

# **INGENIERÍA INVERSA DE LA ECUACIÓN DE PANDEO DE EULER:**

Propuesta para Conectar Experiencia, Lenguaje y Conocimiento en la  
Enseñanza de la Física de las Columnas

**JONATHAN DUVAN CARDENAS SAAVEDRA**

**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL  
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA  
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LAS CIENCIAS NATURALES  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA**

**2025**

**INGENIERÍA INVERSA DE LA ECUACIÓN DE PANDEO DE EULER:**

Propuesta para Conectar Experiencia, Lenguaje y Conocimiento en la Enseñanza de la Física de  
las Columnas

**JONATHAN DUVAN CARDENAS SAAVEDRA**

**Trabajo de grado presentado para optar al título de: Magíster en Docencia de las  
Ciencias Naturales**

**ASESORES:**

**LILIANA TARAZONA VARGAS  
FRANCISCO OROZCO GONZALEZ**

**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL  
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA  
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LAS CIENCIAS NATURALES  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
2025**

## Índice de General

|  |     |
|--|-----|
| Índice de General .....  | I   |
| Índice de Tablas .....   | III |
| Índice de Imágenes .....   | IV  |
| Introducción .....   | 1   |
| Capítulo I .....   | 2   |
| Bases conceptuales para una propuesta de enseñanza de la física: Ingeniería Inversa y la ecuación de Euler para el pandeo de columnas..... | 2   |
| Marco de los estándares: calidad, competencias y contexto.....   | 2   |
| La ingeniería inversa como metodología puente en la enseñanza de la física.....  | 3   |
| Ingeniería inversa aplicada a la ecuación de Euler .....   | 6   |
| Ecuación de Euler para el pandeo de columnas .....   | 7   |
| Experiencia .....  | 8   |
| Lenguaje.....  | 9   |
| Conocimiento.....  | 10  |
| Pregunta Problema y objetivos .....  | 11  |
| Pregunta de investigación .....  | 12  |
| Capítulo II.....   | 14  |
| El Rompecabezas del Pandeo: Ingeniería Inversa de la Ecuación de Euler .....   | 14  |
| Estudio de la Ecuación de Euler para el pandeo de columnas .....   | 15  |
| Análisis de las hipótesis en la ecuación de pandeo de Euler .....  | 33  |
| Capítulo III.....  | 37  |
| Diseño de actividad experimental y propuesta de aula para el estudio del pandeo de una columna .....                                       | 37  |
| Criterios que orientan la propuesta de actividad experimental.....   | 38  |
| Columnas de diferente longitud, sección transversal y material.....  | 40  |
| Control de variables y análisis del pandeo de una columna .....  | 41  |
| Propuesta de aula: una variante de la ingeniería inversa .....   | 45  |
| Capítulo IV.....   | 55  |

|   |    |
|---|----|
| Sistematizando la Propuesta de Aula.....                      | 55 |
| Sistematizando las cinco etapas de la propuesta de aula ..... | 56 |
| Reflexiones finales.....                                      | 63 |
| Referencias Bibliográficas .....                              | 66 |
| Anexo A .....   | 70 |
| Anexo B .....   | 86 |
| Anexo C .....   | 91 |

## Índice de Tablas

|  |    |
|--|----|
| <b>Tabla 1</b> Condiciones que debe cumplir una columna. ....  | 21 |
| <b>Tabla 2</b> Relación entre el momento flector y las hipótesis .....   | 23 |
| <b>Tabla 3</b> Carga crítica de pandeo para columnas de diferentes materiales (longitud y sección transversal constantes) .....                          | 42 |
| <b>Tabla 4</b> Carga crítica de pandeo para columnas de diferentes columnas de diferentes secciones transversales (material y longitud constantes) ..... | 43 |
| <b>Tabla 5</b> Carga crítica de pandeo para columnas de diferentes longitudes (material y sección transversal constantes).....                           | 44 |
| <b>Tabla 6</b> Descripción de la propuesta de aula.....  | 52 |
| <b>Tabla 7</b> Categorías Principales.....   | 56 |
| <b>Tabla 8</b> Categorías Emergentes.....  | 56 |
| <b>Tabla 9</b> Etapa 1: Categoría - unidad de análisis y correspondencia.....  | 57 |
| <b>Tabla 10</b> Categoría - unidad de análisis y correspondencia.....  | 58 |
| <b>Tabla 11</b> Etapa 4: Categoría - unidad de análisis y correspondencia.....   | 59 |
| <b>Tabla 12</b> Etapa 5: Categoría - unidad de análisis y correspondencia.....   | 61 |

## Índice de Imágenes

|                  |  |    |
|------------------|--|----|
| <b>Imagen 1</b>  | Primeras columnas fundidas del viaducto del metro de Bogotá .....  | 9  |
| <b>Imagen 2</b>  | Puente de la sexta con 30-Bogotá .....   | 14 |
| <b>Imagen 3</b>  | Columnas con alturas y secciones transversales diferentes sometidas a cargas .....   | 16 |
| <b>Imagen 4</b>  | Columnas con diferentes puntos de apoyo.....   | 17 |
| <b>Imagen 5</b>  | Ejemplo de las reglas con diferente momento de inercia totalmente iguales .....  | 18 |
| <b>Imagen 6</b>  | Columna antes y después de someterse a una carga axial .....   | 20 |
| <b>Imagen 7</b>  | Columna sometida a una fuerza lateral o sometida a una carga axial P .....   | 22 |
| <b>Imagen 8</b>  | Representación de la deflexión de la columna, la carga axial y el momento flector. ..  | 22 |
| <b>Imagen 9</b>  | Columna sometida a los pares $M$ y $M'$ .....  | 24 |
| <b>Imagen 10</b> | Eje neutro de la columna al ser sometido a flexión .....   | 25 |
| <b>Imagen 11</b> | Columna después de una deformación.....  | 26 |
| <b>Imagen 12</b> | Fragmento original de la ecuación de Euler.....  | 31 |
| <b>Imagen 13</b> | Excentricidad en una columna. ....   | 34 |
| <b>Imagen 14</b> | Columna recta y prismática.....  | 35 |
| <b>Imagen 15</b> | Fotografía de prensa electromecánica con su sistema de control .....   | 38 |
| <b>Imagen 16</b> | Fotografía del diseño y fabricación de columnas.....   | 40 |
| <b>Imagen 17</b> | Montaje de la prensa electromecánica .....   | 41 |
| <b>Imagen 18</b> | Grafica de longitud Vs carga crítica .....   | 45 |
| <b>Imagen 19</b> | Parte de la propuesta de aula correspondiente a la Pre-Experiencia.....  | 46 |
| <b>Imagen 20</b> | Parte propuesta de Aula correspondiente a la Exploración y delimitación de los factores de pandeo.....                       | 47 |
| <b>Imagen 21</b> | Parte de la propuesta de aula correspondiente a presentar la ecuación de Euler para el pandeo de columnas.....               | 48 |
| <b>Imagen 22</b> | Parte de la propuesta de aula correspondiente desglosar las relaciones - Parte C: ¿La longitud influye? (Explorando L) ..... | 49 |
| <b>Imagen 23</b> | Parte de la propuesta de aula que corresponde a la influencia de los factores.....   | 50 |
| <b>Imagen 24</b> | Grupo de trabajo dando respuesta a la propuesta de aula. ....  | 58 |
| <b>Imagen 25</b> | Inicio de la cuarta etapa. ....  | 60 |

## Introducción

La enseñanza de la Física enfrenta el reto constante de conectar ecuaciones abstractas con las experiencias previas de los estudiantes, quienes a menudo perciben las formulaciones matemáticas como entes descontextualizados, ajenos al fenómeno tangible que describen. Frente a este desafío, la ingeniería inversa emerge como una metodología valiosa, pues permite analizar un “producto terminado”—en este caso, la ecuación de Euler para el pandeo de columnas— para deconstruir y comprender los factores que lo sustentan. Este trabajo de grado propone el diseño, implementación y sistematización de una propuesta de aula que emplea esta metodología, con el fin de integrar la experiencia práctica, el lenguaje matemático y la construcción de conocimiento en estudiantes de educación media, alineándose con los lineamientos que promueven aprendizajes contextualizados.

El desarrollo de este trabajo de grado se estructura en cuatro capítulos. El Capítulo I establece las bases conceptuales, presentando el marco normativo, los enfoques contemporáneos de enseñanza y los fundamentos de la ingeniería inversa y la ecuación de Euler, para luego plantear el problema y los objetivos. El Capítulo II realiza un análisis teórico de la ecuación y sus hipótesis. El Capítulo III describe el material didáctico creado para la experimentación —una prensa electromecánica y columnas modulares— y detalla la propuesta de aula estructurada en cinco etapas. El Capítulo IV presenta la sistematización y el análisis de los resultados obtenidos durante la implementación, reconociendo cómo los estudiantes integraron la experiencia, el lenguaje y el conocimiento.

A través de este proceso, se busca mostrar que la ingeniería inversa facilita una comprensión de modelos físicos complejos, transformando la ecuación de Euler para el pandeo de columnas de una fórmula abstracta en una herramienta comprensible y aplicable, derivada de la exploración activa y la reflexión guiada.

## Capítulo I

### **Bases conceptuales para una propuesta de enseñanza de la física: Ingeniería Inversa y la ecuación de Euler para el pandeo de columnas**

En este capítulo se plantea el contexto problemático y el marco que orienta los propósitos de este trabajo. En primer lugar, se recuerda lo establecido por el Ministerio de Educación Nacional en los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006) y su llamado a desarrollar metodologías acordes con los entornos. Luego, se presentan algunos enfoques contemporáneos sobre la enseñanza de la física, destacando el desafío de conectar el lenguaje abstracto de las ecuaciones con la experiencia tangible de los estudiantes. A continuación, se explicará la importancia de la ingeniería inversa en los procesos educativos y se abordará, de manera general, la ecuación de Euler para el pandeo de columnas. Finalmente, se plantea el problema y los objetivos que orientan este trabajo.

#### **Marco de los estándares: calidad, competencias y contexto**

Los Estándares Básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas, como se indica en la guía: “son el producto de un trabajo interinstitucional y mancomunado entre el Ministerio de Educación Nacional y las facultades de Educación del país agrupadas en Ascofade (Asociación Colombiana de Facultades de Educación)” (MEN, 2006, p.4). Se trata de un compendio de criterios que establecen los estándares mínimos de calidad del sistema educativo. En dicha guía se reconoce la necesidad de construir nuevas metodologías acorde a los entornos:

las entidades territoriales diseñen estrategias cuyo propósito fundamental es apoyar a las instituciones educativas en su búsqueda por la calidad, para lo cual disponen de herramientas y recursos que aporta el Ministerio de Educación Nacional a partir de programas que [...] (2) contribuyen a la puesta en marcha de nuevas metodologías y pedagogías acordes con las necesidades de las regiones. (MEN, 2006, p.10)

Para esto se tiene presente que “...es competencia de las instituciones educativas elaborar y poner en práctica un Proyecto Educativo Institucional que responda a situaciones específicas de la comunidad local” (MEN, 2006, p.10), al tiempo que “la ley [...] se pronuncia a favor de unos referentes comunes” que, entre otros puntos, “orienten [...] para el desempeño ciudadano y productivo en igualdad de condiciones” (MEN, 2006, p.10).

El propósito de los Estándares básicos de competencias es orientar en “la búsqueda de la calidad de la educación por parte de todo el sistema educativo” (MEN, 2006, p.11), definiendo un estándar como “un criterio claro y público que permite juzgar si un estudiante, una institución o el sistema educativo en su conjunto cumplen con unas expectativas comunes de calidad” (MEN, 2006, p.11).

Esta perspectiva se amplía al reconocer la importancia del desarrollo de los conocimientos, habilidades y actitudes —mencionados como competencias— alcanzados por los estudiantes:

Una competencia ha sido definida como un saber hacer flexible que puede actualizarse en distintos contextos, es decir, como la capacidad de usar los conocimientos en situaciones distintas de aquellas en las que se aprendieron. [...] El desarrollo de las competencias está en el centro del quehacer de las instituciones educativas desde el preescolar, y constituye el núcleo común de los currículos en todos los niveles educativos. (MEN, 2006, p.12).

Este marco es crucial para el docente, pues define el núcleo de su quehacer: el desarrollo de competencias como un "saber hacer flexible" aplicable en diversos contextos. Esto exige diseñar metodologías de aprendizaje que partan de situaciones reales, de objetos concretos, que permitan a todos los estudiantes alcanzar ese criterio común de calidad. Se demanda vincular la enseñanza a experiencias acordes con los entornos, que promuevan la aplicación de saberes desde y hacia contextos diversos.

Es por lo anterior que el presente trabajo se desarrolla en una Institución Educativa Departamental de Subachoque, donde las obras de mejoramiento de escuelas y viviendas rurales, así como los cultivos y cercas de los potreros, ofrecen situaciones concretas —postes, vigas, pilares— para enseñar física desde el entorno<sup>1</sup>.

### **La ingeniería inversa como metodología puente en la enseñanza de la física**

En el día a día se experimenta la física de múltiples maneras. Cruzar una calle, mirar al cielo, palpar una superficie o chasquear los dedos —en definitiva, el movimiento y el estado de todo lo que nos rodea— puede ser explicado gracias a las leyes que rigen los fenómenos de los que somos constantemente actores. Sin embargo, si profundizamos en esa experiencia cotidiana, nos vemos obligados a cuestionar lo que solemos dar por sentado. Es aquí donde reside uno de los desafíos centrales de la enseñanza de la física: la desconexión entre la realidad de los fenómenos

---

<sup>1</sup> La caracterización detallada del contexto institucional y del grupo participante se presenta en el Capítulo III, apartado correspondiente a la descripción de la propuesta de aula.

que se experimentan —el peso de un objeto, la flexión de una viga, el calor de una llama— y el lenguaje abstracto con el que está escrito.

Como señalan D'Andrea et al. (2018), “los estudiantes no logran conectar las simbologías y las estructuras matemáticas de acuerdo a las representaciones verbales” (p. 13). Esto significa que los alumnos pueden aprender a manejar los símbolos de las ecuaciones, pero no comprenden su relación con las descripciones en lenguaje común ni con los fenómenos reales que representan. Esta brecha es particularmente crítica porque, en ocasiones, la enseñanza se centra en la manipulación de ese lenguaje formal —las ecuaciones, los símbolos— dejando en un segundo plano sus vínculos con la experiencia tangible. Queda fuera todo aquello que subyace a una ecuación: las condiciones históricas y experimentales que hicieron posible su descubrimiento, el diálogo entre distintas áreas del conocimiento que permitió su desarrollo o sus límites de aplicabilidad.

Este problema de desconexión ha sido abordado por Raymond Duval (2009), quien desarrolló la Teoría de los Registros de Representación Semiótica. Duval sostiene que comprender un concepto científico no implica solo manejar un sistema simbólico, sino poder cambiar de registro de representación. Un registro es un sistema de signos propio de un lenguaje: el lenguaje natural (palabras), el lenguaje gráfico (diagramas, dibujos), el lenguaje algebraico (ecuaciones, símbolos) o la experiencia concreta (el fenómeno observable). Comprender, entonces, exige poder traducir un mismo fenómeno a través de estos distintos registros —por ejemplo, describir con palabras la flexión de una columna, representarla mediante un esquema, expresarla con una ecuación y observar el fenómeno físico real— estableciendo correspondencias entre todos ellos.

El problema, según Duval, es que en la enseñanza "siempre es la discriminación de esas unidades significantes lo que falta" (Duval, 2009, p. 99). Es decir, los estudiantes no identifican qué elementos del enunciado, del gráfico o de la ecuación corresponden entre sí y, sobre todo, cómo se vinculan con el fenómeno concreto. Duval demuestra que cuando hay congruencia entre registros —los signos se corresponden uno a uno, las operaciones son las mismas y el orden se conserva— los estudiantes resuelven correctamente hasta en un 90% de los casos. Pero cuando no la hay, las tasas de fracaso se disparan (Duval, 2009, p. 78). El reto fundamental para el docente, por tanto, no es solo enseñar el lenguaje abstracto, sino construir puentes explícitos y significativos que conecten la ecuación en el pizarrón con el fenómeno en el mundo, demostrando que aquella es la traducción rigurosa y necesaria de este.

Detrás de esta dificultad subyace, además, una concepción errónea sobre qué es una ecuación. Una ecuación es mucho más que una colección de símbolos abstractos; es el compendio final de una vasta y compleja interacción de saberes. Cada variable es la abreviatura de un concepto en constante depuración, cada constante encierra un valor fundamental de la naturaleza y cada operador describe una relación causal o probabilística probada una y otra vez. Este lenguaje matemático alcanza su expresión más significativa en la física. Cuando esta rama de la ciencia — que estudia fenómenos naturales como la materia, la energía, el espacio y el tiempo— aplica ese lenguaje, convierte la abstracción simbólica en una ecuación del mundo. Así se demuestra que las ecuaciones no son meros artificios formales, sino herramientas fundamentales para comprender la realidad.

Si el problema es la desconexión entre registros y la falta de discriminación de sus unidades, y si la ecuación no es un punto de partida sino la síntesis de un proceso, entonces se hace evidente la necesidad de idear metodologías de enseñanza que construyan deliberadamente el puente entre el fenómeno observable y la ecuación física que lo describe. El quehacer docente ha cambiado para responder a este imperativo, pasando desde un modelo tradicional —donde el docente era la autoridad única y el estudiante un receptor pasivo cuya formación dependía de "la resolución y memorización de fórmulas y leyes" (Martínez Valcárcel, 2023, p. 13)— hacia enfoques que priorizan la construcción activa del conocimiento.

Esta transición se sustenta en el paradigma constructivista, el cual representó un cambio fundamental al entender que "los alumnos son creadores y constructores de sus propios conocimientos y destrezas" (Martínez Valcárcel, 2023, p. 8). En este modelo, el maestro actúa como guía, facilitando que el estudiante confronte sus ideas previas y desarrolle un pensamiento crítico. En coherencia con este principio, los enfoques contemporáneos —como el aprendizaje por indagación y basado en proyectos— buscan fomentar la autonomía y la aplicación del saber. Estos métodos reconocen que "no hay modelo capaz de hacer frente a todos los tipos y estilos de aprendizaje" (Martínez Valcárcel, 2023, p. 4), por lo que la competencia docente reside en la flexibilidad para adaptar y combinar diferentes estrategias.

Es precisamente dentro de este contexto donde la ingeniería inversa surge como una metodología pertinente. Su pertinencia radica en que parte del entorno mismo del estudiante, analizando un objeto concreto para comprender y descomponer las características que este presenta. Al aplicarla, se logra vincular de manera coherente el entorno, el objeto, los principios

físicos subyacentes y la ecuación que lo describe, materializando así el puente necesario entre la experiencia práctica y la abstracción teórica. De este modo, la ingeniería inversa encarna el principio de Duval: exige, para su comprensión plena, poder traducir un mismo fenómeno a través de los distintos registros de representación.

### **Ingeniería inversa aplicada a la ecuación de Euler**

Al buscar la definición y el propósito de la ingeniería inversa de manera general, se encuentra que, "estudia o analiza un producto accesible al público [...] con el fin de conocer detalles de su diseño, construcción y operación" (Ramos Acosta, 2013, p. 1). Y su nombre proviene de su forma de proceder para analizar o estudiar el producto, ya que

..parte de un producto terminado, el cual se analiza minuciosamente con el objetivo de encontrar el porqué de cada detalle de construcción y funcionamiento, opuesto a los procesos de ingeniería los cuales inician con unas necesidades o requerimientos y finalizan con un producto. (Ramos Acosta, 2013, p. 1)

En este sentido, la ingeniería inversa busca analizar las partes que componen el objeto y cómo se interrelacionan para conocer su funcionamiento, partiendo del objeto terminado y no de los requisitos que darán como resultado el producto.

La siguiente definición está más enfocada hacia las tecnologías, y contiene un elemento importante:

La ingeniería inversa es una técnica de análisis, a partir de la observación e inspección de dispositivos tecnológicos, con el fin de determinar sus principios de funcionamiento, las partes, los mecanismos, los sistemas, la programación y demás elementos que permitirán caracterizar el artefacto o dispositivo tecnológico, que está siendo objeto de estudio (E. J. López et al., 2010, citado en Pérez Jácome, 2022, p. 30).

Esta definición, que enfatiza su aplicación en productos tecnológicos, incorpora un elemento importante al reconocer que puede orientarse hacia los programas vinculados a dichos productos. Por lo tanto, no se limita exclusivamente al hardware, sino que también incluye el software. Es decir, no se restringe a objetos cuyo funcionamiento es puramente mecánico, sino que se extiende a aquellos que requieren procesamiento de datos mediante una estructura lógica y algorítmica. De este modo, si se aplicara este enfoque a los resultados de una ecuación, su proceder sería válido. Si mediante este proceso se logran identificar las variables que determinan los resultados, se seguiría aplicando la ingeniería inversa. No obstante, el verdadero potencial de este

enfoque se alcanza al profundizar en el porqué de la relación entre dichas variables y en cómo se articulan dentro de la ecuación.

Como se ha mencionado, hemos pasado de objetos a datos y, además, establecido que estos pueden provenir de una ecuación; esto permite establecer que la ingeniería inversa puede aplicarse a sistemas, ya sean materiales o abstractos. Sin embargo, dado que el enfoque aquí considerado tiene como objeto la ecuación de Euler para el pandeo de columnas <sup>2</sup>—y no los datos que de ella se derivan, como antes se sugirió—, resulta fundamental la observación de Jiménez López et al. (2010), quienes señalan: “la Ingeniería Inversa no tiene una definición única y, por lo tanto, cada autor le da un sentido diferente” (p. 2). En la misma línea, Monroy et al. (2024) afirman: “La ingeniería inversa se realiza en múltiples contextos. [...] definido por un grupo de participantes, un conjunto de recursos y situaciones que se encuentran dentro de un ámbito específico. Existen múltiples propuestas para realizar ingeniería inversa” (p. 1).

Estos planteamientos resultan relevantes, ya que, por un lado, se reconoce que no existe una definición única de ingeniería inversa, que su aplicación depende del contexto y que cada autor le otorga su propio sentido y termina diciendo que existen múltiples propuestas para realizar ingeniería inversa. Esta flexibilidad conceptual permite utilizar la ingeniería inversa para desarmar la ecuación de Euler para el pandeo de columnas en sus partes o piezas, tal como si se desmonta un mecanismo para comprender su funcionamiento interno.

En consecuencia, la ingeniería inversa aplicada a la ecuación de Euler para el pandeo sigue las siguientes etapas: comienza con las experiencias cotidianas del estudiante, pasa por la exploración intuitiva de los factores que afectan el pandeo, introduce la ecuación como síntesis formal de esas relaciones, la desglosa mediante experimentación para conectar la práctica con la teoría, y culmina integrando todos los elementos para lograr una comprensión.

### **Ecuación de Euler para el pandeo de columnas**

La ecuación de Euler<sup>3</sup> para el pandeo de columnas, en términos simples, permite predecir la carga máxima que una columna (una varilla, un palo de escoba, un espagueti, etc.), sometida a

---

<sup>2</sup> A lo largo de este trabajo de grado, y para facilitar la lectura, no se escribirá en su forma completa, sino que se hará referencia a ella mediante términos como "la ecuación de Euler" o expresiones equivalentes, manteniendo siempre el contexto que permita identificarla claramente.

<sup>3</sup> El análisis detallado de la ecuación de Euler para el pandeo de columnas se aborda en el Capítulo II de este trabajo de grado.

una fuerza de compresión, puede soportar antes de doblarse o pandearse de golpe. Para ello, la ecuación considera la rigidez del material, la forma de la sección y la longitud de la columna.

Desde su aplicación práctica en ingeniería civil, estructural y mecánica hasta su uso pedagógico en el aula, esta ecuación sirve como un puente fundamental entre la teoría y la realidad. Precisamente, esta integración entre vivencias y teoría es la que establece una relación dinámica entre experiencia, lenguaje y conocimiento: al partir de experiencias concretas y ampliarlas, se facilita la interpretación del lenguaje abstracto de las ecuaciones, lo que a su vez permite construir y reconstruir el conocimiento.

### **Experiencia**

A través de las vivencias se adquieren las experiencias. De esta manera los estudiantes adquieren lo que constituirá la base de su conocimiento del mundo. El estudiante que observa el paso de los automóviles por una carretera, el caer de un lápiz del escritorio o la demolición de una edificación, construye significados que luego se abordarán en clase. Como señalan Arcà, Guidoni y Mazzoli (1990), "...estos significados existen en la experiencia de las personas: existen, y son utilizados (por suerte) mucho antes de que cualquiera de nosotros, los enseñantes, los discutamos en clase" (p. 3). Los autores destacan, además, que los niños y los jóvenes poseen redes de conocimiento sofisticadas y organizadas que deben ser consideradas por los docentes. En palabras de Arcà et al. (1990), "...hay estructuras de conocimiento de una complejidad insospechada, con las que nos enfrentamos a menudo inconscientemente, pero que como enseñantes debemos tener conscientemente presentes" (p. 5).

Estas estructuras trabajan activamente para mantener y relacionar múltiples vivencias, incluso aquellas que a primera vista parecen inconexas. Los autores lo expresan de la siguiente manera:

"No es verdad que los jóvenes y los niños tengan conocimiento únicamente de fragmentos del mundo, a la espera de que los adultos los reordenen: siempre hay en funcionamiento un esfuerzo enorme por construir redes que mantengan juntos hechos diversos [...] y este esfuerzo por comprender y explicar los hechos existe ya en los jóvenes, de una manera tan intensa como el deseo de vivir" (Arcà et al., 1990, p. 6).

Por este motivo, el punto de partida de cualquier proceso de enseñanza debe ser la experiencia que forma parte de la red de conocimiento del estudiante. En el caso del estudio de la ecuación de Euler para el pandeo de columnas, es pertinente identificar las estructuras presentes

en las edificaciones que hacen parte de la cotidianidad del estudiante: la escuela que frecuentan, la casa en la que habitan, el hospital que ha visitado, las maquetas que han diseñado o, incluso, la vivienda que algunos han ayudado a construir.

Cabe mencionar que el término “columna” remite a diversos significados: la columna editorial, la columna vertebral o la columna de una hoja de cálculo. En este sentido es tarea del docente orientar estas asociaciones hacia ejemplos pertinentes, como las columnas ya visibles en la construcción del Metro de Bogotá (Imagen 1).

*Imagen 1 Primeras columnas fundidas del viaducto del metro de Bogotá*



*Fuente: Tomado y Adaptado de Empresa Metro de Bogotá (2024)*

## **Lenguaje**

El lenguaje construye el puente entre la experiencia y la formalización del conocimiento. Permite conectar las situaciones vividas y generar preguntas que ayudan a identificar las características de los fenómenos, preámbulo necesario para profundizar en su comprensión. En este sentido, se puede invitar a los estudiantes a reflexionar en torno a las columnas: ¿qué sucedería si se aumenta o se disminuye su diámetro?, ¿si se cambia el material?, ¿si su forma pasa de cilíndrica a cúbica? Tales interrogantes abren el camino para analizar la capacidad de carga de determinada columna en diferentes escenarios —desde las patas de una mesa hasta una regla o un lápiz, si estos se someten a compresión—, vinculando así la experiencia con el razonamiento físico.

Arcà et al. (1990) explican que “Toda esta estructura de experiencia también se sintetiza y formaliza en el lenguaje común según una ‘lógica de las relaciones de orden’, en la que se reconocen variables como el tiempo o la cantidad de un material” (p. 6). A este tipo de relaciones las denominaremos, de aquí en adelante, relaciones de orden.

En otras palabras, la lógica de las relaciones de orden permite establecer relaciones intuitivas —por ejemplo: si se tiene una mayor cantidad de agua, se necesita más tiempo para hervir que con una menor cantidad; que, a mayor altura, el agua hierve a menor temperatura; o que con más fuego el calentamiento ocurre más rápido—. Las relaciones de orden son una estructura de experiencia que se sintetiza en el lenguaje común y que permite establecer comparaciones intuitivas y cualitativas entre variables. Esta lógica funciona bien cuando se considera el efecto de una sola variable a la vez.

En consecuencia, como mencionan los mismos autores, este tipo de relaciones alcanza su límite cuando se modifican varias variables a la vez, como al "aumentar a la vez la cantidad de agua y la intensidad del fuego" (Arcà et al., 1990). En tales casos, se requiere de un lenguaje más potente que permita crear una estructura formal más compleja, con la cual se pueda representar o entender adecuadamente lo que ocurre: a esto se le llamará relaciones complejas.

Por lo tanto, las relaciones complejas se vuelven necesarias cuando varias variables interactúan simultáneamente. Para ello, se requiere un lenguaje más potente, que permita crear una estructura formal para representar esa complejidad. Según Arcà et al. (1990), ese lenguaje más potente es el álgebra.

Pero hay que reconocer que ese lenguaje potente no es ajeno a la experiencia, sino que son expresiones simbólicas que condensan relaciones observables en la realidad. En este marco, la ecuación de Euler para el pandeo de columnas se presenta como una forma avanzada de lenguaje que, aunque compleja o no convencional, se vincula con las vivencias del estudiante si se conecta con situaciones concretas y familiares.

Por consiguiente, si se parte de las relaciones de orden —relaciones intuitivas— y, mediante integraciones de la tríada lenguaje, conocimiento y experiencia, se puede avanzar hacia relaciones complejas que se expresan mediante ecuaciones. Esto permite que tales expresiones no se reduzcan a sustituir variables por números y operar, sino que faciliten comprender los fenómenos físicos que subyacen en ellas.

## **Conocimiento**

El conocimiento no surge de la experiencia aislada: se construye progresivamente a partir de la experiencia y del lenguaje. Esta construcción puede compararse con una escalera de conceptos: cada escalón representa una noción simple que, al integrarse con otras, da lugar a una comprensión más profunda. Arcà et al. (1990) señala que "...no se trata tanto de saber entrar por

el camino correcto y recorrerlo hasta cierto punto, sino encontrar criterios que nos permitan avanzar, organizando el propio territorio, dominando los recursos disponibles y ampliando nuestras posibilidades” (p. 6).

Desde esta perspectiva, al generar experiencias que permitan establecer conexiones con la ecuación de pandeo de Euler, se invita a los estudiantes a formular preguntas como: ¿cómo se relaciona esto con lo que ya sé? Se trata de interrogantes que tendrían como propósito integrar los nuevos conocimientos con los previos, lo que posiblemente favorecería una comprensión más profunda tanto del fenómeno físico como del lenguaje algebraico que lo describe. Así mismo, se reconocerían las limitaciones y el potencial de la ecuación de Euler, no sólo para ampliar las relaciones entre sus variables, sino también para fortalecer la apropiación del lenguaje formal de la física. Como explican Arcà et al. (1990), se construye conocimiento “...a través de un lenguaje hecho de palabras y de representaciones (y sin lenguaje no sería posible), se puede [...] construir y controlar algo (a lo que llamamos conocimiento) desprendido tanto de la experiencia como del lenguaje” (p. 7).

En consecuencia, los tres elementos —experiencia, lenguaje y conocimiento— se encuentran interrelacionados en un círculo recíproco en el que “...cada uno [...] ‘presupone’ de algún modo los otros dos...” (Arcà et al,1990, p. 6). Comprender esta relación es esencial para promover una enseñanza de la física que parta de la vivencia de las experiencias, se exprese mediante el lenguaje y aporte en la construcción del conocimiento.

### **Pregunta Problema y objetivos**

La ecuación de Euler para el pandeo de columnas es un claro ejemplo del desafío que tiene el docente al intentar enseñar ecuaciones construidas bajo múltiples capas de conocimiento que se interconectan entre sí; ya que es el "producto final" de una compleja relación de conocimientos de diferentes áreas, como los son: geometría, mecánica de materiales, cálculo, entre otras. El reto consiste, precisamente, en hacer visible algunos elementos de esa red de saberes que subyace a la aparente simplicidad de la ecuación; evitando que los estudiantes la perciban como un ente abstracto y descontextualizado, desconectado de fenómenos observables -como el pandeo de una regla o las columnas de un edificio.

Esta complejidad inherente a las ecuaciones dificulta que los estudiantes establezcan relaciones entre las variables presentes y su significado físico. Sin embargo, esta dificultad representa una oportunidad para implementar lo sugerido por el MEN (2006), que promueve

generar experiencias educativas vinculadas al entorno. Es aquí donde la ingeniería inversa emerge como metodología ideal, pues permite partir de las experiencias previas de los estudiantes, establecer qué parte del fenómeno físico se desea estudiar (la ecuación de Euler para el pandeo) para examinar sus componentes, sus piezas, sus partes y, así, construir el camino que conecta la observación del mundo con el lenguaje de las ciencias.

La aplicación de la ingeniería inversa materializa de manera ejemplar la tríada experiencia-lenguaje-conocimiento: los estudiantes parten de su experiencia con columnas en su entorno (el "saber hacer flexible" que menciona el MEN); lo asocian a un lenguaje matemático para formalizar las relaciones entre variables observadas; y construyen progresivamente el conocimiento físico al comprender cómo y por qué fallan las columnas bajo compresión. Este proceso transforma la ecuación de Euler: deja de ser una fórmula abstracta e incuestionable para convertirse en una herramienta práctica. Al aplicarla, se comprueba su capacidad para predecir resultados.

Frente a este desafío, se requiere entonces una propuesta de aula que, mediante la ingeniería inversa, permita a los estudiantes deconstruir el fenómeno del pandeo y conocer algunos elementos que lo subyacen. Esto permite plantear la siguiente pregunta de investigación.

### ***Pregunta de investigación***

¿Cómo puede la ingeniería inversa permitir a estudiantes de educación media comprender la ecuación de pandeo de Euler integrando experiencia práctica, lenguaje matemático y conocimiento teórico?

Para cumplir con esta pregunta se plantea un objetivo general.

Diseñar y sistematizar una propuesta de aula, utilizando la ingeniería inversa en el estudio de la ecuación de pandeo de Euler para las columnas, que integre la experiencia práctica, lenguaje y conocimiento de las estudiantes de educación media.

Para lograr el objetivo general, se proponen los siguientes objetivos específicos.

1. Analizar la ecuación de pandeo de Euler mediante ingeniería inversa conceptual para identificar y relacionar las variables físicas que la constituyen, así como las hipótesis que la sustentan.
2. Diseñar y desarrollar actividades con columnas de diferentes materiales, formas y longitudes para explorar los factores que influyen en su resistencia al pandeo.

3. Reconocer de qué manera los estudiantes integran la experiencia, el lenguaje y el conocimiento al estudiar las variables de la ecuación de pandeo de Euler durante las actividades de aula.

Desde esta perspectiva, la aplicación de la ingeniería inversa a una ecuación como la de Euler no solo representa una propuesta de aula, sino que sugiere implicaciones más amplias para la didáctica de la física. Por un lado, podría ofrecer una ruta metodológica transferible: descomponer un modelo físico en sus variables fundamentales para reconstruirlo desde la experiencia, un esquema que podría aplicarse a otras ecuaciones. Por otro lado, podría proponer una forma de llevar enfoques teóricos —como el que articula experiencia, lenguaje y conocimiento— a la práctica concreta, tendiendo puentes entre la reflexión epistemológica y lo que ocurre en el aula. En un contexto más amplio, esta aproximación también apunta a la posibilidad de democratizar el acceso a conceptos complejos de la física, al mostrar que pueden abordarse con recursos contextualizados. A partir de estos fundamentos, el presente trabajo se propone explorar, mediante el diseño y la sistematización de una propuesta de aula, si esta promesa metodológica puede hacerse realidad en el estudio del pandeo de columnas. Antes de ello, sin embargo, es necesario un paso previo: comprender a fondo la ecuación que se pretende enseñar, desmontando sus componentes y examinando las hipótesis que la sustentan. Ese es el propósito del siguiente capítulo.

## Capítulo II

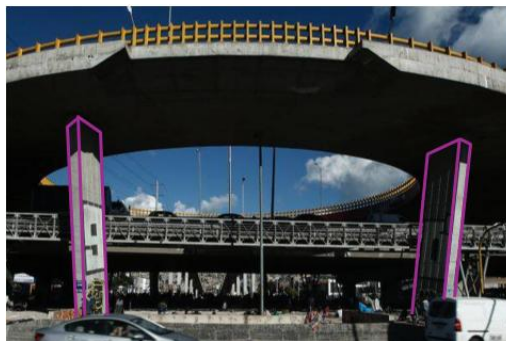
### El Rompecabezas del Pandeo: Ingeniería Inversa de la Ecuación de Euler

En este capítulo se estudia la ecuación de Euler para el pandeo de columnas mediante un enfoque de ingeniería inversa, descomponiendo su formulación como si fuera piezas de un rompecabezas para comprender los principios físicos y matemáticos que la sustentan. Se examinan sus variables, hipótesis y el proceso de deducción.

Cuando se analizan fenómenos que se expresan en un lenguaje de relaciones complejas y se requiere ir más allá de las relaciones simples para interpretar ecuaciones que integran múltiples variables —como la ecuación de Euler—, se hace necesario un método que permita descomponer su formulación y comprender los principios que la sustentan. Este enfoque es precisamente el que adopta la ingeniería inversa. Por lo tanto, se estudiará la ecuación de Euler mediante un enfoque de ingeniería inversa, partiendo de las columnas presentes en la cotidianidad para proseguir con el desglose de la ecuación y examinar sus piezas.

La ecuación de Euler para el pandeo de columnas es una de esas ecuaciones que todo ingeniero estructural termina usando, pero pocos se detienen a preguntarse ¿cómo se llegó a esta ecuación? No es solo una expresión matemática; detrás de ella hay un razonamiento físico matemático profundo que conecta conceptos como carga crítica, momento flector, deformación, etc. Y permite responder preguntas relacionadas con las estructuras, como: ¿qué material debe utilizarse?, ¿cuáles deben ser sus dimensiones?, ¿cuánta carga puede soportar sin pandearse?, entre otras.

*Imagen 2 Puente de la sexta con 30-Bogotá*



*Nota. Se observan las columnas presentes tanto en el puente vehicular como en el puente peatonal  
Fuente: Tomado y Adaptado de Colprensa. (2021).*

Cuando estas estructuras forman parte de la cotidianidad —como las presentes en el puente de la Sexta con 30 en Bogotá (Imagen 2)—, las preguntas pueden reformularse en términos de

experiencias vividas: ¿Qué tanto peso soporta las columnas del puente de la Sexta con 30? ¿Por qué en Bogotá las dimensiones de las columnas son aproximadamente de 400 mm de diámetro y 5 m de altura? o incluso, ¿En qué condiciones puede pandearse estas columnas?

La pregunta central es: ¿qué hay detrás de la ecuación de Euler para el pandeo? Para abordarla, se puede imaginar que la ecuación es un dispositivo complejo, un mecanismo —o incluso un rompecabezas— compuesto por una red de estructuras interconectadas. Para comprenderla, no basta con observar su forma final; es necesario desmontarla pieza por pieza, considerando que cada una de estas piezas puede estar, a su vez, conformada por subpiezas. Este proceso constituye la esencia de la ingeniería inversa.

### **Estudio de la Ecuación de Euler para el pandeo de columnas**

La primera pieza del rompecabezas será la revisión de la definición, ¿qué es una columna?, "las columnas son elementos estructurales largos y esbeltos, cargados axialmente en compresión" (Gere y Goodno, 2009, p. 819).

Esta definición permite poner de manifiesto, entre otras cosas, que la columna tiene que ser larga y que las cargas que soportan son axiales<sup>4</sup>; aspectos importantes dentro de los límites de aplicación de la ecuación de pandeo de Euler. Por ahora, solo se tendrá en cuenta qué implicaciones tiene la afirmación de que las columnas son estructuras largas. Para esto, revisaremos qué dicen Castro & Battaglia (2014):

Para una columna corta robusta, el valor de la carga de pandeo es superior a la que excede la resistencia directa a compresión (falla controlada por la resistencia del material). En los elementos que son más esbeltos, la falla puede ocurrir por pandeo (falla por inestabilidad), con una carga crítica de pandeo que se reduce con el incremento de la esbeltez (p. 250)

Lo que implica que, cuando una columna tiene poca altura en comparación con su sección transversal, su fallo ocurre porque el material no puede soportar la carga de compresión<sup>5</sup>. En este caso, el material es el factor que limita la carga y no se produce ningún pandeo.

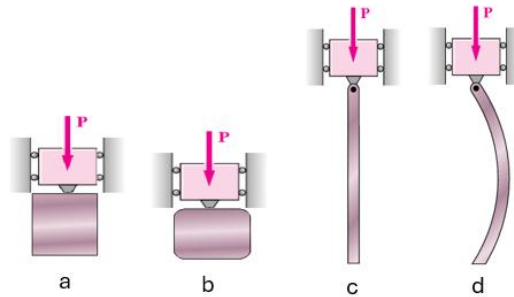
---

<sup>4</sup> Se denomina carga axial a aquella fuerza externa que actúa a lo largo del eje longitudinal de un elemento estructural, como una columna, ejerciendo compresión o tensión de manera concéntrica. En el contexto del pandeo, las columnas suelen diseñarse y analizarse considerando predominantemente cargas axiales de compresión, ya que es bajo este tipo de sollicitación donde el fenómeno de inestabilidad estructural (pandeo) se manifiesta críticamente.

<sup>5</sup> Carga de compresión: fuerza que se ejerce a lo largo del eje longitudinal de la columna, con dirección hacia su interior, buscando acortarla o comprimirla.

Por el contrario, si la columna tiene una altura considerable en comparación con su sección transversal, esta puede fallar por una inestabilidad estructural: se pandea (Imagen 3). Esto quiere decir que cuanto más larga y esbelta sea la columna, menor carga podrá soportar antes de pandearse.

**Imagen 3** Columnas con alturas y secciones transversales diferentes sometidas a cargas



*Nota.* Las figuras (a) y (b) muestran una misma columna corta (poca altura respecto a su sección transversal): (a) sin carga y (b) bajo carga. Las figuras (c) y (d) corresponden a una misma columna esbelta (mayor altura): (c) sin carga y (d) bajo carga.

*Fuente:* Tomado y Adaptado de Beer, F. P., Johnston, E. R., DeWolf, J. T. & Mazurek, D. F. (2010)

Al avanzar en la siguiente pieza de este rompecabezas, encontramos que la ecuación de Euler para el pandeo de columnas es la siguiente:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(kL)^2} \quad (1)$$

Es fundamental comprender el significado de cada variable en la ecuación, pues representan parámetros estructurales concretos que determinan la resistencia al pandeo. Por ello, se definirán estas variables para establecer la relación entre la formulación matemática y el comportamiento real.

- ✓ Carga crítica de pandeo ( $P_{cr}$ ), es la máxima fuerza, carga o peso de compresión que soporta la columna sin pandearse.
- ✓ Módulo de elasticidad del material, Modulo de Young ( $E$ )

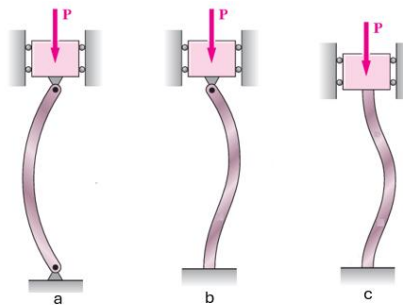
Es un parámetro característico de cada material que indica la relación existente en la zona de comportamiento elástico de dicho material entre los incrementos de tensión aplicados en el ensayo de tracción y los incrementos de deformación relativa producidos. [...] Para un material elástico lineal e isótropo, el módulo de Young tiene el mismo valor para una tracción que para una compresión, siendo una constante independiente del esfuerzo

siempre que no exceda de un valor máximo denominado límite elástico. (Vélez Moreno, 2008, p. 120)

Dicho de otra manera, el módulo de Young es una propiedad de cada material que cuantifica la relación entre los esfuerzos de compresión o tracción y las deformaciones generadas en su fase elástica lineal. Esta constante determina la rigidez del material, manteniendo un valor constante hasta que se alcanza el límite elástico

- ✓ El factor de longitud efectiva ( $K$ ) determina la resistencia al pandeo de una columna según sus condiciones de apoyo, tomando los siguientes valores característicos:  $K = 1$  cuando ambos extremos están articulados (permitiendo giro),  $K = 0.5$  si los extremos están empotrados (totalmente fijos), y  $K = 2$  para el caso de un extremo libre con otro empotrado, como ocurre en un poste de bandera (Imagen 4).
- ✓ Momento de inercia ( $I$ ) es una propiedad geométrica que depende de la sección transversal de la columna y cuantifica su resistencia a la flexión, dicho de otra manera, mide la resistencia a cambiar su forma recta (a iniciar la flexión/pandeo).

**Imagen 4** Columnas con diferentes puntos de apoyo



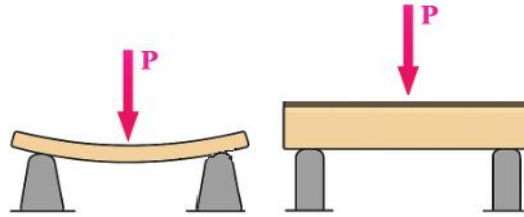
*Nota. (a)  $K = 1$  cuando ambos extremos están articulados esto permitiendo giro, (b)  $K = 2$  para el caso de un extremo libre con otro empotrado, como ocurre en un poste de bandera. (c)  $K = 0.5$  si los extremos están empotrados como el caso de las columnas de puente.*

*Fuente: Tomado y Adaptado de Beer, F. P., Johnston, E. R., DeWolf, J. T. & Mazurek, D. F. (2010)*

Un ejemplo común utilizado en resistencia de materiales es imaginar dos reglas totalmente idénticas colocadas de manera horizontal, sostenidas por sus extremos: una de canto (sobre su borde más delgado) y otra plana (sobre su cara más ancha). La regla que está plana se flexiona fácilmente y se pandea con poco peso, mientras que la que está de canto, con el mismo peso aplicado, presenta una resistencia significativamente mayor al pandeo debido a su mayor momento de inercia en esa configuración. (Imagen 5)

- ✓ Longitud de la columna ( $L$ ) que tan larga es la columna.

*Imagen 5 Ejemplo de las reglas con diferente momento de inercia totalmente iguales*



*Nota. Regla colocada de forma plana a la izquierda y regla colocada de canto a la derecha.*

Al seguir ahondando en el desglose de la ecuación de Euler, se identifica que esta está sujeta a un conjunto de hipótesis que establecen las suposiciones bajo las cuales fue construida, así como las características teóricas que debe cumplir el material, con el cual está fabricada la columna. Como ejemplo de ello, se puede encontrar las siguientes seis hipótesis señaladas por Bernal, J. R. (2005):

- Las secciones<sup>6</sup> que son inicialmente planas se mantienen planas hasta la rotura.
- Las deformaciones longitudinales que sufre la pieza al ser cargada resultan despreciables frente a sus dimensiones geométricas.
- La pieza es de sección constante y eje recto<sup>7</sup>.
- La carga aplicada es centrada, la recta de acción coincide con el eje de la pieza.
- El material se comporta como perfecta y linealmente elástico, durante todo el proceso de carga.
- El material es isótropo, continuo y homogéneo. (p.58)

Estas hipótesis son importantes ya que representan el ideal de las características que debe tener el material para la fabricación de la columna y que tuvo Euler al plantear su ecuación. Además, ofrecen una perspectiva comparativa entre la teoría y la realidad. Esta idea la expresa Bernal (2005) al escribir: “Estas hipótesis, como vemos, responden a un material ideal y teórico, que se encuentra muy lejos de la realidad [...], dado que no cumple prácticamente ninguna de las condiciones anteriores” (p. 58).

---

<sup>6</sup> Las secciones son los cortes transversales de la columna que, según Euler, permanecen planas y sin deformarse durante el pandeo.

<sup>7</sup> La columna mantiene igual forma y tamaño a lo largo de su longitud, y su eje central es recto antes de aplicar la carga.

Lo que evidencia la distancia existente entre las consideraciones teóricas de lo que debe ser el material y las condiciones reales que presentan las columnas, y, a su vez, permite comprender las limitaciones inherentes de la ecuación.

Aunque estas no son las únicas hipótesis que aparecen en la literatura, algunas de ellas se orientan más al desarrollo matemático de la ecuación de Euler para columnas que a las características de los materiales de fabricación. Tal es el caso de las planteadas por Martínez (2004):

1. Viga recta.
2. Material homogéneo e isótropo.
3. Comportamiento lineal elástico del material (Ley de Hooke)
4. Rodillo y apoyo en los extremos.
5. Sección orientada de manera que la viga flexione alrededor del eje con momento de inercia mínimo. (p. 349)

Aunque en la literatura existen diversas formulaciones de las hipótesis asociadas a la ecuación de Euler —algunas orientadas al desarrollo matemático y otras a las características del material—, es de considerar que todas buscan idealizar el comportamiento de la columna. En este trabajo se adoptará el siguiente conjunto de hipótesis<sup>8</sup>, con el objetivo de analizar su conexión con el desarrollo teórico que permiten establecer los fundamentos que sustentan la ecuación de Euler.

- H1. El material es homogéneo e isótropo.
- H2. La carga es axial (actúa exactamente sobre el eje de la columna).
- H3. La columna está libre de tensiones - esfuerzos iniciales.
- H4. Se desprecia el peso propio de la columna.
- H5. La columna es inicialmente recta.
- H6. Las deformaciones son pequeñas

Esta nueva pieza analiza la conexión entre las hipótesis planteadas y el desarrollo teórico de la ecuación de pandeo de Euler. Para ello, se realiza el seguimiento a los párrafos introductorios de Fitzgerald<sup>9</sup> (1996) sobre la ecuación de Euler. Así, esta pieza explora cómo los cimientos

---

<sup>8</sup> El desarrollo detallado de estas hipótesis continuará más adelante en este mismo capítulo: Análisis de las hipótesis en la ecuación de pandeo de Euler.

<sup>9</sup> La elección del texto de Fitzgerald (1996) responde a un criterio metodológico antes que temático. Dado que el objetivo de esta cuarta pieza es el de analizar la conexión entre las hipótesis de base y el desarrollo teórico —más que evaluar o comparar fuentes—, se seleccionó este texto como un caso demostrativo.

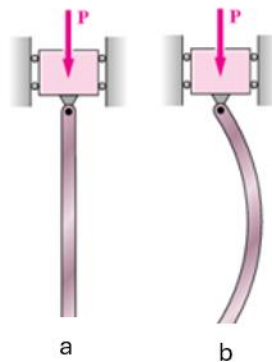
conceptuales no solo permiten la formulación de la ecuación, sino que también establecen la restricción de su aplicación a los casos que se ajustan a dichas hipótesis.

Como se ha mencionado, una columna se define como un elemento estructural que soporta cargas de compresión axial. Como señala Fitzgerald (1996):

Esta carga puede ser concéntrica (aplicada a lo largo del eje centroidal) o excéntrica (aplicada paralelamente al eje del miembro centroidal, pero a cierta distancia del mismo). [...] Si se aplicara una fuerza de compresión gradualmente creciente a la barra larga, fallaría porque se presentaría repentinamente una gran deflexión lateral. Esta deflexión lateral, llamada pandeo, es producida por la inestabilidad de la barra cuando se alcanza una cierta carga crítica. (p. 256).

La imagen (6) muestra la misma columna en dos momentos (a) sin carga aplicada y (b) sometida a una carga crítica en el eje centroidal.

**Imagen 6** Columna antes y después de someterse a una carga axial



*Nota. Las figuras (a) y (b) corresponden a una misma columna esbelta: (a) sin carga y (b) bajo carga.  
Fuente: Tomado y Adaptado de Beer, F. P., Johnston, E. R., DeWolf, J. T. & Mazurek, D. F. (2010).*

Al examinar los párrafos que escribe Fitzgerald se identifican varias relaciones con las hipótesis establecidas:

- La mención de "carga de compresión axial" se relaciona directamente con H2 (carga axial)
- La referencia a una "barra larga" que presenta "deflexión lateral" implica H5 (columna inicialmente recta)
- La descripción del pandeo como consecuencia de una "carga crítica" supone H6 (comportamiento en régimen de pequeñas deformaciones)

Para precisar las condiciones en las cuales se encuentra la columna, Fitzgerald (1996) especifica:

"Consideremos una columna soportada en sus dos extremos por articulaciones y sometida a una carga axial P. Supongamos que esta columna inicialmente es recta, homogénea, y de sección transversal constante en toda su longitud. También debe suponerse que el material de que está hecha la columna se comporta elásticamente. Es decir, se aplica la Ley de Hooke y los esfuerzos son inferiores al límite de proporcionalidad del material" (p. 258)

El párrafo anterior revela múltiples correspondencias con hipótesis previamente definidas, como se muestra en la tabla (1).

**Tabla 1** Condiciones que debe cumplir una columna.

| Hipótesis | Fragmento del párrafo   | Relación con la hipótesis   |
|-----------|---|---|
| H2        | "Consideremos una columna soportada en sus dos extremos por articulaciones y sometida a una carga axial P." (Fitzgerald, R. W. ,1996, p. 258)   | Indica que la carga es axial.   |
| H5        | "Supongamos que esta columna inicialmente es recta" (Fitzgerald, R. W. ,1996, p. 258)   | Declara que la columna no presenta curvatura inicial.   |
| H1        | "homogénea, y de sección transversal constante en toda su longitud" (Fitzgerald, R. W. ,1996, p. 258)   | Describe un material con propiedades uniformes (homogeneidad) y geometría constante.  |
| H6        | "el material de que está hecha la columna se comporta elásticamente. Es decir, se aplica la Ley de Hooke y los esfuerzos son inferiores al límite de proporcionalidad del material" (Fitzgerald, R. W. ,1996, p. 258) | Confirma que las deformaciones son pequeñas y proporcionales a los esfuerzos, dentro del rango de validez de la ley de Hooke. |

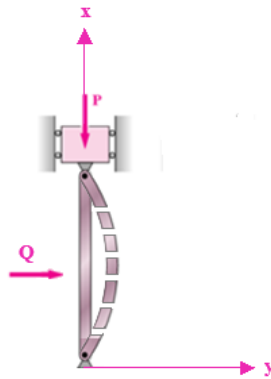
*Nota. Condiciones que debe cumplir una columna y su relación con las hipótesis.*

Al integrar estos conceptos, cuando una barra es sometida a una carga axial creciente [H2], su comportamiento permanece estable dentro de ciertos límites. Fitzgerald (1996) explica:

suponga que la carga axial P parte de un valor bajo y se incrementa gradualmente de magnitud. Si se aplica una pequeña fuerza lateral Q, la barra se deformará lateralmente una pequeña cantidad. Si se quita Q, la barra regresará a su configuración recta. (p. 258)

Esto indica que, inicialmente, la columna se comporta elásticamente [H6] y recupera su forma original. Sin embargo, al aproximarse a un valor crítico, el comportamiento cambia significativamente. (Imagen 7)

**Imagen 7** Columna sometida a una fuerza lateral o sometida a una carga axial  $P$

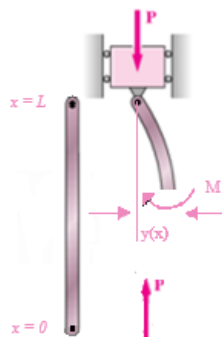


*Nota. Columna en equilibrio neutro entre el colapso y la recuperar su forma.*  
*Fuente: Tomado y Adaptado de Beer, F. P., Johnston, E. R., DeWolf, J. T. & Mazurek, D. F. (2010) y Fitzgerald, (1996)*

Este valor crítico corresponde a la carga crítica de pandeo. Según Fitzgerald (1996), "la barra deformada no regresará a su posición recta cuando la carga axial  $P$  sea de un valor particular, llamado la carga crítica de pandeo" (p. 258) [H5]. En este punto crítico, la estructura alcanza equilibrio neutro: "la barra se deformará debido a la pequeña carga lateral  $Q$ , pero conservará la posición deformada cuando se quita  $Q$ " (Fitzgerald, 1996, p. 258) [H6]. En esta situación límite, mínimas variaciones en la carga producen efectos opuestos: una reducción leve permite recuperar la forma recta, mientras que un pequeño incremento conduce al colapso.

Una vez iniciado el pandeo, la desviación lateral se describe mediante la función  $y(x)$ , que cuantifica el desplazamiento perpendicular a lo largo de la columna, desde  $x = 0$  hasta  $x = L$  (Imagen 8).

**Imagen 8** Representación de la deflexión de la columna, la carga axial y el momento flector.



*Nota. La carga axial que actúa sobre una columna recta y perfectamente centrada genera un momento flector en la medida en que la columna presenta deflexión lateral.*  
*Fuente: Tomado y Adaptado de Beer, F. P., Johnston, E. R., DeWolf, J. T. & Mazurek, D. F. (2010) y Fitzgerald, (1996)*

Al producirse la deformación, la carga axial P, originalmente centrada [H2], genera un momento flector<sup>10</sup> M(x) debido a la excentricidad creada por la deflexión y(x) [H5]. Este momento es fundamental porque, aunque se opone al crecimiento de la deformación, simultáneamente incrementa la inestabilidad del sistema [H6]. Desde la perspectiva del equilibrio, el eje de carga deja de coincidir con el eje geométrico, generando un par descrito en la ecuación (2) que afecta directamente el equilibrio de momentos a lo largo de la columna. (Tabla 2)

*Tabla 2 Relación entre el momento flector y las hipótesis*

| Hipótesis | Fragmento del texto   | Relación con la hipótesis   |
|-----------|---|---|
| H2        | la carga axial P, que originalmente actuaba de forma centrada                                     | una carga axial perfectamente alineada con el eje centroidal de la columna.                                 |
| H5        | genera un momento flector M(x) debido a la excentricidad introducida por la deflexión y(x)        | la columna era inicialmente recta, y que cualquier excentricidad es consecuencia de la carga.               |
| H6        | se opone al crecimiento de la deformación, pero por otro, incrementa la inestabilidad del sistema | Se establecen deformaciones pequeñas hasta que ocurre el pandeo, es decir, justo antes de la inestabilidad. |

*Nota. Momento flector y las hipótesis.*

La relación fundamental entre la carga P y el momento M(x) se expresa como:

$$M(x) = -Py(x) \quad (2)$$

El signo negativo responde a la convención de ejes coordenados seleccionada. Como explica Fitzgerald (1996): "Se usa el signo menos debido a los ejes coordenados elegidos. Estos ejes, y, por consiguiente, el signo menos para el momento flexionante, se eligen para simplificar la solución matemática del problema" (pp. 258-259). Esta decisión es consecuencia de una decisión práctica: la elección de un sistema de referencia específico para simplificar los cálculos. El signo negativo, por tanto, no describe una propiedad física inherente.

Continuemos con otra pieza del rompecabezas: la relación entre el momento flector y la curvatura de la columna. Este vínculo se establece mediante la ley de flexión de Euler-Bernoulli, que para el caso de pequeñas deformaciones [H6] expresa que la curvatura  $\kappa(x)$  es aproximadamente igual a la segunda derivada de la deflexión:

<sup>10</sup> Un momento flector, es exactamente lo mismo que un momento estático o momento en general, [...], pero lo designamos con el nombre de momento flector, cuando se aplica a una pieza constructiva, losa, columna, jácena, o barra de una estructura, produciendo una flexión de la misma (Rodón, 1979, p. 23). El momento de fuerza (o torque) es una magnitud que cuantifica la capacidad de una fuerza para producir rotación o torsión alrededor de un eje. Para esta es necesario el vector fuerza producto cruz vector de posición desde el eje de rotación.

$$\kappa(x) \approx \frac{d^2y}{dx^2} \quad (3)$$

y es directamente proporcional al momento flector según:

$$\kappa(x) = \frac{M(x)}{EI} \quad (4)$$

Donde E corresponde al módulo de elasticidad del material [H1] e I corresponde al momento de inercia de la sección transversal [H1], siendo EI la rigidez flexional de la columna.

La relevancia de esta relación consiste en integrar el comportamiento mecánico del material (a través de E) con la geometría de la sección (I) y la deformación experimentada. Al sustituir la expresión del momento flector de la ecuación (2) en la ecuación (4), obtenemos:

$$\kappa(x) = \frac{-Py(x)}{EI} \quad (5)$$

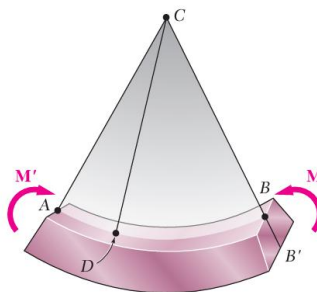
Relacionando ahora las ecuaciones (3) y (5), llegamos a la ecuación diferencial fundamental del pandeo:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{Py(x)}{EI} = 0 \quad (6)$$

Esta ecuación, aparentemente simple, encapsula completamente el fenómeno del pandeo, mostrando cómo la carga axial P afecta la curvatura de la columna.

Para comprender el origen de los términos en la ecuación (6), es esencial rastrear el desarrollo de las ecuaciones (3) y (4).

**Imagen 9** Columna sometida a los pares M y M'



*Nota. Columna sometida a los pares M y M'.*

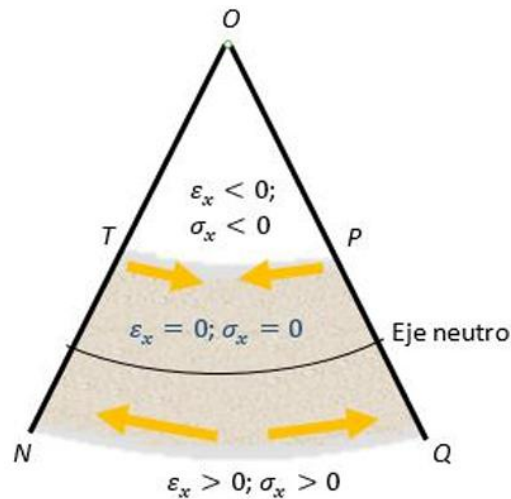
*Fuente: Tomado Beer et al., 2010, p.213.*

La demostración de la ecuación de Euler-Bernoulli se fundamenta en examinar las deformaciones y esfuerzos en una columna bajo flexión pura, con pares iguales y opuestos M y M' en sus extremos (Imagen 9). Como describe Beer et al. (2010), un elemento originalmente recto se

curva uniformemente, donde "la línea AB, que era originalmente recta, se transformará en un círculo de centro C" y "la línea AB se acortará mientras A'B' se alargará" (p. 213) debido a la flexión.

Esta deformación gradual —compresión en la fibra superior (AB) y tensión en la inferior (A'B')— permite inferir la existencia de una superficie donde no hay deformación ni esfuerzo<sup>11</sup>: el eje neutro (Imagen 10).

**Imagen 10** Eje neutro de la columna al ser sometido a flexión



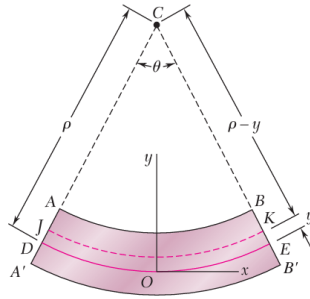
*Nota. Zonas de deformaciones, esfuerzos y eje neutro*

*Fuente: Tomado de la adopción realizada por Garzón Quiroga (2021) a Kassimali, (2015).*

Beer et al. (2010) establecen que "la deformación y el esfuerzo son nulos" en la superficie neutra y que "la deformación unitaria longitudinal normal varía linealmente con la distancia y desde la superficie neutra" (p. 215). En otras palabras, el eje neutro no se alarga ni se acorta (deformación nula), ni tampoco está comprimido ni tensionado (esfuerzo nulo). Además, establecen que la deformación varía de manera proporcional en relación con la distancia desde el eje neutro, lo que significa que las partes más alejadas del eje neutro se deforman más y las más cercanas menos, siguiendo un patrón lineal. (Imagen 11)

<sup>11</sup> Definiciones de deformación y esfuerzo: La deformación ( $\epsilon$ ) cuantifica el cambio de forma de un material respecto a su tamaño original, calculándose como  $\epsilon = \Delta L/L_0$ . Es adimensional y expresa el alargamiento o acortamiento relativo. El esfuerzo ( $\sigma$ ) representa la fuerza interna distribuida en el material bajo carga externa, determinado por  $\sigma = F/A$ . Se mide en pascuales (Pa) o  $N/m^2$  (ej:  $\sigma = 100,000$  Pa para 1000 N en  $0.01$   $m^2$ ). En el análisis estructural de columnas, estos conceptos se relacionan mediante la ley de Hooke ( $\sigma = E\epsilon$ ).

**Imagen 11** Columna después de una deformación



*Nota: Columna después de una deformación.*

*Fuente: Tomado Beer et al., 2010, p.214.*

Considerando el eje neutro como origen del sistema de coordenadas, para cuantificar la deformación se analiza el arco DE de longitud  $L$ , expresada en función del radio de curvatura  $\rho$  y el ángulo  $\theta$ :

$$L = \rho\theta \quad (7)$$

Para el arco JK a una distancia  $y$  del eje neutro, su longitud será:

$$L' = (\rho - y)\theta \quad (8)$$

La deformación del segmento JK resulta:

$$\delta = L' - L = (\rho - y)\theta - \rho\theta = -y\theta \quad (9)$$

La deformación unitaria se obtiene dividiendo entre  $L$  ó sea  $\rho\theta$ :

$$\epsilon_x = \frac{\delta}{\rho\theta} = \frac{-y}{\rho} \quad (10)$$

La ecuación (10) adquiere un mejor significado físico al considerar el sistema de coordenadas establecido, para esto ( $y = 0$ ) se ubica en el eje neutro. Los valores de  $y > 0$  corresponden a la zona superior de la columna, mientras que  $y < 0$  se refieren a la parte inferior. Esto significa que la deformación unitaria ( $\epsilon_x$ ) en cualquier punto de la columna es directamente proporcional a la distancia ( $y$ ) al eje neutro es inversamente proporcional al radio de curvatura ( $\rho$ ). Es decir: a mayor distancia del centro, mayor deformación; a menor radio de curvatura (mayor curvatura), mayor deformación. El signo de la deformación indica el tipo de esfuerzo: valores negativos de  $\epsilon_x$  (cuando  $y > 0$ ) corresponden a compresión en las fibras superiores, mientras que valores positivos (cuando  $y < 0$ ) indican tracción (alargamiento) en las fibras inferiores.

La máxima deformación se encuentra cuando  $y$  toma su valor máximo, cuando se encuentra a la mayor distancia del eje neutro, ya sea para arriba o para abajo. Si este valor se define como  $c$ , la deformación máxima será:

$$\epsilon_m = \frac{c}{\rho} \quad (10)$$

Expresando  $\epsilon_x$  en términos de  $\epsilon_m$ :

$$\epsilon_x = \frac{-y}{c} \epsilon_m \quad (11)$$

La ecuación (11), establece una relación geométrica entre deformaciones. Al multiplicar ambos lados por el módulo de elasticidad  $E$  y aplicar la ley de Hooke ( $\sigma = E\epsilon$ ), se obtiene:

$$E\epsilon_x = \frac{-y}{c} E\epsilon_m \rightarrow \sigma_x = \frac{-y}{c} \sigma_m \quad (12)$$

Este paso conecta la geometría de la deformación con la distribución de esfuerzos. Ahora no solo se describe cuánto se alarga o acorta cada fibra, sino también cuánto esfuerzo interno soporta. El esfuerzo en cualquier punto ( $\sigma_x$ ) es proporcional al esfuerzo máximo ( $\sigma_m$ ), y el signo negativo asegura que las fibras superiores ( $y > 0$ ) están en compresión ( $\sigma_x < 0$ ) y las inferiores ( $y < 0$ ) en tracción ( $\sigma_x > 0$ ). La ley de Hooke permite este tránsito directo desde deformaciones a esfuerzos, siempre que el material se comporte elásticamente.

La ecuación (13) como se había mencionado en el pie de página 11 define el esfuerzo normal en una columna como la fuerza interna por unidad de área. Cuando una columna se flexiona, esta se puede imaginar como si estuviera compuesta de numerosas fibras paralelas a lo largo de su longitud: las superiores se comprimen (empujándose entre sí) y las inferiores se traccionan (jalándose). La fuerza  $dF_x$  representa el empuje o jalón de cada una de estas fibras, mientras que  $\sigma_x$  indica la intensidad de esta fuerza por unidad de área. Esta distribución de esfuerzos es lo que crea una resistencia, un momento flector interno que resiste la flexión y explica por qué sentimos resistencia al doblar una columna.

El término  $dA$  representa un elemento muy pero muy pequeño de área dentro de la sección transversal de la columna. Visualmente, corresponde a dividir la sección en diminutos cuadritos donde cada uno experimenta una fuerza  $dF_x$  diferente. Esta aproximación es esencial porque el esfuerzo no es uniforme: en la zona superior los  $dA$  experimentan compresión ( $\sigma_x < 0$ ), en la inferior tracción ( $\sigma_x > 0$ ), y en el eje neutro el esfuerzo es nulo.

$$\sigma_x = \frac{dF_x}{dA} \quad (13)$$

Combinando (12) y (13):

$$\frac{dF_x}{dA} = \frac{-y}{c} \sigma_m \quad (14)$$

Sin embargo, para entender cómo estos esfuerzos generan resistencia a la flexión, debemos calcular el momento flector interno. Cada fuerza infinitesimal  $dF_x$  actúa con un brazo de palanca  $-y$  respecto al eje neutro, contribuyendo al momento total. Al multiplicar ambos lados de la ecuación por  $-y \cdot dA$ , obtenemos:

$$-y dF_x = \frac{y^2}{c} \sigma_m dA \quad (15)$$

El término  $-y \cdot dF_x$  representa el momento infinitesimal  $dM$  que genera cada fuerza  $dF_x$  con respecto al eje neutro, ya que  $-y$  corresponde al brazo de palanca de dicha fuerza. Al integrar ambos lados de la ecuación (15):

$$\int dM = -y \int dF_x = \frac{\sigma_m}{c} \int y^2 dA \quad (16)$$

El término  $\int y^2 dA$  corresponde al momento de inercia  $I$  de la sección transversal respecto al eje neutro. Por lo tanto, la ecuación se simplifica, y al despejar el esfuerzo máximo  $\sigma_m$  se **obtiene:**

$$M = \frac{\sigma_m}{c} I \rightarrow \sigma_m = \frac{M c}{I} \quad (17)$$

La relación establecida en la ecuación (17) muestra cómo la geometría de la sección (a través de  $I$  y  $c$ ) determina la capacidad de la columna para resistir flexión, donde secciones con mayor momento de inercia desarrollan menores esfuerzos para el mismo momento aplicado.

Como ejemplo de lo anterior, al colocar una regla plana versus de canto (Imagen 5), ambas con igual material ( $E$ ) y carga, la de canto resiste más porque tiene mayor  $I$  y menor  $c$ . Esto explica por qué los perfiles estructurales optimizan su geometría distribuyendo el material lejos del eje neutro.

Retomando, el esfuerzo máximo definido en la ecuación (17) puede expresarse en términos de la deformación máxima mediante la ley de Hooke:

$$\sigma_m = E \epsilon_m \rightarrow \epsilon_m = \frac{\sigma_m}{E} \quad (18)$$

Sustituyendo (17) en (18):

$$\epsilon_m = \frac{M c}{I E} \quad (19)$$

Reemplazando (10) en (19) y eliminando  $c$ :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (20)$$

La ecuación (20), integra dos perspectivas importantes sobre la curvatura en columnas. Por un lado, desde un enfoque geométrico, la curvatura es definida por Arboledas Brihuega (2014) como "una medida del cambio de dirección del vector tangente a una curva", destacando que "un círculo tiene una curvatura constante, que es inversamente proporcional a su radio" (p. 163). Así, para una columna curvada, representa el radio de curvatura, y la expresión que  $1/\rho$  cuantifica su curvatura geométrica (Ecuación 21). Por otro lado, la ecuación establece que dicha curvatura es directamente proporcional al momento flector aplicado ( $M$ ) e inversamente proporcional a su rigidez flexional<sup>12</sup> ( $EI$ ). Esta dualidad permite conectar el pandeo de una columna con las cargas internas y propiedades del material.

$$\kappa(x) = \frac{1}{\rho} \quad (21)$$

Esta relación es fundamental para predecir y controlar las deformaciones en columnas sometidas a una carga. Una columna con mayor rigidez flexional ( $EI$ ) presentará menor curvatura bajo un mismo momento flector, mientras que una columna más flexible adoptará una forma más curvada. Sin embargo, la expresión general para la curvatura ( $\kappa$ ) de una curva, dada por la ecuación (33), es más compleja. Pero, bajo la hipótesis de pequeñas deformaciones, la pendiente de la curva deformada ( $dy/dx$ ) es muy pequeña, lo que permite despreciar el término  $(dy/dx)^2$ . Esta simplificación es clave, ya que conduce a la aproximación:

$$\kappa(x) \approx \frac{d^2y}{dx^2} \quad (22)$$

La transición desde la ecuación (20) hasta la ecuación de pandeo se completa al recordar el momento flector en una columna comprimida (Ecuación 2).

Al sustituir la ecuación (2) en la ecuación (20), y teniendo en cuenta la relación geométrica entre curvatura y radio de curvatura dada por la ecuación (21), obtenemos:

$$\kappa(x) = \frac{-Py(x)}{EI} \quad (23)$$

---

<sup>12</sup> La rigidez flexional ( $EI$ ) también llamada rigidez a la flexión, es la resistencia que ofrece una viga o columna a deformarse cuando se somete a un momento flector. Se compone del módulo de elasticidad ( $E$ ), que depende del material, y del momento de inercia ( $I$ ), que depende de la forma geométrica de su sección transversal. Esto implica que una mayor rigidez a la flexión significa que la estructura se deformará menos bajo la misma carga, será más resistente a la flexión.

La ecuación (23), es importante ya que conecta explícitamente la geometría de la deformación (a través de la curvatura  $\kappa(x)$ ) con la carga axial aplicada  $P$  y las propiedades de la columna ( $E$  e  $I$ ), estableciendo el vínculo directo entre la forma curva que adopta la columna y la carga que la provoca.

Relacionado las ecuaciones (22) y (23) se obtiene:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{Py(x)}{EI} = 0 \quad (24)$$

En esta siguiente pieza de este rompecabezas se realizará la solución de la ecuación de pandeo de Euler, se partirá de la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes, dada por la ecuación (24), y definimos el parámetro  $p^2$  como:

$$p^2 = \frac{P}{EI} \quad (25)$$

La ecuación (24) es una "ecuación diferencial [...] lineal, homogénea, de segundo orden, con coeficientes constantes" (Beer et al., 2010, p. 611), y presenta una solución general de la forma:

$$y(x) = A \cos(px) + B \sin(px) \quad (26)$$

Esta solución puede verificarse derivando dos veces la función y sustituyendo en la ecuación diferencial. Aplicando las condiciones de frontera para una columna articulada en ambos extremos (es decir,  $y = 0$  en  $x = 0$  y  $x = L$ ), sustituyendo  $x = 0$ :

$$y(0) = A \cos(0) + B \sin(0) = A(1) + B(0) = A \rightarrow A = 0 \quad (27)$$

De aquí se obtiene  $A = 0$ , simplificando la solución a:

$$y(x) = B \sin(px) \quad (28)$$

Al imponer la segunda condición,  $y(L)=0$ , se llega a:

$$B \sin(pL) = 0 \quad (29)$$

Esta igualdad presenta dos escenarios. Si  $B = 0$ , la solución es trivial ( $y(x) \equiv 0$ ), que corresponde a la columna en configuración recta sin pandeo. Para que exista una forma flexionada no trivial, debe cumplirse  $\sin(pL)=0$  con  $B \neq 0$ , lo que conduce a:

$$pL = n\pi, n = 1, 2, 3, \dots \quad (30)$$

Despeja  $p$  de la ecuación (30):

$$p = \frac{n\pi}{L} \quad (31)$$

Elevando al cuadrado la ecuación (31) e igualando con la ecuación (25):

$$\frac{P}{EI} = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \quad (32)$$

Despejando, P, se obtiene la expresión general para las cargas críticas de pandeo:

$$P_{cr} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2} \quad (33)$$

Finalmente, el valor crítico más bajo de P (correspondiente a  $n = 1$ ) se define como:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (34)$$

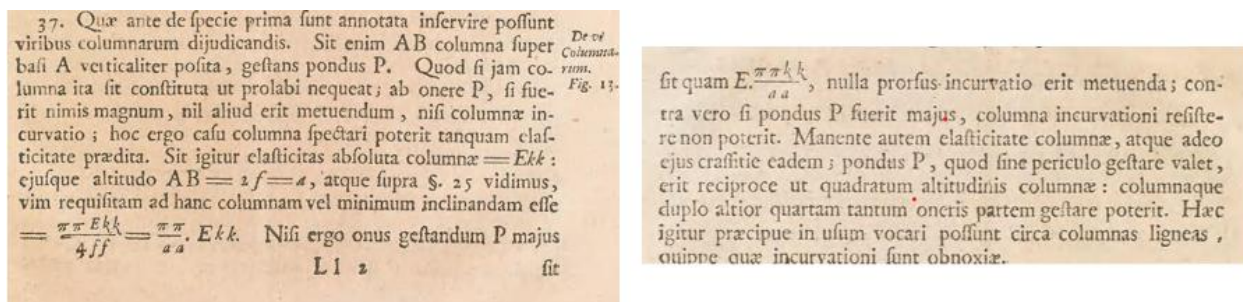
Al analizar este resultado, se evidencia la ausencia del factor  $K$  en la ecuación (34). Por lo tanto, es necesario conectar esta deducción con las condiciones de apoyo reales. Cuando la columna tiene otros tipos de apoyo, como se muestra en la imagen 4, el pandeo no ocurre sobre la longitud real  $L$ , sino sobre una longitud efectiva  $L_e$ , que se define como:

$$L_e = KL \quad (35)$$

Donde  $K$  depende de los apoyos. En otras palabras, en la deducción clásica (Ecuación 31) no aparece  $K$  porque se analizó una columna articulada en ambos extremos, donde  $K = 1$ . Para otros casos, debe usarse la ecuación general del pandeo, mostrada en la ecuación (1).

La siguiente pieza fundamental para el rompecabezas se encuentra en la imagen (12), y presenta el fragmento original donde Euler enuncia su ecuación para la carga crítica de pandeo. En el fragmento, Euler analiza una columna vertical bajo carga axial P y establece la existencia de un valor límite  $\pi^2 Ekk/a^2$ ; si P no supera este valor, la columna permanece estable, pero si lo excede, se produce el pandeo.

**Imagen 12** Fragmento original de la ecuación de Euler



*Nota. Fragmento Original de la Ecuación de Euler  
Fuente: Tomado Euler, 1744, pp. 267–268.*

Traducción<sup>13</sup>:

<sup>13</sup> Esta traducción se realizó utilizando el modelo de inteligencia artificial OpenAI (GPT-4), al cual se le proporcionó la imagen del texto original en latín y se le solicitó su traducción al español.

37. Las observaciones hechas anteriormente sobre el primer tipo pueden servir para juzgar la resistencia de las columnas. Sea entonces la columna AB colocada verticalmente sobre su base A, soportando una carga P. Si la columna está construida de modo que no pueda deslizarse bajo la carga P, y si dicha carga resulta ser demasiado grande, entonces no habrá nada más que temer sino la flexión de la columna.

Por tanto, en este caso, la columna puede considerarse como un cuerpo dotado de elasticidad.

Sea la elasticidad absoluta de la columna igual a  $Ekk$ , y su altura  $AB = 2f = a$ . Tal como vimos en el anterior, la fuerza requerida para provocar siquiera una mínima inclinación en esta columna es:

$$\pi^2 Ekk / a^2$$

Por tanto, si la carga soportada P no es mayor que  $\pi^2 Ekk / a^2$ , entonces no habrá razón alguna para temer flexión. Pero, si P es mayor, entonces la columna no podrá resistir la curvatura.

Si se mantiene constante tanto la elasticidad como el grosor de la columna, la carga P que puede soportarse sin riesgo será inversamente proporcional al cuadrado de la altura de la columna. Es decir, una columna el doble de alta sólo podrá soportar una cuarta parte de la carga.

Estas conclusiones deben aplicarse especialmente a las columnas de madera, ya que son particularmente susceptibles a la flexión (Traducción de Euler, 1744, pp. 267–268).

Una lectura minuciosa de este fragmento resulta clave para comprender los cimientos de la ecuación de pandeo, ya que evidencia las relaciones fundamentales que Euler estableció entre los conceptos físicos y las variables involucradas. Sus notaciones tienen su equivalente contemporáneo: el término "Ekk" equivale al módulo de rigidez flexional (EI) moderno, mientras que "a" representa la longitud de la columna. La relación fundamental  $P = \pi^2 Ekk/a^2$ , establecida por Euler, coincide exactamente con la formulación contemporánea  $P_{cr} = \pi^2 EI/L^2$ , lo que indica, la consistencia de esta ecuación física a través del tiempo.

El fragmento de Euler menciona la relación con el material, la forma y el largo de la columna:

- **Material:** Euler se refiere a "la elasticidad absoluta de la columna igual a  $Ekk$ ", donde  $Ekk$  representa lo que hoy conocemos como el módulo de elasticidad del material ( $E$ ) combinado con las propiedades geométricas.
- **Forma:** El término  $Ekk$  de Euler equivale a la rigidez flexional  $EI$  moderna, donde  $kk$  representa el momento de inercia, que depende de la forma que tenga la sección transversal. Si bien en este fragmento Euler no detalla explícitamente las características de la sección, su notación  $kk$  podría decirse que engloba implícitamente la influencia de la geometría a través de esta propiedad
- **Largo:** este fragmento es claro sobre la longitud. Establece que "la carga  $P$  que puede soportarse sin riesgo será inversamente proporcional al cuadrado de la altura de la columna" y precisa: "una columna el doble de alta sólo podrá soportar una cuarta parte de la carga". (Traducción de Euler, 1744, pp. 267–268).

### **Análisis de las hipótesis en la ecuación de pandeo de Euler**

La última pieza para considerar es analizar las hipótesis en las que se fundamenta la ecuación de Euler, lo cual se realizará a continuación.

**H1. Material homogéneo e isótropo:** Esta hipótesis supone que el material de la columna presenta las mismas propiedades elásticas en todas las direcciones y puntos. Las características que debe tener un material para que sea homogéneo e isótropo las describe Hibbeler (2006) al escribir:

Para que la barra experimente una deformación uniforme, es necesario que  $P$  se aplique a lo largo del eje centroidal de la sección transversal y que el material sea homogéneo e isótropico. Un material homogéneo tiene las mismas propiedades físicas y mecánicas en todo su volumen, y un material isótropico tiene esas mismas propiedades en todas direcciones. (p. 24)

Como muestra de un material que cumple estas características, Hibbeler (2006) menciona el acero, explicando cómo este puede volverse anisotrópico cuando es forjado a temperaturas subcríticas. Al respecto, el autor señala:

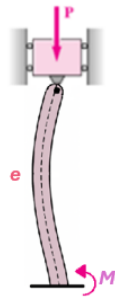
Por ejemplo, el acero contiene miles de cristales orientados al azar en cada milímetro cúbico de su volumen, y como en la mayoría de las aplicaciones este material tiene un tamaño físico que es mucho mayor que un solo cristal, la suposición anterior relativa a la composición del material es bastante realista. Sin embargo, debe mencionarse que el acero

puede volverse anisotrópico por medio del laminado en frío, esto es, laminado o forjado a temperaturas subcríticas. (Hibbeler, 2006, p. 24)

Lo anterior implica que el módulo de elasticidad o módulo de Young (E) en materiales anisotrópicos no es constante, sino que varía según la dirección. Esto no permitiría considerar matemáticamente constantes el módulo de elasticidad (E) a lo largo de toda la columna, lo que complejiza la ecuación diferencial del pandeo. En otras palabras, si el material fuera heterogéneo o anisotrópico, la rigidez EI dependería de la posición.

**H2. Carga puramente axial** (sin excentricidad): Se ha supuesto que la carga axial actúa exactamente a lo largo del eje longitudinal de una columna esbelta, sin desviaciones laterales. Lo que implica que la carga de compresión P está perfectamente alineada con el eje central de la columna (no hay desviaciones laterales). Lo que significa que no existen momentos flectores adicionales causados por imperfecciones en la aplicación de la carga.

*Imagen 13 Excentricidad en una columna.*



*Nota. Excentricidad (e) es la distancia entre la línea de acción de la carga axial P y el eje longitudinal centroidal de la columna*

*Fuente: Tomado y Adaptado de Beer, F. P., Johnston, E. R., DeWolf, J. T. & Mazurek, D. F. (2010).*

En la deducción de la ecuación de pandeo de Euler, el momento flector solo aparece por la deflexión lateral  $y(x)$ , como se muestra en la imagen (13) y se expresa en la ecuación (2).

En la realidad, cuando se tienen estas pequeñas desviaciones de carga se generan momentos adicionales (Ecuación 36). Donde (e) es la excentricidad de la carga. Esto reduce la capacidad de carga de la columna y modificando su comportamiento frente al pandeo. Sin embargo, la ecuación de Euler no considera estos efectos (Ecuación 1), lo que la hace válida sólo para condiciones ideales.

$$M(x) = Pe \tag{36}$$

**H3. Columna está libre de tensiones - esfuerzos iniciales:** Para el caso de la columna, se asume que no existen esfuerzos residuales o internos ni deformaciones. Estos esfuerzos se definen como “el estado de esfuerzos existente en el volumen de un material en ausencia de una carga externa (incluyendo la gravedad)” (Mejía et al., 2015, p. 1).

Esto significa que la columna no presenta tensiones internas previas como resultado de su proceso de fabricación, tensiones generadas y retenidas tras ser retirada de cargas que en algún momento pudo haber soportado, o deformaciones durante el proceso de envío, entre otros. Como ejemplo de ello podemos suponer una columna comprimida que no vuelve a su estado original.

**H4. Peso propio despreciable:** Para esta hipótesis, se está suponiendo que el peso de la columna es insignificante en comparación con la carga aplicada (P). Pero, si se considera el peso de la columna, es razonable establecer la variable (q); se define como la cantidad de peso (W) por unidad de L (Ecuación 37).

$$q = \frac{w}{l} \quad (37)$$

En otras palabras, sin el peso de la columna, la fuerza axial P(x) es constante. Al considerarlo, P(x) disminuye hacia la parte superior, porque el peso de la columna "descansa" en la parte inferior. Y la nueva expresión para la fuerza axial sería:

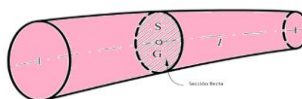
$$P(x) = P_{aes} + q(L - x) \quad (38)$$

Donde (P<sub>aes</sub>) es carga aplicada en el extremo superior y, la expresión del miembro derecho de la ecuación (38) es el peso acumulado de la columna desde la base (x=L) hasta una altura (x).

**H5. Columna inicialmente recta y prismática:** A una columna, a una viga o a una barra se le llama pieza prismática cuando es:

cuerpo sólido engendrado por un área plana S que se mueve en el espacio, de manera que su centro de gravedad G recorre una línea dada l y su plano se mantiene constantemente normal a dicha línea. A la línea l se le denomina directriz, línea media o eje de la pieza, y a las diversas posiciones del área S se les llama secciones rectas o secciones normales de la pieza. (Cervera Ruiz & Blanco Díaz, 2002, p. 37)

**Imagen 14** Columna recta y prismática



Fuente: Tomado y Adaptado de Cervera Ruiz & Blanco Díaz, 2002, p. 37.

Además, una columna se considera perfectamente recta y prismática cuando tiene un material homogéneo (E, H1) y un momento de inercia (I) constantes. Cuando la columna presenta estas características, la solución a la ecuación diferencial ha asumido una geometría perfecta y esto permite llegar a la ecuación (1), ya que simplifica el análisis.

**H6. Pequeñas deformaciones:** En esta hipótesis se asume que la deflexión lateral de la columna es muy pequeña  $y(x)$  comparada con su longitud L. Lo cual tiene dos consideraciones, la primera esta desigualdad ( $y_{\max} \ll L$ ) es lo que permite linealizar la ecuación diferencial del pandeo y facilita la resolución matemática del problema. Si esto no fuera de esta manera tendríamos que reemplazar la ecuación (39) por:

$$\kappa = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (39)$$

Ya que esta desigualdad permite suponer que la pendiente de la curva deformada ( $dy/dx$ ) es tan pequeña que su cuadrado puede despreciarse:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \approx 0 \quad (40)$$

La segunda, si las deformaciones no son pequeñas, la carga que aplasta la columna ya no actúa en vertical pura sobre la sección doblada. Al inclinarse, se descompone: una parte sigue comprimiendo y otra, perpendicular, actúa como una fuerza transversal que dobla aún más la columna.

El análisis mediante ingeniería inversa de la ecuación de Euler permitió identificar los parámetros fundamentales: la carga crítica, el módulo de elasticidad, el momento de inercia y la longitud. Este desglose conceptual señala las variables que pueden explorarse experimentalmente, como el material, la geometría de la sección transversal y la longitud de la columna. Reconocer estas piezas del "rompecabezas" del pandeo orienta el diseño de actividades prácticas donde profesores y estudiantes puedan variar dichos factores, conectando la teoría abstracta con la observación con medición directa del fenómeno físico. Una vez identificadas las variables y comprendidas las hipótesis que las enmarcan, el siguiente desafío es materializar este conocimiento en una propuesta de aula y un dispositivo experimental que permita a los estudiantes explorar, por sí mismos, cómo cada uno de estos factores influye en la resistencia de una columna.

### Capítulo III

#### **Diseño de actividad experimental y propuesta de aula para el estudio del pandeo de una columna**

En este capítulo se describe el diseño y desarrollo de actividades experimentales elaborados por el docente autor de este trabajo de grado para estudiar el pandeo de columnas con propósitos didácticos. Se presenta el diseño de una prensa electromecánica y columnas que permiten aislar y medir la influencia de variables clave como el material, la geometría y la longitud en la carga crítica en el comportamiento de una columna.

Se presentan los resultados de la actividad experimental realizada, que confirman la capacidad funcional de la prensa electromecánica diseñada en conjunto con las columnas para aislar y medir la influencia de cada variable, validando así su idoneidad como material didáctico para la experimentación, que permiten construir un puente exploratorio entre la experiencia concreta y el formalismo matemático.

El diseño y construcción de la prensa electromecánica, las columnas y la propuesta de aula, constituyen material didáctico para la experimentación<sup>14</sup> esencial para alcanzar el segundo objetivo específico: “diseñar y desarrollar actividades con columnas de diferentes materiales, formas y longitudes para explorar los factores que influyen en su resistencia al pandeo”. Sin este material didáctico, no es posible crear las condiciones experimentales controladas que permiten pandear las columnas de manera medible; es decir, aplicar carga gradual y variando un solo factor por vez (como la longitud, la forma de la sección transversal o el material) cuantificar su efecto en la carga crítica.

Complementariamente, se presenta una propuesta de aula estructurada en cinco etapas, basada en ingeniería inversa, que el propósito de guiar a los estudiantes desde la observación cotidiana hasta la formalización de la ecuación de Euler mediante experimentación controlada. Además, la propuesta de aula busca que los estudiantes analicen la ecuación de Euler, parámetro

---

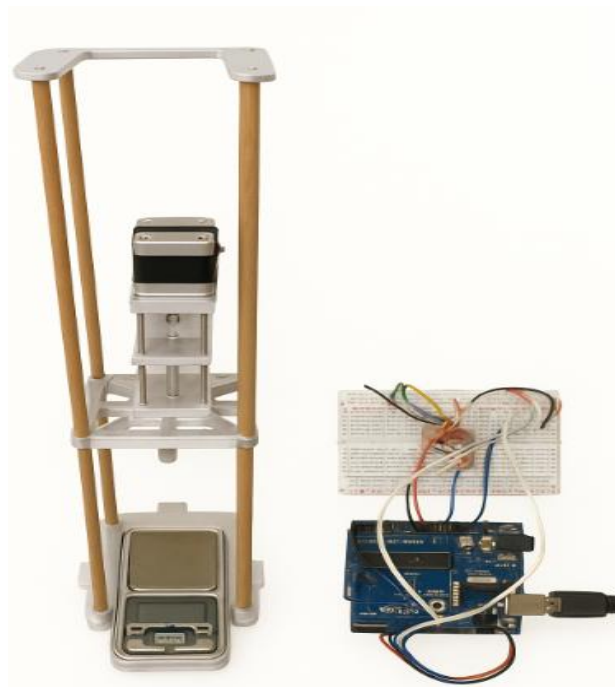
<sup>14</sup> La clasificación de este material como "Material didáctico para Experimentación" se fundamenta en el marco conceptual del artículo de Vargas Murillo (2017) llamados Recursos educativos didácticos en el proceso enseñanza aprendizaje. Ya que parte de la definición de recurso didáctico como "medio material" facilitador del aprendizaje (Morales, 2012, citado en Vargas Murillo, 2017, p. 2). El proceso de creación del dispositivo sigue las etapas de desarrollo de materiales (selección, composición, evaluación) descritas por Padrón (2009, citado en Vargas Murillo, 2017, p. 4-5). Su función esencial es permitir la "articulación de los contenidos teóricos... con las clases prácticas" (Vargas Murillo, 2017, p. 2), creando las condiciones de manipulación experimental controlada necesarias para explorar el fenómeno del pandeo, lo que lo distingue como un material especializado y no como un recurso didáctico genérico.

a parámetro de forma experimental y generen así conexiones entre la intuición, la evidencia cuantitativa y la ecuación.

Esta necesidad de crear material didáctico se fundamenta en la perspectiva que postula Arca et al., (1990) que “no existe una discontinuidad radical entre el denominado conocimiento común y el conocimiento científico” (p.1). En consecuencia, el conocimiento científico no es un sistema ajeno, sino que se construye desde lo cotidiano. Por ello, el material didáctico —como la prensa, las columnas y la propuesta de aula— actúan como un puente tangible entre la experiencia común y la ecuación de Euler. Este puente puede ser el camino para realizar la transición de: convertir las observaciones cualitativas del mundo (relaciones de orden) en relaciones cuantitativas (relaciones complejas).

### **Criterios que orientan la propuesta de actividad experimental.**

*Imagen 15 Fotografía de prensa electromecánica con su sistema de control*



*Nota: Fotografía de la prensa electromecánica junto con su sistema de control, que regula el movimiento para aplicar la carga de compresión. Fuente: elaboración propia.*

En el estudio de las condiciones física que inciden en el pandeo de columnas, para pasar de las relaciones cualitativas y avanzar hacia la cuantificación y el análisis sistemático, resulta fundamental contar con un sistema de medición controlado que ofrezca la posibilidad de manipular las variables y parámetros que tienen incidencia en la ecuación de Euler. En este caso, la prensa

electromecánica<sup>15</sup> (Imagen 15), mide la carga que soportan las columnas, haciendo posible pasar de la descripción cualitativa de la carga y su incidencia en el pandeo de forma cuantitativa.

Este proceso es importante dentro de las actividades experimentales con columnas, propuestas en el segundo objetivo específico de este trabajo, y se basa en el "«Diseño clásico de una sola variable», [...] de la ciencia física y, en el que sólo se puede variar un solo factor a la vez, manteniéndose constantes el resto de los factores" (Arnau Gras, s.f., p. 3). Lo que implica un control de las variables para aislar y analizar el efecto individual de cada factor —como el material, la longitud o la geometría— sobre la carga crítica de pandeo.

Este control de variables es lo que diferencia la actividad experimental de una simple observación sin intención, aislando las variables de interés para atribuir los cambios observados directamente a las manipulaciones realizadas. Al variar de manera aislada variables como la longitud, la sección transversal y el material de las columnas, se observa su efecto directo sobre la variable dependiente, la carga crítica ( $P_{cr}$ ). Este procedimiento es esencial, ya que permite al estudiante establecer relaciones numéricas, para realizar un análisis cuantitativo. La medición es, por tanto, la condición que permite convertir las observaciones en datos analizables matemáticamente.

En este sentido, el registro y organización metódica de estos datos es una actividad en la propuesta de aula que se propone con el propósito de transformar la experiencia sensorial en evidencia cuantificable. Este registro organizado transforma la actividad práctica en un proceso estructurado, donde cada dato tiene un propósito dentro del análisis global.

La cuantificación experimental sirve, en primer lugar, para establecer relaciones de orden precisas entre las variables individuales; por ejemplo, permite afirmar que una columna es el doble de resistente que otra, o que un material tiene la mitad de la resistencia de otro. En segundo lugar, y de manera más avanzada, permite analizar la influencia relativa y combinada de múltiples variables —en este caso, el módulo de elasticidad ( $E$ ), el momento de inercia ( $I$ ) y la longitud ( $L$ )— sobre la carga crítica ( $P_{cr}$ ). Esto posibilita comparar matemáticamente cuánto contribuye cada factor a la resistencia de la columna.

Este análisis experimental culmina con el establecimiento de relaciones complejas y algebraicas, materializadas en la ecuación de Euler, que permiten predecir el comportamiento de

---

<sup>15</sup> En el anexo B se encuentra una descripción más detallada de las características, componentes y criterios de diseño de la prensa electromecánica.

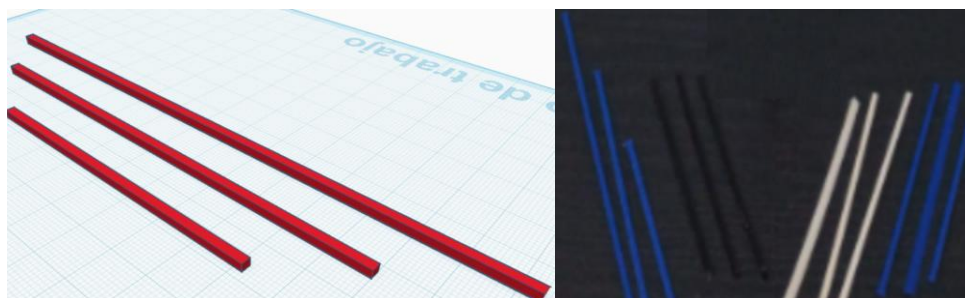
las columnas bajo diversas condiciones. Así, se construye un puente entre la experiencia concreta y la teoría formal. Este puente es, de hecho, el sistema de conocimiento que organiza y da sentido coherente a los datos medidos, trascendiendo la descripción aislada para lograr un modelo predictivo. La cuantificación facilita este salto al transformar percepciones cualitativas en datos estructurados por el lenguaje algebraico, dando lugar a un conocimiento formalizado.

### **Columnas de diferente longitud, sección transversal y material.**

Las columnas que se utilizan en esta propuesta de aula fueron diseñadas y fabricadas (Imagen 16), considerando los parámetros que intervienen en la ecuación de Euler para el pandeo: módulo de elasticidad, momento de inercia y longitud.

En cuanto al material, se emplearon tres tipos de filamentos poliméricos: PLA (Ácido Poliláctico), ABS (Acrilonitrilo Butadieno Estireno) y TPU (Poliuretano termoplástico), los cuales permiten explorar el módulo de elasticidad ( $E$ ) como factor determinante de la rigidez del material, debido a que la relación de rigidez de estos materiales cambia de un material a otro ( $ABS > PLA > TPU$ ). Respecto a la forma de la sección transversal, se fabricaron columnas con geometrías cilíndrica, cuadrada y triangular, manteniendo constante el área transversal, el material y la longitud, para aislar el efecto del momento de inercia ( $I$ ). En relación con la longitud, se utilizaron columnas de 8 cm, 12 cm y 16 cm, fabricadas en PLA, con el fin de estudiar la influencia de la longitud ( $L$ ) en la carga crítica de pandeo.

*Imagen 16 Fotografía del diseño y fabricación de columnas*



*Nota. Izquierda: Diseño de columnas realizado en Tinkercad.  
Derecha: Fotografía de las columnas fabricadas.*

Además, las columnas se fabricaron con una densidad del 40% y un patrón de relleno uniforme para garantizar homogeneidad y producir columnas rectas y prismáticas<sup>16</sup>. Estas decisiones buscan

---

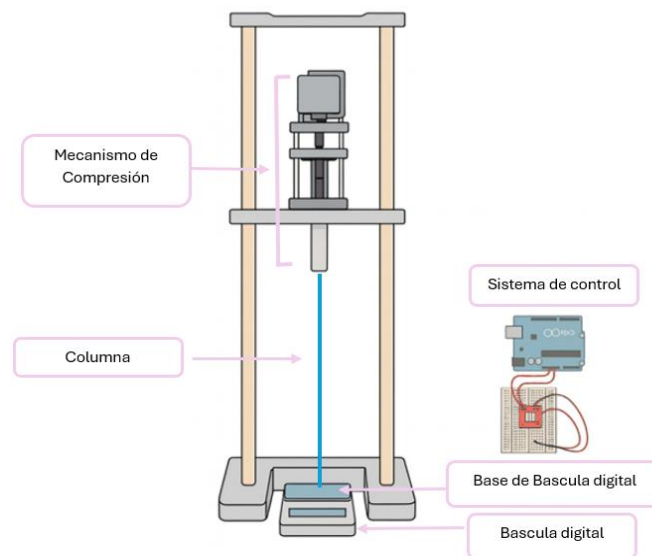
<sup>16</sup> Todas las columnas fueron fabricadas utilizando una impresora 3D, lo que permitió un control de su geometría, material y estructura interna, consideraciones necesarias para la experimentación controlada.

acercar el experimento a las condiciones ideales de las hipótesis de Euler, facilitando la identificación de relaciones cuantitativas entre los factores estudiadas.

Es por lo anterior que estas columnas funcionan como un material especializado: ya que permiten explorar de forma controlada los factores independientes del pandeo. Su diseño materializa el segundo objetivo específico, ya que cada característica —el material (para variar  $E$ ), la geometría (para aislar  $I$ ) y la longitud (para estudiar  $L$ )— permite una exploración los factores que influyen es la resistencia al pandeo. Así, las columnas hacen parte de las actividades donde los estudiantes pueden medir y comparar la influencia de cada factor en la carga crítica.

### Control de variables y análisis del pandeo de una columna

*Imagen 17 Montaje de la prensa electromecánica*



*Nota. Este montaje permite realizar el procedimiento experimental descrito en la etapa 4 de la propuesta de aula, garantizando la aplicación de una carga axial y controlada, así como la medición precisa de la carga crítica de pandeo. Fuente: El esquema base de esta imagen se generó a partir de una fotografía y se modificó con ayuda de una herramienta de IA (ChatGPT), recibiendo posteriormente ajustes adicionales.*

La prensa y las columnas forman parte del material didáctico especializado para la experimentación que permite explorar de manera controlada las variables de la ecuación de Euler ( $E$ ,  $I$  y  $L$ ). Dentro de las condiciones que se tuvieron en cuenta en el montaje fueron: Carga centrada y apoyos articulados: Condiciones de la ecuación de Euler para el pandeo, tal como se definieron en el Capítulo II. Carga centrada significa que la fuerza se aplica exactamente sobre el eje central de la columna, evitando flexiones adicionales. Apoyos articulados implican que los extremos de

la columna pueden girar libremente, pero no desplazarse lateralmente, lo que corresponde al caso fundamental de "columnas con extremos articulados" ( $k = 1$ ) en la teoría.

En imagen (17) se muestra el montaje que se realiza para garantizar una aplicación de la carga controlada, así como la medición de la carga crítica de pandeo de las columnas que se estudian.

El procedimiento consiste en: 1) colocar la columna según el factor a explorar (longitud, material y sección transversal) sobre la báscula digital de manera vertical, 2) tarar la balanza, 3) posicionar verticalmente la columna entre la base de báscula y el mecanismo de compresión, 4) aumentar lentamente la carga con la prensa, monitorear la báscula y anotar la carga crítica (en N)<sup>17</sup> en el momento del pandeo, 5) repetir tres veces este procedimiento, y 6) realizar el promedio.

A continuación, se presenta el análisis de variables que se estudió con este diseño experimental:

**Tabla 3** Carga crítica de pandeo para columnas de diferentes materiales (longitud y sección transversal constantes)

| Material        | Gramos       | Newtons     |
|-----------------|--------------|-------------|
| PLA             | 230,8        | 2,26        |
|                 | 241,4        | 2,37        |
|                 | 225,4        | 2,21        |
| <b>Promedio</b> | <b>232,5</b> | <b>2,28</b> |
| ABS             | 651,2        | 6,38        |
|                 | 722,5        | 7,08        |
|                 | 663,3        | 6,50        |
| <b>Promedio</b> | <b>679,0</b> | <b>6,65</b> |
| TPU             | 61,0         | 0,60        |
|                 | 53,0         | 0,52        |
|                 | 58,0         | 0,57        |
| <b>Promedio</b> | <b>57,3</b>  | <b>0,56</b> |

*Nota. Los valores representan la carga crítica de pandeo medida experimentalmente para columnas con diferentes materiales. Para cada material se realizaron tres ensayos, cuyos resultados individuales y promedio se presentan en la tabla. Fuente: Elaboración Propia*

Para analizar la influencia del material (E) se emplearon columnas de igual longitud y sección transversal, fabricadas en PLA, ABS y TPU. Los resultados se presentan en la tabla (3), donde se observan diferencias apreciables en la carga crítica de pandeo. El ABS registró el mayor

<sup>17</sup> La balanza digital registra la carga en gramos. Para obtener la carga crítica en Newtons (N), se convierte a kilogramos (dividiendo entre 1000) y se multiplica por la aceleración de la gravedad (9.8 m/s<sup>2</sup>). Así:  $P_{cr}(N) = \text{gramos} / 1000 \times 9.8$ .

promedio con 6.65 N, seguido del PLA con 2.28 N, mientras que el TPU mostró la menor resistencia con apenas 0.56 N, cuantificación coherente cuando se manipulan estos materiales. Estas cifras confirman que el módulo de elasticidad (E) es un factor determinante: materiales más rígidos, como el ABS, soportan cargas mayores antes de pandearse. Con este registro se encuentra que la prensa permite aislar y cuantificar el efecto del material.

Para analizar la influencia de la forma de la sección transversal (I) se utilizaron columnas de PLA de igual longitud (cm de fueron pasados a m) y área transversal, con geometrías cilíndrica, cuadrada y triangular. Los resultados se muestran en la siguiente tabla (4).

**Tabla 4** Carga crítica de pandeo para columnas de diferentes columnas de diferentes secciones transversales (material y longitud constantes)

| Forma           | Gramos       | Newtons     |
|-----------------|--------------|-------------|
| Cilíndrica      | 213,4        | 2,09        |
|                 | 195,7        | 1,92        |
|                 | 187,4        | 1,84        |
| <b>Promedio</b> | <b>198,8</b> | <b>1,95</b> |
| Cuadrada        | 245,8        | 2,41        |
|                 | 211,6        | 2,08        |
|                 | 224,5        | 2,20        |
| <b>Promedio</b> | <b>227,3</b> | <b>2,23</b> |
| Triangular      | 212,4        | 2,08        |
|                 | 189,6        | 1,86        |
|                 | 206,4        | 2,02        |
| <b>Promedio</b> | <b>202,8</b> | <b>1,99</b> |

*Nota. Los valores representan la carga crítica de pandeo medida experimentalmente para columnas con diferente sección transversal. Para cada tipo de sección se realizaron tres ensayos, cuyos resultados individuales y promedio se presentan en la tabla. Fuente: Elaboración Propia*

Estos resultados indican que la sección cuadrada presentó la mayor carga crítica promedio con 2,23 N, seguida por la triangular con 1,99 N y la cilíndrica con 1,95 N. Esta relación de orden refleja diferencias en el momento de inercia (I) asociado a cada geometría, aun cuando todas comparten la misma área transversal, longitud y material. Esta organización resulta interesante ya que los cálculos teóricos de los momentos de inercia muestran un orden diferente:  $0.08333 \text{ A}^2$  para la cuadrada,  $0.09623 \text{ A}^2$  para la triangular y  $0.07958 \text{ A}^2$  para la circular. Esta similitud explica por qué las cargas críticas difieren solo en décimas de Newton y sugiere que factores como imperfecciones en la fabricación, desalineaciones leves o anisotropía del material impreso pueden influir en el orden observado. Estos matices no invalidan la tendencia, sino que enriquecen la discusión experimental, permitiendo a los estudiantes comprender cómo la forma de la sección

transversal —a través de I— afecta la resistencia al pandeo, y a la vez reconocer la sensibilidad del montaje ante variables difíciles de controlar en su totalidad.

Para verificar la influencia de la longitud (L) se usaron columnas de PLA, de sección cuadrada constante, con longitudes de 0,08, 0,12 y 0,16 m. Los resultados se muestran en la tabla (5), en los cuales se observa que, a mayor longitud, menor es la carga crítica: el promedio bajó de 2.85 N (8 cm) a 0.79 N (16 cm), una reducción del 72% al duplicar la longitud de la columna.

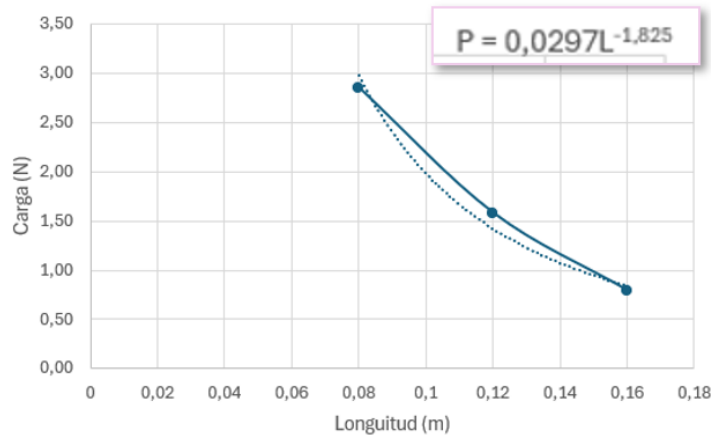
**Tabla 5** Carga crítica de pandeo para columnas de diferentes longitudes (material y sección transversal constantes)

| Longitudes de las columnas | Gramos | Newtons |
|----------------------------|--------|---------|
| 0,08 m                     | 310,5  | 3,04    |
|                            | 273,3  | 2,68    |
|                            | 289,5  | 2,84    |
| <b>Promedio</b>            | 291,1  | 2,85    |
| 0,12cm                     | 147,8  | 1,45    |
|                            | 178,9  | 1,75    |
|                            | 156,7  | 1,54    |
| <b>Promedio</b>            | 161,1  | 1,58    |
| 0,16cm                     | 78,5   | 0,77    |
|                            | 87,2   | 0,85    |
|                            | 76,5   | 0,75    |
| <b>Promedio</b>            | 80,7   | 0,79    |

*Nota. Los valores representan la carga crítica de pandeo medida experimentalmente para columnas con diferentes longitudes. Para cada longitud se realizaron tres ensayos, cuyos resultados individuales y promedio se presentan en la tabla. Fuente: Elaboración Propia*

La gráfica longitud vs. carga crítica imagen (18) muestra una relación de potencia con exponente experimental de -1.8, cercano al valor teórico de -2 de la ecuación de Euler ( $P_{cr} \propto 1/L^2$ ). La diferencia de -0.2 es un margen de error aceptable, atribuible a imperfecciones en las columnas, pequeños descentramientos de carga o rigidez no ideal de los apoyos. Aun así, la tendencia confirma que la prensa permite explorar cuantitativamente cómo la longitud afecta la resistencia al pandeo.

**Imagen 18** Grafica de longitud Vs carga crítica



*Nota.* El exponente experimental obtenido (-1.8) demuestra que, dentro del alcance de la prensa utilizada, se logra validar la relación teórica de la ecuación de Euler (exponente -2) con un margen de error aceptable, considerando las limitaciones propias del montaje experimental.

En conjunto, los datos registrados con la prensa electromecánica muestran su capacidad para cuantificar de manera controlada la capacidad de carga y establecer relaciones con cada una de las variables de la ecuación de Euler (E, I, L). Los resultados obtenidos —diferencias significativas según el material, variaciones sutiles según la forma de la sección y una clara relación inversa entre longitud y carga crítica— no solo confirman las tendencias teóricas esperadas, sino que también evidencian la sensibilidad y la confiabilidad de este material específico para la experimentación. Esto valida que el material didáctico diseñado cumple su propósito: ofrecer a los estudiantes una plataforma funcional para explorar, desde la experimentación directa, los factores que influyen en el pandeo del pandeo y construir, paso a paso, la conexión entre la experiencia tangible y el formalismo matemático de la ecuación de Euler.

### **Propuesta de aula: una variante de la ingeniería inversa**

Este camino de aprendizaje, que va desde la experiencia concreta hasta el conocimiento formal para explorar los factores que influyen en su resistencia al pandeo, se organiza a través de una propuesta de aula que constituye una variante de la ingeniería inversa. Su validez se fundamenta en que sigue la lógica esencial de esta metodología: partir de un “producto terminado” para analizarlo minuciosamente “con el objetivo de encontrar el porqué de cada detalle de construcción y funcionamiento” (Ramos Acosta, 2013, p. 1). En este caso, el “producto” es la ecuación de Euler para el pandeo de columnas, una ecuación que los estudiantes deben deconstruir para explorar los factores que influyen en su resistencia al pandeo. Además, la flexibilidad

conceptual de la ingeniería inversa, que “no tiene una definición única” y “se realiza en múltiples contextos” (Jiménez López et al., 2010, p. 2; Monroy et al., 2024, p. 1), permite esta adaptación

El proceso se organiza en cinco etapas secuenciales que organizan dicha metodología, en donde se reconoce la importancia de no partir directamente de la ecuación, sino de iniciar con las vivencias del estudiante, esto con el fin de generar puentes exploratorios entre las experiencias y la ecuación de Euler. Esta decisión hace parte del proceder de la propia ingeniería inversa, la cual “busca obtener información acerca de un objeto de referencia” (Jiménez López et al., 2010, p. 2) a partir de un análisis contextual y experiencial. Así, se asegura que el aprendizaje surja desde lo vivencial hacia lo formal.

Como se mencionó, la propuesta de aula no comienza con la ecuación, sino con la experiencia y vivencias del estudiante (Etapa 1: Pre-Experiencia). Esto responde directamente al llamado de Arca et al., (1990), quien advierte que:

el primer día de escuela, en efecto, todos nosotros nos encontramos delante de chicos que vienen de ‘fuera de la escuela’, y estamos en condiciones de hablar juntos: significa que tenemos en común con cada uno de ellos este universo enorme [...] de significados y de conexiones entre significados. (p. 5)

Los estudiantes llegan al aula con un bagaje de experiencias, palabras y nociones sobre el mundo —un “universo de significados” construido fuera de la escuela. Como lo son: los edificios, los puentes, las patas de una mesa—para, desde allí, orientar gradualmente la mirada hacia la característica estructural que se desea estudiar: la carga crítica de pandeo. Es por esto, que la propuesta de aula inicia con preguntas como, ¿Qué cosas en tu entorno se sostienen o utilizan columnas? (Imagen 19). En el anexo A se encuentran las guías completas de esta etapa.

*Imagen 19* Parte de la propuesta de aula correspondiente a la Pre-Experiencia

***Pre- Experiencia***

1. ¿Qué piensas?

- ¿Qué cosas en tu entorno se sostienen o utilizan columnas?

*Nota. Pregunta para identificar el objeto que pertenece al entorno referente a columnas.*

En la etapa 2, (Exploración y delimitación de los factores de pandeo) no se impone la teoría, sino que se parte de lo que los alumnos ya saben o intuyen sobre “lo que aguanta” y “lo que se

dobla” en su entorno. Esta premisa se alinea directamente con la advertencia de Arca et al. (1990), quien sostiene que:

“no es verdad que los jóvenes y los niños tengan conocimiento únicamente de fragmentos del mundo, a la espera de que los adultos los reordenen: siempre hay en funcionamiento un esfuerzo enorme por construir redes que mantengan juntos hechos diversos” (p. 6).

En otras palabras, los alumnos no llegan al aula con ideas aisladas y desconectadas, sino con un entramado cognitivo coherente —aunque intuitivo— sobre el comportamiento de los objetos en su entorno. Es por ello, que en esta etapa de la propuesta de aula la actividad propuesta no comienza imponiendo definiciones teóricas, sino reconociendo explícitamente ese esfuerzo integrador previo. Por ejemplo, los estudiantes ya intuyen algunas relaciones entre forma, longitud y material —como cuando notan que un lápiz largo se quiebra más fácilmente o que una pata delgada de una mesa tiende a pandearse o romperse—. A partir de esta red de conocimientos, la actividad busca explorar y delimitar, para enfocarlas en la característica mecánica (carga crítica de pandeo) y los factores que influyen en esta. Esto se realiza mediante preguntas guiadas que, lejos de subestimar el conocimiento previo, lo toman como punto de partida válido para la indagación. Una de estas preguntas es —“¿Te parece que la sección transversal —cilindro, rectángulo, triángulo— de una columna puede influir en la carga que soporta?” (Imagen 20)— orientando cada una de las preguntas a identificar cada de los factores relevantes por separado. De este modo, esta etapa opera como un puente entre los conocimientos previos del estudiante y la exploración progresiva de los factores que influyen en el pandeo de las columnas. (En el anexo A se encuentran las guías completas de esta etapa).

*Imagen 20 Parte propuesta de Aula correspondiente a la Exploración y delimitación de los factores de pandeo.*

- ¿Crees que la longitud de una columna afecta la cantidad peso puede soportar sin doblarse? Justifica tu respuesta y dibuja al menos dos columnas de diferente longitud que estén sometidas a la misma carga.
- ¿Te parece que la sección transversal (cilindro, rectángulo, triángulo) de una columna puede influir en la carga que soporta una columna? Ver Figura 1 (Todas tiene la misma área transversal y la misma longitud). Justifica tu respuesta.

*Nota. Algunas Preguntas para focalizar los factores específicos que se desean conocer.*

En la etapa 3, (Identificar la ecuación que relaciona la característica mecánica y los factores que influyen en esta) una vez focalizada la característica mecánica—la carga crítica de pandeo—, y la orientación en la etapa anterior hacia los factores que influyen en esta, la propuesta de aula introduce la ecuación de Euler no como una fórmula impuesta (Imagen 21), sino como un "objeto por conocer" que sintetiza las relaciones entre los factores de están presentes en la ecuación. Esta aproximación se basa en lo señalado por Arcà et al. (1990) cuando afirman que:

el problema de una educación científica de base corresponde más a una imagen como la de plantar postes en el agua para construir un sistema de palafitos, que a la de andar a lo largo de un camino siguiendo un recorrido definido (p. 3).

En coherencia con esta metáfora, la ecuación se presenta como ese primer "poste" conceptual, una estructura formal que organiza y da sentido a las relaciones que los estudiantes ya vislumbran entre longitud, material, forma y la carga crítica. Así se presenta un lenguaje más potente, el algebraico. (En el anexo A se encuentran las guías completas de esta etapa).

**Imagen 21** Parte de la propuesta de aula correspondiente a presentar la ecuación de Euler para el pandeo de columnas.

***Un Poco de Teoría.***

La ecuación de Euler para el pandeo de columnas presenta la siguiente forma:

$$p_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(kL)^2}$$

*Nota. Presentación y explicación de la ecuación de Euler para el pandeo de columnas*

En esta etapa 4 (Desglosar las relaciones – La experimentación como puente unificador) se busca generar puentes entre el conocimiento previo del estudiante y la estructura formal de la ecuación de Euler. La propuesta de aula guía a los estudiantes a "desmontar" la ecuación variable por variable —longitud (L), momento de inercia (I), material (E)— utilizando una prensa electromecánica. (Imagen 22) En el anexo A se encuentran las guías completas de esta etapa.

**Imagen 22** Parte de la propuesta de aula correspondiente desglosar las relaciones - Parte C: ¿La longitud influye? (Explorando L)

| <b>Tabla de observación:</b> |                                       |   |
|------------------------------|---------------------------------------|---|
| Longitud (cm)                | Carga máxima antes de pandeo (Newton) | Observaciones   |
| 8 (Intento 1)                |                                       | Respuesta la columna de 8 cm fue la más resistente en los 3 intentos soportó cargas cercanas a los 2400 N mostrando que al ser más corta es más estable y menos propensa                                  |
| 8 (Intento 2)                |                                       |   |
| 8 (Intento 3)                |                                       |   |
| Promedio 8 cm                |                                       |   |
| 12 (Intento 1)               |                                       | Respuesta: la columna de 12 cm resistió una carga intermedia. En promedio Soportó alrededor de 1400N, lo que indica que el aumento de longitud disminuye su capacidad de resistencia.                     |
| 12 (Intento 2)               |                                       |   |
| 12 (Intento 3)               |                                       |   |
| Promedio 12 cm               |                                       |   |
| 16 (Intento 1)               |                                       | Respuesta: la columna de 16 cm fue la que menos resistió apenas soportó cargas menores a 900 N, confirmando que a mayor longitud la columna se vuelve más débil Y fácil con menor carga debido al pandeo. |
| 16 (Intento 2)               |                                       |   |
| 16 (Intento 3)               |                                       |   |
| Promedio 16 cm               |                                       |   |

*Nota. Parte de la propuesta de aula que busca desglosar la variable longitud y su relación con la cargada de pandeo que soporta una columna.*

Para ello, la experimentación actúa como mecanismo clave para integrar el nuevo lenguaje algebraico presente en la ecuación de Euler, con los conocimientos previos. Siguiendo a Arca et al. (1190, p. 6) los estudiantes llegan al aula con estructuras cognitivas complejas y coherentes, no con ideas sueltas; es por ello, que no se debe “reordenar” desde cero, sino conectar con lo ya existente. Por el contrario, el conocimiento se construye “insertándose constructivamente en esta organización de conocimiento [...] tratando de enriquecerla, de desarrollarla sin destruirla” (Arca et al., 1990, p. 6). Es decir, es intervenir sin invalidar el conocimiento previo, usando la experimentación como medio para expandir y formalizar ese conocimiento. Así, al manipular cada factor de manera controlada, los estudiantes no solo analizan la ecuación, sino que tejen puentes entre su experiencia y el formalismo matemático.

Este desglose experimental refleja la metáfora de la “digestión” cognitiva que propone (Arca et al., 1990, p. 2), donde las estructuras formales se descomponen y reconstruyen desde la experiencia directa. Al igual que la digestión transforma los alimentos en nutrientes asimilables, la experimentación descompone la ecuación en variables manipulables para que el estudiante la reconstruya con sentido propio.

La etapa 5, (Influencia de factores) Esta etapa trasciende la recolección de datos y busca articular coherentemente los hallazgos experimentales dentro de un modelo predictivo y multivariable. Su fundamento es la idea de que el conocimiento no se construye reordenando

fragmentos, sino enriqueciendo y extendiendo estructuras cognitivas ya existentes (Arca et al., 1990, p. 6).

Los estudiantes, al comparar la influencia relativa de cada variable (longitud, material, geometría), siguen explorando y avanzan desde relaciones orden que ya son cuantitativas, hacia un análisis integrado que refleja la interdependencia de los factores, que se organizan en la ecuación de Euler (relaciones complejas), para esto se proponen preguntas como las que se muestra en la imagen (23). (En el anexo A se encuentran las guías completas de esta etapa).

*Imagen 23 Parte de la propuesta de aula que corresponde a la influencia de los factores*

Recuerda los 5 materiales de la lista que escribiste con anterioridad. Considera ahora que la columna hecha con el material que resiste menos carga tiene la menor longitud y, la columna hecha del material que resiste la mayor carga tiene la mayor longitud. ¿Esto cambia el orden de los materiales?, si la respuesta es verdadera escribe el nuevo orden y justifica, de lo contrario solo justifica tu respuesta.

*Nota. Parte de la propuesta de aula en donde se evidencia una pregunta integradora*

En conjunto, estas cinco etapas estructuran un puente desde la experiencia cotidiana hasta la ecuación de Euler para columnas, articulando cada etapa con un propósito claro, una actividad concreta y una base teórico-metodológica definida.

La propuesta se implementó en una institución educativa departamental ubicada en el municipio de Subachoque (Cundinamarca), con nueve estudiantes de grados décimo y undécimo que participaron voluntariamente. El entorno rural del municipio, con sus construcciones y estructuras características, brinda referentes cercanos que facilitan conectar el fenómeno del pandeo con situaciones observables por los estudiantes. La selección de los participantes se realizó mediante convocatoria abierta, priorizando su disposición hacia el trabajo y la posibilidad de conformar grupos reducidos que permitieran un acompañamiento personalizado durante todo el proceso.

Los estudiantes se organizaron en tres equipos de trabajo, lo que permitió un acompañamiento cercano, la resolución oportuna de dudas y el registro detallado de sus procesos durante el desarrollo de la propuesta. En la tabla (6) se sintetizan las actividades que conforman la propuesta de aula, detallando: el propósito, la actividad principal del grupo, el procedimiento que realizan los estudiantes, el factor estructural analizado y la base teórica de cada etapa. Así, se ofrece una visión integral y estructurada de la propuesta de aula basada en ingeniería inversa.

Una vez diseñada y puesta en marcha la propuesta, el siguiente paso consistió en observar, registrar y analizar lo que realmente ocurría durante su implementación: cómo los estudiantes iban integrando la experiencia, el lenguaje y el conocimiento a lo largo de las cinco etapas. Ese análisis es el objeto del capítulo que viene.

Tabla 6 Descripción de la propuesta de aula

| Etapa  | Propósito   | Actividad principal los grupos   | Procedimiento que realizan los grupos  | Factor estructural analizado              | Base teórico-metodológica   |
|--|---|--|--|---|---|
| 1. Pre-experiencia.<br><br>Tiempo:<br>10 min   | Activar y valorar los conocimientos previos del estudiante, conectando con sus vivencias cotidianas y reconociendo su universo de significados fuera del aula.      | Identificación de columnas y estructuras en su entorno.  | Reconocimiento de objetos reales que utilicen columnas (edificios, mesas, sillas, estructuras del colegio). Algunas preguntas orientan esta actividad, como: ¿Qué cosas en tu entorno se sostienen con columnas? ¿Qué crees que puede hacer que una columna se doble o se rompa? Dibujo y descripción de una experiencia previa de fallo estructural (ej.: columnas con humedad, mala distribución de peso). | —   | Partir de la experiencia cotidiana para construir puentes cognitivos (Arca et al., 1990). La ingeniería inversa comienza con el análisis contextual del "objeto de referencia" (Jiménez López et al., 2010) |
| Exploración y delimitación de los factores de pandeo<br><br>Tiempo:<br>10 min  | Delimitar y focalizar la atención en los factores que influyen en la resistencia al pandeo, partiendo de las intuiciones y redes cognitivas previas del estudiante. | Cuestionario guiado para explorar ideas previas sobre los factores: materiales, longitud y forma de las columnas.                        | Preguntas del Anexo A: ¿Crees que todos los materiales son igual de fuertes? Ordena materiales (cemento, piedra, hierro, metal, madera) de mayor a menor resistencia. ¿La longitud afecta la carga soportada? ¿La forma de la sección transversal (cilindro, rectángulo, triángulo) influye en la carga? Se pide justificación y en algunos casos dibujos comparativos.                                      | —   | Reconocer el "esfuerzo integrador previo" del estudiante (Arca et al., 1990). Se exploran factores de manera aislada para luego integrarlos en la ecuación.   |
| 3. Identificar la ecuación que relaciona la característica mecánica y los factores que influyen en esta<br><br>Tiempo:<br>10 min | Introducir la ecuación de Euler como un "producto terminado" que sintetiza las relaciones entre los factores explorados, usando un lenguaje algebraico potente.     | Familiarización con la ecuación de Euler.<br>$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(kL)^2}$ Identificación de cada variable y su significado físico. | Explicación de cada término: $P_{cr}$ (carga crítica de pandeo), $E$ (módulo de elasticidad del material), $I$ (momento de inercia de la sección transversal), $L$ (longitud de la columna), $k$ (factor de longitud efectiva según condiciones de apoyo). Se establece la conexión explícita con las actividades experimentales siguientes.   | E, L, I (presentados de manera integrada) | La ecuación se presenta como el "poste conceptual" que organiza el conocimiento (Arca et al., 1990). Es el objeto de análisis de la ingeniería inversa (Ramos Acosta, 2013).                                |
| 4. Desglose experimental por variable La   | Desmontar la ecuación factor por factor mediante  | Parte A – Exploración de E: Experimentar con columnas de diferentes  | Procedimiento detallado para cada parte:<br>1. Reconocimiento de materiales y montaje: Identificar los especímenes   | Parte A:                                  | La experimentación actúa como "digestión cognitiva" (Arca et al.,   |

|   |   |   |   |  |   |
|---|---|---|---|--|---|
| <p>experimentación como puente unificador</p> <p>Tiempo:<br/>         Parte A:<br/>         45 min<br/>         Parte B:<br/>         45 min<br/>         Parte C:<br/>         45 min<br/>         Total:<br/>         135 min<br/>         (2h 15min)</p> | <p>experimentación controlada, construyendo puentes entre la experiencia concreta y el formalismo matemático.</p> | <p>materiales (ABS, TPU, PLA) sometidas a carga progresiva hasta el pandeo. Registrar carga crítica y comparar resultados.</p> <p>Parte B – Exploración de I: Experimentar con columnas del mismo material (PLA) pero con diferente sección transversal (circular, cuadrada, triangular). Registrar y comparar cargas críticas.</p> <p>Parte C – Exploración de L: Experimentar con columnas del mismo material y forma, pero con diferentes longitudes (8 cm, 12 cm, 16 cm). Registrar y comparar cargas críticas.</p> | <p>según la variable en estudio (material, forma o longitud).</p> <p>2. Tara en balanza digital: Colocar cada columna sobre la balanza y realizar el tareo para excluir su peso de las mediciones.</p> <p>3. Posicionamiento: Colocar la columna verticalmente entre la báscula digital (en la base, para registrar la carga aplicada) y la jeringa del sistema hidráulico/electromecánico (en la parte superior, para aplicar carga progresiva).</p> <p>4. Aplicación de carga y registro: Mediante el sistema electromecánico, aumentar lentamente la carga sobre la columna, monitoreando la báscula. Anotar el valor de carga crítica en Newtons en el momento del pandeo o colapso (conversión de gramos a <math>\text{kg} \times 9.8 \text{ m/s}^2</math>).</p> <p>5. Repetición: Realizar 3 intentos (repeticiones) por cada condición experimental (por cada material, forma o longitud).</p> <p>6. Comparación y conclusión: Comparar los promedios obtenidos y establecer relaciones de orden (ej.: "a mayor longitud, menor carga crítica"). Responder a la pregunta de conclusión específica de cada parte:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Parte A: "Establece el orden de resistencia de los materiales (PLA, ABS y TPU) del que más soporte carga al que menos soporte"</li> <li>• Parte B: "Establece el orden de resistencia de las columnas respecto a su sección transversal (triangular, cuadrada y circular)."</li> </ul> | <p><math>E</math> (módulo de elasticidad)<br/>         Parte B:<br/> <math>I</math> (momento de inercia)<br/>         Parte C:<br/> <math>L</math> (longitud).</p> | <p>1990), descomponiendo la ecuación en variables manipulables. Se enriquece el conocimiento previo sin destruirlo, insertando constructivamente el formalismo en la experiencia.</p> |
|---|---|---|---|--|---|

|  |   |   |   |   |   |
|--|---|---|---|---|---|
|  |   |   | • Parte C: "Establece el orden de resistencia de los materiales entorno a las longitudes (8cm, 12cm y 16cm)"  |   |   |
| 5. influencia de los factores<br><br>Tiempo<br>20min | Integrar los resultados experimentales en un modelo predictivo, ponderando la influencia de cada variable y consolidando la ecuación como herramienta explicativa | Reflexión final que articula los hallazgos de las tres partes experimentales. Comparación de la influencia relativa de E, I y L. Revisión y posible reordenamiento de ideas iniciales a la luz de los resultados. | Preguntas de reflexión final (Anexo A):<br>1. ¿Cuál fue el factor que más afectó la resistencia de las columnas?<br>2. Recuerda los 5 materiales de la lista que escribiste con anterioridad. Considera ahora que la columna hecha con el material que resiste menos carga tiene la menor longitud y, la columna hecha del material que resiste la mayor carga tiene la mayor longitud. ¿Esto cambia el orden de los materiales?<br>3. ¿Cómo cambian tus ideas iniciales después de hacer estos experimentos?<br>4. ¿Cómo se relaciona lo que hiciste hoy con las construcciones reales que ves en la vida diaria?<br>5. Considerando longitud y material simultáneamente, ¿cambia el orden de resistencia de los materiales?<br>6. ¿Es importante la homogeneidad del material en una columna? | Relación multivariable integrada: $E, I, L$ en $P_{cr}$ | Cierre del ciclo, desde la experiencia al modelo teórico coherente. Se materializa la "estrategia de colonización cognitiva" (Arca et al., 1990), donde el saber se reorganiza continuamente. |

*Nota. Describe de la propuesta de aula de 5 etapas basada en ingeniería inversa.*

## Capítulo IV

### Sistematizando la Propuesta de Aula

Este capítulo presenta el proceso de sistematización y análisis de los resultados obtenidos en la implementación de la propuesta de aula basada en ingeniería inversa. Su propósito central es reconocer, cómo a través de las actividades planteadas en la propuesta de aula los estudiantes integraron la experiencia práctica, la apropiación del lenguaje técnico y la construcción de conocimiento en torno a la ecuación de Euler para el pandeo de columnas. Para ello, se definieron categorías de análisis principales (Experiencia, Uso del Lenguaje, Integración del Conocimiento) y emergentes (Reconocimiento de Variables, Relaciones de Orden, Relaciones Complejas), las cuales se utilizaron para analizar respuestas de los grupos a lo largo de cinco etapas. El análisis revela la trayectoria del aprendizaje, desde el reconocimiento intuitivo y anecdótico del fenómeno, pasando por la experimentación controlada y la cuantificación de variables, hasta alcanzar en algunas ocasiones una comprensión multicausal.

Para reconocer cómo los estudiantes integran la experiencia, el lenguaje y el conocimiento en el estudio de la ecuación de Euler, se sistematizaron las actividades realizadas en cada etapa de la propuesta de aula. Este proceso de sistematización<sup>18</sup> es deliberado y reflexivo, y se guía por los objetivos y el contexto propio de este trabajo de grado. Como afirma Jara (2007), “no existe una ‘receta’ para sistematizar; depende básicamente de la propuesta” (p. 2). Álvarez (2007) complementa esta idea al definir la sistematización como “un proceso de reflexión orientado por una perspectiva teórica y un método de trabajo que permite organizar el análisis de la experiencia” (p. 5), lo que resalta su carácter flexible y situado.

En este trabajo de grado, un eje articulador es la tríada experiencia, lenguaje y conocimiento, teniendo en cuenta esto se establecen las categorías principales: Experiencia (E), Uso de Lenguaje (UL) e Integración del Conocimiento (IC). Y por su estrecha relación con este eje, surgen las categorías emergentes: Reconocimiento de Variables (RV), Relaciones de Orden (RO) y Relaciones Complejas (RC). Las descripciones de estas categorías se muestran la Tablas (7) y (8)

---

<sup>18</sup> La sistematización se dividió en dos etapas. En la primera, se utilizó la IA (NotebookLM) para filtrar las respuestas de los grupos, señalando los fragmentos que coincidían con las categorías predefinidas. En la segunda, el autor de este trabajo de grado revisó esos fragmentos y las respuestas originales dadas por cada uno de los grupos para validar, ajustar y definir las unidades de análisis. Tras esta validación, se prosiguió con los siguientes pasos de la sistematización.

**Tabla 7 Categorías Principales**

| Categorías Principales            |  |
|-----------------------------------|--|
| Nombre de la Categoría            | Descripción  |
| Experiencia (E)                   | Aborda el papel de las vivencias personales y la experimentación directa. Abarca desde la conexión con anécdotas cotidianas hasta la aplicación de los resultados experimentales para entender contextos reales más amplios.   |
| Uso de Lenguaje (UL)              | Reconoce el vocabulario utilizado: lenguaje cotidiano (uso de palabras y expresiones comunes), lenguaje híbrido (combinación de términos técnicos y explicaciones) y lenguaje técnico (empleo preciso del vocabulario especializado de la física o la ingeniería).   |
| Integración del Conocimiento (IC) | Esta categoría representa la síntesis final del aprendizaje, donde el estudiante articula de manera coherente la experiencia práctica, el lenguaje adquirido y los conceptos teóricos. Se evidencia cuando el alumno relaciona los distintos factores —como material, forma y longitud— para explicar el fenómeno del pandeo, utilizando un discurso que integra tanto términos técnicos como referencias a su contexto cotidiano. Esta integración muestra la internalización del saber, permitiéndole conectar lo vivido y lo experimentado con el marco formal de la ecuación de Euler. |

*Nota. Descripción de cada una de las categorías principales*

**Tabla 8 Categorías Emergentes**

| Categorías Emergentes            |   |
|----------------------------------|---|
| Nombre de la Categoría           | Descripción   |
| Relaciones de Orden (RO)         | Describe el establecimiento de comparaciones y jerarquías entre las variables a partir de la evidencia. Los grupos pasan de hacer afirmaciones cualitativas a establecer órdenes cuantitativos entre los materiales, las formas o las longitudes en función de la carga crítica medida. |
| Relaciones Complejas (RC)        | Representa el nivel de integración más avanzado, donde los grupos ponderan y articulan la influencia conjunta de varias variables. Se evidencia cuando se argumenta sobre la influencia relativa de un factor sobre otro, mostrando una comprensión multicausal                         |
| Reconocimiento de Variables (RV) | Reconoce si el grupo identifica y/o nombra las variables en la ecuación de Euler (material, longitud y forma) en los diferentes contextos.  |

*Nota. Descripción de cada una de las categorías emergentes*

### **Sistematizando las cinco etapas de la propuesta de aula**

La sistematización fue realizada en cinco etapas secuenciales<sup>19</sup>, siguiendo la estructura de la propuesta de aula basada en la ingeniería inversa. Este análisis por etapas permite observar de manera ordenada cómo los estudiantes integran la experiencia directa, el cambio de su lenguaje y

<sup>19</sup> La propuesta de aula completa, con las respuestas y desarrollos realizados por los estudiantes en cada etapa, se encuentra en el Anexo C.

la construcción del conocimiento, transitando desde sus nociones intuitivas y experiencias cotidianas hasta una comprensión aplicada y multicausal del fenómeno del pandeo. A

**Tabla 9** *Etapa 1: Categoría - unidad de análisis y correspondencia*

| <b>Etapa 1 - Pre-Experiencia</b> |  |  |
|----------------------------------|--|--|
| <b>Categoría</b>                 | <b>Unidad de Análisis (Evidencia Concreta)</b>   | <b>Correspondencia</b>   |
| Reconocimiento de Variables (RV) | G3: "Las paredes, los puentes, las casas, techos de canchas, edificios".   | La evidencia consiste en la descripción literal de objetos cotidianos que contienen columnas, cumpliendo con la etapa inicial de reconocimiento de variables en su contexto descriptivo. |
| Experiencia (E)                  | G3: "cuando hubo un temblor una de las columnas se abrió y se rompió". G1: Describe el fallo "Por el peso ejercido o acumulado en una silla...". | Se conecta una vivencia personal (temblor, silla) con el fenómeno de fallo de la columna (pandeo/rotura), permitiendo iniciar la comprensión de la característica estructural.           |
| Uso de Lenguaje (UL)             | G1, G2, G3: Empleo de términos comunes como: "se dobla," "se rompe," "peso," "mal construida," "terremoto".                                      | Los estudiantes usan vocabulario cotidiano y no técnico para describir las causas o consecuencias del fallo de una columna.  |

*Nota: Esta tabla muestra unidades de análisis en las que es posible reconocer elementos pertenecientes al lenguaje, la experiencia y el conocimiento en la Etapa 1 de la propuesta de aula.*

La primera etapa de la propuesta, la Pre-Experiencia, está diseñada para activar y reconocer los saberes previos de los estudiantes a partir de su entorno cotidiano. En las respuestas analizadas se observa cómo los grupos identifican elementos que contienen columnas —como puentes, casas, canchas o edificios— y relatan experiencias personales asociadas a fallos estructurales, como un temblor que rompió una columna o el colapso de una silla por exceso de peso. Esta etapa no solo moviliza el reconocimiento de variables (RV) del contexto, sino que también evidencia el componente experiencia (E), al vincular vivencias concretas con el fenómeno físico del pandeo o la rotura. Además, se percibe un uso del lenguaje (UL) cotidiano y no técnico —con términos como “se dobla”, “se rompe”, “peso” o “terremoto”— que refleja una conceptualización inicial basada en la experiencia directa.

**Tabla 10** Categoría - unidad de análisis y correspondencia

| <b>Etapa 2: Exploración y delimitación de los factores de pandeo</b> |   |   |
|--|---|---|
| <b>Categoría</b>   | <b>Unidad de Análisis (Evidencia Concreta)</b>  | <b>Correspondencia</b>  |
| Reconocimiento de Variables (RV)                                     | G3: Nombra la variable material: "No todos los materiales no son igual de resistentes". G3: Nombra la variable longitud: "La longitud de una columna sí afecta...".       | Los grupos nombran y asocian explícitamente las variables de material y longitud con el resultado de resistencia, lo cual es propio del nivel racional de RV. |
| Relaciones de Orden (RO)   | G3: "cuándo es más larga tiende a ser más inestable al ponerle un peso de carga". G1: Una columna más grande soporta más peso, pero "se dobla y no soporta tanto tiempo". | El grupo 3 establece la relación inversa correcta (mayor longitud igual a menor estabilidad/resistencia), relacionando la variable con la carga soportada.    |
| Uso de Lenguaje (UL)   | G3: Introduce términos técnicos ("resistencia", "propiedades físicas", "sección transversal") y los mezcla con expresiones cotidianas ("se raja", "se abre").             | Se reconoce la alternancia entre vocabulario técnico apropiado y expresiones comunes, lo que define el lenguaje como híbrido.                                 |

*Nota: Esta tabla muestra unidades de análisis en las que es posible reconocer elementos pertenecientes al lenguaje, la experiencia y el conocimiento en la Etapa 2 de la propuesta de aula.*

La segunda etapa, las Preguntas de Orientación, está diseñada para focalizar y profundizar las variables clave —material, longitud y forma— que influyen en la resistencia de una columna, guiando a los estudiantes desde sus nociones intuitivas hacia un reconocimiento más estructurado de estos factores (Imagen 24). En las respuestas analizadas se observa cómo los grupos comienzan a nombrar y diferenciar explícitamente las variables. Por ejemplo, el Grupo 3 reconoce que "no todos los materiales son igual de resistentes" y que "la longitud de una columna sí afecta" a la carga soportada, evidenciando un reconocimiento de variables (RV) que trasciende lo descriptivo y se aproxima a una identificación fundada de los factores involucrados en el fenómeno del pandeo.

**Imagen 24** Grupo de trabajo dando respuesta a la propuesta de aula.



*Nota. Los estudiantes desarrollando la propuesta de aula de forma colaborativa.*

Además, los estudiantes empiezan a establecer relaciones de orden (RO) entre las variables y la resistencia. El Grupo 3 señala que una columna más larga "tiende a ser más inestable al ponerle un peso de carga", mientras que el Grupo 1 afirma que una columna más grande soporta más peso, pero "se dobla y no soporta tanto tiempo". Estas afirmaciones reflejan una comprensión inicial de la relación inversa entre longitud y carga, aunque aún matizada por percepciones intuitivas. Paralelamente, se evidencia un uso del lenguaje (UL) en transición: los estudiantes incorporan términos técnicos como "resistencia", "propiedades físicas" o "sección transversal", pero los combinan con expresiones cotidianas como "se raja" o "se abre". Este lenguaje híbrido revela un proceso de apropiación conceptual en el que el conocimiento formal comienza a integrarse con el bagaje experiencial previo.

**Tabla 11** Etapa 4: Categoría - unidad de análisis y correspondencia

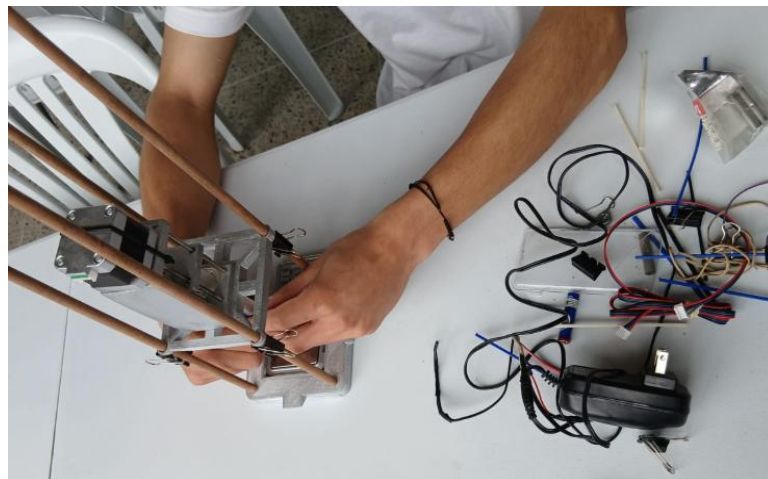
| <b>Etapa 4:</b> Desglose experimental por variable la experimentación como puente unificador |                          |   |   |
|--|--------------------------|---|---|
| <b>Parte</b>   | <b>Categoría</b>         | <b>Unidad de Análisis (Evidencia Concreta)</b>  | <b>Correspondencia</b>  |
| Parte A: Explorar Material (E)   | Relaciones de Orden (RO) | G1: "Primero él PLA con 6629 N, luego el ABS con 1664 N y por último el TPU con 46N".   | El grupo establece un orden de resistencia claro entre los materiales (PLA > ABS > TPU) basándose en los datos experimentales obtenidos.  |
| Parte B: Explorar Forma (I)  | Relaciones de Orden (RO) | G2: La que mayor resiste tiene es la triangular (1909), y sigue la cuadrada (1865). G3: Concluye que "es mejor utilizar la forma triangular... porque dio más resistencia". | Los grupos ordenan las formas (triangular, cuadrada, cilíndrica) según su resistencia, asociando la variable de la forma (I) con el resultado de la carga máxima.                             |
| Parte C: Explorar Longitud (L)   | Relaciones de Orden (RO) | G2: El orden de resistencia es 8 cm > 12 cm > 16 cm, justificando que "al que sea más pequeño y más ancho hace que la resistencia sea mayor".                               | El grupo identifica la relación inversa correcta entre la longitud y la resistencia (más pequeño igual a mayor resistencia), asociando la variable longitud (L) con el resultado de la carga. |
| General (Partes A, B, C)   | Experiencia (E)          | G1: "Hemos visto reglas, tubos, sillas o varillas, cuando son largas se doblan con más facilidad mientras las cortas casi no se doblan".                                    | El grupo establece una conexión clara entre los resultados del experimento (longitud y pandeo) y la observación de objetos comunes que se doblan en su vida diaria.                           |

*Nota. Esta tabla muestra unidades de análisis en las que es posible reconocer elementos pertenecientes al lenguaje, la experiencia y el conocimiento en la Etapa 4 de la propuesta de aula.*

La cuarta etapa, el desglose experimental, constituye el núcleo práctico donde los estudiantes manipulan, miden y relacionan las variables de la ecuación de Euler (material, forma

y longitud) de manera controlada (Imagen 25). A través de las tres partes (A, B, C), los grupos no solo recolectan datos, sino que los interpretan estableciendo relaciones de orden (RO) claras y cuantitativas entre cada variable y la resistencia observada. En la Parte A, el Grupo 1 ordena los materiales según su resistencia: "Primero el PLA con 6629 N, luego el ABS con 1664 N y por último el TPU con 46 N", evidenciando una comprensión empírica de la influencia del módulo de elasticidad (E). En la Parte B, los Grupos 2 y 3 clasifican las formas por su capacidad de carga, identificando a la sección triangular como la más resistente, lo que refleja una asociación directa entre la geometría (momento de inercia I) y el comportamiento estructural. En la Parte C, el Grupo 2 establece correctamente la relación inversa entre longitud y resistencia:  $8\text{ cm} > 12\text{ cm} > 16\text{ cm}$ , justificando que "al ser más pequeño y más ancho hace que la resistencia sea mayor". Este proceso de ordenamiento sistemático indica que los estudiantes están internalizando las relaciones cuantitativas subyacentes a la ecuación de Euler, transitando desde nociones cualitativas hacia un razonamiento basado en evidencias experimentales.

*Imagen 25 Inicio de la cuarta etapa.*



*Nota. Armado de la prensa electromecánica, previo al inicio de las mediciones correspondientes a la cuarta etapa.*

Además, esta etapa profundiza la integración experiencia (E) al conectar los resultados experimentales con observaciones de la vida cotidiana. El Grupo 1, por ejemplo, vincula los hallazgos sobre la longitud con su experiencia previa: "Hemos visto reglas, tubos, sillas o varillas, cuando son largas se doblan con más facilidad mientras las cortas casi no se doblan". Esta conexión entre el experimento controlado y las vivencias personales refuerza la significatividad del aprendizaje y permite que el conocimiento se ancle en un marco referencial concreto. El lenguaje

utilizado en esta etapa es ya más preciso ya que está vinculando magnitudes (6629N, 1664N y 46N) aunque aún se apoya en justificaciones intuitivas.

**Tabla 12** Etapa 5: Categoría - unidad de análisis y correspondencia

| <b>Etapa 5: Influencia de los factores</b> |   |  |
|--|---|--|
| <b>Categoría</b>                           | <b>Unidad de Análisis (Evidencia Concreta)</b>  | <b>Correspondencia</b>   |
| Relaciones Complejas (RC)                  | G1: "no cambie el orden de los materiales ya que aunque la longitud influye en poco la resistencia depende más del material".                                     | El grupo compara dos variables (material y longitud) y argumenta cuál tiene la mayor influencia sobre la resistencia.  |
| Experiencia (E)                            | G1: "Se relaciona ya que en edificios, puentes y casas usan columnas fuertes y bien diseñadas para que no se doblen y colapsen".                                  | El grupo aplica el conocimiento adquirido sobre resistencia de columnas a contextos de ingeniería de gran escala (edificios, puentes), lo que se considera una extrapolación.          |
| Uso de Lenguaje (UL)                       | G3: "es importante que la mezcla de los materiales le sea homogénea para que soporte la carga". G1: "una columna homogénea reparte mejor la carga y resiste más". | Se mezcla el término técnico "homogénea" su utilidad ("soporte la carga", "reparte mejor la carga"), indicando un lenguaje híbrido consolidado.  |
| Integración del Conocimiento (IC)          | G3: Las ideas cambian de manera que "no todas las columnas no pueden depender del solo material de construcción sino también en la longitud y el peso".           | La conclusión integra el aprendizaje sobre múltiples variables (conocimiento) basándose en la experiencia de los experimentos, lo que muestra la articulación de la tríada conceptual. |

*Nota. Esta tabla muestra unidades de análisis en las que es posible reconocer elementos pertenecientes al lenguaje, la experiencia y el conocimiento en la Etapa 5 de la propuesta de aula.*

La quinta y última etapa, la Integración del Conocimiento (IC), representa la síntesis reflexiva en la que los estudiantes articulan y ponderan los hallazgos obtenidos a lo largo de todo el proceso, avanzando hacia un pensamiento multicausal y aplicado. En esta fase, los grupos demuestran su capacidad para establecer relaciones complejas (RC) entre las variables estudiadas. Por ejemplo, el Grupo 1 argumenta: "no cambie el orden de los materiales ya que, aunque la longitud influye en poco la resistencia depende más del material". Esta afirmación evidencia una evaluación ponderada de la influencia relativa de cada factor, superando el análisis aislado de variables y acercándose a una comprensión integral propia de la ecuación de Euler. En esta etapa de integración, la categoría experiencia (E) se evidencia cuando los estudiantes relacionan los resultados experimentales con situaciones de la vida real. Por ejemplo, el Grupo 1 señala que lo aprendido "se relaciona ya que en edificios, puentes y casas usan columnas fuertes y bien diseñadas para que no se doblen".

El uso del lenguaje (UL) en esta etapa refleja una apropiación consolidada y efectiva del vocabulario técnico, integrado con expresiones cotidianas. Los grupos emplean términos como

"homogéneo" —el Grupo 3 afirma que "es importante que la mezcla de los materiales le sea homogénea para que soporte la carga"— y lo combinan con descripciones accesibles como "reparte mejor la carga" (Grupo 1). Este lenguaje híbrido denota que los estudiantes han interiorizado conceptos clave y son capaces de comunicarlos con claridad, reduciendo la brecha entre el lenguaje cotidiano inicial y el lenguaje técnico de la disciplina. Finalmente, se evidencia una clara Integración del Conocimiento (IC) donde experiencia, lenguaje y conocimiento convergen en una comprensión integrada. El Grupo 3 sintetiza este avance al reconocer que sus ideas cambiaron porque "no todas las columnas no pueden depender del solo material de construcción sino también en la longitud y el peso". Esta conclusión no solo resume el aprendizaje multicausal, sino que también refleja cómo la experiencia y el lenguaje técnico se han articulado para construir un conocimiento sobre el pandeo.

El análisis de estas cinco etapas a partir de la sistematización permite reconocer cómo los grupos integran la experiencia, el lenguaje y el conocimiento al estudiar la ecuación de Euler. Al principio, los alumnos reconocen las variables a partir de su entorno y experiencias personales, usando un lenguaje cotidiano. Luego, al profundizar en los factores que influyen en el pandeo, empiezan a establecer relaciones cualitativas e incorporan términos técnicos, formando un lenguaje híbrido. Durante la experimentación, estos conocimientos se afianzan al medir y ordenar los datos, lo que les permite validar las relaciones entre material, forma, longitud y resistencia. Finalmente, en la etapa de integración, se presentan en algunos fragmentos de las respuestas se evidencia que los estudiantes son capaces de argumentar cómo interactúan estos factores, aplicando lo aprendido en contextos reales, y expresando algunas sus conclusiones con un lenguaje técnico. Este proceso muestra que los estudiantes lograron conectar sus experiencias previas y los resultados experimentales con los factores presentes en la ecuación de Euler para el pandeo de las columnas.

## **Reflexiones finales**

En este trabajo de grado se diseñó, implementó y sistematizó una propuesta de aula basada en ingeniería inversa para enseñar la ecuación de Euler del pandeo de columnas a estudiantes de educación media. La propuesta partió de la experiencia cotidiana de los estudiantes y, mediante un proceso estructurado en cinco etapas, los guía desde la observación cualitativa hacia la experimentación controlada y la formalización matemática, logrando el objetivo general de integrar experiencia práctica, lenguaje y conocimiento teórico.

El análisis de la sistematización mostró que los estudiantes transitaron desde un reconocimiento intuitivo de las variables (material, longitud, forma) y un lenguaje cotidiano, hacia la cuantificación de relaciones de orden y, en algunos casos, hacia la comprensión de relaciones complejas entre múltiples factores. Esto evidenció que la ingeniería inversa permitió a los estudiantes comprender los factores presentes en la ecuación de Euler, conectando progresivamente sus vivencias, los resultados experimentales y el lenguaje algebraico, respondiendo así a la pregunta problema planteada.

El material didáctico (prensa electromecánica, columnas) fue fundamental para que el docente (autor de este trabajo), primero, y los estudiantes, después, controlaran y midieran las variables de la ecuación de Euler, cumpliendo con el segundo objetivo específico. Al respecto se destaca que la actividad experimental orientada desde el control de variables es una estrategia que permite que los estudiantes transformen sus intuiciones y relaciones de orden cualitativas (experiencia) en datos cuantificables, y que, al nombrar y analizar estos datos, enriquezcan su vocabulario hacia un lenguaje técnico-híbrido. Este proceso experimental funcionó como un puente concreto que facilitó la construcción de un conocimiento estructurado, anclado tanto en la manipulación directa como en la formalización posterior.

Asimismo, el análisis de las respuestas de los estudiantes permitió reconocer cómo se integraron las categorías experiencia, lenguaje y conocimiento a lo largo de las etapas, de tal manera que se pudo documentar la trayectoria de aprendizaje: los grupos partieron de descripciones anecdóticas, progresaron hacia la identificación y cuantificación de variables durante la experimentación, y algunos alcanzaron a formular conclusiones que ponderaban la influencia relativa de distintos factores, evidenciando la internalización de los conceptos clave de la ecuación de Euler. Esto cumplió con el tercer objetivo específico del trabajo.

El primer objetivo, analizar la ecuación mediante ingeniería inversa conceptual, se logró en el capítulo teórico al descomponer la ecuación en sus variables e hipótesis subyacentes y permitir establecer el marco de referencia necesario para diseñar la propuesta de aula. Este desglose identificó los "componentes" del fenómeno (E, I, L) y sus interrelaciones, lo cual fue esencial para definir las variables que se explorarían experimentalmente y para estructurar las preguntas guía que orientaron la deconstrucción del concepto por parte de los estudiantes.

Como implicación principal, en el trabajo de grado se concluye que la ingeniería inversa es una metodología para construir puentes entre la abstracción de las ecuaciones físicas y la experiencia tangible, alineándose con los lineamientos del MEN que promueven metodologías activas y contextualizadas. Este hallazgo local adquiere una dimensión más amplia al considerar los aportes que este trabajo de grado ofrece al campo de la didáctica de la física. Esta contribución se materializa en cuatro aportes concretos que se desarrollan a continuación.

En primer lugar, se propone una ruta metodológica de ingeniería inversa conceptual para la enseñanza de ecuaciones físicas, transferible a otros contextos y contenidos. Esta ruta, estructurada en cinco etapas —que van desde la activación de experiencias cotidianas hasta la formalización matemática pasando por el desglose experimental—, ofrece a otros docentes un esquema claro para abordar la brecha entre la abstracción y la realidad en sus propias clases.

En segundo lugar, el trabajo constituye una validación operativa de la tríada experiencia-lenguaje-conocimiento propuesta por Arcà, Guidoni y Mazzoli. Al demostrar cómo los estudiantes transitan desde relaciones de orden cualitativas hasta relaciones complejas cuantificables mediante una secuencia didáctica concreta, se tiende un puente entre la epistemología (cómo se construye el conocimiento) y la didáctica aplicada (cómo se enseña), mostrando que esta tríada no es solo un marco teórico inspirador, sino una herramienta de diseño pedagógico perfectamente operable.

En tercer lugar, se ofrece una contribución práctica para contextos con recursos limitados. Se indica que es posible abordar conceptos de alto nivel —como la ecuación de Euler para el pandeo— con materiales de bajo costo, fabricación digital accesible (impresión 3D) y diseños experimentales sencillos pero rigurosos. Esto abre una posibilidad concreta para democratizar el acceso a experiencias de aprendizaje, evidenciando que la falta de equipamiento sofisticado no es una barrera insalvable para una enseñanza de la física contextualizada.

En cuarto lugar, de esta experiencia se derivan implicaciones directas para la formación inicial y continua de docentes de física. La propuesta invita a repensar los espacios en las

licenciaturas: no basta con que los futuros profesores dominen el contenido disciplinar, también es fundamental desarrollar su capacidad para diseñar experiencias que conecten el conocimiento con la realidad de sus estudiantes.

Estos cuatro aportes, lejos de agotar las posibilidades de la propuesta, abren caminos para su proyección y mejora. Para futuras implementaciones, se sugiere ampliar el tiempo destinado a la etapa de integración, permitiendo a los estudiantes profundizar en el análisis multivariable y establecer relaciones más complejas entre los factores estudiados, así como vínculos explícitos entre las hipótesis, la ecuación de Euler y su alcance. Asimismo, se recomienda considerar la inclusión de software de simulación que complemente la experimentación física, ofreciendo la posibilidad de explorar situaciones límite o condiciones ideales difíciles de reproducir en el laboratorio. De esta manera, se continuaría fortaleciendo el puente entre la experiencia tangible y la formalización teórica que esta propuesta ha comenzado a construir.

## Referencias Bibliográficas

- Arboledas Brihuega, D. (2014). Cálculo para ingenierías (1ª ed.). Alfaomega Grupo Editor.
- Arcà, M., Guidoni, P., & Mazzoli, P. (1990). El desarrollo del proceso cognitivo como tarea de la educación (Capítulo I). En Enseñar Ciencia. Cómo empezar: reflexiones para una educación científica de base. Ediciones Paidós.
- Hibbeler, R. C. (2017). Mecánica de materiales (9a ed.). Pearson.
- Arnau Gras, J. (s.f.). Los diseños experimentales en psicología. Universidad de Barcelona, Laboratorio de Psicología Experimental.
- Beer, F. P., Johnston, E. R., DeWolf, J. T., & Mazurek, D. F. (2010). Mecánica de materiales (5ª ed.). McGraw-Hill Interamericana. (Trabajo original publicado en 2009).
- Bernal, J. R. (2005). Hormigón armado: columnas (1ª ed.). Nobuko.
- Carrion A., S. A., Martínez González, D. M., & Villamil V., E. G. (2015). Aplicación de la ingeniería inversa a un problema de curso de transferencia de calor. Revista Educación en Ingeniería, 10(20), 1-11.
- Castro, M. E., & Battaglia, M. A. (2014). Recursos para el diseño de estructuras resistentes: Hormigón armado (2.ª ed., Tomo III). Nobuko.
- Cervera Ruiz, M., & Blanco Díaz, E. (2002). Mecánica de estructuras. Libro 1: Resistencia de materiales (2.ª ed.). Edicions de la Universitat Politècnica de Catalunya.
- Colprensa. (2021). Calle sexta con NQS [Imagen modificada]. Caracol Radio. [https://caracol.com.co/emisora/2021/08/27/bogota/1630078124\\_121849.html](https://caracol.com.co/emisora/2021/08/27/bogota/1630078124_121849.html)
- Cromer, A. (1998). Física en la ciencia y en la industria (J. Fernández Ferrer, Trad.). Editorial Reverté. (Obra original publicada en 1969).
- D'Andrea, R., Real, M., & Sastre, P. (2018). Análisis crítico de un dispositivo didáctico para el proceso de enseñanza y aprendizaje del lenguaje matemático. En Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (Vol. 31, pp. 1797-1810). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

- Duval, R. (2009). *Semiósis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais*. Livraria da Física.
- Empresa Metro de Bogotá. (2024, 13 febrero). Dos primeras columnas fundidas que sostendrán el viaducto de la Primera Línea del Metro de Bogotá [Imagen modificada]. Metro de Bogotá. <https://www.metrodebogota.gov.co/noticias/fundidas-las-dos-primeras-columnas-sostendran-viaducto-la-primera-linea-del-metro-bogota>
- Euler, L. (1744). *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti*. Marc-Michel Bousquet.
- Fitzgerald, R. W. (1996). *Mecánica de materiales* (Edición revisada, L. Ordóñez Reyna, Trad.; Reimpresión 2007). Alfaomega Grupo Editor.
- Garzón Quiroga, M. A. (2021). *Aplicación del cálculo en el análisis estructural* (Trabajo de grado). Universidad Pedagógica Nacional.
- Gere, J. M., & Goodno, B. J. (2009). *Mecánica de materiales* (7.<sup>a</sup> ed., J. L. Cárdenas, Trad.). Cengage Learning Editores. (Obra original publicada en 2009).
- Hibbeler, R. C. (2006). *Mecánica de materiales* (6<sup>a</sup> ed.). Pearson Educación.
- Jiménez López, E., Luna Bracamontes, A., García Velázquez, L. A., Martínez Molina, V. M., Luna Sandoval, G., Vázquez, J. D., & Arellano Rivera, L. (2010). *La ingeniería inversa como metodología para potenciar la enseñanza de la metrología*. Simposio de Metrología 2010. Centro Nacional de Metrología.
- Kassimali, A. (2015). *Análisis estructural*. Cengage Learning.
- Martínez Valcárcel, N. (2023). *Los modelos de enseñanza y la práctica de aula* (2<sup>a</sup> ed.). Lencina-Quílez. (Obra original publicada en 2004).
- Martínez, A. R. (2004). *Criterios fundamentales para resolver problemas de resistencia de materiales* (Vol. II, 1<sup>a</sup> ed., 1<sup>a</sup> reimp.). Equinoccio, Ediciones de la Universidad Simón Bolívar.

- Mejía, I., Maldonado, C., Bedolla, A., & García, C. J. (2015). Esfuerzos residuales generados en la soldadura de placas de acero inoxidable AISI 304 mediante el proceso SMAW. CONAMET/SAM.
- Mejía, M. R. (s.f.). Atravesando el espejo de nuestras prácticas: A propósito del saber que se produce y como se produce en la sistematización. PlanetaPaz. Expedición Pedagógica Nacional.
- Ministerio de Educación Nacional. (2004). Estándares Básicos de Competencias en Ciencias Naturales y Ciencias Sociales. <https://www.mineducacion.gov.co>
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas: Guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden. Imprenta Nacional de Colombia.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas: Guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden. Imprenta Nacional de Colombia.
- Monroy, M. E., Pinzger, M., & Arciniegas, J. L. (2024). Applied Reverse Engineering in Context. *Ingeniería y Competitividad*, 26(1), e-22112840.
- Monroy, M. E., Rodríguez, J. C., & Puello, P. (2018). La ingeniería inversa como herramienta didáctica: Un estudio de caso en el aprendizaje de la programación orientada a objetos. En \*Memorias de la 16th LACCEI International Multi-Conference for Engineering, Education, and Technology: "Innovation in Education and Inclusion"\*. LACCEI. <http://dx.doi.org/10.18687/LACCEI2018.1.1.65>
- Pérez Jácome, C. C. (2022). Actividades Tecnológicas Escolares de construcción y análisis basado en Ingeniería Inversa para estudiantes de tercer grado de Básica Primaria (Tesis de maestría). Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Ramos Acosta, D. (2013). Uso de la Ingeniería inversa como metodología de enseñanza en la formación para la innovación. *World Engineering Education Forum: Innovation In Research And Engineering Education: Key Factors For Global Competitiveness*, 1-7. <https://repositorio.escuelaing.edu.co/handle/001/2315>

Rodón, E. (1979). Tratado de construcción: Lo que debe saber el proyectista. Editorial Reverté.

Timoshenko, S. P. (1953). Elastic Stability (Cap. 8). En History of Strength of Materials.

Vargas Murillo, G. (2017). Recursos educativos didácticos en el proceso enseñanza aprendizaje. Cuadernos, 58(1), 1-7.

Vélez Moreno, L. M. (2008). Materiales Industriales. Teoría y aplicaciones. Instituto Tecnológico Metropolitano (ITM).

## Anexo A

En este anexo se presentan las guías de trabajo utilizadas durante la implementación de la propuesta de aula. Incluye las actividades desarrolladas en cada una de las cinco etapas: preguntas de pre-experiencia para activar saberes previos, exploración de factores, introducción a la ecuación de Euler, tablas para el registro de datos experimentales (material, forma, longitud) y preguntas de reflexión final para integrar los aprendizajes.

### GUÍA DE TRABAJO: MOMENTO 1

Grupo: \_\_\_\_\_ Curso: \_\_\_\_\_

#### ¿Qué hace resistente una columna?

##### *Propósito de la guía:*

Esta guía describe paso a paso los procedimientos a seguir, utilizando experiencias sencillas para conocer los factores que hacen que una columna sea más o menos resistente. Para finalizar comprendiendo las variables que están expresadas en la ecuación de pandeo de Euler.

Trabajarás desde tus propias experiencias, observaciones y palabras para llegar a entender conceptos como el módulo de elasticidad ( $E$ ), el momento de inercia ( $I$ ) y la longitud ( $L$ ), y cómo se relacionan con la resistencia de una columna.

##### *Pre- Experiencia*

1. ¿Qué piensas?

- ¿Qué cosas en tu entorno se sostienen o utilizan columnas?

---

---

---

---

---

---

---

- ¿Qué crees que puede hacer que una columna se doble o se rompa?

---

---

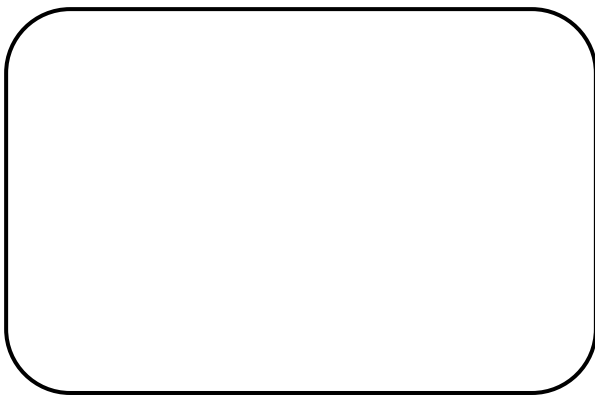
---

---

---

---

2. Dibuja y describe una experiencia previa en la que hayas visto una columna doblarse, romperse.



---

---

---

---

---

---

---

---

Piensa en las columnas que conoces y anota al menos cinco materiales con los que suelen estar construidas. ¿Crees que todos son igual de fuertes (soportan la misma carga) ?, justifica la respuesta. Y organiza los materiales del que más soporte al que menos soporte carga.

Materiales que pensó: \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_,  
\_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_.

Orden de mayor a menor carga

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_
4. \_\_\_\_\_
5. \_\_\_\_\_

Justificación

---

---

---

---

---

Si piensas que todos los materiales tienen la misma resistencia, justificación:

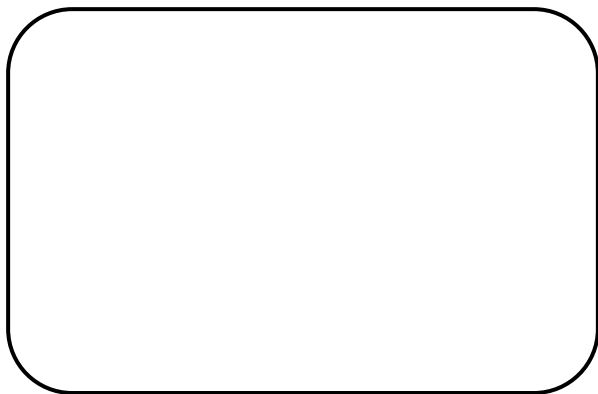
---

---

---

---

- ¿Crees que la longitud de una columna afecta la cantidad peso puede soportar sin doblarse? Justifica tu respuesta y dibuja al menos dos columnas de diferente longitud que estén sometidas a la misma carga.



Justificación:

---

---

---

---

---

---

---

---

---

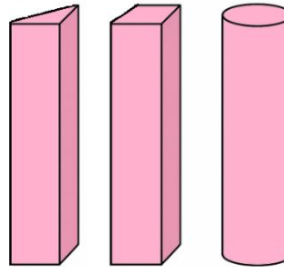
---

---

- ¿Te parece que la sección transversal (cilindro, rectángulo, triángulo) de una columna puede

influir en la carga que soporta una columna? Ver Figura 1 (Todas tiene la misma área transversal y la misma longitud). Justifica tu respuesta.

**Figura 1** Columnas de igual longitud y material pero diferente sección transversal.



*Nota. Todas las secciones transversales tienen la misma área.*

---

---

---

### **Un Poco de Teoría.**

La ecuación de Euler para el pandeo de columnas presenta la siguiente forma:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(kL)^2}$$

✓ Carga crítica de pandeo ( $P_{cr}$ ), es la máxima fuerza, carga o peso de compresión que soporta la columna sin pandearse o aplastarse en el caso que la longitud de la columna sea poca en comparación con la sección transversal.

✓ Módulo de elasticidad del material, Modulo de Young ( $E$ )

es un parámetro característico de cada material que indica la relación existente en la zona de comportamiento elástico de dicho material entre los incrementos de tensión aplicados en el ensayo de tracción y los incrementos de deformación relativa de producidos. [...] Para un material elástico lineal e isótropo, el módulo de Young tiene el mismo valor para una tracción que para una compresión, siendo una constante independiente del esfuerzo siempre que no exceda de un valor máximo denominado límite elástico (Vélez Moreno, 2008, p. 120).

✓ El factor de longitud efectiva ( $k$ ) determina la resistencia al pandeo de una columna según sus condiciones de apoyo, tomando los siguientes valores característicos:  $K = 1$  cuando

ambos extremos están articulados (permitiendo giro),  $k = 0.5$  si los extremos están empotrados (totalmente fijos), y  $k = 2$  para el caso de un extremo libre con otro empotrado, como ocurre en un poste de bandera.

- ✓ Momento de inercia de la sección transversal ( $I$ ) esta depende de la forma de la sección transversal de la columna
- ✓ Longitud de la columna ( $L$ ): que tan larga es columna.

### **PARTE A: El Tipo de Material Importa (Explorando $E$ )**

#### ***Suposición inicial:***

¿Es importante considerar el material a la hora de utilizar una columna en términos de la carga que soporta? Explica tu respuesta.

---

---

---

---

---

#### ***Relaciones con las vivencias:***

¿Dónde ha visto columnas hechas de cartón? ¿Y de plástico? ¿De metal?

---

---

---

---

---

¿Por qué cree que se eligen esos materiales en cada caso?

---

---

---

---

---

---

**Materiales:** - Columnas de ABS, TPU y PLA, balanza digital, Sistema electromecánico, hoja de registro y lápiz

**Procedimiento:**

1. Reconocer los materiales.

- ABS (Acrilonitrilo Butadieno Estireno) – Blanco.
- TPU (Poliuretano termoplástico) – Negro.
- PLA (Ácido Poliláctico) – Azul.

2. Colocar una de las columnas sobre la balanza digital y se realiza el tareo para excluir su peso de las mediciones.

3. La columna se posiciona verticalmente entre:

La báscula digital (en la base, para registrar la carga aplicada) y la jeringa del sistema hidráulico (en la parte superior, para aplicar carga progresiva).

4. Aplicación de carga y registro de datos:

Mediante el sistema electromecánico, incrementa lentamente la carga sobre la columna, monitoreando la carga registrada por la báscula y el comportamiento de la columna, anotando el valor de carga crítica en Newtons, (para esto realice la conversión de gramos a kilogramos y multiplique este valor por la gravedad  $9,8\text{m/s}^2$  en el momento en que la columna se pandee o colapse).

5. Repite tres veces este procedimiento por cada uno de los materiales.

6. Compare los resultados y registre las cargas máximas soportadas por cada material (ABS, TPU, PLA).

**Foto o dibujo del montaje:**



**Tabla de observación:**

| Material        | Longitud (m) | Carga máxima antes de pando (Newton) | Observaciones |
|-----------------|--------------|--------------------------------------|---------------|
| PLA (Intento 1) |              |                                      |               |
| PLA (Intento 2) |              |                                      |               |
| PLA (Intento 3) |              |                                      |               |
| Promedio PLA    |              |                                      |               |
| ABS (Intento 1) |              |                                      |               |
| ABS (Intento 2) |              |                                      |               |
| ABS (Intento 3) |              |                                      |               |
| Promedio ABS    |              |                                      |               |
| TPU (Intento 1) |              |                                      |               |
| TPU (Intento 2) |              |                                      |               |
| TPU (Intento 3) |              |                                      |               |
| Promedio TPU    |              |                                      |               |

***Establece el orden de resistencia de los materiales (PLA, ABS y TPU) del que más soporte carga al que menos soporte en caso de que se pueda y realice las observaciones que crea pertinente.***

---

---

---

---

---

---

***Conclusiones de la Parte A:***

---

---

---

---

**PARTE B: ¿La forma también cuenta? (Explorando I)**

***Suposición inicial:***

¿Ha visto columnas o estructuras de diferentes formas? ¿Dónde?

---

---

---

---

---

---

***Relaciones con las vivencias:***

¿Cree que todas las columnas deben tener siempre la misma forma para ser sólidas? ¿Qué formas diferentes podrías asociar con columnas resistentes y por qué?

---

---

---

---

---

---

---

---

¿Qué sección transversal (Ver figura 1) crees que puede soportar mayor carga en una columna?  
Justifica tu respuesta.

---

---

---

---

---

**Materiales:** Columnas de Ácido Poliláctico (PLA). Con diferentes secciones transversales: Cilíndrica, Rectangular, Triangular. Balanza digital, Sistema electromecánico, hoja de registro y lápiz.

**Procedimiento:**

1. Reconocer los materiales:

- PLA con sección transversal triangular.
- PLA con sección transversal cuadrada.
- PLA con sección transversal circular.

2. Colocar una de las columnas sobre la balanza digital y se realiza el tareo para excluir su peso de las mediciones.

3. La columna se posiciona verticalmente entre:

La báscula digital (en la base, para registrar la carga aplicada) y la jeringa del sistema hidráulico (en la parte superior, para aplicar carga progresiva).

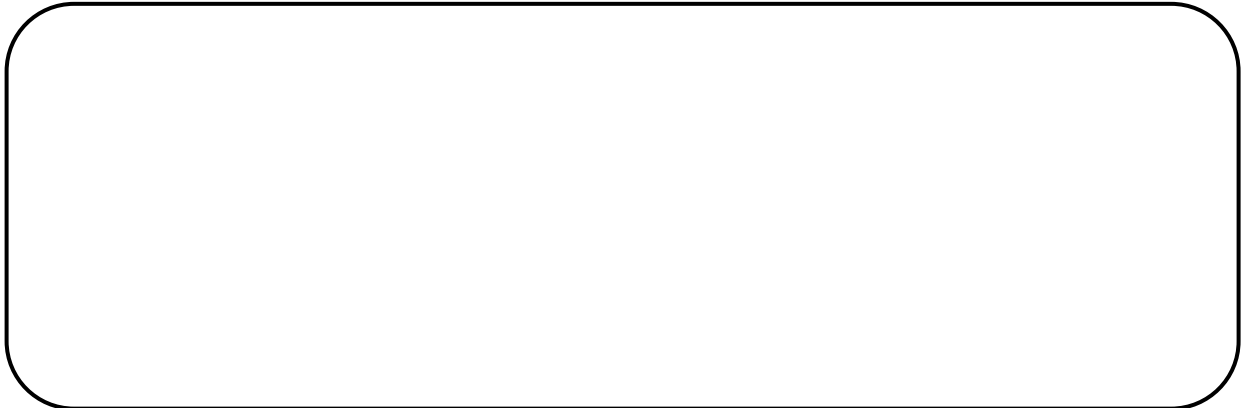
4. Aplicación de carga y registro de datos:

Mediante el sistema electromecánico, incrementa lentamente la carga sobre la columna, monitoreando la carga registrada por la báscula y el comportamiento de la columna, anotando el valor de carga crítica en Newtons, (para esto realice la conversión de gramos a kilogramos y multiplique este valor por la gravedad  $9,8\text{m/s}^2$  en el momento en que la columna se pandee o colapse).

5. Repite tres veces este procedimiento por cada una de las columnas.

6. Compara los resultados en relación con la carga máxima que soporta cada una de las columnas con sección transversal diferente y documente.

**Foto o dibujo del montaje:**



**Tabla de observación:**

| Forma                  | Carga Máxima (Newton) | Observación |
|------------------------|-----------------------|-------------|
| Cilíndrica (Intento 1) |                       |             |
| Cilíndrica (Intento 2) |                       |             |
| Cilíndrica (Intento 3) |                       |             |
| Promedio Cilíndrica    |                       |             |
| Cuadrada (Intento 1)   |                       |             |
| Cuadrada (Intento 2)   |                       |             |
| Cuadrada (Intento 3)   |                       |             |
| Promedio Cuadrada      |                       |             |
| Triangular (Intento 1) |                       |             |
| Triangular (Intento 2) |                       |             |
| Triangular (Intento 3) |                       |             |
| Promedio Triangular    |                       |             |

***Establece el orden de resistencia de las columnas respecto a su sección transversal (triangular, cuadrada y circular) del que más soporte carga al que menos soporte en caso de que se pueda, y realice las observaciones que crea pertinente.***

---

---

---

---

---

***Conclusiones de la Parte B:***

---

---

---

---

**PARTE C: ¿La longitud influye? (Explorando *L*)**

***Suposición inicial:***

¿Crees que las columnas más largas resisten más o menos carga? ¿Por qué?

---

---

---

---

---

---

---

***Relaciones con las vivencias:***

¿Qué objetos largos o cortos has visto doblarse?, ¿cuál de los dos es más fácil que se doble?

---

---

---

- ¿Cómo crees que afecta la longitud en una estructura real?

---

---

---

---

---

---

---

---

***Materiales:***

Columnas de igual material y forma de PLA, pero con distintas longitudes (8 cm, 12 cm, 16 cm).  
Balanza digital, Sistema electromecánico, hoja de registro y lápiz.

***Procedimiento:***

1. Reconocer los materiales:

- PLA con longitud de 8 cm.
- PLA con longitud de 12 cm.
- PLA con longitud de 16 cm.

2. Colocar una de las columnas sobre la balanza digital y se realiza el tareo para excluir su peso de las mediciones.

3. La columna se posiciona verticalmente entre:

La báscula digital (en la base, para registrar la carga aplicada) y la jeringa del sistema hidráulico (en la parte superior, para aplicar carga progresiva).

4. Aplicación de carga y registro de datos:

Mediante el sistema electromecánico, incrementa lentamente la carga sobre la columna, monitoreando la carga registrada por la báscula y el comportamiento de la columna, anotando el valor de carga crítica en Newtons, (para esto realice la conversión de gramos a kilogramos y multiplique este valor por la gravedad  $9,8\text{m/s}^2$  en el momento en que la columna se pandee o colapse).

5. Repite tres veces este procedimiento por cada una de las columnas.

6. Compare los resultados en relación la carga máxima soporta cada una de las columnas y la longitud de esta, documente.

**Foto o dibujo del montaje:**



**Tabla de observación:**

| Longitud (cm)  | Carga máxima antes de pandeo (Newton) | Observaciones |
|----------------|---------------------------------------|---------------|
| 8 (Intento 1)  |                                       |               |
| 8 (Intento 2)  |                                       |               |
| 8 (Intento 3)  |                                       |               |
| Promedio 8 cm  |                                       |               |
| 12 (Intento 1) |                                       |               |
| 12 (Intento 2) |                                       |               |
| 12 (Intento 3) |                                       |               |
| Promedio 12 cm |                                       |               |
| 16 (Intento 1) |                                       |               |
| 16 (Intento 2) |                                       |               |
| 16 (Intento 3) |                                       |               |
| Promedio 12 cm |                                       |               |

*Establece el orden de resistencia de los materiales en torno a las longitudes (8cm, 12cm y 16cm) del que más soporte carga al que menos soporte en caso de que se pueda, y realice las observaciones que crea pertinente.*

---

---

---

---

*Conclusiones de la Parte C:*

---

---

---

---

### **REFLEXIÓN FINAL**

1. ¿Cuál fue el factor que más afectó la resistencia de las columnas?

---

---

---

---

2. Escribe una explicación en tus palabras de por qué una columna se pandea o se colapsa.

---

---

---

---

3. ¿Cómo cambian tus ideas iniciales después de hacer estos experimentos?

---

---

---

---

4. ¿Cómo se relaciona lo que hiciste hoy con las construcciones reales que ves en la vida diaria?

---

---

---

---

5. Recuerda los 5 materiales de la lista que escribiste con anterioridad. Considera ahora que la columna hecha con el material que resiste menos carga tiene la menor longitud y, la columna hecha del material que resiste la mayor carga tiene la mayor longitud. ¿Esto cambia el orden de los materiales?, si la respuesta es verdadera escribe el nuevo orden y justifica, de lo contrario solo justifica tu respuesta.

Orden de mayor a menor carga

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_
4. \_\_\_\_\_
5. \_\_\_\_\_

Justificación

---

---

---

---

---

Si pienso que todos los materiales tienen la misma resistencia. Justifica tu respuesta:

---

---

---

---

---

6. ¿Es importante que el material de una columna sea homogéneo para que pueda soportar mejor la carga? Ejemplo, si una columna de madera tiene nudos o una columna de concreto presenta burbujas de aire, ¿crees que soportará la misma carga que una columna completamente homogénea? Explica tu respuesta.

---

---

---

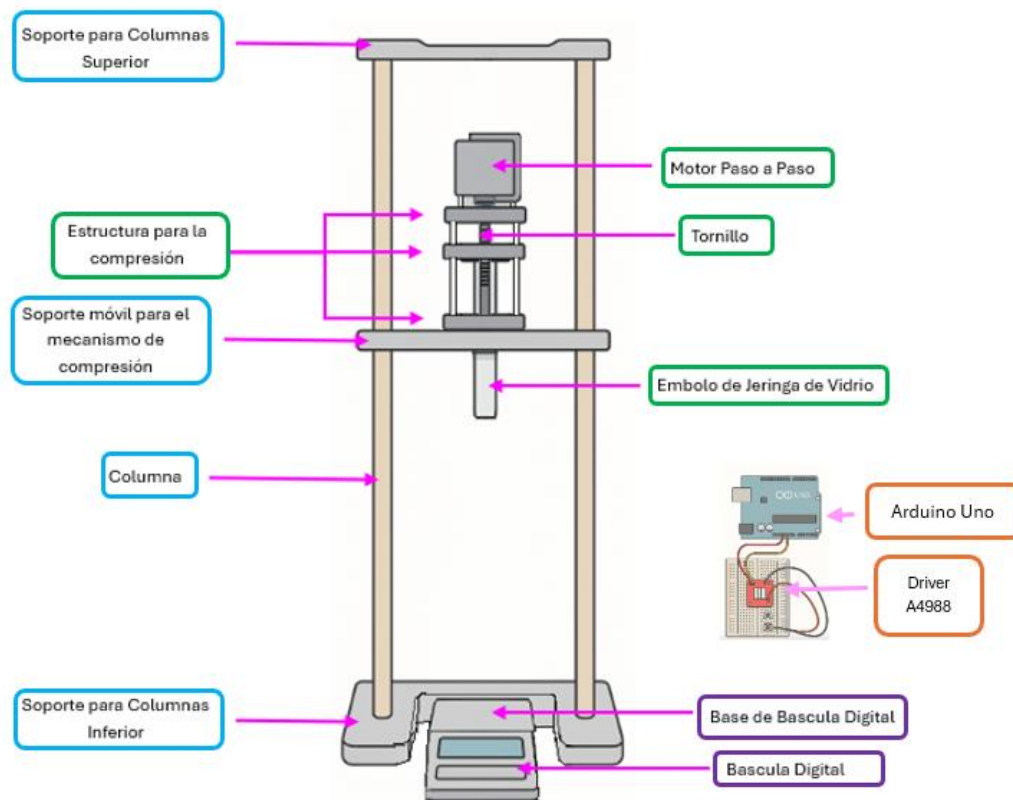
---

---

## Anexo B

En este anexo se documenta el proceso de diseño, fabricación y operación del material didáctico experimental: la prensa electromecánica y las columnas de prueba. Mediante descripciones técnicas e imágenes, se muestra cómo este equipamiento permite generar condiciones controladas y reproducibles para explorar, de forma aislada, los factores que determinan la resistencia al pandeo de columnas según la ecuación de Euler.

*Imagen 1* Prensas electromecánica



*Nota.* Esta imagen presenta un desglose detallado de los componentes de la Prensa Electromecánica. Para facilitar su identificación, cada parte principal se ha diferenciado mediante un código de colores, correspondiente al contorno del cuadro de texto asociado. Además, se especifican gráficamente las subpartes que constituyen cada uno de estos conjuntos.

*Fuente* El esquema base de esta imagen se generó a partir de una fotografía y se modificó con ayuda de una herramienta de IA (ChatGPT), recibiendo posteriormente ajustes adicionales.

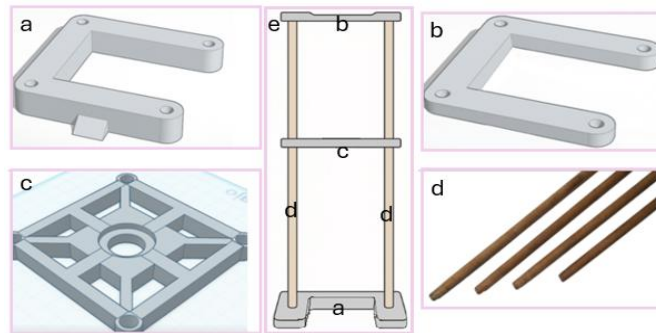
La mayoría de las partes de la prensa electromecánica —incluidas las estructuras de soporte y compresión, así como las columnas de prueba con sus distintas secciones transversales, longitudes y materiales— fueron fabricados mediante impresión 3D. Esta elección respondió no solo a consideraciones prácticas, sino a una decisión fundamentada en tres aspectos clave: garantizar precisión dimensional y control estricto de parámetros internos (como densidad y patrón

de relleno) para cumplir criterios como homogeneidad e isotropía; permitir la fabricación consistente de geometrías específicas y personalizadas, difícilmente alcanzables con otros métodos; y facilitar un bajo costo de producción.

La Prensa Electromecánica, se compone de cuatro subsistemas:

**Estructura de Soporte:** Marco rígido y desmontable que sostiene y alinea todos los componentes. (Imagen 2)

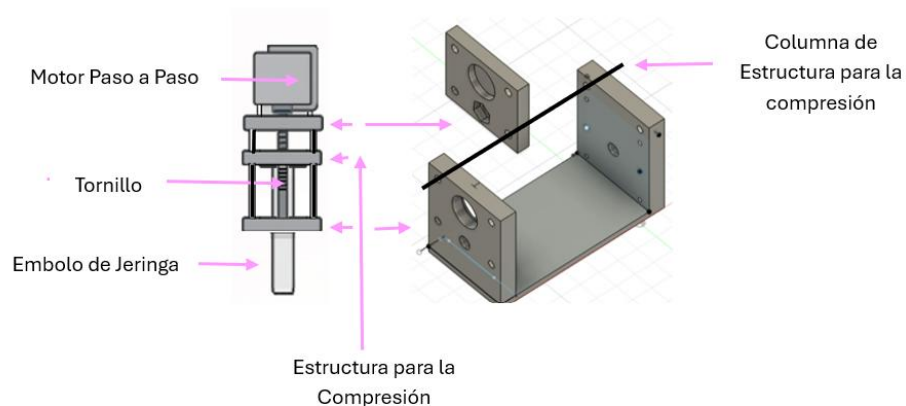
*Imagen 2 Esquema de la Estructura de Soporte*



*Nota. a) Soporte inferior, b) Soporte superior, c) Soporte móvil para el mecanismo de compresión, d) Columnas en cedro. Las partes a, b y c fueron diseñadas en Tinkercad y Fusion 360. El esquema base (e) se generó con IA (ChatGPT) y se modificó.*

**Mecanismo de Compresión:** Convierte el movimiento rotacional de un motor paso a paso en un desplazamiento lineal mediante un tornillo, empujando un émbolo para aplicar la carga sobre la columna. (Imagen 3)

*Imagen 3 Mecanismo de Compresión*



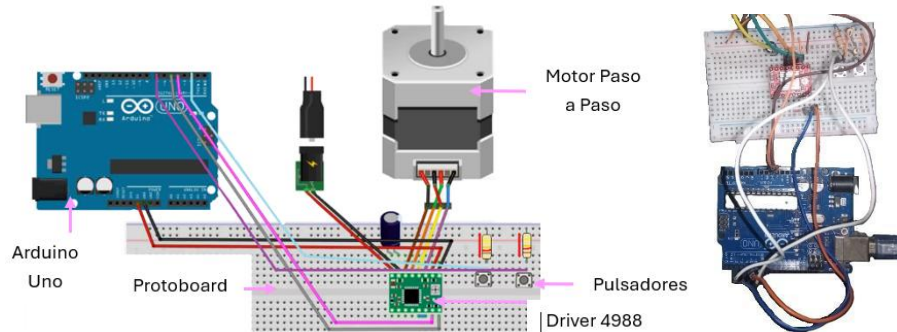
*Nota. Las subpartes que componen la estructura de compresión son: Motor paso a paso, tornillo, embolo de jeringa, columna y estructura para la compresión.*

*La estructura para la compresión fue diseñada en Fusión 360. Esta última fue diseñada en Fusion 360.*

*Fuente: El esquema base (izquierda) se generó con IA (ChatGPT) y se modificó.*

**Sistema de Control:** Programa implementado en Arduino Uno que permite controlar la dirección y el movimiento del motor mediante pulsadores. (Imagen 4)

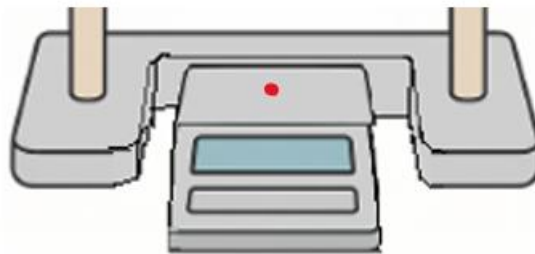
*Imagen 4 Sistema de Control*



*Nota. Esquema (izquierda): Adaptado de "Videos de Arduino para todos, Cap. 33", modificado para el sistema de control de la prensa electromecánica. Fotografía (derecha): Sistema de control construido de la prensa electromecánica fabricada.*

**Sistema de Medición:** Balanza digital que cuantifica la fuerza aplicada, permitiendo determinar la carga crítica ( $P_{cr}$ ). Los valores en gramos se convierten a Newtons (N). (Imagen 5)

*Imagen 5 Sistema de Medición*



*Nota. Balanza digital para cuantificar la fuerza aplicada.  
Fuente: El esquema básico de esta imagen fue generado con apoyo con la herramienta IA (Open IA) y modificada*

### **Criterios de Diseño Basados en las Hipótesis de Euler**

El diseño técnico de la prensa siguió algunos de los criterios establecidos en el Capítulo II para aproximarse a las condiciones ideales de la ecuación de Euler:

**Criterio de Material Homogéneo e Isótropo (H1):** Para cumplir con este criterio, todas las columnas se fabricaron con parámetros de impresión 3D uniformes: una densidad de relleno del 40% y un patrón de relleno en rejilla, que se repite en todas las direcciones para simular un comportamiento isotrópico. Además, las columnas con diferentes secciones transversales

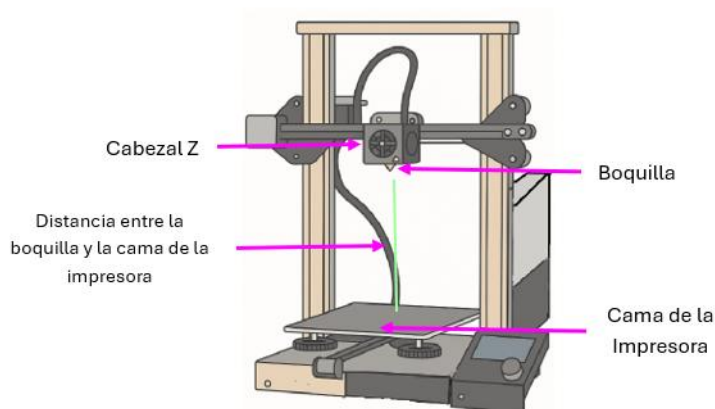
(triángulo, rectángulo, cuadrado) se diseñaron con la misma área, aislando así la influencia de la forma geométrica en los resultados experimentales.

**Carga Puramente Axial (H2):** Se utilizaron placas paralelas (la base de la balanza y el émbolo de una jeringa, (Imagen 1) con puntos de referencia rojos para garantizar que la columna quedara de forma vertical para aplicar de carga sobre el eje centroidal de la columna. (Imagen 5)

**Criterio de Columna Libre de Tensiones - Esfuerzos Iniciales (H3):** Para minimizar los esfuerzos residuales —asociados a distribuciones de temperatura no homogéneas y enfriamientos rápidos— se controló la temperatura de manera constante en la boquilla y la cama de impresión. (Imagen 6) Además, se realizó la impresión en un espacio cerrado con temperatura estable, evitando cambios térmicos bruscos que pudieran afectar a las columnas.

**Criterio de Columna Rectas y Prismáticas (H5):** Se calibró el cabezal del eje Z para asegurar una distancia uniforme entre la cama y la boquilla en toda su superficie, garantizando así que las capas de impresión mantuvieran una altura constante y las columnas fueran rectas y prismáticas. (Imagen 6)

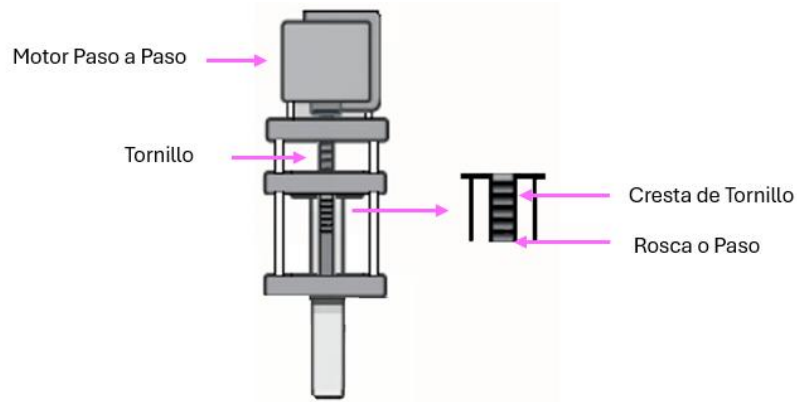
*Imagen 6 Esquema de la Impresora 3D Utilizada para la Fabricación de las Columnas y Prensa.*



*Nota. Esquema para apreciar las partes a considerar de la impresora 3D en la fabricación de las columnas en relación con los Criterios H3 y H5. Fuente: El esquema básico de esta imagen fue generado con apoyo con la herramienta IA (ChatGPT) y modificada.*

**Pequeñas Deformaciones (H6):** Se seleccionó un motor paso a paso y un tornillo de rosca fina, lo que permite una aplicación de carga lenta sobre la columna y casi estática, minimizando las deformaciones. (Imagen 7)

**Imagen 7** Mecanismo de Compresión



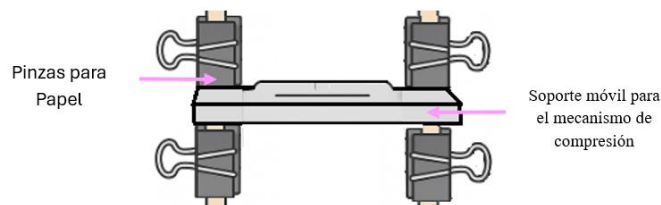
*Nota. Las crestas corresponden a la parte negra y la rosca o paso corresponde a la parte gris.  
Fuente: El esquema básico de esta imagen fue generado con apoyo con la herramienta IA (ChatGPT) y modificada.*

### Limitaciones y Soluciones Implementadas

El sistema presenta limitaciones prácticas que se reconocieron y mitigaron:

- **Capacidad de carga reducida** de la balanza ( $500 \text{ g} \approx 4.9 \text{ N}$ ).
- **Estabilidad estructural:** Se añadieron pesos a la base para contrarrestar la tendencia a levantarse.
- **Precisión en la medición:** Se aceptaron fluctuaciones en la balanza como parte del margen de error experimental.
- **Desplazamiento del soporte móvil:** Se usaron pinzas para papel para fijar el soporte y evitar desplazamientos verticales durante la compresión. (Imagen 8)

**Imagen 8** Ubicación de las Pinzas en la Prensa Electromecánica



*Nota. Pinzas para papel arriba y abajo del soporte móvil para el mecanismo de compresión.  
Fuente: El esquema básico de esta imagen fue generado con apoyo con la herramienta IA (ChatGPT) y modificada*

## Anexo C

Este anexo reúne las fotografías de la propuesta de aula durante su implementación. En ellas se registran las respuestas y anotaciones escritas directamente por los estudiantes, evidenciando el desarrollo de las actividades y el trabajo realizado por cada grupo.

**Imagen 1** Propuesta de aula (etapas 1-3) con respuestas de los estudiantes.

**AREA A**

**GUÍA DE TRABAJO MOMENTO 1**

Grupo: A 11 - A 11 - 510 Curso: 5º año

**¿Qué hace resistente una columna?**

**Propósito de la guía:**  
Esta guía describe paso a paso los procedimientos a seguir, afirmando experiencias sencillas para conocer los factores que hacen que una columna sea más o menos resistente. Para finalizar comprendiendo las variables que están expresadas en la ecuación de pandeo de Euler.

Trabaja desde tus propias experiencias, observaciones y palabras para llegar a entender conceptos como el módulo de elasticidad (E), el momento de inercia (I) y la longitud (L), y cómo se relacionan con la resistencia de una columna.


**Pre-Experiencia**

1. ¿Qué piensas?

• ¿Qué cosas en la columna se resisten o refuerzan columnas?  
Las fundaciones, algunos materiales de construcción

• ¿Qué cosas que pueden hacer que una columna se deforme o se rompa?  
Que se deforme por la carga de peso y cuando hay imperfecciones o defectos

2. Dibuja y describe una experiencia previa en la que hayas visto un columna deforme, o romperse.



Una vez en la casa levemente un caso de flexión donde que se deforma cuando tiene un peso que se aplica sobre la columna de acero y de hierro

Para en las columnas que conoces y anota al menos cinco materiales con los que suelen estar contruadas. ¿Crees que todos son igual de fuertes para soportar la misma carga?, justifica tu respuesta. Y anota los materiales del que más soporte al que menos soporte carga.

Materiales que puede concreto, acero, madera, aluminio, hierro

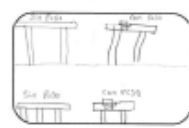
Orden de mayor a menor carga

1. acero
2. concreto
3. madera
4. hierro
5. aluminio

**Justificación:**  
En todos los materiales en los que se deforma o se rompe que son los mismos que cuando se aplica la misma fuerza que en los otros materiales pero puede variar o cambiar

Si planeas que todos los materiales tienen la misma resistencia, justificación:  
En todos la misma resistencia, porque la resistencia de los materiales depende de sus propiedades en el que fue construido

• ¿Crees que la longitud de una columna afecta la cantidad de peso que puede soportar sin deformarse? Justifica tu respuesta y dibuja al menos dos columnas de diferente longitud que estén sometidas a la misma carga.



**Justificación:**  
La longitud de una columna afecta la cantidad de peso que puede soportar sin deformarse o romperse. Porque a mayor longitud, mayor es el momento de inercia y mayor es el momento de flexión que se produce en la columna, lo que hace que se deforme más fácilmente.

**El Pandeo de Euler.**

La ecuación de Euler para el pandeo de columnas presenta la siguiente forma:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2}$$

- ✓ Carga crítica de pandeo ( $P_{cr}$ ), es la máxima fuerza, carga o peso de compresión que soporta la columna sin pandearse o aplastarse en el caso que la longitud de la columna sea proporcional con la ecuación transcendental.
- ✓ Módulo de elasticidad del material, Módulo de Young (E)

es un parámetro característico de cada material que indica la relación existente en la zona de comportamiento elástico de dicho material entre los incrementos de tensión aplicados en el ensayo de tensión y los incrementos de deformación relativa de producción. [...] Para un material elástico lineal e isotrópico, el módulo de Young tiene el mismo valor para una tracción que para una compresión, siendo una constante independiente del esfuerzo siempre que no exceda de un valor máximo denominado límite elástico (Véase Marenco, 2008, p. 120).

- ✓ El factor de longitud efectiva (K) determina la resistencia al pandeo de una columna según sus condiciones de apoyo, tomando los siguientes valores característicos:  $K = 1$  cuando ambos extremos están articulados (permitiendo giro),  $k = 0.5$  si los extremos están empotrados (totalmente fijos), y  $k = 2$  para el caso de un extremo fijo con otro empotrado, como ocurre en un poste de bandera.
- ✓ Momento de inercia de la sección transversal (I) está dependiente de la forma de la sección transversal de la columna
- ✓ Longitud de la columna (L) que sea larga es columna.

*Nota. Propuesta de aula de las tres primeras etapas, con las respuestas de los estudiantes.*



Imagen 3 Propuesta de aula (etapas 4- 5) con respuestas de los estudiantes.

PARTE C: ¿La longitud influye? (Ejemplar 1)

Supuestos iniciales:

¿Cómo que las columnas con los largos diferentes se van a comportar? ¿Por qué?  
 Las columnas más altas resisten mejor las cargas que las columnas más bajas porque tienen un mayor momento de inercia y por lo tanto una mayor resistencia al ser sometidas a una carga.

Relaciones con las variables:

¿Qué objetos largos o cortos han visto doblarse, cuál de los dos es más fácil que se doble?

Un lápiz de madera es más fácil de doblar que un lápiz de metal. A mayor longitud, mayor resistencia.

¿Cómo crees que afecta la longitud a la resistencia a la carga?

Creo que a mayor longitud, menor resistencia a la carga. Esto se debe a que a mayor longitud, mayor es el momento de inercia y por lo tanto mayor la resistencia.

Materiales:

Columnas de igual material y forma de PLA, pero con distintas longitudes (8 cm, 12 cm, 16 cm).  
 Balanza digital, Sistema de mediciones, Soporte de ensayo y Morsa.

Procedimientos:

1. Realizar los cálculos:
  - PLA con longitud de 8 cm.
  - PLA con longitud de 12 cm.
  - PLA con longitud de 16 cm.

REFLEXIÓN FINAL

1. ¿Cuál fue el factor que más afectó la resistencia de las columnas?

La altura que son las columnas ya que a mayor altura, mayor resistencia.

2. Escribe una explicación de tus resultados de por qué una columna es más resistente que otra.

Una columna es más resistente que otra porque tiene una mayor longitud y por lo tanto una mayor resistencia.

3. ¿Cómo cambiarían tus ideas iniciales después de hacer estas experimentos?

Creo que a mayor longitud, mayor resistencia. Esto se debe a que a mayor longitud, mayor es el momento de inercia y por lo tanto mayor la resistencia.

4. ¿Cómo se relaciona lo que hiciste hoy con las construcciones reales que ves en la vida diaria?

Que las columnas que se ven en la vida diaria son más altas y por lo tanto más resistentes.

5. Basado en 2 materiales de la lista que ensayaste con anterioridad, compara ahora que la columna hecha con el material que resistió mayor carga tiene la mayor longitud y la columna hecha del material que resistió la menor carga tiene la menor longitud. ¿Esto cambia el orden de los materiales de la respuesta es verdadera escribe el nuevo orden y justifica de la respuesta solo justifica tu respuesta.

Orden de mayor a menor carga

1. Madera
2. Concreto
3. Acero
4. Aluminio
5. Fibra

Tabla de observación:

| Longitud (cm)  | Carga máxima antes de fallar (N) | Observaciones   |
|----------------|----------------------------------|---|
| Experimento 1  | 2400                             | Al ser la longitud de 8 cm, la columna se dobló y se rompió.  |
| Experimento 2  | 3600                             | Al ser la longitud de 12 cm, la columna se dobló y se rompió. |
| Experimento 3  | 4800                             | Al ser la longitud de 16 cm, la columna se dobló y se rompió. |
| 16 (Nueva)     | 2800                             | Al ser la longitud de 16 cm, la columna se dobló y se rompió. |
| 12 (Nueva)     | 3200                             | Al ser la longitud de 12 cm, la columna se dobló y se rompió. |
| 8 (Nueva)      | 2400                             | Al ser la longitud de 8 cm, la columna se dobló y se rompió.  |
| Promedio 8 cm  | 2400                             |   |
| 16 (Nueva)     | 2800                             | Al ser la longitud de 16 cm, la columna se dobló y se rompió. |
| 12 (Nueva)     | 3200                             | Al ser la longitud de 12 cm, la columna se dobló y se rompió. |
| 8 (Nueva)      | 2400                             | Al ser la longitud de 8 cm, la columna se dobló y se rompió.  |
| Promedio 12 cm | 3200                             |   |

Elabore el gráfico de resistencia de los materiales contra a las longitudes (8cm, 12cm y 16cm) del que más soporte carga al que menos soporte en caso de que se pueda, y realice las observaciones que considere pertinentes.

Se ve que a mayor longitud, mayor resistencia. Esto se debe a que a mayor longitud, mayor es el momento de inercia y por lo tanto mayor la resistencia.

Conclusiones de la Parte C

Se ve que a mayor longitud, mayor resistencia. Esto se debe a que a mayor longitud, mayor es el momento de inercia y por lo tanto mayor la resistencia.

Justificación

Se ve que a mayor longitud, mayor resistencia. Esto se debe a que a mayor longitud, mayor es el momento de inercia y por lo tanto mayor la resistencia.

Si planeo que todos los materiales tienen la misma resistencia. Analiza tu respuesta:

No, porque a mayor longitud, mayor resistencia. Esto se debe a que a mayor longitud, mayor es el momento de inercia y por lo tanto mayor la resistencia.

6. ¿Es importante que el material de una columna sea homogéneo para que pueda soportar mejor la carga? Justifica, si una columna de madera tiene nudos o una columna de concreto presenta huecos de aire, ¿cómo que afectaría la misma carga que una columna completamente homogénea? Explícito tu respuesta.

Es importante que el material de una columna sea homogéneo para que pueda soportar mejor la carga. Si una columna de madera tiene nudos o una columna de concreto presenta huecos de aire, esto afectaría la resistencia de la columna.

Nota. Propuesta de aula de la cuarta y quinta etapa, con las respuestas de los estudiantes.