáticas  
2024  
Bogotá D. C., Colombia



UNIVERSIDAD PEDAGOGICA  
NACIONAL

*Educadora de educadores*

# ÍNDICE

*Series Geometry LyAnLi*

<b>Objetivos de enseñanza y aprendizaje.....</b>	<b>5</b>
<b>Estándares básicos de competencia matemáticas.....</b>	<b>6</b>
<b>Serie geométrica.....</b>	<b>7</b>
<b>Elementos de Serie geométrica.....</b>	<b>8</b>
<b>Material didáctico.....</b>	<b>11</b>
<b>Kits Serie Geometry LYANLI.....</b>	<b>14</b>
<b>Secuencias de tareas.....</b>	<b>15</b>
<b>Tarea 1. Ambientación.....</b>	<b>16</b>
<b>Tarea 2. Reconoce el material.....</b>	<b>22</b>
<b>Tarea 2.1. En sus marcas listo, ¡Arma!.....</b>	<b>23</b>
<b>Tarea 2.2. Representación de fracciones.....</b>	<b>26</b>
<b>Tarea 2.3. Selecciona la pareja ideal.....</b>	<b>33</b>
<b>Tarea 3. Identificar lo elementos que componen la serie.....</b>	<b>35</b>
<b>Tarea 3.1. Identificación de los términos y sumas parciales.....</b>	<b>36</b>
<b>Tarea 3.2. Identificación de la razón común .....</b>	<b>49</b>
<b>Tarea 3.3. Identificación de la convergencia .....</b>	<b>53</b>
<b>Tarea 4. Recopilación de los resultados obtenidos.....</b>	<b>60</b>
<b>Tarea 5. Expresión algebraica general.....</b>	<b>67</b>
<b>Videos de cierre.....</b>	<b>71</b>

# Presentación

La guía que presentamos, titulada "Tareas matemáticas para la enseñanza y aprendizaje de las series geométricas", es fruto del trabajo de grado titulado "Material didáctico para la enseñanza y aprendizaje de las series geométricas", realizado para obtener el título de licenciatura en matemáticas en la Universidad Pedagógica Nacional.

Las tareas que se disponen en esta guía son para usar como complemento al material didáctico "Series Geometry LyAnLi", material diseñado por las mismas autoras de esta guía, inspiradas en el Canal de YouTube Mathematical Visual Proofs, se constituyen en un recurso para la enseñanza de las series geométricas convergentes.

En primer lugar, se presentan los objetivos de enseñanza y aprendizaje que guían la implementación de las tareas; además, se presentan los estándares básicos de competencias matemáticas asociados a las tareas propuestas MEN (2006).

Seguidamente, se realiza una breve exposición sobre el objeto matemático que se aborda, las series geométricas. También, se realiza una descripción de los seis kits que componen el material didáctico "Series Geometry LyAnLi", los cuales son: Serie Caracolí, Serie Cola-Dino, Serie Cruz-griega, Serie Pinski, Serie Mountain y Serie Fish. Cada kit incluye una presentación de los elementos que lo conforman.

Finalmente, se detalla cada una de las tareas diseñadas, acompañadas de fotografías del material didáctico «Series Geometry LyAnLi». Se incluyen instrucciones detalladas para realizar las tareas, acompañadas de guías de apoyo para su desarrollo, guías que pueden ser usadas directamente en el aula, tomando copias de estas.

## Objetivos de enseñanza y aprendizaje

### Objetivos de enseñanza

- Apoyar la enseñanza de las series geométricas convergentes a través del uso de material didáctico acompañado de tareas que faciliten su comprensión.
- Diseñar tareas que permitan identificar los elementos que componen la serie geométrica convergente mediante el uso del material didáctico construido para tal fin.

### Objetivos de aprendizaje

- Identificar los elementos que componen la serie geométrica convergente mediante el material didáctico LyAnLi.
- Relacionar el lenguaje algebraico y el lenguaje visual, mediante la representación de las sumas parciales de las series geométricas convergentes
- Aproximar a los estudiantes al concepto del infinito.
- Lograr desarrollar procesos inductivos, mediante el uso materia didáctico.

## Estándares básicos de competencias matemáticas MEN (2006). Series Geometry LyAn

A continuación, se presentan los estándares básicos de competencias matemáticas relacionados con las tareas propuestas:

**Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.**

Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.

1. Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a pruebas conjeturas.
2. Análisis de los procesos infinitos que subyacen en las notaciones decimales.

## Serie geométrica

Una serie geométrica es una serie cuyos sumandos, salvo el primero, es igual al anterior multiplicado por un número constante llamado razón común, representada por  $r$ ,  $r \in \mathbb{R}$ . Es decir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \dots$$

Estos son algunos ejemplos de series geométricas:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} \dots$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} 5^n = 5 + 25 + 125 + \dots$$

## Elementos de Serie geométrica

Sea la serie geométrica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \dots$$

**a**: primer término y es una constante

**r**: razón común

$S_n$  : Sucesión de sumas parciales de la serie.

Esto es:

$$S_1 = a$$

$$S_2 = a + ar$$

$$S_3 = a + ar + ar^2$$

...

$$S_n: a + ar + ar^2 + \dots + ar^n$$

**r** y **a** números reales.

Así, para la serie; esta es:

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

Se tiene que:

Primer término:  $a=1/2$

Razón común:  $r=1/2$

Y su sucesión de sumas parciales es:

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n}$$

A continuación, se encuentran las primeras cuatro sumas parciales de esta serie:

$$S_n : \frac{1}{2} = 0,5$$

$$S_n : \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0,75$$

$$S_n : \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0,875$$

$$S_n : \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16} = 0,9375$$

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512} + \frac{1}{1024} = 0,99902$$

Podemos concluir entonces que sus sumas se aproximan a uno, es decir la serie converge a uno.

Ahora, si se considera la serie geométrica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 5^n = 1 + 5 + 25 + 125 + \dots$$

Se tiene que:

$$a=1 \text{ y } r=5$$

Y sus sumas parciales:

$$Q_1 = 1 = 1$$

$$Q_2 = 1 + 5 = 6$$

$$Q_3 = 1 + 5 + 25 = 31$$

$$Q_4 = 1 + 5 + 25 + 125 = 156$$

...

$$Q_{10} = 1 + 5 + 25 + 125 + 625 + 3125 + 15625 + 78125 + 390625 + 1953125 = 2441406$$

Como se observa, sus sumas parciales cada vez son más grandes, es decir, no se aproximan a un valor en específico, entonces la serie diverge.

En consecuencia, algunas series geométricas son convergentes y otras no.

Entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot r^{n-1} = a + ar + ar^2 + \dots + \dots$$

Tal que  $a$  es una constante y  $r \in \mathbb{R}$ , la serie geométrica diverge si  $|r| \geq 1$  y converge al valor  $\frac{a}{1-r}$  si  $|r| < 1$

Las tareas que se presentan en esta guía, así como el material didáctico al que estas acompañan, están diseñadas para la enseñanza de series geométricas convergentes.

## Material Didáctico

El material “Series Geometry LyAnLi”, ha sido creado en el marco del trabajo de grado: “Material didáctico para la enseñanza y aprendizaje de las series geométricas” desarrollado por las maestras en formación profesional inicial Lina Pinzón y Angie Linares, dirigido por la profesora Lyda Mora. Está compuesto por seis kits llamados: Serie Caracolí, Serie Cola-Dino, Serie Cruz-griega, Serie Pinski, Serie Mountain y Serie Fish. Cada uno de los kits está compuesto por:

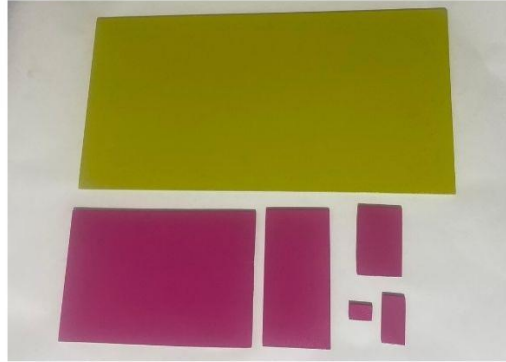
1. Piezas que conforman la serie con su respectivo marco. Estas piezas tienen reverso y anverso.



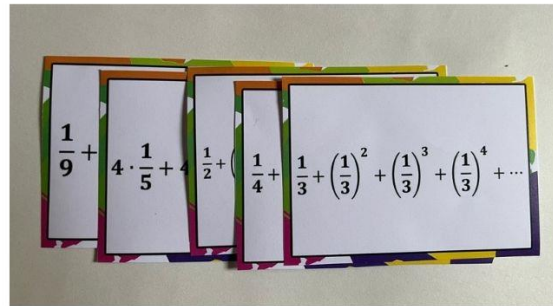
Reverso del material principal



2. Piezas complementarias, por ejemplo:



3. Set de expresiones algebraicas



4. Set de fraccionarios



5. Set de fichas con las letras A, B, C, D, E, F, G, H y I



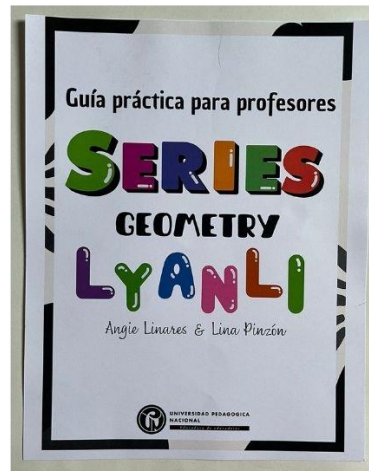
6. Imagen de la serie y clasificación de las piezas.



7. Ficha técnica del material, en la que se describen algunas características y elementos que componen el material.



8. Cuadernillo (guía práctica para profesores), en el cual se presentan las cinco tareas a desarrollar con el material.



A continuación, se muestran todos los kits con su respectivo nombre.

## Kits Series Geometry LYANLI

**Serie Caracolí**



**Serie Cola-Dino**



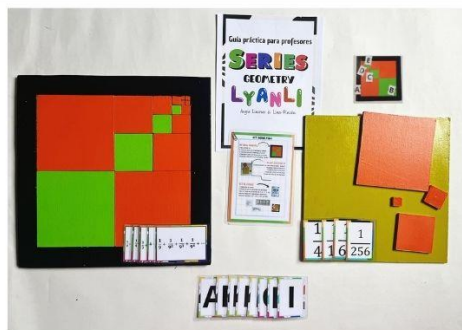
**Serie Cruz-Griega**



**Serie Pinski**



**Serie Fish**



**Serie Mountain**



## Secuencia de tareas

Enseguida se presenta la secuencia de tareas que se proponen llevar a cabo para el cumplimiento de los objetivos antes mencionados. Se insiste en seguir el orden que se sugiere y apoyar de manera continua a los estudiantes.

Las tareas son las siguientes:

- **Tarea 1.** Ambientación “Concéntrese”.
- **Tarea 2.** Reconoce el material.
- **Tarea 2.1.** En sus marcas listo, ¡Arma!
- **Tarea 2.2.** Representación de fracciones
- **Tarea 2.3.** Selecciona la pareja ideal.
- **Tarea 3.** Identificar lo elementos que componen la serie.
- **Tarea 3.1.** Identificación de los términos y sumas parciales.
- **Tarea 3.2.** Identificación de la razón común-
- **Tarea 3.3.** Identificación de la convergencia.
- **Tarea 4.** Recopilación de los resultados obtenidos.
- **Tarea 5.** Expresión algebraica general.
- **Tarea 6.** Videos de cierre.

# Tarea 1

## Ambientación

### Concéntrese

Series Geometry LyAnLi

#### Tarea 1. Ambientación

Para iniciar, se considera importante recordar algunos conocimientos previos que serán necesarios para el desarrollo de las siguientes tareas. Se plantea, entonces, un “Concéntrese”, con este se abordan conceptos matemáticos como: representación de números fraccionarios con fracciones y algunas de sus representaciones gráficas asociadas con figuras geométricas, partes de una fracción, adición de números fraccionarios con fracciones, potenciación, y representación decimal asociada a una fracción.

El “Concéntrese” se construyó en Power Point. Lo deseable es proyectarlo, pero si esto no es posible, se puede diseñar manualmente.

La partida inicia seleccionando un estudiante al azar, quien tendrá que elegir una pareja de cartas, el estudiante deberá responder si son o no parejas, en caso de que responda:

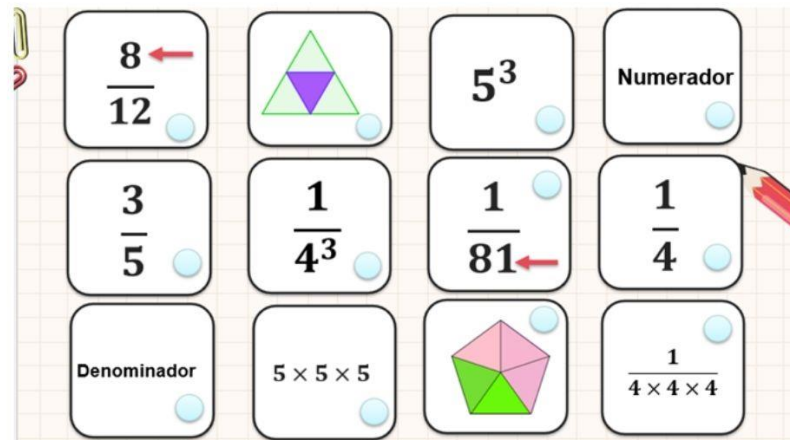
**No:** se oculta la pareja de nuevo, así sea correcta

**Sí:** debe responder por qué son pareja

Si el estudiante no puede explicar, no entiende o muestra alguna confusión al responder si son o no pareja, el profesor intervendrá haciendo preguntas que lleven a otros estudiantes a hacer relaciones que les permitan decidir si son o no son pareja, con el objetivo de aclarar y resolver inquietudes en los estudiantes.

Series Geometry LyAnLi

Las fichas que se proponen para el concéntrese son las siguientes

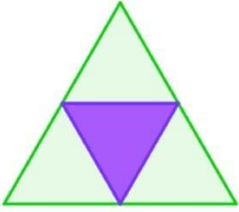


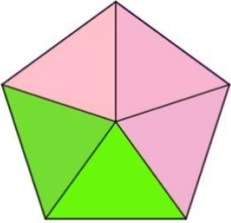
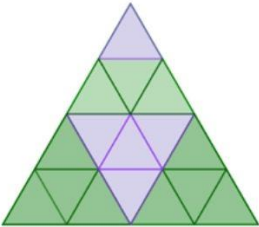
## Series Geometry LyAnLi

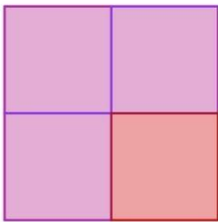


$\frac{1}{64}$		$\frac{10}{81}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$
$\frac{1}{9} + \frac{1}{81}$	$0,\bar{6}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{8}$	$0,015$	

A continuación, las parejas que se hacen:

$\frac{1}{81} \leftarrow$	Denominador
$\frac{8}{12} \leftarrow$	Numerador
$5^3$	$5 \times 5 \times 5$
$\frac{1}{4^3}$	$\frac{1}{4 \times 4 \times 4}$
$\frac{1}{4}$	

$\frac{3}{5}$	
$\frac{1}{64}$	$0,015$
$\frac{2}{3}$	$0,\overline{6}$
$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$	
$\frac{1}{9} + \frac{3}{81}$	$\frac{10}{81}$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$	$\frac{7}{8}$
	$\frac{3}{4}$

Terminado el juego anterior se dan las siguientes indicaciones respecto al uso del material, aclarando que las tareas que siguen están diseñadas con el uso de un material para lo cual será necesario utilizar los conceptos recordados o reforzados en el “Concéntrense”:

### *Indicaciones para el buen uso del material*

- No forzar el encaje de las piezas en el marco, se puede romper.
- No rayar las piezas.
- No botar las piezas del material.
- No utilizar el material para otras actividades fuera de las ya planteadas.

## Tarea 2

# Reconoce el material

Para dar inicio con las tareas se pedirá a los estudiantes que conformen grupos de cinco a seis personas. Cada grupo será nombrado de acuerdo con el nombre del kit asignado; seguidamente, a medida que se van desarrollando las tareas propuestas se irá entregando parte del kit necesario para el cumplimiento de las tareas.

*NOTA: Cada grupo debe desarrollar todas las tareas propuestas con el material entregado inicialmente; es decir, el material no se va a rotar.*

Con esta tarea llamada “Reconoce el material”, se espera que el estudiante manipule, mueva y organice el material, para ello se proponen las siguientes tareas:

**La tarea consta de tres partes:**

- 2.1. En sus marcas listo, ¡Arma!
- 2.2. Representación de fracciones.
- 2.3. Selecciona la pareja ideal.

## Tarea 2.1

### En sus marcas listos, ¡Arma!

Inicialmente se formarán grupos de cinco a seis estudiantes, a cada grupo se le hará entrega de un material desarmado; cada grupo deberá armarlo de la manera que considere correcta, antes de iniciar la tarea se dan las siguientes indicaciones:

- Para armar el material, se debe tener en cuenta el nombre del material.
- Tener en cuenta los colores, tamaños y forma de las piezas que conforman el material.

En caso de que los estudiantes presenten confusiones, el profesor los guiará.

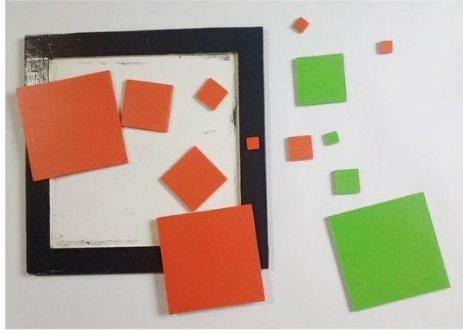
A continuación, se muestra cómo se hará entrega del material (desarmado) -columna 1- y cómo se espera que se arme el material -columna 2.

<b>SERIE CARACOLÍ</b>	
MATERIAL DESARMADO	MATERIAL ARMADO
	

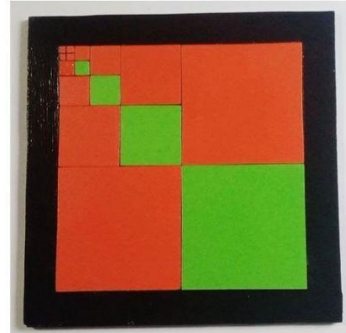
**SERIE COLA-DINO****MATERIAL DESARMADO****MATERIAL ARMADO****SERIE CRUZ-GRIEGA****MATERIAL DESARMADO****MATERIAL ARMADO****SERIE PINSKI****MATERIAL DESARMADO****MATERIAL ARMADO**

**SERIE FISH**

**MATERIAL DESARMADO**



**MATERIAL ARMADO**

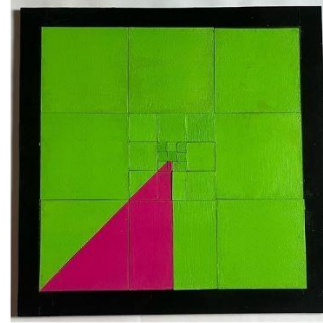


**SERIE MOUNTAIN**

**MATERIAL DESARMADO**



**MATERIAL ARMADO**



## Tarea 2.2

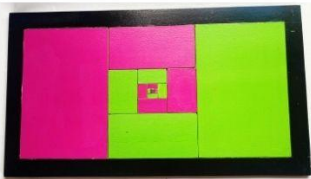
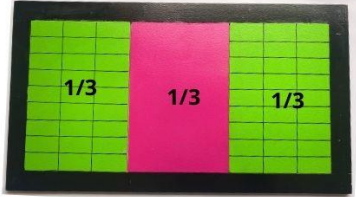



Series Geometry LyAnLi



### Representación de fracciones

Con ayuda del material, se pide a cada grupo que represente las fracciones indicadas en el set de fracciones entregados, se les dice que tengan en cuenta que el material tiene un reverso, que también lo pueden utilizar para la representación de las fracciones con el material entregado. Por último, se da las siguientes indicaciones:

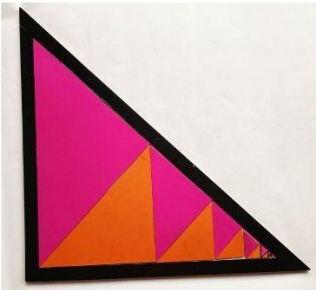
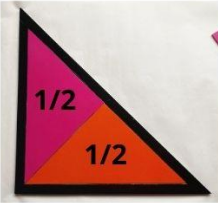
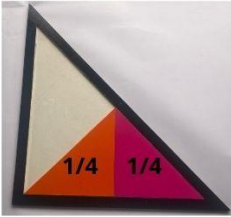
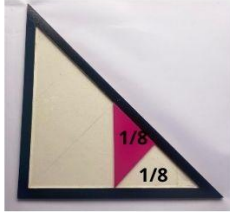
1. Usar TODO el material como el TODO o la UNIDAD para representar las fracciones que se solicitan.
2. Tener en cuenta los colores para representar las fracciones.
3. No sobreponer piezas en otras para representar la fracción.

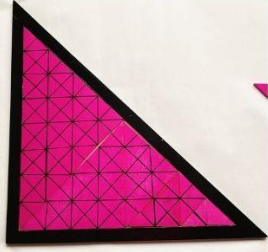
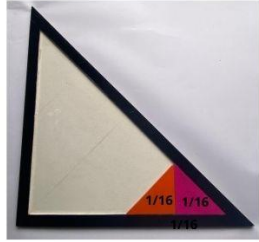
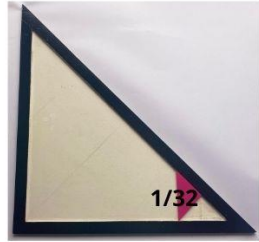
En seguida, se encuentra las fracciones a representar con cada kit:

SERIE CARACOLÍ		
MATERIAL	FRACCIÓN A REPRESENTAR	POSIBLES RESPUESTAS
	$\frac{1}{3}$	
<p>Dar vuelta al material "reverso"</p> 	$\frac{1}{9}$	
	$\frac{1}{27}$	


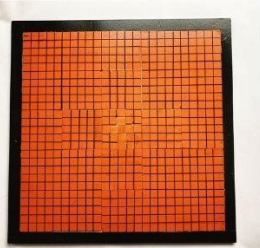
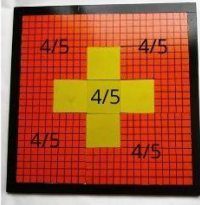


	$\frac{1}{81}$	
	$\frac{1}{243}$	


**SERIE COLA-DINO**

MATERIAL	FRACCIÓN A REPRESENTAR	POSIBLES RESPUESTAS
 <p>Dar vuelta al material "reverso"</p>	$\frac{1}{2}$	
	$\frac{1}{4}$	
	$\frac{1}{8}$	






	$\frac{1}{16}$	
	$\frac{1}{32}$	


**SERIE CRUZ-GRIEGA**

MATERIAL	FRACCIÓN A REPRESENTAR	POSIBLES RESPUESTAS
 <p>Dar vuelta al material "reverso"</p> 	$4 \cdot \frac{1}{5}$	
	$4 \cdot \frac{1}{25}$	
	$4 \cdot \frac{1}{125}$	

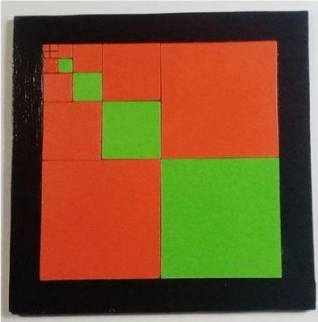
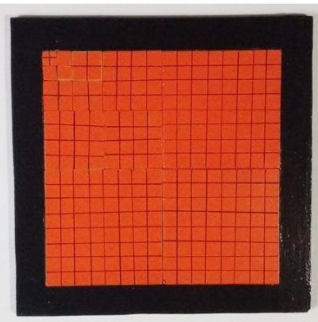




	$4 \cdot \frac{1}{625}$	
--	-------------------------	---

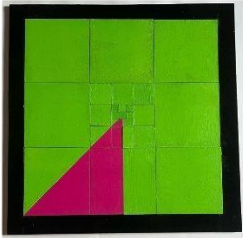





**SERIE PINSKI**

MATERIAL	FRACCIÓN A REPRESENTAR	POSIBLES RESPUESTAS
	$\frac{1}{4}$	
<p>Dar vuelta al material "reverso"</p>	$\frac{1}{16}$	
	$\frac{1}{64}$	

	$\frac{1}{256}$	
--	-----------------	--

### SERIE FISH

MATERIAL	FRACCIÓN A REPRESENTAR	POSIBLES RESPUESTAS
 <p style="text-align: center; margin-top: 10px;">Dar vuelta al material "reverso"</p> 	$\frac{1}{4}$	
	$\frac{1}{16}$	
	$\frac{1}{64}$	
	$\frac{1}{256}$	

SERIE MOUNTAIN		
MATERIAL	FRACCIÓN A REPRESENTAR	POSIBLES RESPUESTAS
	$\frac{1}{9}$	
<p>Dar vuelta al material "reverso"</p> 	$\frac{1}{81}$	
	$\frac{1}{729}$	

A continuación, se encuentra la guía que se entregara a cada grupo o estudiante para el desarrollo de esta tarea.

Series Geometry LyAnLi

## Tarea 2.2

**Nombre:** \_\_\_\_\_**Fecha:** \_\_\_\_\_**Serie:** \_\_\_\_\_

Con el material entregado representa las fracciones dadas en el set de fraccionarios y completa la siguiente tabla, si encuentras otras representaciones de la misma fracción, dibuja las posibles, siempre que no sean iguales a las ya encontradas.

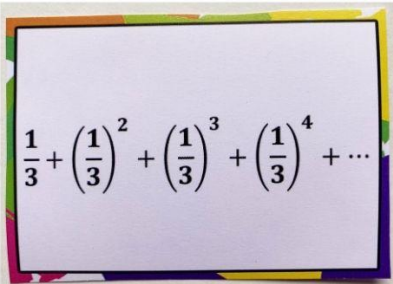
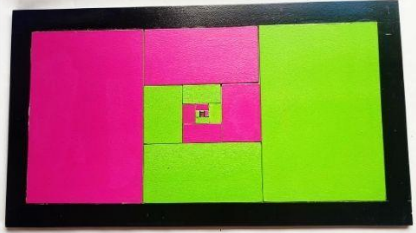
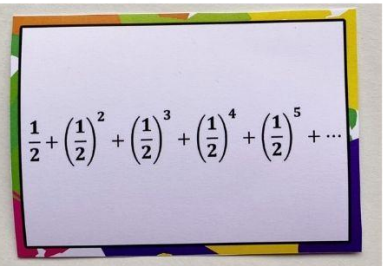
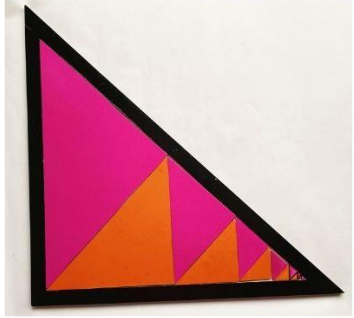
Fracción	Representación gráfica de la fracción con el material entregado

Licenciatura en Matemáticas

## Tarea 2.3

# Selecciona la pareja ideal

A cada grupo se le hace entrega de el set de fichas que contienen varias expresiones algebraicas. Se pide a cada grupo que elija una de las fichas entregadas, la que considere es la asociada al material, para ello se les dice que deben tener en cuenta las fracciones que se muestran en la expresión simbólica (numérica) y las representadas en la tarea 2.2, esto en caso de ser necesario. Se espera que cada grupo asocie las expresiones algebraicas con el material de la siguiente manera:

SERIE CARACOLÍ	
Expresión simbólica	Material didáctico
 $\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \dots$	
SERIE COLA-DINO	
Expresión simbólica	Material didáctico
 $\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \dots$	

**SERIE CRUZ-GRIEGA**

Expresión simbólica

$$4 \cdot \frac{1}{5} + 4 \cdot \frac{1}{5^2} + 4 \cdot \frac{1}{5^3} + \dots$$

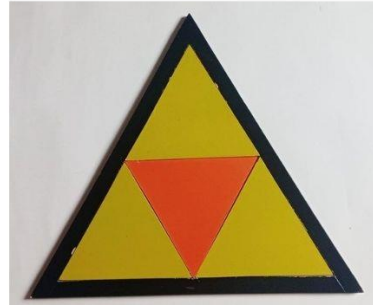
Material didáctico

**SERIE PINSKI**

Expresión simbólica

$$\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left(\frac{1}{4}\right)^4 + \dots$$

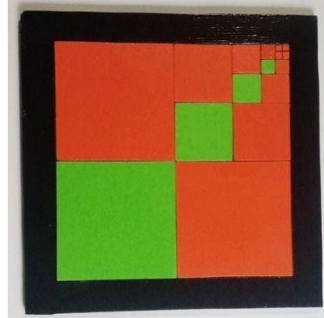
Material didáctico

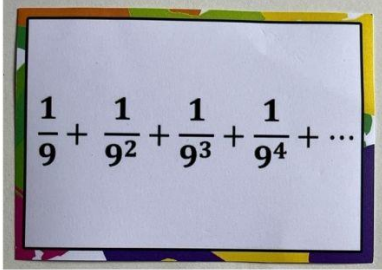
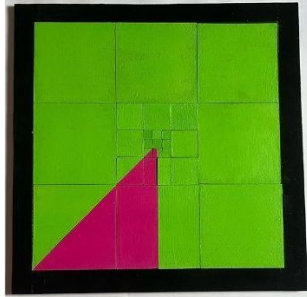
**SERIE FISH**

Expresión simbólica

$$\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left(\frac{1}{4}\right)^4 + \dots$$

Material didáctico



SERIE MOUNTAIN	
Expresión simbólica	Material didáctico
 $\frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{9^4} + \dots$	

Antes de iniciar la siguiente tarea, se indica a los grupos de trabajo que la expresión algebraica seleccionada es conocida como la **expresión algebraica asociada al material**, con la que se relacione cada una de las fracciones que la componen con las particiones que tiene el material.

## Tarea 3

### Identificar los elementos que componen la serie

Esta tarea esta dividida en tres partes.

Tarea 3.1. Identificación de los términos de las serie y sumas parciales.

Tarea 3.2. Identificación de la razón común.

Tarea 3.3. Identificación de la convergencia.

## Tarea 3.1

### Identificación de los términos de las series y sumas parciales

Con esta tarea se espera que los estudiantes logren identificar los elementos que componen la serie, además de encontrar las sumas parciales de la misma. Para ello, se hace entrega, a cada grupo de estudiantes, de un set de fichas con las letras A, B, C, D, F, G, H y I una imagen de la serie con las letras, con el propósito que cada grupo nombre cada una de las piezas del material, de la siguiente manera:



**SERIE CARACOLÍ**



**PARTE A**

**PARTE B**



**PARTE C**

**PARTE D**

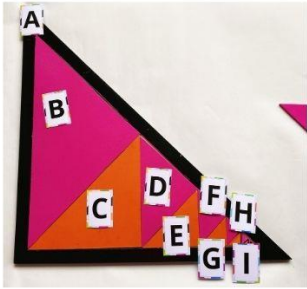
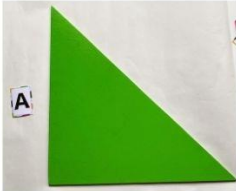
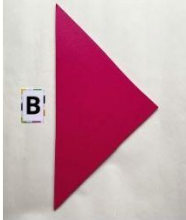

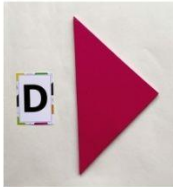






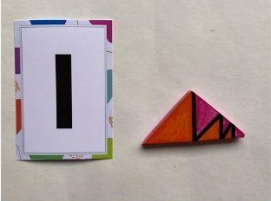
**PARTE E**

**PARTE F**

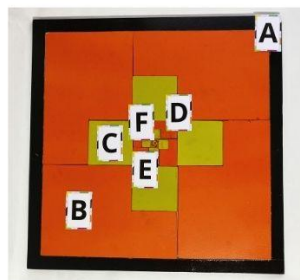


<b>PARTE G</b>


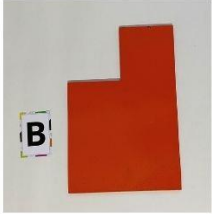





<b>SERIE COLA-DINO</b>	
	
<b>PARTE A</b>	<b>PARTE B</b>
	
<b>PARTE C</b>	<b>PARTE D</b>
	

<p><b>PARTE E</b></p>	<p><b>PARTE F</b></p>
	
<p><b>PARTE G</b></p>	<p><b>PARTE H</b></p>
	
<p><b>PARTE I</b></p>	

**SERIE CRUZ-GRIEGA**



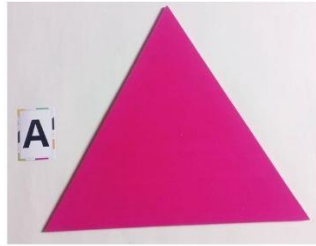
<p><b>PARTE A</b></p>	<p><b>PARTE B</b></p>
-----------------------	-----------------------

	
<p><b>PARTE C</b></p>	<p><b>PARTE D</b></p>
	
<p><b>PARTE E</b></p>	<p><b>PARTE F</b></p>
	

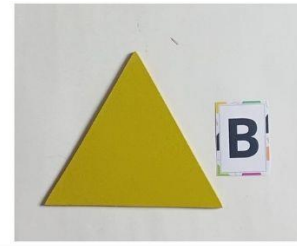
## SERIE PINSKI



**PARTE A**



**PARTE B**



**PARTE C**



**PARTE D**



**PARTE E**



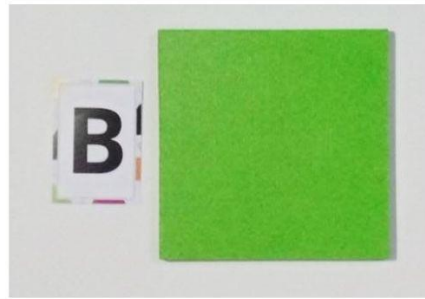
**PARTE F**

### SERIE FISH



PARTE A

PARTE B



PARTE C

PARTE D



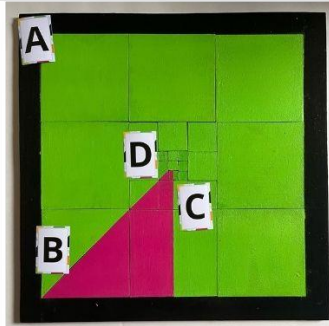
Series Geometry LyAnLi

**PARTE E**



**PARTE F**

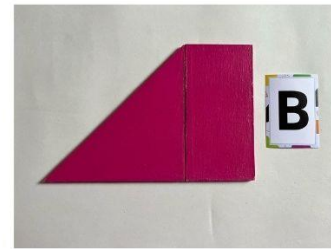
## SERIE MOUNTAIN



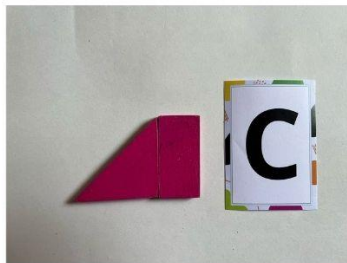
PARTE A



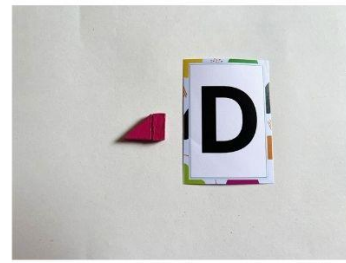
PARTE B



PARTE C



PARTE D



Series Geometry LyAnLi

Posteriormente, se pide que cada grupo responda las siguientes preguntas y complete la tabla de acuerdo con lo observado en el material.

A continuación, encuentra la guía, la cual se entrega a cada grupo de estudiantes para el desarrollo de la tarea.

*Nota:* Dependiendo la Serie que tenga cada grupo se les pide que solucionen los puntos de acuerdo con la cantidad de piezas (de A a I) que tiene el material asignado.

## Tarea 3.1

**Nombre:** \_\_\_\_\_

**Fecha:** \_\_\_\_\_

**Serie:** \_\_\_\_\_

observa el material responde las siguientes preguntas y completa.

**1.**

¿Cuál fracción representa la pieza B con respecto a la pieza A?

PIEZAS	FRACCION

**2.**

**a.** ¿Cuál fracción representa la pieza C con respecto a la pieza A?

**b.** Suma la fracción obtenida en el punto anterior con la obtenida en este punto, escribe la respuesta como fracción y su notación decimal.

PIEZAS	FRACCIÓN	ADICCIÓN INDICADA DE FRACCIONES	NOTACIÓN DECIMAL DE LAS SUMAS DE FRACCIONES

**2.1**

**a.** ¿Cuál fracción representa la pieza D con respecto a la pieza A?

**b.** De la misma manera, suma las fracciones obtenidas en los puntos anteriores con la obtenida en este.

PIEZAS	FRACCIÓN	ADICCIÓN INDICADA DE FRACCIONES	NOTACIÓN DECIMAL DE LAS SUMAS DE FRACCIONES

Licenciatura en Matemáticas

**2.2**

- a. ¿Cuál fracción representa la pieza E con respecto a la pieza A?  
 b. De la misma manera, suma las fracciones obtenidas en los puntos anteriores con la obtenida en este.

PIEZAS	FRACCIÓN	SUMA DE FRACCIONES	NOTACIÓN DECIMAL DE LAS SUMAS DE FRACCIONES

**2.3**

- a. ¿Cuál fracción representa la pieza F con respecto a la pieza A?  
 b. De la misma manera, suma las fracciones obtenidas en los puntos anteriores con la obtenida en este.

PIEZAS	FRACCIÓN	SUMA DE FRACCIONES	NOTACIÓN DECIMAL DE LAS SUMAS DE FRACCIONES

**2.4**

- a. ¿Cuál fracción representa la pieza G con respecto a la pieza A?  
 b. De la misma manera, suma las fracciones obtenidas en los puntos anteriores con la obtenida en este.

PIEZAS	FRACCIÓN	SUMA DE FRACCIONES	NOTACIÓN DECIMAL DE LAS SUMAS DE FRACCIONES

*Series Geometry LyAnLi*

**3.**

Establece una relación entre los resultados obtenidos en la columna cuatro (notación decimal) y lo diligenciado en la columna tres (adición indicada de fracciones). Escríbela con tus palabras.



Al finalizar la tarea, el profesor “a modo de conclusión” menciona que, las sumas realizadas en los puntos anteriores, se les llama “**sumas parciales**” de una serie y cada uno de sus sumandos “**términos**” de la serie, además se mencionan las relaciones o similitudes encontradas en las fracciones obtenidas, es decir, al escribir las fracciones obtenidas de las sumas parciales en su notación decimal, se puede observar que se va acercando a un número en específico, que es conocido como **convergencia de la serie**.

## Tarea 3.2

### Identificación de la razón común

Con esta segunda parte de la tarea **3**, se espera que los estudiantes logren encontrar la “Razón común” de los términos que componen la serie; al igual que las tareas anteriores, se hará entrega a cada grupo de una guía en la que deberán responder a las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál fracción representa la pieza B con respecto a la pieza A?
2. ¿Cuál fracción representa la pieza C con respecto a la pieza B?
3. ¿Cuál fracción representa la pieza D con respecto a la pieza C?
4. ¿Cuál fracción representa la pieza E con respecto a la pieza D?
5. Plantea una conclusión respecto a lo hallado en los numerales anteriores, escribe dicha conclusión de la manera más clara y completa posible.

Seguidamente encuentra la guía entregada a cada grupo o estudiante para el desarrollo de esta tarea.

*Nota:* Dependiendo la Serie que tenga cada grupo se les pedirá que solucionen los puntos de acuerdo a la cantidad de piezas (de A a I) que tiene el material asignado

## Tarea 3.2

**Nombre:** \_\_\_\_\_

**Fecha:** \_\_\_\_\_

**Serie:** \_\_\_\_\_

Con base al material entregado y lo hasta ahora realizado, responder a las siguientes preguntas.

**1.**

¿Cuál fracción representa la pieza B con respecto a la pieza A?

PIEZAS	FRACCIÓN

**2.**

¿Cuál fracción representa la pieza C con respecto a la pieza B?

PIEZAS	FRACCIÓN

**2.1.**

¿Cuál fracción representa la pieza D con respecto a la pieza C?

PIEZAS	FRACCIÓN

**2.2.**

¿Cuál fracción representa la pieza E con respecto a la pieza D?

PIEZAS	FRACCIÓN

**2.3.**

¿Cuál fracción representa la pieza F con respecto a la pieza E?

PIEZAS	FRACCIÓN

**2.4.**

¿Cuál fracción representa la pieza G con respecto a la pieza F?

PIEZAS	FRACCIÓN

**2.5.**

¿Cuál fracción representa la pieza H con respecto a la pieza G?

PIEZAS	FRACCIÓN

**2.6.**

¿Cuál fracción representa la pieza I con respecto a la pieza H?

PIEZAS	FRACCIÓN

*Series Geometry LyAnLi*

**3.**

Plantea una conclusión respecto a lo hallado en los numerales anteriores, escribe dicha conclusión de la manera clara y completa posible.



5

Al finalizar la tarea, el profesor “a modo de conclusión” mencionarán que la relación encontrada en los términos de las series, esto es, entre las fracciones de las piezas dadas respecto a todo el material, se le llama “**Razón Común**”.

## Tarea 3.3

### Identificación de la convergencia

En esta tarea, se espera que el estudiante identifique el valor al que converge cada una de las series que han representado con el material didáctico, para ello, se pedirá a cada grupo que observe el material armado y encuentre la relación de las siguientes piezas de las series:

1. Serie **Caracolí** las piezas *verdes* con la *amarilla* “unidad”.
2. Serie **Cola-Dino** las piezas *fucsias* con la *pieza verde* “unidad”.
3. Serie **Cruz-Griega** las piezas *naranjas* con la *pieza verde* “unidad”.
4. Serie **Pinski** las piezas *naranjas* con la *pieza fucsia* “unidad”.
5. Serie **Fish** las piezas *verdes* con la *pieza amarilla* “unidad”.
6. Serie **Mountain** las piezas *fucsias* con la *naranja* “unidad”

Esta relación se conoce como **convergencia de la serie**; siendo el material didáctico una representación parcial de las sumas parciales de las series, puesto que, las series utilizadas para la elaboración del material son series infinitas, lamentablemente en el material no es posible capturarlo.

A continuación, se mostrarán la representación algébrica completa de las series:

Material didáctico	Expresión algebraica completa
<b>Serie Caracolí</b>	$\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \left(\frac{1}{3}\right)^5 + \dots$
<b>Serie Cola-Dino</b>	$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \dots$
<b>Serie Cruz-Griega</b>	$4 \cdot \frac{1}{5} + 4 \cdot \frac{1}{25} + 4 \cdot \frac{1}{125} + \dots$
<b>Serie Pinski</b>	$\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left(\frac{1}{4}\right)^4 + \dots$
<b>Serie Fish</b>	$\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left(\frac{1}{4}\right)^4 + \dots$
<b>Serie Mountain</b>	$\frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{9^4} + \dots$

Para lograr el objetivo se dan las siguientes instrucciones orientadoras:

- Identifica la unidad y ubícala en el marco.
- Ubica la fracción que representa el primer término (teniendo como referencia la serie completa), de la misma manera ubica el segundo y así sucesivamente.
- Ahora responde, ¿Qué fracción representan las piezas en relación con la unidad?

Se espera que cada grupo asocie su material a la siguiente fracción, se finaliza la tarea, indicando que la fracción encontrada por cada uno de los grupos de trabajo se llama “**convergencia**” de la serie. En la siguiente tabla se halla la convergencia de cada serie .

**SERIE CARACOLÍ**

MATERIAL DIDÁCTICO	NÚMERO AL QUE CONVERGE	RESENTACIÓN GRÁFICA DE LA CONVERGENCIA
	$\frac{1}{2}$	

**SERIE COLA-DINO**

MATERIAL DIDÁCTICO	NÚMERO AL QUE CONVERGE	RESENTACIÓN GRÁFICA DE LA CONVERGENCIA
	$1$	

**SERIE CRUZ-GRIEGA**

MATERIAL DIDÁCTICO	NÚMERO AL QUE CONVERGE	RESENTACIÓN GRÁFICA DE LA CONVERGENCIA
	$1$	

**SERIE PINSKI**

MATERIAL DIDÁCTICO	NÚMERO AL QUE CONVERGE	REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA CONVERGENCIA
	$\frac{1}{3}$	

**SERIE FISH**

MATERIAL DIDÁCTICO	NÚMERO AL QUE CONVERGE	REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA CONVERGENCIA
	$\frac{1}{3}$	

**SERIE MOUANTIN**

MATERIAL DIDÁCTICO	NÚMERO AL QUE CONVERGE	REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA CONVERGENCIA
	$\frac{1}{8}$	

Series Geometry LyAnLi

A continuación, se encuentra la tarea que se entrega a cada grupo, se espera que den respuesta a la siguiente pregunta:

Series Geometry LyAnLi

## Tarea 3.3

**Nombre:** \_\_\_\_\_

**Fecha:** \_\_\_\_\_

**Serie:** \_\_\_\_\_

Observen el material armado y encuentren la relación de las **piezas verdes** con la unidad (**pieza amarilla**), para la **serie caracolí**. Es decir ¿Cuál fracción representan todas las **piezas verdes** del total del material?



Licenciatura en Matemáticas

Series Geometry LyAnLi

## Tarea 3.3

**Nombre:** \_\_\_\_\_

**Fecha:** \_\_\_\_\_

**Serie:** \_\_\_\_\_

Observen el material armado y encuentren la relación de las **piezas rosadas** con la unidad (**pieza verde**), para la **serie Cola-Dino** relación. Es decir ¿Cuál fracción representan todas las **piezas fucsias** del total del material?

Licenciatura en Matemáticas

## Tarea 3.3

**Nombre:** \_\_\_\_\_

**Fecha:** \_\_\_\_\_

**Serie:** \_\_\_\_\_

Observen el material armado y encuentren la relación de las **piezas naranjas** con la unidad (**pieza verde**), para la **serie Cruz-Griega**. Es decir ¿Cuál fracción representan todas las **piezas naranjas** del total del material



Licenciatura en Matemáticas

## Tarea 3.3

**Nombre:** \_\_\_\_\_

**Fecha:** \_\_\_\_\_

**Serie:** \_\_\_\_\_

Observen el material armado y encuentren la relación de las **piezas naranjas** con la unidad (**pieza fucsia**), para la **serie pinski**. Es decir ¿Cuál fracción representan todas las **piezas naranja** del total del material?



Licenciatura en Matemáticas

## Tarea 3.3

**Nombre:** \_\_\_\_\_

**Fecha:** \_\_\_\_\_

**Serie:** \_\_\_\_\_

Observen el material armado y encuentren la relación de las **piezas verdes** con la unidad (**pieza amarilla**), para la **serie Fish**. Es decir ¿Cuál fracción representan todas las **piezas verdes** del total del material?



Licenciatura en Matemáticas

## Tarea 3.3

**Nombre:** \_\_\_\_\_

**Fecha:** \_\_\_\_\_

**Serie:** \_\_\_\_\_

1. Observen el material armado y encuentren la relación de las **piezas rosadas** con la unidad (**pieza naranja**), para la **serie Mountain**. Es decir ¿cuál fracción representan todas las **piezas rosadas** del total del material?



Licenciatura en Matemáticas

A modo de conclusión el profesor dice que el resultado obtenido de la tarea anterior se conoce como **convergencia**, es decir, el valor al que converge la serie. Además, se muestra la relación entre lo obtenido en esta tarea con la tarea de las sumas parciales, siendo esta otra manera con la que se puede determinar la convergencia de la serie.

## Tarea 4

### recopilación de los datos obtenidos

Como tarea final se hace entrega “a cada grupo de estudiantes” de una tabla incompleta, la cual tiene como objetivo recoger la información encontrada durante el desarrollo de las tareas anteriores.

Finalmente, el(la) profesor(a) , da las indicaciones para diligenciar cada una de las columnas que componen la tabla:

- **Material entregado:** en este espacio, los estudiantes deberán dibujar el material entregado inicialmente, se espera que incluyan detalles como color, figuras, particiones, etc.
- **Expresión algebraica:** en este apartado los estudiantes deben escribir la expresión algebraica asociada al material entregado.
- **Primer término:** en esta columna, los estudiantes deberán escribir la fracción encontrada en la actividad 3 de la pregunta 1.
- **Términos:** en esta columna los estudiantes deberán escribir las fracciones encontradas en la actividad 3. (solo las fracciones no las sumas).
- **Sumas parciales:** en esta columna, cada grupo deberá escribir las sumas parciales encontradas en la actividad.
- **Convergencia:** en esta parte, los estudiantes deberán ingresar la información encontrada en la tarea 5 del punto 5.

A continuación, se encuentra la tabla que es entregada a cada grupo de estudiantes.


Series Geometry LyAnLi

# Tarea 4

Nombre: \_\_\_\_\_

Fecha: \_\_\_\_\_

Serie: \_\_\_\_\_

#	Expresión Algebraica	Material Entregado	Primer término	Razón Común	Terminos de la Serie	Sumas Parciales	Convergencia
						$S_1 = \frac{1}{3} = 0,33$ $S_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = 0,44$ $S_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} = 0,48$ $S_4 = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} = 0,49$ $S_5 = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} = 0,49$	

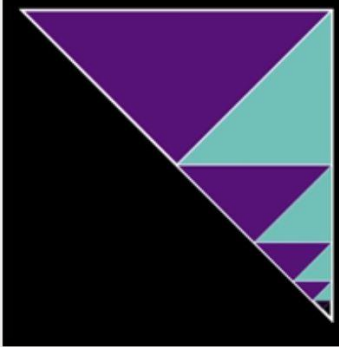
Licenciatura en Matemáticas

# Tarea 4

Nombre: \_\_\_\_\_

Fecha: \_\_\_\_\_

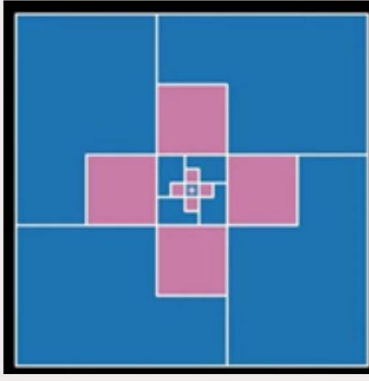
Serie: \_\_\_\_\_

#	Expresión Algebraica	Material Entregado	Primer término	Razón Común	Terminos de la Serie	Sumas Parciales	Convergencia
						$S_1 = \frac{1}{2}$ $S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 0.75$ $S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 0.875$ $S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 0.9375$ $S_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = 0.96875$	

Series Geometry LyAnLi

# Tarea 4

Nombre: \_\_\_\_\_  
 Fecha: \_\_\_\_\_  
 Serie: \_\_\_\_\_

#	Expresión Algebraica	Material Entregado	Primer término	Razón Común	Terminos de la Serie	Sumas Parciales	Convergencia
						$S_1 = \frac{4}{5} = 0.8$ $S_2 = \frac{4}{5} + \frac{1}{25} = 0.96$ $S_3 = \frac{4}{5} + \frac{4}{25} + \frac{4}{125} = 0.992$ $S_4 = \frac{4}{5} + \frac{4}{25} + \frac{4}{125} + \frac{4}{625} = 0.998$ $S_5 = \frac{4}{5} + \frac{4}{25} + \frac{4}{125} + \frac{4}{625} + \frac{4}{3125} = 0.999$	

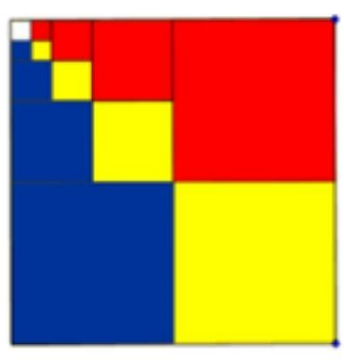
Licenciatura en Matemáticas

# Tarea 4

Nombre: \_\_\_\_\_

Fecha: \_\_\_\_\_

Serie: \_\_\_\_\_

#	Expresión Algebraica	Material Entregado	Primer término	Razón Común	Terminos de la Serie	Sumas Parciales	Convergencia
						$S_1 = \frac{1}{4} = 0.25$ $S_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = 0.31$ $S_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} = 0.32$ $S_4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} = 0.332$ $S_5 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \frac{1}{1024} = 0.333$	


Licenciatura en Matemáticas

# Tarea 4

Nombre: \_\_\_\_\_

Fecha: \_\_\_\_\_

Serie: \_\_\_\_\_

#	Expresión Algebraica	Material Entregado	Primer término	Razón Común	Terminos de la Serie	Sumas Parciales	Convergencia
						$S_1 = \frac{1}{4} = 0.25$ $S_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = 0.31$ $S_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} = 0.32$ $S_4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} = 0.332$ $S_5 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \frac{1}{1024} = 0.333$	

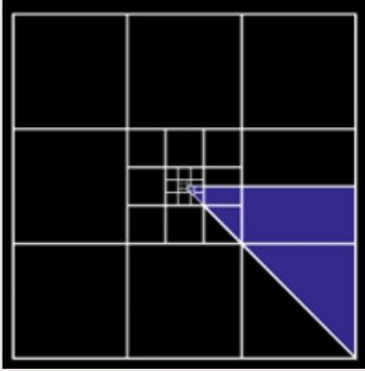
Licenciatura en Matemáticas

# Tarea 4

Nombre: \_\_\_\_\_

Fecha: \_\_\_\_\_

Serie: \_\_\_\_\_

#	Expresión Algebraica	Material Entregado	Primer término	Razón Común	Terminos de la Serie	Sumas Parciales	Convergencia
						$S_1 = \frac{1}{9} = 0.111$ $S_2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{81} = 0.1234$ $S_3 = \frac{1}{9} + \frac{1}{81} + \frac{1}{729} = 0.12482$ $S_4 = \frac{1}{9} + \frac{1}{81} + \frac{1}{729} + \frac{1}{6561} = 0.12498$ $S_5 = \frac{1}{9} + \frac{1}{81} + \frac{1}{729} + \frac{1}{6561} + \frac{1}{59049} = 0.124998$	

Licenciatura en Matemáticas

## Tarea 5

# Expresión algebraica general

Para concluir las tareas propuestas, a modo de cierre, el profesor muestra el uso de la sumatoria y sus propiedades para expresar la forma general algebraica de la serie.

Se define la serie geométrica y sus elementos de la siguiente manera.

**Definición:** Una serie geométrica es una serie cuyos sumandos, salvo el primero, es igual al anterior multiplicado por un número constante llamado razón común, representada por:

$$r, \quad r \in \mathbb{R}.$$

Es decir:

**$a$ : razón**

**$r$ : primer término**

La suma de los términos se expresa de la siguiente manera:

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \dots$$

A continuación, se propone el siguiente ejemplo en donde el profesor en el tablero indica el primer término, su razón común y su expresión algebraica.

## Tarea

Encuentre la expresión algebraica de la serie geométrica con los siguientes datos:

$$r: \frac{1}{10}$$

$$a: \frac{1}{10}$$

El profesor, reescribe la expresión algebraica y sustituyen los datos dados en la actividad de la siguiente manera:

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{10}\left(\frac{1}{10}\right) + \frac{1}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \frac{1}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^3 + \frac{1}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^4 + \dots$$

Y mediante propiedades de la potenciación, se simplifica esta expresión así:

$$\frac{1}{10} + \left(\frac{1}{10}\right)^{1+1} + \left(\frac{1}{10}\right)^{1+2} + \left(\frac{1}{10}\right)^{1+3} + \left(\frac{1}{10}\right)^{1+4} + \dots$$

Obteniendo entonces la siguiente expresión:

$$\frac{1}{10} + \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^3 + \left(\frac{1}{10}\right)^4 + \left(\frac{1}{10}\right)^5 + \dots$$

Para finalizar la actividad, se muestra el uso de las sumatoria y sus propiedades para simplificar la expresión anterior, para ello se tendrá en cuenta la siguiente expresión:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \dots$$

Para poder obtener la expresión corta mediante la expresión de la sumatoria; para ello, se realiza la sustitución de los datos proporcionados en la actividad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{1}{10} + \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^3 + \left(\frac{1}{10}\right)^4 + \left(\frac{1}{10}\right)^5 + \dots$$

Se sustituye entonces los datos de  $r$  y  $a$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10} \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} = \frac{1}{10} + \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^3 + \left(\frac{1}{10}\right)^4 + \left(\frac{1}{10}\right)^5 + \dots$$

Entonces se obtiene la expresión general:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10} \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$$

Para simplificar la expresión se puede utilizar una de las propiedades de la potenciación utilizada anteriormente, de esta manera, obtenemos la siguiente expresión:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n$$

Siendo esta la expresión general de la serie. Con el objetivo de que cada grupo aplique lo aprendido en la explicación anterior, se pide que realicen este mismo procedimiento con las expresiones algebraicas de cada una de las series, para ello se hace entrega de la siguiente guía a cada grupo de trabajo.

## Tarea 5

Nombre: \_\_\_\_\_

Fecha: \_\_\_\_\_

Serie: \_\_\_\_\_

1.

Escribe la expresión algebraica seleccionada de la serie asignada

EXPRESIÓN ALGEBRAICA LARGA

2.

Identifique el valor de **a**: primer término y **r**: razón común.

a: primer término	r: razón común

3.

Escribe la expresión algebraica mediante el uso de la **sumatoria**.

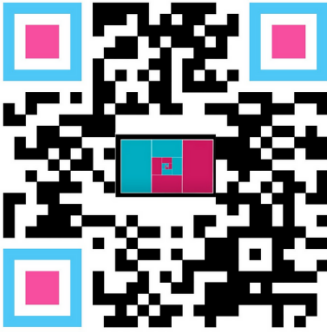
- **Nota:** recuerde usar propiedades de la potencia para simplificar la expresión lo mejor posible


EXPRESIÓN ALGEBRAICA CORTA

Series Geometry LyAnLi

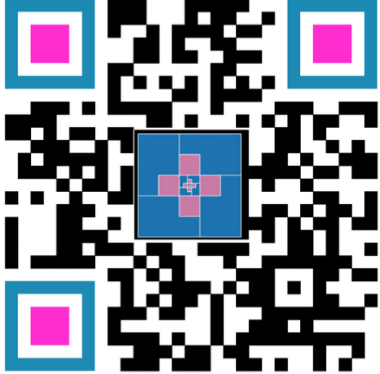
Como **tarea de cierre** y si es gusto del profesor se propone presentar “a todo el grupo de estudiantes” unos videos con una duración máxima de uno a dos minutos, tomados del canal de YouTube “*Mathematical Visual Proofs*”. Los cuales aportan a la conclusión de todo lo realizado, con el material y las tareas, porque permite visualizar las series manipuladas de manera animada. Así se cierran las tareas propuestas alrededor de la convergencias de algunas series geométricas.


A continuación se presenta el código QR de los videos sugeridos

SERIE GEOMÉTRICA	CÓDIGO QR
Serie Caracolí	

SERIE GEOMÉTRICA	CÓDIGO QR
Serie Cola-Dino	

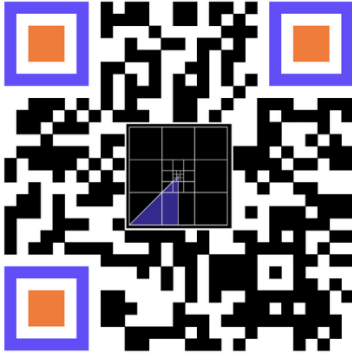
Series Geometry LyAnLi

SERIE GEOMÉTRICA	CÓDIGO QR
<p><b>Serie Cruz-Griega</b></p>	

SERIE GEOMÉTRICA	CÓDIGO QR
<p><b>Serie Pinski</b></p>	

Series Geometry LyAnLi

SERIE GEOMÉTRICA	CÓDIGO QR
<p data-bbox="500 716 695 751"><b>Serie Fish</b></p>	 A QR code with a central graphic of a fish. The fish is composed of a blue rectangle on top, a yellow rectangle on the bottom left, and a red rectangle on the bottom right. The QR code has three yellow square markers at the corners.

SERIE GEOMÉTRICA	CÓDIGO QR
<p data-bbox="440 1398 748 1434"><b>Serie Mountain</b></p>	 A QR code with a central graphic of a mountain. The mountain is a square divided into a grid, with a blue triangle on the left side. The QR code has three orange square markers at the corners.

A continuación se encuentran representaciones de series geométricas que convergen. Con esto se puede observar términos más pequeños que aportan a la idea (intuitiva) de “infinito”.

SERIES GEOMÉTRICAS	CÓDIGO QR
<p align="center"><b>DIFERENTES SERIES GEOMÉTRICAS</b></p>	

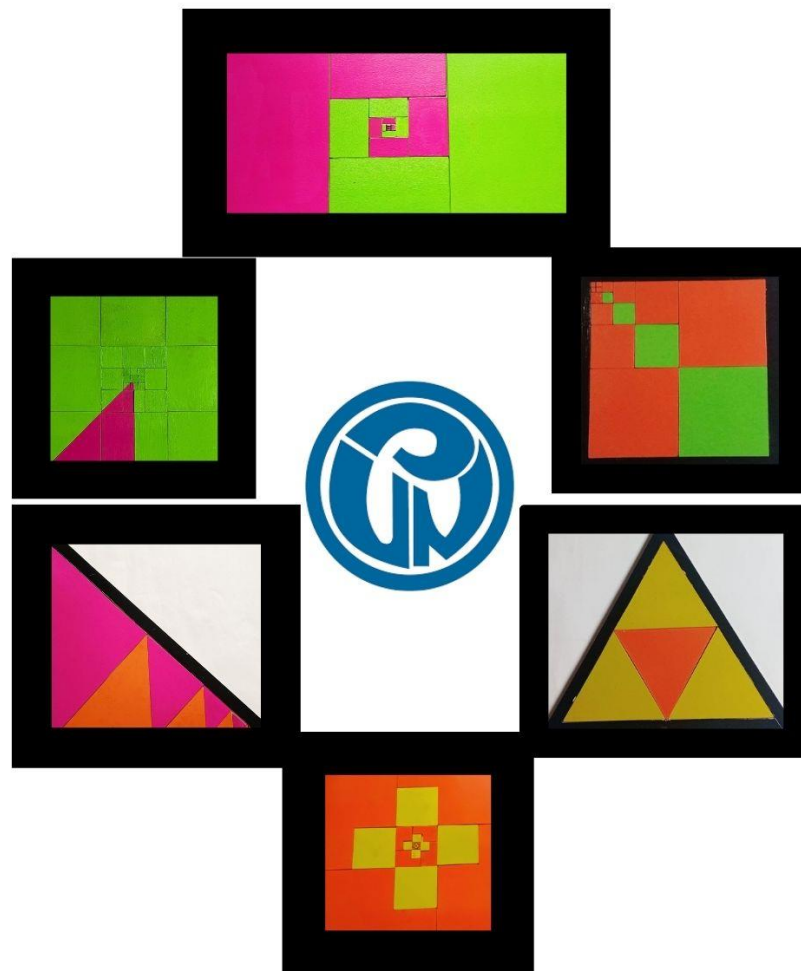
De esta manera se da por finalizado las tareas para aprender sobre series geométrica convergentes.

### Sugerencia

#### Queda a decisión del profesor

Luego de culminar hasta aquí con las tareas, se retira el material y rota, de tal manera que los estudiantes experimente con todas la series; es decir, se inicia nuevamente con las tareas, con el fin que los estudiantes logren observar las diferencias y características en común que tienen estas series.

## Guía práctica para profesores



Angie Linares & Lina Pinzón