

LA BRAQUISTÓCRONA: UN
EXPERIMENTO DISCREPANTE
ÚTIL PARA LA ENSEÑANZA
DEL PRINCIPIO DE
CONSERVACIÓN DE LA
ENERGÍA MECÁNICA

TESIS PRESENTADA POR: GUSTAVO ANDRÉS CORTÉS PULGARÍN
DIRIGIDO POR: IGNACIO ALBERTO MONROY CAÑÓN
PARA OBTENER EL TÍTULO DE LICENCIADO EN FÍSICA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

Departamento de Física


2015

Agradecimientos

A Dios

A mis familiares, en especial a mi abuela y a mi madre


A mis profesores, especialmente a Ignacio Alberto Monroy

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Enseñanza al servicio de la sociedad</small>	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 1 de 4	

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	LA BRAQUISTÓCRONA: UN EXPERIMENTO DISCREPANTE ÚTIL PARA LA ENSEÑANZA DEL PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA
Autor(es)	Cortés Pulgarín, Gustavo Andrés
Director	Monroy Cañón, Ignacio Alberto
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2015. 54p
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
PALABRAS CLAVES	EXPERIMENTOS DISCREPANTES, BRAQUISTÓCRONA, APRENDIZAJE ACTIVO, FACTOR DE CONCENTRACIÓN DE BAO, GANANCIA NORMALIZADA DE HAKE, CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA

2. Descripción
<p>La enseñanza del principio de conservación de la energía mecánica es una temática fundamental para carreras que requieran conocimientos en física; es importante abordarlo debido a que permite determinar cambios en el estado de movimiento y con guración de un sistema mecánico a partir de sus coordenadas de posición y velocidad.</p> <p>El presente trabajo propone la enseñanza de este principio mediante la utilización del experimento discrepante braquistócrona-plano inclinado mediante la metodología activa y observar las bondades pedagógicas que se generan tras aplicar una serie de actividades relacionadas con el montaje y la temática en cuestión.</p>

3. Fuentes
<p>Barbosa, L.H. (2008). Los experimentos discrepantes en el aprendizaje activo de la física. Latin American Journal of Physics Education 2(3):24.</p> <p>Barbosa, L.H., Mora, C., Talero, P. (2011). El soplador mágico: Un experimento discrepante en el aprendizaje de la ley de presión hidrodinámica de Bernoulli. Revista Brasileira de Ensino de Física, 33(4):4309.</p> <p>Cárdenas, E. S. (2007). Experimentos discrepantes para la enseñanza del centro de masa, momento de</p>

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>EDUCACIÓN AL SERVIDICIO</small>	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 2 de 4	

inerencia y torque, Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Guacaname, J .E. (1993). Diez experimentos discrepantes sobre óptica en tercero de primaria. Universidad Pedagógica Nacional.

Huber, G.L.(2008). Aprendizaje activo y metodologías de enseñanza active learning and methods teaching. Tiempos de cambios en Europa, 59.

Martínez. J.O.(2012).El aprendizaje activo de la física. Revista Mexicana de Bachillerato a Distancia 4(72):7.

Nunnally, Jum C y DOnghi L.H. (1970). Introducción a la medición psicológica. Paidós, Buenos Aires.

Perrotta Teresa, Follari Beatriz L.C.D.G.y.C.M.(2013). La enseñanza de la mecánica en el nivel medio una estrategia didáctica. Primera parte. Lat. Am. J. Phys. Educ, (7):391-398.


Redish, E.F. (1999). Millikan lecture 1998: Building a science of teaching physics. American Journal of physics 67(7):562-573.

Villani, Alberto y Orquiza de Carvalho , L. (1995). Con ictos cognitivos, experimentos cualitativos y actividades didácticas, Enseñanza de las ciencias volumen 13, pages 279-294.

4. Contenidos

A continuación se resumen los contenidos de cada capítulo del documento para poder ofrecer una mejor perspectiva de lo que allí se expone.

1. Aprendizaje activo de la física: En este capítulo se especifican las ideas básicas del aprendizaje activo de la física y las bondades que esta genera a la hora de ser aplicado en un espacio de aula.
2. Experimentos discrepantes: El lector podrá encontrar en esta parte del documento la descripción y utilidad de los experimentos discrepantes en su labor como docente, además se comenta en que consiste el montaje de la braquistócrona-plano inclinado y se propone un modelo físico-matemático para dicho montaje.
3. Medición de la ganancia conceptual: En este apartado del texto, se hace referencia a las mediciones respecto a la evolución del aprendizaje, puede encontrarse allí lo concerniente al factor de concentración de Bao y Redish y la ganancia normalizada de Hake.
4. Actividades, implementación y resultados: Una vez se comience a leer este capítulo se encontrarán las actividades que se desarrollaron, los resultados que se obtuvieron al ser implementadas y finalmente los análisis que se hicieron de los mismos.

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>EDUCACIÓN AL SERVIDICIO</small>	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 3 de 4	

5. Resultados y conclusiones: Esta sección permite agrupar todas las reflexiones que se generaron durante todo el proceso de elaboración del trabajo y mediante estas poder ofrecer una perspectiva global de la importancia de esta propuesta en la enseñanza.

5. Metodología

Se utilizó una metodología cuantitativa para el análisis de los resultados del pre-test y del pos-test en relación con los puntajes y las concentraciones relacionadas con las respuestas de los mismos.

Inicialmente se determinaron los puntajes adquiridos para cada posible respuesta tras la solución del pre-test “energía mecánica” y con base en ellos se calculan las concentraciones de respuestas para cada una de las preguntas mediante lo que se conoce como el factor de concentración de Bao y Redish, de tal manera que se tuviera un estimado de los modelos explicativos que los estudiantes tenían respecto a la temática en cuestión.

Una vez se desarrollaron una serie de actividades se procedió a aplicar un pos-test (el mismo pre-test) e igualmente se calcularon los puntajes y concentraciones obtenidas para el mismo de manera tal que fueron contrastados con los resultados del pre-test.


La contrastación es el tercer y último paso, pues mediante esta se determinó la evolución del aprendizaje respecto al principio de conservación de la energía mecánica mediante lo que se conoce como la ganancia normalizada de Hake.

6. Conclusiones

1. La obtención del modelo físico-matemático que describe el fenómeno discrepante para la braquistócrona permitió una mejor comprensión de dicho fenómeno en el aula de clase tal como se evidenció en los cursos de mecánica II del Departamento de Física de la Universidad Pedagógica Nacional en el semestre 2015-2.

2. Al aplicar el pre-test y el pos-test relacionado con la energía mecánica, se pudo evidenciar que las concentraciones de respuestas y el puntaje adquirido aumentaron generando una evolución del aprendizaje determinado por la ganancia de Hake cuyo valor fue de 0.52 con desviación de 0.32. Lo anterior permite concluir que la evolución en el conocimiento de la temática en la población analizada se debe al accionamiento del montaje y la participación activa en el desarrollo de las actividades.

3. Al dar a conocer el experimento braquistócrona-plano inclinado y solucionar las actividades relacionadas con dicho experimento fue posible notar una motivación por parte de la población estudiantil en cuanto al interés por entender lo que sucede con el mismo y en participar activamente en todo el proceso, por esto,

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Enseñanza al servicio de la sociedad</small>	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 4 de 4	

es posible decir que el uso de experimentos discrepantes en el aula de clase asociado con la metodología de aprendizaje activo es una herramienta eficaz para generar un proceso de aprendizaje en temas de la física.

4. Se evidenció como conclusión por parte de los estudiantes la comprensión de un aspecto relacionado con el principio de conservación de la energía que da cuenta de la no dependencia de las variaciones de energía o trabajo de la trayectoria en ausencia de fuerzas disipativas debido al desarrollo del taller EL león se reconoce por sus garras que se relaciona con el montaje braquistócrona-plano inclinado, por lo tanto se puede decir que dicho montaje es útil en el momento de disminuir las dudas respecto a dicho aspecto del principio.

Elaborado por:	Gustavo Andrés Cortés Pulgarín
Revisado por:	Ignacio Alberto Monroy

Fecha de elaboración del Resumen:	29	11	2015
--	----	----	------

Índice general

Agradecimientos	2
1. INTRODUCCIÓN	11
1.1. Planteamiento del problema	12
1.2. Objetivos	14
1.3. Antecedentes	15
2. APRENDIZAJE ACTIVO DE LA FÍSICA	18
2.1. Aprendizaje Activo	19
2.2. El Conflicto Cognitivo	21
3. EXPERIMENTOS DISCREPANTES	24
3.1. La Braquistócrona-Plano inclinado	26
3.2. EL León se Reconoce por sus Garras	27
3.3. Las Ecuaciones Cinemáticas para la Braquistócrona	28
4. MEDICIÓN DE LA GANANCIA CONCEPTUAL	37
4.1. Factor de concentración de Bao y Redish	39
4.2. Ganancia normalizada de Hake	40
5. ACTIVIDADES, IMPLEMENTACIÓN Y RESULTADOS	42
5.1. Pre-test	44
5.2. Test del montaje braquistócrona-plano inclinado	47
5.3. Taller orientador	52
5.4. Pos-test	55

5.5. Confrontación de resultados pre-test y pos-test	57
6. RESULTADOS Y CONCLUSIONES	61
Bibliografía	63
A. Apéndice A	66
B. Apéndice B	68
C. Apéndice C	72
D. Apéndice D	74
E. Apéndice E	82

Índice de figuras

3.1. Montaje experimental Braquistócrona-Plano inclinado	26
3.2. Circulo generador de la cicloide	29
3.3. Generación de la cicloide por un circulo de radio a	29
3.4. Alturas alcanzadas por la partículas en ambas trayectorias	35
3.5. Rapidez alcanzadas por la partículas en ambas trayectorias	36
5.1. Concentración versus puntajes para el pre-test	46
5.2. Montaje experimental Braquistócrona-Plano inclinado	48
5.3. Estudiante explicando su hipótesis	52
5.4. Estudiante explicando su hipótesis	52
5.5. Estudiantes interactuando con el montaje Braquistócrona-plano incli- nado	53
5.6. Concentración versus puntaje para el pos-test	57
5.7. Confrontación entre las concentraciones para el pre-test y pos-test . .	58
5.8. Ganancia promedio de los estudiantes versus Puntaje promedio del pre-test.	60

Índice de cuadros

2.1. Comparación entre enseñanza tradicional y activa	22
4.1. Niveles de puntaje y concentración	40
4.2. Niveles de ganancia de Hake	41
5.1. Respuestas para las preguntas del pre-test	45
5.2. Concentración pre-test	45
5.3. Respuestas para las preguntas del pos-test	56
5.4. Concentración pos-test	56
5.5. Confrontación entre respuestas del pre-test y el pos-test	58

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

La enseñanza del principio de conservación de la energía mecánica es una temática fundamental que se aborda tanto a nivel secundario básico como universitario. Este concepto es ampliamente utilizado en el contexto de la física; es una palabra común en nuestro vocabulario y el científico la usa para referirse a aquello que unifica el universo como un todo comprensible y viviente [2], pero no se ha definido en forma completamente satisfactoria, es decir, no presenta una definición única de la cual se pueda hacer uso sin entrar en discusión. Aun así, es importante abordarla debido a que permite determinar de manera acertada y sencilla los cambios en el estado de movimiento y configuración de un sistema mecánico a partir de sus coordenadas de posición y velocidad.

Durante mucho tiempo la metodología de implementación en el aula de clase de las temáticas de mecánica y conservación de energía se enmarcó en la metodología de enseñanza tradicional [6]. En la literatura se encuentran diferentes trabajos basados en la enseñanza de estas temáticas teniendo como base software educativos, laboratorios básicos y lecturas, que son útiles en diferentes espacios, basados en diferentes metodologías a la tradicional.

Una propuesta de enseñanza útil para abordar temáticas de la física es la asociada con los experimentos discrepantes los cuales al ser contra-intuitivos [4] generan un estímulo positivo en los estudiantes, pues estos se interesan en tratar de describir el

fenómeno desarrollando hipótesis, identificando y relacionando variables y finalmente dando una explicación que logre eliminar la disonancia cognitiva que les generó el experimento. Dicha propuesta de enseñanza si es asociada con una metodología adecuada, facilitará el proceso enseñanza-aprendizaje en un espacio de aula.

En el presente trabajo se desarrollará una propuesta encaminada a aplicar el experimento discrepante braquistócrona-plano inclinado en un espacio académico mediante la metodología de aprendizaje activo para abordar el principio de conservación de la energía mecánica. En el primer capítulo se habla acerca de la metodología de aprendizaje activo de la física y todas las bondades que esta presenta a la hora de ser aplicada. El segundo capítulo está encaminado en dar a conocer lo que se conoce como experimentos discrepantes y todas las características de estos, además se explica en que consiste el experimento discrepante braquistócrona-plano inclinado y su funcionamiento, los orígenes del mismo y además de ello, se presenta una solución físico-matemática de la braquistócrona de manera tal que se obtienen las ecuaciones de movimiento para partículas que se mueven a través de una curva cicloide y de un plano inclinado. El capítulo tres se encarga de describir la metodología utilizada para el análisis de datos obtenidos tras la implementación, allí se encontrarán las herramientas necesarias para dicho fin, se hablará acerca de los test, del factor de concentración de Bao y la ganancia normalizada de Hake. En el capítulo cuatro se encontrará la descripción de la implementación, las actividades que se plantearon y los datos obtenidos y analizados, culminado con los resultados y conclusiones.

1.1. Planteamiento del problema

La mecánica newtoniana y las temáticas de trabajo y energía son abordadas por los estudiantes de ciencias en los primeros semestres de sus carreras en los casos más generales. La relevancia de estos conceptos subyacen en los primeros acercamientos que tienen los estudiantes hacia la física. Una motivación adecuada en el procesos de enseñanza en esta etapa es fundamental para que los estudiantes no sientan desinterés por aprender física y vean la importancia y el rol que tiene esta rama de la

ciencias en general [5].

Muchas estrategias y metodologías de enseñanza son aplicadas en esta etapa, por ejemplo experimentos, herramientas computacionales, talleres y demás que pueden en parte ser desarrolladas dentro de una metodología tradicional, en donde los estudiantes en forma mecánica realizan las actividades indicadas por el docente. La generación de espacios en donde los estudiantes sean partícipes de una manera activa, haciendo preguntas, consultando, interactuando con su entorno y donde el discurso académico sea motivado de alguna manera no es una tarea fácil y lograr que todos los estudiantes alcancen esta situación ideal es aún mas complicado.

Una de las metodologías existentes que ha tenido grandes alcances en el ámbito educativo es la que se conoce como aprendizaje activo de la física en la cual la participación de los estudiantes es el eje principal en su proceso de aprendizaje. Esta incluye el uso de herramientas experimentales en donde los estudiantes tienen un gran campo de trabajo.

Se busca desarrollar una propuesta en donde se lleve a cabo la enseñanza de la temática de conservación de la energía mecánica y tener un material que permita cuantificar la evolución del aprendizaje de los estudiantes en los conceptos básicos. Dentro de los muchos experimentos que existen para abordar este principio de la física, se desea incluir el experimento de la braquistócrona que historicamente se desarrolla dentro del cálculo variacional [13] y su análisis energético no es su estudio principal, por lo cual se plantea la siguiente pregunta:

¿Cómo el experimento discrepante braquistócrona-plano inclinado puede ser de ayuda a la hora de ser aplicado en una población estudiantil, con la intención de dar a conocer la temática del principio de conservación de la energía mecánica, teniendo como base el aprendizaje activo de la física?

1.2. Objetivos

General:

Enseñar la temática de conservación de la energía mecánica a determinada población estudiantil universitaria mediante el uso del experimento discrepante braquistócrona-plano inclinado.

Específicos:

1. Desarrollar un modelo físico-matemático que permita dar cuenta de lo que sucede con la braquistócrona.
2. Diseñar y aplicar un test que permita evidenciar las discrepancias relacionadas al montaje braquistócrona-Plano inclinado en una población estudiantil.
3. Desarrollar e implementar un taller que oriente el proceso de aprendizaje de los estudiantes respecto a la temática de conservación de energía mecánica con base en el montaje braquistócrona-plano inclinado.
4. Cuantificar la ganancia conceptual de los estudiantes en lo concerniente a la temática de conservación de la energía mecánica mediante la aplicación de un pre-test y un pos-test.
5. Analizar los resultados obtenidos tras implementar el experimento braquistócrona-plano inclinado y desarrollar las actividades relacionadas mediante la metodología del aprendizaje activo.

1.3. Antecedentes

Con el fin de contextualizar el presente trabajo en el ámbito nacional e internacional se analizarán los antecedentes relacionados con la temática de experimentos discrepantes, debido a que fueron un punto de partida y una guía en el proceso de desarrollo de la investigación.

Inicialmente se analizaron los trabajos de corte nacional como en el caso de Guacame [10] el cual surge con la iniciativa de ayudar en el aumento del interés en la enseñanza de las ciencias por medio de experimentos discrepantes desde temprana edad, con el fin de rescatar el efecto que causan en el aprendizaje de los niños. Dentro de la metodología desarrollada se utiliza la teoría de Tik Liem sobre los fenómenos discrepantes y como esta contribuye en la retención de la explicación y el aumento del interés en los niños respecto al estudio de temas de óptica; las conclusiones que se presentaron en el trabajo permiten decir que los estudiantes recuerdan varios días después lo aprendido mediante la aplicación de los experimentos discrepantes y por lo tanto, que estos motivan el interés por aprender ciencias.

Respecto al trabajo de Castillo [7] puede decirse que surgió con la necesidad de evaluar los diferentes modelos de enseñanza aplicados en las ciencias con el fin de determinar cual de ellos generaría mayor motivación e interés respecto al comprensión y la explicación de los modelos científicos. Con la utilización de los eventos discrepantes se comprobó que estos resultan ser interesantes y llamativos para los estudiantes en el aula de clase, ya que permiten una fácil comprensión de fenómenos debido a que generan en ellos conflictos y por lo tanto debates en torno al funcionamiento de los mismos con el fin de que puedan proporcionar sus propias conclusiones; se encontró por medio de este trabajo que los estudiantes se interesaron, se motivaron y retuvieron los conceptos por más tiempo en la memoria comparado con una metodología de aprendizaje tradicional.

Un tercer trabajo desarrollado por Cárdenas [8] permite tener una mirada hacia la determinación de los problemas conceptuales de los estudiantes y la poca participación en el aula de los mismos dada la deficiencia en cuanto a su aprendizaje

conceptual, y como los experimentos discrepantes contribuyeron a romper las barreras existentes en su aprendizaje; se encontró que dichos experimentos generaron en los estudiantes un impacto emocional hacia la curiosidad y el desarrollo de sus propias ideas con la ayuda del docente como un agente guía para el análisis, interpretación y observación de los experimentos.

Internacionalmente se encontraron diversos artículos tales como los del profesor Barbosa, el cual ha desarrollado investigaciones alrededor de los experimentos discrepantes y ha plasmado evidencias y resultados en diferentes artículos:

Respecto al primer artículo [5] Barbosa se refiere a los experimentos discrepantes como la chispa que mueve a los estudiantes y favorece el proceso de aprendizaje, de allí que su interés por estos experimentos radique en aumentar el interés de los estudiantes por aprender ciencias. Propone un experimento denominado “Botellas equilibristas” al que normalmente se le explica desde el concepto de inercia, pero pretende que no sea mediante este camino sino desde otros generando debates y demás de manera tal que logra en los estudiantes motivación y asombro y con ello promueve un escenario de riquezas pedagógicas sin tener que recurrir al concepto de inercia.

En su segundo artículo [21] barbosa presenta la modelación teórica del experimento discrepante “La compuerta mágica” teniendo como referente que la modelación de experimentos discrepantes son una herramienta útil para la enseñanza de la física; finalmente en el tercer artículo se presenta el “Soplador mágico” [4] y su propósito radica en presentar un experimento discrepante, su modelación física y las bondades pedagógicas del montaje para apropiarse de la ley de presión hidrodinámica de Bernoulli. Se presentan resultados del impacto sobre una población de estudiantes y se mide su movilización surgida del proceso de ir desde un estado de disonancia a un estado de consonancia. se Encontró que los estudiantes eliminan la disonancia que les había generado el funcionamiento del experimento propuesto y generó una ganancia o evolución en su aprendizaje de aproximadamente 0.5.

Además de los artículos de Barbosa, se encontró un proyecto de Yang [23] que intentan mediante una aproximación cinemática dar cuenta de lo que sucede cuando un cuerpo describe una braquistócrona. determinan una expresión que les permite cumplir dicho fin.

Capítulo 2

APRENDIZAJE ACTIVO DE LA FÍSICA

La enseñanza de la física y de cualquier disciplina en particular en ambientes tradicionales, presenta dificultades de diversas índoles en las esferas educativas, supone esencialmente que el alumno por repetición aprenderá cada uno de los conceptos de la disciplina y formará con ellos la estructura conceptual de la ciencia. La instrucción es generalmente deductiva, con el docente irradiando conocimientos, mientras que el alumno debe recibirlos y asimilarlos, en una actitud esencialmente pasiva[6] .

Actualmente, existen diferentes trabajos que se han desarrollado en el ámbito educativo, con metodologías diferentes a la tradicional, estos trabajos han mostrado grandes logros en el proceso de participación de los estudiantes, la asimilación de conceptos y en general, en el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

El presente trabajo se desarrolla en la metodología de aprendizaje activo de la física sobre el cual a continuación se expondrán sus conceptos básicos.

2.1. Aprendizaje Activo

El Aprendizaje Activo tal como su nombre lo indica, genera un papel más activo y participativo del estudiante en su proceso de aprendizaje, pues permite notablemente que los estudiantes interactúen con las personas (estudiante-estudiante y estudiante-profesor) así como también con el ambiente que los rodea; de la misma manera un ambiente de aprendizaje activo permite que los estudiantes observen, experimenten, reflexionen y comuniquen, siempre y cuando se fije una meta clara[18]. Por lo anteriormente enunciado, es posible decir que los métodos de enseñanza activa sitúan al estudiante como el actor principal en el proceso de construcción de su propio conocimiento. Tratan de buscar un equilibrio entre las experiencias dirigidas, las actividades del grupo, el trabajo de pequeños equipos y el compromiso individual.

Los métodos de aprendizaje activo se fundamentan en cinco principios básicos[17]:

1. Principio constructivista: cada persona es responsable de la construcción de su propio conocimiento; el estudiante hace uso de sus experiencias y construye así su conocimiento.
2. Principio contextual: la construcción del conocimiento depende del contexto en donde se desenvuelva el estudiante.
3. Principio de cambio: Dada la diversidad en la forma de aprender de los estudiantes, es prudente emplear diversas actividades para propiciar la construcción del conocimiento.
4. Principio de la función de distribución: los estudiantes muestran una limitada, pero significativa variación en los estilos de aprendizaje, en sus diferentes dimensiones.
5. Principio de aprendizaje social: Así como es un proceso individual, el aprendizaje puede también ser un proceso social; pues de esta manera se estimulan debates,

acuerdos y consensos.

Parafraseando a Silberman, se puede decir que conviene hacer activo al aprendizaje porque para aprender algo bien, conviene escucharlo, verlo, formular preguntas al respecto y conversarlo con otros. Fundamentalmente los estudiantes necesitan “hacerlo”, descubrir las cosas por su cuenta, encontrar ejemplos, probar sus aptitudes y realizar tareas que dependan de los conocimientos que ya poseen o deben adquirir [19]. Así pues es posible decir según lo anterior y citando a Huber que no se recibe conocimiento pasivamente sea por los sentidos, sea por la comunicación, pero el sujeto conociendo, se lo construye activamente, con ello también cabe decir que el conocimiento es el resultado de un proceso de interacción entre el individuo y el entorno. De esta manera, entre más independientes deban los estudiantes moverse en un entorno de aprendizaje, mayor será su necesidad de destreza de navegar en ese entorno [12].

La metodología de aprendizaje activo de la física según todo lo anteriormente enunciado se resume de manera sencilla, como el conjunto de estrategias para la enseñanza-aprendizaje de la física en donde los alumnos son guiados a construir sus conocimientos de conceptos físicos mediante la observación directa del mundo físico [14]. En este sentido, es de gran ayuda para la enseñanza de la física, pues otorga más participación al estudiante en su proceso de aprendizaje y con ello permite potenciar el pensamiento crítico, argumentativo, reflexivo y claro está, el pensamiento lógico, físico y matemático[3].

El aprendizaje activo de la física se enmarca dentro los siguientes pasos[14]:

1. Predecir: el estudiante formula una hipótesis de trabajo de determinado fenómeno.
2. Observar: Es necesario observar el fenómeno para que así el estudiante confronte su hipótesis inicial con lo que realmente sucede.
3. Discutir: Los debates entre los estudiantes generan que algunas ideas sean des-

cartadas y con ello surgen nuevas ideas; de todas maneras el aprendizaje también es un proceso social.

4. Sintetizar: Finalmente tras los debates, se da por parte del estudiante una explicación formal que sintetiza el fenómeno.

El uso de experimentos discrepantes en el aula de clases se relaciona con esta metodología porque además de lo anteriormente enunciado, se han realizado diversos trabajos utilizando experimentos de este tipo aplicados con metodología de aprendizaje activo, y se han encontrado resultados positivos dentro del proceso de aprendizaje del estudiante al contrastarlas con los resultados obtenidos con la metodología de enseñanza tradicional. Ejemplos de esto son los trabajos realizados por el profesor Hernando Barbosa, que han sido fuertes guías para la elaboración del presente trabajo[3] [5] [21] [4].

El cuadro 2.1 permite comparar algunas características principales tanto de la enseñanza tradicional, como de la enmarcada dentro del aprendizaje activo, de manera tal que se puedan observar las bondades de la segunda y poder entender el por qué es que los estudios anteriormente enunciados y seguramente muchos más arrojan resultados positivos para este tipo de metodología.

2.2. El Conflicto Cognitivo

Un conflicto cognitivo o disonancia cognitiva es la tensión que experimenta una persona cuando posee dos ideas que no encajan entre sí, ya sea porque son inconsistentes o contradictorias. Al generarse dicha disonancia cognitiva, las personas se ven motivadas a reducirla o eliminarla. Para ello, la persona se ve obligada a cambiar las ideas que tienen del suceso[9].

Existen dos tipos de conflictos, los internos y los externos[22] :

ENSEÑANZA TRADICIONAL	ENSEÑANZA ACTIVA
Enseña Contenidos	Enseña a Aprender
El profesor y los libros de texto son la autoridad y la única fuente de conocimiento	El profesor y los libros de texto son una guía en el proceso de aprendizaje
Las creencias de los estudiantes no son explícitamente desafiadas	utiliza un ciclo de aprendizaje que desafía a los estudiantes.
En la clase se presentan hechos de la física con poca referencia experimental	se observa una notable utilización de experimentos e interacción con los mismos.
El laboratorio se usa para confirmar lo aprendido	El laboratorio se usa para aprender conceptos

Cuadro 2.1: Comparación entre enseñanza tradicional y activa

1. Conflictos externos: son aquellos que se generan al no encajar la manera de ver del estudiante y los elementos externos a él; como por ejemplo, el resultado de un experimento. En este ejemplo, las divergencias se pueden manifestar en las previsiones personales, como en las explicaciones.

2. Conflictos internos: son aquellos que se caracterizan por una divergencia entre elementos cognitivos internos del estudiante, como por ejemplo sus ideas.

Bien se dijo que al presentarse un conflicto cognitivo, las personas se ven obligadas por decirlo de alguna manera, a cambiar las ideas que tienen respecto a un fenómeno determinado, pero dichos cambios o modificaciones se pueden presentar en tres casos particularmente:

1. Modificaciones no relevantes: se dan cuando no aparecen las dificultades de la explicación inicial del estudiante y no se presentan nuevas relaciones.

2. Modificaciones parciales: se dan cuando se presentan las dificultades de la explicación inicial y algunos aspectos de la nueva.

3. Modificaciones profundas: se presentan cuando algún aspecto de la explicación

inicial es sustituido por alguno de la nueva.

Capítulo 3

EXPERIMENTOS DISCREPANTES

Los experimentos discrepantes son básicamente experimentos contra-intuitivos; aquellos que al interactuar con un observador le proporcionan una experiencia que este no esperaba, manifestando un fenómeno impactante, pues exhiben una fenomenología sorpresiva, inesperada, paradójica y contraria a la intuición de quien los observa[5].

Este tipo de experimentos al ser contra-intuitivos, hacen que aquellas personas que interactúen con ellos se vean sujetas a una tensión entre lo que esperaban que sucediera y lo que realmente sucedió; algo que se conoce como disonancia cognitiva, definiéndose esta como la tensión que se experimenta cuando se posee dos ideas que no encajan entre sí, ya sea porque son inconsistentes o contradictorias. Al generarse dicha disonancia cognitiva, se genera una motivación por reducirla o eliminarla, para ello, el individuo se ve obligado a cambiar las ideas que tienen del suceso puesto que el funcionamiento del experimento no cambiará[9].

El proceso mediante el cual se puede reducir o eliminar la disonancia adquirida mediante la interacción con dichos experimentos, se puede resumir en los siguientes pasos[3]:

1. Familiarizarse con el montaje: Se construye, siempre se juega, se degusta el fenómeno, se observa.

2. Obtener información: Se plantean interrogantes, conjeturas, se identifica la discrepancia, se describe el hecho, se identifica lo relevante e irrelevante.

3. Abstracter y describir: Mediante modelos conceptuales se describe el fenómeno, se identifican posibles variables que podrían medirse, se aíslan aspectos del fenómeno y se mide, se estudia la relación entre variables medidas, se abstrae, se modela y se verifica.

Este paso es quizás uno de los más difíciles puesto que la realización completa de este se puede salir de los conocimientos básicos que tienen los estudiantes. En particular la realización de un modelo que relacione las variables puede resultar complicado por diferentes factores entre los que se encuentra el tiempo dado para desarrollar la actividad, la escogencia adecuada de las variables y el proceso de matematización que tal vez para los estudiantes puede resultar complejo debido a que generalmente los cursos en los que se aborda la temática de conservación de la energía mecánica son de fundamentación.

4. Socialización de la actividad .

Por todo lo anterior, se ha encontrado que los experimentos discrepantes corresponden a una estrategia de aprendizaje activo que generan un ambiente fértil y de motivación para el aprendizaje de temas de la física y además de ello puede decirse que la utilidad de estos experimentos en el aula es tan diversa puesto que permiten plantear una clase, proponer proyectos de investigación para el final de un ciclo académico, plantear una discusión acerca de determinada teoría científica, generar un ambiente argumentativo, originar modelos conceptuales; plantear un método de estudio de las ciencias, plantear experimentos controlados, generar un ambiente de aprendizaje por investigación, potenciar el trabajo en equipo, potenciar el razonamiento físico y lógico, potenciar la creatividad y generar un aprendizaje significativo

[3].

3.1. La Braquistócrona-Plano inclinado

El montaje braquistocrona - plano inclinado consiste en dos trayectorias en un plano, la primera es una trayectoria rectilínea y la segunda una trayectoria cicloide; los cuales inician y terminan en el mismo punto A Y B respectivamente tal como se ilustra en la figura 3.1; Sobre estas trayectorias inician su movimiento al mismo tiempo dos partículas desde la misma altura bajo la influencia de la gravedad en ausencia de fricción. Antes de accionar el experimento y después de accionarlo se generan una serie de discrepancias que son las que a continuación se enuncian:

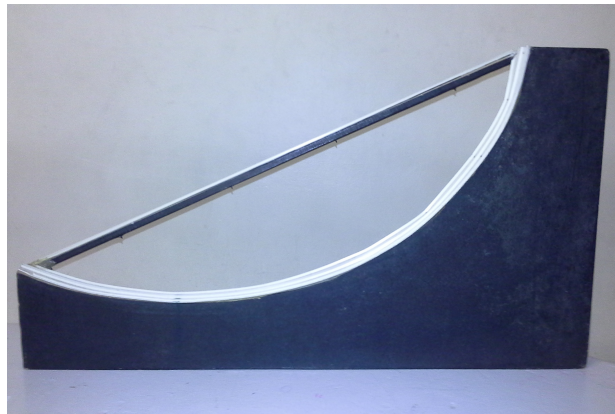


Figura 3.1: Montaje experimental Braquistócrona-Plano inclinado

1. Respecto al tiempo de llegada de las partículas al punto B **antes de accionar el experimento** se encuentra que la mayoría de personas piensan que las esferas emplean el mismo tiempo en llegar a dicho punto.

2. Una vez se acciona el experimento y se evidencia que emplea menor tiempo en ir de A a B la partícula que se mueve por la cicloide se genera la segunda discrepancia, la cual consiste en que gran parte estudiantes piensan que la partícula ya mencionada al emplear menor tiempo tendrá mayor rapidez respecto a la partícula que se mueve por la recta aun cuando dicha rapidez se mida a las mismas alturas.

3. Finalmente se encuentra que los estudiantes presentan inconsistencias a la hora de realizar el balance de energía para el presente caso, pues piensan que la partícula que se mueve por la cicloide al emplear menor tiempo en ir de A a B se le asocia mayor energía mecánica respecto a la otra partícula.

Las pruebas de las discrepancias generadas al accionar este montaje fueron previamente tomadas tras realizar la implementación del mismo en los cursos de mecánica II del semestre 2015-2 del Departamento de Física de la Universidad Pedagógica Nacional y que se desarrollarán con más detalle en el capítulo 5.

En el presente trabajo se intenta dar solución a las discrepancias anteriores teniendo como base el experimento discrepante braquistócrona-Plano inclinado

3.2. EL León se Reconoce por sus Garras

Los primeros vestigios del problema del mínimo de tiempo requerido por un cuerpo para ir de un punto A a un punto B bajo la interacción gravitacional, se encuentran en el siglo XVI con Galileo Galilei, pues fue él quien se preguntó en palabras actuales ¿Por medio de que trayectoria un cuerpo bajo la influencia única de la gravedad, emplea el mínimo de tiempo en llegar de un punto A a un punto B ?, pensando erróneamente que era un arco de circunferencia, pero hubo que esperar hasta la siguiente generación de pensadores para dar cuenta de dicho suceso.

El problema de las trayectorias mencionado anteriormente, fue propuesto nuevamente y solucionado empleando un largo tiempo por los hermanos Bernoulli, Leibniz y otros científicos de la época, pero cuando fue propuesto a Newton este logró solucionarlo en unas pocas horas y con ello sentó las bases de lo que hoy se conoce como el cálculo de las variaciones. Cuenta la historia que al Leibniz leer la solución que propuso Newton y que presentó anonimamente exclamó ¡El león se reconoce por sus garras! haciendo referencia a la elegancia y suspicacia que el mismo Newton tenía a la hora de realizar sus cálculos y demostraciones científicas [11].

Tal como se dijo anteriormente, el problema puede solucionarse mediante el cálculo de las variaciones, que en resumidas cuentas busca encontrar máximos y mínimos de funcionales (función de funciones) pero en el presente trabajo no se busca demostrar lo que ya fue demostrado, sino encontrar las ecuaciones cinemáticas de la braquistócrona para poder abordar la temática de conservación de la energía mecánica con una población estudiantil.

3.3. Las Ecuaciones Cinemáticas para la Braquistócrona

Con la intención de poder tener una explicación clara y precisa de lo que sucede al accionar el montaje braquistócrona-plano inclinado se hace necesario determinar las ecuaciones de movimiento de los cuerpos que describan dichas trayectorias.

Las ecuaciones de movimiento de dichos cuerpos permiten al estudiante darse cuenta de las relaciones entre distancias y rapidez con el tiempo y además de ello, se puede mediante las mismas dar cuenta del balance energético para los cuerpos que se mueven a través de las trayectorias ya mencionadas. El tratamiento físico-matemático de la braquistócrona que se muestra a continuación, fue totalmente desarrollado por el autor del presente trabajo en conjunto con su asesor.

Para iniciar, es conveniente definir una cicloide como la trayectoria descrita por un punto E escogido de la circunferencia de un círculo mientras este rueda sin deslizarse a lo largo de una línea recta $\overline{E_0E_1}$ tal como se muestra en la figura 3.2 [11] .

si la trayectoria cicloide (Braquistócrona) es generada por una circunferencia de radio $r = a$ se tendría que las ecuaciones de dicha cicloide serían:

$$x = a(\phi - \sin \phi) \quad (3.1)$$

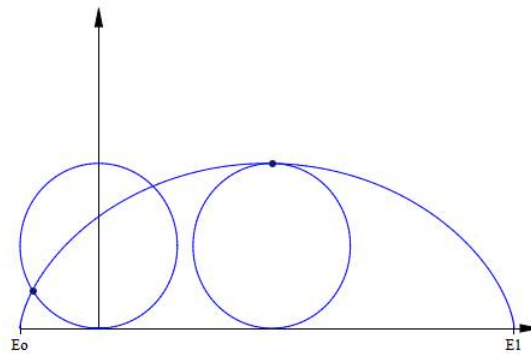


Figura 3.2: Círculo que rueda sin deslizarse y forma una cicloide

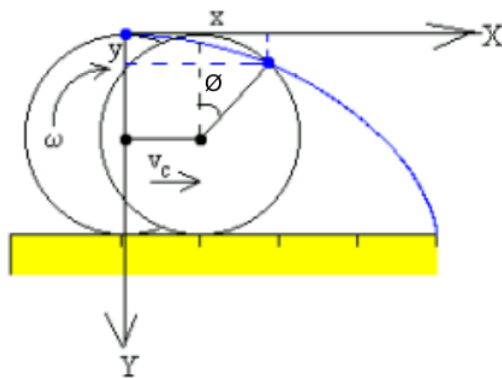


Figura 3.3: Ilustración de la generación de una cicloide que permite determinar las ecuaciones de ese tipo de curva (tomado de Física con ordenador)

$$y = a(1 - \cos \phi) \quad (3.2)$$

Las ecuaciones anteriores permitirán obtener las ecuaciones que dependen del tiempo de una partícula que describe una trayectoria cicloide pero se tendrá en cuenta que la cicloide que se analizará presenta una inversión respecto a su eje y si se compara con la cicloide de la Figura 3.3 .

despejando (3.2) se obtiene que:

$$\cos \phi = 1 - \frac{y}{a}$$

llamando $y_c = \cos \phi$

$$y_c = 1 - \frac{y}{a} \quad (3.3)$$

por lo tanto, se puede escribir x en términos de y_c de la siguiente manera:

$$x = a(\cos^{-1} y_c - \sqrt{1 - y_c^2}) \quad (3.4)$$

la rapidez en dicha dirección de la partícula que se mueve a través de esta trayectoria en términos de y_c sería,

$$\dot{x} = \frac{a\dot{y}_c}{\sqrt{1 - y_c^2}}(y_c - 1) \quad (3.5)$$

Con la expresión anterior, es posible determinar la energía cinética sabiendo que $K = \frac{m}{2} [\dot{x}^2 + \dot{y}^2]$

$$K = ma^2 \left[\frac{1}{1 + y_c} \right] \dot{y}_c^2 \quad (3.6)$$

Se asume un sistema donde la fricción entre la partícula y la superficie se puede despreciar de tal forma que se pueda asumir el principio de conservación de energía mecánica. Una vez se tiene la expresión anterior y con intención de obtener la energía mecánica asociada a la partícula que describe la braquistócrona, se dispone a encontrar una expresión que de cuenta de la energía potencial gravitacional, pero para que se de un tratamiento matemático sencillo, se hará el análisis en la parte más baja de la braquistócrona, es decir, donde $U = 0$ tal que:

$$U = mga(1 + y_c). \quad (3.7)$$

Con las expresiones anteriores, es posible ahora sí dar cuenta de la energía mecánica $E = K + U$ y mediante ella, poder determinar finalmente las expresiones $x(t)$ y $y(t)$ para la partícula que describe la braquistócrona. Esto es

$$E = ma^2 \left[\frac{1}{1 + y_c} \right] \dot{y}_c^2 + mga(1 + y_c),$$

$$E - mga - mgay_c = \frac{ma^2}{1 + y_c} \dot{y}_c^2,$$

$$\left[\left(\frac{E}{ma^2} - \frac{g}{a} \right) - \frac{g}{a} y_c \right] (1 + y_c) = \dot{y}_c^2. \quad (3.8)$$

Se hace necesario llamar de la siguiente manera una parte de la expresión anterior:

$$E' = \frac{E}{ma^2} - \frac{g}{a} \quad (3.9)$$

sustituyendo (3.9) en (3.8) se obtiene

$$\dot{y}_c^2 = E' + \left(E' - \frac{g}{a} \right) y_c - \frac{g}{a} y_c^2. \quad (3.10)$$

Mediante el método de separación de variables se obtiene la integral que a continuación se muestra.

$$\int \frac{dy_c}{\sqrt{E' + \left(E' - \frac{g}{a} \right) y_c - \frac{g}{a} y_c^2}} = t + L. \quad (3.11)$$

Se realiza la siguiente sustitución $A = E'$, $B = E' - \frac{g}{a}$, $C = -\frac{g}{a}$ y se reescribe la integral de la forma:

$$\int \frac{dy_c}{\sqrt{A + By_c - Cy_c^2}} + L = t,$$

siendo la solución de dicha integral la siguiente:

$$t = \frac{1}{\sqrt{-c}} \cos^{-1} \left(-\frac{B + 2Cy_c}{\sqrt{B^2 - 4AC}} \right) + L. \quad (3.12)$$

Solucionando $q = B^2 - 4AC$ de la ecuación anterior

$$q = \left(E' + \frac{g}{a} \right)^2 \quad (3.13)$$

sustituyendo (3.13) en (3.12)

$$t = \frac{1}{\sqrt{\frac{g}{a}}} \cos^{-1} \left[\frac{-\left(E' - \frac{g}{a} \right) + 2\frac{g}{a}y_c}{E' + \frac{g}{a}} \right] + L$$

Despejando y_c de la ecuación anterior:

$$\left[\frac{-\left(E' - \frac{g}{a} \right) + 2\frac{g}{a}y_c}{E' + \frac{g}{a}} \right] = \cos \sqrt{\frac{g}{a}}t + L$$

$$-\left(E' - \frac{g}{a} \right) + 2\frac{g}{a}y_c = \left(E' + \frac{g}{a} \right) \cos \sqrt{\frac{g}{a}}t + L$$

$$\frac{2g}{a}y_c = \left(E' + \frac{g}{a} \right) \cos \sqrt{\frac{g}{a}}t + \left(E' - \frac{g}{a} \right) + L.$$

Sustituyendo (3.3) en la expresión anterior

$$-2\frac{gy}{a^2} = E' - 3\frac{g}{a} + \cos \sqrt{\frac{g}{a}}t \left(E' + \frac{g}{a} \right) + L.$$

Despejando y se llega al resultado:

$$y = \frac{a^2}{2g} \left(\frac{3g}{a} - E' \right) - \left[\left(E' + \frac{g}{a} \right) \cos \sqrt{\frac{g}{a}}t \right] \frac{a^2}{2g} + L \quad (3.14)$$

Remplazando (3.9) en (3.14)

$$y = \frac{a^2}{2g} \left[\left(\frac{2g}{a} - \frac{E}{ma^2} \right) - \frac{E}{ma^2} \cos \sqrt{\frac{g}{a}} t \right] + L \quad (3.15)$$

Finalmente, para poder obtener la expresión $y(t)$ es necesario obtener el valor de la constante L teniendo como condiciones iniciales $y = 0$ y $t = 0$

$$L = \frac{a^2}{2g} \left(\frac{2E}{ma^2} - \frac{2g}{a} \right) \quad (3.16)$$

Remplazando (3.16) en (3.15)

$$y = \frac{E}{2mg} \left[1 - \cos \sqrt{\frac{g}{a}} t \right] \quad (3.17)$$

y con ello se deduce también que $x(t)$ estaría dada por:

$$x = \frac{E}{2mg} \left[\sqrt{\frac{g}{a}} t - \sin \sqrt{\frac{g}{a}} t \right] \quad (3.18)$$

Se define $A = \frac{E}{2mg}$ y $\omega = \sqrt{\frac{g}{a}}$

La rapidez de la partícula teniendo en cuenta las expresiones (3.17) y (3.18) sería:

$$|\vec{v}| = A\omega \sqrt{2\frac{y}{A}} \quad (3.19)$$

con la expresión anterior, es posible obtener la energía cinética K .

$$K = \frac{Ey}{2a} \quad (3.20)$$

Asímismo es posible determinar la expresión que de cuenta de la energía potencial gravitacional de la siguiente manera:

$$U = \frac{Ey}{2A} \quad (3.21)$$

El principio de conservación de la energía mecánica establece que para sistemas en los que el rozamiento o la fricción se pueden despreciar, la energía mecánica permanecerá constante o dicho de otra manera; la energía no puede ni crearse ni destruirse, que la energía total es siempre constante [2]. Las variaciones de energía tanto cinética como potencial son exactamente iguales, en consecuencia, la energía mecánica es constante. De lo anterior es posible decir que la magnitud de la energía potencial en la parte más alta de la braquistócrona, será de la misma magnitud que la energía cinética en la parte más baja de la misma, es decir:

$$\Delta U = \Delta K \quad (3.22)$$

$$\frac{E y}{2A} = \frac{E y}{2a} \quad (3.23)$$

simplificando se obtendría que

$$A = a \quad (3.24)$$

Es decir, la constante $A = \frac{E}{2mg}$ es de igual valor que el radio del círculo que genera la curva cicloide, por lo tanto las ecuaciones cinemáticas de una partícula que describe una trayectoria cicloide estarían dadas por:

$$x(t) = a \left(\sqrt{\frac{g}{a}} t - \sin \sqrt{\frac{g}{a}} t \right) \quad (3.25)$$

$$y(t) = a \left(1 - \cos \sqrt{\frac{g}{a}} t \right) \quad (3.26)$$

Teniendo en cuenta las expresiones (3.26), (E.10) y (E.11) que se encuentran en la presente sección y en el apéndice E es posible obtener las gráficas de posición vertical o altura y contra tiempo t para ambas partículas y de rapidez v contra tiempo t , de manera tal que se pueda dar cuenta mediante las mismas de lo que sucede a la hora de accionar el montaje braquistócrona plano inclinado.

Se tendrá en cuenta que la cicloide que se analiza fue generada por una circunferencia de radio $a = 1m$ y por lo tanto la altura de la que parten las partículas es de dos metros ($y = 2m$) cada una de ellas describiendo su respectiva trayectoria, bien sea la cicloide o recta y además de ello que el punto de llegada está ubicado justamente en $y = 0m$, es decir, en la parte más baja, pero el sistema de referencia será ubicado en el punto desde donde parten las partículas.

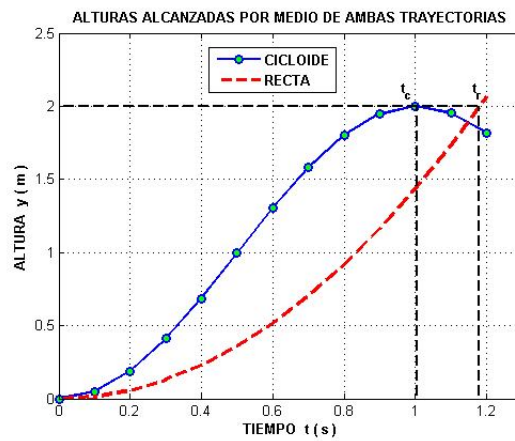


Figura 3.4: Alturas alcanzadas por las partículas para ambas trayectorias, se señalan los tiempos t_c y t_r que representan los tiempo de llegada al punto B para la cicloide y la recta respectivamente.

Respecto a la figura 3.4 es posible evidenciar que efectivamente la partícula que se mueve a través de la cicloide llega en un tiempo menor al punto más bajo que el empleado por la partícula que describe la trayectoria recta, por lo tanto es posible decir que $t_c < t_r$. La diferencia de tiempos tras realizar los cálculos es de aproximadamente 0.18 segundos.

Analizando la figura 3.5 es posible decir que efectivamente la rapidez respecto al tiempo es mayor para la partícula que se mueve por medio de la cicloide comparada con la de la otra partícula, pero también se evidencia que en el punto B del recorrido la rapidez de ambas partículas tiene el mismo valor, es decir, para cuando las partículas llevan un tiempo t_c y t_r respectivamente en movimiento, algo que hace inferir que

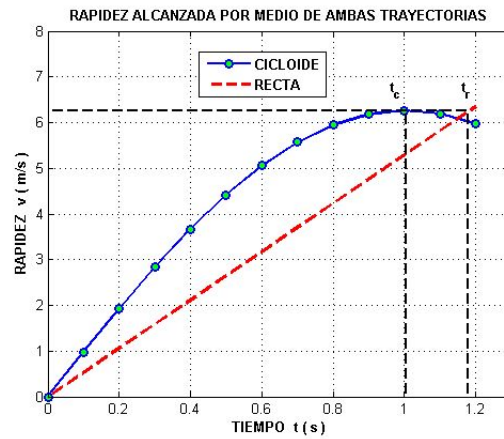


Figura 3.5: Rapidez alcanzada por las partículas para ambas trayectorias, se señalan la rapidez asociada a la cicloide y la recta respectivamente en los tiempo t_c y t_r .

medida a las mismas alturas, la rapidez de las partículas es exactamente igual aun cuando el tiempo de llegada a dichas alturas sea diferente, por tanto, también es posible concluir que la energía mecánica es exactamente igual para los dos casos.

EL detalle de la obtención de las expresiones dependientes del tiempo para partículas que describen ambas trayectorias (cicloide y recta) se encuentra en los apéndices D y E.

Los análisis gráficos de altura vs tiempo y rapidez vs tiempo tanto para la recta como para la cicloide son incluidos en el taller llamado el “león se reconoce por sus garras” que está incluido en las actividades de implementación del experimento y puede encontrarse en los apéndices (ver apéndice B). Estos análisis son de gran relevancia en la comprensión del experimento discrepante por parte de los estudiantes, de allí que se hizo necesario presentar el proceso de obtención de estas ecuaciones de movimiento.

Capítulo 4

MEDICIÓN DE LA GANANCIA CONCEPTUAL

El presente trabajo tal como ya se ha mencionado pretende dar a conocer la temática de conservación de la energía mecánica mediante el uso del experimento discrepante braquistócrona-plano inclinado como factor motivador en el proceso de aprendizaje de los estudiantes mediante la metodología del aprendizaje activo de la física, pero además de ello pretende determinar si el uso de este montaje y de dicha metodología es pertinente a la hora de enseñar la temática de conservación de energía mecánica haciendo uso de un pre-test y un pos-test que permiten realizar análisis estadísticos que puedan ofrecernos algún tipo de información respecto a la pertinencia de la presente propuesta. Por ello se hace necesario hablar un poco de psicometría y con ello referirse a lo que se conoce como factor de concentración de Bao y Redish y la ganancia normalizada de Hake.

A comienzos del siglo XX se comenzó a notar un interés determinado por medir los atributos psicológicos humanos, pero fue hasta hace poco que dichas mediciones se tomaron seriamente. Una manera que se ideó para realizar mediciones psicológicas fueron los test mentales, que con el tiempo se fueron haciendo más precisos a la hora de medir funciones o procesos mentales de los individuos[15] .

De todo este ambiente de interés de medición psicológica logra surgir una me-

todo lo que hace referencia al desarrollo y empleo de las técnicas de medición en todos los aspectos de la psicología y recibe el nombre de teoría psicométrica. Puede decirse que la psicometría es aquella rama de la psicología que se ocupa de los principios básicos de medición de procesos psicológicos de las personas, teniendo como ayuda las técnicas estadísticas. Esta teoría psicológica ha sido criticada fuertemente debido a que se piensa que dichos test o preguntas hacen que las personas se sientan perturbadas; pero se hacen necesarias debido a que eliminan las subjetividades o juicios personales que poco pueden brindar información respecto a lo que se desea saber o medir respecto a procesos o atributos psicológicos[15] .

La psicometría es entonces aquella que mediante test, se encarga de medir los procesos psicológicos tales como la aptitud, la inteligencia, conocimientos de determinados temas; sentimientos, estrés y muchos otros (que pueden no ser tan nítidos en sus valores o mediciones) por ello es necesario advertir en primer lugar que dichos test deben ser claros y contundentes para poder obtener medidas de lo que se desea más claras y precisas, por lo que se debe tener en cuenta que un buen test debe cumplir con los siguientes requisitos para que sea fiable en principio [1] :

1. La idea principal de la pregunta debe ir en el enunciado.
2. Simplicidad en el enunciado.
3. Evitar los conocimientos excesivamente triviales.
4. Evitar dar información irrelevante en el enunciado.
5. Evitar dar indicios sobre la solución.
6. Evitar cuestiones sobre opciones.
7. No encadenar unos ítems con otros.

8. La dificultad no debe estar en la comprensión del ítem.

9. Minimizar el tiempo de lectura.

Tal como se dijo anteriormente, se pretende utilizar un test para determinar qué tanto conocen los estudiantes (pre-test) del principio de conservación de energía mecánica y que tanto enriquecen su conocimiento (pos-test) una vez se desarrollen una serie de actividades que se mostrarán y explicarán al igual que se hará con el test en cuestión.

4.1. Factor de concentración de Bao y Redish

Al aplicar un test con determinada población, se hace necesario analizar la distribución y concentración de respuestas que las personas dan a las diferentes preguntas. Esto se realiza con la ayuda del factor de concentración de Bao y Redisch que básicamente permite hacer un análisis cuantitativo de la distribución de respuestas de una población de estudiantes cuando resuelven un test de opción múltiple con única respuesta [4]. Medida que permite realizar estudios acerca de lo que pueden estar pensando o analizando los estudiantes respecto a una situación, fenómeno o temática en particular si se obtiene una concentración alta en respuestas bien sea correcta o incorrecta de aquello que se les pregunta.

De lo anterior, se puede decir que el factor de concentración es una función de las respuestas de los estudiantes que toma valores entre 0 y 1 y se puede obtener de la siguiente manera (Barbosa, 2010):

$$C = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m} - 1} \left(\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n n_i^2}}{N} - \frac{1}{\sqrt{m}} \right) \quad (4.1)$$

Siendo m el número de opciones de respuesta a determinada pregunta, N es el

Puntaje (S)	Nivel	Concentración (C)	Nivel
0.0-0.4	Bajo	0.0-0.2	Bajo
0.4-0.7	Medio	0.2-0.5	Medio
0.7-1.0	Alto	0.5-1.0	Alto

Cuadro 4.1: Niveles de puntaje y concentración

número total de estudiantes, n_i es el número de estudiantes que eligieron la respuesta i de la pregunta.

El factor de concentración tiene un determinado nivel que indica si una concentración de respuesta es baja, media o alta dependiendo el valor que tome. Se dice que la concentración es baja (B) si C está entre 0.0 y 0.2; media (M) si está entre 0.2 y 0.5 y se dice que es alta (A) si su valor se encuentra entre 0.5 y 1.0.

El factor de concentración al ser asociado con el puntaje S obtenido tras la aplicación de un test a determinada población permite hacerse a una idea no solo de la manera en que se distribuyen las respuestas, sino también de si dicha distribución es positiva en el caso que la concentración sea alta con puntaje alto o negativa en el caso en que la concentración sea alta con puntaje bajo. A continuación se especifica como se obtiene el puntaje S del test y en el cuadro 4.1 se muestra como este se relaciona con la concentración [4].

$$S = \frac{A_i}{A} \quad (4.2)$$

Donde A_i representa el número de personas que acertaron en la solución de una pregunta determinada y A el número total de personas que intentaron responder la pregunta.

4.2. Ganancia normalizada de Hake

La ganancia normalizada de Hake es básicamente un parámetro que da cuenta de la evolución del aprendizaje del estudiante, evitando comparaciones entre estudiantes

Valor de ganancia g	Nivel
0.0-3.0	Baja
0.3-0.7	Media
0.7-1.0	Alta

Cuadro 4.2: Niveles de ganancia de Hake

que puedan estar en mejores condiciones conceptuales que otros y que se encuentran en un mismo espacio académico[4] . Por lo anterior, se puede entonces decir que la ganancia conceptual o evolución del aprendizaje es susceptible de ser medido en este caso por el profesor, ya que como se especificó anteriormente, las mediciones cuantitativas de los procesos psicológicos permiten eliminar subjetividades a la hora de brindar resultados típicos de una investigación científica [15].

Una ventaja de la medición de la evolución del aprendizaje mediante la ganancia de Hake es que permite determinar si una metodología de aprendizaje es eficiente respecto al conocimiento inicial del estudiante. Puede definirse como la razón del aumento de una prueba preliminar (pre-test) y una prueba final (Pos-test) respecto al máximo aumento posible [4]. Según lo anterior es posible escribir que la ganancia normalizada de Hake se obtiene de la siguiente manera:

$$\langle g \rangle = \frac{\% \langle post - test \rangle - \% \langle pre - test \rangle}{100 \% - \% \langle pre - test \rangle} \quad (4.3)$$

Así como el factor de concentración de Bao y Redisch, la ganancia de Hake tiene unos niveles que van de la siguiente manera. Se considera que si $\langle g \rangle$ está entre valores de 1 y 0.7 la ganancia es alta, si está entre valores de 0.7 y 0.3 la ganancia es media y si la ganancia está entre valores de 0.3 y 0 la ganancia es baja (ver cuadro 4.2).

Se usarán tanto el factor de concentración de Bao y Redisch y la ganancia normalizada de Hake aplicando inicialmente un pre-test y un pos-test los cuales son iguales y que están relacionados con la temática de energía mecánica. El test que se usará como pre-test y pos-test fue construido con base en dos test que ya ha sido calibrados y por ello se pueden encontrar en la literatura para hacer uso de ellos.

Capítulo 5

ACTIVIDADES, IMPLEMENTACIÓN Y RESULTADOS

Durante el semestre 2015-2 en los cursos de Mecánica II del Departamento de Física de la Universidad Pedagógica Nacional con una población de 34 estudiantes se llevó a cabo la implementación de las actividades que se elaboraron para poder cumplir con los objetivos propuestos; dichas actividades constan de tres tests y un taller orientador.

EL desarrollo de las actividades de la implementación se llevó a cabo en cuatro momentos siendo el orden de estos de la siguiente manera:

1. Aplicación del pre-test “energía mecánica” (ver apéndice B) a los estudiantes; se hace necesario que se responda individualmente y sin ningún tipo de ayudas de manera tal que se tenga evidencia de que tanto se conoce inicialmente del principio de conservación de la energía mecánica y con ello tener una referencia al final del proceso que sirva para determinar la evolución del aprendizaje de la temática respecto al manejo de la misma antes de iniciar las actividades relacionadas con el montaje braquistócrona-plano inclinado. El test se desarrolla en un tiempo de treinta minutos aproximadamente debido a que no presenta demasiadas preguntas.

2. Aplicación del test “Recta versus Cicloide” (ver apéndice A) al tiempo que se da a conocer y se acciona el montaje braquistócrona-plano inclinado. Puede decirse que este test ayuda a generar motivación en conjunto claro está del accionamiento del montaje en los estudiantes, pues al ir respondiendo las preguntas del test que se relacionan con tiempos, rapidez y energía mecánica aplicada al montaje, se genera un conflicto cognitivo debido a las discrepancias que se presentan y con ello se ven motivados a eliminar dicho conflicto, en esta etapa se presentan debates respecto a las opciones elegidas, posibles hipótesis del fenómeno e interacción con el montaje de manera tal que el ambiente que se genere de gran importancia a las ideas e hipótesis que estos proporcionan y con ello, se propicie un aprendizaje activo. Debido a este ambiente participativo se espera que la actividad se desarrolle en un tiempo de dos horas.

3. Solución del taller “el león se reconoce por sus garras” (ver apéndice C). La actividad anterior genera en los estudiantes un conflicto cognitivo que se originan en las discrepancias del montaje, debido a esto, se proponen hipótesis respecto al funcionamiento del mismo y mediante el taller propuesto se espera que se vaya eliminando el conflicto generado y con ello afianzar las hipótesis iniciales o en su defecto hacerlas a un lado; todo esto con la participación activa de los estudiantes, nuevamente con debates respecto a la solución de cada una de las preguntas propuestas y claro está, con el accionamiento del montaje por parte de los mismos. Las preguntas del taller están encaminadas a aclarar lo que sucede con el montaje en cuanto a los tiempos de llegada de los cuerpos al punto B , la rapidez de estos respecto al tiempo y respecto a las alturas y finalmente el balance de energía mecánica. Debido a que el desarrollo del mismo se desarrolla de manera activa, es decir, mediante una participación constante de los estudiantes gracias a la motivación que se generó debido a las discrepancias de montaje, se puede decir que el tiempo para desarrollarlo es de tres horas.

4. Aplicación del pos-test “energía mecánica” (ver apéndice B). Una vez se interactúa con el montaje y se desarrollan todas las actividades mencionadas, se espera

que los estudiantes enriquezcan su conocimiento del principio de conservación de la energía mecánica, esto se determina mediante la aplicación del test ya mencionado y que es el mismo que se aplicó al inicio de la implementación. Se hace necesario que el test se responda individualmente en un tiempo de treinta minutos.

Cabe mencionar que la implementación de las actividades se llevó a cabo una vez los estudiantes habían visto la temática del principio de conservación de la energía mecánica con los respectivos docentes encargados de acuerdo al programa de actividades semestral que había en el curso. Según los tiempos mencionados se puede decir que la implementación total se lleva a cabo en aproximadamente 3 clases de 2 horas cada una.

A continuación se puede evidenciar cada una de las actividades así como también los resultados que se obtuvieron al desarrollarlas con los estudiantes.

5.1. Pre-test

En primera instancia se aplicó el test “energía mecánica” (ver apéndice B) con la intención de tener evidencia del nivel de conocimiento que los 34 estudiantes estudiantes tenían respecto a la temática en cuestión. El test consta de seis preguntas de selección múltiple con única respuesta entre cinco posibles opciones; las preguntas están relacionadas con rapidez de cuerpos que caen a través de planos inclinados y también sobre los balances de energía mecánica para dichos cuerpos.

El test en cuestión se elaboró tomando algunas preguntas del test “Energy and Momentum Conceptual Survey” de Chandralekha Singh y David Rosengrant [20] y “La enseñanza de la mecánica en el nivel medio: un estrategia didáctica. Primera parte” de Teresa Perrotta y otros [16], tomados de las revistas American Journal of Physics vol 71 $N_{o}6$ y Latin American Journal of Physics education vol 7 $N_{o}3$ respectivamente.

En esta primera etapa los estudiantes respondieron el test individualmente en un

Respuestas pre-test	a	b	c	d	e
1	10	4	3	2	15
2	7	3	2	20	2
3	6	10	10	6	2
4	18	7	4	4	1
5	13	12	6	2	1
6	12	9	11	1	1

Cuadro 5.1: Respuestas para las preguntas del pre-test, se escriben en rojo las respuestas correctas

pregunta pre-test	Concentración C
1	0.18
2	0.33
3	0.06
4	0.25
5	0.18
6	0.17

Cuadro 5.2: concentración para cada pregunta del pre-test

tiempo estimado de media hora y se obtuvieron los resultados que se muestran en el cuadro 5.1

Según el cuadro 5.1 es posible decir que mas del 50% de los estudiantes respondieron equivocadamente a cada una de las preguntas, por lo que se puede decir que probablemente las preguntas no fueron bien interpretadas o se presentaba un desconocimiento del tema aún cuando ya se había dado un primer acercamiento a la temática en cuestión.

Se calculó según las respuestas dadas la concentración de respuestas de los estudiantes para este pre-test y son los que se plasman en el cuadro 5.2. Como se enunció en el capítulo 4 esta variable es importante debido a que permite tener una primera inferencia del análisis que los estudiantes realizaron para la solución de las preguntas del pre-test.

Con base en los datos que se muestran en el cuadro 5.2 se puede decir que la concentración de respuestas para cada una de las preguntas está entre 0.0 y 0.35 ubicándose en un nivel bajo las preguntas 1,3,5 y 6 y en un nivel medio las preguntas 2 y 4, situación que permite decir que los estudiantes manejan varios modelos de interpretación del fenómeno. En el caso en donde la concentración es menor a 0.2, es decir, donde fue baja, se pudo haber presentado respuestas al azar.

Con los datos del cuadro 5.2 es posible realizar la gráfica de concentración de respuestas del pre-test contra puntaje obtenido para cada una de las respuestas, figura 5.1 y con ello poder brindar una mejor perspectiva de las concentraciones obtenidas.

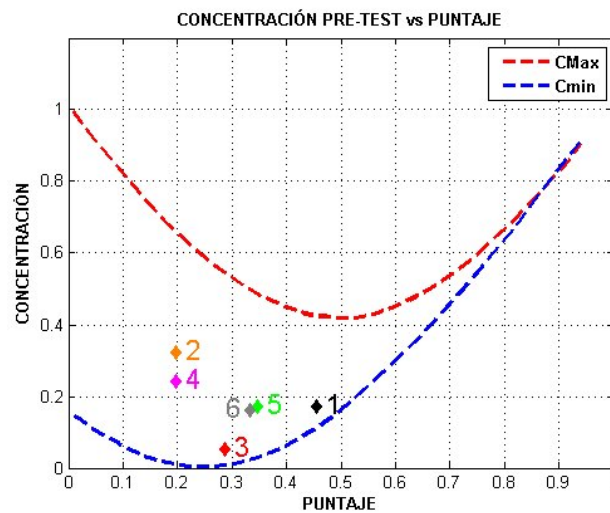


Figura 5.1: concentración de respuestas obtenidas por pregunta en el pre-test versus puntaje obtenido en cada una de las preguntas por los 34 estudiantes, se señala cada pregunta con su respectivo rombo.

Un análisis de la concentración versus puntaje dado en la figura 5.1 permite dar cuenta de las dificultades o de la comprensión adecuada que tiene los estudiantes con la descripción del fenómeno. Si se presentan concentraciones medias o altas con puntajes bajos es posible decir que la población presenta dificultades en el momento de interpretar y solucionar los problemas dados en el test. Las causas de estas dificultades son generados por diferentes situaciones que no son de interés para el

presente trabajo. Esta situación ocurre en las preguntas 2 y 4 en donde se observa que pocos estudiantes acertaron en las respuestas.

Las preguntas 1,3,5 y 6 poseen concentraciones bajas con puntajes un poco mayores a los de las preguntas 2 y 4, pero siguen manteniéndose en el mismo nivel bajo, que en general se puede interpretar como el uso de modelos erróneos al momento de responder las preguntas de test.

Debido a esta situación de baja concentración y puntaje bajo es que la presente propuesta toma sentido, pues se espera que al aplicarse nuevamente este test tras haberse desarrollado una serie de actividades de manera activa que involucran el montaje braquistócrona-plano inclinado, tanto las respuestas como la concentración de las mismas varíen de manera positiva, es decir, que tras la implementación, una buena cantidad de estudiantes acierten a las respuestas correctas del test.

5.2. Test del montaje braquistócrona-plano inclinado

La actividad siguiente y que motivó a los estudiantes fue la solución del test “Recta versus Cicloide” (ver apéndice A) con los 34 estudiantes al tiempo que se accionó el montaje braquistócrona-plano inclinado y que está relacionado con el test; este consiste en dos esferas que se mueven desde un punto inicial A hasta uno B describiendo dos trayectorias diferentes, una de ellas es una cicloide y la otra una recta tal como muestra la figura 5.2. La solución del test se desarrolló de manera activa, pues los estudiantes al marcar sus respuestas daban las explicaciones de las mismas a todo el grupo, proponían posibles hipótesis del fenómeno e intentaban explicar y hacer análisis en el tablero acerca de lo que sucedía con el montaje a la hora de accionarlo. El objetivo de cada pregunta del test y los resultados obtenidos se muestran a continuación.

La primera pregunta tiene la finalidad de confrontar el sentido común de los estudiantes en la posible explicación de los tiempos de llegada de ambos cuerpos al punto

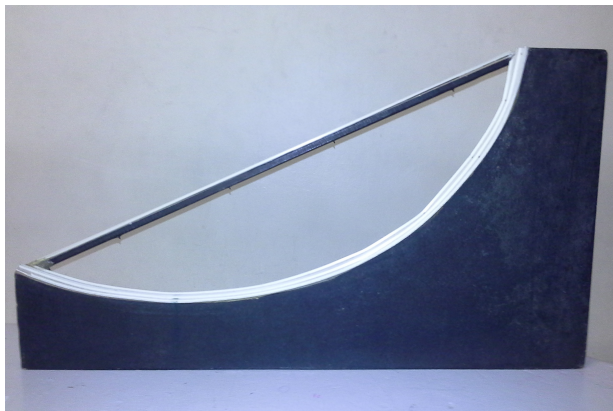


Figura 5.2: Montaje experimental Braquistócrona-Plano inclinado

final de la trayectoria **antes de accionarse el experimento**. Una vez el estudiante da su posible respuesta de cual cuerpo llega primero, se acciona el experimento y se encuentra que el cuerpo que se mueve por la cicloide llega primero. una vez realizado este paso, se procede a responder la segunda pregunta del test.

La segunda pregunta se realiza con el fin de nuevamente confrontar el sentido común de los estudiantes una vez se acciona el experimento y estos intentan explicar las relaciones existentes entre la rapidez de los cuerpos y las alturas alcanzadas por estos.

La tercera pregunta tiene la finalidad de ver la relación que los estudiantes aplican entre la rapidez de los cuerpos y el balance de energía mecánica de los mismos.

A la primera pregunta, el 23.5 por ciento respondió que el cuerpo que se movía a través de la trayectoria recta llegaría primero al punto final debido a que por medio de esta se recorría menor distancia; mientras que el 41.2 por ciento de los mismos, respondió que ambos cuerpos llegarían al tiempo debido a que estaban sometidos a la misma aceleración gravitacional, solo un 35.3 por ciento respondió acertadamente al decir que llegaba primero el cuerpo que caía por la cicloide.

para la segunda pregunta se encontró que el 55.9 por ciento de los estudiantes

pensaban que la rapidez medida a las mismas alturas era mayor para el cuerpo que caía a través de la trayectoria cicloide, respecto a la rapidez de la esfera que caía a través de la trayectoria recta y un 38.2 por ciento pensaba que la rapidez para ambas esferas era siempre diferente en todos los puntos de la trayectoria, excepto en el punto final y solo un 5.9 por ciento respondió acertadamente al decir que la rapidez de los cuerpos eran iguales si se median a la misma altura.

Por último, en la tercera pregunta se encontró que el 58.9 por ciento de los estudiantes pensaba que la energía mecánica era mayor para la esfera que caía a través de la trayectoria cicloide respecto a la que caía a través de la trayectoria recta y el 38.2 por ciento respondió acertadamente al pensar que la energía mecánica era igual para ambos cuerpos en el punto final del recorrido y el 2.9 por ciento contestó que la energía mecánica del cuerpo que cae por la recta era mayor respecto a la del otro cuerpo.

Cabe mencionar que el test no se desarrolló en una manera pasiva, sin un debate y participación por parte de los estudiantes en la justificación del por qué de las respuestas dadas. Los estudiantes mostraron asombro, inventiva a la hora de explicar sus respuestas, así como también motivación y participación en discusiones académicas en la explicación de las posibles respuestas.

Los resultados del test permiten afirmar que el experimento es discrepante, ya que en las respuestas se evidenció que el experimento conlleva a generar todas las bondades y actitudes positivas enunciadas en el capítulo 3, pues al parecer la intuición les hace pensar que la partícula que cae a través de la trayectoria recta al recorrer menor distancia, debe emplear menor tiempo en llegar al punto final o también pueden pensar que las partículas caen libremente y aceleran de la misma manera y por ello llegan al mismo tiempo, así como también se presentan dificultades a la hora de relacionar la rapidez de los cuerpos y el balance de energía de los mismos.

A continuación se presentan las hipótesis que los estudiantes dieron al exponer sus ideas para explicar las preguntas dadas en el test del experimento. Los debates

se originaron en torno al tiempo de llegada al punto B , la rapidez de las esferas y el balance de energía de estas, siendo los siguientes aspectos los más relevantes:

Tiempos de llegada de las esferas:

1. *Las esferas llegan al mismo tiempo al punto B debido a que están sometidas a la misma aceleración independientemente de cual sea la trayectoria.*

2. *Las esferas llegan al tiempo al punto B puesto que la esfera que se mueve por la cicloide cae al principio con un ángulo de inclinación elevado asemejándose a una caída libre, algo que se compensa con la distancia menor que recorre la esfera que cae por la recta, por este motivo llegan al tiempo.*

3. *Las esferas no llegan en tiempos iguales al punto B , lo hace más rápido la esfera que cae a través de la trayectoria cicloide debido a que al principio del movimiento, el ángulo de inclinación de la trayectoria se aproxima a noventa grados, es decir, es casi una caída libre con aceleración mayor.*

4. *La esfera que cae por medio de la recta llega primero al punto B debido a que recorre menor distancia respecto a la esfera que cae por la cicloide, además la cicloide debido a las variaciones de ángulos de su trayectoria se desacelera.*

Rapidez de las esferas:

1. *la esfera que cae por la cicloide siempre tendrá mayor rapidez así se midan a la misma altura debido a que al principio de su movimiento se asemeja a una caída libre y además los tiempos de llegada al punto B son diferentes.*

2. *La rapidez de las esferas son iguales únicamente en el punto B debido a que llegaron a la misma altura.*

3. *La rapidez de ambas esferas son las misma a determinadas alturas, debido a*

que parten desde la misma altura.

Balance de energía:

1. *La energía mecánica es mayor para la esfera que cae por la cicloide debido a que se le asocia mayor velocidad a medida que cae respecto a la otra esfera.*

2. *La energía mecánica es igual para ambas esferas debido a que parten desde la misma altura y además de ello su rapidez será igual en el punto B.*

Un hecho importante fue la dificultad que tuvieron los estudiantes en lograr desligarse de la idea de tiempo a la hora de realizar el análisis de lo que sucedía con la rapidez de las esferas, pues fue un poco complicado darles a entender que la rapidez así como puede analizarse temporalmente, puede también ser analizada en términos de la altura tal como se hacía necesario para la solución del test. Por lo anterior, casi el 50% de los estudiantes pensaron que al emplear menor tiempo la esfera que se movía por la cicloide en llegar al punto B iba a tener siempre una mayor rapidez respecto a la otra esfera independientemente de si se medían a las mismas alturas y consecuencia de ello, una mayor energía mecánica.

No está de más decir que el asombro por parte de los estudiantes a la hora de accionar el experimento fue bastante notable, pues preguntaban, formulaban hipótesis, interactuaban con el montaje, lo accionaban y además de ello sin realizar ningún tipo de investigación previa y sin decirles que lo hicieran, expusieron sus ideas e hipótesis en el tablero ante sus compañeros tal como muestran las figuras 5.3 y 5.4, análisis que abarcaban temáticas desde la cinemática y fuerzas, hasta balances de energía.

Se otorgó tiempo suficiente para que los estudiantes pensaran muy bien en sus respuestas y en sus posibles explicaciones, observando que dicha situación les había ocasionado un interés y una motivación particular para poder dar cuenta de lo que sucedía y prueba de ello fueron las investigaciones que algunos de los estudiantes realizaron y que comentaron en la segunda sesión; dichas investigaciones hacían re-



Figura 5.3: Estudiante explicando su hipótesis

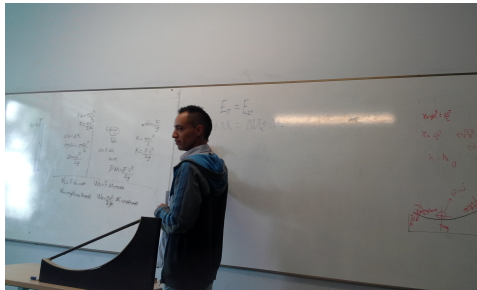


Figura 5.4: Estudiante explicando su hipótesis

ferencia a la curva cicloide y a la expresión por medio de la cual se obtiene este tipo de curva, encontraron además que dicha curva tiene otras particularidades además de ser braquistócrona tal como lo es la tautócrona o isócrona.

5.3. Taller orientador

La tercera actividad se desarrolló mediante la solución del taller “El león se reconoce por sus garras” (Ver apéndice C) diseñado de manera tal que permitiera al estudiante ir aclarando lo que sucedía en lo concerniente a las alturas alcanzadas por las esferas a determinados tiempos, las rapidez de las esferas a determinados tiempos y alturas y además de ello, que el estudiante pudiera concluir que pese a que las trayectorias y tiempos de llegada para las esferas son diferentes, la energía mecánica asociada a las esferas era la misma, en conclusión, que las variaciones de energía o

trabajo de un punto A a uno B en ausencia de fricción no dependen de la trayectoria y fue posible desarrollarlo gracias a la obtención de las ecuaciones cinemáticas para la cicloide que se desarrollaron en el capítulo 3.

La solución del anterior taller por parte de los estudiantes se generó de manera activa, puesto que estos se agruparon para discutir sus ideas, propusieron posibles gráficos de posiciones y rapidez contra tiempo, interactuaron y accionaron el montaje braquistócrona-plano inclinado tal como se evidencia en la figura 5.5, compararon datos obtenidos y con ello estructuraron una solución grupal de lo que se proponía en el taller.

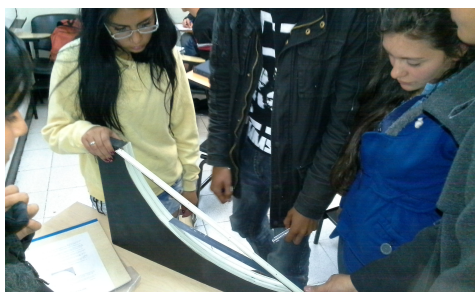


Figura 5.5: Estudiantes interactuando con el montaje Braquistócrona-plano inclinado

EL primer punto del taller se había ya consolidado en las sesiones anteriores de manera tal que no resultó muy complicado para los estudiantes plasmar lo que ya habían debatido durante la solución del pre-test “Recta versus cicloide”; los estudiantes se referían a las inclinaciones diferentes para cada trayectoria, pues decían que al principio para la cicloide el movimiento era casi en caída libre y afirmaban que este aspecto influía en los tiempos de llegada; hacían partícipe la aceleración de la gravedad, la masa de las partículas, los tiempos de llegada, la rapidez y velocidad de las partículas y el peso; intentaban obtener algún tipo de información mediante el análisis de la situación aplicando lo que conocían acerca del principio de conservación del momentum, todo esto se realizó de manera activa y cabe decir que la mayoría de los estudiantes pasaron al tablero para exponer sus análisis, pero tal como se ha mencionado anteriormente, la identificación de variables y la rela-

ción entre estas resulta complejo para los estudiantes que se encuentran en cursos de fundamentación como en el presente caso [4], por este motivo no presentaron ningún tipo de expresión que relacionara variables, sino solamente trataron de identificar las variables y analizar el fenómeno mediante las temáticas previamente vistas.

El segundo punto que surge tras considerar una curva cicloide generada por una circunferencia de radio $a = 1m$ fue de gran importancia, pues mediante este punto dividido en cuatro ítems se intentó que el estudiante pensara no solo en los tiempos de llegada para el análisis del fenómeno, sino también en la rapidez a dichas alturas, en los balances de energía dejando a un lado la diferencia de tiempos de llegada y con ello se facilitara el entendimiento del por qué aunque llegaban a diferentes tiempos al punto B la rapidez de ambas esferas era de igual valor cuando eran medidas a las mismas alturas y con ello que pudieran llegar a la conclusión de que la energía mecánica asociada a ambas esferas es exactamente la misma y por lo tanto poder generalizar dicho principio para cualquier sistema mecánico en el que se analice un desplazamiento determinado de una de las partes del mismo de un punto A a uno B en ausencia de fricción.

Cuando los estudiantes resolvieron el segundo punto lograron observar gracias a las gráficas de altura versus tiempo y rapidez versus tiempo que para la trayectoria cicloide las alturas alcanzadas por la esfera y la rapidez eran mayores respecto a las adquiridas por la otra esfera a determinados tiempos, situación que les hizo pensar que respecto al tiempo, la rapidez de las esferas era diferente, más esto no garantizaba que sucediera lo mismo si se analizaba la rapidez cuando las esferas alcanzaban las mismas alturas así se dieran en tiempos diferentes. La explicación a la que llegaron los estudiantes estaba relacionada con los ángulos de inclinación de las trayectorias, pues seguían enfatizando el hecho de que al principio en la cicloide el movimiento se aproximaba a una caída libre.

A medida que resolvían el taller pudieron dar respuesta al interrogante generado previamente en los anteriores ítems respecto a la rapidez de las esferas a las mismas alturas, porque al determinar los tiempos de llegada al punto B y comprobar que

eran diferentes, pudieron también darse cuenta que la rapidez en dicho punto era del mismo valor, es decir, la rapidez de las esferas eran igual si se midían a las mismas alturas independientemente del tiempo en el que llegaran a dichas alturas.

Por todo lo anterior, se les preguntó a los estudiantes acerca de la energía mecánica de las esferas, encontrando que la mayoría de estos pensaban que tras lo hallado en los anteriores puntos dicha energía debía ser del mismo valor. Encontraron que efectivamente la energía mecánica de las esferas era del mismo valor tanto en el punto *A* como en el *B* generalizándolo para cualquier punto del recorrido, algo que les permitió pensar que las variaciones de energía que aunque por una de las trayectorias se daba más rápido que en la otra, eran exactamente iguales, es decir no se violaba el principio de conservación de energía mecánica en este sistema. Todo ello permitió generalizar lo aprendido a todo sistema mecánico que se desee estudiar.

Se lograron resolver todos los interrogantes generados al inicio del proceso cuando se interactuó con el montaje mediante este taller, pero todo el proceso de solución del mismo se llevó a cabo de manera tal que los estudiantes pudieran interactuar con el montaje, con sus compañeros y en general con todos los recursos que estuvieran a su disposición, y con ello lograr que todo el proceso de solución del mismo diera gran importancia al estudiante, sus ideas y sus intervenciones.

5.4. Pos-test

Una vez se aplicó el experimento discrepante y las actividades relacionadas con este y con ánimo de saber si efectivamente los estudiantes enriquecieron su conocimiento respecto al principio de conservación de la energía mecánica se aplicó nuevamente el test energía mecánica (pos-test) (ver apéndice B) y se realizó el mismo análisis que se llevó a cabo una vez se aplicó el test por primera vez (pre-test). En el cuadro 5.3 se plasman los resultados obtenidos.

Según los datos del cuadro 5.3 es posible afirmar que más del 50% de los estudiantes acertaron esta vez en las respuestas de cada una de las preguntas del test, por lo

Respuestas pos-test	a	b	c	d	e
1	4	2	1	0	27
2	17	0	0	17	0
3	5	5	24	0	0
4	5	27	1	1	0
5	3	28	3	0	0
6	6	6	21	0	1

Cuadro 5.3: Respuestas para las preguntas del pos-test, se escriben en rojo las respuestas correctas

Preguntas pos-test	Concentración C
1	0.63
2	0.46
3	0.51
4	0.64
5	0.68
6	0.39

Cuadro 5.4: concentración para cada pregunta del pos-test

que de entrada se puede decir que efectivamente las actividades y el desarrollo de las mismas ayudaron a los estudiantes a reafirmar el conocimiento respecto al principio de conservación de la energía mecánica. Ahora se hace necesario conocer las concentraciones para cada una de las preguntas del test que se presentan para esta situación.

Con los datos de concentraciones plasmados en el cuadro 5.4 y teniendo en cuenta los puntajes adquiridos para cada pregunta en el pos-test se puede elaborar la gráfica de concentración versus puntaje mostrados en la figura 5.6 debido a que permite tener un estimado de los modelos utilizados por estudiantes a la hora de interpretar los fenómenos a los que hace referencia el test.

Puede evidenciarse mediante el cuadro 5.4 y la figura 5.6 que la concentración de respuestas para casi todas las preguntas es mayor a 0.5 al igual que el puntaje obtenido para las mismas, lo que significa que se genera una concentración media por pregunta pero con la particularidad de que dicha concentración ahora hace referen-

cia a las respuestas correctas; como se mencionó anteriormente, esto significa que los modelos explicativos e interpretativos del fenómeno disminuyeron respecto al inicio del proceso, lo que hace pensar que buena parte de la población aumentó su comprensión respecto a la temática del principio de conservación de la energía mecánica .

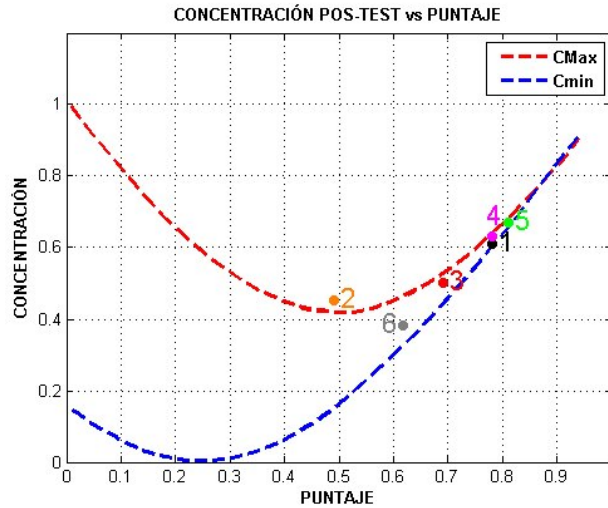


Figura 5.6: concentración de respuestas obtenidas por pregunta en el pos-test versus puntaje obtenido en cada una de las preguntas por los 34 estudiantes, se señala cada pregunta con su respectivo punto.

5.5. Confrontación de resultados pre-test y pos-test

A continuación se realiza una comparación entre los resultados del pre-test y el pos-test a partir del índice de concentración y la ganancia de Hake. Se comenzará con la gráfica del índice de concentración versus puntaje. Se presenta de nuevo la estadística de las respuestas del pre-test y el pos-test en el cuadro 5.5.

Para tener una comparación directa de concentraciones, se presenta en la figura 5.7 una gráfica de concentración versus puntaje en donde se grafiquen tanto los resul-

Resp. pre-test	a	b	c	d	e	Resp. pos-test	a	b	c	d	e
1	10	4	3	2	15	1	4	2	1	0	27
2	7	3	2	20	2	2	17	0	0	17	0
3	6	10	10	6	2	3	5	5	24	0	0
4	18	7	4	4	1	4	5	27	1	1	0
5	13	12	6	2	1	5	3	28	3	0	0
6	12	9	11	1	1	6	6	6	21	0	1

Cuadro 5.5: Confrontación entre respuestas del pre-test y el pos-test

tados obtenidos en la aplicación del pre-test y del pos-test, se hace con la intención de evidenciar la movilización directamente de modelos de interpretación incorrectos de los fenómenos a los que hace referencia el test antes de realizar las actividades propuestas a uno de interpretación correcta o con disminución de modelos equivocados después de accionar el montaje braquistócrona-plano inclinado y desarrollar las actividades relacionadas con este.

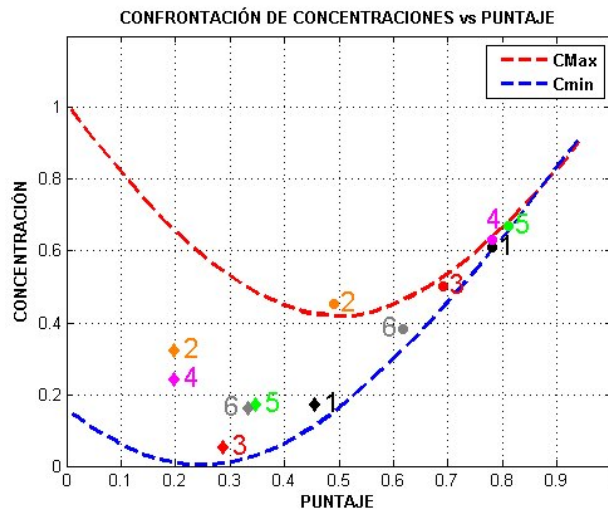


Figura 5.7: Confrontación entre las concentraciones para el pre-test (\diamond) y pos-test (\circ) contra puntaje obtenido en cada una de las preguntas por los 34 estudiante.

Según la Gráfica 5.7 se puede notar que la concentración de las respuestas au-

mentó hasta ubicarse en un nivel medio, lo que hace pensar que hubo una disminución en los diferentes modelos que podían tener los estudiantes al inicio del proceso. Al analizar tanto la concentración y el puntaje, se puede evidenciar que ambas aumentaron simultáneamente, lo cual conduce a interpretar que los estudiantes aumentaron su comprensión respecto a la temática del principio de conservación de la energía mecánica.

Por todo lo anterior y con la intención de dar cuenta de qué tanto los estudiantes aumentaron su desempeño en la interpretación de la temática mediante la aplicación de todas las actividades ya mencionadas se hace necesario determinar la ganancia normalizada de Hake promedio para los estudiantes. Para hallar la ganancia $\langle g \rangle$ promedio se hizo necesario encontrar las ganancias individuales y de esta manera se obtiene que el valor de ganancia fue de 0,52 con una desviación estandar de 0,35. Con el resultado obtenido se puede elaborar una gráfica de ganancia presentada contra puntaje promedio del pre-test obtenido por los estudiantes el cual fue de 0,30 en la figura 5.8, la cual permite observar más claramente si dicha ganancia se encuentra en un nivel alto, medio o bajo.

Según la figura 5.8 puede decirse que se presentó una ganancia conceptual media ya que se encuentra entre los valores de $\langle g \rangle$ que van desde 0.3 hasta 0.7.

para entender la gráfica dada en la figura 5.8 puede decirse que el valor de puntaje que está al máximo, es decir en el valor de 1, pero en ganancia mínima, es decir en 0 representa en términos de un estudiante, que este acertó en todas las respuestas del pre-test y del pos-test, es decir, no presentó ganancia o evolución; el caso contrario, es decir de puntaje 0 y ganancia 1 en términos de un estudiante, significa que no acertó a las respuestas del pre-test, pero al aplicar el pos-test acertó en todas las respuestas, es decir, presentó la máxima ganancia. Gracias a esos posibles casos es posible determinar la gráfica en cuestión.

Retomando la gráfica dada por la figura 5.8 es posible decir que los estudiantes pasaron de estar en una concentración baja de respuestas incorrectas a uno de alta concentración con respuestas correctas, lo que hace pensar que las activida-

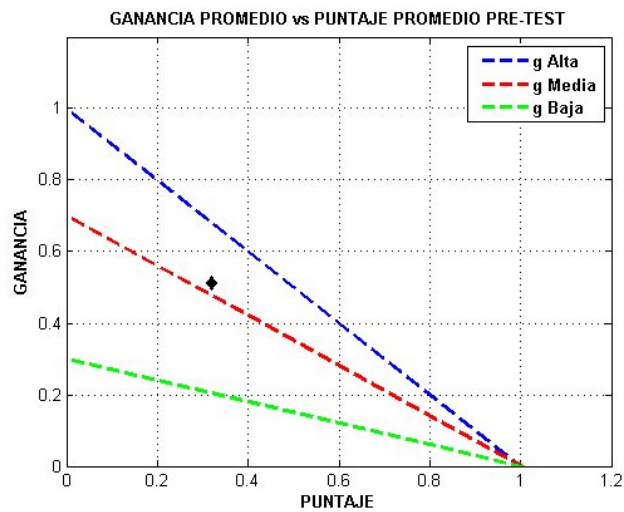


Figura 5.8: Ganancia promedio de los estudiantes versus Puntaje promedio del pre-test.

des propuestas estaban encaminadas en dirección correcta y además de ello, que la implementación del experimento discrepante braquistócrona-plano inclinado y las actividades enmarcada dentro de la metodología del aprendizaje activo han mostrado resultados positivos en el momento de ser aplicados en una población estudiantil para abordar la temática del principio de conservación de energía mecánica pues la evolución del aprendizaje respecto a la temática fue significativa y puede decirse que para valores de ganancia cercanos o mayores a 0.5 la metodología utilizada fue eficiente [4].

Capítulo 6

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

- Durante el desarrollo del presente trabajo fue posible elaborar las actividades test “Recta Versus Cicloide” y el taller “EL león se reconoce por sus garras” relacionadas con el montaje braquistócrona-plano inclinado gracias a la obtención del modelo físico-matemático que describen el fenómeno discrepante, esto permitió una mejor comprensión de dicho fenómeno en el aula de clase tal como se evidenció en los cursos de mecánica II del Departamento de Física de la Universidad Pedagógica Nacional en el semestre 2015-2.
- Se aplicó un pre-test enmarcado dentro de la temática de conservación de la energía mecánica antes de accionar el montaje braquistócrona-plano inclinado y solucionar las actividades relacionadas con el mismo encontrándose puntajes y concentraciones de respuestas bajas; al aplicar el pos-test se pudo evidenciar que las concentraciones aumentaron significativamente así como también el puntaje adquirido, generando una evolución del aprendizaje determinado por la ganancia de Hake cuyo valor fue de $\langle g \rangle = 0,52 \pm 0,32$. Lo anterior permite concluir que la evolución en el conocimiento de la temática en la población analizada se debe al accionamiento del montaje y la participación activa en el desarrollo de las actividades.
- Al dar a conocer el experimento braquistócrona-plano inclinado y solucionar

las actividades relacionadas con dicho experimento, fue posible notar una motivación por parte de la población estudiantil en cuanto al interés por entender lo que sucede con el mismo y en participar activamente en todo el proceso, esto se evidenció en la solución del test “Recta Versus Cicloide” y el taller “EL león se reconoce por sus garras” debido a que individual y grupalmente se planteaban preguntas e hipótesis respecto al funcionamiento del experimento, generando debates e investigaciones autónomas que dieron a conocer a sus compañeros. Por lo anterior, es posible decir que el uso de experimentos discrepantes en el aula de clase asociado con la metodología de aprendizaje activo es una herramienta eficaz para generar un proceso de aprendizaje en temas de la física.

- Se evidenció como conclusión por parte de los estudiantes la comprensión de un aspecto relacionado con el principio de conservación de la energía que da cuenta de la no dependencia de las variaciones de energía o trabajo de la trayectoria en ausencia de fuerzas disipativas debido al desarrollo del taller “EL león se reconoce por sus garras” que se relaciona con el montaje braquistócrona-plano inclinado, por lo tanto se puede decir que dicho montaje es útil en el momento de disminuir las dudas respecto a dicho aspecto del principio.

Bibliografía

- [1] J y Olea J y Ponsoda V Abad, Francisco y Garrido. Introducción a la psicometría: Teoría clásica de los test y teoría de la respuesta al ítem. *España: Universidad Autónoma de Madrid*, 2006.
- [2] Peter W Atkins. *El dedo de Galileo: las diez grandes ideas de la ciencia*. Espasa Calpe, 2003.
- [3] Luis H Barbosa. Los experimentos discrepantes en el aprendizaje activo de la física. *Latin-American Journal of physics Education*, 2(3):24, 2008.
- [4] Luis H Barbosa, Cesar E Mora, Paco H Talero, y José O Organista. El soplador mágico: un experimento discrepante en el aprendizaje de la ley de presión hidrodinámica de bernoulli. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 33(4):4309, 2011.
- [5] Paco H Barbosa, Luis H y Talero. La compuerta mágica: Descripción de un flujo discrepante en dos globos elásticos interconectados. *Lat. Am. J. Phys. Educ*, 3:135–139, 2009.
- [6] Julio Benegas. Tutoriales para física introductoria: una experiencia exitosa de aprendizaje activo de la física. *Lat. Am. J. Phys. Educ*, 1(1):32–38, 2007.
- [7] Marcela del P Castillo. El papel de los eventos discrepantes en el cambio conceptual y la memoria permanente. *Universidad Pedagógica Nacional*, 1996.
- [8] Edwin S Cárdenas. Experimentos discrepantes para el aprendizaje del centro de masa, momento de inercia y torque. *Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional*, 2007.

-
- [9] Leon Festinger. *A theory of cognitive dissonance*, tomo 2. Stanford university press, 1962.
- [10] Jaidi E Guacaneme. Diez experimentos discrepantes sobre óptica en tercero de primaria. *Universidad Pedagógica Nacional*, 1993.
- [11] MIGUEL DE ICAZA HERRERA. Galileo, bernoulli, leibniz and newton around the brachistochrone problem. *Rev Mexicana Fis*, 40(3):459–475, 1994.
- [12] Günter L Huber. Aprendizaje activo y metodologías educativas active learning and methods of teaching. *Tiempos de cambio universitario en Europa*, 59, 2008.
- [13] Jerry B Marion. *Dinámica clásica de las partículas y sistemas*. Reverté, 1975.
- [14] José Orozco Martínez. El aprendizaje activo de la física. *Revista Mexicana de Bachillerato a Distancia número*, 4(72):7, 2012.
- [15] Leticia Halperin Nunnally, Jum C y Donghi. *Introducción a la medición psicológica*. Paidós Buenos Aires, 1970.
- [16] Lambrencht Carmen Dima Gilda y Carola María Perrotta Teresa, Follari Beatriz. La enseñanza de la mecánica en el nivel medio una estrategia didáctica. primera parte. *Latin American Journal of Physics*, 7(3):391–398, 2013.
- [17] Edward F Redish. Millikan lecture 1998: Building a science of teaching physics. *American Journal of Physics*, 67(7):562–573, 1999.
- [18] Mindy Schwartz, Susan y Pollishuke. *Aprendizaje activo: una organización de la clase centrada en el alumnado*, tomo 134. Narcea Ediciones, 1995.
- [19] Mel Silberman. *Aprendizaje Activo: 101 estrategias para enseñar cualquier materia*. Editorial Pax México, 2005.
- [20] Chandralekha Singh y David Rosengrant. Multiple-choice test of energy and momentum concepts. *American Journal of Physics*, 71(6):607–617, 2003.
- [21] Luis H Talero, Paco H y Barbosa. Botellas equilibristas: Extracción discrepante de un billete desde la boca de dos botellas verticales invertidas. *Latin-American Journal of Physics Education*, 3(2):35, 2009.

- [22] L Villani, Alberto y Orquiza de Carvalho. Conflictos cognitivos, experimentos cualitativos y actividades didácticas. En *Enseñanza de las Ciencias*, tomo 13, págs. 279–294. 1995.
- [23] Hans Yang y Enrique Liht. Experimental analysis of the brachistochrone using a kinematical approximation method. *University of British Columbia Science One Research Projects 2010-2011*, 2011.

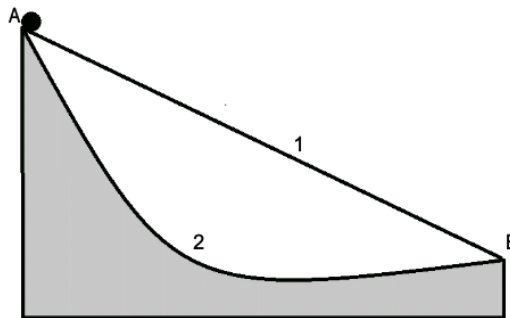
Apéndice A

Apéndice A

TEST RECTA VERSUS CICLOIDE

Responda las siguientes preguntas de selección múltiple con única respuesta teniendo en cuenta el montaje experimental mostrado en clase y la siguiente información:

Dos esferas se ubican en el punto A tal como se muestra en la figura, se sueltan al mismo tiempo y desde el reposo de manera tal que caen describiendo trayectorias diferentes; una de las trayectorias es una recta (1) y la otra una cicloide (2).



1. Respecto al tiempo de llegada al afirmar que:
punto B de ambas esferas, es correcto

- a. La esfera que cae por la trayectoria **1** emplea menor tiempo en llegar a dicho punto respecto a la esfera que cae por la trayectoria **2** debido a que por medio de esta trayectoria se recorre menor distancia.
- b. La esfera que cae por la trayectoria **2** emplea menor tiempo en llegar a dicho punto respecto a la esfera que cae por la trayectoria **1** debido a que por medio de esta trayectoria la esfera acelera más.
- c. Las esferas emplean el mismo tiempo en llegar al punto **B**, debido a que están sometidas al mismo campo gravitacional y por lo tanto sus aceleraciones son iguales.
- 2.** Cuál de las siguientes afirmaciones usted considera que es la correcta:
- a. La rapidez durante el recorrido de **A** a **B** medida a determinadas alturas es mayor para la esfera que cae por la trayectoria **2** respecto a la rapidez de la esfera que cae por la trayectoria **1** medida en esas mismas alturas.
- b. La rapidez de ambas esferas medidas a la mismas alturas durante todo el recorrido son iguales.
- c. La rapidez de ambas esferas son diferentes durante todo el recorrido excepto en el punto **B**.
- 3.** Respecto a la energía mecánica de ambas esferas es posible decir que:
- a. La energía mecánica en el punto **B** es mayor para la esfera que cae por la trayectoria **1** respecto a la energía mecánica de la esfera que cae por la trayectoria **2**,
- b. La energía mecánica en el punto **B** es mayor la esfera que cae por la trayectoria **2** respecto a la energía mecánica de la esfera que cae por medio de la trayectoria **1**.
- c. La energía mecánica en el punto **B** es igual para ambas esferas.

Apéndice B

Apéndice B

TEST

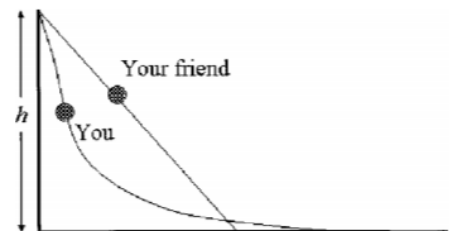
ENERGÍA MECÁNICA

Este test se elaboró tras recopilar las preguntas del test “Energy and Momentum Conceptual Survey” de Chandralekha Singh y David Rosengrant [20] y “La enseñanza de la mecánica en el nivel medio: un estrategia didáctica. Primera parte” de Teresa Perrotta y otros [16] , tomados de las revistas American Journal of Physics vol 71 $N_{o}6$ y Latin American Journal of Physics education vol 7 $N_{o}3$ respectivamente.

Seleccione una de las cinco opciones (a,b,c,d,e) para cada una de las preguntas que se presentan a continuación. Ignore los efectos retardadores de la fricción y la resistencia del aire a menos que se indique lo contrario.

Dos planos inclinados tienen trayectorias diferentes, pero comienzan a la misma altura h y terminan en el mismo nivel, tal como se muestra en la figura. Usted

y su amigo, que tienen el mismo peso, se deslizan hacia abajo desde la parte superior de cada plano a partir del reposo.



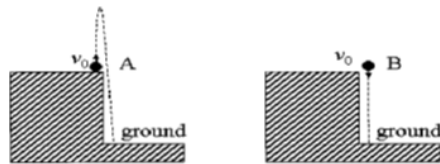
1. ¿Cuál de las siguientes afirmacio-

nes describe acertadamente quien adquiere más velocidad en la parte inferior del plano entre usted y su amigo?

- a. Usted, porque la pendiente de su plano es más pronunciada, por tal motivo hay más oportunidad de acelerar
- b. Usted, porque viaja una distancia más larga por lo tanto hay más oportunidad de acelerar.
- c. Su amigo, debido a que la pendiente de su plano es constante, permitiéndole acelerar más.
- d. Su amigo, puesto que al viajar una distancia más corta, puede conservar mucho mejor su energía cinética.
- e. Los dos tienen la misma velocidad.

Para la pregunta 2 tenga en cuenta la siguiente información:

Dos piedras idénticas A y B se lanzan desde un acantilado de igual altura y con idénticas velocidades iniciales v_0 . La piedra A se lanza verticalmente hacia arriba y la piedra B verticalmente hacia abajo (ver figura)



2. Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta a la hora de explicar cuál de las piedras A y B adquiere más velocidad antes de llegar al suelo.

- a. Ambas piedras adquieren la misma velocidad.
- b. B, porque viaja una distancia más larga.
- c. A, porque utiliza más tiempo.
- d. A, puesto que recorre una distancia más larga y tarda más tiempo.
- e. B, ya que no se realiza trabajo contra la fuerza gravitacional.

Para la pregunta 3 tenga en cuenta la siguiente información:

Dos carros A y B son iguales en todos los aspectos antes de la colisión.

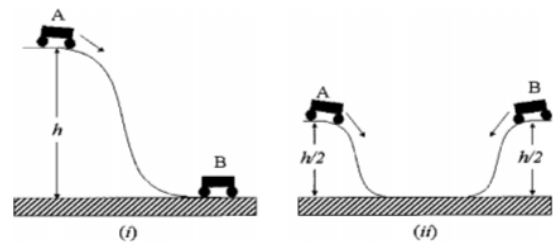


Diagrama 1: El carro A parte desde el reposo desde una colina con altura h por encima del suelo y choca de frente con el carro B para quedar unidos.

Diagrama 2: Los carros A y B parten desde el reposo desde dos colinas opuestas con alturas de $\frac{h}{2}$ por encima del suelo. Al deslizarse chocan entre sí en el suelo y quedan unidos.

3. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera acerca del sistema de los dos carros justo antes de que estos choquen en ambos casos?

- a. La energía cinética del sistema es igual a cero en los dos casos.
- b. La energía cinética del sistema es mayor en el caso *i* que en el caso *ii*
- c. La energía cinética del sistema es igual en ambos casos.
- d. El impulso del sistema es mayor en el caso *i* que en el caso *ii*
- e. El impulso del sistema es igual en ambos casos.

Responda de la pregunta 4 a la 6 teniendo en cuenta la siguiente información:

Una persona empuja un trineo por la ladera de una colina. Al llegar a la parte más alta, lo deja caer por la pendiente. Esta operación la realiza en dos oportunidades: en la primera el trineo desliza por la misma cuesta por la que subió (I)

y en la segunda, por la otra ladera, más empinada (II). Suponga que no existe rozamiento entre el trineo y el hielo de la superficie y que la resistencia del aire se puede despreciar.



4. ¿Cómo será la rapidez del trineo al pie de la colina cuando baja por el lado más empinado (II) en relación a cuando baja por la ladera menos empinada (I)?

- a. La rapidez al pie de la colina es mayor para la ladera más empinada (II)
- b. La rapidez al pie de la colina es igual para las dos laderas.
- c. La rapidez al pie de la colina es mayor para la ladera menos empinada (I) porque el trineo viaja una distancia mayor.
- d. No dan suficiente información como para decir cual rapidez al pie de la colina es mayor.

e. Ninguna de estas descripciones es correcta.

5. Compare la energía cinética (energía de movimiento) del trineo al pie de la colina. Seleccione la mejor respuesta

entre las siguientes:

a. La energía cinética al pie de la colina es mayor para la ladera más empinada (II)

b. La energía cinética al pie de la colina es igual para las dos laderas

c. La energía cinética al pie de la colina es mayor para la ladera menos empinada (I) porque el trineo viaja una distancia mayor

d. No dan suficiente información como para decir cual energía cinética al pie de la colina es mayor

e. Ninguna de estas descripciones es correcta

6. Compare el trabajo realizado por la persona si sube el trineo por la ladera I o por la ladera II.

a. El trabajo es mayor cuando sube por la ladera más empinada (II)

b. El trabajo es mayor cuando sube por la ladera menos empinada (I), ya que la distancia es mayor

c. El trabajo realizado cuando sube por la ladera más empinada (II) es igual al trabajo hecho cuando sube por la ladera menos empinada (I)

d. No dan suficiente información como para decir cual trabajo es mayor

e. Ninguna de estas descripciones es correcta

Apéndice C

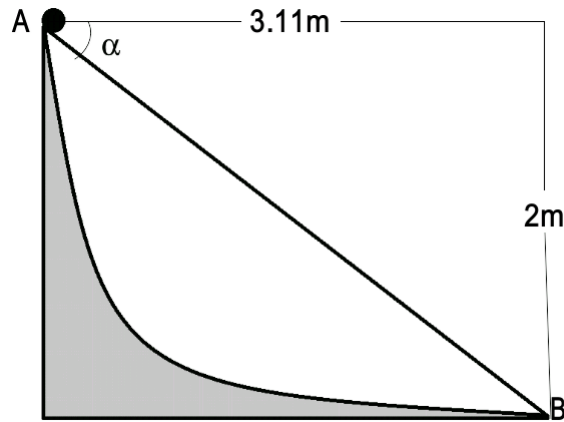
Apéndice C

EL LEÓN SE RECONOCE POR SUS GARRAS

Con la intención de aclarar un poco más lo que sucede con el montaje propuesto, intente dar solución a los siguientes puntos:

1. Proporcione una posible explicación para dar cuenta de la llegada en menor tiempo de la esfera que cae a través de la cicloide al punto final respecto a la que cae a través de la recta, identifique variables y relacionelas para que así pueda comentar sus ideas a los demás compañeros.

2. sea $x(t) = \sqrt{gt} - \text{Sen}[\sqrt{gt}]$ y $y(t) = 1 - \text{Cos}[\sqrt{gt}]$ las expresiones dependientes del tiempo que dan cuenta de la posición de una partícula que se mueve describiendo una trayectoria cicloide, así como también $x(t) = \frac{g\text{Cos}\alpha\text{sen}\alpha}{2}t^2$ y $y(t) = \frac{g\text{Sen}^2\alpha}{2}t^2$ las expresiones dependientes del tiempo que dan cuenta de la posición de una partícula que se mueve describiendo una recta, ambas bajo la interacción única de la gravedad tal como muestra la figura. Asuma que las partículas inician su movimiento al mismo tiempo desde el reposo y desde la misma altura en el punto A ubicado a $2m$ por encima del piso y llegan a un punto B que está al nivel del piso. La masa de las partículas es igual a $1kg$



a. Calcule las distancias verticales recorridas desde el punto de partida para ambas partículas desde $t = 0,0s$ hasta $t = 1,0s$. con los datos obtenidos realice una gráfica de posición y contra tiempo t y haga un análisis del gráfico.

b. Calcule la rapidez de ambas partículas en los mismos tiempos que el punto anterior y realice un gráfico de rapidez v contra tiempo t y haga un análisis del gráfico.

c. Determine el tiempo de llegada de ambas partículas al punto B y con los resultados obtenidos calcule también la rapidez para las partículas en dicho punto ¿que puede concluir?

d. Calcule la energía mecánica de las partículas en los punto A y B ¿son iguales o diferentes? ¿que puede decir al respecto?

3. Analizando todo lo aprendido con la braquistócrona-plano inclinado, responda lo siguiente: ¿dependen las variaciones de energía mecánica de la trayectoria que siga un cuerpo para ir de un punto A a uno B en ausencia de fricción?

Apéndice D

Apéndice D

LAS ECUACIONES CINEMÁTICAS PARA LA BRAQUISTÓCRONA

Se parte de las ecuaciones de una cicloide para obtener las ecuaciones que dependen del tiempo de una partícula que describe este tipo de trayectoria.

$$x = a(\phi - \sin \phi) \quad (\text{D.0})$$

$$y = a(1 - \cos \phi) \quad (\text{D.1})$$

despejando (D.1) se obtiene que:

$$\cos \phi = 1 - \frac{y}{a}$$

llamando $y_c = \cos \phi$

$$y_c = 1 - \frac{y}{a} \quad (\text{D.2})$$

por lo tanto, se puede escribir x en términos de y_c de la siguiente manera:

$$x = a(\cos^{-1} y_c - \sqrt{1 - y_c^2}) \quad (\text{D.3})$$

la rapidez en dicha dirección de la partícula que se mueve a través de esta trayectoria en términos de y_c sería,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a \left[-\frac{1}{\sqrt{1 - y_c^2}} + \frac{y_c}{\sqrt{1 - y_c^2}} \right] \dot{y}_c^2 \\ \dot{x} &= \frac{a\dot{y}_c}{\sqrt{1 - y_c^2}}(y_c - 1) \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Con la expresión anterior, es posible determinar la energía cinética sabiendo que $K = \frac{m}{2} [\dot{x}^2 + \dot{y}^2]$

$$\begin{aligned} K &= \frac{m}{2} \left[\frac{a^2 \dot{y}_c^2 (y_c - 1)^2}{1 - y_c^2} + \dot{y}_c a^2 \right] \\ K &= \frac{m}{2} a^2 \left[1 + \frac{(y_c - 1)^2}{1 - y_c^2} \right] \dot{y}_c^2 \\ K &= \frac{m}{2} a^2 \left[1 - \frac{y_c - 1}{y_c + 1} \right] \dot{y}_c^2 \\ K &= ma^2 \left[\frac{1}{1 + y_c} \right] \dot{y}_c^2 \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

De la misma manera se determina la energía potencial gravitacional, pero para que se de un tratamiento matemático sencillo, se hará el análisis en la parte más baja de la braquistócrona, es decir, donde $U = 0$ tal que:

$$U = mg(2a - y)$$

$$U = mg(2a - (a - ay_c))$$

$$U = mga(1 + y_c). \quad (\text{D.6})$$

La energía mecánica estaría dada por,

$$E = ma^2 \left[\frac{1}{1 + y_c} \right] \dot{y}_c^2 + mga(1 + y_c),$$

$$E - mga - mgay_c = \frac{ma^2}{1 + y_c} \dot{y}_c^2,$$

$$\left[\left(\frac{E}{ma^2} - \frac{g}{a} \right) - \frac{g}{a} y_c \right] (1 + y_c) = \dot{y}_c^2. \quad (\text{D.7})$$

Se hace necesario llamar de la siguiente manera una parte de la expresión anterior:

$$E' = \frac{E}{ma^2} - \frac{g}{a} \quad (\text{D.8})$$

sustituyendo (D.8) en (D.7) se obtiene

$$\dot{y}_c^2 = E' - \frac{g}{a} y_c - \frac{g}{a} y_c^2 + E' y_c$$

$$\dot{y}_c^2 = E' + \left(E' - \frac{g}{a} \right) y_c - \frac{g}{a} y_c^2. \quad (\text{D.9})$$

Mediante el método de separación de variables se obtiene la integral que a continuación se muestra.

$$\int \frac{dy_c}{\sqrt{E' + \left(E' - \frac{g}{a} \right) y_c - \frac{g}{a} y_c^2}} = t + L. \quad (\text{D.10})$$

Se realiza la siguiente sustitución $A = E'$, $B = E' - \frac{g}{a}$, $C = -\frac{g}{a}$ y se reescribe la

integral de la forma:

$$\int \frac{dy_c}{\sqrt{A + By_c - Cy_c^2}} + L = t,$$

siendo la solución de dicha integral la siguiente:

$$t = \frac{1}{\sqrt{-c}} \cos^{-1} \left(-\frac{B + 2Cy_c}{\sqrt{B^2 - 4AC}} \right) + L. \quad (\text{D.11})$$

Solucionando $q = B^2 - 4AC$ de la ecuación anterior

$$q = \left(E' - \frac{g}{a} \right)^2 - 4E' \left(-\frac{g}{a} \right)$$

$$q = E'^2 - 2E' \frac{g}{a} + \frac{g^2}{a^2} + 4E' \frac{g}{a}$$

$$q = E'^2 + 2E' \frac{g}{a} + \frac{g^2}{a^2}$$

$$q = \left(E' + \frac{g}{a} \right)^2 \quad (\text{D.12})$$

sustituyendo (D.12) en (D.11)

$$t = \frac{1}{\sqrt{\frac{g}{a}}} \cos^{-1} \left[\frac{-\left(E' - \frac{g}{a} \right) + 2\frac{g}{a}y_c}{E' + \frac{g}{a}} \right] + L$$

Despejando y_c de la ecuación anterior:

$$\left[\frac{-\left(E' - \frac{g}{a} \right) + 2\frac{g}{a}y_c}{E' + \frac{g}{a}} \right] = \cos \sqrt{\frac{g}{a}} t + L$$

$$-\left(E' - \frac{g}{a} \right) + 2\frac{g}{a}y_c = \left(E' + \frac{g}{a} \right) \cos \sqrt{\frac{g}{a}} t + L$$

$$\frac{2g}{a}y_c = \left(E' + \frac{g}{a}\right) \cos \sqrt{\frac{g}{a}}t + \left(E' - \frac{g}{a}\right) + L.$$

Sustituyendo (D.2) en la expresión anterior

$$2\frac{g}{a}\left(1 - \frac{y}{a}\right) = \left(E' + \frac{g}{a}\right) \cos \sqrt{\frac{g}{a}}t + \left(E' - \frac{g}{a}\right) + L$$

$$-2\frac{gy}{a^2} = E' - 3\frac{g}{a} + \cos \sqrt{\frac{g}{a}}t \left(E' + \frac{g}{a}\right) + L.$$

Despejando y se llega al resultado:

$$y = \frac{a^2}{2g} \left(\frac{3g}{a} - E'\right) - \left[\left(E' + \frac{g}{a}\right) \cos \sqrt{\frac{g}{a}}t\right] \frac{a^2}{2g} + L \quad (\text{D.13})$$

Remplazando (D.8) en (D.13)

$$y = \frac{a^2}{2g} \left[\left(\frac{2g}{a} - \frac{E}{ma^2}\right) - \frac{E}{ma^2} \cos \sqrt{\frac{g}{a}}t\right] + L \quad (\text{D.14})$$

Finalmente, para poder obtener la expresión $y(t)$ es necesario obtener el valor de la constante L teniendo como condiciones iniciales $y = 0$ y $t = 0$

$$0 = \frac{a^2}{2g} \left[\left(\frac{2g}{a} - \frac{E}{ma^2}\right) - \frac{E}{ma^2}\right] + K$$

Despejando L

$$L = \frac{a^2}{2g} \left[\left(\frac{E}{ma^2} - \frac{2g}{a}\right) + \frac{E}{ma^2}\right]$$

$$L = \frac{a^2}{2g} \left(\frac{2E}{ma^2} - \frac{2g}{a}\right) \quad (\text{D.15})$$

Remplazando (D.15) en (D.14)

$$y = \frac{a^2}{2g} \left[\frac{2g}{a} - \frac{E}{ma^2} - \frac{E}{ma^2} \cos \sqrt{\frac{g}{a}}t\right] + \frac{a^2}{2g} \left(\frac{2E}{ma^2} - \frac{2g}{a}\right)$$

De esta manera es posible escribir que:

$$y = \frac{E}{2mg} \left[1 - \cos \sqrt{\frac{g}{a}} t \right] \quad (\text{D.16})$$

y con ello se deduce también que $x(t)$ estaría dada por:

$$x = \frac{E}{2mg} \left[\sqrt{\frac{g}{a}} t - \sin \sqrt{\frac{g}{a}} t \right] \quad (\text{D.17})$$

hacemos $A = \frac{E}{2mg}$ y $\omega = \sqrt{\frac{g}{a}}$

La rapidez de la partícula teniendo en cuenta las expresiones (D.16) y (D.17) se obtendría de la siguiente manera,

$$|\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \quad (\text{D.18})$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{A^2 \omega^2 (1 - \cos \omega t)^2 + A^2 \omega^2 \sin^2 \omega t}$$

$$|\vec{v}| = A\omega \sqrt{2(1 - \cos \omega t)}$$

sabiendo que $\frac{y}{A} = 1 - \cos \omega t$

$$|\vec{v}| = A\omega \sqrt{2 \frac{y}{A}} \quad (\text{D.19})$$

con la expresión anterior, es posible obtener la energía cinética K .

$$K = \frac{1}{2} m |\vec{v}|^2 \quad (\text{D.20})$$

$$K = \frac{1}{2} A^2 \omega^2 m \left(2 \frac{y}{A} \right)$$

Remplazando A y ω

$$K = \frac{E}{2mg} m \left(\frac{g}{a} \right) y$$

$$K = \frac{Ey}{2a} \quad (\text{D.21})$$

Asímismo es posible determinar la expresión que de cuenta de la energía potencial gravitacional de la siguiente manera:

$$U = mgy \quad (\text{D.22})$$

$$U = mgA(1 - \cos \omega t)$$

Recordando que $\frac{y}{A} = 1 - \cos \omega t$

$$U = mg \frac{E}{2mg} \frac{y}{A}$$

$$U = \frac{Ey}{2A} \quad (\text{D.23})$$

Haciendo referencia al principio de conservación de la energía mecánica:

$$\Delta U = \Delta K \quad (\text{D.24})$$

$$\frac{Ey}{2A} = \frac{Ey}{2a} \quad (\text{D.25})$$

simplificando se obtendría que

$$A = a \quad (\text{D.26})$$

Es decir, la constante $A = \frac{E}{2mg}$ es de igual valor que el radio del círculo que

genera la curva cicloide, por lo tanto las ecuaciones cinemáticas de una partícula que describe una trayectoria cicloide estarían dadas por:

$$x(t) = a \left(\sqrt{\frac{g}{a}} t - \sin \sqrt{\frac{g}{a}} t \right) \quad (\text{D.27})$$

$$y(t) = a \left(1 - \cos \sqrt{\frac{g}{a}} t \right) \quad (\text{D.28})$$

Apéndice E

Apéndice E

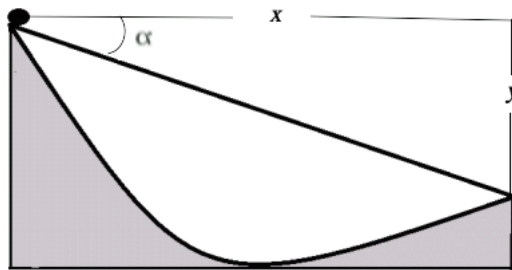
LAS ECUACIONES CINEMÁTICAS PARA EL PLANO INCLINADO

De igual manera que se hizo para la braquisitócrona se hará con el plano inclinado, pues se hace necesario obtener las ecuaciones cinemáticas para una partícula que se mueva a través de él.

Según la figura la distancia x estaría relacionada con la variable y de la siguiente manera:

$$x = y \cot \alpha \quad (\text{E.1})$$

De la misma manera que se hizo con la cicloide, se escribirá la energía mecánica en términos de la variable y y así poder determinar las ecuaciones cinemáticas; para



ello, es necesario obtener las energías cinética y potencial para este caso.

Respecto a la energía cinética se tiene que:

$$K = \frac{m}{2}(1 + \cot^2 \alpha)\dot{y}^2$$

$$K = \frac{m}{2}\dot{y}^2 \csc^2 \alpha \quad (\text{E.2})$$

La energía potencial estaría dada por:

$$U = mgy \quad (\text{E.3})$$

Con lo anterior y ya sabiendo que la energía mecánica E es la suma de la energía cinética K y potencial U se obtiene lo siguiente:

$$E = \frac{m}{2}\dot{y}^2 \csc^2 \alpha + mgy \quad (\text{E.4})$$

haciendo referencia nuevamente al principio de conservación de la energía mecánica, es posible escribir,

$$\frac{dE}{dt} = 0 \quad (\text{E.5})$$

$$\dot{y}\ddot{y}m \csc^2 \alpha - mg\dot{y} = 0$$

$$\dot{y}(\ddot{y}m \csc^2 \alpha - mg) = 0 \quad (\text{E.6})$$

Dividiendo por \dot{y} en ambos lados de la ecuación, se obtiene:

$$\ddot{y} = g \sin^2 \alpha \quad (\text{E.7})$$

Realizando las integrales correspondientes se encuentra que y es igual a:

$$y(t) = \frac{g \sin^2 \alpha}{2} t^2 \quad (\text{E.8})$$

Sustituyendo (3,37) en (3,30)

$$x(t) = \frac{\frac{g \sin^2 \alpha t^2}{2}}{\tan \alpha}$$

$$x(t) = \frac{g \cos \alpha \sin \alpha}{2} t^2 \quad (\text{E.9})$$

Teniendo en cuenta las expresiones (3.28), (3.29), (3.37) y (3.38) halladas en la presente sección y en la sección 3.3 es posible determinar la expresión que de cuenta de la rapidez de las partículas para determinados instantes de tiempo y finalmente con esas expresiones obtener las gráficas de posición vertical o altura y contra tiempo t para ambas partículas y de rapidez v contra tiempo t , de manera tal que se pueda dar cuenta mediante las mismas de lo que sucede a la hora de accionar el montaje braquistócrona plano inclinado.

Recordando que la rapidez se define como $v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$ se puede escribir que:

Para la cicloide

$$v = \sqrt{2ga \left(1 - \cos \sqrt{\frac{g}{a}} t\right)} \quad (\text{E.10})$$

Para la recta

$$v = gt \sin \alpha \quad (\text{E.11})$$