



**DISEÑO DE TAREAS ORIENTADAS AL APRENDIZAJE DE LAS SECCIONES  
CÓNICAS A TRAVÉS DE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS**

JUAN PABLO VARGAS GUATIVA

ANDRÉS GIOVANI LÓPEZ COLMENARES

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL  
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS  
BOGOTÁ D. C.

2024

**DISEÑO DE TAREAS ORIENTADAS AL APRENDIZAJE DE LAS SECCIONES  
CÓNICAS A TRAVÉS DE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS**

Trabajo presentado como requisito para optar por el título de Licenciados en Matemáticas

JUAN PABLO VARGAS GUATIVA

Código: 2018240070

ANDRÉS GIOVANI LÓPEZ COLMENARES

Código: 2018240030

Asesor:

Mg. CÉSAR GUILLERMO RENDÓN MAYORGA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D. C.

2024

### **Agradecimientos Giovani**

*La culminación de este trabajo es gracias a:*

*Dios, que siempre nos fortaleza y la guía para continuar en esta experiencia investigativa.*

*A mis padres, por su amor, trabajo y sacrificios en todo este camino, gracias a ustedes he realizado este logro importante.*

*A mi hermano por sus palabras y compañía que fueron para culminar con éxito estas tesis.*

*Al director, profesor Mg. César Guillermo Rendón Mayorga por sus conocimientos, sus orientaciones, su persistencia y paciencia fue una motivación fundamental para mi formación como investigador.*

*A las directivas y funcionarios del Colegio IED Venecia Nuevo Muzú, quienes me brindaron el espacio para las intervenciones del trabajo y, a la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia por sus servicios prestados*

**Andrés Giovani López Colmenares**

### **Agradecimientos Juan**

*Por mi parte agradezco a Dios por ser mi guía, darme la sabiduría necesaria y no dejarme desfallecer en ningún momento.*

*A la universidad pública y el alma mater UPN por permitir formar la persona que soy hoy en día.*

*A los profesores de la Licenciatura en Matemáticas por brindarme su conocimiento a lo largo de estos años.*

*Al profe César Rendón por abrirnos las puertas a esta aventura, ser un guía, aportarnos sus conocimientos y enseñarnos el camino a la investigación.*

*Al Colegio IED Venecia Nuevo Muzú, en especial a la profe Yeimy Riaño por apoyarnos en todo lo necesario permitiéndonos los espacios.*

*A Lina P, Lina O, Liz M y Angie L por su compañía a lo largo de este camino, sus consejos y por brindarme apoyo siempre.*

**Juan Pablo Vargas Guativa**

## Tabla de contenido

|  |    |
|--|----|
| 1. Preliminares .....  | 10 |
| 1.1 Introducción .....   | 10 |
| 1.2 Justificación.....   | 12 |
| 1.3 Objetivos .....  | 16 |
| <i>1.3.1 Objetivo general</i> .....                                      | 16 |
| <i>1.3.2 Objetivos Específicos</i> .....                                 | 16 |
| 2. Marco teórico .....   | 17 |
| 2.1 Marco histórico .....  | 17 |
| <i>2.1.1 Problemas clásicos griegos</i> .....                            | 18 |
| <i>2.1.2 Caracterización de las cónicas</i> .....                        | 24 |
| <i>2.1.3 Geometría Analítica</i> .....                                   | 40 |
| <i>2.1.4 Instrumentos para construir cónicas</i> .....                   | 44 |
| <i>2.1.5 Relaciones con la Física</i> .....                              | 47 |
| 2.2 Marco Didáctico .....  | 50 |
| <i>2.2.1 Tareas de aprendizaje en matemáticas</i> .....                  | 51 |
| <i>2.2.2 Aspectos curriculares</i> .....                                 | 55 |
| <i>2.2.3 Uso del GeoGebra en el ámbito educativo</i> .....               | 57 |
| <i>2.2.4 La Historia de las Matemáticas como recurso didáctico</i> ..... | 57 |
| 3. Aspectos Metodológicos .....  | 60 |

|  |     |
|--|-----|
| 3.1 Fase 1: Revisión documental.....         | 60  |
| 3.2 Fase 2: Diseño de Tareas .....           | 62  |
| 3.2.1 Tarea 1 .....                          | 62  |
| 3.2.2 Tarea 2 .....                          | 74  |
| 3.2.3 Tarea 3 .....                          | 85  |
| 3.3 Fase 3: Implementación y análisis: ..... | 88  |
| 4. Análisis De La Implementación.....        | 90  |
| 4.1 Tarea 1 .....                            | 90  |
| 4.2 Tarea 2 .....                            | 98  |
| 5. Conclusiones .....                        | 105 |
| 6. Referencias.....                          | 108 |

## Figuras

|   |           |
|---|-----------|
| Figura 1. Media geométrica entre los segmentos $a$ y $b$ donde $b=2a$ .....   | 21        |
| Figura 2. Solución de la duplicación del cubo por medio de la interpolación de medias Geométricas (Hipócrates). ..... | 22        |
| Figura 3 Problema de Pappus .....   | 23        |
| Figura 4. Cortes del cono y el plano según Menecmo .....  | 25        |
| Figura 5. Secciones Cónicas como cortes del plano con un único cono.....  | 26        |
| Figura 6 Circunferencia con centro en $C$ y $P$ un punto sobre ella. ....   | 27        |
| <i>Figura 7. Parábola como lugar de los puntos tales que <math>FP=PQ</math>.....</i>                                  | <i>27</i> |
| Figura 8 Elipse como lugar geométrico de los puntos que cumplen la condición.....                                     | 29        |
| Figura 9 Hipérbola como lugar geométrico. ....  | 30        |
| Figura 10 Representación de los resultados mostrados por Dandelin .....   | 31        |
| Figura 11. Intersección entre esfera y el plano secante.....  | 32        |
| Figura 12 Focos de la hipérbola como intersecciones de las esferas con el plano .....                                 | 33        |
| Figura 13 Foco de la parábola como intersección del plano con la esfera en.....                                       | 33        |
| Figura 14. Proposición 21 sobre la razón que se mantiene constante en las secciones cónicas.....                      | 34        |
| Figura 15. Directrices de las secciones cónicas .....   | 35        |
| Figura 16 Envoltentes a una curva.....  | 37        |
| Figura 17 Envoltentes de la elipse .....  | 37        |
| Figura 18 Envoltentes de la parábola.....   | 38        |
| Figura 19. Envoltentes de la hipérbola.....   | 38        |
| <i>Figura 20. Bisectriz de ángulo entre recta-circunferencia.....</i>   | <i>39</i> |

|   |    |
|---|----|
| <i>Figura 21. bisectriz de ángulo entre dos circunferencias caso 1(ellipse)</i> ..... | 40 |
| Figura 22. Bisectriz de ángulo entre dos circunferencias caso 2 .....                 | 40 |
| Figura 23.Elipsógrafo de palancas y colisa de Artobolevski .....                      | 45 |
| Figura 24. Elipsógrafo de palancas y colisa de kleiber.....                           | 45 |
| Figura 25. Elipsógrafo de palancas y colisa de Dobrovolski.....                       | 45 |
| Figura 26. Hiperbológrafo de palancas y colisa de Neuberg .....                       | 46 |
| Figura 27. Hiperbológrafo de palancas y colisa de Rothschi.....                       | 46 |
| Figura 28. Hiperbológrafo de palancas y colisa de Inwards.....                        | 46 |
| Figura 29. Hiperbológrafo de palancas y colisa de Artobolevski .....                  | 46 |
| Figura 31. Parabológrafo de palancas y colisa de Artobolevski .....                   | 47 |
| Figura 32. Parabológrafo de palancas y colisa de Lebeau .....                         | 47 |
| Figura 33 Modelo geocéntrico de Ptolomeo .....  | 49 |
| Figura 34 Modelo heliocéntrico de Aristarco .....                                     | 49 |
| Figura 35 Modelo de Kepler de la trayectoria de los planetas.....                     | 50 |
| Figura 36. Previsión de la actuación del docente desde diferentes perspectivas .....  | 54 |
| Figura 37. Numeral 1 de la primera parte de la tarea.....                             | 72 |
| Figura 38. Numeral 5 de la segunda parte de la tarea.....                             | 72 |
| Figura 39. Numeral 6 de la segunda parte de la tarea.....                             | 73 |
| <i>Figura 40 ángulo formado por la generatriz</i> .....                               | 73 |
| Figura 41. Numeral 1 del ítem a de la primera parte de la tarea.....                  | 82 |
| Figura 42. Numeral 1 del ítem c de la primera parte de la tarea.....                  | 83 |
| Figura 43. Numeral 4 del ítem b de la primera parte de la tarea.....                  | 83 |
| Figura 44. Numeral 2 de la segunda parte de la tarea.....                             | 84 |

|   |     |
|---|-----|
| Figura 45. Numeral 4 de la segunda parte de la tarea.....                       | 84  |
| Figura 46 Numeral 1 de la tarea 3.....  | 87  |
| Figura 47. Numeral 2 de la tarea 3.....   | 87  |
| Figura 48. Numeral 3 de la tarea 3.....   | 87  |
| Figura 49. Numeral 4 de la tarea 3.....   | 88  |
| Figura 50. Evidencia Apolonio-Parábola.....                                     | 95  |
| Figura 51. Evidencia Apolonio-elipse.....                                       | 95  |
| Figura 52. Evidencia Apolonio- Hipérbola.....                                   | 95  |
| Figura 53. Evidencia Envolvente-.....   | 96  |
| Figura 54. Evidencia Envolvente-elipse .....                                    | 96  |
| Figura 55. Evidencia Envolvente-Hipérbola.....                                  | 96  |
| Figura 56. Evidencia parábola ángulo corneado.....                              | 96  |
| Figura 57. Evidencia elipse ángulos corneados .....                             | 97  |
| Figura 58. Evidencia elipse como ángulos corneados .....                        | 97  |
| Figura 59. Evidencias parámetros para la elipse.....                            | 99  |
| Figura 60. Evidencia parámetros para la parábola.....                           | 99  |
| Figura 61. Evidencia parámetros para la hipérbola .....                         | 100 |
| Figura 62. Evidencia respuesta de los estudiantes .....                         | 101 |
| Figura 63. Evidencia literal 4b de la tarea 2 .....                             | 102 |
| Figura 64. Evidencia reconocimiento de la cónica por discriminante .....        | 103 |
| Figura 65. Caso particular relación errónea discriminante y sección cónica..... | 104 |
| Figura 66. Evidencia caso de mal cálculo del discriminante .....                | 104 |

## Tablas

|  |    |
|--|----|
| Tabla 1. Relación entre conceptos y autores sobre la historia de las secciones cónicas... 18 | 18 |
| Tabla 2. Algunas características de las ecuaciones de las secciones cónicas..... 42          | 42 |
| Tabla 3 Evidencias de reconocimiento de las secciones cónicas en la vida cotidiana..... 90   | 90 |
| Tabla 4. elementos principales para la construcción de cónicas ..... 93                      | 93 |

## 1. Preliminares

### 1.1 Introducción

Las tareas son una herramienta esencial en los procesos de enseñanza y aprendizaje, desempeñando un papel fundamental entre el profesor y el estudiante sin importar el área de conocimiento en que se desarrollen. En matemáticas, las tareas adquieren una relevancia aún mayor, ya que son un vehículo que facilita la comprensión de conceptos complejos y abstractos. En este sentido, como docentes, es crucial entender no solo qué es una tarea en matemáticas, sino también cómo diseñarla de manera efectiva para potenciar el aprendizaje.

Este trabajo de grado propone una serie de tareas para la enseñanza y el aprendizaje de las secciones cónicas integrando la historia de este objeto matemático. A través de este enfoque histórico, se busca no solo enseñar los conceptos, sino también conectar al estudiante con el proceso histórico y la evolución del objeto matemático.

El trabajo está estructurado en cinco capítulos que guiarán al lector a través de la propuesta. En el primer capítulo, se justifica la importancia de las secciones cónicas, el diseño de tareas y el uso de la historia en el aula, además, se exponen los objetivos del trabajo.

En el segundo capítulo, se presenta el marco teórico, que incluye un sucinto recorrido histórico desde el descubrimiento de las secciones cónicas hasta su tratamiento algebraico. En este capítulo, se identifican cinco formas de construcción de las secciones cónicas: como cortes del cono desde las perspectivas de Apolonio y Menecmo, como lugar geométrico, como resultado del trabajo con envolventes y como resultado del trabajo con ángulos corneados o curvilíneos. Además, se describen algunos elementos didácticos que sustentan la propuesta, resaltando la creación de tareas y el objeto matemático dentro del marco curricular escolar, así como la relevancia de la historia de las matemáticas en el aula.

En el tercer capítulo, se presenta la metodología utilizada para el desarrollo del trabajo de grado, especificando tres fases: la primera corresponde a la revisión documental, en la que se describe cómo fue y qué se tuvo en cuenta la recolección del material que sustenta el trabajo de grado; la segunda fase es el diseño de tareas, en la que se tiene en cuenta la propuesta de Gómez et al. (2018) y en la última fase se describen aspectos relacionados con la implementación y análisis de las tareas.

En el cuarto capítulo, se presenta un análisis de las tareas implementadas y los resultados obtenidos, evaluando su efectividad e impacto a la luz de los objetivos planteados en la fase de diseño. Finalmente, en el capítulo de conclusiones, se reflexiona sobre el trabajo realizado, se contrastan los resultados con los objetivos establecidos y se plantean sugerencias para futuras investigaciones.

## 1.2 Justificación

A lo largo de nuestra formación como educadores matemáticos, se nos ha inculcado la importancia del diseño de tareas en el marco de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares, de tal forma que se lleven a cabo de forma constructiva. De esta manera se reconoce el rol del profesor con respecto a la creación de tareas que favorezcan la construcción de conocimiento teniendo en cuenta que en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (Ministerio de Educación Nacional [MEN], 1998) se promueve una serie de principios fundamentales que los estudiantes deben desarrollar con las actividades matemáticas que propone el profesor, ya que este último es “quien deberá crear situaciones problemáticas que permitan al alumno explorar problemas, construir estructuras, plantear preguntas y reflexionar sobre modelos; estimular representaciones informales y múltiples, al mismo tiempo, propiciar gradualmente la adquisición de niveles superiores de formalización y abstracción.” (p.13).

El diseño de tareas, entonces, no debe ser un proceso aislado, sino que debe tomar en cuenta tanto un diagnóstico previo de los estudiantes junto con los principios fundamentales que guían el aprendizaje matemático. Este enfoque se alinea con la idea de que las matemáticas no son solo un conjunto de técnicas a aplicar, sino un campo donde los estudiantes deben ser activos en la construcción de su conocimiento.

Por otra parte, de acuerdo con los Derechos Básicos de Aprendizaje de Matemáticas [DBA] (MEN, 2016), las secciones cónicas son objetos matemáticos que pueden construirse y estudiarse en grado décimo, debido a que en este grado los estudiantes “exploran y describen propiedades de los lugares geométricos y de sus transformaciones a partir de diferentes representaciones” (p. 76) y, adicionalmente, en las evidencias del DBA citado hacen referencia a las secciones cónicas como lugar geométrico. En esta línea, los estudiantes deberían comprender

y utilizar las expresiones canónicas de las cónicas, de igual manera, proponer rangos de variación para obtener gráficas, además de representar lugares geométricos a partir de su expresión algebraica.

En particular, es de interés en este trabajo abordar las secciones cónicas (parábola, hipérbola y elipse) para el diseño de una secuencia de tareas que esté mediada por el contexto histórico de dichas secciones (esto es, que las tareas incorporen asuntos como: diferentes notaciones, problemas históricos, formas de definir las secciones en diferentes épocas, entre otros), con el fin de que puedan ser implementadas con estudiantes de grado décimo, de forma que les permita el fortalecimiento de la resolución de problemas en distintos contextos relacionados con las secciones cónicas en el marco de lo señalado en los documentos curriculares nacionales.

Para los grados décimo y undécimo de la educación media se fortalece el pensamiento espacial desde la Geometría Analítica, esto de acuerdo con los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas [EBCM] (MEN, 2006). Sin embargo, esto no se cumple en el aula según Fernández (2017), ya que como él lo plantea,

Aunque se reconoce que los métodos de la Geometría Analítica son, aspectos claves en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en distintos niveles de escolaridad, desafortunadamente, en el currículo colombiano su enseñanza sigue siendo marginal como consecuencia del poco espacio que se brinda a la enseñanza de la geometría y al exagerado tratamiento algebraico de las ecuaciones de segundo grado que representan las cónicas. Estas circunstancias se traducen en la pérdida gradual del conocimiento de las propiedades intrínsecas de las cónicas. (p. 27)

En consecuencia, con este trabajo de grado se pretende utilizar elementos de la historia de las matemáticas para el diseño de tareas y el aprendizaje de las secciones cónicas, teniendo en cuenta la historia como un recurso didáctico (Palenzuela, 2016). Como señala Palenzuela (2016) citando a Nolla (2001):

Los conceptos y las ideas matemáticas que se tratan [...] son presentados a los alumnos de una forma cerrada y acabada. Se olvida que han surgido después de un largo proceso de gestación, en las que las intuiciones más fecundas con otras estériles han configurado sus presentaciones sucesivas. A lo largo de la historia, estas ideas han sido generadas por diversos tipos de problemas prácticos o teóricos, pertenecientes a la propia matemática o a otras disciplinas. El conocimiento de estos problemas, y el estudio de la evolución de su tratamiento y de los nuevos problemas que han generado, proporciona los fundamentos para la comprensión de las ideas y conceptos que de ellos han resultado. (p. 1)

Frente a este contexto, esta monografía propone el diseño de una secuencia de tareas que utilicen la historia de las matemáticas como recurso didáctico. Según Palenzuela (2016), la incorporación de elementos históricos en la enseñanza permite restablecer el estatus de las matemáticas como una actividad cultural y humana, alejándola de la visión tradicional basada en la memorización y la aplicación mecánica de algoritmos. Además, Nolla (2001), citado en Palenzuela (2016) argumenta que comprender el origen histórico de los conceptos matemáticos facilita una mejor asimilación de las ideas y los problemas que las generaron, enriqueciendo así el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Aunque existen estudios previos relacionados con la enseñanza de las secciones cónicas, como: Ortigón (2013), quien en su trabajo diseña una tarea que incorpora herramientas tecnológicas para facilitar un aprendizaje dinámico de las secciones cónicas mediante el

concepto de excentricidad y los argumentos generados por los estudiantes se analizan y clasifican utilizando el modelo de Toulmin como base teórica. Por su parte Mancera (2015) realizó un trabajo analizando los argumentos de estudiantes de Licenciatura en Matemáticas al resolver una tarea sobre secciones cónicas con GeoGebra, clasificándolos mediante el modelo de Toulmin y explorando la relación entre conjeturar y argumentar. Asimismo, Moreno (2018) en su trabajo de grado destaca la importancia del conocimiento del profesor de matemáticas en la enseñanza de conceptos, toma específicamente las secciones cónicas resaltando como la historia contribuye significativamente al conocimiento del profesor.

Los trabajos anteriores y otros que también se rastrearon (sin pretender ser exhaustivos) se enfocan principalmente en el uso de herramientas tecnológicas o modelos argumentativos, sin integrar plenamente la historia de las matemáticas como eje principal para la creación de tareas, lo cual sirvió en su momento como un hecho de relevancia para el planteamiento de esta propuesta.

En esta monografía se busca diseñar tareas que combinen el contexto histórico de las cónicas con los requerimientos curriculares actuales, fortaleciendo la resolución de problemas y el pensamiento crítico de los estudiantes.

### **1.3 Objetivos**

#### ***1.3.1 Objetivo general***

Diseñar una secuencia de tareas en torno al aprendizaje de las secciones cónicas relacionadas con su desarrollo a lo largo de la historia.

#### ***1.3.2 Objetivos Específicos***

- Realizar un estudio histórico de las secciones cónicas que permita identificar sus principales hitos a lo largo de la historia.
- Analizar material bibliográfico sobre la enseñanza y el aprendizaje de las secciones cónicas y sistematizar lo encontrado.
- Diseñar una secuencia de al menos cuatro tareas mediadas por la historia de las matemáticas para el aprendizaje de las secciones cónicas en el contexto escolar.
- Implementar un pilotaje de la secuencia de tareas diseñada y reportar algunas conclusiones generales de la aplicación.

## 2. Marco teórico

### 2.1 Marco histórico

Para la elaboración de este marco histórico se realizó una revisión documental relacionada con la historia de las secciones cónicas. Al respecto, se estudiaron principalmente siete textos entre: revistas, trabajos de grado y tesis de maestría, obtenidos de repositorios de universidades como: Universidad Pedagógica Nacional, Universidad de los Andes, Universidad Nacional de General Sarmiento, entre otras. En la revisión de dichos documentos la idea central fue identificar aspectos históricos que se consideraran importantes en el desarrollo conceptual de las secciones cónicas; paralelamente se fueron construyendo, de cada documento, reseñas que recogían dichos aspectos relevantes.

Posterior a la lectura de los documentos, fue necesario organizar la información en una tabla (Tabla 1), teniendo en cuenta cinco categorías de temáticas (ideas, personajes, conceptos) que se observaron frecuentes en los textos consultados, las cuales se denominaron: Problemas clásicos griegos, caracterización de las cónicas, Geometría Analítica, instrumentos para construir cónicas y relaciones con la Física. De acuerdo con lo revisado en los documentos, se asociaron conceptos, épocas e instrumentos que estuvieran contenidos en dichas categorías (segunda columna Tabla 1), cabe aclarar que en el apartado “Problemas clásicos griegos” se prioriza el problema de la duplicación del cubo, ya que su solución implicó el descubrimiento de las secciones cónicas. Finalmente, se hizo un contraste para identificar cuáles autores mencionaban cada uno de los conceptos ubicados en las distintas categorías, con el fin de reconocer las temáticas más frecuentes en la historia de las secciones cónicas y así dar forma a este marco teórico.

*Tabla 1. Relación entre conceptos y autores sobre la historia de las secciones cónicas*

| Categorías                          | Conceptos   | Autores (documentos revisados) |             |                |                              |                 |                |              |               |
|-------------------------------------|---|--------------------------------|-------------|----------------|------------------------------|-----------------|----------------|--------------|---------------|
|                                     |   | Ruiz (1996)                    | Lugo (2014) | Ramírez (2013) | Castenoble y González (2015) | Martínez (2015) | Giraldo (2017) | Pérez (2018) | Vargas (2018) |
| Problemas clásicos griegos          | Tres problemas clásicos   | x                              |             |                | x                            |                 |                | x            | x             |
|                                     | Duplicación del cubo  | x                              | x           | x              | x                            |                 | x              | x            | x             |
|                                     | Problema Pappus   |                                | x           |                | x                            | x               | x              | x            | x             |
| Caracterización de las cónicas      | Descubrimiento de secciones cónicas (Menecmo)                     | x                              | x           | x              | x                            |                 | x              | x            | x             |
|                                     | Secciones de un solo cono. (Apolonio)                             | x                              | x           | x              | x                            |                 | x              | x            | x             |
|                                     | Esferas de Dandelin   | x                              | x           |                |                              |                 |                |              |               |
|                                     | Cónicas como lugares geométricos                                  |                                | x           | x              | x                            | x               | x              | x            | x             |
| Geometría Analítica                 | Geometría Analítica (Descartes y Fermat)                          |                                | x           | x              |                              | x               | x              | x            | x             |
| Instrumentos para construir cónicas | Elipsógrafo, parabológrafo e hiperbológrafo                       |                                |             |                |                              | x               |                |              |               |
| Relaciones con la Física            | Movimiento planetario (Kepler)                                    | x                              |             |                |                              |                 | x              | x            | x             |
|                                     | Fenómenos naturales movimiento parabólico. (Galileo Galilei)      |                                |             | x              |                              |                 |                |              | x             |
|                                     | Fuerza gravitacional de un cuerpo alrededor de una curva (Newton) |                                |             | x              |                              |                 |                | x            | x             |

*Fuente.* Elaboración propia.

Adicionalmente, durante la elaboración del marco teórico surgió la necesidad de buscar otros documentos, que se encuentran citados a lo largo del texto, con el fin de comprender y ampliar ideas que, en los documentos inicialmente consultados se encontraban de manera muy superficial.

Con respecto a los autores que aparecen en la Tabla 1, se realiza una breve descripción sobre la importancia de sus escritos en el capítulo de aspectos metodológicos del trabajo de grado. Por lo pronto, a continuación, se presenta la descripción histórica de cada una de las categorías expuestas en la Tabla 1.

### ***2.1.1 Problemas clásicos griegos***

La geometría surgió por las necesidades que existían en las antiguas civilizaciones relacionadas con el cálculo de áreas terrenales, medir distancias entre pueblos, mejorar la balística, entre otros. Particularmente, Vargas (2018) menciona que los chinos hacia el siglo XXVII a.C. crearon un observatorio para corregir el calendario; además, las civilizaciones mediterráneas también usaron procedimientos geométricos para medir parcelas de tierra, calcular

producción y reconstrucción cuando ocurrían inundaciones. Cabe resaltar que las construcciones válidas en geometría por varios años fueron las realizadas con regla y compás<sup>1</sup>.

Muchos de los conocimientos matemáticos de las culturas egipcias y mesopotámicas fueron transmitidos a la cultura griega principalmente a través de Tales de Mileto, la escuela pitagórica y Euclides (Vargas, 2018). Entre los grandes matemáticos y pensadores griegos de la época, empezaron a circular tres problemas de índole matemática que llamaron su atención: la cuadratura del círculo, la trisección del ángulo y la duplicación del cubo. En términos actuales, estos problemas se pueden expresar mediante los siguientes enunciados:

- Duplicación del cubo: dado un cubo cualquiera, construir otro que sea el doble del anterior.
- Trisección del ángulo: dado un ángulo cualquiera, construir un ángulo que sea la tercera parte del ángulo dado.
- Cuadratura del círculo: dado un círculo cualquiera, construir un cuadrado que tenga la misma área del círculo dado.

Estos problemas se abordaron durante varios siglos porque no se lograba dar solución con los instrumentos de la época, esto llamó la atención de los científicos griegos quienes se interesaron por buscarles solución.

No obstante, es de interés para este trabajo de grado enfocarse en el problema de la duplicación del cubo, ya que los griegos lo clasificaron como un problema relacionado con lugares sólidos<sup>2</sup> y buscando su solución descubrieron las curvas que se conocen como secciones

---

<sup>1</sup> La regla y el compás en la antigua Grecia eran instrumentos similares a los que conocemos hoy en día. Sin embargo, la regla no tenía marcas ni números y el compás, al ser levantado de la superficie en la que se ubicara, no conservaba la medida tomada.

<sup>2</sup> Los griegos clasificaban los lugares geométricos en tres categorías: lugares planos, los cuales eran gráficos realizados por rectas y circunferencias; lugares sólidos los cuales incluían las cónicas y los lugares lineales que contenían curvas como los espirales (Vargas, 2018).

cónicas. A continuación, se aborda a detalle la forma en que se abordó el desarrollo del problema de la duplicación del cubo.

### 2.1.1.1 La duplicación del cubo

El problema de la duplicación del cubo se presentó en siglo III a.C. en Atenas. Castelnoble Diaz y Gonzales Herrera (2015) mencionan que este surge para dar solución a la peste que azotó a la sociedad ateniense en la época. El oráculo de Delfos<sup>3</sup> previó una solución para la enfermedad, que consistía en duplicar el tamaño del altar del dios Apolo, el cual era cúbico. Para ello se debía edificar un cubo que tuviera el doble del volumen del que tenía el altar, construyendo una arista de tal manera que satisficiera la condición mencionada.

En términos actuales, lo anterior significa construir una arista de medida  $\sqrt[3]{2}a$  ( $a \in Q^+$ ), donde  $a$  es la arista del altar o del cubo que ya se tiene. Más adelante se muestra cómo se llega a dicha medida.

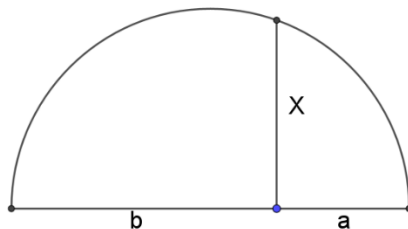
Por su parte, Ramírez (2013) comenta que el francés P. Wantzel en 1837 demostró que la duplicación del cubo es un problema que no se puede resolver usando la regla y el compás griego.

La primera persona, que se encontró en la literatura consultada, en abordar el problema de la duplicación del cubo fue Hipócrates de Chíos, quien logró reducir el problema a hallar dos medias en proporción continua entre dos segmentos dados (Figura 1). Dos segmentos  $a$  y  $b$  están en proporción continua si  $x$  y  $y$  cumplen la relación  $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$ . Para Hipócrates  $a$  representaba el volumen del cubo inicial y  $b$  el volumen del cubo buscado, por lo tanto, para dar solución al caso de la duplicación del cubo  $b = 2a$ .

---

<sup>3</sup>El oráculo de Delfos era un importante templo donde se realizaban predicciones el día séptimo de cada mes (Martínez, 2018)

Figura 1. Media geométrica entre los segmentos  $a$  y  $b$  donde  $b=2a$



Fuente: elaboración propia

De la expresión  $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$ , apoyándose con notación conocida, se puede obtener el siguiente sistema de ecuaciones, para encontrar el valor de la arista buscada.

$$\begin{cases} x^2 = ay \\ y^2 = 2ax \end{cases}$$

Despejando  $y$  de cada ecuación y considerando solamente las raíces positivas, entonces,

$$y = \frac{x^2}{a}; y = \sqrt{2ax}$$

Ahora, igualando las expresiones y despejando  $x$  se obtiene:

$$\frac{x^2}{a} = \sqrt{2ax}$$

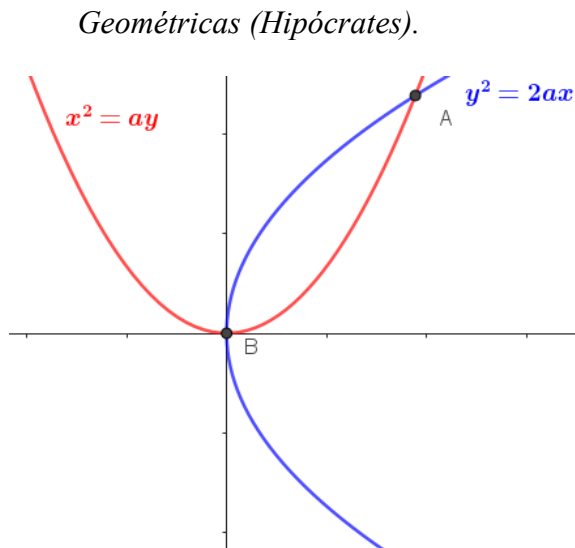
$$\frac{x^4}{a^2} = 2ax$$

$$x^3 = 2a^3$$

$$x = \sqrt[3]{2a^3}$$

Además, se puede reconocer que las relaciones encontradas por Hipócrates se pueden representar en un plano cartesiano, de manera actual, como se muestra en la Figura 2. Se puede apreciar que los puntos de intersección entre las dos curvas son  $(0,0)$  y  $(\sqrt[3]{2a}, \sqrt[3]{2a^2})$ . La abscisa del último punto es, precisamente, la medida de la arista que da solución al problema de la duplicación del cubo.

Figura 2. Solución de la duplicación del cubo por medio de la interpolación de medias



Ramírez (2013) afirma que otro matemático en abordar la duplicación del cubo fue Menecmo, quien propuso una solución al problema realizando cortes transversales a diferentes conos, con un plano y a partir de los cortes a los conos, surgieron las secciones cónicas: elipse, parábola e hipérbola (los aportes realizados por Menecmo se tratarán con detalle en el apartado caracterización de las cónicas).

### 2.1.1.2 El problema de Pappus

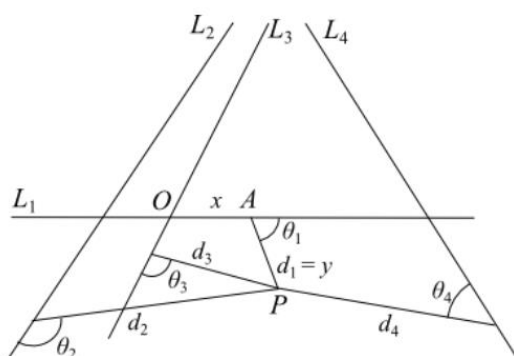
Por otra parte, Arandia y Garcés (2019) mencionan que Pappus fue uno de los últimos matemáticos de la antigua Grecia que realizó una compilación de los trabajos realizados por Euclides, Arquímedes, Apolonio y Ptolomeo, incluyendo demostraciones alternativas y nuevas proposiciones geométricas. La mayoría de estos escritos se conservan en la actualidad y resulta difícil distinguir cuáles son originales del autor. Adicionalmente, Lugo (2014) le atribuye a Pappus la primera mención de los focos de las secciones cónicas y define estas como la razón constante entre las distancias del foco a la directriz. Además, consolidó el siguiente teorema:

El lugar geométrico de los puntos del plano cuya razón entre las distancias a un punto fijo (foco) y una recta fija (directriz) es constante, es una sección cónica. Si la razón es igual a la unidad la sección es igual a una parábola, si la razón es menor a la unidad será una elipse y si es mayor una hipérbola. (Heath 1921, como se citó en Lugo 2014, p. 12)

Por otra parte, Pappus cobró fama con el famoso “problema de Pappus” o “problema de las cuatro rectas o el lugar de las tres rectas” (Figura 3) que posiblemente dio origen a la geometría analítica y que surgió a partir de los trabajos de Apolonio.

Arboleda (2013) enuncia el problema de Pappus para  $n$  rectas así:

*Figura 3 Problema de Pappus*



*Fuente: Arboleda (2013)*

Dados: una recta  $L_i$  en el plano,  $n$  ángulos  $\theta_i$ , una razón  $\beta$ , un segmento de recta  $\alpha$ . Para un punto  $P$  en el plano, sea  $d_i$  la distancia oblicua entre  $P$  y  $L_i$  que forma el ángulo  $\theta_i$  con  $L_i$ .

Problema: Encontrar el lugar de los puntos  $P$  tales que las razones siguientes son iguales a la razón dada  $\beta$ :

$$\text{Para 3 rectas: } (d_1)^2 : d_2 d_3$$

$$\text{Para 4 rectas: } d_1 d_2 : d_3 d_4$$

$$\text{Para 5 rectas: } d_1 d_2 d_3 : \alpha d_4 d_5$$

Para 6 rectas:  $d_1 d_2 d_3 : d_4 d_5 d_6$

En general, Para un número par  $2k$  de rectas:  $d_1 \dots d_k : d_{k+1} \dots d_{2k}$

Para un número impar  $2k + 1$  de rectas:  $d_1 \dots d_{k+1} : ad_{k+2} \dots d_{2k+1}$  (p.5).

Al respecto, Lugo (2014) menciona que este problema fue trabajado por Descartes y Newton.

El documento de Arboleda (2013) comenta que la solución clásica para el problema de Pappus surgía de una sección cónica. Cuando la curva solución corresponde a una curva cubica o de grado cuatro, se construyen mediante la intersección de dos cónicas; las de quinto o sexto grado son construibles mediante la intersección de la parábola con el círculo y así sucesivamente.

### ***2.1.2 Caracterización de las cónicas***

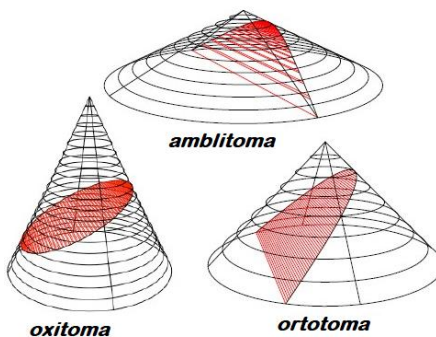
En esta sección se considera el tratamiento de las secciones cónicas como curvas determinadas por: la intersección entre diferentes tipos de conos y la inclinación de un plano, como lugar geométrico, el trabajo desde la Geometría Analítica y como bisectrices de algunos ángulos corneados, incluyendo los trabajos de Menecmo, Apolonio, Dandelin, Fermat y Descartes.

Menecmo fue discípulo de Platón. Pérez (2018) cuenta que Menecmo en la búsqueda para solucionar la duplicación del cubo, descubrió que los cortes transversales entre un plano y un cono generaban las curvas que desde entonces se llamaron secciones cónicas. Para Menecmo estas secciones resultaron al intersecar un plano perpendicular a la recta generatriz de un cono, determinado por la amplitud del ángulo (recto, obtuso o agudo) formado por su vértice como se observa en la Figura 4.

Boyer (2010, como se citó en Díaz, 2017) cuenta que Menecmo definió la elipse como la intersección de dicho plano con un cono acutángulo; la parábola, con un cono recto y las

hipérbolas, con un cono obtuso. A estas curvas las llamó Oxitoma, Ortotoma y Amblitoma respectivamente (Figura 4).

*Figura 4. Cortes del cono y el plano según Menecmo*



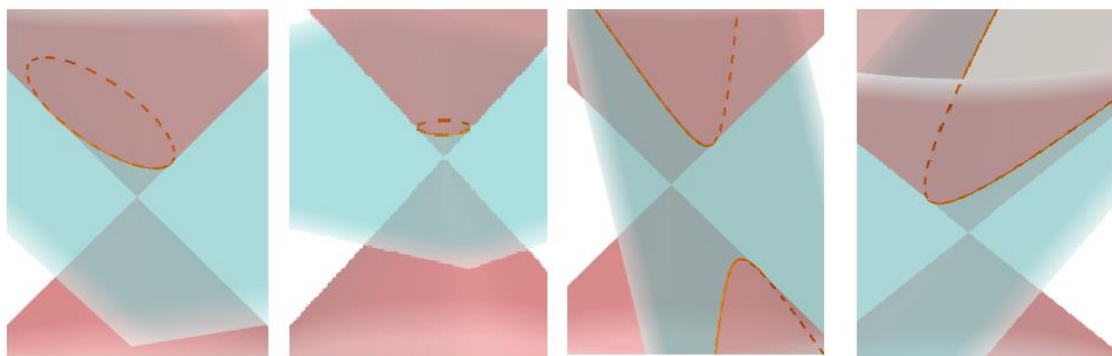
*Fuente: elaboración propia*

Según Castelnoble y González (2015), Apolonio demostró posteriormente que las secciones cónicas se pueden obtener a partir de un único cono variando la inclinación del plano secante (Figura 5). Según Boyer (2007) Apolonio definió al cono así:

Si una línea recta de longitud indefinida y que pasa siempre por un punto fijo se hace mover sobre la circunferencia de un círculo que no está en el mismo plano que el punto dado, de tal manera que pase sucesivamente por todos los puntos de dicha circunferencia, entonces la recta móvil describirá la superficie de un cono doble. (p. 195)

Con la anterior definición se sustituye el cono de una hoja por uno de dos hojas, dándole origen a las dos ramas de la hipérbola.

*Figura 5. Secciones Cónicas como cortes del plano con un único cono.*



*Fuente:* elaboración propia

Otro aporte que hizo Apolonio a las secciones cónicas fue asignar los nombres con los que actualmente se conocen: parábola, hipérbola y elipse. Los pitagóricos se referían a estos términos para la construcción de áreas por yuxtaposición, exceso y defecto respectivamente.

Así mismo, Giraldo (2017) afirma que Apolonio fue uno de los matemáticos representantes del tiempo helenístico quien dedicó bastante tiempo al trabajo de las secciones cónicas consolidando su obra “Las Cónicas”, la cual constaba de ocho libros con más de cuatrocientas proposiciones dedicadas al estudio y descubrimiento de ejes, focos, asíntotas, recta de máximos y mínimos (tangentes y normales) en curvas cónicas. Solo se conservaron sus primeros cuatro libros, dado que gran parte de su obra fue perdida en la época del oscurantismo. En este apartado, cabe mencionar a Hipatia quien fue considerada una de las primeras mujeres matemáticas en estudiar las secciones cónicas de Apolonio. Sin embargo, su muerte junto con la destrucción de sus escritos inició la época del oscurantismo. Los escritos de Apolonio que perduraron durante dicha época fueron presentados hasta los siglos XVI y XVII; época en la que se tradujeron para luego ser presentados en 1710 por Edmond Halley.

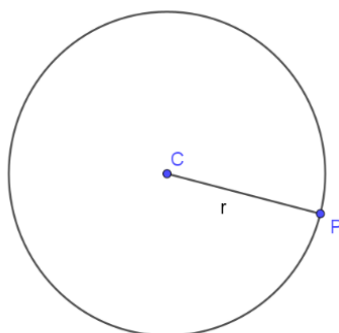
Apolonio también definió las cónicas como lugares geométricos, en varios de sus teoremas, como el conjunto de puntos que cumplen propiedades respecto a sus focos o directrices.

### 2.1.2.1 Lugar geométrico de las secciones cónicas

A continuación, se muestra con operaciones algebraicas y ayuda del software GeoGebra, la caracterización de las secciones cónicas de Apolonio como lugares geométricos. (Giraldo, 2017):

- La circunferencia es el lugar geométrico de los puntos en el plano cuya distancia a un punto fijo, llamado centro, es constante.

*Figura 6 Circunferencia con centro en C y P un punto sobre ella.*



*Fuente: elaboración propia.*

Si el centro es  $C(a, b)$ , un punto de la circunferencia es  $P(x, y)$  y su radio es  $r$  entonces:

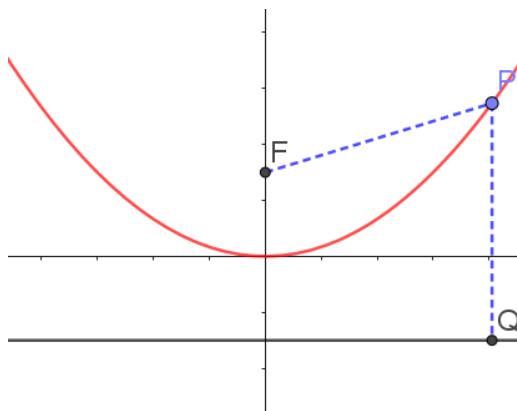
$$d(P, C) = r$$

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

- La parábola es el lugar geométrico de los puntos del plano que están a igual distancia de un punto fijo llamado foco  $(0, p)$  y de la directriz  $y = -p$ .

*Figura 7. Parábola como lugar de los puntos tales que  $FP=PQ$*



*Fuente:* Elaboración propia.

- En el caso particular de la .
- *Figura 7*, se asume sin pérdida de generalidad que el foco  $F(0, p)$  pertenece al eje  $y$  y su directriz es  $y = -p$ .

La distancia  $PF = PQ$  de tal manera que  $Q(x, -p)$  y  $P(x, y)$ .

$$PF = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - p)^2} = \sqrt{x^2 + (y - p)^2}$$

$$PQ = \sqrt{(x - x)^2 + (y - (-p))^2} = \sqrt{(y + p)^2}$$

$$x^2 + (y - p)^2 = (y + p)^2$$

$$x^2 + y^2 - 2yp + p^2 = y^2 + 2yp + p^2$$

$$x^2 = 4yp$$

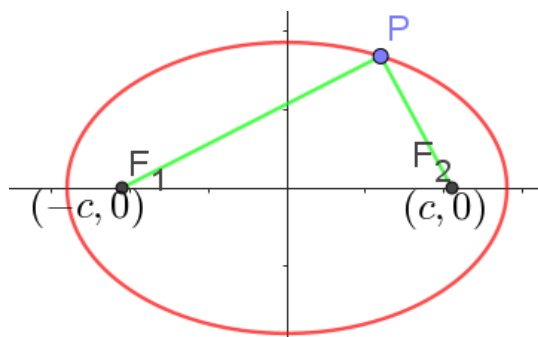
$$y = \frac{x^2}{4p}$$

- La elipse es el lugar geométrico de los puntos  $P$  del plano tal que la suma de las distancias de  $P$  a dos puntos fijos,  $F_1$  y  $F_2$ , llamados focos, es constante<sup>4</sup>.

---

<sup>4</sup> La constante es igual a la distancia del eje mayor. Si la distancia del centro a un vértice del eje mayor de la elipse es  $a$ , entonces la constante equivale a  $2a$ .

Figura 8 Elipse como lugar geométrico de los puntos que cumplen la condición.



Fuente: Elaboración propia.

En el caso particular de la Figura 8, se asume que  $F_1(-c, 0)$  y  $F_2(c, 0)$  son focos en el eje  $x$  y  $P(x, y)$ , entonces:

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

$$\sqrt{(x - (-c))^2 + (y - 0)^2} + \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

$$(x + c)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + (x - c)^2$$

$$x^2 + 2cx + c^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2$$

$$4cx - 4a^2 = -4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

$$cx - a^2 = -a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$x^2(c^2 - a^2) + a^2y^2 = -a^4 + a^2c^2$$

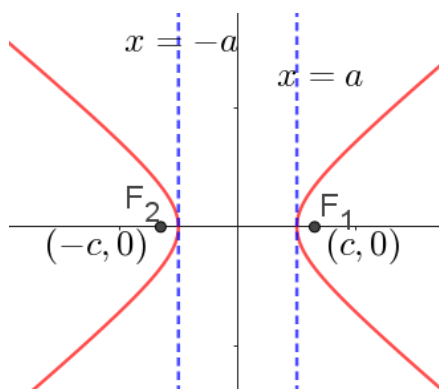
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(a^2 - c^2)} = 1$$

Por desigualdad triangular tenemos que  $2a > 2c$  entonces  $a > c > 0$  por lo tanto  $a^2 - c^2 > 0$

Si definimos  $b = \sqrt{a^2 - c^2}$  entonces  $b^2 = a^2 - c^2$ .

- La Hipérbola es el lugar geométrico de los puntos  $P$  del plano tal que la diferencia de las distancias de  $P$  a dos puntos fijos,  $F_1$  y  $F_2$  llamados focos, es constante.

*Figura 9 Hipérbola como lugar geométrico.*



*Fuente:* Elaboración propia.

En el caso particular de la Figura 9, se asume que  $F_1(-c, 0)$  y  $F_2(c, 0)$  son focos en el eje  $x$  y  $P(x, y)$ , entonces:

$$PF_1 - PF_2 = 2a$$

$$PF_1 - PF_2 = -2a$$

$$\sqrt{(x - (-c))^2 + (y - 0)^2} - \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x + c)^2 + (y)^2} - \sqrt{(x - c)^2 + (y)^2} = 2a$$

Con operaciones entre las expresiones algebraicas se muestra que:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(a^2 - c^2)} = 1$$

$$a^2 - c^2 < 0$$

$$a^2 - c^2 = -b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{(a^2 - c^2)} = 1$$

Para la rama de la hipérbola de la derecha se desarrolla:

$$PF_2 + PF_1 = 2a$$

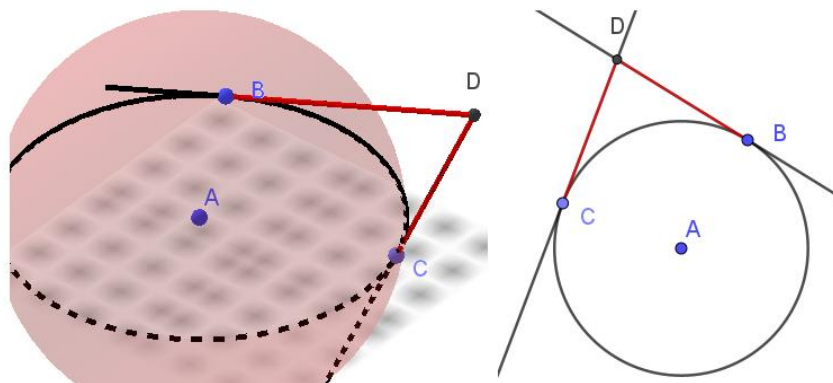
Mientras que, para la izquierda:

$$PF_1 - PF_2 = 2a$$

### 2.1.2.2 Las esferas de Dandelin

Según Ruiz (1996), Dandelin analizó las características de las secciones cónicas, a partir de la inscripción de dos esferas en un cono, partiendo de la igualdad que se genera entre dos rectas tangentes ( $\overline{BD}$  y  $\overline{CD}$ ) a la esfera que pasan por un punto exterior (D), ver Figura 10, deduciendo los siguientes resultados:

*Figura 10 Representación de los resultados mostrados por Dandelin*



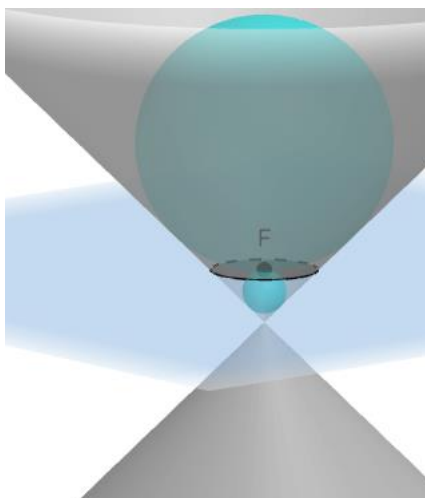
*Fuente: elaboración propia*

- La intersección de las dos rectas tangentes con la esfera genera tres puntos distintos (B y C puntos de tangencia de cada recta y D punto intersección entre las rectas).

- La intersección entre el plano generado por los tres puntos B, C y D con la esfera, es una circunferencia.
- Las rectas tangentes a una circunferencia trazadas desde un punto exterior generan distancias iguales entre dicho punto y los puntos de tangencia con la circunferencia.

Dandelin mostró que las secciones cónicas se pueden crear como lugares geométricos, desde las esferas que inscribió, de la siguiente manera: al inscribir una esfera en un cono por encima de un plano, siendo la intersección entre el cono y el plano, se obtiene una circunferencia. La intersección del plano con la esfera genera un punto, el cual coincide con el centro de dicha circunferencia. Lo mismo ocurre al inscribir una esfera por debajo del plano<sup>5</sup> (Figura 11).

*Figura 11. Intersección entre esfera y el plano secante.*



*Fuente: López (2022)*

---

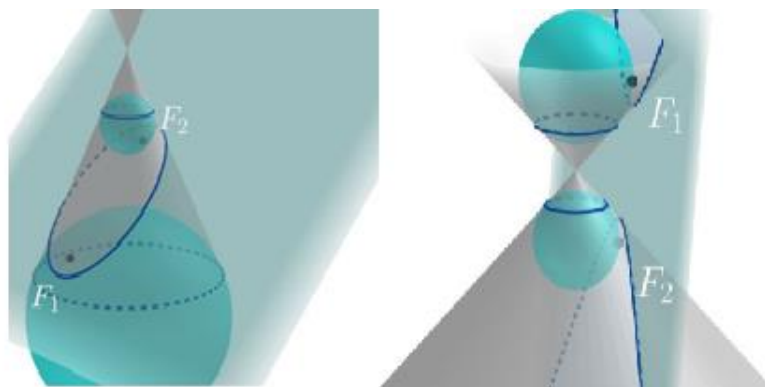
<sup>5</sup> La demostración de cónicas como lugar geométrico para Dandelin se puede encontrar en <https://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/Vol8/2/11Ruiz.pdf>.

Él realiza el mismo razonamiento con la elipse, la hipérbola y la parábola, variando la inclinación del plano.

La intersección entre el plano y el cono, luego de inscribir las esferas acontece que:

1. Para el caso de la elipse y la hipérbola resulta que las esferas son tangentes al plano en dos puntos distintos, generando así los focos de dichas cónicas.

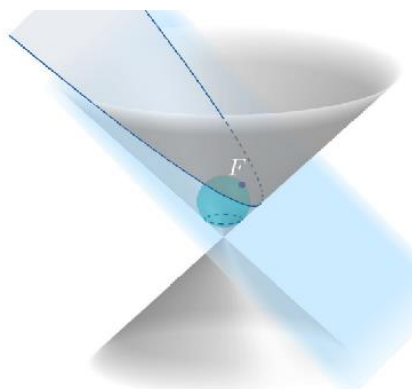
*Figura 12 Focos de la hipérbola como intersecciones de las esferas con el plano*



*Fuente: López (2022)*

2. Para la parábola, la intersección de las esferas con el plano resulta un único punto tangente, coincidiendo en el foco.

*Figura 13 Foco de la parábola como intersección del plano con la esfera en*



*Fuente: López (2022)*

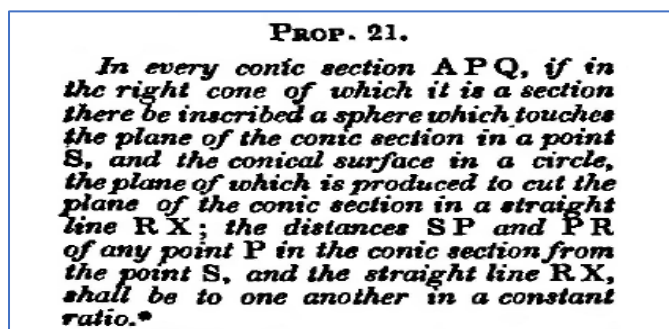
Según Lugo (2014), Hamilton demostró algunas propiedades importantes relacionadas con las secciones cónicas, por ejemplo:

- La determinación de la directriz como intersección entre el plano de sección y el plano perpendicular al eje del cono por el centro de la esfera focal
- La distancia de un punto P cualquiera de la sección cónica al foco es igual a la distancia entre P y el punto determinado por la intersección entre la esfera focal y la generatriz.
- El foco de una sección cónica se determina como una intersección entre la esfera focal y el plano de sección.

### 2.1.2.3 Excentricidad de las secciones cónicas

De acuerdo con Taylor (1881, como se citó en Lugo 2014) Morton deduce algunas propiedades sobre las secciones cónicas en el espacio, demostrando la proposición que enuncia las razones que se mantienen constantes relacionando los focos, las directrices y los puntos que pertenecen a la cónica (Figura 14).

*Figura 14. Proposición 21 sobre la razón que se mantiene constante en las secciones cónicas*



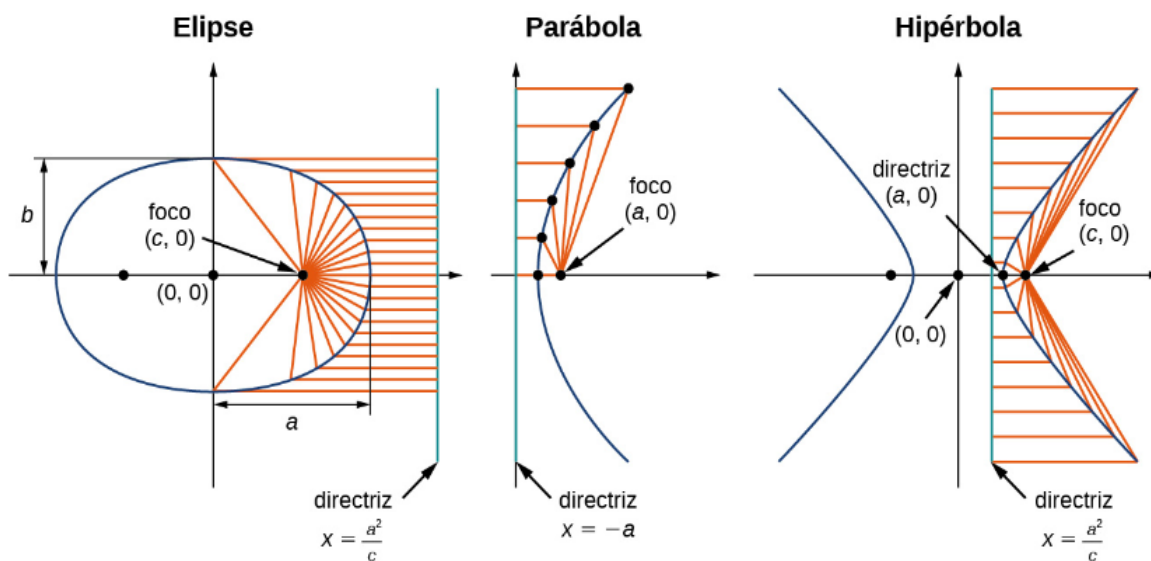
*Fuente: Lugo, 2014, p.14*

Por medio de esta proposición, Morton deduce una serie de corolarios, entre ellos se mencionan:

- La suma de las distancias de los puntos de una elipse o hipérbola a los focos es igual a la distancia entre los vértices principales.
- Para la elipse, la razón de distancias es  $0 < e < 1$ , para la hipérbola es  $e > 1$  y para la parábola es  $e = 1$ .

La razón  $e$  a la que se refiere Morton es conocida como excentricidad y está dada por:  $e = \frac{a}{c}$  (ver Figura 15), donde  $a$  es definida como la distancia de cualquier punto de la sección cónica al foco y  $c$  es la distancia más cercana de dicho punto a la directriz. Para las elipses no circulares y la hipérbola que tienen dos directrices,  $c$  es la distancia más cercana de dicho punto a la directriz más cercana. (Figura 15)

Figura 15. Directrices de las secciones cónicas



Fuente: [https://openstax.org/books/c%C3%A1lculo-volumen-2/pages/7-5-](https://openstax.org/books/c%C3%A1lculo-volumen-2/pages/7-5-secciones-conicas)

secciones-conicas

#### 2.1.2.4 Secciones cónicas por envolventes

En este apartado se tratan las secciones cónicas como curvas generadas por rectas, que en particular pertenecen a las familias de envolventes a dichas curvas. Según Yates (1974), Leibniz y Taylor fueron los primeros en estudiar las envolventes a partir de ecuaciones diferenciales.

Sea una familia de curvas en el plano  $C_t$  definidas a partir de la ecuación  $f_t(x, y) = 0$ , es posible entonces construir la función  $F(t, x, y) = f_t(x, y)$ . Se dice entonces que la envolvente de la familia de curvas  $C_t$  es el conjunto de puntos  $(x, y)$  para el que se cumple que:

1.  $F(t, x, y) = 0$
2.  $\frac{\partial F}{\partial t}(t, x, y) = 0$  para algún  $t$  y asumiendo que  $F$  es diferenciable.

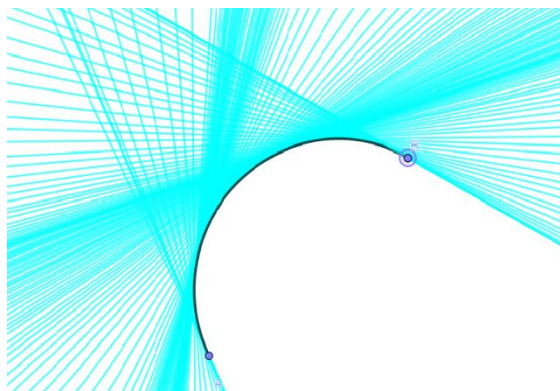
Las envolventes son una familia de rectas tangentes a una curva en cada punto de la sección. Se dice que todos los puntos de tangencia conforman la curva. Además, la ecuación de la envolvente es solución de la ecuación diferencial, pero esta ecuación diferencial no suele ser un miembro de la familia de las envolventes.

Aldana y Guerrero (2023) definieron la envolvente así:

Una curva  $\alpha$  es envolvente de una familia  $A$  de curvas, si (i) para cada punto  $P$  de  $\alpha$  existe una curva  $\xi$  de la familia  $A$  tal que  $\alpha \cap \xi = \{P\}$ , y (ii) para cada curva  $\xi$  de la familia  $A$  existe un punto  $Q$  en  $\alpha$  tal que  $\alpha \cap \xi = \{Q\}$ .” (p. 32)

En la Figura 16 se observan las curvas  $\xi$  que pertenecen a la familia  $A$  de envolventes a la curva  $\alpha$  determinada por los puntos  $A, B$ .

*Figura 16 Envoltentes a una curva*

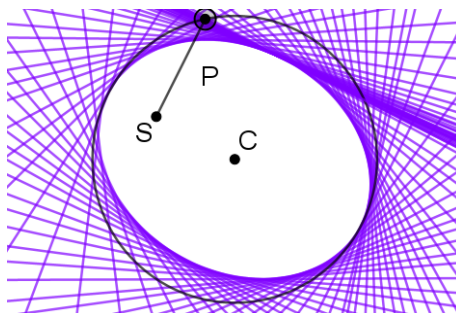


*Fuente:* Elaboración propia

Las siguientes construcciones se realizan con el apoyo de Pedoe (1979) que indica el procedimiento de construcción de las cónicas por medio de envoltentes.

- La elipse. Se construye una circunferencia con centro en  $C$  y un radio distinto de 0, se crea un punto  $S$  fijo en el interior de la circunferencia para construir el segmento  $SP$ , donde  $P$  es un punto que pertenece a la circunferencia. Por último, se traza la recta  $\xi$  perpendicular al segmento  $SP$  por el punto  $P$ . Todas las rectas  $\xi$  tangentes a  $P_1, P_2, P_3, \dots$  pertenecen a la familia de envoltentes de la elipse, siempre y cuando  $S$  sea distinto de  $C$  (Figura 17).

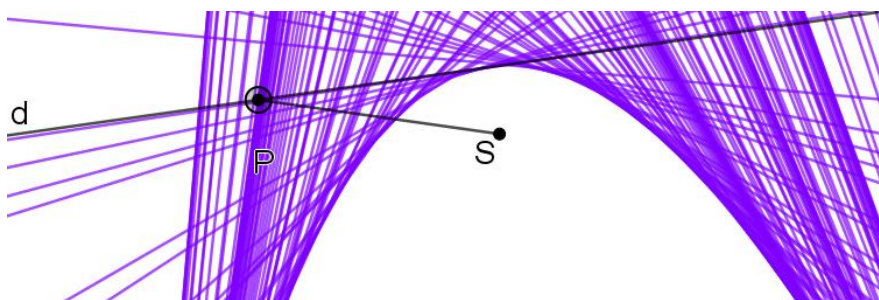
*Figura 17 Envoltentes de la elipse*



*Fuente:* Elaboración propia

- La parábola. Se construye una recta  $d$  y un punto  $P$  que pertenezca a la recta, se crea un punto  $S$  fijo que no pertenezca a la recta, se traza el segmento  $SP$ . Para terminar, se traza la recta  $\xi$  perpendicular al segmento  $SP$  por el punto  $P$ . Todas las rectas  $\xi$  tangentes a  $P_1, P_2, P_3 \dots$  pertenecen a la familia de envolventes de la parábola (Figura 18).

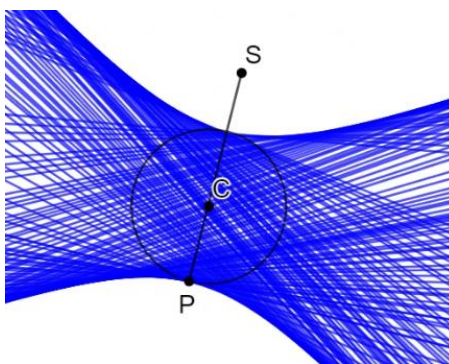
*Figura 18 Envolventes de la parábola*



*Fuente:* Elaboración propia

- La hipérbola. Se construye una circunferencia con centro en  $C$  y un radio distinto de 0, se crea un punto  $S$  fijo en el exterior de la circunferencia, para construir el segmento  $SP$ , donde  $P$  es un punto que pertenece a la circunferencia. Por último, se traza la recta  $\xi$  perpendicular al segmento  $SP$  por el punto  $P$ . Todas las rectas  $\xi$  tangentes a  $P_1, P_2, P_3 \dots$  pertenecen a la familia de envolventes de la hipérbola.

*Figura 19. Envolventes de la hipérbola*



*Fuente:* Elaboración propia

### 2.1.2.5 Cónicas como bisectrices de ángulos corneados

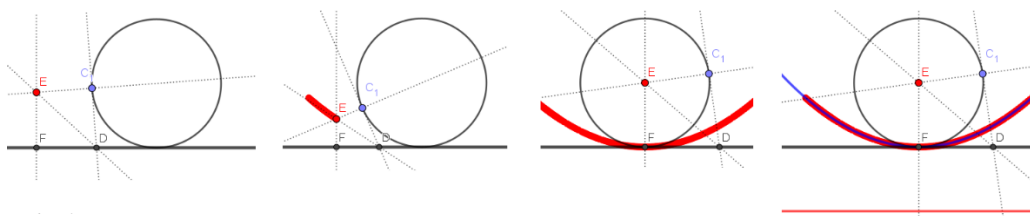
En el trabajo de Koshkin (2020) se menciona que Euclides nombra este tipo de ángulos en la proposición 16 del Libro III de los *Elementos* caracterizándolo como el ángulo formado por la recta tangente al diámetro de una circunferencia y la circunferencia. Más adelante, Proclo se cuestionó sobre el asunto y mencionó la dificultad de bisecar el ángulo corneado. En el año 1220, se denominó ángulo de contingencia y Cardano en 1550 lo llamó el ángulo de contacto.

Koshkin (2022) se propuso como objetivo dividir en dos los ángulos corneados, tema que, como se mencionó, a Proclo le resultó difícil. De esta manera inicia definiendo la bisectriz métrica: “Una curva se llama bisectriz métrica de un ángulo curvilíneo si cada punto de ella equidista de ambos lados del ángulo.” (p. 2).

Koshkin muestra cómo estas bisectrices se corresponden con las secciones cónicas y enuncian los siguientes teoremas:

**Teorema 1.** La bisectriz métrica de un ángulo de cuerno formado por una circunferencia y una recta tangente a esta es la parábola con foco en el centro del círculo, distancia focal igual al radio del círculo, y directriz paralela a la tangente (*Figura 20*).

*Figura 20.* Bisectriz de ángulo entre recta-circunferencia

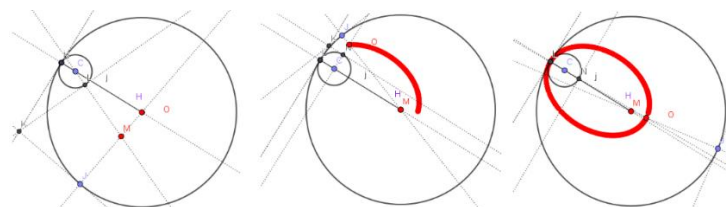


*Fuente:* Elaboración Propia

**Teorema 2.** La bisectriz métrica de un ángulo de cuerno formado por dos circunferencias que se encuentran en el mismo lado (*Figura 21*) o en lados opuestos (*Figura 22*) de una recta

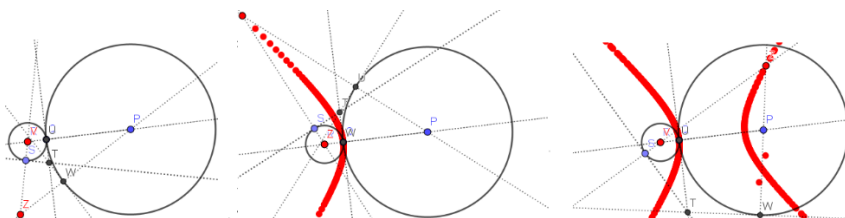
tangente común es la elipse (rama de la hipérbola) que pasa a través del vértice del ángulo, con focos en sus centros, y el eje mayor igual a la suma (o diferencia) de sus radios.

*Figura 21. bisectriz de ángulo entre dos circunferencias caso 1 (elipse)*



*Fuente: Elaboración Propia*

*Figura 22. Bisectriz de ángulo entre dos circunferencias caso 2*



*Fuente: Elaboración Propia*

No es de interés del trabajo de grado demostrar por qué las bisectrices cumplen las condiciones para ser sección cónica. Sin embargo, si el lector se encuentra interesado en el tema se recomienda revisar a Rodríguez (2023) en su trabajo de grado “El infinitesimal, una mirada de múltiples rostros” quien describe la construcción paso a paso de las bisectrices de cada uno de los casos, además describe la demostración de manera eficiente y clara.

### **2.1.3 Geometría Analítica**

René Descartes fue un filósofo francés que contribuyó a la física, la geometría analítica y la filosofía. Según Vargas (2018), Descartes contó con modos económicos que le permitieron viajar y dedicarse a estudiar Matemáticas, Física, Filosofía, Fisiología y Astronomía. En 1637 publicó el libro “Discurso del método” el cual cobró importancia para la historia debido a que

presentaba el razonamiento analítico, en contraposición al razonamiento sintético imperante durante siglos. El Discurso del método constó de tres apéndices: *Dióptrica*, *Meteoros* y *Geometría*. En particular, este último ensayo permitió la construcción de la geometría analítica.

Descartes presentó su obra de Geometría en tres libros, estableciendo, “que toda ecuación en dos incógnitas representa una curva o lugar en el plano y viceversa.” (Vargas, 2018, p. 39). En el primer libro aludió a los problemas que pueden construirse con líneas y círculos, en el segundo a la naturaleza de líneas curvas y en el último abordó el problema de Pappus de las tres y cuatro rectas, la trisección del ángulo y las curvas cónicas. Aplicando su método algebraico, logró establecer los inicios de la geometría analítica, en la que muestra cómo toda curva en un plano se puede escribir por medio de dos incógnitas. Este libro fue considerado como la construcción de problemas sólidos y supersólidos (o hipersólidos).

Según Ramírez (2013), Descartes estableció que todas las curvas se pueden representar en un plano bidimensional coordinado mediante una ecuación de dos incógnitas, demostrando que las secciones cónicas se pueden expresar como ecuaciones de segundo grado y que toda ecuación de segundo grado determina una curva cónica.

Las ecuaciones de segundo grado definidas por Descartes tienen la forma:  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = F$  donde  $A, B, C, D, E, F$  son coeficientes que toman valores dentro del conjunto de los números reales<sup>6</sup> siendo  $x, y$  incógnitas.

Según Lugo (2014) “Descartes dio condiciones sobre los coeficientes de la ecuación para que la sección correspondiera con una parábola, hipérbola, elipse o incluso una recta” (p. 13), además con operaciones algebraicas encontró una ecuación “más reducida” que caracterizaba

---

<sup>6</sup> Desde luego, es importante resaltar que, para la época de Descartes, los números reales no estaban todavía consolidados como objeto formal de las matemáticas, ni se había llegado tampoco a la axiomatización del sistema numérico de los reales. No obstante, la ecuación general de segundo grado, en la actualidad, permite que los coeficientes sean números reales.

cada sección cónica (ecuación canónica). En la Tabla 2 se presentan dichas condiciones (parámetros) y la ecuación canónica o forma reducida, además, de algunas características que toma la sección cónica a partir de la ecuación canónica.

*Tabla 2. Algunas características de las ecuaciones de las secciones cónicas*

| Sección cónica | Parámetros.        | Ecuación canónica                            |   | Características   |
|----------------|--------------------|--|---|---|
| Parábola       | B=0 y A=0 ó<br>C=0 | Parábola con el eje horizontal               | $(y - k)^2 = 4p(x - h)$                             | El vértice es $(h, k)$ .<br>El foco es $(h + p, k)$ .<br>La directriz es la recta $x = h - p$ .<br>El eje es la recta $y = k$ .   |
|                |                    | Parábola con el eje vertical                 | $(x - h)^2 = 4p(y - k)$                             | El vértice es $(h, k)$ .<br>El foco es $(h, k + p)$ .<br>La directriz es la recta $y = k - p$ .<br>El eje es la recta $x = h$ .   |
| Elipse         | B = 0 y<br>AC > 0  | Elipse con el eje vertical mayor.            | $\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1$ | El centro es $(h, k)$ .<br>La longitud del eje mayor es $2a$ .<br>La longitud del eje menor es $2b$ .<br>La distancia entre el centro y cualquier foco es $c$ con $c^2 = a^2 - b^2$ $a > b > 0$ . |
|                |                    | Elipse con el eje horizontal mayor.          | $\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$ |   |
| Hipérbola      | B = 0 y<br>AC < 0  | Hipérbola con el eje vertical transversal.   | $\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$ | El centro es $(h, k)$ .<br>La distancia entre los dos vértices es $2a$ .<br>La distancia entre los focos es $2c$ .<br>$c^2 = a^2 + b^2$ .   |
|                |                    | Hipérbola con el eje horizontal transversal. | $\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$ |   |

En el caso de que  $B \neq 0$  se recurre al discriminante  $\Delta$  de la ecuación para determinar la sección cónica así:

| $\Delta = B^2 - 4AC$    |              |
|-------------------------|--------------|
| Hipérbola               | $\Delta > 0$ |
| Parábola                | $\Delta = 0$ |
| Elipse o circunferencia | $\Delta < 0$ |

Según Vargas (2018), Descartes y Fermat son considerados como los padres de la geometría analítica. Los historiadores cuentan que en 1635 ambos publicaron sus trabajos con contenidos, notación y propósitos similares, creando así los inicios de la geometría analítica. Los dos matemáticos<sup>7</sup> mostraron que las ecuaciones de segundo grado representan secciones cónicas. Por su parte, Fermat mantuvo las mismas características de Viète utilizando vocales para representar las incógnitas y consonantes para los parámetros.

La idea clave de Fermat fue que, a partir de una ecuación algebraica de dos incógnitas, se definiera un lugar geométrico de puntos, es decir, una curva. Partiendo de un sistema coordenado, Fermat escogió a conveniencia una línea recta o una semirrecta que jugaba el papel de eje, cuyo origen era un punto fijo, y a partir de allí lograba encontrar una ecuación para la curva que representaba. “Fermat se propuso presentar una teoría de los lugares geométricos para un análisis adecuado a problemas como los propuestos por Apolonio y Pappus” (Vargas, 2018, p. 62).

---

<sup>7</sup> Descartes ni Fermat eran matemáticos de profesión, los dos estudiaron Derecho, sin embargo, su interés por las matemáticas los convirtió en grandes matemáticos.

Lugo (2014) menciona que Fermat se enfocó en la búsqueda del tipo de lugar geométrico que determinan las ecuaciones de primer y segundo grado, demostrando, al igual que Descartes, que toda ecuación de segundo grado representa una sección cónica o en su defecto un par de rectas (cónicas degeneradas). Además, estudió las ecuaciones de tercer y cuarto grado en términos de las intersecciones que se generan entre dos secciones cónicas. Sin embargo, Fermat restringió sus operaciones para el conjunto de números positivos, esto implica que solo realizaba operaciones en el primer cuadrante de los ejes coordenados  $x$  y  $y$ .

#### ***2.1.4 Instrumentos para construir cónicas***

Como se ha descrito anteriormente las secciones cónicas fueron estudiadas por Menecmo y Apolonio, quienes las construían a partir de secciones entre un cono y un plano, además realizaron su estudio desde una perspectiva tridimensional, pero realizando sus demostraciones desde la geometría euclidiana. Al respecto Martínez (2015) menciona que durante los siglos XV y XVI hubo una transición del pensamiento en la que se crearon instrumentos para garantizar cualquier conocimiento, de esta manera, la forma de validar las cónicas fue mediante su construcción. Para ello, los instrumentos utilizados fueron: los elipsógrafos, parabológrafo e hiperbológrafo. A continuación, se presentan algunos de ellos:

##### **2.1.4.1 Elipsógrafos**

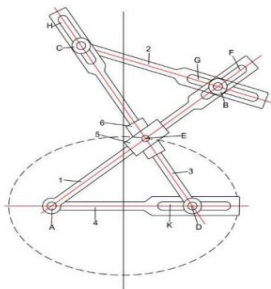
Los elipsógrafos son instrumentos mecánicos, utilizados para trazar elipses mediante un movimiento continuo.

Entre los elipsógrafos más famosos se encuentran:

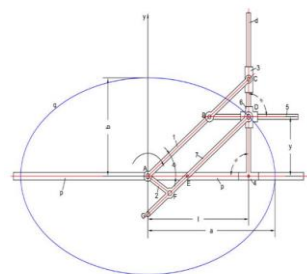
- Elipsógrafo de palancas y colisa de Artobolevski (Figura 23)
- Elipsógrafo de palancas y colisa de Kleiber (Figura 24)
- Elipsógrafo de palancas y colisa de Dobrovolski (Figura 25)

### 2.1.4.2 Hiperbológrafos

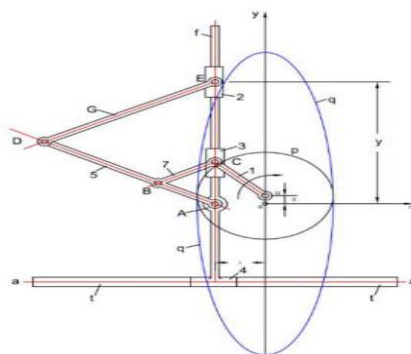
*Figura 23. Elipsógrafo de palancas y colisa de Artobolevski*



*Figura 24. Elipsógrafo de palancas y colisa de Kleiber*



*Figura 25. Elipsógrafo de palancas y colisa de Dobrovolski*



Los hiperbológrafos son instrumentos mecánicos utilizados para trazar hipérbolas.

Entre los hiperbológrafos más conocidos, tenemos:

- Hiperbológrafo de palancas y colisa de Neuberg (Figura 26)
- Hiperbológrafo de palancas y colisa de Rothschild (Figura 27)
- Hiperbológrafo de palancas y colisa de Inwards (Figura 28)
- Hiperbológrafo de palancas y colisa de Artobolevski (Figura 29)

Figura 26. Hiperbológrafo de palancas y colisa de Neuberg

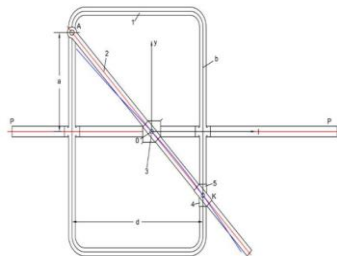


Figura 27. Hiperbológrafo de palancas y colisa de Rothschild

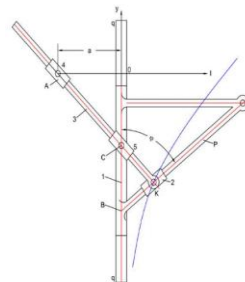


Figura 28. Hiperbológrafo de palancas y colisa de Inwards

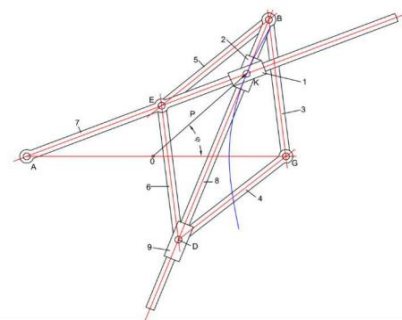
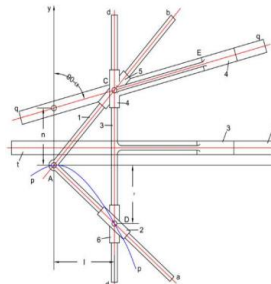


Figura 29. Hiperbológrafo de palancas y colisa de Artobolevski



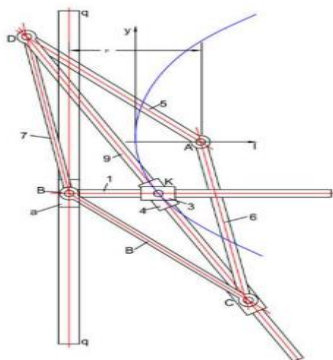
### 2.1.4.3 Parabológrafos

Los parabológrafos son instrumentos mediante los cuales se trazan parábolas.

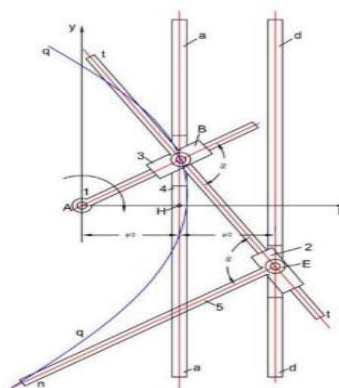
Los parabológrafos más destacados son:

- Parabológrafo de palancas y colisa de Inwards (Figura 30)
- Parabológrafo de palancas y colisa de Artobolevski (Figura 31)
- Parabológrafo de palancas y colisa de Lebeau (Figura 32)

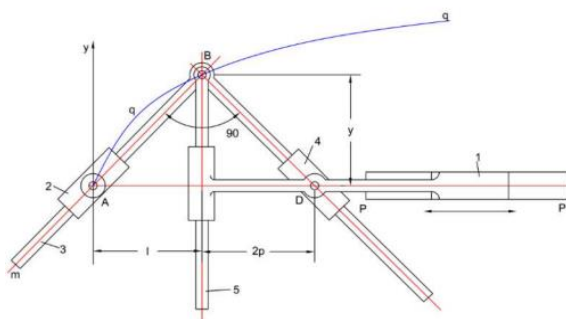
*Figura 30. Parabológrafo de palancas y colisa de Inwards*



*Figura 31. Parabológrafo de palancas y colisa de Artobolevski*



*Figura 32. Parabológrafo de palancas y colisa de Lebeau*



### **2.1.5 Relaciones con la Física**

Según Mesa y Villa (2009), Galileo relacionó las secciones cónicas con distintos fenómenos naturales, matematizando el movimiento de proyectiles con el fin de comprender la curva que recorren. Así, Galileo es el primero en establecer la ruptura entre la concepción de parábola, que se traía desde Apolonio como una figura u objeto estático, a ser considerada como el resultado de fenómenos de variación en situaciones que se asocian a trayectorias parabólicas de cuerpos.

Según Quintana et al. (2024), Galileo se relacionó con personal del arsenal para estudiar las trayectorias que describían los proyectiles de artillería, descubriendo avances importantes en

la aceleración y la trayectoria de dichos proyectiles, resolviendo problemas del movimiento uniforme y de caída libre, basándose en las balas de cañón en el aire y los chorros de agua de las fuentes.

Según Hawking (2010, como se citó en Quintana, 2023) Galileo planteó la siguiente proposición, “Un proyectil que se desliza con un movimiento compuesto por un movimiento horizontal y uniforme y por un movimiento descendente, naturalmente acelerado, describe, con dicho movimiento, una línea semiparabólica” (p. 152) logrando establecer que el movimiento de proyectiles describe geométricamente la curva conocida como parábola. Cabe resaltar que Galileo no estableció una ecuación cuadrática, solo comparó los fenómenos físicos con el modelo de la parábola que se tenía en ese entonces.

Otro aporte importante para la física lo realizó Kepler, quien se apoyó del concepto de la elipse para definir las tres leyes<sup>8</sup> que llevan su nombre. Bayona (2013) menciona que desde la antigüedad la astronomía ha llamado la atención de algunas culturas como la babilónica, china, egipcia, griega, entre otras. Así, es importante destacar a pensadores como Pitágoras, Eudoxo, Aristóteles y Claudio Ptolomeo, quienes afirmaron que la tierra se encontraba en el centro del universo y los demás planetas junto con el sol giraban alrededor de ella, constituyendo el modelo geocéntrico (Figura 33). Aristarco de Samos no se convenció del modelo y planteó que el sol se encontraba en el centro de los planetas y estos giraban a su alrededor, estableciendo el modelo Heliocéntrico (Figura 34).

---

<sup>8</sup> Leyes de Kepler Tomadas de Bayona (2013):

1. La trayectoria de cada planeta alrededor del sol es una elipse con el sol en uno de los focos.
2. Los planetas barren áreas iguales en tiempos iguales.
3. Los cuadrados de los períodos orbitales sidéreos de los planetas son proporcionales a los cubos de sus distancias medias al sol.

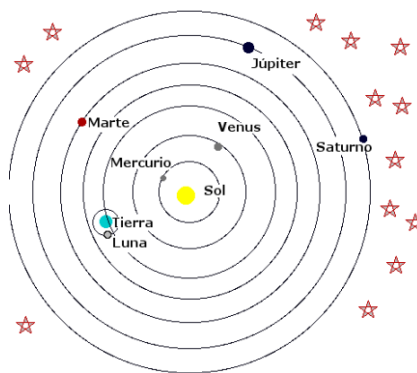
El modelo geocéntrico fue aceptado por la iglesia y perduró hasta el siglo XV, cuando Nicolás Copérnico retomó la teoría de Aristarco de Samos. Según Bayona (2013), “Copérnico causó mucha conmoción en la iglesia católica por su modelo donde el sol se encuentra en el centro del universo y los demás planetas giran alrededor de él cada uno en su esfera” (p. 20), cabe agregar también que hasta ese entonces el movimiento de los planetas alrededor del sol se consideró circular.

*Figura 33 Modelo geocéntrico de Ptolomeo*



*Fuente:* <http://protonesexplosivos.blogspot.com/2010/01/pregunta-1.html>

*Figura 34 Modelo heliocéntrico de Aristarco*

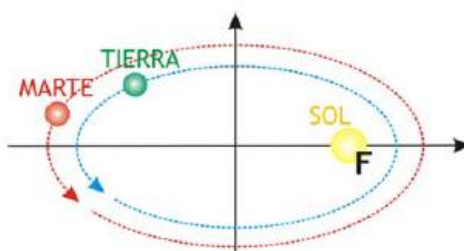


*Fuente:* <https://www.astronomia-iniciacion.com/sistema-heliocentrico.html>

Al respecto de lo anterior, Kepler fue un matemático y astrónomo que partió del modelo de Copérnico; sin embargo, estaba en desacuerdo con que el sol estuviera en el centro del universo.

Kepler conoció a Tycho Brahe quien es considerado como uno de los astrónomos más precisos que ha estudiado la órbita celeste. Brahe realizó mediciones espaciales precisas, que le ayudaron a Kepler a establecer las leyes que rigen el movimiento planetario, descubriendo que la distancia entre el sol y la tierra variaba de acuerdo con la posición que se encontrara en la órbita. Por medio de ensayos y errores concluyó que Marte describe un movimiento elíptico alrededor del sol. Apoyándose de los datos recolectados por Brahe, fundamentó la primera ley de Kepler “La trayectoria de cada planeta alrededor del Sol es una elipse con el Sol en uno de los focos”. (Bayona, 2013, p. 26) (Figura 35).

*Figura 35 Modelo de Kepler de la trayectoria de los planetas*



*Fuente:* Tomado de Bayona (2013).

Según Navarro (2009) Newton representó el movimiento de los planetas retomando los trabajos de Kepler por medio de las tres leyes del universo: inercia, fuerza, acción y reacción, añadiendo la fuerza gravitacional a la tercera ley de Kepler, mostrando que el movimiento de cualquier cuerpo alrededor de otro producido por fuerza gravitatoria, se representa mediante una curva cónica.

## **2.2 Marco Didáctico**

En este marco didáctico se aborda la definición del concepto de tarea de aprendizaje en matemáticas desde la propuesta de Pedro Gómez (Gómez et al., 2018). Se reconoce la importancia de involucrar la historia de las matemáticas como elemento fundamental del trabajo de grado, además de ubicar las secciones cónicas en el ámbito educativo y curricular

colombiano, basado en los lineamientos curriculares, derechos básicos de aprendizaje y los estándares básicos de competencias matemáticas propuestos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998, 2006, 2016).

### ***2.2.1 Tareas de aprendizaje en matemáticas***

Según Gómez et al. (2018) las tareas toman distintos significados en el ámbito educativo. Así, las tareas pueden ser deberes que asigna el docente para que los estudiantes realicen en casa y presenten en clase, pero también se alude como tarea a los ejercicios rutinarios que desarrollan durante la sesión de clase.

Para los autores el significado de tarea es mucho más amplio, considerando que estas son parte central del proceso enseñanza-aprendizaje. Gómez et al. (2018) clasifican las tareas en dos tipos, de aprendizaje y de evaluación.

Las tareas de aprendizaje son propuestas para que los estudiantes cumplan expectativas establecidas y superen limitaciones de aprendizaje y, las tareas de evaluación son las que se proponen para recopilar información, evidenciar el conocimiento y habilidades para asignar una nota.

Las tareas de aprendizaje en matemáticas son estructuradas por el propósito de aprendizaje y el contenido matemático, orientada a lograr uno o más objetivos de aprendizaje o a la superación de errores y dificultades que presentan los estudiantes.

Para establecer una tarea es indispensable que se proporcione información dentro de un contexto, sea este matemático o no, para que el estudiante produzca otra información de respuesta. Según Gómez et al. (2018) se requiere de la siguiente condición: “una tarea solicita la solución de un solo requerimiento (pregunta) con base en la información dada” (p. 203) por lo que dos preguntas pueden generar dos tareas diferentes aun teniendo un mismo contexto.

El profesor debe establecer unos elementos y describirlos a detalle para prever su actuación y la de los estudiantes durante el desarrollo de la tarea. Los siete elementos que establecen los autores son: requisitos, meta, formulación, materiales y recursos, agrupamiento, interacción y temporalidad. A continuación, se comenta cada uno:

- **Requisitos:** Los requisitos son los conocimientos y destrezas necesarios que deben tener los estudiantes de acuerdo con el nivel educativo, para lograr las metas de una tarea.
- **Metas:** Son los propósitos que el profesor asigna en una tarea, estos pueden ser de aprendizaje o que contribuyan a superar errores y dificultades. Es difícil tratar todas las expectativas y limitaciones en una tarea, por ende, es importante establecer cuáles aspectos se abordarán y tenerlos en cuenta durante la implementación.
- **Formulación de la tarea matemática escolar:** Hace referencia a la instrucción que propone el docente a partir de un contexto, para que sus estudiantes produzcan una información final como solución a la información dada.
- **Materiales y recursos:** Los materiales se diferencian de los recursos porque se diseñan y utilizan para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de forma didáctica (geoplano o domino matemático), mientras que los recursos son los instrumentos tradicionales utilizados por el docente y los estudiantes (marcadores, tablero, papel y el lápiz).

Se hace énfasis en este apartado sobre el cuestionamiento de la pertinencia del uso de los materiales o recursos para el desarrollo de una tarea matemática, para ello se deben tener en cuenta dos criterios: la eficiencia la cual atiende a la disponibilidad del tiempo y uso de los materiales y recursos necesarios para realizar una tarea y la eficacia refiriéndose a

la reflexión sobre el desempeño de los estudiantes con el manejo de los materiales y recursos propuestos.

- **Agrupamiento:** El aprendizaje de los estudiantes se ve favorecido cuando se enfrentan a errores o dificultades e intentan superarlos, esta superación es fundamental para su aprendizaje y se puede lograr de manera individual, sin embargo, cuando los estudiantes interactúan entre sí y con el docente para abordar y discutir la solución a un problema, se logran afrontar dificultades que la individualidad no resuelve. Por ende, el trabajo en parejas o en grupos pequeños tiene sentido para el aprendizaje de las matemáticas.

Para realizar una tarea matemática se puede organizar a los estudiantes en distintas formas de agrupamiento, sin embargo, es pertinente que el docente se cuestione sobre cuál tipo de agrupamiento es el más propicio para cumplir las metas de la tarea.

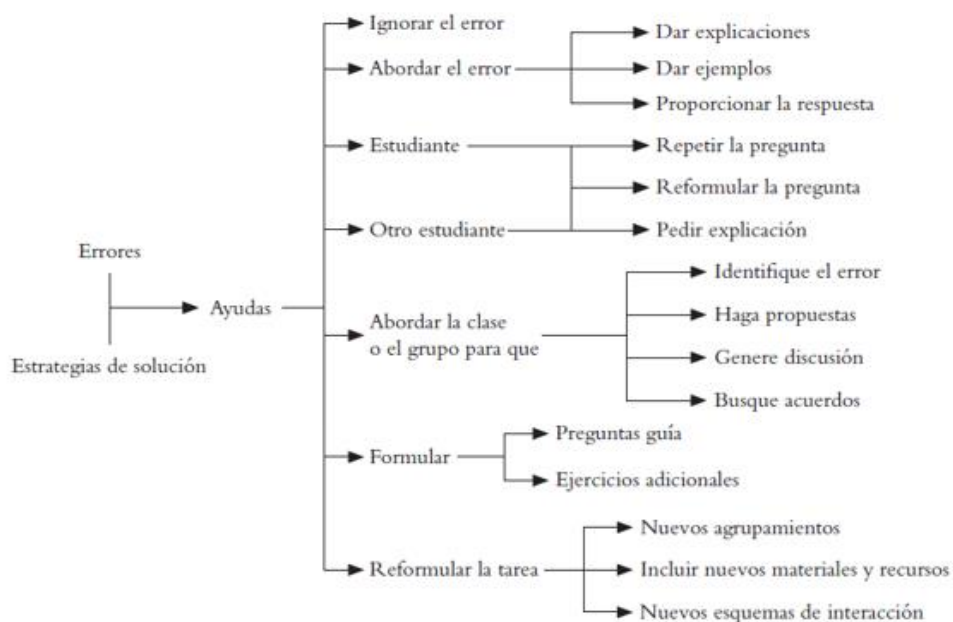
- **Interacción y comunicación en clase:** La diversidad de agrupamientos mencionados anteriormente genera diferentes formas de interacción entre los estudiantes, el profesor, los grupos pequeños y los grupos en clase. Cuando los estudiantes abordan un problema y argumentan su solución entre grupos pequeños o grandes se está promoviendo la interacción entre los estudiantes y el profesor, lo cual fortalece el aprendizaje de las matemáticas.

La interacción es un elemento fundamental de las tareas matemáticas, por esto el docente debe planearla y preverla generando situaciones para que los estudiantes pongan su conocimiento en juego, pues implica que ellos se comuniquen, argumenten, critiquen, defiendan su posición y lleguen a acuerdos de una solución común. Al prever esta

interacción se tiene como objetivo promover el aprendizaje y permitir que el docente corrobore como se desarrolla e interviene en el proceso.

El docente debe planear su actuación como orientador o director en los procesos de negociación y de las dificultades, que se presenten imponiendo los ritmos de la clase. Él debe planificar su interacción de acuerdo con las previsiones de estrategias de solución y errores. La actuación del docente depende de las metas que se proponen para la tarea y de su contribución en las discusiones que se presenten, fomentando la superación de errores. Él puede prever su actuación desde unas perspectivas (Figura 36).

Figura 36. Previsión de la actuación del docente desde diferentes perspectivas



Fuente: Gómez et al. (2018)

**Temporalidad de la tarea matemática escolar:** Cuando el docente diseña una tarea puede preverla a partir de una secuencia de etapas, él decidirá los materiales y recursos, la agrupación y la interacción para desarrollar durante cada etapa, por consiguiente, la temporalidad está ligada al tiempo y orden considerado para cada una de las etapas

### ***2.2.2 Aspectos curriculares***

El Ministerio de Educación Nacional (MEN) en el año 2006 publicó los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (EBCM), documento en el cual estableció lo que todo niño, niña y joven debe saber y saber hacer, buscando cumplir las expectativas de calidad educativa, siendo esto esencial para el desarrollo de los países.

Según el MEN (2006) “La educación matemática debe responder a nuevas demandas globales y nacionales, como las relacionadas con una educación para todos, la atención a la diversidad y a la interculturalidad y la formación de ciudadanos” (p. 46). De esta manera estableció las competencias que cada estudiante debe lograr de acuerdo con el ciclo de estudio y cada uno de los pensamientos matemáticos.

En el año 2016, el MEN presentó los Derechos Básicos de Aprendizajes (DBA) los cuales apuntan al desarrollo de conocimientos, habilidades y valores que forman integralmente al estudiante. Los DBA proponen una serie de aprendizajes estructurados por: enunciado, evidencias y ejemplos que abarcan desde grado transición hasta once. Según el MEN (2016) “los DBA se organizan guardando coherencia con los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencias (EBC)” (p. 6) garantizando una serie de aprendizajes, con el fin de que los estudiantes logren los EBC propuestos por cada grupo de grados.

Según el MEN (2006) los estándares básicos establecidos de grado décimo a undécimo para el pensamiento espacial y sistemas geométricos son:

- Identifico en forma visual, gráfica y algebraica algunas propiedades de las curvas que se observan en los bordes obtenidos por cortes longitudinales, diagonales y transversales en un cilindro y en un cono.

- Identifico características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana y otros (polares, cilíndricos y esféricos) y en particular de las curvas y figuras cónicas.
- Resuelvo problemas en los que se usen las propiedades geométricas de figuras cónicas por medio de transformaciones de las representaciones algebraicas de esas figuras.
- Uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias. (...)
- Reconozco y describo curvas y/o lugares geométricos. (p.88)

Los estándares anteriores permiten ubicar las secciones cónicas en el currículo colombiano como un objeto matemático propuesto para estudiantes de grado décimo y undécimo.

Al revisar los DBA para grado décimo, en el enunciado “explora y describe las propiedades de los lugares y de sus transformaciones a partir de diferentes representaciones” (MEN, 2016, p.76) se encontraron las siguientes evidencias:

- Localiza objetos geométricos en el plano cartesiano.
- Identifica las propiedades de lugares geométricos a través de su representación en un sistema de referencia.
- Utiliza las expresiones simbólicas de las cónicas y propone los rangos de variación para obtener una gráfica requerida.
- Representa lugares geométricos en el plano cartesiano, a partir de su expresión algebraica.

### **2.2.3 Uso del GeoGebra en el ámbito educativo**

Aunque las tareas del trabajo no están centradas en el uso de tecnología, se considera relevante incluir una sección sobre GeoGebra, debido a que es una herramienta útil para realizar construcciones y comprobaciones que aportan a este trabajo. Aunque no se mencione explícitamente en las tareas, su integración permitió ilustrar de manera visual y práctica algunos conceptos tratados, facilitando la comprensión y manipulación de las cónicas. Por esta razón, se le dedica una breve sección enseguida para destacar su utilidad como recurso tecnológico.

GeoGebra es un software dinámico de uso libre que permite la construcción y visualización de figuras geométricas, además de ser una potente calculadora gracias a todas sus herramientas incorporadas. Según Bello (2013) el software está dirigido para estudiantes y docentes fortaleciendo el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas.

Como indica Castellanos (2010)

Construir en forma precisa y rápida usando los componentes básicos de la geometría.  
Razonar y comprender acerca de las relaciones geométricas entre diferentes objetos.  
Controlar el aspecto gráfico de una figura, usando simplemente el *mouse*. Ejecutar cálculos de medida. Manipular las figuras geométricas y observar las semejanzas y diferencias entre ellas. Repetir las construcciones las veces que ellos necesiten hacer, es decir observar los pasos que se siguieron para realizarlas. Hacer las conjeturas respectivas de las construcciones realizadas. Imprimir las construcciones. (p. 46)

### **2.2.4 La Historia de las Matemáticas como recurso didáctico**

En este trabajo de grado se utiliza la Historia de las Matemáticas para el diseño de tareas en el aprendizaje de las secciones cónicas, teniendo en cuenta la historia como un recurso didáctico (Palenzuela, 2016). Como señala Palenzuela (2016) citando a Nolla (2001).

Los conceptos y las ideas matemáticas que se tratan [...] son presentados a los alumnos de una forma cerrada y acabada. Se olvida que han surgido después de un largo proceso de gestación, en las que las intuiciones más fecundas con otras estériles han configurado sus presentaciones sucesivas. A lo largo de la Historia, estas ideas han sido generadas por diversos tipos de problemas, prácticos o teóricos, pertenecientes a la propia matemática o a otras disciplinas. El conocimiento de estos problemas, y el estudio de la evolución de su tratamiento y de los nuevos problemas que han generado, proporciona los fundamentos para la comprensión de las ideas y conceptos que de ellos han resultado (p.1).

De acuerdo con lo anterior, los contenidos matemáticos se presentan a los estudiantes de forma tradicional o de forma reiterativa, explicación, ejercicios y situaciones problemas en la que ellos se limitan a memorizar y aplicar algoritmos, dice Palenzuela (2016) “que se debe evitar presentar las Matemáticas de esa forma, restableciendo el estatus de la Matemática como actividad cultural y humana que se tenía desde la época Helenística” (p. 5). Presentar las matemáticas a los estudiantes desde un contexto histórico les va a permitir “entender, comprender, reflexionar, incluso criticar las nociones matemáticas que estudian, ya que sabrán su verdadero origen y su verdadera naturaleza” (Poincare, 1944)

Dicho esto, reconocemos la importancia de la historia en la formación del profesor de matemáticas y es pertinente preguntarse entonces, ¿qué clase de Historia de las de Matemáticas es la adecuada para el profesor de Matemáticas? Al respecto, Guacaneme (2010) menciona que se pueden encontrar cinco categorías al respecto: los que aluden a la racionalidad (los por qué), a las intenciones (los para qué), al tipo de historia (los qué), a las estrategias metodológicas (los

cómo) y al momento adecuado (los cuándoos), de una formación histórico-epistemológica en función del conocimiento del profesor.

### 3. Aspectos Metodológicos

En este apartado del trabajo de grado se describen los asuntos metodológicos considerados para su realización, la cual se desarrolló en cuatro fases. La primera fase consistió en una revisión documental de bibliografía relevante sobre las secciones cónicas, el uso de la historia, los aspectos curriculares y la definición de tarea. Esta revisión permitió consolidar el marco teórico y el marco didáctico.

En la segunda fase se llevó a cabo el diseño de las tareas, para lo cual se tomó como base la propuesta de Gómez et al. (2018). A partir de esto, se elaboraron tres tareas: la primera orientada a la construcción de las secciones cónicas, la segunda centrada en los aspectos algebraicos de las mismas y, la tercera, enfocada en sus aplicaciones prácticas.

En la tercera fase, se lleva a cabo el pilotaje de las tareas diseñadas en un grupo de estudiantes de décimo grado, compuesto por 31 participantes. El objetivo de la prueba piloto fue poner en práctica las tareas elaboradas en la fase de diseño para evaluar su efectividad e identificar posibles dificultades en su implementación. Además, se describe cómo se realiza el análisis de las tareas implementadas.

#### 3.1 Fase 1: Revisión documental

Para este apartado de revisión documental se toma en cuenta el libro de (Camargo, 2021) quien menciona que la revisión documental es una estrategia de investigación que consiste en la exploración de materiales escritos, ya sean en formato físico o digital. Su propósito es analizar e interpretar el contenido de los textos, así como las perspectivas de los autores, a partir de consideraciones conceptuales específicas.

El objetivo principal de este proceso es organizar y clasificar las diversas propuestas, enfoques y conceptos que se encuentran en los documentos estudiados. Además, se puede

realizar un análisis cuantitativo, como el conteo de la frecuencia de ciertos temas y proporcionar explicaciones a partir de la comparación de datos obtenidos de distintas fuentes.

A través de la revisión documental es posible identificar patrones, tendencias y diferencias entre los enfoques de los autores, lo que contribuye a una visión más completa y profunda de los temas investigados.

Para este trabajo específicamente, la revisión consistió en la búsqueda de material escrito, recuperado de repositorios de la Universidad Pedagógica Nacional, Universidad de los Andes, Universidad Nacional de General Sarmiento, entre otras. El objetivo principal de esta revisión fue interpretar y describir el contenido conceptual relacionado con la historia de las secciones cónicas, la definición de tarea matemática y el uso de la historia de las matemáticas en el aula. Producto de dicha revisión se recolectaron, depuraron y revisaron siete documentos sobre la historia de las secciones cónicas. Sin embargo, cuando se crearon las categorías que se mencionan en el siguiente párrafo, fue necesario buscar más material que aportara al trabajo para profundizar en los planteamientos de los textos iniciales.

De esta manera se buscó clasificar los conceptos matemáticos y establecer un orden histórico, lo que permitió construir las siguientes categorías: problemas clásicos griegos, caracterización de las secciones cónicas, geometría analítica, instrumentos para la construcción de cónicas y relaciones con la física. Estas categorías conformaron el marco histórico del trabajo de grado. Además, la revisión documental sobre la historia de las matemáticas en el contexto del aula, así como la definición de tarea propuesta por Pedro Gómez y la ubicación de las secciones cónicas en los textos curriculares del Ministerio de Educación Nacional, constituyeron el marco didáctico del trabajo de grado.

### 3.2 Fase 2: Diseño de Tareas

Para el diseño de tareas se tuvo en cuenta la propuesta de Gómez et al. (2018), quienes dicen que por medio de las tareas de aprendizaje los estudiantes pueden superar las limitaciones y cumplen las expectativas establecidas, además, estas están estructuradas con un propósito de aprendizaje y un contenido matemático. La propuesta de estos autores contiene los siete elementos que fueron mencionados en la sección “tareas de aprendizaje en matemáticas”.

A continuación, se describe, utilizando el modelo de Gómez et al. (2018), el diseño para cada una de las tres tareas elaboradas. En dicha descripción se plantean las metas de las tareas, las cuales se hicieron corresponder con algunos estándares básicos de competencias matemáticas (MEN, 2006). Además, para la formulación matemática se tuvo en cuenta que los ítems de las tareas se relacionaran con algún hito histórico mencionado en el marco histórico.

#### 3.2.1 Tarea 1

**Requisitos:** La tarea requiere que los estudiantes tengan un manejo básico de GeoGebra, así como habilidades fundamentales de comprensión lectora. Además, que los estudiantes se expresen para elaborar preguntas.

**Metas:** En la Tarea 1, se espera que los estudiantes reconozcan e identifiquen las secciones cónicas utilizando diversos métodos históricos establecidos en las matemáticas. Esta actividad está alineada con el MEN (2016) "Reconozco y describo curvas y/o lugares geométricos, además de identificar las curvas que se observan en los bordes obtenidos por cortes longitudinales, diagonales y transversales en un cilindro y en un cono." (p. 88).

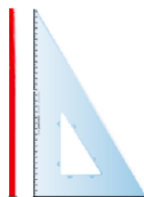
## Formulación de la tarea matemática:

### Parte I

#### Lugares geométricos

##### Primera construcción:

1. En una hoja de bloc en posición horizontal, dibuje una línea paralela al borde inferior (a 2 cm del borde) que vaya de extremo a extremo de la hoja.
2. A continuación, corte una cuerda de nailon que tenga la misma longitud que el cateto de mayor medida de la escuadra que va a utilizar.

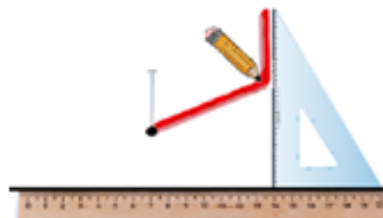


3. Sujete la cuerda de nailon a la puntilla que está en la tabla<sup>9</sup> y coloque la escuadra de tal modo que el cateto de menor medida repose sobre la línea horizontal. Luego, sujete el otro extremo de la cuerda en el vértice del ángulo no recto de la escuadra que no está sobre la línea, como se muestra a continuación:



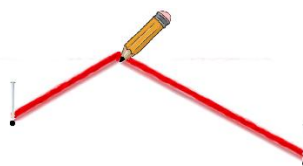
4. Apoye el lápiz mientras tensionan la cuerda sobre el cateto mayor y deslízalo a lo largo de la escuadra.

<sup>9</sup> La puntilla debe estar en la parte superior de la línea trazada, entre 2 cm y 4 cm. Se recomienda que esté centrada.



### Segunda construcción

1. Sujete un nailon entre las dos puntillas y asegúrese de que la longitud de la cuerda de nailon sea mayor que la distancia entre las puntillas.
2. Utilizando un lápiz, tense el nailon y deslícelo suavemente para trazar la curva, como se muestra a continuación:



### Tercera construcción

1. En la primera puntilla, coloque un extremo de la vara de madera. (la vara tiene dos orificios)



2. En el otro orificio de la vara sujete un extremo del nailon y el otro extremo del nailon lo debe sujetar a la segunda puntilla, como se muestra a continuación:



- Finalmente, se deslizará un lápiz a lo largo del nailon, manteniéndolo siempre tenso.

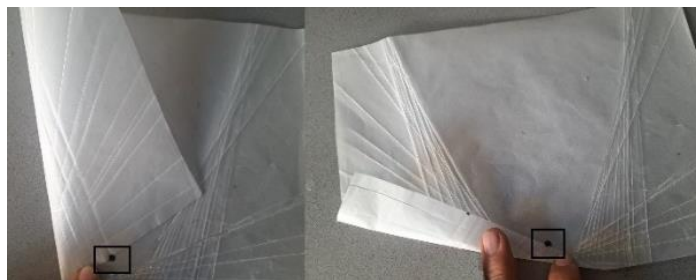
Nota: se deben variar las posiciones de la vara de madera cuatro veces, cambiando la posición (arriba y debajo de las puntillas) y el lugar (intercambiando de orificios).



### Doblado de papel - envolvertes

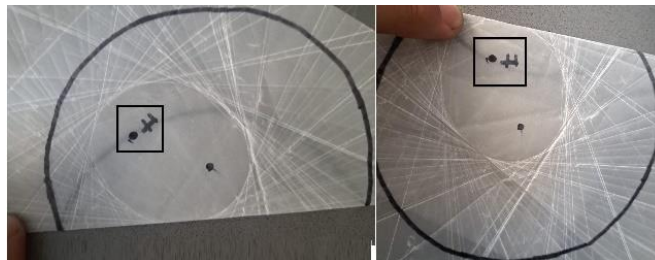
#### Cuarta construcción

- En una hoja de papel pergamino ubicar un punto  $F$  centrado y aproximadamente a 2 cm de un borde de la hoja.
- El punto  $F$  se debe hacer coincidir con al menos 25 puntos que estén sobre el borde más cercano de la hoja.
- Cada vez que se sobreponga cada punto, realizar el dobléz, como se muestra a continuación:



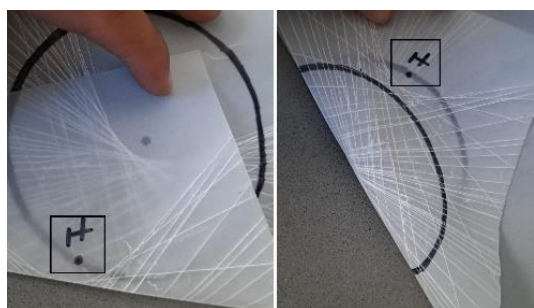
#### Quinta construcción:

1. En una hoja de papel pergamino realizar una circunferencia con un radio mayor a 3 cm y con un punto  $F$  en su interior.
2. El punto  $F$  se debe hacer coincidir con al menos 25 puntos de la circunferencia.
3. Cada vez que se sobreponga cada punto, realizar el dobléz.



### Sexta construcción

1. En una hoja de papel pergamino realizar una circunferencia con un radio mayor a 3 cm y con un punto  $F$  en su exterior.
2. El punto  $F$  se debe hacer coincidir con puntos al menos 25 puntos de la circunferencia.
3. Cada vez que se sobreponga el punto se debe realizar el dobléz.



### Preguntas

1. Para cada una de las construcciones anteriores responder las siguientes preguntas y completar la Tabla 1:

- ¿Las curvas construidas las han observado en sus alrededores, en la vida cotidiana, etc.? En caso de que sí, ¿en dónde?
- ¿Qué elementos considera que fueron importantes para la construcción de cada una de las curvas?

2. Prepare con su grupo una breve socialización para compartir con los demás compañeros, en la que se describa el tipo de curva que construyeron y las características de la construcción (el docente indicará qué construcción y figura socializará cada grupo).

**Tabla 1:** En los siguientes cuadros describir las figuras que se observan al realizar las construcciones de la Parte I. (En la descripción puede escribir los elementos que consideran son importantes para realizar cada curva, características de la curva, etc.)

| Construcción | Descripción | Dibujo |
|--------------|-------------|--------|
| 1            |             |        |
| 2            |             |        |
| 3            |             |        |

|   |  |  |
|---|--|--|
| 4 |  |  |
| 5 |  |  |
| 6 |  |  |

## Parte II

Ingrese a cada uno de los siguientes enlaces y realice una exploración para luego responder las preguntas que se presentan.

### Enlace

### Método

<https://www.geogebra.org/m/tc6zaz75>

Cónicas de Apolonio

<https://www.geogebra.org/m/dqutfgtp>

Cónicas por envolventes

<https://www.geogebra.org/m/zkmmegjq>

Cónicas como lugar geométrico

<https://www.geogebra.org/m/bnurpyjp>

Cónicas de Menecmo

<https://www.geogebra.org/m/jabn76sb>

Cónicas como bisectrices de

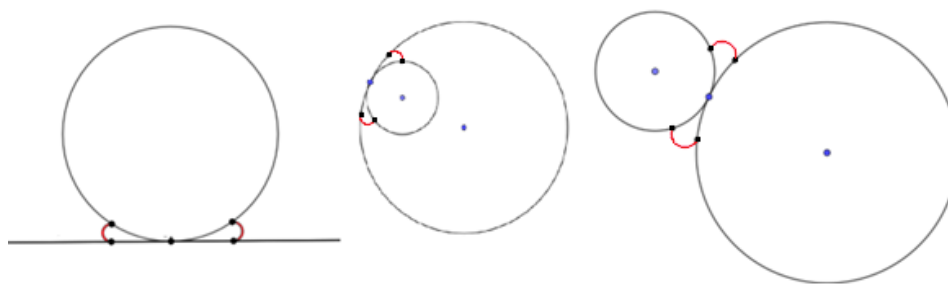
ángulos corneados

1. Describa en la Tabla 2 las curvas que observan al reproducir cada programa de GeoGebra.

2. ¿Qué similitudes o diferencias tienen estas curvas de GeoGebra con las que observaron en las construcciones manuales?
3. ¿Cuántas curvas diferentes reconocen por cada construcción?
4. ¿Han observado este tipo de curvas en la vida cotidiana? En caso de que sí, ¿en dónde?
5. GeoGebra *Cónicas de Apolonio*: ¿Qué relación deben cumplir los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  para generar cada una de las tres curvas distintas?
6. GeoGebra *Cónicas de Menecmo*: Modificando los ángulos de la construcción completen la siguiente tabla, escribiendo el nombre de cada curva.

| Ángulo | 35° | 75° | 90° | 100° | 110° | 130° |
|--------|-----|-----|-----|------|------|------|
| Curva  |     |     |     |      |      |      |

7.



Los ángulos corneados son ángulos que se determinan entre una circunferencia y una recta tangente o el que se determina entre dos circunferencias tangentes interiores o exteriores.

GeoGebra *Cónicas como bisectrices de ángulos corneados*: Cada ángulo corneado caracteriza una curva cónica diferente a partir de su bisectriz ¿Cuál característica deben tener dichos ángulos para que se genere cada una de las curvas?

**Tabla 2.** En los siguientes cuadros describir tres características de las figuras luego de realizar la exploración en GeoGebra.

|          | Cónicas de Apolonio | Cónicas por envolventes | Cónicas como bisectrices de ángulos corneados |
|----------|---------------------|-------------------------|---|
| Figura 1 | *                   | *                       | *   |
|          | *                   | *                       | *   |
|          | *                   | *                       | *   |
| Figura 2 | *                   | *                       | *   |
|          | *                   | *                       | *   |
|          | *                   | *                       | *   |
| Figura 3 | *                   | *                       | *   |
|          | *                   | *                       | *   |
|          | *                   | *                       | *   |

Para esta tarea se planificaron dos partes para dos sesiones de clase respectivamente. La primera consiste en que, con material concreto, los estudiantes realicen construcciones manuales a fin de obtener una representación de las secciones cónicas. Para ello se emplearán: tablas, nilón, palos de balsa, puntillas, papel pergamino y reglas.

Durante esta primera sesión se tendrán tres momentos principales como se describen a continuación:

### *Parte I*

- Momento 1: Los futuros educadores matemáticos proporcionan indicaciones sobre el propósito de la actividad y solicitan que los estudiantes formen grupos para entregar el material requerido. Esto tiene como objetivo que los estudiantes comprendan lo que van a trabajar durante la sesión de clase.
- Momento 2: Se entrega la guía con las instrucciones para cada construcción, en la cual los estudiantes podrán observar de manera detallada el paso a paso de las construcciones y el material que deben utilizar en cada una de ellas. Además, al final de la guía encontrarán algunas preguntas y una tabla que deberán responder y completar de acuerdo con lo que realizaron durante las construcciones.
- Momento 3: Al finalizar la actividad se procederá a recoger los materiales y los productos realizados por los estudiantes, pasando grupo por grupo realizando preguntas de la actividad y si tuvieron dificultades o no.

En la segunda parte de la tarea (es decir, la segunda sesión de clase) los estudiantes exploran archivos GeoGebra (que los autores del trabajo de grado crearon previamente y se encuentran en la plataforma de GeoGebra). Para esta segunda sesión se tendrán dos momentos principales que se describirán a continuación:

## ***Parte II***

- Momento 1: Se dan unas breves indicaciones de lo que se trata la actividad, formando los grupos para la exploración de los archivos de GeoGebra. Esto se hará con el propósito de que los estudiantes tengan una idea de lo que van a trabajar en la sesión de clase.
- Momento 2: En el archivo de Word que estará en cada computador, los estudiantes explorarán a detalle las construcciones de cada enlace y al finalizar

responderán unas preguntas y diligenciarán una tabla de acuerdo con la exploración de cada archivo.

*Figura 37. Numeral 1 de la primera parte de la tarea*

1. Para cada una de las construcciones anteriores responder las siguientes preguntas y completar la Tabla 1:
- ¿Las curvas construidas las han observado en sus alrededores, en la vida cotidiana, etc.? En caso de que sí, ¿en dónde?
  - ¿Qué elementos considera que fueron importantes para la construcción de cada una de las curvas?

En el numeral 1 de la primera parte de la tarea (Figura 37), se propone, en primer lugar, que los estudiantes reconozcan en su vida cotidiana las cónicas obtenidas. En segundo lugar, la siguiente pregunta busca que los estudiantes logren un reconocimiento de elementos que permiten diferenciar las formas de construir las secciones cónicas, asunto que históricamente corresponde a la obtención de cónicas por medio de la definición de lugares geométricos propuesta por Apolonio, y la otra forma de obtenerlas por medio de una familia de rectas propuesta por Leibniz y Taylor las cuales fueron denominadas envolventes.

*Figura 38. Numeral 5 de la segunda parte de la tarea*

5. GeoGebra *Cónicas de Apolonio*: ¿Qué relación deben cumplir los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  para generar cada una de las tres curvas distintas?

En el numeral 5 de la segunda parte de la tarea (Figura 38), se propone una exploración al archivo de cónicas de Apolonio, los cuales permiten la obtención de las secciones cónicas, asunto que históricamente corresponde a la construcción de las curvas por medio de la intersección entre un plano y un cono, teniendo en cuenta la relación que deben tener los ángulos para que se genere la elipse, la parábola o la hipérbola.

*Figura 39. Numeral 6 de la segunda parte de la tarea*

6. GeoGebra *Cónicas de Menecmo*: Modificando los ángulos de la construcción completan la siguiente tabla, escribiendo el nombre de cada curva.

| Ángulo | 35° | 75° | 90° | 100° | 110° | 130° |
|--------|-----|-----|-----|------|------|------|
| Curva  |     |     |     |      |      |      |

En el numeral 6 de la segunda parte de la tarea (Figura 39), se propone a los estudiantes que realicen una exploración en el archivo de cónicas de Menecmo e identifiquen de acuerdo con la medida del ángulo (Figura 40) qué secciones cónicas se generan. Este asunto se alinea históricamente con la construcción de curvas propuesta por Menecmo, las cuales se generan por un corte perpendicular de un plano hacia diferentes tipos de cono.

*Figura 40 ángulo formado por la generatriz*



Fuente: elaboración propia

**Materiales y Recursos:** Los recursos para la realización de la tarea son: tablas, puntillas, papel pergamino, nilón, palos de balsa, reglas, escuadras, guía con instrucciones, compas. Archivos de GeoGebra y computadores.

**Agrupamiento:** La tarea se planea para desarrollar en grupos pequeños (cinco estudiantes por grupo) dado que la mayor parte de las preguntas son abiertas y requieren argumentación. Esto permitirá fomentar la comunicación e interacción entre docente-estudiante y estudiante-estudiante.

**Temporalidad:** La tarea se prevé para dos sesiones de clase de 100 minutos.

### **3.2.2 Tarea 2**

**Requisitos:** La tarea requiere que los estudiantes manejen GeoGebra a nivel básico, tengan habilidades en comprensión lectora y conocimientos matemáticos fundamentales, como operaciones y cálculos algebraicos, y sean capaces de responder preguntas abiertas.

**Metas:** La tarea se enfoca en que los estudiantes sean capaces de identificar las secciones cónicas, a partir de la ecuación general de segundo grado y la ecuación canónica. Además, deberán reconocer, a partir de la ecuación canónica, los elementos clave de las cónicas, como los focos, ejes y directrices. Así, podrán representarlas gráficamente en un plano cartesiano, basándose en su expresión algebraica.

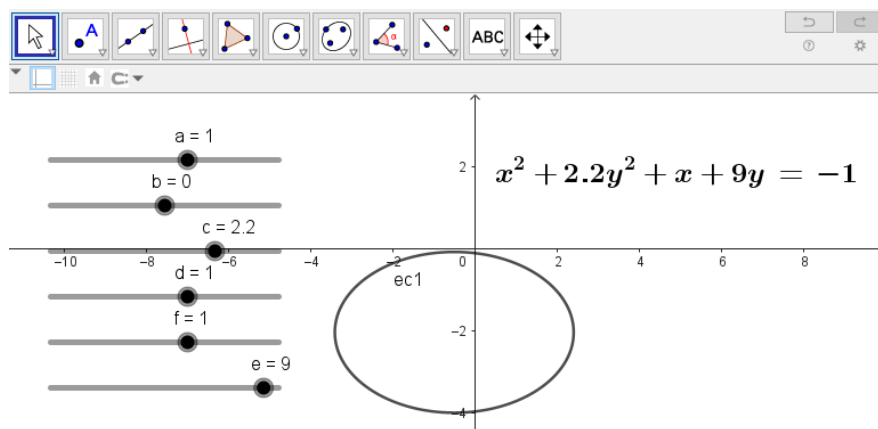
Esta actividad está alineada con el MEN (2006, p. 88)

- Identifico en forma visual, gráfica y algebraica algunas propiedades de las curvas que se observan en los bordes obtenidos por cortes longitudinales, diagonales y transversales en un cilindro y en un cono.
- Identifico características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana y otros (polares, cilíndricos y esféricos) y en particular de las curvas y figuras cónicas.
- Representa lugares geométricos en el plano cartesiano, a partir de su expresión algebraica.

**Formulación de la tarea matemática:**

## Parte I

1. A partir de lo que se proyecta en el video beam responde las siguientes preguntas:



- ¿Qué tipo de ecuación es la que se muestra en GeoGebra?
- Los valores que toman los coeficientes de la ecuación general de segundo grado sirven para identificar la cónica representada por dicha ecuación.

¿Para qué valores de  $x^2$  y  $y^2$  la ecuación representa una parábola?

¿cuándo una hipérbola?, ¿cuándo una elipse?

- Con base en las respuestas del literal anterior, completen la Tabla 1.

**Tabla 1**

| Sección cónica | Valores de los coeficientes $x^2$ y $y^2$ |
|----------------|---|
| Elipse         |   |
| Parábola       |   |

|           |  |
|-----------|--|
|           |  |
| Hipérbola |  |

2. ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones representan secciones cónicas? ¿Qué secciones cónicas?

a.  $3x^2 - 6y^2 + 15x - 13y = 7$

b.  $-x^2 + 5x + 6y^2 + \frac{1}{3}y = 15$

c.  $3x^3 - 8y^2 + 13x + 15y = 0$

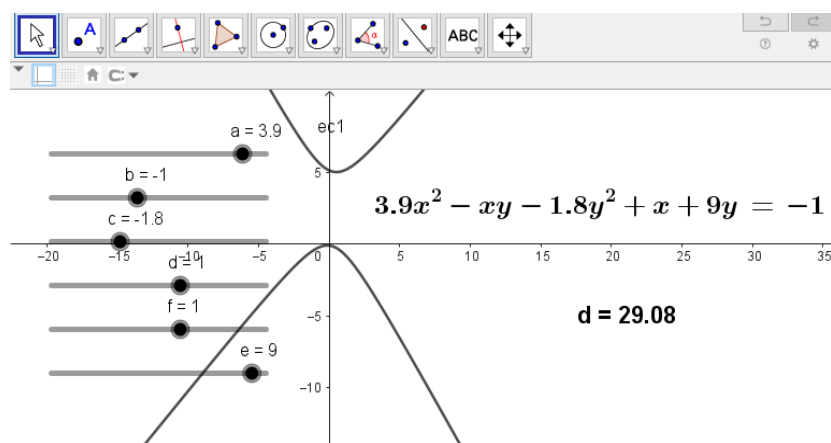
d.  $3x^2 + 15y - 14x - 13 = 0$

e.  $\frac{5}{3}y^2 + 4x - \frac{3}{5}y = \frac{12}{7}$

f.  $x = 3y$

3. Compruebe con GeoGebra si las gráficas obtenidas en el punto 2 coinciden con sus respuestas.

4. A partir de lo que se proyecta en el video beam responde las siguientes preguntas:



a. ¿Las propiedades de los coeficientes de la ecuación cuadrática aún siguen determinando la sección cónica? ¿Por qué?

b. ¿Qué valores del discriminante determinan cada una de las curvas?

5. El valor del discriminante está dado por la siguiente ecuación:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

*b*: coeficiente que acompaña al término  $xy$

*a*: coeficiente que acompaña al término  $x^2$

*c*: coeficiente que acompaña al término  $y^2$

Calcule el valor del discriminante para cada una de las ecuaciones de la Tabla 2 y determine cuál cónica se genera. Comprueba el resultado por medio de GeoGebra.

**Tabla 2**

| Ecuación                                     | Discriminante | Nombre de la cónica |
|--|---------------|---------------------|
| $-x^2 - 4xy - 3y^2 + x - 5y = 7$             |               |                     |
| $3x^2 - 2xy + \frac{1}{3}y^2 + 4x + 5y = -5$ |               |                     |
| $4x^2 - 3xy + y^2 + 5x - 3y = 5$             |               |                     |
| $-x^2 + 3xy - \frac{9}{4}y^2 + 5x = -10$     |               |                     |
| $x^2 + 5xy + 3x - 7y = 2$                    |               |                     |

$$3x^2 + 3xy + 3y^2 + 3x + 3y = 3$$

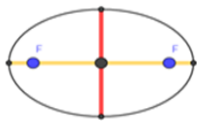

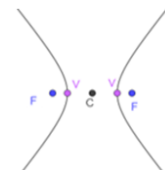
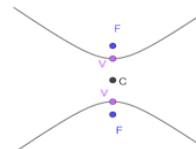

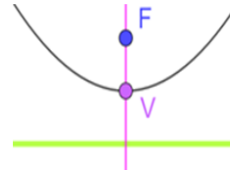
$$4xy + 4y^2 - 2x - 5y = 14$$

## Parte II

**Tabla 3 : Elementos de las secciones cónicas a partir de su ecuación canónica**

En los textos de Geometría Analítica se utiliza la ecuación canónica de las secciones cónicas, la cual se obtiene al completar trinomios cuadrados perfectos e igualar la ecuación a uno. Este proceso permite identificar los elementos característicos de las elipses, hipérbolas y parábolas.

- En las siguientes figuras se representan el eje mayor en color naranja, el eje menor en color azul, los focos en color azul, los vértices en color morado y el centro en color negro.

|  |   |
|--|---|
| <p><b>Elipse con el eje horizontal mayor</b></p> $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$  <p>El centro es <math>(h, k)</math>.<br/>La longitud del eje mayor es <math>2a</math>.<br/>La longitud del eje menor es <math>2b</math>.<br/>La distancia entre el centro y cualquier foco es <math>c</math> con <math>c^2 = a^2 - b^2, a &gt; b &gt; 0</math></p> | <p><b>Elipse con el eje vertical mayor</b></p> $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$  <p>El centro es <math>(h, k)</math>.<br/>La longitud del eje mayor es <math>2a</math>.<br/>La longitud del eje menor es <math>2b</math>.<br/>La distancia entre el centro y cualquier foco es <math>c</math> con <math>c^2 = a^2 - b^2, a &gt; b &gt; 0</math>.</p> |
| <p><b>Hipérbola con el eje horizontal transversal</b></p> $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$  <p>El centro es <math>(h, k)</math>.<br/>La distancia entre los vértices es <math>2a</math>.<br/>La distancia entre los focos es <math>2c</math>.<br/><math>c^2 = a^2 + b^2</math></p>   | <p><b>Hipérbola con el eje vertical transversal</b></p> $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$  <p>El centro es <math>(h, k)</math>.<br/>La distancia entre los vértices es <math>2a</math>.<br/>La distancia entre los focos es <math>2c</math>.<br/><math>c^2 = a^2 + b^2</math></p>  |
| <p><b>Parábola con el eje horizontal</b></p> $(y-k)^2 = 4p(x-h)$  <p>El vértice es <math>(h, k)</math>.<br/>El foco es <math>(h+p, k)</math>.<br/>La directriz es la recta <math>x = h-p</math>.<br/>El eje es la recta <math>y = k</math>.</p>   | <p><b>Parábola con el eje vertical</b></p> $(x-h)^2 = 4p(y-k)$  <p>El vértice es <math>(h, k)</math>.<br/>El foco es <math>(h, k+p)</math>.<br/>La directriz es la recta <math>y = k-p</math>.<br/>El eje es la recta <math>x = h</math>.</p>  |

- Grafica en GeoGebra las siguientes ecuaciones y une con una flecha las que representan exactamente la misma sección cónica.

$$x^2 - 6x - 8y - 7 = 0$$

$$\frac{(x-2)^2}{5} - \frac{(y+4)^2}{10} = 1$$

$$4x^2 + y^2 - 16x + 2y + 1 = 0$$

$$(x-3)^2 = 8(y+2)$$

$$-4x^2 + 7y^2 + 8x + 42y + 31 = 0$$

$$\frac{(y+3)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{7} = 1$$

$$4x^2 + 9y^2 - 40x + 54y + 145 = 0$$

$$\frac{(x-2)^2}{5} - \frac{(y+4)^2}{10} = 1$$

$$x^2 + 10x - 10y + 5 = 0$$

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$$

$$10x^2 - 40x - 5y^2 - 40y - 90 = 0$$

$$\frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$$

2. A partir de las ecuaciones de la Tabla 4 determine qué tipo de sección cónica representa cada una y luego encuentre todos los elementos que especifica la Tabla 3 en cada caso.

Tabla 4

| Ecuación canónica                                | Sección cónica y característica del eje | Elementos |
|--|---|-----------|
| a) $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$          |   |           |
| b) $\frac{(x+5)^2}{49} + \frac{(y+8)^2}{9} = 1$  |   |           |
| c) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{33} = 1$         |   |           |
| d) $\frac{(x-5)^2}{8} - \frac{(y+4)^2}{64} = 1$  |   |           |
| e) $\frac{(y+4)^2}{12} - \frac{(x-3)^2}{81} = 1$ |   |           |
| f) $(y-7)^2 = 12(x+4)$                           |   |           |
| g) $(x+4)^2 = 24(y+2)$                           |   |           |

La excentricidad ( $e$ ) de una sección cónica se define como la distancia de cualquier punto de la sección cónica a su foco, dividida entre la distancia perpendicular de ese punto a la directriz más cercana. La excentricidad permite determinar el tipo de cónica según su valor.

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

3. Calcula la excentricidad de las elipses e hipérbolas del punto anterior.
4. El valor de la excentricidad para cada sección cónica es distinto, para la parábola la excentricidad es 1, concluya a partir del ítem anterior qué valores puede tomar la excentricidad para la hipérbola y la elipse.

---

---

---

Para esta tarea se han planificado dos partes, las cuales se tenían previstas para dos sesiones de clase. Durante la primera sesión, se espera que los estudiantes aprendan a identificar las secciones cónicas mediante el uso de los coeficientes de la ecuación general de segundo grado y el discriminante. Este aprendizaje se desarrolla a través de las preguntas presentes en las guías que se entregan a los estudiantes.

### ***Parte I***

Durante la primera sesión se tienen tres momentos principales como se describen a continuación:

- Momento 1: Se empieza con unas breves indicaciones de la actividad que se realiza, organizando los grupos de trabajo (3 o 4 estudiantes) y entregando el material que se usa en la sesión de clase.

Por medio de un computador y un video beam se empieza a hacer la exploración en GeoGebra utilizando deslizadores, en los cuales se varían los coeficientes de la ecuación general de segundo grado  $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = f$  excepto  $b$  pues para este primer momento tomamos  $b = 0$ , con el fin de que identifiquen los valores de los coeficientes que generan cada curva. Luego, se les solicita que comprueben lo conjeturado.

- Momento 2: Para la parte de identificar las cónicas con el discriminante se procede de la misma forma que en el momento 1 (exploración usando video beam), con la diferencia que el coeficiente  $b$  que acompaña al término  $xy$  también se va a variar.
- Momento 3: Los estudiantes comprueban con el aplicativo de GeoGebra los resultados de identificación de las cónicas por medio del valor del discriminante, de acuerdo con el caso que sea. Para finalizar se recoge la producción de los estudiantes.

### ***Parte II***

Para esta parte de la tarea se tiene tres momentos principales que se describen a continuación:

- Momento 1: Se les solicita a los estudiantes que se organicen en grupos de tres o cuatro. Cada grupo recibe una copia de la Tabla 3, la cual contiene información clave sobre las propiedades de las secciones cónicas. Los estudiantes deben analizar detenidamente los datos presentados en la tabla e identificar las características y elementos principales de cada sección cónica. Así mismo, se les pide que representen un conjunto de secciones cónicas a partir de sus ecuaciones implícita y explícita con el fin que identifiquen que una misma curva puede tener dos expresiones algebraicas “diferentes”.
- Momento 2: Una vez completado el análisis de la tabla y la identificación de los elementos, se procede a entregar la guía de trabajo a cada grupo. Esta guía contiene una serie de preguntas y ejercicios que los estudiantes deben resolver, utilizando la información observada en la Tabla 3 sobre las propiedades de las secciones cónicas. El objetivo es que respondan de manera precisa y fundamentada a los puntos planteados en la guía, basándose en los datos proporcionados.
- Momento 3: Para finalizar se presenta la definición de excentricidad de las secciones cónicas y se pide calcular algunas excentricidades con el fin de que concluyan los valores que pueden tomar las secciones cónicas de acuerdo con la curva que describe cada una.

*Figura 41. Numeral 1 del ítem a de la primera parte de la tarea*

1. A partir de lo que se proyecta en el video beam responde las siguientes preguntas:
  - a. ¿Qué tipo de ecuación es la que se muestra en GeoGebra?

En el numeral 1 del ítem *a* de la primera parte de la tarea (Figura 41), se propone a los estudiantes que identifiquen el tipo de ecuación que aparece en GeoGebra. Este numeral se

alinea históricamente cuando Descartes y Fermat demuestran que las secciones cónicas se pueden representar mediante una ecuación de segundo grado con dos variables.

*Figura 42. Numeral 1 del ítem c de la primera parte de la tarea*

1. A partir de lo que se proyecta en el video beam responde las siguientes preguntas:

c. Con base en las respuestas del literal anterior, completen la Tabla 1.

Tabla 1

| Sección cónica | Valores de los coeficientes $x^2$ y $y^2$ |
|----------------|---|
| Elipse         |   |
| Parábola       |   |
| Hipérbola      |   |

En el numeral 1 del ítem c de la primera parte de la tarea (Figura 42), se propone a los estudiantes que identifiquen el tipo de cónica que surge cuando los coeficientes que acompañan a  $x^2$  y  $y^2$  toman determinados valores (positivos, negativos o cero). Este numeral se asocia históricamente a la época en que Descartes encuentra propiedades para los coeficientes de la ecuación cuadrática, en relación con sus signos, las cuales permiten reconocer el tipo de sección cónica que representa dicha ecuación.

*Figura 43. Numeral 4 del ítem b de la primera parte de la tarea*

4. A partir de lo que se proyecta en el video beam responde las siguientes preguntas:
- ¿Las Propiedades de los coeficientes de la ecuación cuadrática aún siguen determinando la sección cónica? ¿Por qué?
  - ¿Qué valores del discriminante determinan cada una de las curvas?

En el numeral 4 del ítem b de la primera parte de la tarea (Figura 43), se propone a los estudiantes que identifiquen qué tipo de cónicas surgen a partir de los valores del discriminante. Este numeral se refiere históricamente cuando Descartes y Fermat demuestran que las secciones

cónicas se pueden representar mediante una parte de la fórmula cuadrática llamada discriminante.

*Figura 44. Numeral 2 de la segunda parte de la tarea*

2. A partir de las ecuaciones de la Tabla 4 determine qué tipo de sección cónica representa cada una y luego encuentre todos los elementos que especifica la Tabla 3 en cada caso.

Tabla 4

| Ecuación canónica                                | Sección cónica y característica del eje | Elementos |
|--|---|-----------|
| a) $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$          |   |           |
| b) $\frac{(x+5)^2}{49} + \frac{(y+8)^2}{9} = 1$  |   |           |
| c) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{33} = 1$         |   |           |
| d) $\frac{(x-5)^2}{8} - \frac{(y+4)^2}{64} = 1$  |   |           |
| e) $\frac{(y+4)^2}{12} - \frac{(x-3)^2}{81} = 1$ |   |           |
| f) $(y-7)^2 = 12(x+4)$                           |   |           |
| g) $(x+4)^2 = 24(y+2)$                           |   |           |

En el numeral 2 de la segunda parte de la tarea (Figura 44), se propone a los estudiantes que identifiquen elementos de las secciones cónicas a partir de la ecuación canónica. Este numeral se corresponde históricamente, cuando Descartes encuentra una manera de expresar la ecuación cuadrática en una forma más reducida la cual denomina ecuación canónica.

*Figura 45. Numeral 4 de la segunda parte de la tarea*

4. El valor de la excentricidad para cada sección cónica es distinto, para la parábola la excentricidad es 1, concluya a partir del ítem anterior qué valores puede tomar la excentricidad para la hipérbola y la elipse.

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

En el numeral 4 de la segunda parte de la tarea (Figura 45), se propone a los estudiantes que identifiquen qué tipo de cónicas surgen a partir de la excentricidad. Este numeral se asocia

según la historia, cuando Morton deduce algunas propiedades de las secciones cónicas relacionando las razones entre los focos, directrices y puntos pertenecientes a las curvas, además propone una serie de corolarios que identifican las secciones cónicas mediante los valores de dichas razones.

**Materiales y Recursos:** GeoGebra, video-beam, guía de actividades y elementos escolares (cuaderno, lápiz, borrador, esferos, etc.)

**Agrupamiento:** La tarea se planea para desarrollar en grupos de tres o cuatro estudiantes. Dado que la mayor parte de las preguntas son abiertas y requieren argumentación. Esto permitirá fomentar la comunicación e interacción entre docente-estudiante y estudiante-estudiante.



**Temporalidad:** La tarea se prevé para dos sesiones de clase de 100 minutos.

### 3.2.3 Tarea 3

**Requisitos:** La tarea requiere que los estudiantes tengan habilidades fundamentales de comprensión lectora, representen problemas de la vida cotidiana a un lenguaje algebraico y tener total comprensión de la Tabla 3 de la Tarea 2.

**Metas:** En la tarea, se espera que los estudiantes resuelvan problemas de la vida cotidiana enfocadas en las secciones cónicas. Esta actividad está alineada con el MEN (2016) "Describo y modelos fenómenos periódicos del mundo real usando secciones cónicas o sus propiedades." (p. 88).

#### Formulación de la tarea matemática:

|   |                |               |
|---|----------------|---------------|
|   |                |               |
| <b>Integrantes:</b>   | <b>Fecha:</b>  | <b>Curso:</b> |
|   | <b>Tarea 3</b> |               |

1. En la época medieval era común utilizar catapultas como sistemas de ataques. Una roca lanzada desde una catapulta sigue una trayectoria descrita por la parábola  $3x^2 - 240x + 160y = 0$ . Si las unidades son en metros ¿Cuál es la altura máxima (vértice) alcanzada por la roca?
2. Un proyectil describe una trayectoria parabólica dada por  $x^2 = -720000(y - 10000)$ . En un momento determinado el proyectil cruza exactamente el centro desde donde lo lanzaron hasta donde tiene que llegar ¿Si el centro por donde pasa el proyectil es el foco de la parábola, ¿Cuáles son las coordenadas del centro?
3. El planeta Tierra describe una órbita elíptica alrededor del sol, donde el sol se ubica en uno de los focos a 2500000 Km de distancia del centro. Por otro lado, la tierra alcanza su punto más lejano del Sol a 151500000 Km. ¿Cuál es la ecuación del lugar geométrico que describe la órbita de la Tierra? ¿Cuál es la distancia mínima de separación entre la tierra y el sol?
4. Un reflector de un telescopio tiene forma hiperbólica  $\frac{x-3}{12} - \frac{y}{5} = 1$ . Este reflector consta de dos focos: uno saliente y uno entrante. Hallar la distancia que hay del foco entrante al foco saliente.

Para la implementación de la tarea se tiene previsto una sesión de clase que se realiza en tres momentos principales.

- Momento 1: Se empieza con unas breves indicaciones antes de entregar la guía y se reitera que necesitan usar la tabla 3 que se entregó en la tarea 2.
- Momento 2: En este momento los estudiantes comienzan a resolver los puntos propuestos en la tarea, donde deben tener presente las propiedades de las curvas y lo que habían solucionado en las tareas anteriores
- Momento 3: Para finalizar se explica a los estudiantes que existen ejemplos más modernos, con el fin que comprendan que muchas actividades que realizan u observan en la vida cotidiana, se encuentran presentes las secciones cónicas.

*Figura 46 Numeral 1 de la tarea 3*

1. En la época medieval era común utilizar catapultas como sistemas de ataques. Una roca lanzada desde una catapulta sigue una trayectoria descrita por la parábola  $3x^2 - 240x + 160y = 0$ . Si las unidades son en metros ¿Cuál es la altura máxima (vértice) alcanzada por la roca?

En el numeral 1 de la tarea (Figura 46), se propone a los estudiantes que encuentren el vértice de la parábola, este problema se asocia históricamente con Arquímedes, porque este matemático afirma en sus estudios que en los tiempos de guerra en el medieval se usaban catapultas y el movimiento que realizaba la roca lanzada desde las catapultas se asemeja a la parábola.

*Figura 47. Numeral 2 de la tarea 3*

2. Un proyectil describe una trayectoria parabólica dada por  $x^2 = -720000(y - 10000)$ . En un momento determinado el proyectil cruza exactamente el centro desde donde lo lanzaron hasta donde tiene que llegar ¿Si el centro por donde pasa el proyectil es el foco de la parábola, ¿Cuáles son las coordenadas del centro?

En el numeral 2 de la tarea (Figura 47), se espera que los estudiantes encuentren las coordenadas del foco, este problema se corresponde históricamente con lo que afirmaba Galileo Galilei sobre los proyectiles y su movimiento parabólico.

*Figura 48. Numeral 3 de la tarea 3*

3. El planeta Tierra describe una órbita elíptica alrededor del sol, donde el sol se ubica en uno de los focos a 2500000 Km de distancia del centro. Por otro lado, la tierra alcanza su punto más lejano del Sol a 151500000 Km. ¿Cuál es la ecuación del lugar geométrico que describe la órbita de la Tierra? ¿Cuál es la distancia mínima de separación entre la tierra y el sol?

En el numeral 3 de la tarea (Figura 48), los estudiantes tienen que hallar la ecuación de la elipse y la distancia de los focos. El problema se alinea históricamente con los movimientos que describían las orbitas de los planetas, que según Kepler eran elípticas.

*Figura 49. Numeral 4 de la tarea 3*

4. Un reflector de un telescopio tiene forma hiperbólica  $\frac{x-3}{12} - \frac{y}{5} = 1$ . Este reflector consta de dos focos: uno saliente y uno entrante. Hallar la distancia que hay del foco entrante al foco saliente.

En el numeral 4 de la tarea (Figura 49) se espera que los estudiantes hallen la distancia entre los dos focos e identifiquen con que elementos de la ecuación canónica se puede realizar. El problema se corresponde históricamente con el telescopio de Cassegrain que constaba de tres espejos reflectores, donde el segundo espejo tenía una forma hiperbólica.

**Materiales y Recursos:** guía de actividades y elementos escolares (cuaderno, lápiz, borrador, esferos, etc.)

**Agrupamiento:** La tarea se planea desarrollar en grupos de tres o cuatro estudiantes. Esto permitirá fomentar la comunicación e interacción entre docente-estudiante y estudiante-estudiante.

**Temporalidad:** La tarea se prevé para una sesión de clase de 100 minutos.

### **3.3 Fase 3: Implementación y análisis:**

Partiendo de lo señalado en los estándares básicos de competencias matemáticas (MEN, 2006), se identificó que la propuesta podría implementarse de manera efectiva en el grado décimo, dado el nivel de conocimiento y habilidades requeridas. En consecuencia, la propuesta

de tareas se desarrolló en el curso 1002 del Colegio Venecia (IED), al que asisten 31 estudiantes, durante los meses de octubre y noviembre de 2024.

Es importante resaltar que el tiempo disponible para implementar la actividad fue limitado, debido a que se llevó a cabo en el cuarto periodo (fin del año escolar) y solo se contó con cuatro bloques de dos horas (90 minutos cada uno) para completar las tareas y actividades planteadas en la propuesta. Como resultado de esta restricción temporal, fue imposible desarrollar la totalidad de las tareas previstas. Por ende, solo se logró implementar la Tarea 1 y la parte I de la Tarea 2.

Con base en las actividades que se implementaron se recogieron guías y se tomaron fotos de las respuestas que los estudiantes plantearon y escribieron en sus cuadernos, esto para realizar el análisis.

## 4. Análisis De La Implementación

El análisis se hace con base en los propósitos que se establecieron para cada punto de cada tarea. En dicha descripción se plantean las metas de las tareas, las cuales se hicieron corresponder con algunos estándares básicos de competencias matemáticas (MEN, 2006).

### 4.1 Tarea 1

#### Parte I

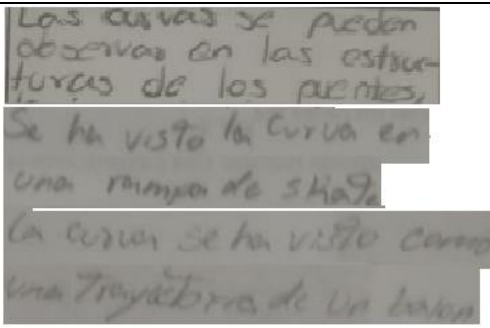
1. Para cada una de las construcciones anteriores responder las siguientes preguntas y completar la Tabla 1:

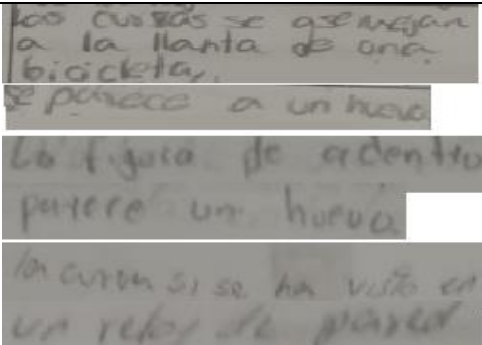
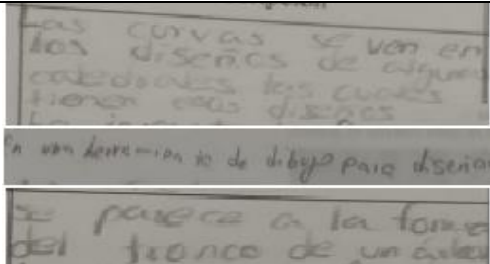
- ¿Las curvas construidas las han observado en sus alrededores, en la vida cotidiana, etc.? En caso de que sí, ¿en dónde?
- ¿Qué elementos considera que fueron importantes para la construcción de cada una de las curvas?

*Para el caso de la primera pregunta del numeral 1; El 40% de los estudiantes lograron reconocer las cónicas con curvas o formas observadas a sus alrededores o en su vida cotidiana (mencionan por ejemplo la forma de una catedral o de un reloj en forma elíptica, movimiento de un balón, etc.), como se ve en la*

Tabla 3:

*Tabla 3 Evidencias de reconocimiento de las secciones cónicas en la vida cotidiana*

| Cónica   | Evidencia  | Transcripción   |
|----------|--|---|
| Parábola |  | <ul style="list-style-type: none"> <li>• “Las curvas se pueden observar en las estructuras de los puentes”</li> <li>• “Se ha visto la curva en una rampa de skate”</li> </ul> |

|           |   |  |
|-----------|---|--|
|           |   | <ul style="list-style-type: none"> <li>• “La curva se ha visto como una trayectoria de un balón”</li> </ul>  |
| Elipse    |   | <ul style="list-style-type: none"> <li>• “Las curvas se asemejan a la llanta de una bicicleta”</li> <li>• “Se parece a un huevo”</li> <li>• “La figura de adentro parece un huevo”</li> <li>• La curva si se ha visto en un reloj de pared”</li> </ul> |
| Hipérbola |  | <ul style="list-style-type: none"> <li>• “Las curvas se ven en diseños de algunas catedrales”</li> <li>• “Una herramienta de dibujo para diseñar”</li> <li>• “Se parece a la forma del tronco de un árbol”</li> </ul>                                  |

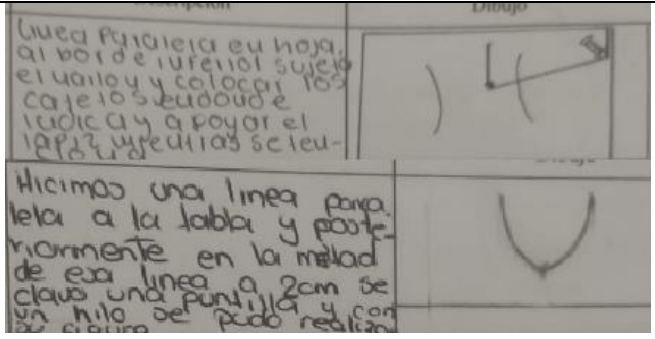
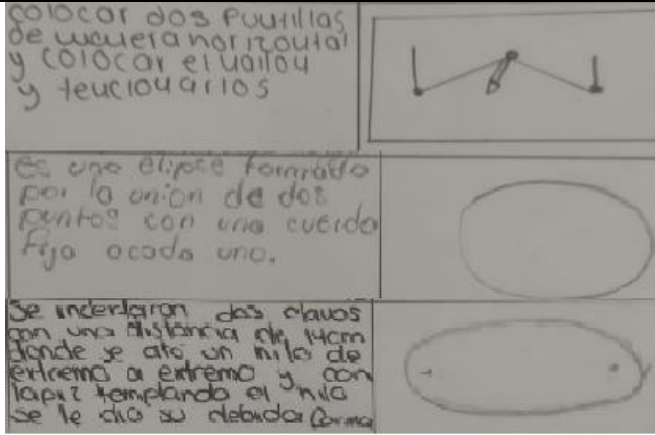
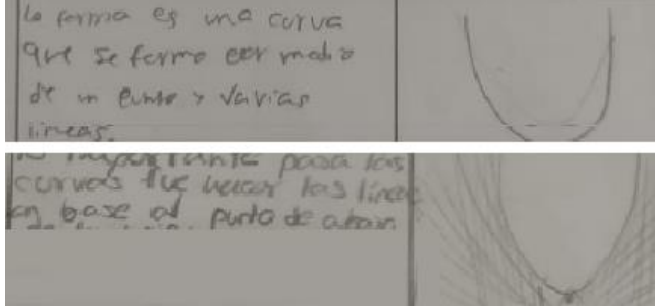
Se puede concluir que los estudiantes tienen dificultad con asociar las cónicas a curvas que observan en su vida cotidiana y quienes lo logran hacer, buscan asociaciones muy cercanas a ellos. Posiblemente esto se debe a que esta implementación de la tarea es el primer acercamiento que tienen los estudiantes a las secciones cónicas. También es importante señalar que, en algunas de las asociaciones que hicieron, no necesariamente se corresponden con secciones cónicas (por ejemplo, la forma de un huevo es un ovalo, no es una elipse; y la forma de una rampa de skate posiblemente sea una catenaria, no una parábola).


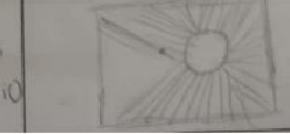

Para el caso de la segunda pregunta, se buscaba que los estudiantes identificaran algunos de los elementos indispensables para construir las cónicas, bien por lugares geométricos o bien por envolventes. Al respecto, todos los grupos consiguieron identificar algunos de los elementos más sustanciales en al menos una de las construcciones, con excepción de la hipérbola como lugar geométrico, dado que ningún grupo logró identificar la importancia de los focos (las puntillas en este caso) y la distancia entre ellos (representada por la longitud del hilo que los une). En la Tabla 4 se presentan las producciones de los estudiantes.

En la construcción de cónicas como lugar geométrico, el 60% de los estudiantes fue capaz de identificar los elementos fundamentales para la construcción de la parábola, mientras que el 80% logró reconocer los focos de la elipse, elementos esenciales para su formación.

Por otro lado, en la construcción de cónicas mediante envolventes, el 80% de los estudiantes identificó la importancia del foco en la construcción de la parábola. En el caso de la elipse, solo el 20% de los estudiantes reconoció que el punto clave debe ubicarse en el interior de la circunferencia, mientras que el 80% comprendió que para la hipérbola el punto debe situarse fuera de la circunferencia.

Tabla 4. elementos principales para la construcción de cónicas

| Método de construcción | Sección cónica | Criterio sobre elementos importantes | Evidencias   |
|------------------------|----------------|--------------------------------------|--|
| Lugares geométricos    | Parábola       | Mencionar la directriz y el foco     |  <p>Una Parábola en hoja al borde inferior sujeto el nailon y colocar los cables suaves e indicar y apoyar el lápiz y puntilla se leu-</p> <p>Hicimos una línea para tela a la tabla y posteriormente en la mitad de esa línea a 2cm se clavo una puntilla y con un hilo se pudo realizar</p>  |
|                        | Elipse         | Focos                                |  <p>colocar dos Puntillas de cuerda horizontal y colocar el nailon y tensionarlos</p> <p>es una elipse formada por la unión de dos puntos con una cuerda fija ocada uno.</p> <p>Se intercalan dos clavos con una distancia que llamamos donde se ato un hilo de extremo a extremo y con lápiz templando el hilo se le dio su debida forma</p> |
|                        | Hipérbola      | Foco y la longitud del hilo          | Ningún estudiante identificó alguno de los elementos.  |
| Envolventes            | Parábola       | Ubicación del punto                  |  <p>la forma es una curva que se forma por medio de un punto y varias líneas.</p> <p>la importancia para las curvas que hacen las líneas en base al punto de origen</p>  |

|  |           |                         |  |   |
|--|-----------|-------------------------|--|---|
|  | Elipse    | Ubicación<br>(interior) | Un círculo formado con base a la guía de un punto interior "F" que juntamente con líneas forma un círculo al rededor de la misma. Puntos pasados |  |
|  | Hipérbola | Ubicación<br>(exterior) | 6 Conecte el círculo con el punto externo para hacer que las líneas conectaran entre si sin dejar ningún espacio                                 |  |
|  |           |                         | 6 Un círculo formado con base a la guía de un punto exterior "F" que juntamente con líneas forma un círculo al extremo del punto "F"             |  |

Es importante señalar que ningún grupo hace un listado de los elementos relevantes en cada construcción, sino que realizan una descripción de las construcciones hechas. A partir de tales descripciones se trató de identificar los elementos que para ellos fueron importantes a la hora de hacer las construcciones. También vale la pena mencionar que algunos grupos escribieron la descripción de la construcción solicitada, pero al momento de realizar el dibujo, este no coincide con la descripción.

## Parte II

1. Describa en la Tabla 2 las curvas que observan al reproducir cada programa de GeoGebra.

Para el numeral uno de la segunda parte de la tarea, se esperaba que los estudiantes describieran características de las cónicas de los archivos correspondientes que aparecían en la Tabla 2 (cónicas de Apolonio, cónicas por envolventes y cónicas como bisectrices de ángulos corneados). Los estudiantes aludieron a características de las secciones cónicas en torno a la curva que describe, a sus formas de construcción, a los ángulos generados y a curvas que han observado en la vida cotidiana como se describe a continuación.

En el archivo Cónicas de Apolonio, el 84% de los estudiantes logra identificar características de la parábola, destacando especialmente la inclinación del plano y la forma de la curva (Figura 50). En cuanto a la elipse, el 57% de los estudiantes reconoce sus características, mencionando los ejes, el vértice y la inclinación que debe tener el plano (Figura 51). Respecto a la hipérbola, el 42% de los estudiantes identifica sus características, incluyendo el ángulo de inclinación del plano. Además, un 14% señala que este ángulo debe ser menor al del cono, y otro aspecto identificado es que el plano debe cortar ambos conos (Figura 52).

Figura 50. Evidencia Apolonio-Parábola

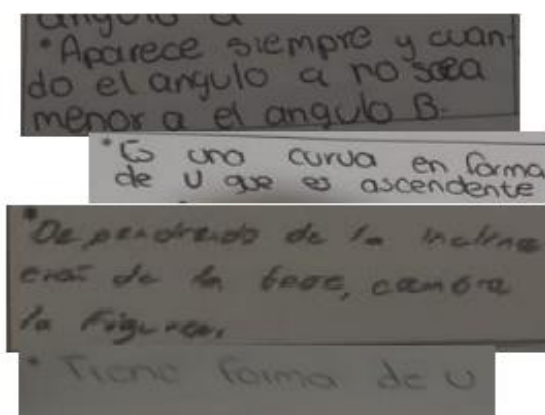


Figura 51. Evidencia Apolonio-elipse

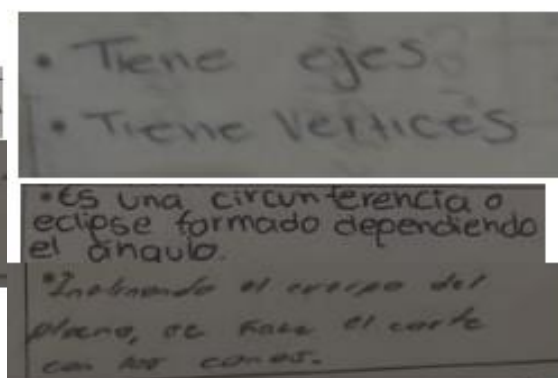
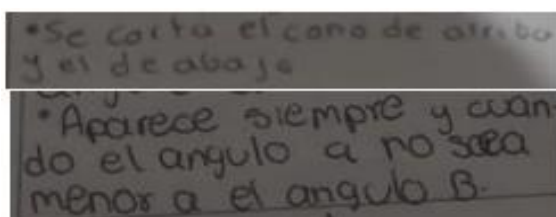


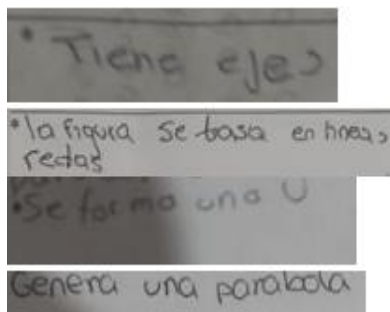
Figura 52. Evidencia Apolonio- Hipérbola



En el archivo *cónicas por envolventes*, el 100% de los estudiantes reconoce las características de la parábola, tales como su forma, las envolventes que la generan y su simetría (Figura 53). En cuanto a la elipse, solo el 14% de los estudiantes logra identificar sus características, mencionando que se trata de una curva generada por líneas rectas (Figura 54). En

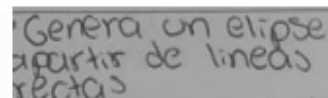
lo que respecta a la hipérbola, el 14% de los estudiantes señala la simetría de sus dos ramas (Figura 55).

*Figura 53. Evidencia Envolvente-parábola*



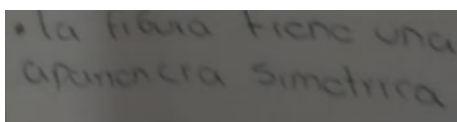
*Fuente:* Elaboración propia con producción de los estudiantes

*Figura 54. Evidencia Envolvente-elipse*



*Fuente:* Elaboración propia con producción de los estudiantes

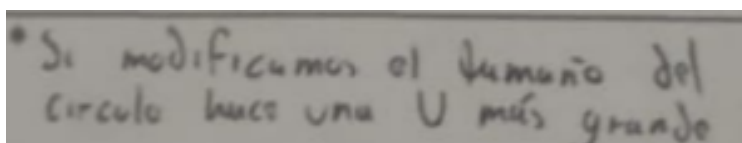
*Figura 55. Evidencia Envolvente-Hipérbola*



*Fuente:* Elaboración propia con producción de los estudiantes

En el archivo *cónicas como bisectrices de ángulos corneados*, el 14% de los estudiantes reconoce características de la parábola, mencionando su forma, la relación con la amplitud del radio de la circunferencia (Figura 56).

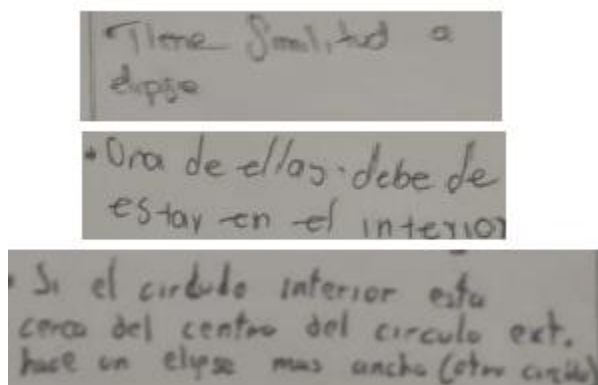
*Figura 56. Evidencia parábola ángulo corneado*



*Fuente:* Elaboración propia con producción de los estudiantes

En cuanto a la elipse, el 42% de los estudiantes identifica sus características, señalando la importancia de que una de las circunferencias debe estar en el interior de la otra (Figura 57).

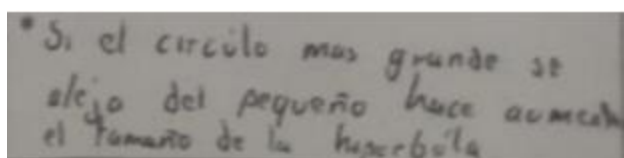
*Figura 57. Evidencia elipse ángulos corneados*



*Fuente:* Elaboración propia con producción de los estudiantes

Respecto a la hipérbola, el 14% de los estudiantes reconoce sus características, destacando la relación entre las longitudes de los radios de las circunferencias y el tamaño de la hipérbola, así como la importancia de las dos circunferencias para su construcción.

*Figura 58. Evidencia elipse como ángulos corneados*



*Fuente:* Elaboración propia con producción de los estudiantes

Los estudiantes suelen confundir la elipse con el óvalo o una “circunferencia alargada”. También tienden a confundir la hipérbola con la parábola, y en algunos casos, interpretan la hipérbola como una figura similar a un reloj de arena.

Para los numerales dos y tres de la segunda parte de la tarea, los estudiantes tienen que reconocer que existen tres curvas que aparecen en cada uno de los archivos de GeoGebra e

identificar qué características se diferencian en la exploración y en las construcciones con el material concreto. Dos de los seis grupos realizaron lo propuesto.

2. ¿Qué similitudes o diferencias tienen estas curvas de GeoGebra con las que observaron en las construcciones manuales?
3. ¿Cuántas curvas diferentes reconocen por cada construcción?

Un grupo de estudiantes identifica similitudes entre las construcciones de lugares geométricos relacionadas con los elementos de las secciones cónicas (como los focos), mientras que otro grupo reconoce las rectas como elementos fundamentales en las envolventes y el doblado de papel.

En cuanto al tercer numeral, los estudiantes comprenden que, aunque cada construcción sea distinta, se reconocen las tres secciones cónicas.

#### 4.2 Tarea 2

A los numerales 1a y 1b de la tarea 2 no se dará mucha relevancia en este análisis pues el 1a refería al tipo de ecuación y todos los estudiantes concluyeron rápidamente que la ecuación era de segundo grado porque el mayor exponente era dos, y el 1b se corresponde con la tabla del numeral 1c, en que se buscó que los estudiantes lograran completarla con la generalización para los coeficientes de  $x^2$  y  $y^2$ .

1. A partir de lo que se proyecta en el video beam responde las siguientes preguntas:

c. Con base en las respuestas del literal anterior, completen la Tabla 1.

Tabla 1

| Sección cónica | Valores de los coeficientes $x^2$ y $y^2$ |
|----------------|---|
| Elipse         |   |
| Parábola       |   |
| Hipérbola      |   |

El 50% de los estudiantes señala que la elipse se forma cuando los coeficientes de  $x^2$  y  $y^2$  son ambos positivos o ambos negativos, lo que refleja una comprensión parcial de las condiciones necesarias para identificar una elipse a partir de la ecuación general de segundo grado (Figura 59).

Figura 59. Evidencias parámetros para la elipse

|        |  |
|--------|--|
| Elipse | A y C sean positivos o negativos   |
| Elipse | se forma cuando el coeficiente $x^2$ y $y^2$ son negativos o positivos los dos |
| Elipse | que el valor a y c estén en negativos o positivos.                             |
| Elipse | (y) $x = -2,1$ A y C sean positivas o<br>$y = -2,9$ negativas                  |
| Elipse | $a = -1,8x^2$ tienen que ser<br>$c = -1,8y^2$ negativo o positivo.             |

Fuente: Elaboración propia con producción de los estudiantes

En cuanto a la parábola, el 13% de los estudiantes reconoce que se genera cuando uno de los coeficientes de  $x^2$  o  $y^2$  es igual a cero, lo cual es una condición básica para identificar una parábola en dicha ecuación. Sin embargo, el 37% de los estudiantes solo identifica algún caso particular, sin lograr generalizar o comprender la totalidad de las condiciones que definen a la curva cónica.

Figura 60. Evidencia parámetros para la parábola

|          |  |
|----------|--|
| Parábola | $a = 0$ , y, $C = 0$ , pero las dos no pueden ser cero |
| Parábola | $a = 0$ , $a$ tiene que estar en 0                     |

Fuente: Elaboración propia con producción de los estudiantes

Por último, el 63% de los estudiantes logra reconocer un caso específico para identificar la hipérbola a partir de la ecuación, aunque no lo hace de manera general, lo que sugiere que aún tienen dificultades para identificar la condición que abarca todos los posibles casos para la hipérbola, pues ningún estudiante logra identificar los dos casos o lo hace de manera general.

Figura 61. Evidencia parámetros para la hipérbola

|           |   |
|-----------|---|
| Hipérbola | (a) tiene que ser mayor a cero y (c) menor que cero               |
| Hipérbola | $a > 0$ y $c < 0$   |
| Hipérbola | a tiene que ser mayor que 0 y c menor a 0                         |
| Hipérbola | $x=2$ y $y=-1.5$ (a) tiene que ser mayor a 0 y (c) menor que cero |
| Hipérbola | $a=1.8$ tiene que ser mayor a 0 y $c=-7.0$ menor a 0              |

Fuente: Elaboración propia con producción de los estudiantes

En los numerales 2 y 3 de la tarea, se espera que los estudiantes identificaran, a partir de la representación algebraica de las ecuaciones de segundo grado, la cónica a la que corresponde cada una de ellas.

2. ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones representan secciones cónicas? ¿Qué secciones cónicas?
3. Compruebe con GeoGebra si las gráficas obtenidas en el punto 2 coinciden con sus respuestas.

El 50% de los estudiantes respondió correctamente los 6 ítems. Un 25% respondió correctamente 5 de los 6 ítems, y un 12% respondió correctamente 4 de los 6 ítems. El 12% restante respondió correctamente 3 de los 6 ítems.

Figura 62. Evidencia respuesta de los estudiantes

a.  $3x^2 - 6y^2 + 15x - 13y = 7$  Hiperbola

b.  $-x^2 + 5x + 6y^2 + \frac{1}{3}y = 15$  Hiperbola

c. a.  $3x^2 - 6y^2 + 15x - 13y = 7$  Hiperbola

d. b.  $-x^2 + 5x + 6y^2 + \frac{1}{3}y = 15$  Hiperbola

e. c.  $3x^3 - 8y^2 + 13x + 15y = 0$  No es función cuadrática

f. d.  $3x^2 + 15y - 14x - 13 = 0$  parábola

e.  $\frac{5}{3}y$  a.  $3x^2 - 6y^2 + 15x - 13y = 7$  - Hiperbola

f. x b.  $-x^2 + 5x + 6y^2 + \frac{1}{3}y = 15$  - Hiperbola

c.  $3x^3 - 8y^2 + 13x + 15y = 0$  - No es cónica porque no es cuadrática

d.  $3x^2 + 15y - 14x - 13 = 0$  a.  $3x^2 - 6y^2 + 15x - 13y = 7$  Elipse Hiperbola

e.  $\frac{5}{3}y^2 + 4x - \frac{3}{5}y = \frac{1}{7}$  b.  $-x^2 + 5x + 6y^2 + \frac{1}{3}y = 15$  Hiperbola

f.  $x = 3y$  - No es c.  $3x^3 - 8y^2 + 13x + 15y = 0$  NO es cuadrática

d.  $3x^2 + 15y - 14x - 13 = 0$  Elipse parábola

e.  $\frac{5}{3}y^2 + 4x - \frac{3}{5}y = \frac{12}{7}$  Elipse parábola

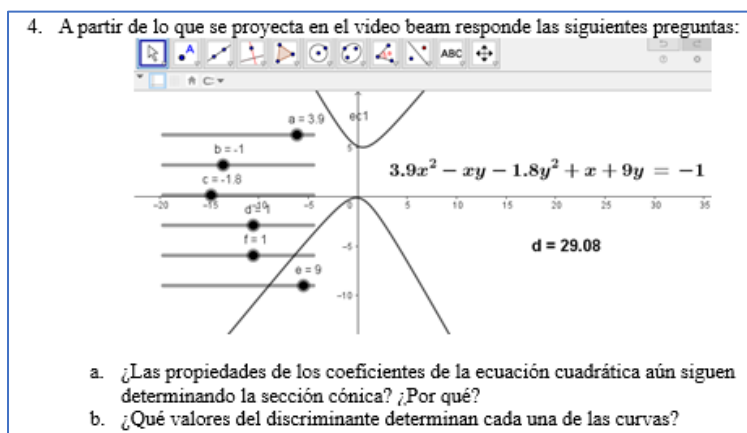
f.  $x = 3y$  NO es cuadrática

Fuente: Elaboración propia con producción de los estudiantes

Es importante resaltar la utilidad del tercer punto, ya que, al graficar cada una de las ecuaciones, los estudiantes pudieron visualizar la curva correspondiente e identificar los errores en su interpretación de la sección cónica a partir del parámetro. Se observó que algunos estudiantes cometían errores al comparar los coeficientes, ya que no identificaban correctamente los de las variables con potencia al cuadrado. Esto les impedía caracterizar adecuadamente la cónica. Sin embargo, al realizar la comprobación utilizando GeoGebra, los estudiantes cuestionaron sus respuestas y se dieron cuenta de sus errores conceptuales.

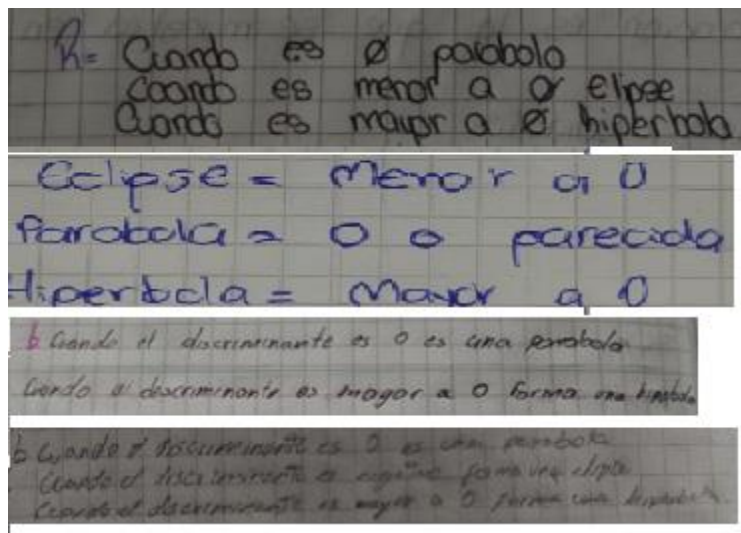
En el numeral 4 de la tarea 2, se solicitaba a los estudiantes que, mediante una exploración guiada por el docente, pudieran identificar que, cuando los coeficientes de  $x$ ,  $y$  tomaban un valor distinto de cero, los parámetros previamente establecidos ya no serían aplicables para clasificar o caracterizar una cónica. Para ello, se les pedía que, a partir del valor

del discriminante ( $d$ ) concluyeran cuáles eran los valores de este discriminante que determinaban cada una de las secciones cónicas ítem (4b).



Todos los estudiantes respondieron de manera correcta al 4b, pues los casos en que la representación gráfica era una hipérbola, parábola o elipse, además del uso de los deslizadores, permitieron mostrar de manera evidente los valores que tomaba el discriminante. A continuación, se muestran algunas evidencias de lo escrito por los estudiantes (Figura 63).

Figura 63. Evidencia literal 4b de la tarea 2



Fuente: Elaboración propia con producción de los estudiantes

En el numeral 5 de la tarea 2 se esperó que los estudiantes calcularan los discriminantes para cada una de las ecuaciones de segundo grado e identificaran la curva cónica a partir de este.

Determine el valor del discriminante para cada una de las ecuaciones de la Tabla 2 y determine cuál cónica se genera. Compruebe el resultado por medio de GeoGebra.

**Tabla 2**

| Ecuación                                     | Discriminante | Nombre de la cónica |
|--|---------------|---------------------|
| $-x^2 - 4xy - 3y^2 + x - 5y = 7$             |               |                     |
| $3x^2 - 2xy + \frac{1}{3}y^2 + 4x + 5y = -5$ |               |                     |
| $4x^2 - 3xy + y^2 + 5x - 3y = 5$             |               |                     |
| $-x^2 + 3xy - \frac{9}{4}y^2 + 5x = -10$     |               |                     |
| $x^2 + 5xy + 3x - 7y = 2$                    |               |                     |
| $3x^2 + 3xy + 3y^2 + 3x + 3y = 3$            |               |                     |
| $4xy + 4y^2 - 2x - 5y = 14$                  |               |                     |

El 62% de los estudiantes identificaron las secciones cónicas de manera correcta a partir del cálculo del discriminante, como se muestra a continuación:

Figura 64. Evidencia reconocimiento de la cónica por discriminante

| Ecuación                                     | Discriminante                            | Nombre de la cónica |
|--|--|---------------------|
| $-x^2 - 4xy - 3y^2 + x - 5y = 7$             | $(-4)^2 - 4(-1)(-3) = 16 - 12 = 4$       | Hiperbola           |
| $3x^2 - 2xy + \frac{1}{3}y^2 + 4x + 5y = -5$ | $(-2)^2 - 4(3)(\frac{1}{3}) = 4 - 4 = 0$ | Parabola            |
| $4x^2 - 3xy + y^2 + 5x - 3y = 5$             | 4  | hiperbola           |
| $-x^2 + 3xy - \frac{9}{4}y^2 + 5x = -10$     | 0  | Parabola            |
| $x^2 + 5xy + 3x - 7y = 2$                    |  |                     |
| $3x^2 + 3xy + 3y^2 + 3x + 3y = 3$            |  |                     |
| $4xy + 4y^2 - 2x - 5y = 14$                  |  |                     |

| Ecuación                                     | Discriminante            | Nombre de la cónica |
|--|--------------------------|---------------------|
| $-x^2 - 4xy - 3y^2 + x - 5y = 7$             | $(-4)^2 - 4(-1)(-3) = 4$ | hiperbola ✓         |
| $3x^2 - 2xy + \frac{1}{3}y^2 + 4x + 5y = -5$ | = 0                      | Parabola ✓          |
| $4x^2 - 3xy + y^2 + 5x - 3y = 5$             | = -4                     | Elipse ✓            |
| $-x^2 + 3xy - \frac{9}{4}y^2 + 5x = -10$     | = 0                      | Parabola ✓          |

| Ecuación                                     | Discriminante                               | Nombre de la cónica |
|--|---|---------------------|
| $-x^2 - 4xy - 3y^2 + x - 5y = 7$             | $(-4)^2 - 4(-1)(-3) = 4$                    | hiperbola           |
| $3x^2 - 2xy + \frac{1}{3}y^2 + 4x + 5y = -5$ | $(-2)^2 - 4(3)(\frac{1}{3}) = 0$            | Parabola            |
| $4x^2 - 3xy + y^2 + 5x - 3y = 5$             | $(-3)^2 - 4(4)(-1) = 25$                    | Elipse              |
| $-x^2 + 3xy - \frac{9}{4}y^2 + 5x = -10$     | $(\frac{3}{2})^2 - 4(-1)(-\frac{9}{4}) = 0$ | parabola            |
| $x^2 + 5xy + 3x - 7y = 2$                    | $5^2 - 7 \cdot 4 + 3^2 = 25$                | Hiperbola           |
| $3x^2 + 3xy + 3y^2 + 3x + 3y = 3$            | $3^2 - 3 \cdot 4 + 3^2 = 0$                 | Elipse              |
| $4xy + 4y^2 - 2x - 5y = 14$                  | $4^2 - 5 \cdot 4 + 2^2 = 16$                | Hiperbola           |

Fuente: Elaboración propia con producción de los estudiantes

Hubo algunos casos particulares en que calculaban bien el discriminante pero no asociaban la sección cónica correspondiente.

Figura 65. Caso particular relación errónea discriminante y sección cónica

| Ecuación                         | Discriminante                         | Nombre de la cónica |
|----------------------------------|---------------------------------------|---------------------|
| $-x^2 - 4xy - 3y^2 + x - 5y = 7$ | $(-4)^2 - 4(-1)(-3)$<br>$16 - 12 = 4$ | elipse              |

Fuente: Elaboración propia con producción de los estudiantes

Otros estudiantes cometían errores en el cálculo de discriminante, pero si asociaban la sección cónica de acuerdo con el discriminante erróneo, como se ve a continuación:

Figura 66. Evidencia caso de mal cálculo del discriminante

|  |    |           |
|--|----|-----------|
| $3x^2 - 2xy + \frac{1}{3}y^2 + 4x + 5y = -5$ | 52 | Hiperbola |
| $4xy + 4y^2 - 2x - 5y = 14$                  | 0  | Parabola  |

Fuente: Elaboración propia con producción de los estudiantes

## 5. Conclusiones

El capítulo de conclusiones de este trabajo de grado se realiza a partir de tres apartados: como primera instancia relacionada al cumplimiento de los objetivos y cómo se desarrollaron a lo largo del trabajo, en segundo lugar, los aprendizajes de los autores en lo profesional y, finalmente, los asuntos o preguntas que quedaron para abordar.

En relación con el cumplimiento de los objetivos, se contempla que sí se logró el objetivo general el cual corresponde a diseñar una secuencia de tareas en torno al aprendizaje de las secciones cónicas relacionadas con su desarrollo a lo largo de la historia, pues en el diseño de tareas en el elemento formulación de la tarea matemática, se evidencia la relación de cada punto de las guías con el hito histórico.

Se considera también el logro de los objetivos específicos, porque se establecieron una serie de actividades para cada uno de ellos, como se describen a continuación:

- El primer objetivo específico, se llevó a cabalidad pues se realizó una revisión documental sobre como surgieron las secciones cónicas, el tratado que le dieron diferentes matemáticos y la evolución de estas curvas, a partir de los distintos métodos que se usaron a lo largo de su historia.
- Para el segundo objetivo específico, se realizó una revisión de varios trabajos de pregrado y maestría, con el propósito de observar cómo se abordaban las secciones cónicas en el aula de clase, además, se tuvieron en cuenta los documentos del Ministerio de Educación Nacional como los DBA y los EBCM.
- Para el tercer objetivo específico, se tuvo en cuenta a varios autores entre ellos a Palenzuela, Guacaneme y Poincaré, quienes hablan de la historia de las matemáticas en el aula como un recurso didáctico, además, de tener en cuenta la propuesta de Gómez y sus

siete elementos para el diseño de cada tarea, sin embargo, este objetivo no se cumplió en su totalidad debido a que no se realizaron la cantidad de tareas propuestas.

- Para el ultimo objetivo específico, consideramos que no se llevó a cabo en su totalidad pues debido a que se realizó a final del año se perdieron algunas clases en el grupo seleccionado para el pilotaje y por ende fue imposible implementar las tres tareas, sin embargo, si se pudo implementar la tarea 1 y la parte I de la tarea 2.

Por otro lado, respecto al aprendizaje de los autores desde lo profesional, se reconoce una mejora de habilidades en la investigación, como la capacidad de realizar una revisión documental de la historia de un objeto matemático, en este caso las secciones cónicas, identificando la información que es útil o no teniendo en cuenta los objetivos y los intereses investigativos. Para este trabajo de grado se plasmó esta información, a partir de una construcción de resúmenes en los que se evidenciaron los mismos hitos históricos en diferentes documentos. Además, se notó el progreso en aptitudes académicas, como lo son la lectura analítica en textos, así mismo, la redacción al momento de recoger toda la información obtenida de distintos documentos y así realizar la elaboración de la monografía.

Para finalizar con este capítulo, se hace una invitación a seguir con esta monografía, desde el diseño e implementación de las tareas que hicieron falta, además de tomar otras propuestas para el diseño de tareas, que si bien, fue un gran recurso para los autores, sería interesante proponer desde otro método con la intención de cuantificar y cualificar resultados, también se propone evaluar las tareas propuestas desde alguna rubrica sustentada teóricamente, pues en este trabajo, se realizó el análisis con las respuestas de los estudiantes y se tomó como respuestas correctas aquellas que se acercaban a los propósitos y metas planteadas en el diseño

de cada tarea, debido a que no era objeto del trabajo una evaluación rigurosa de la implementación, tan solo el desarrollo de una prueba piloto.

## 6. Referencias

- Aldana Barón, L., y Guerrero Nieto, B. (2023). *Recurso educativo digital abierto como mediador para el fortalecimiento del aprendizaje de la geometría: el caso de las cónicas*. Obtenido de <http://repositorio.pedagogica.edu.co/bitstream/handle/20.500.12209/19351/Creaci%C3%B3n%20de%20un%20REDA.pdf?sequence=2>
- Arandia, W., y Garcés, J. (2019). *un estudio de las secciones cónicas y cuadráticas apartir de su matriz asociada*. Obtenido de <http://repositorio.pedagogica.edu.co/bitstream/handle/20.500.12209/10525/TE-23362.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Arboleda, L. (2013). El análisis cartesiano en la solución del problema de Pappus y la introducción de las curvas algebraicas. *13° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (págs. 764-767). Medellín: Universidad de Medellín.
- Bayona, W. (2013). *propuesta didactica para la enseñanza de las leyes de kepler por medio del aprendizaje colaborativo*. Obtenido de <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/75076>
- Bello, J. (2013). *Mediacion del software GeoGebra en el aprendizaje de programacion lineal en alumnos de quinto grado de educacion secundaria*. Obtenido de <http://hdl.handle.net/20.500.12404/4737>
- Boyer, C. (2007). Historia de la matemática. *Alianza*.
- Camargo, L. (2021). *Estrategias cualitativas de investigación en educación matemática. Recursos para la captura de información y el análisis*. Bogotá D.C: Universidad de Antioquia.

- Castellanos, I. (2010). *Visualización y razonamiento en las construcciones geométricas utilizando el software GeoGebra con alumnos de II de Magisterio de la E.N.M.P.N.* Obtenido de <https://repositorio.upnfm.edu.hn/server/api/core/bitstreams/752583d9-c728-4aeb-a972-14b094278754/content>
- Castelnoble Diaz, M., y Gonzales Herrera, F. (2015). Cónicas en la Grecia antigua. *Reloj de agua*, 17-31.
- Giraldo. (2017). *construcción de secciones cónicas con GeoGebra para estudiantes de grado noveno en la I:E Jorge Villamil Ortega.* Obtenido de <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/63052>
- Gómez, P., Mora, M., y Velasco, C. (2018). *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: Conceptos y técnicas curriculares (pp.197-268).* Obtenido de <https://repositorio.uniandes.edu.co/server/api/core/bitstreams/a4cedb6c-4130-48cc-a222-2e50143a5b21/content>
- Guacaneme, E. A. (2010). ¿Qué tipo de historia de las matemáticas debe ser apropiada por un profesor? *EDUCyT, II*.
- Koshkin, S. (2020). Bisecting horn angles. *The College Mathematics journal*, 124-131.
- López, G. (2022). Secciones cónicas, una aproximación analítica. *Metropolitana de matemáticas*, 99-107.
- Lugo. (2014). *Secciones cónicas: un estudio epistemológico y el análisis de su tratamiento en los libros de texto.* Obtenido de <https://www.ungs.edu.ar/wp-content/uploads/2014/10/SECCIONES-C%C3%93NICAS.-Un-estudio->

epistemol%C3%B3gico-y-el-an%C3%A1lisis-de-su-tratamiento-en-los-libros-de-textos.pdf

- Mancera , E. (2015). *Argumentación de los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas del curso de Geometría Analítica al realizar una tarea sobre definiciones geométricas de secciones cónicas*. Obtenido de <http://hdl.handle.net/20.500.12209/2226>
- Martinez, D. (2015). La elipse a través de la historia: concepciones epistemológicas de la elipse en tres momentos históricos diferentes. *Memorias del encuentro de geometria y sus aplicaciones* (págs. 133-140). Bogota D.C: Universidd Distrital Frncisco José de Caldas.
- MEN. (1998). *Lineamientos curriculares de Matemáticas*. Obtenido de [https://www.mineduacion.gov.co/1780/articles-339975\\_matematicas.pdf](https://www.mineduacion.gov.co/1780/articles-339975_matematicas.pdf)
- MEN. (2006). *Estandares Básicos de Competencias*. Obtenido de [https://www.mineduacion.gov.co/1621/articles-340021\\_recurso\\_1.pdf](https://www.mineduacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf).
- MEN. (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje de Matemáticas*. Obtenido de [https://www.colombiaaprende.edu.co/sites/default/files/files\\_public/2022-06/DBA\\_Matematicas-min.pdf](https://www.colombiaaprende.edu.co/sites/default/files/files_public/2022-06/DBA_Matematicas-min.pdf)
- Mendoza, J. (2018). *¿Un posible error en la "geometrie"?: Descartes y la solucion al problema de Pappus*. Obtenido de <http://funes.uniandes.edu.co/22899/1/Mendoza2018Un.pdf>
- Mesa , Y., y Villa, J. (2009). El papel de Galileo Galilei en la construcción histórica del concepto de función cuadrática. *acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 1315-1323.
- Moreno Prieto, Á. (2018). *Historia de las cónicas y su aporte al conocimiento del profesor de Matemáticas*. Obtenido de <http://hdl.handle.net/20.500.12209/11109>

- Navarro, R. (2009). *¿Es la mente mo lineal?* cali: Universidad del Valle.
- Ortegon, J. H. (2013). *Actividades de exploración y argumentación realizadas por estudiantes de la Institución Educativa Santa Ana del municipio de Soacha surgidas del estudio de las secciones cónicas a partir del concepto de excentricidad y con la mediación de herramientas tec.* Obtenido de <http://hdl.handle.net/20.500.12209/120>
- Palenzuela, H. (2016). *¿Por qué incluir la Historia de la Matemática en el aula?* Obtenido de [https://repositorio.ual.es/bitstream/handle/10835/6028/14375\\_Helena%20Palenzuela%20Rodr%C3%ADguez%20%281%29.pdf?sequence=1&isAllowed=y](https://repositorio.ual.es/bitstream/handle/10835/6028/14375_Helena%20Palenzuela%20Rodr%C3%ADguez%20%281%29.pdf?sequence=1&isAllowed=y)
- Pedoe, D. (1979). *La geometria en el arte.* Barcelona: Gili S.A.
- Pérez, Y. (2018). Análisis histórico-epistemológico-didáctico sobre las secciones cónicas. *Arje*, 265-271.
- Poincare, H. (1944). *Ciencia y método.* Cosimo.
- Quintana , C., Diaz, F., y Leon, C. (2024). El movimiento de proyectiles desde un contexto de significacion. *Boletin Redipe*, 143-158.
- Ramírez. (2013). *Las secciones cónicas en la escuela secundaria: un análisis matemático y didactico.* Obtenido de <http://repositorio.ungs.edu.ar/handle/UNGS/77>
- Rodriguez, H. (2023). *El infinitesimal, una noción de multiples rostros.* Obtenido de <http://repositorio.pedagogica.edu.co/bitstream/handle/20.500.12209/18483/Infinitesimal.pdf?sequence=3&isAllowed=y>
- Ruiz, J. (1996). Las esferas de Dandelin. *Educación Matemática*, 117-126.

Vargas, I. (2018). *Epistemología de las secciones cónicas y su enseñanza*. Obtenido de [https://up-rid.up.ac.pa/6405/1/isai\\_stonestreet.pdf](https://up-rid.up.ac.pa/6405/1/isai_stonestreet.pdf)

Yates, R. (1974). *Curves and their properties* . washington: National Council of Teachers of Mathematics.