LAS REPRESENTACIONES DE OBJETOS GEOMÉTRICOS CON MATERIAL DIDÁCTICO PARA LA INTRODUCCIÓN Y DESARROLLO DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Henry Stiven Escobar Peraza

Universidad Pedagógica Nacional

Tania Julieth Plazas Merchán

Junio de 2024

LAS REPRESENTACIONES DE OBJETOS GEOMÉTRICOS CON MATERIAL DIDÁCTICO PARA LA INTRODUCCIÓN Y DESARROLLO DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Autor:

Henry Stiven Escobar Peraza

Directora:

Tania Julieth Plazas Merchán

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas

Bogotá D.C.

17 de junio de 2024

TABLA DE CONTENIDO

LISTADO DE TABLAS

LISTADO DE ILUSTRACIONES

Introducción

La presente propuesta se basó principalmente en la enseñanza de algunos temas propios de la escuela secundaria, específicamente aquellos relacionados con el álgebra y parte de sus teoremas o expresiones algebraicas más utilizadas: *Teorema de Pitágoras* y Productos Notables (*Diferencias de Cuadrados y Trinomio al cuadrado Perfecto*); esto, desde la elaboración, implementación y análisis de algunas actividades en las cuales se priorizaron el uso de formas geométricas y algunos materiales didácticos que usualmente están relacionados con la enseñanza y aprendizaje de la geometría, pero que también permiten enseñar y aprender temáticas propias del álgebra. Para elaborar las actividades del trabajo se tuvieron en cuenta aspectos tales como:

- Material didáctico en desuso o poco relacionado a la enseñanza del álgebra.
- Teoremas o estructuras algebraicas comunes en los niveles de educación: básica y media.
- Mecanismos o estrategias que permitieran establecer ecuaciones por medio de valores numéricos asociados a expresiones algebraicas dadas en ciertas partes de las distintas guías.

El desarrollo del trabajo se organiza así:

- Introducción y justificación.
- Marco de referencia: propio de la teoría matemática, los materiales didácticos en cuestión, y las dificultades, errores y obstáculos en la enseñanza.
- Metodología: donde se describe la propuesta didáctica que se sigue, además de las actividades con las respuestas esperadas y las características de la población en cuestión.
- Análisis de las actividades: donde se verifica el alcance de los propósitos relacionados con cada actividad, y demás contrastes a partir de los resultados esperados y los obtenidos.
- Conclusiones: respecto al alcance de los objetivos planteados, con relación al análisis de las actividades y con relación a los aportes que le brinda a mi vida personal y profesional.

1. Justificación

1.1. Justificación

Se suele reconocer y mencionar que la geometría surgió como la ciencia que permitió a las primeras civilizaciones resolver problemas asociados a las mediciones de terrenos u otros problemas cotidianos relacionados con espacios bidimensionales y tridimensionales. Euclides utilizó algunas “verdades matemáticas” que ya eran conocidas gracias al desarrollo matemático de algunas civilizaciones antiguas para poder establecer el razonamiento deductivo en las matemáticas, por medio de su obra Los Elementos. Sin embargo, es sabido dentro de la comunidad matemática que en el siglo XVII y tras la aparición de la obra de René Descartes sobre la utilización del espacio y del plano cartesiano, se dio una de las mayores revoluciones a las matemáticas de los últimos siglos, ya que permitió, como lo menciona Stillwell (2005), que se diera un proceso histórico conocido como algebrización de las matemáticas, en donde se establece de manera explícita el proceso de desarrollo y establecimiento de una relación inherente (una función biyectiva) entre las expresiones algebraicas y los objetos geométricos, que a su vez llevaron a que las matemáticas se dejaran de pensar exclusivamente de manera geométrica y se condujeran hacía un pensamiento matemático donde prima lo algebraico, tanto así que esta innovación dio paso a que luego de más de dos mil años se priorizará el estudio y desarrollo de la matemática, y otras ciencias relacionadas, a partir de ramas de la matemática distintas a la geometría pura o sintética, razón por la cual Los Elementos de Euclides dejó de ser la obra cumbre de estudio matemático.

Por otro lado, uno de los últimos avances de la matemática moderna consiste en la formalización de ésta como un lenguaje, avance que se da debido a que los propios matemáticos se dieron cuenta que era necesario globalizar los símbolos que utilizaban puesto que se hallaba un gran inconveniente para comprender distintas notaciones que representan un mismo objeto o concepto matemático, pues al pasar del álgebra sincopada (se utilizan símbolos junto con el lenguaje natural) al álgebra retórica (los problemas se planteaban y resolvían mediante lenguaje natural), uno de los mayores conflictos era que cada matemático intentaba desarrollar e imponer su propia simbología por sobre la de sus pares, esto se puede reconocer por medio de algunos textos históricos y lo descrito por Eves (1990).

Desde que se logró la globalización de la simbología matemática se ha visto y asumido con mayor naturalidad el pensamiento matemático como aquel fundamentado en el álgebra simbólica, lo cual es un gran inconveniente desde el ámbito escolar debido a la complejidad que presentan los estudiantes al momento de comprender la semiótica inherente a las matemáticas, pues para muchos estudiantes no es claro que la simbología propia de la matemática lo que establece es una nueva forma de comunicación, y por ello, al momento de utilizar dicha simbología suelen haber muchas dificultades, errores y obstáculos.

Desde mi propia experiencia como profesor he reconocido, a través de las distintas prácticas educativas y ejercicio como profesor titular, que algunos estudiantes no logran comprender las expresiones algebraicas asociadas a objetos o conceptos matemáticos debido a la falta del trabajo y manejo de representaciones (gráficas, tangibles, con tecnologías, etc.) pertinentes, las cuales puedan permitir al estudiante evidenciar lo que la expresión algebraica representa, es decir, que desde el uso de lenguaje natural el estudiante pueda explicar y comprender lo que la simbología matemática expresa.

Atendiendo a lo anterior, puedo establecer también que desde mi experiencia en el aula he podido observar cómo los estudiantes generan una mayor comprensión de los objetos/conceptos matemáticos cuando hacen uso de materiales didácticos que de una u otra manera son significativos para ellos en sus procesos de aprendizaje, bien sea porque el material les llama la atención y por ello promueve su trabajo en clase, o porque el material les permite un acercamiento tangible a las representaciones de objetos abstractos, etc.

A partir de lo establecido en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (EBCM, 2006) y los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA, 2017) para el ciclo cuatro de la educación básica los estudiantes deben tener las siguientes competencias en relación con las representaciones algebraicas y las representaciones geométricas:

- ➔ Reconocer y contrastar propiedades y relaciones geométricas utilizadas en la demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Tales); utilizar representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.
- ➔ Identificar relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.
- ➔ Identifica relaciones de congruencia y semejanza entre las formas geométricas que configuran el diseño de un objeto.
- ➔ Identifica regularidades y argumenta propiedades de figuras geométricas a partir de teoremas y las aplica en situaciones reales.
- ➔ Propone, compara y usa procedimientos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas en diversas situaciones o contextos.

- ➔ Utiliza teoremas, propiedades y relaciones geométricas para proponer y justificar estrategias de medición y cálculo de longitudes.
- ➔ Utiliza expresiones numéricas, algebraicas o gráficas para hacer descripciones de situaciones concretas y tomar decisiones con base en su interpretación.
- ➔ Utiliza procesos inductivos y lenguaje simbólico o algebraico para formular, proponer y resolver conjeturas en la solución de problemas numéricos, geométricos, métricos, en situaciones cotidianas y no cotidianas.

Según lo establece Moreno (2004), en casi todas las situaciones de enseñanza aparece el empleo de materiales didácticos de todo tipo y bajo cualquier soporte, pues de hecho muchos procesos de aprendizaje requieren de ellos como el medio para conducirlo, y esto a su vez termina condicionando la propia forma de aprender por parte del estudiante y de enseñar por parte del maestro.

Los materiales didácticos tienen su punto de inflexión en su forma de utilización y su selección con la intención de aplicarlos de forma conveniente a las distintas situaciones educativas, buscando siempre que se pueden aprovechar al máximo todas las características técnicas y las posibilidades didácticas, es decir, hay materiales didácticos que tienen mayor o menor relevancia no por la naturaleza propia del material sino por la manera en la cual se utilizó. En esencia se reconoce y establece que desde el punto de vista de la utilización didáctica, los materiales didácticos deben reunir ciertos criterios de funcionalidad, Moreno (1996, citado en Moreno, 2004): ser una herramienta de apoyo para el aprendizaje, por lo cual deben ser útiles y funcionales; nunca se puede pretender que éstos sustituyan al profesorado en su tarea de enseñar, ni al estudiantado en su tarea de aprender; la utilización y selección del material debe responder al principio de la racionalidad, por lo cual es necesario establecer criterios de selección; y desde la perspectiva crítica, se espera que se vayan construyendo entre todas las personas implicadas en el proceso de aprendizaje.

De acuerdo con lo mencionado anteriormente, se puede aseverar que es necesario disponer de distintos tipos de materiales al momento de establecer una propuesta, y esto se hace con la intención de poder contrastarlos en cuanto a la pertinencia de su uso en el desarrollo de la temática esperada. Para ello, se propone como una posibilidad el tener en cuenta al menos tres marcos de referencia con respecto a los medios en general, que son: sobre la funcionalidad de los medios, sobre las posibilidades didácticas y la fundamentación educativa, y por último sobre los aspectos técnicos (estos tres ejes deben tenerse en cuenta de manera razonable y crítica, puesto que los objetivos y metas de aprendizaje que se tengan para cada actividad dependen de la naturaleza misma de lo que se espera enseñar; la mecanización de un algoritmo, la conjeturación de una expresión algebraica, etc.).

Con relación a las posibilidades didácticas, Moreno (2004) establece tres formas de utilización de los medios y materiales que se encuentran estrechamente relacionadas, las cuales son: *instrumento y recurso*, donde el profesor se sirve de los medios y materiales didácticos como un instrumento al servicio de las estrategias metodológicas; como *recurso de expresión y comunicación*, la comunicación es fundamental debido a que es la actividad que permite la relación entre las personas y su intercambio de información, a su vez que la comunicación es la razón de ser de la expresión, por lo tanto acá los medios y materiales didácticos toman el rol de ser las vías para la comunicación entre el profesor y el estudiante (se encuentra así un medio facilitador de diversas formas de expresión, entendida como la manifestación de procesos de reflexión que implican la capacidad de conceptuación y de la adquisición de conocimientos, motivados por la percepción multisensorial y la experiencia de cada individuo), en esencia, los medios se convierten en facilitadores de procesos comunicativos que permiten dar significado a la realidad; análisis crítico de la información, se asocia a la relevancia que tiene la capacidad de razonar de manera crítica ante la abrumante aparición de información que nos desborda (en especial gracias a las tecnologías actuales), y para ello es necesario y pertinente dotarse de los medios e instrumentos que permitan adquirir capacidades para analizar, decodificar y entender esos múltiples mensajes, o en palabras coloquiales, dotar al estudiante de pensamiento crítico por medio del razonamiento matemático que se pueda desarrollar utilizando materiales didácticos que le permitan adquirir una postura ante cualquier noticia o suceso que acontece en la realidad donde se encuentra inmerso (colegio, barrio, ciudad, país), lo cual se puede concretar haciendo un uso adecuado de los materiales asociados a objetos matemáticos que se asocian a objetos de la vida real.

A partir de lo anterior surge la hipótesis de que diseñar o utilizar material didáctico existente permitirá a los estudiantes de ciclo cuatro familiarizarse y manejar el lenguaje natural y simbólico para describir expresiones algebraicas asociadas a algunos teoremas.

1.2. Objetivos

1.2.1. General

Diseñar, implementar y analizar algunas tareas en las cuales se use material didáctico que permita la deducción de algunas expresiones algebraicas.

1.2.2. Específicos

- Revisar material didáctico que pueda ser útil para el estudio de las expresiones algebraicas, en especial aquellos que usualmente no se usen para trabajar dichas temáticas.
- Diseñar tareas para el estudio de expresiones algebraicas, con el uso de material didáctico previamente seleccionado.
- Implementar una prueba piloto de las tareas, preferiblemente con estudiantes de ciclo cuatro (octavo y noveno).
- Analizar evidencias sobre el desarrollo y resultado de las pruebas piloto, en aras de obtener conclusiones asociadas a las ventajas y desventajas que se encuentran en las actividades propuestas.

2. Marco de Referencia

Teniendo en cuenta que las actividades propuestas buscan relacionar: material didáctico, la geometría sintética y el álgebra mediante lenguaje natural y simbólico; se presenta enseguida el soporte teórico con relación a las distintas actividades.

2.1. Geometría sintética

A continuación, se presentan las definiciones y representaciones gráficas relacionadas a distintos objetos geométricos que se ven asociados, ya sea de forma directa o indirecta, en el diseño y desarrollo de las actividades propuestas en el presente trabajo. Dichas definiciones se toman y ajustan de la propuesta establecida por parte de Moise (1986).

2.1.1. Punto, recta, plano y espacio

Son los elementos primitivos de la geometría, es decir, se asumen como existentes y se tiene una idea de lo que ellos son y representan, pero no se establece una definición asociada a ninguno de ellos.

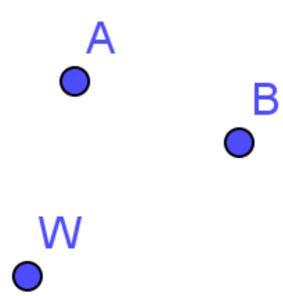


Ilustración 1. Representación del punto (Elaboración propia)

Los puntos se nombran con letras mayúsculas. No tienen una representación simbólica específica, simplemente se leen: **"punto A, punto B, punto W"**

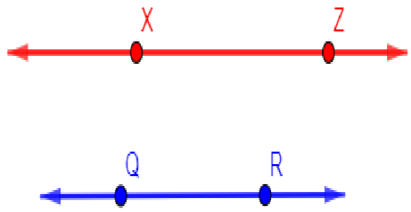


Ilustración 2. Representación de la recta (Elaboración propia)

Las rectas se nombran con letras minúsculas, o a partir de dos puntos que pertenezcan a ella. Con relación a las rectas de la ilustración 2 su simbología es:

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{XZ}} \quad y \quad \overleftrightarrow{\boldsymbol{RQ}}$$

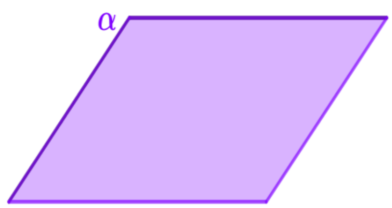


Ilustración 3. Representación del plano (Elaboración propia)

Los planos se nombran con letras griegas minúsculas. No tienen una representación simbólica específica, simplemente se lee: **“plano alfa (α)”**

2.1.2. Segmento

Es un subconjunto de la recta, que se encuentra determinado por dos puntos llamados extremos del segmento, y al cual además pertenecen todos los puntos de la recta que se hallan entre dichos extremos. El nombre del segmento no requiere de un orden especifico entre los segmentos.

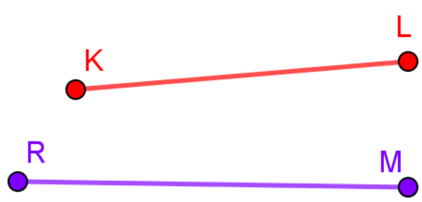


Ilustración 4. Representación del segmento (Elaboración propia)

La representación simbólica de los segmentos de la ilustración 4 es:

$$\overline{\boldsymbol{KL}} \text{ y } \overline{\boldsymbol{RM}}$$

2.1.2.1. Medida de segmentos

La medida de un segmento se asocia con su longitud, y asigna a cada segmento un único número real positivo.

2.1.2.2. Congruencia entre segmentos

Dos o más segmentos son congruentes, si y sólo sí, tienen exactamente la misma medida. Esto se puede representar a partir de números o de forma simbólica como se muestra a continuación.

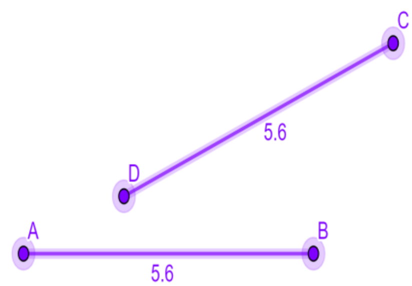


Ilustración 5. Representación numérica de la congruencia entre segmentos (Elaboración propia)

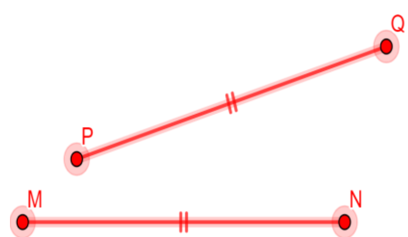


Ilustración 6. Representación simbólica de la congruencia entre segmentos (Elaboración propia)

Se puede asegurar que los segmentos de la ilustración 5 son congruentes porque ambos indican una misma medida de 5.6 unidades.

Se representa: $\overline{\boldsymbol{AB}} \cong \overline{\boldsymbol{CD}}$, y se lee: ***"el segmento AB es congruente con el segmento CD"***; asimismo, para el ejemplo de la ilustración 6, se puede asegurar que $\overline{\boldsymbol{PQ}} \cong \overline{\boldsymbol{MN}}$ ya que tienen las mismas marcas entre ellos, y ésta es la manera de indicar la congruencia entre segmentos cuando no hay medidas dadas.

2.1.3. Rayo

Es un subconjunto de la recta que contiene un punto dado (llamado extremo), además de todos los puntos de la recta que se encuentran a alguno de los dos lados de dicho extremo. En los rayos si es necesario tener presente el orden a la hora de nombrar simbólicamente.

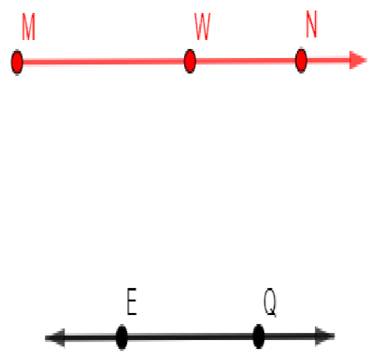


Ilustración 7. Representación del rayo (Elaboración propia)

Respecto a los ejemplos de la ilustración 7, en el primer ejemplo (color rojo) se tiene que el extremo del rayo es el punto $\boldsymbol{M}$, y gracias a que hay otros dos puntos en la recta, se puede nombrar de cualquiera de las siguientes: $\overrightarrow{\boldsymbol{MW}}$ o $\overrightarrow{\boldsymbol{MN}}$**,** teniendo presente que $\overrightarrow{\boldsymbol{MW}} = \overrightarrow{\boldsymbol{MN}}$.

El orden es importante al nombrar, ya que como se observa en el segundo ejemplo (color negro) $\overrightarrow{\boldsymbol{EQ}} \neq \overrightarrow{\boldsymbol{QE}}$**,** puesto que el extremo es diferente en ambos casos, y cada rayo tomaría puntos hacía lados contrarios de la recta (solamente tienen en común al $\overline{\boldsymbol{EQ}}$).

2.1.4. Ángulo

Es la unión de dos rayos, de forma tal que: **(1)** ambos rayos coinciden o comparten el mismo extremo, **(2)** los rayos no pertenecen a una misma recta; al punto que comparten los rayos se le llama vértice del ángulo, y a los rayos se les llama lados del ángulo.

Un ángulo también se obtiene a partir de otros subconjuntos de la recta como los segmentos, siempre y cuando se cumplan las dos condiciones.

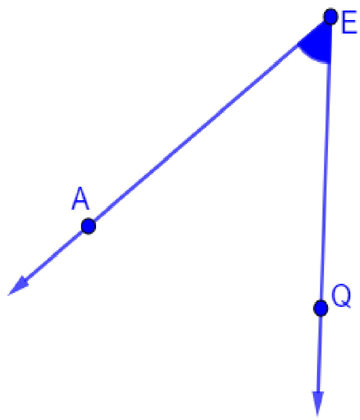


Ilustración 8. Representación del ángulo (Elaboración propia)

En el ejemplo de la ilustración 8 se tiene que el vértice del ángulo es el punto $\boldsymbol{E}$, y sus lados son el $\overrightarrow{\boldsymbol{EQ}}$ y el $\overrightarrow{\boldsymbol{EA}}$. Los puntos sobre los lados permiten nombrar y representar al ángulo así: $\measuredangle \boldsymbol{AEQ}$ o bien $\measuredangle \boldsymbol{QEA}$; es decir, que al representar simbólicamente un ángulo es necesario que el vértice quede escrito en la mitad, y que se tome un punto de cada lado.

2.1.4.1. Medida de ángulos

La medición de ángulos asigna a cada ángulo un único número real entre 0 y 180. Para medir ángulos bajo esta definición se utilizan los grados y la herramienta asociada es el transportador.

Aunque un giro completo equivale a $360°$, esta definición implica que no existen ángulos que ocupen la mitad o más de media circunferencia.

2.1.4.2. Congruencia entre ángulos

Dos o más ángulos son congruentes, si y sólo sí, tienen exactamente la misma medida.

De forma similar a los segmentos, esta relación se puede representar mediante forma numérica o simbólica, como se muestra a continuación.

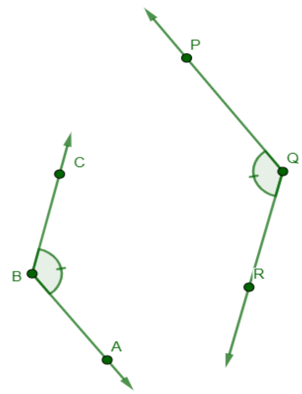


Ilustración 9. Representación simbólica de la congruencia entre ángulos (Elaboración propia)

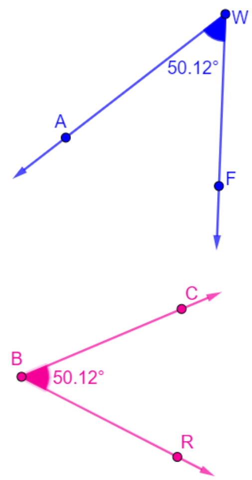


Ilustración 10. Representación numérica de la congruencia entre ángulos (Elaboración propia)

Para la ilustración 9, aunque los ángulos no tienen la medida dada de forma explícita, se establece simbólicamente que $\boldsymbol{\measuredangle PQR \cong \measuredangle CBA}$ ya que tienen la misma marca de congruencia (similar a los segmentos), y ésta es la manera de indicar la congruencia entre ángulos cuando no hay valores numéricos. Se lee: ***“el ángulo CBA es congruente con el ángulo PQR”***

En la ilustración 10, se puede establecer la congruencia ya que ambos ángulos muestran una medida de $50{,}12°$ (grados). Se representa:

$\boldsymbol{\measuredangle AWF \cong \measuredangle CBR}$, y se lee: ***“el ángulo AWF es congruente con el ángulo CBR”***

2.1.4.3. Tipos de ángulos

Los ángulos se pueden clasificar a partir de sus medidas de tres formas diferentes: *ángulo agudo (medida menor a* $90°$*), ángulo recto (medida igual a* $90°$*) y ángulo obtuso (medida mayor a* $90°$ *pero menor a* $180°$*).* A continuación, se ilustran algunos ejemplos y se mencionan algunas particularidades asociadas con cada uno de ellos, además de las respectivas medidas que deben tener según sus respectivas definiciones:

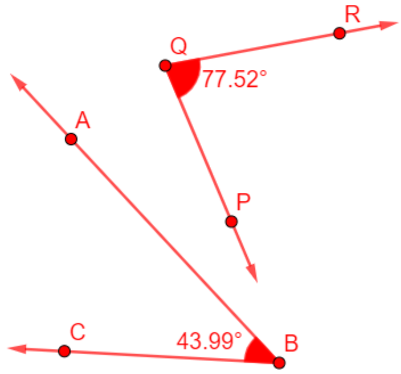


Ilustración 11. Representación del ángulo agudo (Elaboración propia)

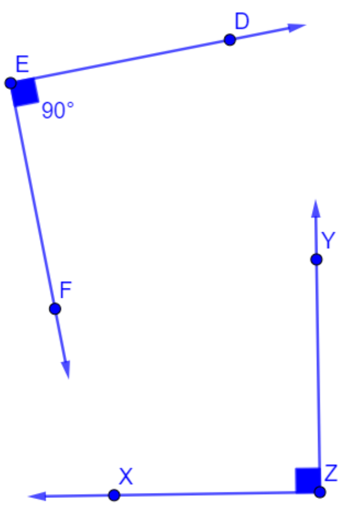


Ilustración 12. Representaciones del ángulo recto (Elaboración propia)

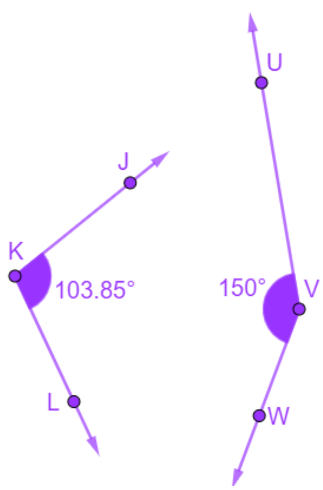


Ilustración 13. Representación del ángulo obtuso (Elaboración propia)

En la ilustración 11, el $\measuredangle \boldsymbol{ABC}$ y el $\measuredangle \boldsymbol{PQR}$ son agudos debido a que la medida de cada uno de ellos es menor a 90°. Se evidencia como ejemplo que las medidas de los ángulos no deben ser necesariamente números enteros.

En la ilustración 12, el $\measuredangle \boldsymbol{DEF}$ es recto debido a que su medida es de 90°; además, aunque el $\measuredangle \boldsymbol{XZY}$ no indica el valor de su medida, cuando un ángulo tiene en su interior la marca de un cuadrado pequeño (*como se muestra en ambos casos*), esto significa que dicho ángulo es recto (por ende, mide 90°).

Para la ilustración 13, el $\measuredangle \boldsymbol{JKL}$ y el $\measuredangle \boldsymbol{UVW}$ son obtusos debido a que sus medidas son mayores a 90° (además de ser menores a 180°). Se tienen entonces, tres tipos de ángulos con relación a sus medidas (*aunque algunos autores incluyen otros tipos, solo se tendrán en cuenta estos*).

2.1.5. Rectas paralelas y rectas perpendiculares

2.1.5.1. Rectas paralelas

Dos o más rectas son paralelas, si y sólo sí, **i)** están contenidas en un mismo plano (son coplanares), y **ii)** no se intersecan (sin puntos comunes).

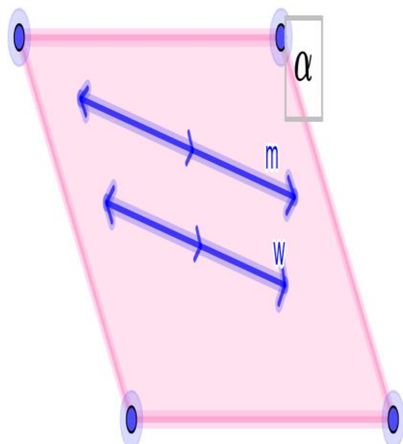


Ilustración 14. Representación de las rectas paralelas (Elaboración propia)

Siguiendo la ilustración 14, se tiene que la $\boldsymbol{recta\ m}$ y la $\boldsymbol{recta\ w}$ son paralelas, porque están contenidas en un mismo $\boldsymbol{plano\ \alpha}$**,** y la marca (como "flechitas") que tienen las rectas indican el paralelismo entre ellas. Se representa: $\boldsymbol{m \parallel w}$**;** se lee: ***"la recta m es paralela a la recta w"***

2.1.5.2. Rectas perpendiculares

Dos rectas son perpendiculares, si y sólo sí, **i)** se intersecan (tienen un punto en común), y **ii)** determinan un ángulo recto.

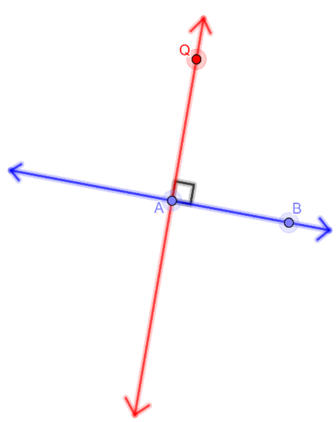


Ilustración 15. Representación de las rectas perpendiculares (Elaboración propia)

Según la ilustración 15, la $\overleftrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ y la $\overleftrightarrow{\boldsymbol{AQ}}$ son perpendiculares, por tener en común al punto $\boldsymbol{A}$, y además el ángulo que determinan (*forman*) entre ellas es recto. Se representa: $\overleftrightarrow{\boldsymbol{AB}} \perp \overleftrightarrow{\boldsymbol{AQ}}$, y se lee: ***"la recta AB es perpendicular a la recta AQ".***

2.1.6. Polígono

2.1.6.1. Lados, vértices y diagonales de un polígono

Lado: cada uno de los segmentos que conforman al polígono.

Vértices: cada uno de los puntos donde se intersecan los lados del polígono, es decir, los vértices a su vez son los extremos de los distintos lados del polígono.

Diagonal: Es el segmento cuyos extremos son vértices no consecutivos del polígono; el triángulo es el único polígono que no tiene diagonales.

LADO

VÉRTICE

DIAGONAL

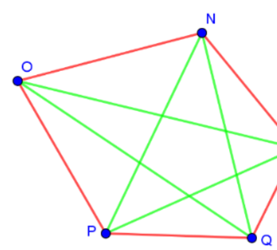


Ilustración 16. Representación del pentágono y sus partes (Elaboración propia)

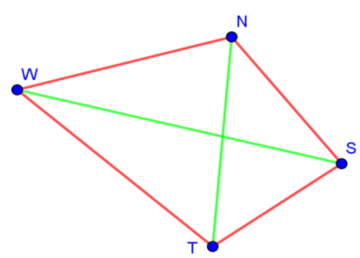


Ilustración 17. Representación del cuadrilátero y sus partes (Elaboración propia)

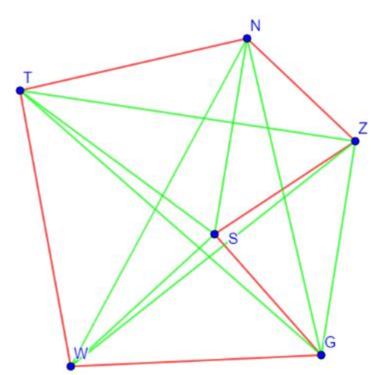


Ilustración 18. Representación del hexágono y sus partes (Elaboración propia)

2.1.6.2. Clasificación de los polígonos según el número de lados

Los polígonos reciben un nombre particular de acuerdo con el número de lados que lo componen, de la siguiente manera:

Número de lados del polígono	**Nombre del polígono**
Tres	Triángulo
Cuatro	Cuadrilátero
Cinco	Pentágono
Seis	Hexágono
…	…

Tabla 1. Clasificación de los polígonos

2.1.6.3. Congruencia entre polígonos

Dos polígonos son congruentes, si y sólo sí, i**)** son el mismo tipo de polígono, **ii)** todos sus lados y ángulos correspondientes son congruentes.

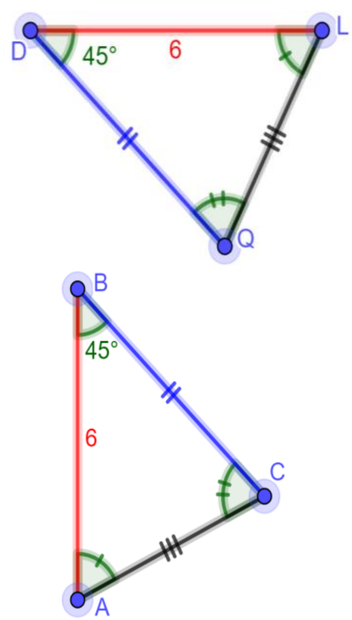


Ilustración 19. Representación de la congruencia entre triángulos (Elaboración propia)

En la ilustración 19 se establecen triángulos congruentes, esto porque todos sus lados y ángulos correspondientes son congruentes entre sí (algunos simbolizados y otros con la igualdad de medidas). Se representa: $\Delta \boldsymbol{ABC} \cong \Delta \boldsymbol{LDQ}$, y se lee ***"el triángulo ABC es congruente con el triángulo LDQ".***

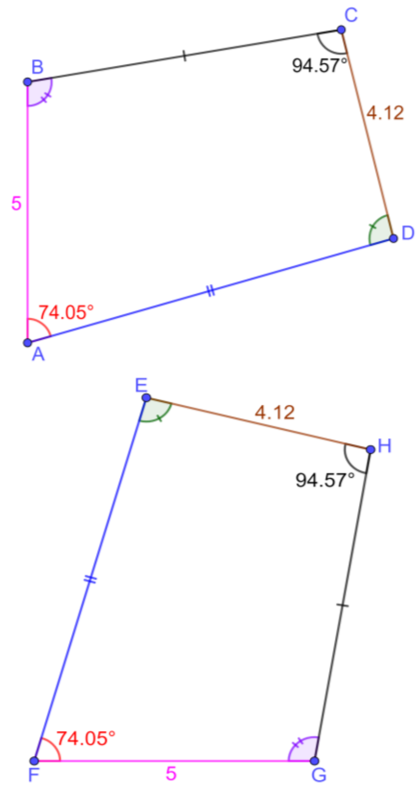


Ilustración 20. Representación de la congruencia entre cuadriláteros (Elaboración propia)

Para el ejemplo de la ilustración 20, se establecen cuadriláteros congruentes debido a que todos sus lados y ángulos correspondientes son congruentes entre sí (algunos simbolizados y otros se pueden establecer desde la igualdad de las medidas). Se representa:

$\boxdot\, \boldsymbol{ABCD} \cong \boxdot\, \boldsymbol{FGHE}$, y se lee ***"el cuadrilátero ABCD es congruente con el cuadrilátero FGHE".***

NOTA: se debe tener siempre presente que la congruencia se representa respetando el orden de correspondencia entre los vértices de los polígonos (tal cual como se muestra y respeta en ambos ejemplos).

2.1.6.4. Área y perímetro del polígono

Para cualquier clase de polígono se definen los siguientes conceptos:

2.1.6.4.1. Área del polígono

Una región poligonal es aquel subconjunto del plano que se encuentra acotado por un polígono (o polígonos).

Para cada región poligonal se asigna un número positivo único denominado área; aunque el valor del área de una región poligonal es único, es importante reconocer que existen polígonos que sin ser congruentes o del mismo tipo pueden tener una misma área (el valor numérico asociado a la región poligonal de las superficies puede ser el mismo). Las ecuaciones matemáticas adecuadas para establecer el área de un polígono dependen necesariamente del tipo de polígono en cuestión.

Unidad cuadrada: es una región cuadrada en cual cada uno de sus lados mide una unidad de longitud.

El área de una región se puede establecer contando la cantidad de unidades cuadradas que se requieren para cubrir exactamente la región (aunque usualmente para establecer el área se usan fórmulas algebraicas y no este tipo de procedimientos arcaicos).

2.1.6.4.2. Perímetro del polígono

El perímetro de un polígono hace referencia a su contorno/borde, por ello para cualquier polígono se cumple que su perímetro es equivalente a la suma de las medidas de todos los lados del polígono.

2.1.6.5. Tipos de triángulos

El triángulo es un polígono de tres lados.

Este puede ser clasificado a partir de las relaciones que hay entre: i) las medidas de sus lados, o, ii) las medidas de sus ángulos. A continuación, se describen los distintos tipos a partir de sus características.

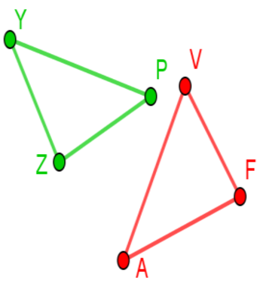


Ilustración 21. Nomenclatura de los triángulos (Elaboración propia)

Los triángulos presentados en la ilustración 21 se representan y nombran simbólicamente así:

$\Delta \boldsymbol{YPZ}$ y $\Delta \boldsymbol{AVF}$

2.1.6.5.1. Triángulo escaleno

Un triángulo es escaleno, si y sólo sí, ninguna pareja de lados es congruente.

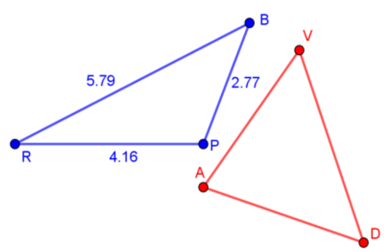


Ilustración 22. Representaciones del triángulo escaleno (Elaboración propia)

Relacionado con la ilustración 22, el $\Delta \boldsymbol{BRP}$ es escaleno debido a que se observan distintas medidas para sus tres lados; asimismo, el $\Delta \boldsymbol{AVD}$ no muestra medidas ni marcas de congruencia entre sus lados, por ende, se asume escaleno.

2.1.6.5.2. Triángulo isósceles

Un triángulo es isósceles, si y sólo sí, tiene una pareja de lados congruentes.

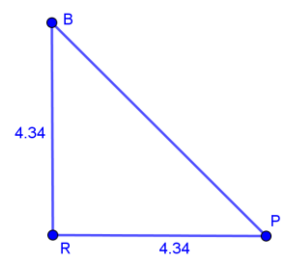


Ilustración 23. Representación numérica del triángulo isósceles (Elaboración propia)

En la ilustración 23 el $\Delta \boldsymbol{BRP}$ es isósceles debido a que se observan las mismas medidas para dos de sus lados.

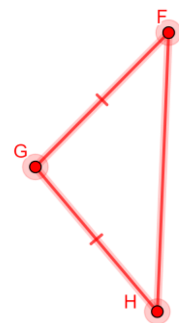


Ilustración 24. Representación simbólica del triángulo isósceles (Elaboración propia)

Por su parte, en la ilustración 24, aunque el $\Delta \boldsymbol{FGH}$ no muestra medidas, también es isósceles debido a las marcas de congruencia entre dos de sus lados $\overline{\boldsymbol{FG}} \cong \overline{\boldsymbol{GH}}$

2.1.6.5.3. Triángulo equilátero

Un triángulo es equilátero, si y sólo sí, todos sus lados son congruentes.

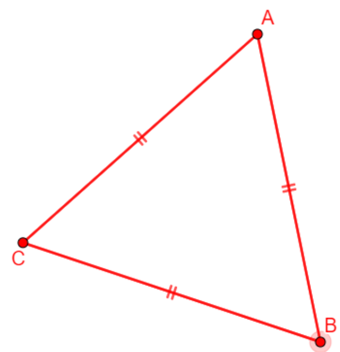


Ilustración 25. Representación simbólica del triángulo equilátero (Elaboración propia)

Con relación a la ilustración 25, el $\Delta \boldsymbol{ABC}$ es equilátero, porque aunque sus lados no muestran las medidas numéricas, si tienen las respectivas marcas de congruencia entre ellos $\overline{\boldsymbol{AC}} \cong \overline{\boldsymbol{AB}} \cong \overline{\boldsymbol{BC}}$

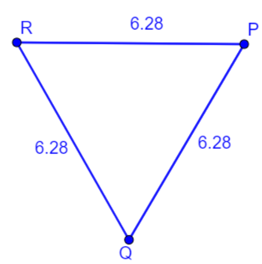


Ilustración 26. Representación numérica del triángulo equilátero (Elaboración propia)

Observando la ilustración 26, el $\Delta \boldsymbol{RQP}$ es equilátero debido a que se observan las mismas medidas para todos sus lados; lo anterior, conlleva a que dichos lados sean congruentes.

2.1.6.5.4. Triángulo rectángulo

Un triángulo es rectángulo, si y sólo sí, uno de sus ángulos es recto; lo anterior implica que sus otros ángulos deban ser siempre agudos.

En este tipo de triángulos los lados reciben nombres particulares: los dos lados que determinan el ángulo recto se llaman **catetos**, mientras que el lado opuesto al ángulo recto se llama **hipotenusa**.

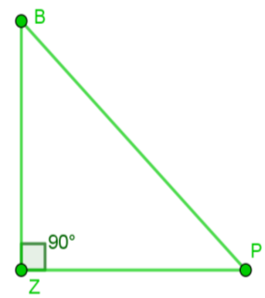


Ilustración 27. Representación 1 del triángulo rectángulo (Elaboración propia)

En la ilustración 27, los catetos del $\Delta \boldsymbol{BZP}$ son el $\overline{\boldsymbol{BZ}}$ y el $\overline{\boldsymbol{ZP}}$, mientras que la hipotenusa es el $\overline{\boldsymbol{BP}}$.

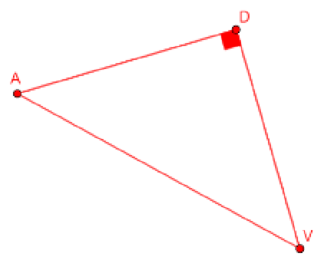


Ilustración 28. Representación 2 del triángulo rectángulo (Elaboración propia)

Para el ejemplo de la ilustración 28, en el $\Delta \boldsymbol{ADV}$ los catetos son el $\overline{\boldsymbol{AD}}$ y el $\overline{\boldsymbol{VD}}$, mientras que la hipotenusa es el $\overline{\boldsymbol{AV}}$.

NOTA: Como indican los ejemplos, una convención matemática al nombrar triángulos rectángulos es escribir el nombre del vértice sobre el cual está el ángulo recto en la mitad de los otros vértices.

2.1.6.5.5. Triángulo acutángulo

Un triángulo es acutángulo, si y sólo sí, todos y cada uno de sus tres ángulos es agudo.

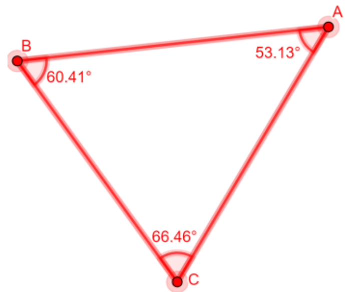


Ilustración 29. Representación del triángulo acutángulo (Elaboración propia)

En la ilustración 29 el $\Delta \boldsymbol{ABC}$ es acutángulo, porque según las medidas sus tres ángulos son agudos.

Visualmente se genera una idea de cómo son los triángulos acutángulos, pero la única forma de afirmar esto es teniendo las medidas de sus ángulos.

2.1.6.5.6. Triángulo obtusángulo

Un triángulo es obtusángulo, si y sólo sí, uno de sus ángulos es obtuso; esto implica que sus otros dos ángulos sean agudos.

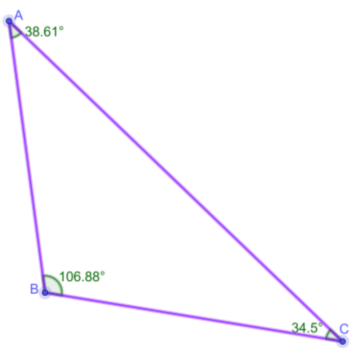


Ilustración 30. Representación del triángulo obtusángulo (Elaboración propia)

El $\Delta \boldsymbol{ABC}$ de la ilustración 30 es obtusángulo porque uno de sus ángulos es obtuso.

Específicamente, se observa que el $\measuredangle \boldsymbol{ABC}$ es el obtuso (implica que los otros dos son agudos).

2.1.6.6. Tipos de cuadriláteros

El cuadrilátero es el polígono de cuatro lados.

Pueden ser clasificados a partir de distintos tipos de relaciones entre sus lados o sus ángulos. A continuación, se presentan los distintos tipos de cuadriláteros según sus características.

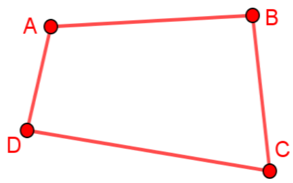


Ilustración 31. Representación 1 del cuadrilátero (Elaboración propia)

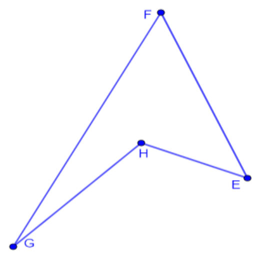


Ilustración 32. Representación 2 del cuadrilátero (Elaboración propia)

Los cuadriláteros se representan y nombran simbólicamente siguiendo un orden consecutivo a partir de alguno de sus vértices, bien sea siguiendo el sentido de las manecillas del reloj (color rojo) o el sentido contrario a ellas (color azul), así:

$$\boxdot\ \boldsymbol{ABCD} \text{ o } \boxdot\ \boldsymbol{EFGH}$$

2.1.6.6.1. Paralelogramo

Un cuadrilátero es un paralelogramo, si y sólo sí, tiene dos pares de lados paralelos.

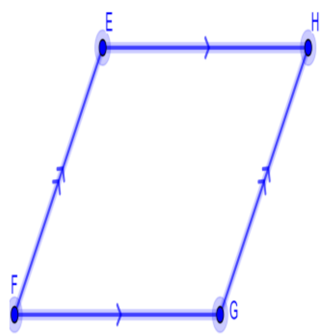


Ilustración 33. Representación del paralelogramo (Elaboración propia)

En la ilustración 33 el $\boxdot\ \boldsymbol{EFGH}$ es paralelogramo porque sus dos pares de lados opuestos tienen las marcas de paralelismo. Se representa simbólicamente así:

$$\overline{\boldsymbol{EH}} \parallel \overline{\boldsymbol{FG}} \text{ y } \overline{\boldsymbol{EF}} \parallel \overline{\boldsymbol{HG}}$$

2.1.6.6.2. Rectángulo

Un cuadrilátero es un rectángulo, si y sólo sí, sus cuatro ángulos son rectos.

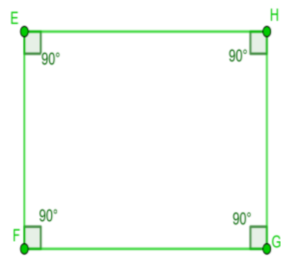


Ilustración 34. Representación del rectángulo (Elaboración propia)

El ⊡ $\boldsymbol{EFGH}$ de la ilustración 34 es un rectángulo porque todos sus ángulos internos son rectos (miden 90°); asimismo, uno de sus teoremas es que: *si un cuadrilátero es rectángulo, entonces es paralelogramo.*

2.1.6.6.3. Cuadrado

Un cuadrilátero es un cuadrado, si y sólo sí, todos sus lados son congruentes y todos sus ángulos son rectos.

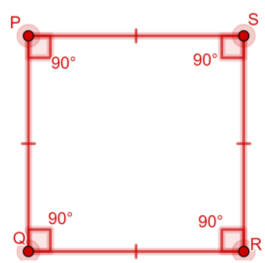


Ilustración 35. Representación del cuadrado (Elaboración propia)

En la ilustración 35, el ⊡ $\boldsymbol{PQRS}$ es un cuadrado porque todos sus ángulos son rectos (implica que todo cuadrado es un rectángulo), y todos sus lados son congruentes.

2.2. Expresiones algebraicas

A continuación, se presentan definiciones y conceptos relacionados con el álgebra, los cuales a su vez se ven involucrados en el diseño y desarrollo de las actividades propuestas en el presente trabajo. Dichas definiciones y conceptos se toman y ajustan de las propuestas de Stewart, Redlin y Watson (2012), además de Luque, Mora y Torres (2014).

2.2.1. Variable

Es una letra que representa a cualquier número en un conjunto dado de números. Se escriben en minúsculas y se suelen utilizar la $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ en el conjunto de los números reales.

2.2.2. Conjunto de los números reales

El conjunto de los números reales establece su axiomatización a partir de las siguientes premisas: **i)** existen unos entes llamados números reales; **ii)** existen dos operaciones básicas llamadas *suma y multiplicación* y una *relación de orden*; **iii)** existen algunos axiomas que se asumen como ciertos además de la necesidad del establecimiento de ciertas definiciones; **iv)** a partir de todo lo anterior se deducen y comprueban nuevos teoremas. La axiomatización de los números reales se clasifica en tres grupos de axiomas, según su naturaleza:

- Axiomas de campo: se refieren a las propiedades básicas que cumplen los números reales con las operaciones definidas.
- Axiomas de orden: son los que establecen criterios para comparar números, identificando cuándo un número es mayor, menor o igual que otro.
- Axioma de completitud: aquel que permite introducir a los números irracionales y estudiar las propiedades de completitud de los números reales.

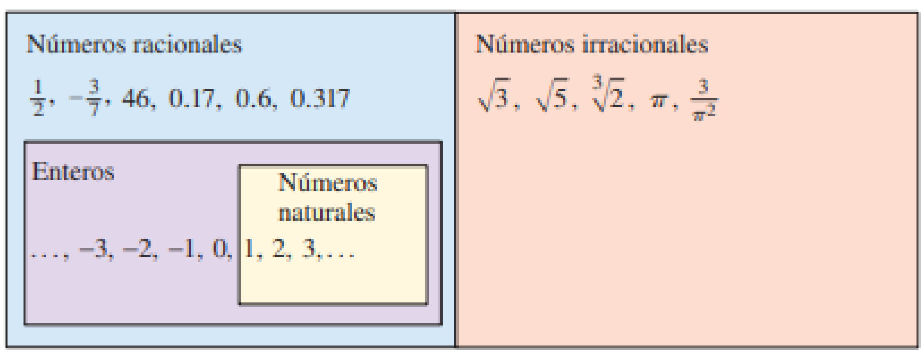


Ilustración 35. El campo de los Reales - Tomada de Stewart, Redlin y Watson (2012, p.2)

2.2.2.1. Axiomas de campo

En el conjunto de los números reales están definidas dos operaciones, la adición $(+)$ y la multiplicación $(\times)$. Dichas operaciones satisfacen los siguientes axiomas:

Axioma 1: si a, b son números reales, entonces $a + b$ también es un número real.

Por ejemplo, $a = 3{,}14 \ y \ b = -5{,}6$ son números reales:

$$a + b = 3{,}14 + (-5{,}6)$$

$$= 3{,}14 - 5{,}6 = -2{,}46$$

Por lo tanto, $-2{,}46$ también pertenece al conjunto de los reales.

Axioma 2 (propiedad asociativa de la adición): si a, b, c son números reales, entonces:

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

Por ejemplo, $a = 4; \ b = -9; \ c = 5{,}7$ son números reales:

$$¿\, 4 + (-9 + 5{,}7) = \big(4 + (-9)\big) + 5{,}7?$$

$$¿\, 4 + (-3{,}3) = (4 - 9) + 5{,}7?$$

$$¿\, 4 - 3{,}3 = -5 + 5{,}7?$$

$$0{,}7 = 0{,}7$$

Axioma 3 (elemento idéntico de la adición): existe un elemento idéntico e para la adición en el conjunto de los números reales, tal que, para cualquier número real a se cumple que:

$$a + e = e + a = a$$

En los números reales solamente existe un elemento idéntico para la adición, por ello $e = 0$.

Por ejemplo, $a = \frac{5}{9}$ es un número real:

$$\frac{5}{9} + 0 = 0 + \frac{5}{9} = \frac{5}{9}$$

Axioma 4 (inverso aditivo): para todo número real w existe un único número real w' que llamamos inverso aditivo de w, tal que:

$$w + w' = w' + w = 0$$

Por ejemplo, $w = 21$ es un número real, por lo cual existe $w' = -21$:

$$21 + (-21) = 21 - 21 = 0$$

$$-21 + 21 = 0$$

Axioma 5 (propiedad conmutativa de la adición): si a, b son números reales, entonces:

$$a + b = b + a$$

Por ejemplo, $a = 12{,}5;\ b = -9$ son números reales:

$$¿\,12{,}5 + (-9) = -9 + 12{,}5?$$

$$12{,}5 - 9 = 3{,}5$$

$$3{,}5 = 3{,}5$$

Axioma 6: si a, b son números reales, entonces $a \times b$ también es un número real.

Por ejemplo, los números $a = 5\ ;\ b = \frac{3}{4}$ pertenecen al conjunto de los reales:

$$5 \times \frac{3}{4} = \frac{5}{1} \times \frac{3}{4}$$

$$= \frac{5 \times 3}{1 \times 4} = \frac{15}{4}$$

Por lo tanto, $\frac{15}{4}$ también pertenece al conjunto de los reales.

Axioma 7 (propiedad asociativa de la multiplicación): si a, b, c son números reales, entonces:

$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$$

Por ejemplo $a = 3;\ b = 5;\ c = 2$ son números reales:

$$¿\,3 \times (5 \times 2) = (3 \times 5) \times 2?$$

$$3 \times (10) = (15) \times 2$$

$$30 = 30$$

Axioma 8 (elemento idéntico de la multiplicación): existe un elemento idéntico q para la multiplicación en el conjunto de los números reales, y diferente del 0, tal que para cualquier número real a se cumple que:

$$a \times q = q \times a = a$$

En los números reales solamente existe un elemento idéntico para la multiplicación, por ello $q = 1$.

Por ejemplo, $a = -7{,}9$ es un número real:

$$-7{,}9 \times 1 = 1 \times (-7{,}9) = -7{,}9$$

Axioma 9 (inverso multiplicativo): para todo número real a diferente de 0 existe un número real z (inverso multiplicativo de a), tal que:

$$a \times z = z \times a = 1$$

Por ejemplo, $a = \frac{9}{13}$ es un número real distinto al 0, por lo cual existe el número real $z = \frac{13}{9}$

$$\frac{9}{13} \times \frac{13}{9} = \frac{9 \times 13}{13 \times 9} = \frac{117}{117} = 1$$

$$\frac{13}{9} \times \frac{9}{13} = \frac{13 \times 9}{9 \times 13} = \frac{117}{117} = 1$$

Axioma 10 (propiedad conmutativa de la multiplicación): si a, b son números reales, entonces:

$$a \times b = b \times a$$

Por ejemplo, $a = -3;\ b = -11$ son números reales:

$$¿\,3 \times (-11) = -11 \times 3?$$

$$-33 = -33$$

Axioma 11 (propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma): esta propiedad establece un vínculo entre la adición y la multiplicación; si a, b, c son números reales, entonces:

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

Por ejemplo $a = 6;\ b = 5;\ c = 4$ son números reales:

$$¿\,6 \times (5 + 4) = (6 \times 5) + (6 \times 4)?$$

$$6 \times (9) = (30) + (24)$$

$$54 = 54$$

2.2.3. Término algebraico

Un término algebraico se encuentra compuesto siempre de cuatro partes fundamentales, las cuales son:

- **Signo:** puede ser positivo $(+)$ o negativo $(-)$, se ubica siempre al principio del término, en caso tal de no tener signo, se asume que el término es positivo.
- **Coeficiente:** es el valor numérico que acompaña a la variable; cuando no aparece explícito ningún coeficiente, se asume que el valor de dicho coeficiente es 1.

- **Incógnita:** es la variable o variables, puesto que pueden ser más de una; cuando aparecen más de una incógnita la convención es ordenarlas en orden alfabético (u ocasionalmente dependiendo de la incógnita que se tome como principal), asimismo, cuando no aparece ninguna incógnita en el término, éste se denomina t**érmino independiente**.
- **Exponente:** es el valor al cual se encuentra elevada la incógnita, o incógnitas en caso tal de haber más de una; cuando no aparece ningún exponente junto a la incógnita, se asume que el valor del exponente es 1.

$12xy = +12x^{\mathbf{1}}y^{\mathbf{1}}$ $-3{,}4ay^4 = -3{,}4a^{\mathbf{1}}y^4$ $\frac{7}{5}wx^2z = +\frac{7}{5}w^{\mathbf{1}}x^2z^{\mathbf{1}}$	Como se explicó, aunque algunas de las incógnitas no tienen el exponente de manera explícita, se puede asegurar y establecer que es el **1**. Lo mismo con el signo (+).
$-ay^4 = -\mathbf{1}a^{\mathbf{1}}y^4$ $b^2x^3 = +\mathbf{1}b^2x^3$	Asimismo, en este caso que los términos no tienen ningún coeficiente explícito, se puede asegurar y establecer que es el **1**.

Tabla 2. Términos algebraicos (Elaboración propia)

2.2.3.1. Términos algebraicos semejantes

Dos o más términos algebraicos son semejantes, si y sólo si, tienen exactamente las mismas variables y a su vez éstas se ven afectadas por los mismos respectivos exponentes (sin importar el orden en el cual estén escritas). Los términos semejantes se pueden simplificar entre sí.

$-2xy$ con $-5{,}4xy$ $12w^{\mathbf{3}}x^{\mathbf{4}}y$ con $-w^{\mathbf{3}}x^{\mathbf{4}}y$ $\frac{5}{8}a^{\mathbf{2}}b^{\mathbf{4}}c^{\mathbf{3}}$ con $-2{,}6a^{\mathbf{2}}b^{\mathbf{4}}c^{\mathbf{3}}$	Acá se observan algunas parejas de términos que son semejantes, puesto que cumplen con las características para ello.
$-2xy$ con $4x^{\mathbf{4}}y$ $12ax^{\mathbf{3}}y$ con $-4a^{\mathbf{3}}xy$ $\frac{16}{9}a^{\mathbf{2}}b^{\mathbf{4}}c^{\mathbf{3}}$ con $3{,}46a^{\mathbf{4}}b^{\mathbf{3}}c^{\mathbf{2}}$	En este espacio, se muestran parejas de términos que no son semejantes, puesto que, si comparten las mismas incógnitas, pero no tienen los mismos exponentes entre ellas.
$34xy$ con $-45{,}7xyz$ $\frac{16}{9}a^{\mathbf{2}}b^{\mathbf{4}}$ con $8,6a^{\mathbf{2}}b^{\mathbf{4}}c^{\mathbf{3}}x$ $19a^{\mathbf{3}}yz$ con $-34a^{\mathbf{3}}wy$	En este espacio, se muestran parejas de términos que no son semejantes, puesto que, aunque comparten algunas incógnitas con su exponente, no son exactamente iguales todas.

Tabla 3. Términos algebraicos semejantes (Elaboración propia)

2.2.4. Expresión algebraica

Simboliza una combinación de términos algebraicos mediante adición $(+)$ y sustracción $(-)$. No necesariamente todas las expresiones algebraicas se asocian a polinomios.

2.2.5. Polinomios

Los polinomios se obtienen cuando se relacionan términos algebraicos que no son semejantes mediante sumas, restas y productos. Los polinomios compuestos por un único término se llaman monomios, los polinomios compuestos por dos términos se llaman binomios, los polinomios compuestos por tres términos se llaman trinomios, cuando un polinomio tiene cuatro o más términos simplemente se llama polinomio de cuatro términos, polinomio de cinco términos, y así según la particularidad del caso.

Es importante tener claridad en el hecho de que los polinomios con términos semejantes pueden reducirse y así pasar por ejemplo de tener un trinomio a un binomio, o pasar de tener un polinomio de cuatro términos a un trinomio.

Expresión	**Tipo de polinomio**
$4x^{4}y;\ -5wxy$	Monomios
$5xy-2ab^{3};-2x+7ab^{3}$	Binomios
$34xy+5w-7yz$ $-4w+5xy-9$	Trinomios
…	…

Tabla 4. Los polinomios (Elaboración propia)

2.2.5.1. Operaciones entre polinomios

Los polinomios permiten las cuatro operaciones básicas de la matemática entre ellos, como se ilustra a continuación.

Suma: para la suma entre polinomios lo único que se puede reducir u operar son aquellos términos algebraicos semejantes.	$i)\ 5xy+4xy=9xy$ $ii)\ -2ab^{3}+7ab^{3}=5ab^{3}$ $iii)\ 5ax+(-4ax)$ $=5ax-4ax=1ax$

Resta: para la resta entre polinomios, de manera similar a la suma, lo único que se puede reducir u operar son aquellos términos algebraicos semejantes.	$i)\ 5xy - 4xy = xy$ $ii)\ -2ab^3 - 7ab^3 = -9ab^3$ $iii)\ 5ax - (-4ax)$ $= 5ax + 4ax = 9ax$
Multiplicación: para la multiplicación entre polinomios lo que se debe realizar es la multiplicación de cada uno de los términos del primer factor por cada uno de los términos del segundo factor. Sin importar si los términos algebraicos son o no semejantes. Si se obtienen términos semejantes en los resultados, es necesario simplificarlos como se muestra en el ejemplo *iv*).	$i)\ 6(-4ax) = -24ax$ $ii)\ 3(6x - 9) = 18x - 29$ $iii)\ y(4y^2 - 2y + 1)$ $= 4y^3 - 2y^2 + 1y$ $iv)\ (x+5)(2x-6)$ $= 2x^2 - 6x + 10x - 30$ $= 2x^2 + 4x - 30$
División: el algoritmo de la división entre polinomios maneja similitudes con el algoritmo de la división entre	$\begin{array}{cccc\|cc} \boldsymbol{x^3} & \boldsymbol{+3x^2} & \boldsymbol{+4x} & \boldsymbol{+10} & \boldsymbol{x} & \boldsymbol{+3} \\ \hline -x^3 & -3x^2 & & & \boldsymbol{x^2} & \boldsymbol{+4} \\ 0 & 0 & -4x & -12 & & \\ & & 0 & \boldsymbol{-2} & & \end{array}$ De lo anterior, y siguiendo el método de prueba que pide multiplicar al

cantidades numéricas. Se organiza el dividendo de mayor a menor exponente con relación al término divisor, y se utilizan en el cociente aquellos términos que permitan volver los términos algebraicos del dividendo a 0.	***divisor*** por el ***cociente***, y sumarle el ***residuo*** para obtener el ***dividendo***, se puede establecer entonces que la siguiente expresión debe dar como resultado al dividendo, como se muestra: $(\boldsymbol{x+3})(\boldsymbol{x^2+4})+(\boldsymbol{-2})$ $=x^3+4x+3x^2+12-2$ $=x^3+4x+3x^2+10$ $=\boldsymbol{x^3+3x^2+4x+10}$
Tabla 5. Operaciones entre polinomios (Elaboración propia)	

2.2.6. Productos notables

2.2.6.1. Cuadrado de un binomio

Es la igualdad matemática que se obtiene al multiplicar un binomio por sí mismo dos veces (elevar al cuadrado). Los signos resultantes pueden cambiar dependiendo del hecho de tener una suma o una resta en el binomio, como se muestra a continuación.

$(\boldsymbol{a+b})^{\boldsymbol{2}}=(a+b)(a+b)$ $=a^2+ab+ab+b^2$ $=\boldsymbol{a^2+2ab+b^2}$
$(\boldsymbol{a-b})^{\boldsymbol{2}}=(a-b)(a-b)$ $=a^2-ab-ab+b^2$ $=\boldsymbol{a^2-2ab+b^2}$
Tabla 6. Cuadrado de un binomio (Elaboración propia)

2.2.6.2. Cubo de un binomio

Es la igualdad matemática que se obtiene al multiplicar un binomio por sí mismo tres veces (elevar al cubo). Los signos resultantes pueden cambiar dependiendo del hecho de tener una suma o una resta en el binomio, como se muestra.

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{\mathbf{3}}=[(a+b)(a+b)](a+b)$$ $$=[a^2+2ab+b^2](a+b)$$ $$=a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+ab^2+b^3$$ $$=\boldsymbol{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$$
$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^{\mathbf{3}}=[(a-b)(a-b)](a-b)$$ $$=[a^2-2ab+b^2](a-b)$$ $$=a^3-a^2b-2a^2b+2ab^2+ab^2-b^3$$ $$=\boldsymbol{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}$$
Tabla 7. Cubo de un binomio (Elaboración propia)

2.2.6.3. Diferencia de cuadrados

Es una igualdad matemática que se presenta entre una multiplicación de dos factores y una resta o diferencia. Asumiendo que las variables a utilizar se llamen $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$; la igualdad matemática en cuestión se expresaría algebraicamente de la siguiente manera:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=a^2+ab-ab-b^2$$ $$=\boldsymbol{a^2-b^2}$$
Tabla 8. Diferencia de cuadrados (Elaboración propia)

2.2.7. Teorema de Pitágoras

Es una igualdad matemática que se presenta entre un binomio y un monomio.

Asumiendo que se tiene $\Delta \boldsymbol{AHC}$ rectángulo cuyos catetos se llaman $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}$ y su hipotenusa $\boldsymbol{h}$; el teorema de Pitágoras se expresaría algebraica y gráficamente de la siguiente manera:

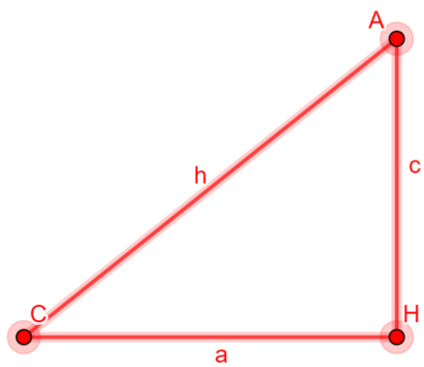


Ilustración 36. El Teorema de Pitágoras (Elaboración propia)

En lenguaje natural se establece que: "*la suma de las áreas de los cuadrados de los catetos es equivalente con el área del cuadrado de la hipotenusa*". En lenguaje simbólico matemático, y con relación al triángulo de la ilustración 36 se escribe así:

$$\boldsymbol{a^2 + c^2 = h^2}$$

Una de las demostraciones o comprobaciones geométricas de que dicha ecuación se cumple siempre, y que además será utilizada en la *Actividad 2* (cuyo enfoque es deducir el Teorema de Pitágoras) es la siguiente:

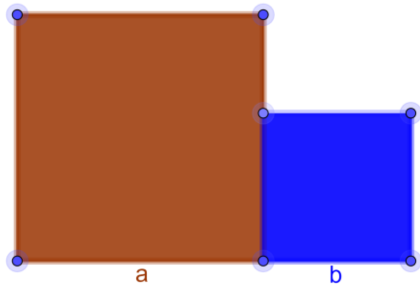
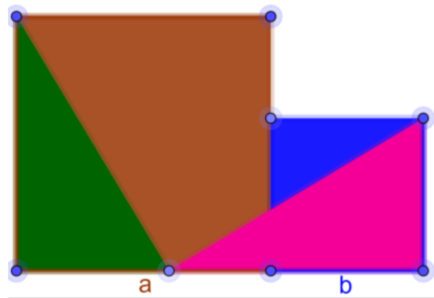
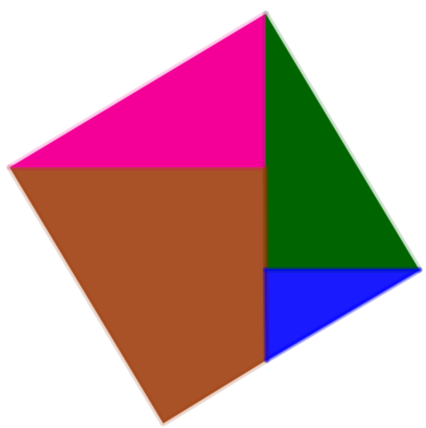
 *Ilustración 37. Parte 1 - Comprobación Teorema de Pitágoras (Elaboración propia)*	Se tienen dos cuadrados, para uno de ellos (color café) la medida de sus lados será $\boldsymbol{a}$, mientras que para el otro (color azul) la medida de sus lados será $\boldsymbol{b}$.
 *Ilustración 38. Parte 2 - Comprobación Teorema de Pitágoras (Elaboración propia)*	Sobre el lado inferior del cuadrado café se copia la medida del cuadrado azul, empezando en el vértice inferior izquierdo. A partir de dicha medida se pueden construir dos triángulos rectángulos (verde y rosado) que resultan congruentes.
 *Ilustración 39. Parte 3 - Comprobación Teorema de Pitágoras (Elaboración propia)*	Al recortar los triángulos, y realizar los movimientos adecuados, se genera un nuevo cuadrado con todas las cuatro piezas. El área de dicho cuadrado es equivalente al cuadrado de la hipotenusa, a la vez que éste es equivalente a la suma del área de los cuadrados pequeños (catetos).

Tabla 9. Comprobación del Teorema de Pitágoras (Elaboración propia)

2.3. Dificultades, obstáculos y errores

2.3.1. Dificultades en el proceso de enseñanza y aprendizaje

Atendiendo a los objetivos propuestos para el presente trabajo de grado, se hace necesario presentar aquellas dificultades, errores y obstáculos asociados a la enseñanza y aprendizaje de algunos aspectos o campos puntuales de las matemáticas, más particularmente, los asociados a: el álgebra, la geometría y el uso de material didáctico tangible.

Según como lo explica Socas (1997), las dificultades que puede generar el aprendizaje de las matemáticas tienen distintas naturalezas. En general, las dificultades proceden del microsistema educativo, esto es: estudiante, materia, profesor e institución escolar; de lo anterior, el autor establece que las dificultades pueden abordarse por medio de varias perspectivas dependiendo del elemento en el cual se haga énfasis: desarrollo cognitivo de los estudiantes, currículo de matemáticas y métodos de enseñanza. Por otro lado, el autor también nos recuerda que las dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas no se reducen a los menos capaces para trabajar con las matemáticas, pues en general, prácticamente todos los estudiantes alguna vez han presentado dificultades que a su vez conllevan a que cometan errores.

Socas (1997) explica, además, como dichas dificultades mencionadas anteriormente, se conectan y concretan en la práctica mediante forma de obstáculos y se hacen manifiestas en los estudiantes como errores; la procedencia del error puede diferir según el sujeto, pero, en cualquier caso, debe ser considerado como la presencia en el alumno de un esquema cognitivo inadecuado (no solamente la consecuencia de una falta específica de conocimiento o despiste). Con base en lo anterior, el autor nos presenta entonces una categorización de los distintos tipos de dificultades según su naturaleza, de la siguiente manera:

2.3.1.1. Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las matemáticas

La comunicación de los objetos matemáticos de forma escrita se realiza a través de los signos matemáticos, pero con la ayuda del lenguaje habitual que es algo que favorece la interpretación de tales signos. Esto, genera que aparezcan diferentes conflictos asociados a la comprensión y comunicación de los objetos matemáticos.

- La ayuda que la lengua común presta a la interpretación de signos matemáticos: teniendo en cuenta que las matemáticas utilizan un lenguaje que es preciso, sometido a reglas exactas, pero que no comunica su significado salvo por la interpretación exacta de sus signos; por su parte, el lenguaje común puede presentar fallas ortográficas o en las reglas gramaticales, pero aun así se puede comunicar o interpretar el significado. Socas (1997) indica que este conflicto involucrado en el uso de lenguaje ordinario dentro del contexto matemático es un **conflicto de precisión.**
- El vocabulario en común: teniendo en cuenta que palabras como raíz, potencia, producto, matriz, integral, semejante, función, etc., tienen significados diferentes en el ámbito matemático y en el lenguaje

habitual, por lo cual el uso de tales palabras puede llegar a producir dificultades a causa de la **confusión semántica** implicada.

- Uso de algunas palabras que en ciertos contextos pueden ocasionar confusiones de conceptos: hacer uso de frases como "añadir un cero" en la multiplicación por 10, "reducir una fracción" o "reducir una expresión algebraica" en la simplificación, o identificar a una letra con un significado algebraico como una fruta "$5x + 7y$, igual a 5 bananos más 7 naranjas"; el autor nos indica que este tipo de frases pueden llegar a ser contraproducentes puesto que llegan a oscurecer el significado del signo mucho más que lo que pueden llegar a destacar el concepto subyacente (se recomienda entonces evitar el uso de este tipo de palabras en estos contextos).
- Uso de palabras específicamente asociadas a conceptos matemáticos: palabras propias de la matemática como hipotenusa, paralelogramo, coeficiente, isósceles, divisor, múltiplo, etc., suelen presentar dificultades al estudiante por el mismo hecho de no estar familiarizado con ellas y frecuentemente son mal entendidas; esto por el hecho de que es justamente en la clase de matemáticas el único espacio donde se encuentra con dichos términos.
- Uso de palabras que tienen el mismo significado en la lengua común y en las matemáticas: el autor reconoce que es curioso como el estudiantado tiene la costumbre de pensar que una palabra del lenguaje habitual toma un significado distinto cuando se emplea en las

matemáticas. Este tipo de dificultades hacen parte de la pragmática del lenguaje matemático, la cual se refiere al estudio del sentido que se da al discurso en función del contexto en el cual se enuncia.

- El lenguaje de los signos: teniendo en cuenta que la sintaxis (reglas formales de las operaciones) puede algunas veces entenderse y desarrollarse más allá del dominio general de sus aplicaciones, lo cual es propio de la naturaleza abstracta de los conceptos matemáticos. Pero dicha naturaleza abstracta se entiende como todo un proceso de abstracción caracterizado por diferentes *etapas (estadios).*

  ➔ Etapa 1 - estadio semiótico: el sistema nuevo de signos es caracterizado por el sistema antiguo, el cual ya es conocido por los estudiantes; en otras palabras, en esta etapa los estudiantes aprenden signos nuevos que adquieren significado a partir de los signos antiguos que ellos ya conocen.

  ➔ Etapa 2 – estadio estructural: el sistema nuevo se estructura según la organización del sistema antiguo en el cual se basa, haciendo uso de operaciones y procedimientos para antiguas para establecer sistemas nuevos; en otras palabras, el sistema antiguo permite organizar la estructura del sistema nuevo. En esta etapa del estadio estructural, es en la cual aparecen diferentes problemas que obligan en un primer momento a poner restricciones.

  En esta etapa 2 aparecen entonces verdaderas dificultades cognitivas que al no ser explicadas por el sistema antiguo, se recurre a la observación de regularidades y comportamientos de patrones, para poder así dotarlos de significado en el sistema nuevo; el establecimiento de sistemas nuevos implica muchas veces eliminar restricciones propias del sistema antiguo, pero todavía quedan signos que no pueden ser dotados de significado, ni siquiera con las regularidades y patrones, de allí que dichos signos actúen con significados propios(independientemente del sistema anterior).

- Etapa 3 – estadio autónomo: es éste el proceso de generalización de las matemáticas y a su vez una característica de estas, como una parte inherente del desarrollo de sus signos. Es así, que el sistema nuevo se convierte en una fuente de dificultades al encontrarnos con elementos que no pueden ser conocidos en términos del sistema de signos antiguo.

2.3.1.2. Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático

Estas dificultades se ponen de manifiesto en la naturaleza lógica de las matemáticas y las rupturas que se dan en relación con los modos de pensamiento matemático.

Una de las principales dificultades en el aprendizaje de las matemáticas ha sido el aspecto deductivo formal de ellas. El abandono de las demostraciones formales en la secundaria se ha estimado como adecuado, pero esto no incluye el abandono sobre el pensamiento lógico; es decir, la capacidad para seguir un argumento lógico, siendo dicha incapacidad una de las causas que genera mayor dificultad en el aprendizaje de esta ciencia. Socas (1997) explica como abandonar algunas demostraciones formales no debe implicar de ninguna manera el abandono del pensamiento lógico, pues dicho pensamiento lógico es una destreza de alto nivel que resulta necesaria para alcanzar determinados niveles de competencia matemática. Fomentar la capacidad para seguir un argumento lógico no se debe contraponer a los métodos intuitivos, a las conjeturas, a los ejemplos y contraejemplos, sino que, más bien, esta capacidad puede y logra desarrollarse con la práctica de dichos métodos informales; siguiendo lo anterior, este enfoque lógico de las matemáticas debe conducir a resolver problemas por medio de un pensamiento matemático inteligente, llegando así a desarrollar una idea más amplia que la propia deducción formal.

Es importante evitar confundir la deducción lógica con la deducción formal y con los procedimientos algorítmicos, pues el pensamiento lógico debe estar presente en absolutamente todas las actividades matemáticas. Socas (1997) también nos recuerda que la "lógica" de las matemáticas escolares depende muchas veces de la situación en que se encuentre el estudiante, además del sentido de la palabra en función del contexto en el cual se enuncia; lo anterior ha mostrado que muchas veces parece que en el ámbito escolar generamos con las matemáticas una "lógica escolar" diferente de la "lógica social", y todo esto lleva al estudiante a que responda no a la pregunta que se le realiza por parte del docente, sino que a una meta-pregunta: ¿Qué espera el profesorado que yo haga?

Parece entonces, que para aminorar las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas es necesario potenciar el pensamiento lógico de las matemáticas y conjugar dicha lógica interna de la matemática con la "lógica social" en la cual está inmerso el estudiante.

2.3.1.3. Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las matemáticas

Estas dificultades tienen que ver directamente con la institución escolar, con el currículo de matemáticas y con los métodos de enseñanza.

- ➔ La institución escolar: debe propiciar una organización escolar que tienda a reducir las dificultades del aprendizaje de las matemáticas dependiendo de los materiales curriculares, de los recursos y de los estilos de enseñanza. Dicha organización afecta elementos espaciotemporales como también a los agrupamientos en clases homogéneas o heterogéneas, de acuerdo con sus habilidades en matemáticas.
- ➔ La organización curricular: es muy importante debido a que una mala organización puede originar diferentes dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. Se toman cuatro elementos básicos como aquellos que se consideran dificultades en el currículo de matemáticas: las habilidades necesarias para desarrollar capacidades matemáticas que definen la competencia de un estudiante en matemáticas, la necesidad

de contenidos previos, el nivel de abstracción requerido y la naturaleza lógica de las matemáticas escolares.

- ➔ Los métodos de enseñanza: deben estar ligados tanto a los elementos organizativos de la institución escolar, como a la organización curricular. Se deben considerar varios aspectos como el lenguaje, la secuenciación de las unidades de aprendizaje, el respeto a la individualidad con base a los ritmos de trabajo, recursos y representación adecuada.

2.3.1.4. Dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los estudiantes

Tener información sobre los procesos de aprendizaje y conocimiento del desarrollo intelectual, permite conocer el nivel de dificultades, realizaciones y respuestas a cuestiones esperadas de los estudiantes. Conocer los estadios generales del desarrollo intelectual, representado cada uno de ellos por un modo característico de razonamiento y por unas tareas específicas de matemáticas que los estudiantes son capaces de hacer, constituye una información valiosa para los profesores en el momento de diseñar el material de enseñanza. Se pueden considerar diferentes enfoques: el enfoque jerárquico del aprendizaje, el enfoque evolutivo, el enfoque estructuralista, el enfoque constructivista y el enfoque del procesamiento de la información, entre tantos otros.

2.3.1.5. Dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas

Se reconoce que, a muchos estudiantes, incluyendo algunos de los más capacitados, simplemente no les gustan las matemáticas. Sentimientos como tensión o miedo se producen con ellas, y es claro que muchos aspectos son los que influyen en esta aversión (la naturaleza jerárquica del conocimiento matemático, la actitud del profesor hacia el estudiantado, los estilos de enseñanza y las actitudes y creencias hacia las matemáticas que les han sido transmitidas).

Es claro que muchas de las actitudes negativas y emocionales hacia las matemáticas están asociadas a la ansiedad y el miedo (ansiedad por cumplir una tarea, miedo por equivocarse, etc.), las cuales generan bloqueos de origen afectivo que a su vez repercuten en la actividad matemática del estudiante.

Buxton (1981, citado en Socas, 1997) cita las siguientes creencias sobre la naturaleza de las matemáticas que suelen ser transmitidas de padres a hijos. Las matemáticas son: fijas, inmutables, externas, intratables, irreales; abstractas y no relacionadas con la realidad; un misterio accesible a pocos; una colección de reglas y hechos que deben ser recordados; una ofensa al sentido común en algunas de las cosas que aseguran; un área en la que se harán juicios, no solo sobre el intelecto, sino sobre la valía de la persona; sobre todo cálculo.

La anterior perspectiva externa de las matemáticas genera una visión de ellas como la realización de una aventura arriesgada a la que uno se enfrenta con pocas herramientas (por lo cual es entendible que aparezcan en el estudiante la ansiedad y el miedo).

2.3.2. Obstáculos en la enseñanza y el aprendizaje

Según lo plantea Socas (1997) un obstáculo se entiende como aquel conocimiento adquirido, no trata de una falta de conocimiento sino de algo que se conoce positivamente, sobre el cual el estudiante tiene un dominio de eficacia. El estudiante es capaz de utilizar esto para producir respuestas adaptadas a ciertos contextos en los cuales el dominio de dicho conocimiento es eficaz y adecuado; no obstante, cuando se usa este conocimiento fuera de dichos contextos el estudiante genera respuestas inadecuadas e incluso incorrectas (el dominio resulta siendo falso).

2.4. Material Didáctico

Es importante destacar que el término material didáctico es utilizado de manera distinta según el autor, por esto a continuación, se presentan algunas definiciones e ideas asociadas al término material didáctico, que serán utilizadas en forma conjunta para generar una única idea de lo que se entenderá por material didáctico para la presente propuesta:

- Godino, Batanero y Font (2003) explican que los materiales didácticos que potencian y apoyan el razonamiento matemático están formados por los objetos físicos que se toman del entorno o se preparan con el fin de que permitan ser medios de expresión, exploración y cálculo en matemáticas.

- Moreno (2004) describe que "*el material didáctico son los productos diseñados para ayudar en los procesos de aprendizaje*".
- Manrique y Gallego (2013) comentan que el material didáctico debería favorecer el aprendizaje en los estudiantes, puesto que es un medio de motivación que estimula el desarrollo de la memoria, la motricidad, y otros aspectos. El material permite llegar al concepto matemático por medio del concepto imagen asociado, el cual se forma a través de la exploración.
- Muñoz (2014) asegura que los materiales didácticos son todo aquello que se puede utilizar en el aula de clase al tiempo que puede ser visto y manipulado por los estudiantes en aras de facilitar su aprendizaje.

Además de las distintas acepciones, es importante destacar que la utilización de materiales didácticos para la enseñanza de un concepto matemático conlleva ciertas ventajas y desventajas, al respecto Muñoz (2014) menciona como ventajas:

- Construcción del pensamiento.
- Manipulación y observación.
- Recreación de situaciones.
- Asimilación de conceptos.
- Actúa como agente motivador y promueve la autonomía.

Y como desventajas:

- Es necesaria una óptima organización del grupo de estudiantes, contando además con materiales suficientes para su uso; esto suele complicarse en grupos de bastantes estudiantes.

- Poseer conocimientos necesarios sobre el material a utilizar; es importante tener claro que el estudiante siempre necesitara un espacio para familiarizarse con el material didáctico y su correcta utilización.
- Contar con un tiempo prudente para el desarrollo de las actividades; un detalle que suele complicarse directamente en las instituciones educativas por la cuestión de los horarios preestablecidos.

Atendiendo y relacionando las anteriores ideas y propuestas, se asume para la presente que el *material didáctico* son los productos tangibles diseñados o simplemente utilizados con el fin de facilitar los procesos de aprendizaje, además de ser instrumentos de los que nos servimos para la construcción del conocimiento.

Utilizar materiales didácticos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares debe ser visto y aceptado como una oportunidad para lograr adquirir, desarrollar o formalizar los conocimientos, y como una forma de mejorar el proceso mismo de enseñanza y aprendizaje; lo anterior, conlleva una corresponsabilidad entre el docente y el estudiante, pues desde su respectivo rol cada uno deberá trabajar en aras de que la aplicación o utilización del material didáctico realmente conduzca a los objetivos de aprendizaje y no simplemente se convierta en un “juego”.

2.4.1. Tangram Chino (siete piezas o tradicional)

El tangram de siete piezas, también llamando tradicional, es tan antiguo que no se puede asegurar quien lo creó, aunque si es muy difundida la idea de que su origen es de la antigua China, donde se le conoce con el nombre de “*ChiChiao Pan*” que significa “juego de los siete elementos” o “tabla de la sabiduría” según lo indican Angarita y Palacios (2015).

El tangram es un rompecabezas formado por piezas poligonales que se conocen con el nombre de *tans*. Dichas piezas son: un cuadrado, un paralelogramo, cinco triángulos (dos grandes, dos pequeños, uno mediano).

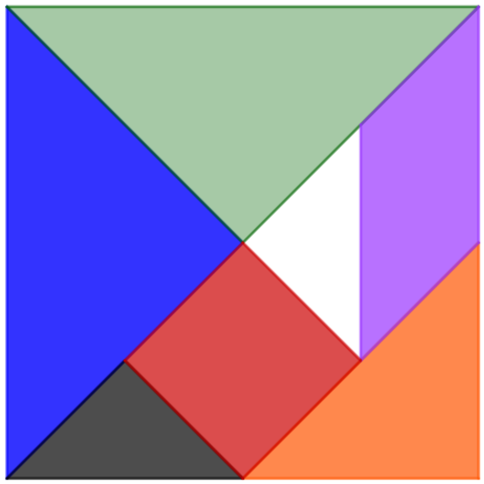


Ilustración 40. El Tangram Chino (Elaboración propia)

Como se observa, el Tangram Chino se obtiene al diseccionar un cuadrado por medio de la construcción de sus diagonales y algunos otros segmentos que permiten fraccionar de forma conveniente al cuadrado, por ello la versatilidad de la herramienta para construir miles de figuras.

2.4.2. Geoplano

El geoplano es un material didáctico construido principalmente con una base cuadrada (madera, plástico, …), en la cual se disponen algunos clavos fijados a ella en diversos tipos de posiciones (cuadrado o circular, principalmente) y un conjunto de ligas o cauchos, preferiblemente de colores.

Atendiendo a Gattegno (citado en Briseño, Palmas, Vásquez y Verdugo, 2000) nos indica además que el geoplano es un material multivalente debido a que puede servir para diversos propósitos, a su vez que "permite tomar conciencia de las relaciones geométricas".

El geoplano permite enseñar teoremas de geometría plana, con ciertas ventajas respecto al uso del tablero: las figuras que obtiene el estudiante son claras y no dependen de la habilidad del maestro al escribir; los geoplanos son manipulables, por ello permiten al estudiante ser girados a distintas posiciones que demuestran que las propiedades en cuestión no dependen de la posición de la figura.

Apoyado además en las ideas de Serrazina y Matos (1968), se pueden establecer algunas ventajas asociadas al uso del geoplano: la movilidad del geoplano permite que los estudiantes visualicen figuras en distintas posiciones; contrario a una hoja de papel, el geoplano es un aparato dinámico que permite diseñar y borrar de forma sencilla, a su vez que posibilita la realización rápida de conjeturas.

Con base en el conocimiento pedagógico y matemático propio, puedo asegurar que usar materiales como el geoplano son convenientes debido a que generan una mayor atracción o atención por el desarrollo de actividades en el estudiante.

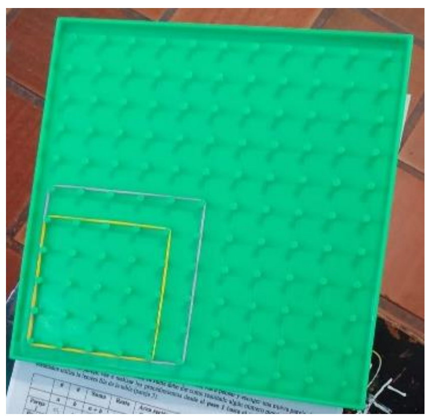


Ilustración 41. El Geoplano cuadrado (Elaboración propia)

3. Metodología

3.1. Descripción General

La presente propuesta se basa y fundamenta en la propuesta del Análisis Didáctico de Gómez (2002), donde explica que hay cuatro actividades que el profesor debe realizar para el diseño, puesta en práctica y evaluación de secuencias de tareas de enseñanza. Realizando los siguientes análisis:

- **Análisis cognitivo:** considerar y especificar las dificultades que los estudiantes pueden enfrentar y los errores que los estudiantes pueden cometer al realizar tareas que componen las actividades de instrucción.
- **Análisis de contenido:** describir de forma estructurada el tópico en el que se basa la actividad de instrucción desde la perspectiva de su estructura conceptual, sus sistemas de representación, su análisis fenomenológico y sus posibilidades de modelización.
- **Análisis de instrucción:** describir las actividades que se propondrán a los estudiantes teniendo en cuenta la variedad de tipos de tareas que surgen del análisis de contenido, las necesidades de los estudiantes (con motivo del análisis cognitivo), y los materiales y recursos disponibles.
- **Análisis de actuación:** describir el estado cognitivo de los estudiantes con motivo de las tareas, información que es el alimento de un nuevo ciclo del análisis didáctico.

Siguiendo los parámetros establecidos para el Análisis Didáctico, se pueden establecer las relaciones entre los distintos tipos de Análisis y la propuesta de los distintos apartados del presente Trabajo de Grado, de la siguiente manera:

- **Análisis cognitivo:** esta parte se puede detallar desde el marco de referencia, y en la descripción de las tareas donde se expresan los posibles errores y dificultades asociadas con cada una de las respectivas actividades propuestas.
- **Análisis de contenido:** este apartado se asocia al marco de referencia, donde se fundamentan los contenidos matemáticos asociados a las actividades, así como los materiales didácticos asociados.
- **Análisis de instrucción:** se relaciona con este mismo capítulo, donde enseguida se van a describir las tareas teniendo en cuenta los propósitos de estas, los recursos y materiales necesarios para su desarrollo, los contenidos y procesos que se abordan desde la propuesta, y las posibles respuestas o resultados esperados.
- **Análisis de actuación:** asociado con el siguiente capítulo, donde se verifican los alcances logrados por medio del desarrollo de cada una de las actividades, teniendo en cuenta los resultados obtenidos y los resultados esperados.

3.2. Descripción de la población a la cual se dirige

Las actividades diseñadas para la propuesta se implementaron en la ciudad de Bogotá D.C. (Colombia), en el Colegio Liceo Antonio de Toledo, el cual se encuentra ubicado en la Calle 70Sur #77j-53 de localidad séptima de Bosa. El Liceo Antonio de Toledo es una institución de carácter privado que ofrece los servicios de educación básica y media, en el horario 6:40 *a. m.* y se retiran a la 1:50 *p. m.* (a excepción de los grados décimo y undécimo que los lunes y miércoles finalizan a las 2:30 *p. m.*). El Liceo inició sus labores en el año de 1982, por lo cual lleva más de 40 años atendiendo a distintas generaciones y comunidades de la localidad.

El curso con el cual se realizaron las actividades fue noveno B (9B), el cual tiene un total de 34 estudiantes, cuyas edades oscilan entre los 13 y 15 años. Algunas características de este grupo de estudiantes son:

- Son respetuosos con las normas de la clase y con el profesor.
- Atienden y siguen la mayoría de las instrucciones con disposición.
- Muestran interés por uso de materiales didácticos, puesto que manifiestan venir de un proceso escolar en el cual no estaban acostumbrados a ello, especialmente para la clase de matemáticas.

Es de resaltar que unos estudiantes participan más que otros, debido a que la mayoría expresa sentir pena, aunque se trata de promover la participación de todos.

4. Propuesta de tareas

4.1. Propuesta Actividad 1: DEDUCIENDO ALGUNOS PRODUCTOS NOTABLES

4.1.1. Propósitos de la Actividad

- Utilizar el geoplano para elaborar la representación de algunos cuadrados y rectángulos.
- Utilizar las figuras elaboradas en el geoplano y los respectivos valores asociados a sus áreas para completar la tabla de la guía.
- Establecer la expresión algebraica asociada a la diferencia de cuadrados, a partir de construcciones con el geoplano y recolección de datos.
- Comprobar la expresión algebraica deducida con dos parejas de números de al menos dos cifras, elegidos al azar.

4.1.2. Materiales y recursos

- *Guía:* dividida en dos partes, en la primera parte se indican los pasos a seguir para poder construir las figuras que permiten identificar valores, los cuales se deben registrar en una tabla que hace parte de la guía; la segunda parte corresponde a la revisión de valores registrados en la tabla para establecer tanto en lenguaje natural como en lenguaje simbólico matemático la expresión algebraica esperada.
- *Geoplano cuadrado:* se hizo uso de 14 geoplanos de $10 \times 10\ cm$, los cuales están elaborados en plástico.
- *Cauchos o bandas elásticas:* para poder realizar las figuras en el geoplano se usaron bandas elásticas cerradas, blancas y de algunos colores.

- *Tablero:* para realizar algunas de las comprobaciones como cierre de clase.

4.1.3. Prerrequisitos

- Definición de rectángulo.
- Definición de cuadrado.
- Definición de áreas de polígonos.
- Fórmula del área del rectángulo.
- Fórmula del área del cuadrado.

4.1.4. Contenidos o procesos a desarrollar con la actividad

Por medio del desarrollo de la Actividad 1, se pretende que el estudiante logre, a partir de casos específicos, generalizar y establecer la expresión algebraica asociada a la ecuación que se relaciona con el producto notable: *diferencia de cuadrados.*

4.1.5. Descripción de la Actividad

Momento 1. División en grupos de trabajo, distribución de geoplanos y guía - parte 1.

Para un primer momento, el profesor realizará las respectivas distribuciones de grupos de trabajo de máximo tres estudiantes; una vez conformados se hará entrega a cada grupo de: la primera parte de la guía, un geoplano y dos bandas elásticas (una blanca y otra de color).

Momento 2. Desarrollo de la guía – parte 1.

Al iniciar este momento, el profesor indicará continuamente la importancia de leer muy bien las instrucciones que brinda la guía, además de ser cuidadosos en la recolección de los valores que deben anotar en la tabla que aparece en esta parte de la guía.

Los estudiantes deben seguir un paso a paso, por medio del cual primero eligen una pareja de números, ambos de una sola cifra, y luego con base en ellos construyen algunos cuadrados y rectángulos que les permiten obtener y recolectar los valores que han de escribir en la tabla que trae la parte 1 de la guía al final de esta. Esta secuencia de pasos se debe realizar con tres parejas de números.

ACTIVIDAD 1 - DEDUCIENDO ALGUNOS PRODUCTOS NOTABLES

Para realizar la siguiente actividad vas a utilizar tu Geoplano al momento que se te pida construir ciertas figuras, y en la tabla que aparece al final de los pasos vas a ir registrando tus resultados:

PASO 1: debes pensar y elegir una pareja de números **a** y **b** que al ser sumados den como resultado el número 9. Escribe los números que elegiste en tu tabla ***(ten en cuenta que el número a debe de ser el de mayor valor)***.

PASO 2: utiliza tu tabla, y escribe los resultados para la suma $(\boldsymbol{a+b})$ y la resta $(\boldsymbol{a-b})$ de los números.

PASO 3: utiliza tu geoplano, y en él, construye un rectángulo en el cual uno de los lados mida $\boldsymbol{a+b}$ y el otro $\boldsymbol{a-b}$. Uno de estos lados será la base y el otro la altura.

PASO 4: utiliza tu tabla y el rectángulo construido en el **paso 3**, y escribe cual es el área correspondiente al rectángulo (cuenta cuantas unidades cuadradas tiene).

PASO 5.1: utiliza tu geoplano y, construye un cuadrado cuyos lados tengan como medida al número $\boldsymbol{a}$, ten en cuenta que uno de los vértices del cuadrado debe estar sobre el origen del geoplano (0,0).

PASO 5.2: utiliza tu geoplano y, construye un cuadrado cuyos lados tengan como medida al número $\boldsymbol{b}$, ten en cuenta que uno de los vértices del cuadrado debe estar sobre el origen del geoplano (0,0); asimismo, ten presente que el cuadrado del **paso 5.1** debe conservarse en el geoplano ***(vas a utilizar la banda elástica del otro color)***.

PASO 6: utiliza tu tabla y los cuadrados construidos en el **paso 5.1 y el paso 5.2**, y escribe cual es el área asociada a cada uno de ellos (cuenta cuantas unidades cuadradas tiene cada cuadrado en su interior).

PASO 7: utiliza tu tabla y los cuadrados construidos en el **paso 5** ***(también puedes usar las fichas de color para recubrir el cuadrado más pequeño, si así lo deseas)***, y escribe cual es el área asociada a la diferencia entre las áreas de los cuadrados (cuenta cuantas unidades cuadradas quedan al tomar el área del cuadrado más grande y quitarle el área del cuadrado más pequeño; es decir, contar las unidades cuadradas que simultáneamente **NO** están encerradas en el cuadrado del **paso 5.2**, pero si están encerradas entre el cuadrado del **paso 5.1**).

PASO 8: desarmar las figuras asociadas a la pareja anterior, y ahora, vas a pensar y escoger una nueva pareja de números **a** y **b**, con la condición de que ahora su suma debe dar como resultado al número 8. Con base en dicha pareja, vas a realizar los procedimientos desde el **paso 1** hasta el **paso 7**, para anotar tus resultados utiliza la segunda fila de la tabla (pareja 2).

PASO 9: desarmar las figuras asociadas a la pareja anterior, y ahora, vas a pensar y escoger una nueva pareja de números **a** y **b**, con la condición de que ahora su suma debe dar como resultado algún número menor o igual a 7. Con base en dicha pareja, vas a realizar los procedimientos desde el **paso 1** hasta el **paso 7**, para anotar tus resultados utiliza la tercera fila de la tabla (pareja 3).

	#	**#**	**Suma**	**Resta**	**Área rectángulo (base)∗(altura)**	**Área cuadrado $\boldsymbol{a}$**	**Área cuadrado $\boldsymbol{b}$**	**Diferencia de cuadrados**
	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{a+b}$	$\boldsymbol{a-b}$	$\boldsymbol{(a+b)(a-b)}$	$\boldsymbol{a^2}$	$\boldsymbol{b^2}$	$\boldsymbol{a^2-b^2}$
Pareja 1								
Pareja 2								
Pareja 3								

Ilustración 42. GUÍA 1-parte 1

Momento 3. Entrega y desarrollo de la guía – parte 2.

Para poder iniciar este tercer momento, el profesor revisará los resultados obtenidos y descritos en la tabla de valores asociada a la primera parte de la guía (momento 2); lo anterior debido a que, si dichos valores no son correctos, no se podrá llegar a la generalización esperada. Se hará entrega de la parte 2 de la guía, sin quitar al estudiante la parte 1, ya que los datos allí recolectados serán utilizados en este momento 3.

En dicha segunda parte de la guía, los estudiantes deben comparar y utilizar los resultados numéricos de las columnas número seis y número nueve de la tabla de la primera parte de la guía, para poder establecer que siempre existe una igualdad entre ellas; una vez caracterizada dicha igualdad, los estudiantes utilizan las expresiones algebraicas que aparecen al inicio de éstas mismas columnas de la tabla en cuestión, para poder establecer la ecuación asociada a la diferencia de cuadrados.

Por último, los estudiantes deben aplicar dicha expresión algebraica para dos parejas de números que sean de al menos dos cifras, y por medio de dichas comprobaciones establecer que efectivamente la ecuación establecida si se cumple o es verdadera.

OBSERVANDO LOS RESULTADOS DE LA TABLA

- ¿Qué relación observas o encuentras entre los resultados de la columna asociada al área del rectángulo y la columna asociada al área de la diferencia de cuadrados? EXPLICA: ______________________________

____
____
____
____
____

PASANDO AL LENGUAJE ALGEBRAICO

La relación que acabas de observar se conoce como **DIFERENCIA DE CUADRADOS** y es muy común hallar su estructura en ejercicios de álgebra escolar, tu labor es establecer la expresión algebraica asociada a los resultados que obtuviste y evidenciaste. Para ello utiliza las letras $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ asociadas a los números, y también las expresiones asociadas a los recuadros de la tabla que llenaste y relacionaste anteriormente.

	=	

COMPROBANDO MIS RESULTADOS

Para poder verificar que la expresión establecida en el recuadro anterior está bien, es necesario realizar algunas pruebas con valores específicos para los números $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$. Utiliza la tabla y comprueba tu expresión con dos nuevas parejas de números, cada una de ellas compuesta por números grandes (**al menos de dos cifras**).
El recuadro del final es para las operaciones que necesites realizar (sumar, restar, multiplicar).

Prueba pareja 4: $\boldsymbol{a} =$ $\boldsymbol{b} =$	**Prueba pareja 5:** $\boldsymbol{a} =$ $\boldsymbol{b} =$
Operaciones	**Operaciones**

Ilustración 43. GUÍA 1-parte 2

Momento 4. Socialización de los resultados y ejemplificación.

Para concluir la actividad, el profesor hará la institucionalización de la generalización de la ecuación asociada a la diferencia de cuadrados, para ello se permitirá la participación de los estudiantes con el fin de establecer y verificar la expresión algebraica utilizando algunos ejemplos numéricos.

4.1.6. Posibles errores y dificultades

Con relación a la propuesta de la Actividad 1, se enlistan enseguida algunos de los posibles errores y dificultades que puedan presentar los estudiantes:

- Utilizar de forma inadecuada las unidades en el Geoplano.
- Escribir expresiones algebraicas en la tabla en la cual solamente se deben anotar valores numéricos.
- Determinar de manera errónea los valores de las áreas de figuras como cuadrados y rectángulos.

4.2. Propuesta Actividad 2: UTILIZANDO "ROMPECABEZAS"

4.2.1. Propósitos de la actividad

- Utilizar el tangram chino y otra propuesta geométrica, como herramientas para realizar representaciones o comprobaciones del Teorema de Pitágoras.
- Establecer la expresión algebraica asociada al Teorema de Pitágoras, con base en los resultados observados y descritos por medio del Tangram y el rompecabezas construido.
- Escoger, aplicar y comprobar la expresión algebraica deducida con dos ternas Pitagóricas, en las cuales se debe aplicar el Teorema para hallar el tercer valor a partir de otros dos dados.
- Representar gráficamente los triángulos asociados a las comprobaciones algebraicas de las ternas pitagóricas que se brindan al final de la guía.

4.2.2. Materiales y recursos

- *Guía:* divida en dos partes, la primera parte indica los pasos a seguir con el Tangram y con la construcción del rompecabezas, para poder establecer las representaciones geométricas asociadas al Teorema de Pitágoras por medio de cada uno de éstos; la segunda parte corresponde a la revisión de las respuestas descritas en los pasos de la primera parte de la guía, para que el estudiante logre establecer, y luego verificar algebraicamente, tanto en lenguaje natural como en lenguaje simbólico matemático el Teorema de Pitágoras.

- *Tangram Chino:* constituido por siete piezas (dos triángulos grandes, dos triángulos pequeños, un triángulo mediano, un cuadrado y un paralelogramo).
- *Un octavo de cartulina o cartón cartulina:* donde serán construidos dos cuadrados que luego serán adecuadamente divididos para obtener el rompecabezas asociado a la representación del Teorema de Pitágoras.
- *Regla y transportador:* primero, para lograr construir los cuadrados que permiten obtener el rompecabezas; segundo, para lograr realizar las representaciones gráficas de los triángulos para los cuales realizo la comprobación de las ternas pitagóricas.
- *Tijeras:* para poder recortar los cuadrados y obtener el rompecabezas.
- *Hoja block cuadriculada:* para realizar las representaciones gráficas de los triángulos con los cuales comprobó las ternas pitagóricas.

4.2.3. Prerrequisitos

- Definición y representaciones gráficas del cuadrado.
- Definición y representación del triángulo rectángulo (catetos e hipotenusa).
- Manipulación del Tangram.
- Definición de áreas de polígonos.
- Fórmula del área del cuadrado.

4.2.4. Contenidos o procesos a desarrollar con la actividad

Por medio del desarrollo de la Actividad 2, se pretende que el estudiante logre, a partir de un par de comprobaciones geométricas específicas, generalizar y establecer la expresión algebraica asociada a la ecuación que da paso al Teorema de Pitágoras.

4.2.5. Descripción de la Actividad

Momento 1. Distribución del grupo de estudiantes y entrega de guía – parte 1

Para un primer momento, el profesor realizará la respectiva distribución del grupo de estudiantes por el salón; atendiendo a que gracias a la aplicación de la Actividad 1 existe cierto conocimiento y familiarización con el grupo, por lo cual se identifican a los estudiantes que requieren una posición estratégica para lograr realizar adecuadamente la actividad 2.

Momento 2. Desarrollo de la guía – parte 1.1 (Actividad 2.1 - TANGRAM)

Al iniciar este momento, el profesor indicará al grupo de estudiantes que es necesario utilizar un triángulo extra como referencia, por ello en la cartulina se debe construir o copiar uno de los triángulos grandes del Tangram (el cual dentro de la guía es llamado como **triángulo de referencia**). Una vez el estudiante tenga su triángulo de referencia, puede proceder a la ejecución de los pasos descritos. Así entonces, cada estudiante deberá tomar alguno de los dos triángulos grandes de su tangram y copiarlo en su cartulina (o graficar uno que sea congruente a estos dos si lo desea); cuando el estudiante tenga su triángulo de referencia, deberá entonces distribuir las piezas del tangram de manera adecuada para lograr construir los tres cuadrados que se piden.

ACTIVIDAD 2 – UTILIZANDO "ROMPECABEZAS"

Actividad 2.1 - TANGRAM

Para realizar la primera parte de la actividad vas a utilizar el tangram, y el triángulo de referencia que se te entrega ***(el cual es idéntico a los triángulos más grandes del tangram)***:

PASO 1: utiliza las siete fichas del tangram y construye el cuadrado correspondiente a la hipotenusa del triángulo de referencia.

PASO 2: utiliza las fichas del tangram y construye los cuadrados correspondientes a los dos catetos del triángulo de referencia.
Nota: es necesario usar y repartir todas las piezas entre ambos catetos, sin que falten o sobren, y además es muy importante no sobreponer piezas (norma básica del tangram chino).

Con base en las construcciones realizadas, ¿qué relación encuentras o que puedes establecer entre las áreas del cuadrado del PASO 1 y los cuadrados del PASO 2? Explica con tus palabras: ____________________________
____

Ilustración 44. GUÍA 2-parte 1.1

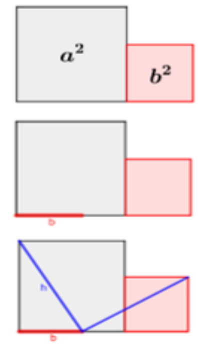
Momento 3. Desarrollo de la guía – parte 1.2 (Actividad 2.2 - ROMPECABEZAS)

Al iniciar este momento, el profesor indicará al estudiante que es necesario utilizar la cartulina, y que el Tangram se puede guardar puesto que no lo va a usar más. De considerarse necesario, se hará una retroalimentación en el tablero para lograr explicar cómo se puede y debe construir un cuadrado (especialmente para lograr que tenga todos sus ángulos rectos). Se espera que el estudiante construya y recorte los dos cuadrados en las tres piezas como se ilustra en la guía, y que con base en dicho rompecabezas y las figuras que obtiene, pueda responder en lenguaje natural las preguntas que allí se establecen.

Así entonces, se espera que los estudiantes logren representar gráficamente dos cuadrados de distintos tamaños de forma tal que queden compartiendo uno de sus vértices y uno de sus lados (el cuadrado más pequeño comparte todo su lado con el cuadrado más grande), para que a partir de ellos y algunas construcciones de segmentos se puedan obtener tres piezas que permitan crear el rompecabezas.

Actividad 2.2 - ROMPECABEZAS

Para realizar la siguiente parte de la actividad necesitas tijeras y un octavo de cartulina o algún material similar, pues lo que vas a construir es tu propio rompecabezas:



PASO 1: construye y recorta **(en una sola pieza)** dos cuadrados de distinto tamaño, de forma tal que queden uno al lado del otro.

PASO 2: como se ilustra en la imagen, el cuadrado más grande tendrá una medida de lado a, mientras el cuadrado más pequeño tendrá una medida de lado b.

PASO 3: copia y haz una marca de la medida del lado del cuadrado más pequeño sobre el lado inferior del cuadrado más grande, empezando en el vértice de la parte izquierda.

PASO 4: a partir de la marca realizada con la medida del PASO 3, traza los dos segmentos como se ilustra en la imagen **(color azul)**.

PASO 5: utiliza las tijeras y recorta únicamente los segmentos construidos en el PASO 4 **(color azul)**, ¿Qué tipos de triángulos obtienes? ________________________________ ¿Qué relación observas entre los dos triángulos que obtuviste? ____

PASO 6: con las tres piezas que obtuviste a partir de los recortes del **PASO 5**, construye un cuadrado (usando las tres "fichas" obtenidas). Con base en las construcciones realizadas, las medidas y expresiones algebraicas utilizadas, ¿Cómo expresar algebraicamente el área del cuadrado construido en el **PASO 4** a partir del rompecabezas? _______ Explica tu respuesta: ____

Ilustración 45. GUÍA 2-parte 1.2

Momento 4. Desarrollo de la guía – parte 2

Al iniciar este momento, el profesor indicará a cada estudiante (según vayan terminando) que para desarrollar esta parte es necesario analizar las respuestas que obtuvo en la primera parte de la guía, y de ser preciso, que vuelva a utilizar el Tangram o el rompecabezas construido para poder establecer las incógnitas asociadas a cada lado del triángulo en cuestión, y así poder establecer la ecuación relacionada al Teorema de Pitágoras.

En esta parte, el estudiante deberá concluir utilizando la ecuación que ha establecido para el Teorema de Pitágoras, y con ella lograr la comprobación de dos ternas pitagóricas; las ternas propuestas en esta parte de la guía planten las dos posibles combinaciones: la primera brinda el valor de los catetos y pide hallar el valor de la hipotenusa, mientras que la segunda brinda el valor de uno de los catetos y de la hipotenusa (en ambos casos se pide como un adicional que el estudiante construya la representación gráfica, que de paso puede permitirle verificar a partir de medidas en centímetros si lo que estableció realmente se cumple).

OBSERVANDO Y ANALIZANDO MIS RESPUESTAS

Usando los resultados de los procedimientos asociados a la Actividad 2.2 - ROMPECABEZAS,
¿Cuáles serían las letras que representan las medidas de cada uno de los lados en cada triángulo?

CATETO 1: ____, CATETO 2: ____, HIPOTENUSA: ____

¿Qué relación observas o encuentras entre las áreas de los cuadrados del PASO 1 y el cuadrado del PASO 6? EXPLICA:

____

____

PASANDO AL LENGUAJE ALGEBRAICO

La relación que acabas de observar entre las áreas de los cuadrados de los triángulos rectángulos se conoce como **TEOREMA DE PITÁGORAS** y es uno de los conocimientos matemáticos más utilizados y promulgados en la historia de la humanidad (egipcios, griegos, chinos, y demás culturas antiguas lo conocían y aplicaban en su diario vivir por ciertas necesidades).
Tu labor es establecer la expresión algebraica asociada al **TEOREMA DE PITÁGORAS** haciendo uso de los resultados que obtuviste y evidenciaste. Para ello utiliza también las letras $\boldsymbol{a, b, h}$ asociadas a los lados del triángulo rectángulo (a, b para los catetos; h para la hipotenusa) y las expresiones de los cuadrados de sus lados.

	=	

COMPROBANDO MIS RESULTADOS

Utiliza la expresión algebraica establecida para el Teorema de Pitágoras con los siguientes valores.

Prueba 1: Dado un triángulo rectángulo cuyos catetos miden $\boldsymbol{a = 8\,cm}$, $\boldsymbol{b = 6c\,m}$, ¿Cuál es el valor asociado a la medida de la hipotenusa?

Procedimientos/operaciones:
$\boldsymbol{h =}$ ____ $\boldsymbol{cm}$

EN TU HOJA CUADRICULADA Y CON LA REGLA: COMPRUEBA TU RESULTADO REALIZANDO LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA (DIBUJO) DEL TRIÁNGULO RESPETANDO SUS RESPECTIVAS MEDIDAS.

Prueba 2: Dado un triángulo rectángulo en el cual la hipotenusa mide $\boldsymbol{h = 13\,cm}$ mientras uno de sus catetos mide $\boldsymbol{a = 12\,cm}$, ¿Cuál es el valor asociado al cateto restante?

Procedimientos/operaciones:
$\boldsymbol{b =}$ ____ $\boldsymbol{cm}$

EN TU HOJA CUADRICULADA Y CON LA REGLA: COMPRUEBA TU RESULTADO REALIZANDO LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA (DIBUJO) DEL TRIÁNGULO RESPETANDO SUS RESPECTIVAS MEDIDAS.

Ilustración 46. GUÍA 2-parte 2

Se espera que el estudiante utilice las incógnitas $\boldsymbol{a, b, h}$ para nombrar los catetos y la hipotenusa del triángulo, respectivamente, y asimismo que logre establecer la ecuación asociada al Teorema de Pitágoras con tales incógnitas con base en ellas y la relación que encuentra en los resultados de algunos pasos de la primera parte de la guía; una vez realice esto, deberá verificar su ecuación con los valores que se le brindan en ambas ternas, y por último, comprobar su resultados por medio de la representación gráfica de triángulos que tengan dichos valores asociados.

4.2.6. Posibles errores y dificultades

Con relación a la propuesta de la Actividad 2, se enlistan enseguida algunos de los posibles errores y dificultades que puedan presentar los estudiantes:

- Superponer piezas a la hora de utilizar el tangram.
- Construir cuadriláteros que deberían ser cuadrados, pero no lo cumplen.
- Escribir valores numéricos donde deben ir expresiones algebraicas.
- Utilizar letras/incógnitas que no están relacionadas con las figuras de la guía.
- Recortar los dos cuadrados de la cartulina, cuando estos son una misma pieza.

4.3. Propuesta Actividad 3: SUMA DE CUADRADOS Y RECTÁNGULOS

4.3.1. Propósitos de la actividad

- Elaborar las representaciones gráficas de algunos cuadrados y rectángulos a partir de valores numéricos escogidos por el estudiante.
- Utilizar los valores tabulados a partir de las áreas de las figuras construidas para determinar la ecuación asociada con la *suma de un binomio* y el *trinomio al cuadrado perfecto.*
- Relacionar los valores numéricos específicos hallados a partir de las parejas de números escogidas con las expresiones algebraicas generales dadas en la tabla.
- Construir un rompecabezas que permita verificar geométricamente la ecuación establecida por el estudiantado.

4.3.2. Materiales y recursos

- *Guía:* divida en dos partes, la primera parte indica los pasos a seguir para representar gráficamente los cuadrados y rectángulos que sumados permiten obtener una igualdad de áreas asociada con la *suma de un binomio* y que permite obtener un *trinomio al cuadrado perfecto*; en la segunda parte, se debe expresar la ecuación usando las estructuras algebraicas, además, se pide construir (en la cartulina) y pegar el rompecabezas.
- *Regla:* primero, para lograr construir en la hoja cuadriculada las representaciones gráficas de los cuadrados y rectángulos que se piden en la parte 1 de la guía; segundo, para lograr recrear sobre la cartulina una de las representaciones gráficas hechas en la parte 1 de la guía, pero con la intención de recortarla y poder formar el rompecabezas que se pide al final de la parte 2.
- *Hoja block cuadriculada:* En la cual se harán las representaciones gráficas de los cuadrados y los rectángulos que son la base para completar la tabla de la parte 1 de la guía.
- *Un octavo de cartulina:* donde serán construidos dos cuadrados y dos rectángulos que serán recortados para obtener el rompecabezas asociado al *Trinomio al cuadrado perfecto*.
- *Tijeras y colbón:* para poder recortar y pegar las piezas del rompecabezas.
- *Colores y plumones:* para decorar las figuras, especialmente el rompecabezas.

4.3.3. Prerrequisitos

- Definición y representaciones gráficas del cuadrado y del rectángulo.
- Definición de áreas de polígonos.

- Fórmulas del área del cuadrado y del área del rectángulo.
- Manipulación de la regla y las tijeras.

4.3.4. Contenidos o procesos a desarrollar con la actividad

Por medio del desarrollo de la Actividad 3, se pretende que el estudiante logre, a partir de dos parejas de números y algunas representaciones geométricas específicas, generalizar y establecer la expresión algebraica asociada a la ecuación que se obtiene entre la *suma de un binomio* y el *trinomio al cuadrado perfecto*; asimismo, se pretende elaborar una comprobación geométrica de la misma.

4.3.5. Descripción de la Actividad

Momento 1. Distribución del curso y entrega de la guía parte 1

En este momento, el profesor deberá distribuir por el salón a los estudiantes en grupos o individualmente (como se considere mejor), y hacer la entrega de la guía - parte 1. También, es importante que el profesor explique y haga énfasis en la importancia de leer detenidamente y con atención la secuencia de pasos a realizar para lograr completar adecuadamente la tabla de valores.

Teniendo presente que esta es la última actividad, se espera que el profesor reconozca previamente que grupos de trabajo deben ser cambiados para lograr un trabajo adecuado y significativo con todos o mayoría de los estudiantes del curso.

Momento 2. Desarrollo de la guía – parte 1 (gráficas y tabla de los valores asociados)

Para este momento, el profesor deberá realizar un recorrido permanente por los diferentes grupos de trabajo con la intención de revisar, verificar y guiar el desarrollo de la secuencia de pasos y las respectivas construcciones de las representaciones geométricas asociadas a dicha secuencia.

Se espera que el estudiantado logre completar la tabla de valores de esta parte de la guía utilizando las representaciones gráficas de los cuadrados y rectángulos que va realizando en su hoja de block. Aunque las representaciones gráficas de esta parte no deben ser necesariamente en centímetros, se espera que algunos estudiantes inercialmente opten por usarlos ya que tendrán la regla a toda hora.

ACTIVIDAD 3 – SUMAS DE CUADRADOS Y RECTÁNGULOS

Para desarrollar la siguiente actividad vas a necesitar la regla, colores, una hoja de block cuadriculada, tijeras, colbón y un octavo de cartulina. Primero vas a realizar algunas representaciones gráficas (dibujos) en la hoja de block cuadriculada y con base en ellas vas a completar la tabla.

Paso 1: Elige una pareja de números (x, y); y anota cada uno de ellos en las columnas correspondientes para la primera pareja en la tabla. Es importante que la suma entre ellos no sea mayor que 15 ni menor que 10.

Paso 2: Elabora una representación gráfica (dibujo) de un cuadrado cuyo lado tenga la medida del número $\boldsymbol{x}$ que escogiste. Halla el área de este cuadrado y anota el valor de su área en la columna correspondiente.

Paso 3: Elabora una representación gráfica (dibujo) de un cuadrado cuyo lado tenga la medida del número $\boldsymbol{y}$ que escogiste. Halla el área de este cuadrado y anota el valor de su área en la columna correspondiente.

Paso 4: Elabora una representación gráfica (dibujo) de dos rectángulos idénticos, para los cuales sus dimensiones sean los números que escogiste; la medida de su base será el valor del número $\boldsymbol{x}$, mientras que la medida de su altura será el valor del número $\boldsymbol{y}$.
Halla el área de cada rectángulo y anota el valor de la suma de sus áreas en la columna correspondiente.

Paso 5: Suma las áreas del paso 2, el paso 3 y el paso 4, y escribe el resultado de dicha suma en la columna llamada: SUMA DE ÁREAS.

Paso 6: Realiza la suma entre la pareja de números que escogiste y escribe el resultado en la casilla correspondiente.

Paso 7: Elabora una representación gráfica (dibujo) de un cuadrado cuyo lado tenga la medida del resultado de la suma $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ con relación a la pareja de números que escogiste. Halla el área de este cuadrado y anota el valor de su área en la columna correspondiente.

Paso 8: Para completar los valores de la tabla correspondientes a la fila de la **pareja 2**, vas a realizar nuevamente todos los pasos desde el 1 hasta el 7, empezando por escoger una nueva pareja de números diferentes a la **pareja 1** y realizar sus respectivas gráficas.

	#	#	Area del primer cuadrado	Area del segundo cuadrado	Suma de áreas de los 2 rectángulos	SUMA DE ÁREAS	Suma de los dos números	Área del cuadrado de la suma
	x	y	x^2	y^2	$2xy$	x^2+y^2+2xy	$x+y$	$(x+y)^2$
Pareja 1								
Pareja 2								

OBSERVANDO LOS RESULTADOS DE LA TABLA

- ¿Qué relación observas o encuentras entre los resultados de la columna **SUMA DE ÁREAS** y la columna **Área del cuadrado de la suma**? EXPLICA: ____

Ilustración 47. GUÍA 3 - parte 1

Momento 3. Verificación desarrollo de la guía parte 1 y entrega de la guía parte 2

En este espacio de la actividad el profesor deberá revisar las representaciones gráficas construidas en la hoja de block, y, por ende, los valores numéricos de la tabla de valores que está en la guía y se completa con relación a dichas representaciones gráficas. Además, se debe revisar o verificar que los estudiantes hayan respondido que efectivamente los valores de las columnas de la tabla asociadas con la *suma de un binomio* y el *trinomio al cuadrado perfecto* son iguales entre sí.

Se espera que el estudiante utilice las figuras geométricas para hallar los valores de sus áreas, aunque también, se espera que los estudiantes con un pensamiento matemático más desarrollado utilicen las fórmulas asociadas para determinar los valores de dichas áreas. Asimismo, y teniendo en cuenta que la tabla de valores presenta una estructura similar a la de la Actividad 1, se supondría que el estudiante recuerde y reconozca que en la tabla solo deben ir valores numéricos.

Momento 4. Desarrollo de la guía – parte 2 (ecuación y rompecabezas)

En este momento final, el profesor explicará al estudiantado que primero se deben relacionar las expresiones algebraicas dadas en las columnas de la tabla de la parte anterior para establecer la ecuación que relaciona el producto notable en cuestión.

PASANDO AL LENGUAJE ALGEBRAICO

La relación que observaste y estableciste se conoce como **EL CUADRADO DE UN BINOMIO** y su resultado es un **TRINOMIO AL CUADRADO PERFECTO**, aunque lo hiciste aplicando la suma, este producto notable también puede darse en la resta, pero ello genera un cambio en una parte de los signos.

Utiliza las estructuras algebraicas brindadas en la tabla para establecer la expresión algebraica asociada a lo que dedujiste u observaste:

	=	

Ilustración 48. GUÍA 3 - parte 2.1

Luego de ello, el profesor explicará que para comprobar que esa relación es cierta, se deben recrear (usando esta vez los centímetros) sobre la cartulina las figuras asociadas a una de las dos parejas de números que utilizaron para completar los valores de la tabla de la parte 1 de la guía; es menester indicar que utilizando los primeros dos cuadrados y los dos rectángulos se puede y debe obtener un cuadrado del mismo tamaño que el cuadrado más grande que ellos tienen.

COMPROBANDO TUS RESULTADOS

Para comprobar geométricamente que lo establecido es verdadero, utiliza una de las parejas que habías puesto en la tabla, y en el octavo de cartulina construye los cuadrados y rectángulos asociados a los pasos: **2, 3, 4 y 7. (Utiliza centímetros).**

- ➔ Una vez tengas los tres cuadrados (**pasos 2, 3 y 7**) y los dos rectángulos (**paso 4**), los vas a recortar y decorar con colores distintos (***menos los dos rectángulos, esos si deben quedar con un mismo color***).
- ➔ Cuando tengas todos los recortes decorados, utiliza los cuadrados de los **pasos 2 y 3**, más los rectángulos del **paso 4**, para construir en modo de rompecabezas un cuadrado idéntico (congruente) al cuadrado que obtuviste del **paso 7**.
- ➔ Cuando logres el rompecabezas, llama al profe y muéstrale tu resultado para que te indique como y donde pegarlos.

Ilustración 49. GUÍA 3 - parte 2.2

Se pretende que, en primer lugar: el estudiante haga uso adecuado de las estructuras algebraicas dadas en la tabla de la parte 1 para establecer la ecuación esperada, y, en segundo lugar: el estudiante escoja y replique sobre la cartulina algunas de las representaciones gráficas que había elaborado sobre la hoja block, con la importancia de respetar el uso de los centímetros como unidad de medida. Así entonces, para culminar este momento se espera que el estudiante construya el rompecabezas, para que una vez esté elaborado si pueda culminar decorándolo (primero cuestiones de fondo y luego si cuestiones de forma).

4.3.6. Posibles errores y dificultades

Con relación a la propuesta de la Actividad 3, se enlistan enseguida algunos de los posibles errores y dificultades que puedan presentar los estudiantes:

- Realizar representaciones gráficas erróneas de los cuadrados y rectángulos.
- Calcular inadecuadamente los valores de las áreas de las figuras construidas.

- Escribir expresiones algebraicas en la tabla donde deben ir valores numéricos.
- Construir las piezas del rompecabezas, pero no poder realizar la distribución acertada de las mismas para llegar al cuadrado esperado.

5. Análisis

5.1. Actividad 1: DEDUCIENDO ALGUNOS PRODUCTOS NOTABLES

Momento 1. División en grupos de trabajo, distribución de geoplanos y guía-parte 1.

El profesor comenzó la clase explicando que realizarían una actividad utilizando el geoplano como herramienta para la construcción de algunas representaciones de formas geométricas, estas representaciones permitirían obtener ciertos valores numéricos que recogerían en la tabla del final de dicha parte de la guía, a medida que se ejecutaran los pasos allí descritos. Con base en lo anterior, el profesor realizó una explicación sobre el uso del geoplano y la importancia de empezar las construcciones en el origen (cero) de dicha herramienta, para que así cuatro puntos seguidos del geoplano equivalieran a tres unidades y no a cuatro, por lo cual era importante fijarse en ello.

Para ello se ilustra en el siguiente ejemplo un rectángulo cuya altura es una unidad, y como se puede observar dicha unidad se conforma al tomar dos puntos del geoplano.

Ilustración 50. Ejemplo de la unidad en el Geoplano

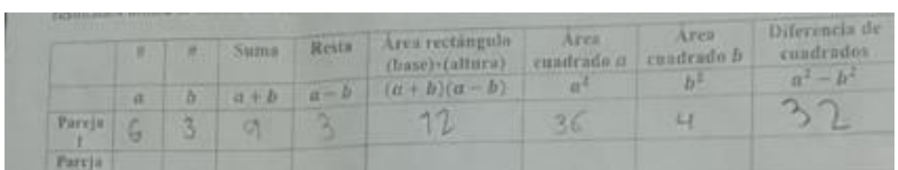
El profesor solicitó que se organizaran en parejas y recalcó la importancia de leer la guía detenidamente para realizar la tarea. Posterior a ello, les entregó a los grupos de trabajo tanto la guía como el geoplano y los dos cauchos (uno blanco y otro de color).

Momento 2. Desarrollo de la guía – parte 1.

El profesor recorrió el salón constantemente con la intención de verificar procedimientos y resultados que se iban obteniendo en los distintos grupos de trabajo, por lo cual, se generó la necesidad de recalcar la importancia de la lectura, puesto que muchos de los grupos no estaban siguiendo las instrucciones, varios de ellos resguardados tras la frase: “es que no entendemos”, pero al ser cuestionados sobre lo que no entendían, se evidenció que era falta de lectura de la guía.

Asimismo, se pudo reconocer que algunos estudiantes no habían entendido la explicación asociada al uso del geoplano y las representaciones sobre él, pues se encontró que estaban utilizando el geoplano de forma errónea, y construían rectángulos o cuadrados que no correspondían con los valores que ellos habían escogido para las variables a y b de la guía; este error se traduce en un uso inadecuado de las unidades del Geoplano.

Según establece Socas (1997), lo anterior se puede entender como una dificultad asociada a los procesos de pensamiento matemático, en especial por la falta de capacidad de seguir un argumento lógico. Por ejemplo, en la siguiente ilustración se observa como uno de los grupos de trabajo construye uno de los dos cuadrados de manera adecuada, mientras el otro no, por lo cual los resultados de las áreas que se escriben en la tabla no concuerdan (el valor del área del cuadrado a si está bien, pero tanto la figura como el valor del área del cuadrado b son erróneas) y por ello no se genera la igualdad esperada:



	#	#	Suma	Resta	Área rectángulo (base)·(altura)	Área cuadrado a	Área cuadrado b	Diferencia de cuadrados
	a	b	$a+b$	$a-b$	$(a+b)(a-b)$	a^2	b^2	a^2-b^2
Pareja 1	6	3	9	3	12	36	4	32
Pareja 2								

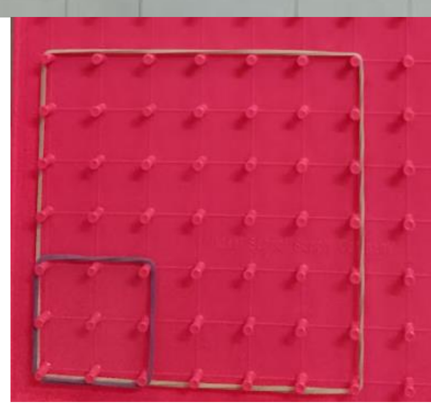


Ilustración 51. Evidencia dificultades con los procesos de pensamiento matemático

Otra dificultad y error evidente en algunos grupos fue el hecho de no reemplazar las incógnitas por los números, pues algunos estudiantes seguían escribiendo las incógnitas en los recuadros de la tabla donde solamente se debían expresar valores numéricos. Según Socas (1997), lo anterior es una dificultad asociada a la complejidad de los objetos de las matemáticas, específicamente, desde el *lenguaje de los signos*, como se ilustra:

	#	#	Suma	Resta	Área rectángulo (base)·(altura)	Área cuadrado a	Área cuadrado b	Diferencia de cuadrados
	a	b	$a+b$	$a-b$	$(a+b)(a-b)$	a^2	b^2	a^2-b^2
Pareja 1	6	3	9	3	$9 \cdot 3 = 27$	$36a^2$	$9b^2$	27
Pareja 2	5	3	8	2	$8 \cdot 2 = 16$	$25a^2$	$9b^2$	16
Pareja 3	4	3	7	1	$7 \cdot 1 = 7$	$16a^2$	$9b^2$	7

Ilustración 52. Evidencia dificultades con el lenguaje de los signos

Otro error observado en algunos grupos fue que no se calculaban de manera adecuada los valores de las áreas de las figuras. El anterior error, se puede relacionar con dos posibles tipos de dificultades: por un lado, aquellas *asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos*, y por otro lado aquellas *asociadas a actitudes afectivas y emocionales* hacia las matemáticas, esto según la clasificación propuesta por Socas (1997). Quizá el error presentado en la siguiente ilustración se ejecuta porque el grupo de estudiantes no tiene un desarrollo cognitivo adecuado y por ello tienden a fallar, o simplemente porque la falta de gusto o afinidad por las matemáticas les conllevó a realizar la actividad por cumplir no más, sin analizar o interpretar de una manera lógica o adecuada los pasos que se iban realizando. Es importante recalcar que, como casi todo en las matemáticas, un solo valor de la tabla que no estuviera bien calculado iba a impedir llegar al resultado esperado.

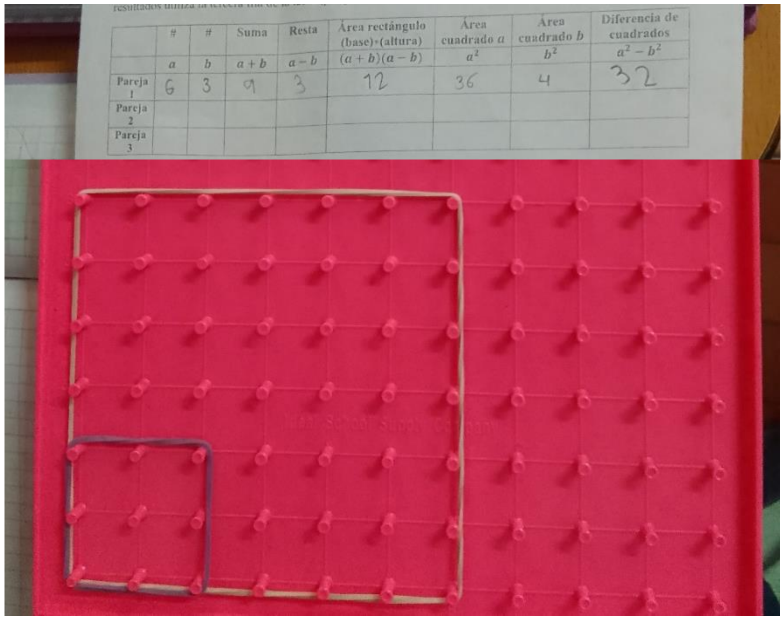


Ilustración 53. Evidencia errores en el cálculo del área

Aunque algunos grupos tuvieron dificultad para seguir las instrucciones, hubo otros que, por el contrario, muy rápidamente lograron comprender y ejecutar la secuencia de pasos para la primera pareja de números que escogieron, y por ello pudieron continuar trabajando la secuencia de pasos con la nueva pareja de números que se les pedía escoger, así como se evidencia en las siguientes ilustraciones, pues este grupo de trabajo logró completar la primera parte de la guía en el menor tiempo entre todo el curso:

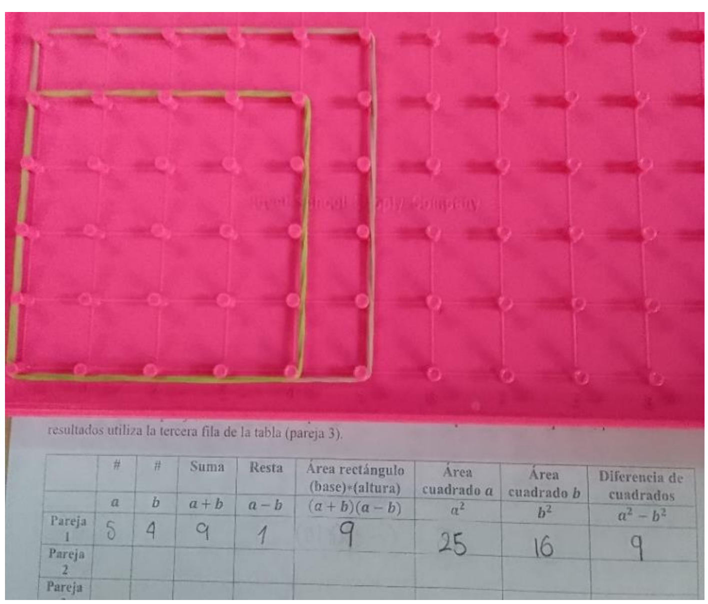
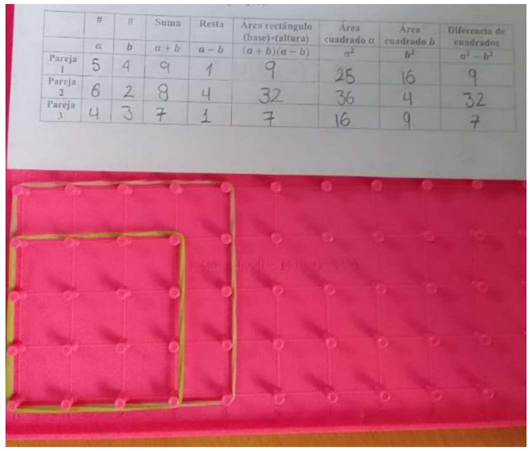


Ilustración 54. Evidencia secuencia correcta (primer pareja de números)

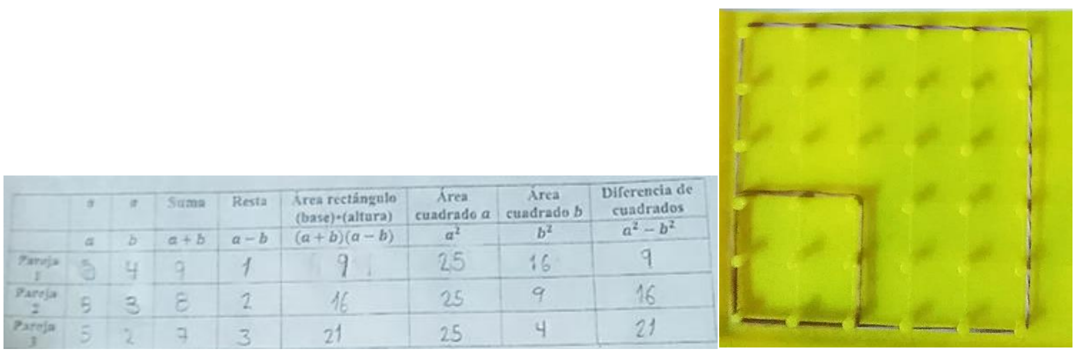


	#	#	Suma	Resta	Área rectángulo (base)*(altura)	Área cuadrado a	Área cuadrado b	Diferencia de cuadrados
	a	b	$a+b$	$a-b$	$(a+b)(a-b)$	a^2	b^2	a^2-b^2
Pareja 1	5	4	9	1	9	25	16	9
Pareja 2	6	2	8	4	32	36	4	32
Pareja 3	4	3	7	1	7	16	9	7

Ilustración 55. Evidencia 1 secuencia correcta (producto esperado)

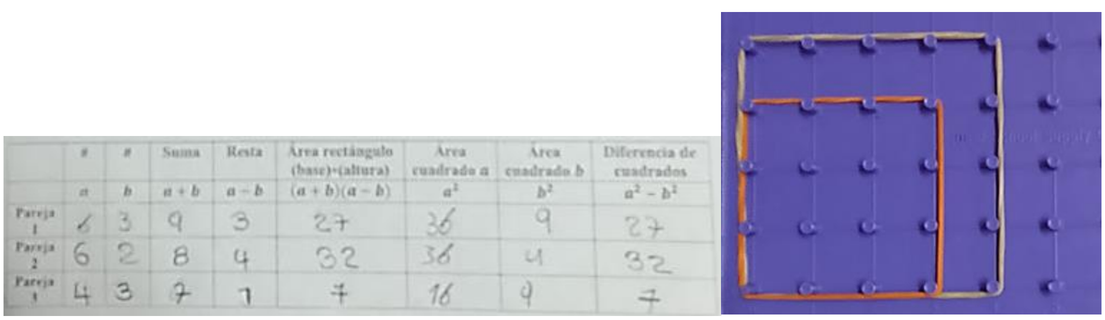
Una vez los grupos iban terminando esta parte, el profesor se acercaba para verificar los resultados de la tabla, y con ello poder entregar la segunda parte de la guía.

Además de las evidencias anteriores, a continuación, se ilustran los trabajos de otros grupos que lograron culminar la primera parte de la guía:



	#	#	Suma	Resta	Área rectángulo (base)*(altura)	Área cuadrado a	Área cuadrado b	Diferencia de cuadrados
	a	b	$a+b$	$a-b$	$(a+b)(a-b)$	a^2	b^2	a^2-b^2
Pareja 1	5	4	9	1	9	25	16	9
Pareja 2	5	3	8	2	16	25	9	16
Pareja 3	5	2	7	3	21	25	4	21

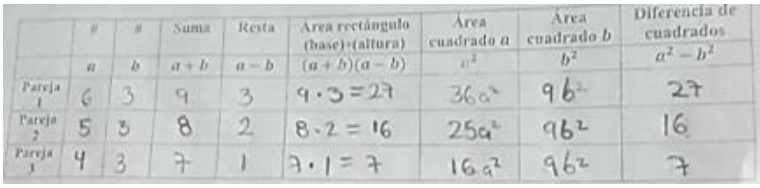
Ilustración 56. Evidencia 2 secuencia correcta (producto esperado)



	#	#	Suma	Resta	Área rectángulo (base)*(altura)	Área cuadrado a	Área cuadrado b	Diferencia de cuadrados
	a	b	$a+b$	$a-b$	$(a+b)(a-b)$	a^2	b^2	a^2-b^2
Pareja 1	6	3	9	3	27	36	9	27
Pareja 2	6	2	8	4	32	36	4	32
Pareja 3	4	3	7	1	7	16	9	7

Ilustración 57. Evidencia 3 secuencia correcta (producto esperado)

En la siguiente imagen, se observan algunos errores de escritura que no afectan el descubrir la generalización, pero que evidencian como el estudiante no aplica la acción reemplazar



	#	#	Suma	Resta	Área rectángulo (base)·(altura)	Área cuadrado a	Área cuadrado b	Diferencia de cuadrados
	a	b	$a+b$	$a-b$	$(a+b)(a-b)$	a^2	b^2	a^2-b^2
Pareja 1	6	3	9	3	9·3=27	36a^2	9b^2	27
Pareja 2	5	3	8	2	8·2 = 16	25a^2	9b^2	16
Pareja 3	4	3	7	1	7·1 = 7	16a^2	9b^2	7

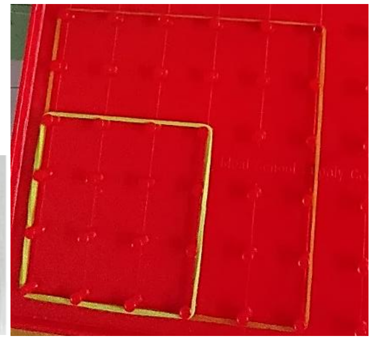
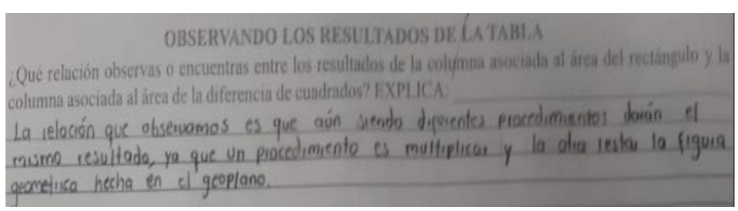


Ilustración 58. Evidencia 4 secuencia correcta (producto esperado)

Momento 3. Entrega y desarrollo de la guía – parte 2.

Antes de entregar y poder ejecutar la parte 2 de la guía, el profesor dio el aval a los diferentes grupos a partir de la verificación de resultados en la tabla de la parte 1 de la guía. Una vez el profesor entregó la parte 2, los grupos respondieron las preguntas asociadas a los resultados obtenidos en las columnas que relacionaban la igualdad entre los valores de la tabla que permitían establecer la ecuación asociada al producto notable conocido como *diferencia de cuadrados*.

Se evidenció que los estudiantes observaban y reconocían los valores de la tabla idénticos y su relación de igualdad, aunque, se reconoció también la dificultad general por explicar o argumentar dichos resultados. A continuación, se ilustran las respuestas de dos grupos que intentaron utilizar palabras propias de las matemáticas asociadas a los procedimientos que habían realizado:

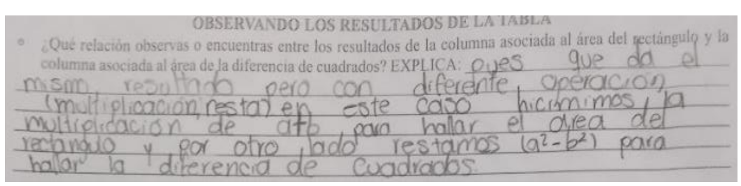


OBSERVANDO LOS RESULTADOS DE LA TABLA

¿Qué relación observas o encuentras entre los resultados de la columna asociada al área del rectángulo y la columna asociada al área de la diferencia de cuadrados? EXPLICA:

La relación que observamos es que aún siendo diferentes procedimientos darán el mismo resultado, ya que un procedimiento es multiplicar y la otra restar la figura geometrica hecha en el geoplano.

Ilustración 59. Evidencia 1 de respuesta explicada



OBSERVANDO LOS RESULTADOS DE LA TABLA

- ¿Qué relación observas o encuentras entre los resultados de la columna asociada al área del rectángulo y la columna asociada al área de la diferencia de cuadrados? EXPLICA: pues que da el mism resultado pero con diferente operación (multiplicación, resta) en este caso hicimimos la multiplicación de a+b para hallar el área del rectangulo y por otro lado restamos (a^2-b^2) para hallar la diferencia de cuadrados

Ilustración 60. Evidencia 2 de respuesta explicada

Por otro lado, entre los grupos que establecieron la ecuación e iban a verificar que efectivamente si se cumplía, se identificaron algunos grupos de trabajo que realizaban las secuencias operacionales en un orden distinto al esperado a la hora de comprobar una ecuación, pero que igualmente llegaban al mismo resultado, dos valores numéricos iguales a partir de expresiones algebraicas diferentes. Lo anterior, atendiendo a la clasificación propuesta por Socas (1997), son dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las matemáticas, en especial desde la perspectiva asociada con el *lenguaje de los signos*, y sus diferentes *etapas*, donde la que más se evidencia es la *etapa 2* (*estadio estructural*), pues el grupo de estudiantes muestra cómo intenta estructurar este nuevo sistema de símbolos (resolver o comprobar la igualdad) a partir de los conocimientos previos adquiridos por el sistema antiguo que le fue enseñado.

A continuación, se pueden observar algunas de las comprobaciones que tienen procedimientos diferentes a los esperados para la ecuación, pero que son correctas. Cabe resaltar que, aunque se generan dificultades en el lenguaje de los signos con relación a cómo se debería o esperaría que comprobaran la igualdad, en este caso la dificultad presentada no se convirtió en un error para verificar el resultado:

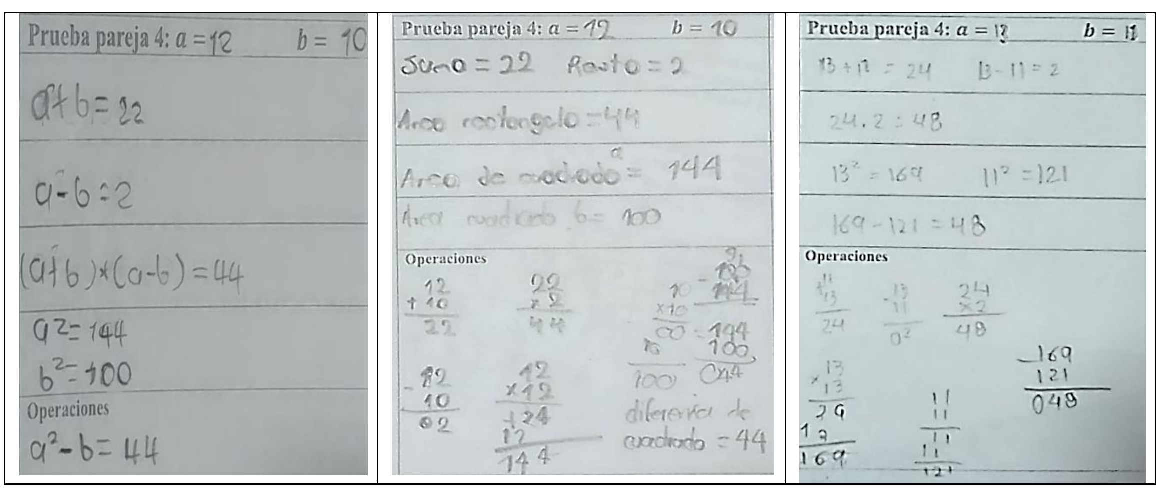


Ilustración 61. Evidencia de resultados correctos a partir de procedimientos "enredados"

Asimismo, ahora se ilustran comprobaciones que se ejecutan de la manera que se esperaba, es decir, lo que llamamos los productos esperados. Como se observa, uno de estos grupos solamente llevaba una comprobación, pero la realizó de la forma esperada:

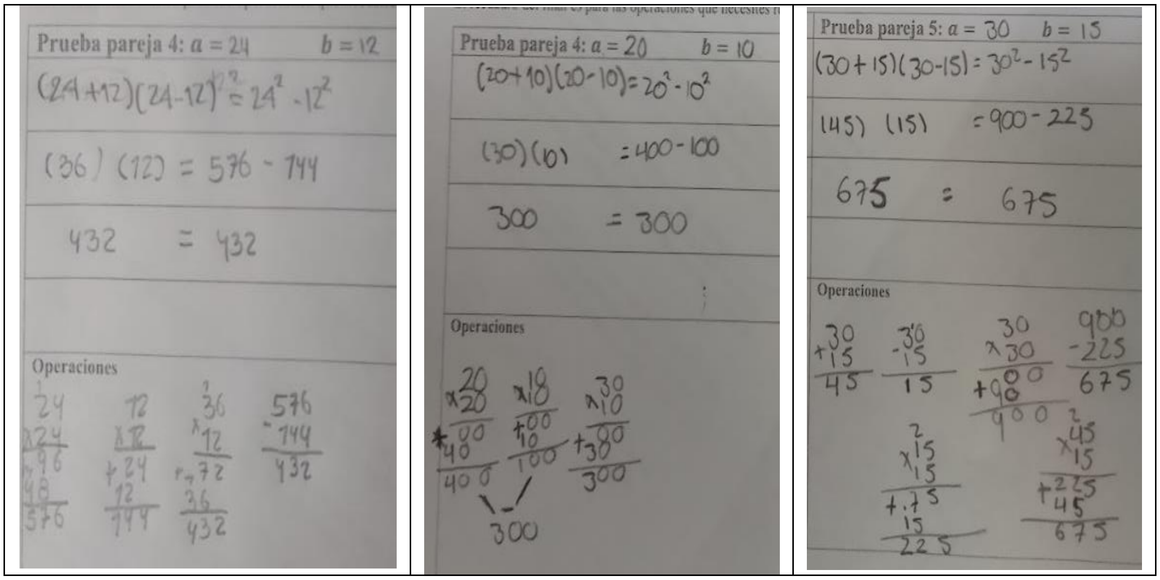


Ilustración 62. Evidencias del producto esperado Guía 1 - parte 2

Momento 4. Socialización de los resultados y ejemplificación.

Para concluir con la actividad, el profesor hizo la retroalimentación general de lo que es el producto notable *diferencia de cuadrados*, y estableció la ecuación asociada al mismo por medio del uso de la multiplicación de polinomios, dando así evidencia de que efectivamente lo que observaron y conjeturaron los estudiantes por medio del uso del Geoplano y la representación de ciertas formas geométricas planas, se cumplía y podía establecerse por medio de otros mecanismos propios del álgebra.

Por último, se usaron dos parejas de números de los que escogieron algunos de los grupos de estudiantes para realizar la respectiva verificación de la igualdad, dichas verificaciones fueron realizadas por el profesor en el tablero para el cierre de la actividad.

5.1.1. Resultados obtenidos

Teniendo presente que la actividad fue desarrollada en parejas, la cantidad de estudiantes del curso conlleva a que el número de grupos de trabajo sea 17. Entre los resultados, productos y el alcance de estas, se reconocen distintas categorías según el trabajo desarrollado y se relacionan con su respectiva frecuencia: ***desarrollo total - 5, desarrollo incompleto (sin errores) - 8, desarrollo incompleto (con errores) - 4.***

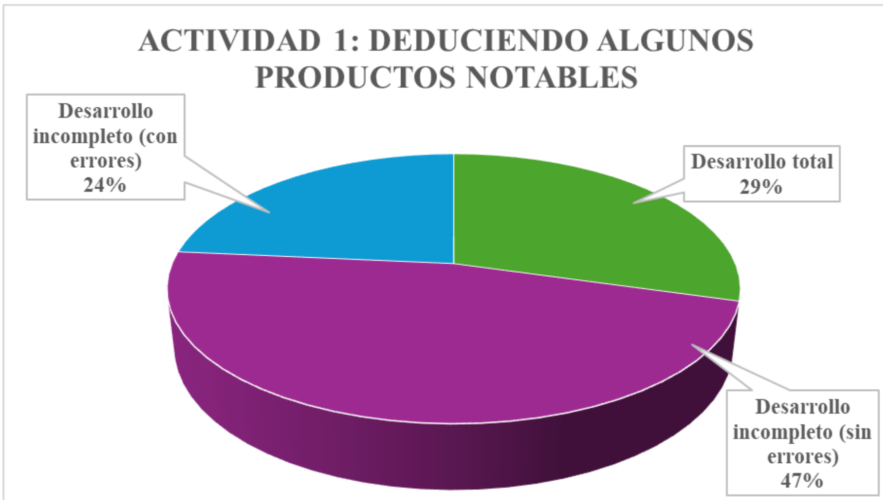


Ilustración 63. Diagrama circular - Resultados Actividad 1

5.2. Actividad 2: UTILIZANDO "ROMPECABEZAS"

Momento 1. Distribución del grupo de estudiantes y entrega de la guía - parte 1.

En este momento se organizaron parejas de trabajo, el profesor fue pasando por cada grupo y haciendo entrega de la guía – parte 1, recalcando sobre la importancia de leer muy bien para evitar fallos en la secuencia de pasos que se esperaba.

Momento 2. Desarrollo de la guía – parte 1.1 (Actividad 2.1 - TANGRAM)

Para el desarrollo de la parte 1.1 de la guía, lo primero que el profesor realizó fue el comentario general de que todos los grupos debían copiar o recrear un triángulo idéntico a alguno de los dos más grandes que trae el Tangram, pues este debía ser utilizado como triángulo de referencia para la correcta construcción de los pasos pedidos.

A continuación, se muestra una ilustración del producto esperado. Todos los grupos de trabajo lograron llegar a este resultado.

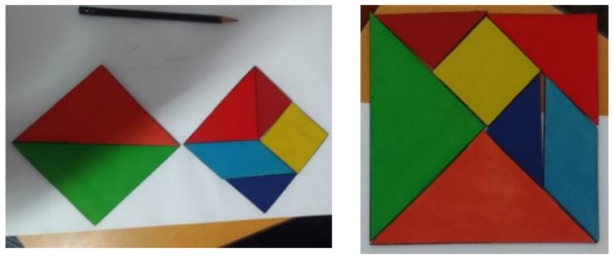


Ilustración 64. Evidencia 1 Producto esperado Tangram

Asimismo, ahora se ilustran varios de los productos esperados del paso 2, dicho paso hizo que varios de los grupos tuvieran que reflexionar y buscar por ensayo y error la manera de distribuir las piezas para lograr obtener los dos cuadrados congruentes, además, se puede evidenciar que algunos de los Tangram estaban mal construidos y por ello algunos de los cuadrados no están bien hechos.

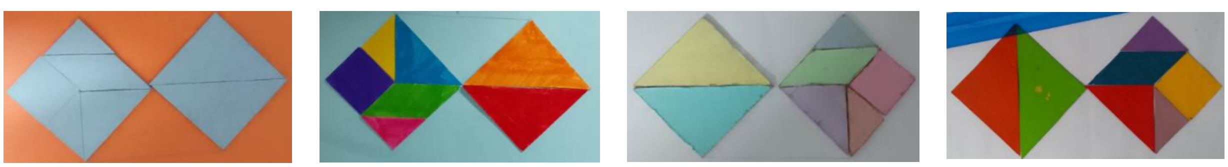


Ilustración 65. Evidencias 2 Producto esperado Tangram

Momento 3. Desarrollo de la guía – parte 1.2 (Actividad 2.2 - ROMPECABEZAS)

En este espacio, el profesor se iba acercando a los diferentes grupos para verificar que las representaciones gráficas construidas por estos efectivamente representarán dos cuadrados de las medidas indicadas (el grupo decidía tales valores), especialmente por la necesidad de que se tuvieran los ángulos rectos.

Se evidenció además errores de comprensión lectora, puesto que se pedía que los dos cuadrados construidos formarán una sola pieza, y en algunos grupos empezaron a recortarlos. Este error, según la propuesta de Socas (1997), puede relacionarse con las *dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las matemáticas*, en el sentido de que los métodos de enseñanza deben ligarse tanto a la organización institucional como al currículo e individualidad del estudiante, y se pudo reconocer que este mecanismo no fue el más adecuado, puesto que gran parte del grupo de estudiantes no tienen la comprensión lectora requerida.

Asimismo, el anterior error también pudo darse por las *dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacía las matemáticas*, puesto que, si no existe un interés o gusto por lo que se está haciendo, sino por el contrario aparece el recelo e incomodidad, el estudiante simplemente hará las actividades por cumplir sin cuestionarse u observar si realmente esto le brinda o permite tener un aprendizaje significativo.

A continuación, se ilustran los trabajos de aquellos grupos que construyeron las piezas de forma adecuada, y se relacionan con los respectivos rompecabezas que se obtenían a partir de cada una de ellas.

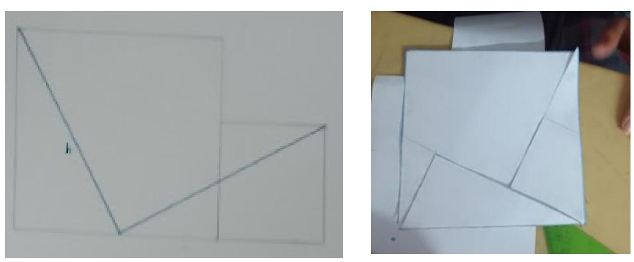


Ilustración 66. Evidencia 1 producto esperado - construcción y disección del Teorema de Pitágoras

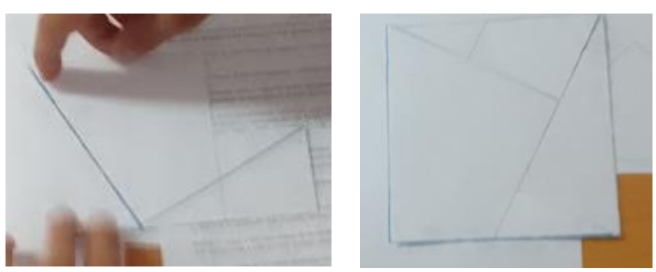


Ilustración 67. Evidencia 2 producto esperado - construcción y disección del Teorema de Pitágoras

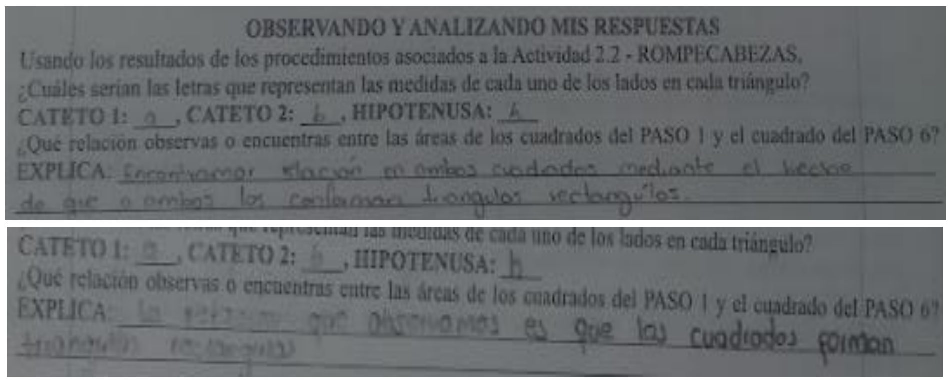
Asimismo, se ilustran enseguida algunos de los rompecabezas que se obtuvieron en otros grupos de trabajo, y de forma similar al Tangram, se reconoce que algunos cuadrados se quedaron mal hechos, ya que hubo errores en la construcción de estos.

Ilustración 68. Evidencias productos esperados - rompecabezas del Teorema de Pitágoras

Momento 4. Desarrollo de la guía – parte 2

Para este espacio, el profesor fue observando como algunos estudiantes tuvieron dificultad en pasar de usar materiales a realizar procesos mentales abstractos (algo propio del álgebra), por lo cual dicha parte 2 de la guía solamente fue desarrollada de manera completa y adecuada por algunos estudiantes. Esto vuelve a relacionarse con la propuesta de Socas (1997) y las *dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacía las matemáticas*, pues si al estudiante no le gusta o interesa lo que está realizando, simplemente no le pondrá el análisis o interpretación necesarias, sino que simplemente hará el trabajo que se le pida por cumplirle al profesor (así sepa que no está bien).

En primera instancia, se puede reconocer como los estudiantes no logran interpretar ni relacionar de manera adecuada lo que se les solicita, puesto que la pregunta indica la relación entre los cuadrados y ellos hablan de la relación con los triángulos rectángulos (que nunca se mencionan en la pregunta) para explicar. Las explicaciones fueron: Grupo 1: “encontramos relación en ambos cuadrados mediante el hecho de que a ambos los conforman triángulos rectángulos”; grupo 2: “la relación que observamos es que los cuadrados forman triángulos rectángulos”. Enseguida se presentan las explicaciones:


OBSERVANDO Y ANALIZANDO MIS RESPUESTAS
Usando los resultados de los procedimientos asociados a la Actividad 2.2 - ROMPECABEZAS.
¿Cuáles serían las letras que representan las medidas de cada uno de los lados en cada triángulo?
CATETO 1: a, CATETO 2: b, HIPOTENUSA: h
¿Qué relación observas o encuentras entre las áreas de los cuadrados del PASO 1 y el cuadrado del PASO 6?
EXPLICA: Encontramos relación en ambos cuadrados mediante el hecho de que a ambos los conforman triángulos rectángulos.

CATETO 1: a, CATETO 2: b, HIPOTENUSA: h
¿Qué relación observas o encuentras entre las áreas de los cuadrados del PASO 1 y el cuadrado del PASO 6?
EXPLICA: la relación que observamos es que los cuadrados forman triángulos rectángulos

Ilustración 69. Evidencias respuestas con explicación no relacionada a la pregunta - Guía 2 parte 2

Aunque las explicaciones mediante el lenguaje natural de la relación entre los cuadrados no fue la esperada, al relacionar las diferentes incógnitas correspondientes con los lados del triángulo rectángulos para obtener la expresión algebraica asociada al *Teorema de Pitágoras* se presentaron algunas dudas respecto a cuáles eran dichas incógnitas, por lo que el profesor tuvo que recordar que se debían observar las letras que se relacionaban y utilizaban en la parte 1 de la guía. Cuando los grupos reconocieron que los catetos estaban relacionados con $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ y la hipotenusa con $\boldsymbol{h}$, se obtuvieron las expresiones:

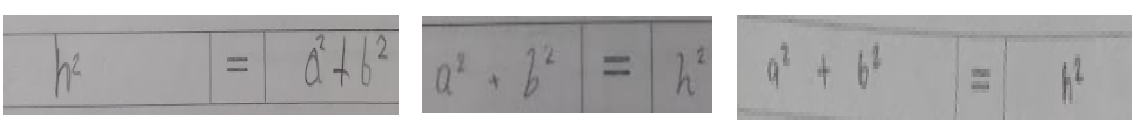


Ilustración 70. Evidencias producto esperado - Expresión algebraica del Teorema de Pitágoras

Por último, se muestran a continuación los procedimientos algebraicos asociados a la comprobación de las dos ternas pitagóricas que se planteaban en la guía, y como a partir de dicha resolución para hallar la hipotenusa en un caso y uno de los catetos en el otro caso, los estudiantes culminaron realizando la representación gráfica de dichos triángulos con las medidas asociadas (utilizando los centímetros como la unidad de medida):

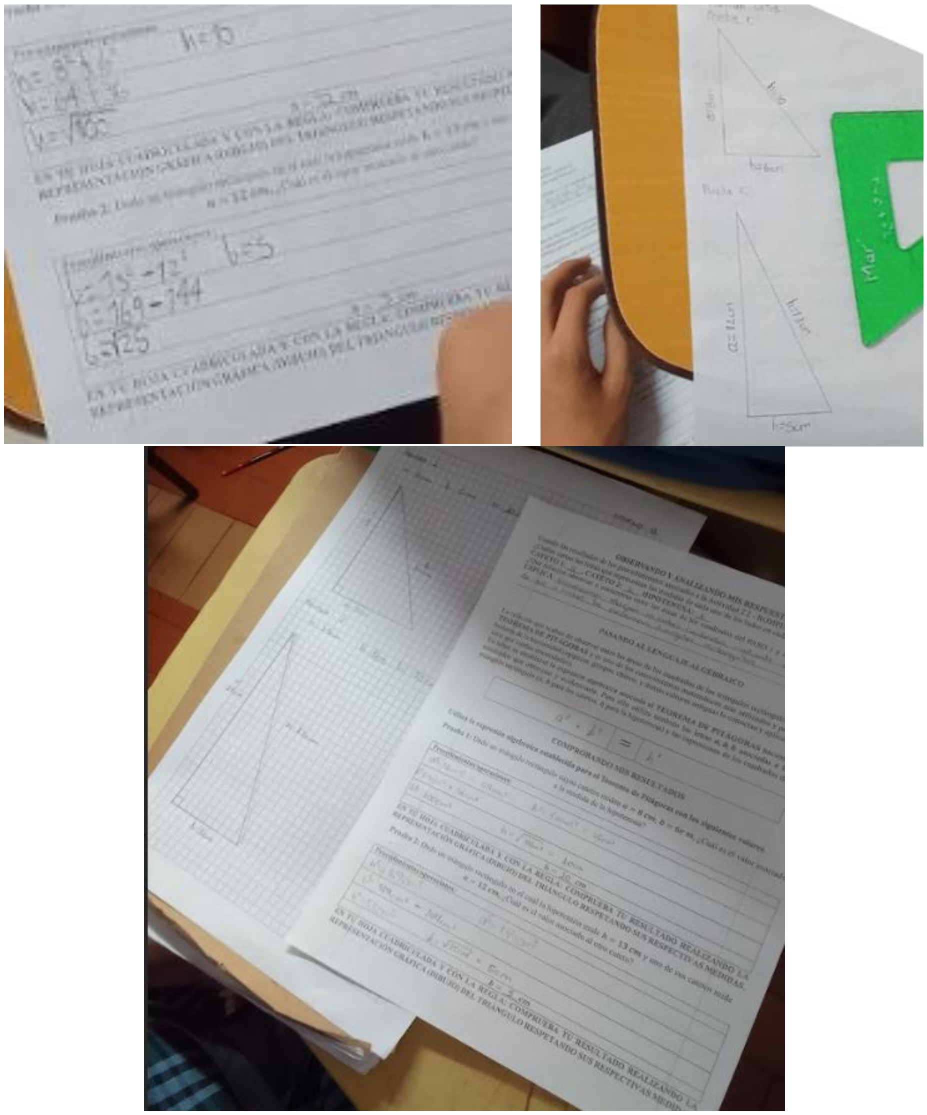


Ilustración 71. Evidencias producto esperado – comprobación algebraica y gráfica de las ternas Pitagóricas

5.2.1. Resultados obtenidos

Teniendo presente que la actividad fue desarrollada en parejas, la cantidad de grupos de trabajo fue 17 (de igual manera que en la actividad 1, pero en esta ocasión algunos grupos de trabajo intercambiaron sus integrantes). Entre los resultados, productos y el alcance de estas, se reconocen distintas categorías según el trabajo desarrollado y se relacionan con su respectiva frecuencia: ***desarrollo total - 3, desarrollo incompleto (sin errores) - 5, desarrollo incompleto (con errores) - 9.***

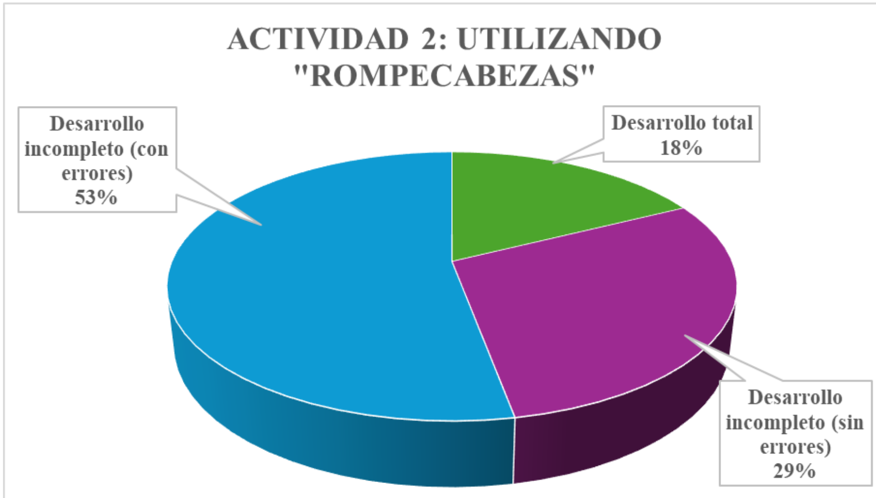


Ilustración 72. Diagrama circular - Resultados Actividad 2

5.3. Actividad 3: SUMAS DE CUADRADOS Y RECTÁNGULOS

Momento 1. Distribución del curso y entrega de la guía parte 1

Para el inicio de la actividad el profesor indicó que se organizaran en parejas de trabajo, aunque cada uno de los estudiantes debía realizar sus propias figuras y respectivos rompecabezas. Una vez se realizó la distribución del grupo, se hizo la entrega de la guía parte 1.

El profesor recalcó la importancia de leer detalladamente las instrucciones o pasos que se presentaban en la guía.

Momento 2. Desarrollo de la guía – parte 1 (gráficas y tabla de los valores asociados)

Durante el desarrollo de este espacio, el profesor recorrió de manera continua el aula con la intención de revisar y verificar dos cosas: la primera, que los estudiantes estuvieran realizando la actividad, y la segunda, verificar las respectivas figuras que construían y los valores asociados a las áreas que se iban escribiendo en la tabla de la guía.

Se reconoció que los estudiantes tuvieron disposición para el desarrollo de la actividad, y este momento fue desarrollado por todos los grupos de manera adecuada, como se ilustra a continuación por medio de las representaciones gráficas realizadas y la tabla de valores asociada a éstas, además, tal cual como se esperaba, el hecho de que los estudiantes utilizaran la regla condicionó a muchos de ellos a utilizar el centímetro como unidad de medida (aunque no todos los grupos actuaron así, en especial cuando vieron que el espacio que requerían era mayor).

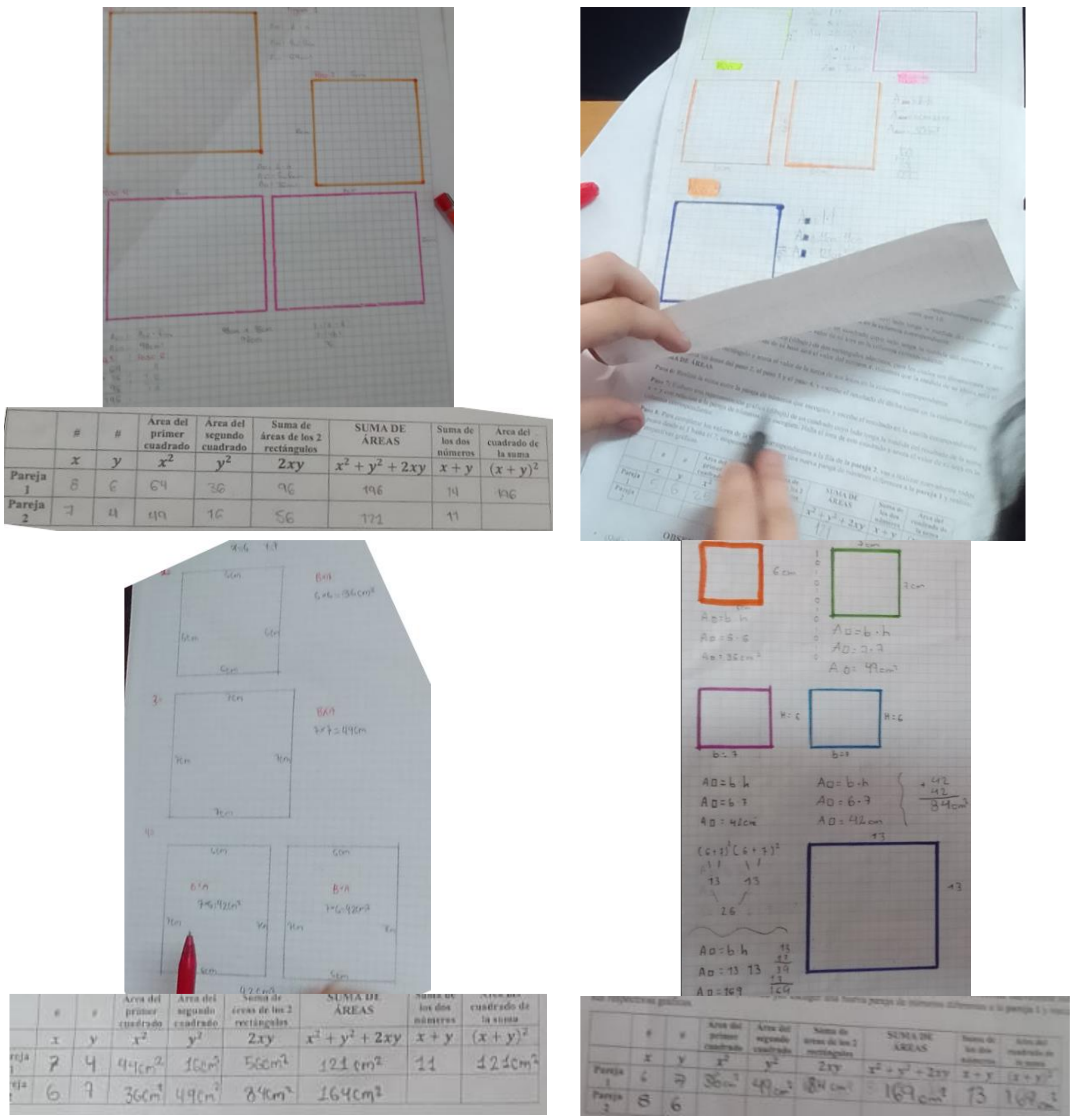


Ilustración 73. Evidencias de productos esperados - representaciones gráficas y tabla de valores asociadas

Momento 3. Verificación desarrollo de la guía parte 1 y entrega de la guía parte 2

Durante este momento el profesor realizó la revisión de las tablas de valores con relación a las representaciones gráficas que tenían los estudiantes, y en especial, que la respuesta a la pregunta final fuera la esperada (que las columnas asociadas con la *suma del binomio* y con el *trinomio al cuadrado perfecto* daban el mismo valor numérico).

Como la Actividad 1 también presentaba un formato similar, por medio de las tablas, gran parte de los estudiantes recordaron y reconocieron que la intención de realizar gráficas y hallar sus áreas era relacionar valores iguales, por ello desde el mismo desarrollo del Momento 2 se empezaron a fijar en donde estaban los resultados que se relacionaban; asimismo, y como se esperaba, las mismas ilustraciones del momento 2 permitieron reconocer que los grupos que desarrollaron adecuadamente esa parte 1 de la guía no se pusieron a contar unidades cuadradas, sino que utilizaron las fórmulas algebraicas para determinar las áreas de los cuadrados y rectángulos construidos.

Se presentan ahora algunas de las respuestas, asociadas a la igualdad de valores obtenida, se resalta que todos los grupos respondieron de forma similar:

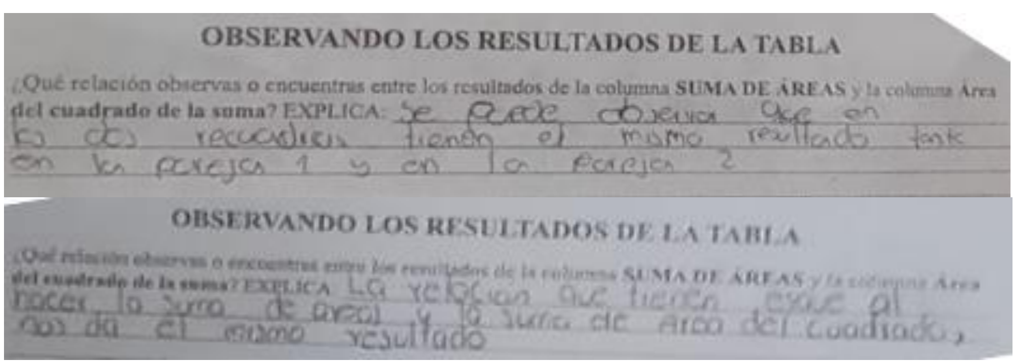


Ilustración 74. Evidencias respuestas asociadas a la tabla de valores

Momento 4. Desarrollo de la guía – parte 2 (ecuación y rompecabezas)

Para culminar la actividad, en este espacio el profesor recordó al estudiantado que en el recuadro donde se pedía relacionar las estructuras algebraicas asociadas a la igualdad lo que se debía utilizar eran las incógnitas que aparecían al comienzo de cada columna de la tabla de valores que se había completado, no obstante, varios grupos ya tenían claro esto gracias al desarrollo de las actividades anteriores, en las cuales se empezaba también desde los números para luego asociar expresiones algebraicas.

Como paso final, el profesor pidió a cada pareja que recrearan en la cartulina las representaciones gráficas asociadas a alguna de las dos parejas de números escogidas y trabajadas en el papel, solamente que esta vez era obligatorio utilizar los centímetros como unidad de medida. Asimismo, el profesor comentó que la intención de hacerlo así era construir el respectivo rompecabezas que permitiera reconocer gráficamente que la ecuación establecida efectivamente se cumple.

A continuación, se muestra parte de los rompecabezas obtenidos:

Ilustración 75. Evidencias productos esperado - Rompecabezas del Trinomio al cuadrado perfecto

5.3.1. Resultados obtenidos

Teniendo presente que la actividad fue desarrollada en parejas y que era la última de las propuestas (por lo cual los estudiantes en general ya tenían una idea de como desarrollar el trabajo por su semejanza con la Actividad 1), se encontró nuevamente que algunos grupos de trabajo intercambiaron sus integrantes, pero que ningún grupo presento errores en el desarrollo de las guías, por lo cual solamente se presentan dos categorías con sus respectivas frecuencias: ***desarrollo total - 11, desarrollo incompleto (sin errores) - 6.***

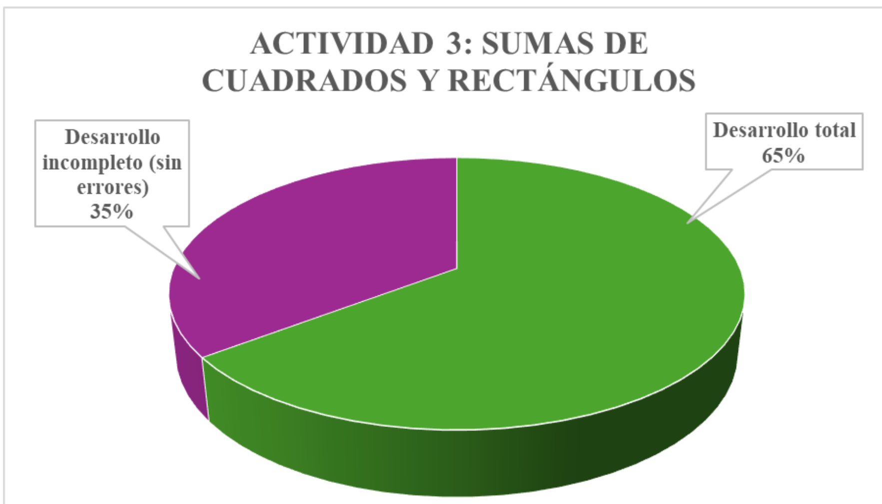


Ilustración 76. Diagrama circular - Resultados Actividad 3

6. Conclusiones

A continuación, se presentan las conclusiones (generales y particulares) del presente trabajo:

6.1. Alcance de los objetivos

Correspondiendo con el objetivo general: “Diseñar, implementar y analizar algunas tareas en las cuales se use material didáctico que permita la deducción de algunas expresiones algebraicas”, se puede afirmar que este objetivo efectivamente fue alcanzado, pues todas las tareas fueron diseñadas, implementadas y posteriormente analizadas, a su vez, que involucraron materiales didácticos que permitieron establecer algunas expresiones algebraicas.

En relación con los objetivos específicos:

- “Revisar material didáctico que pueda ser útil para el estudio de las expresiones algebraicas, en especial aquellos que usualmente no se usen para trabajar dichas temáticas”, este objetivo se alcanzó. En la primera actividad se usó le Geoplano y en la segunda el Tangram y otro rompecabezas (creación propia del estudiante) para lograr la representación e interpretación de expresiones algebraicas. No obstante, se reconoce la dificultad para abarcar temas algebraicos abstractos con este tipo de representaciones (puesto que se condicionan los resultados a valores positivos siempre), y esto implica que se deban buscar otras estrategias para incluir números negativos y el cero.
- “Diseñar tareas para el estudio de expresiones algebraicas, con el uso de material didáctico previamente seleccionado”, ya que este objetivo se relaciona con el anterior, se puede establecer que si se cumplió debido a que las tareas diseñadas fueron predeterminadas a partir de los respectivos materiales didácticos que se

seleccionaban, acá la parte compleja era como lograr que materiales asociados a la geometría permitieran llegar a resultados algebraicos.

- "Implementar una prueba piloto de las tareas, preferiblemente con estudiantes de ciclo cuatro (octavo y noveno)", este objetivo se cumplió con el grupo de estudiantes del grado noveno del colegio Liceo Antonio de Toledo, ubicado en la localidad séptima de bosa. La *Actividad 1* se desarrolló utilizando los Geoplanos que hacen parte del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional; la *Actividad 2* se desarrolló con el uso de algunos tangram que los mismos estudiantes debían llevar construidos (por ello algunos presentaban deformaciones), además de que ellos mismo construían el rompecabezas siguiente al trabajo del tangram; en la *Actividad 3* los estudiantes iban realizando representaciones gráficas sobre el papel para culminar la generalización con la construcción de un rompecabezas en la cartulina solicitada.
- "Analizar evidencias sobre el desarrollo y resultado de las pruebas piloto, en aras de obtener conclusiones asociadas a las ventajas y desventajas que se encuentran en las actividades propuestas", todas las actividades dejaron las suficientes evidencias para lograr realizar los análisis y conclusiones correspondientes. En este objetivo, es importante resaltar que se intentó recolectar la mayor cantidad de evidencias dentro del mismo salón de clase (fotos en acción), pero que algunos trabajos tuvieron que ser tomados y fotografiados una vez finalizada la actividad ya que la resolución de las fotos o falta de evidencia en algunos casos no permitía relacionar resultados (la relevancia del hecho de hacer y recolectar todo por medio de formato de guías).

6.2. Desde el análisis de las actividades

Con base en los resultados obtenidos durante el desarrollo de las actividades, los propósitos asociados a estas, los tiempos utilizados, los materiales didácticos involucrados, y todos aquellos parámetros que se puedan ver asociados con el desarrollo de las actividades (por parte del estudiante) con el presente trabajo, se mencionan y explican enseguida las respectivas conclusiones generales de las actividades:

- Las guías asociadas a la actividad 1 y la actividad 3 se desarrollaron de manera más sencilla por parte del estudiante, lo anterior, debido a que la presentación que se mostraba para recolectar y recuperar información era por medio de tablas.
- Los estudiantes gustan del trabajo por medio de materiales didácticos que poco utilizan o que nunca habían visto (geoplano), pero depende del profesor que el material sea bien utilizado, lo anterior, por medio de las instrucciones e indicaciones que brinde, y cómo las socializa.
- Las guías asociadas con las actividades propuestas deben rediseñadas, puesto que tiene mucho texto, lo cual genera dispersión en los estudiantes. Para ello, se deben plantear las actividades por medio de pasos más cortos, uso de más ilustraciones que permitan resumir los textos, etc.
- La actividad 2 debe ser replanteada desde la cantidad de acciones que debe realizar el estudiante, la forma en la cual está redactada y como se recolecta la información; lo anterior, debido a que esta actividad fue la que no utilizó tablas para recolectar información, por lo cual los estudiantes a la hora de generalizar el Teorema de Pitágoras no tenían muy claro cuáles eran las variables involucradas en la guía, asimismo, la comprobación final se vuelve algo extenso sumado al proceso previo.

Asimismo, otra opción sería replantear el trabajo en al menos dos sesiones de clase, con ello se esperaría que el estudiantado no se viera tan saturado como paso en la aplicación de dicha actividad.

- Se infiere que utilizar ejemplos y representaciones particulares de *Productos Notables* y *Teoremas* matemáticos antes de la generalización de los casos puede llevar a que los estudiantes comprendan mejor dicho proceso, pues ya identifican casos particulares obteniendo las expresiones algebraicas.
- Las actividades y procesos sencillos pueden brindar buenos resultados para lograr desarrollar un pensamiento matemático formal, en especial con estudiantes del ciclo IV porque se encuentran en una etapa de madurez y formalización de ideas abstractas.

6.3. Aportes a mi profesión

Como profesor de matemáticas, encuentro y reconozco que el desarrollo, aplicación y análisis de las actividades propuestas, y de todo el trabajo de grado en general, ha generado bastantes aportes a mi profesión en diferentes aspectos:

- Reencontrar y reutilizar materiales y propuestas didácticas que entran en desuso, pues muchas veces el afán es pensar qué hacer para enseñar, cómo hacerlo y demás, cuando simplemente muchas veces es buscar, leer y adaptar algo que ya está hecho (en especial en estos tiempos que existe la red global).
- Diseñar y aplicar actividades que llamen la atención de los estudiantes es la mejor manera de asegurar atención y promover el aprendizaje de otras maneras, pues como muchos aspectos de la vida, lo que no gusta o no llama la atención se deja de lado, pero manipular colores, figuras, y demás, hace que el estudiante se motive más que sea a utilizar e intentar hacer cosas con los materiales.

- Elaborar y desarrollar actividades simples es un buen camino para ir desarrollando e institucionalizando conceptos abstractos a partir de pequeños pasos. Como se dice coloquialmente, primero toca caminar para poder correr.

6.4. Aportes a mi persona

El desarrollo del presente trabajo deja bastantes aportes a lo que soy y voy a ser como persona, en especial en una profesión en la cual lo más relevante, a mi parecer, es ese aspecto, ser una persona íntegra que le pueda beneficiar y servir a la sociedad. Con base en lo anterior, consideró que los aportes que surgieron son:

- Reconocer la importancia de realizar las cosas a tiempo, y no dilatar, pues el que se ve afectado cuando pasa eso soy directamente yo.
- Saber matemáticas sin ser una persona que le sirva a la sociedad, es un acto banal para mí, por ello esporádicamente me centro en otros aspectos ajenos a la academia.
- Ser profesor de matemáticas dentro de una sociedad donde cada vez son más ajenas a la mayoría, es un privilegio y como tal debo valorarlo y demostrarle a todos los que pueda que esta ciencia está hecha para todos.
- El profesorado me enriquece el alma día tras día, y me da un motivo para trabajar en ser mejor persona, cambiar esos aspectos negativos que reconozco en mi con la intención de poder transmitir mi mensaje de enseñanza y aprendizaje a la mayor cantidad de personas posible (así no sean necesariamente mis estudiantes).
- Demostrar que la clase obrera puede romper el esquema y forjar los mejores profesionales, en mi familia no había personas con títulos o profesiones, hace un par de año soy el modelo y evidencia de que si hay compromiso y dedicación consigo mismo se pueden logran grandes cambios y mejoras.

Bibliografía

Angarita, Y. y Palacios, B. (2015). *Catálogo de materiales y recursos didácticos. (Trabajo de grado).* Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Batanero, C., Font, V., Godino, J. (2003). *FUNDAMENTOS DE LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS PARA MAESTROS*. Granada, España: Universidad de Granada.

Briseño, L., Palmas, O., Vázquez, R. y Verdugo, J. (2000). *Área de figuras en el geoplano*. Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM.

Eves, H. (1990). *An Introduction to the History of Mathematics*. Saunders College Publishing.

Gómez, P. (2002). Análisis del Diseño de Actividades para la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas. En M. Penalva, G. Torregrosa y J. Valls, *Aportaciones de la Didáctica de la Matemática a diferentes perfiles profesionales* (págs. 341-356). Alicante, España: Universidad de Alicante.

Luque, C., Mora, L. y Torres, J. (2014). *Actividades Matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: clasificar, medir e invertir*. Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Manrique, A., & Gallego, A. (2013). *El material didáctico para la construcción de aprendizajes significativos.* Revista colombiana de Ciencias Sociales, 4(1), 101-108.

MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas.* Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

MEN. (2006). *Estandares Básicos de Competencias en Matemáticas.* Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

MEN. (2017). *Derechos Básicos de Aprendizaje en Matemáticas.* Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Moise, W. C. (1986). *Geometría Moderna*. Boston: Addison-Wesley.

Moreno, I. (2004). *La utilización de medios y recursos didácticos en el aula.* Madrid: Universidad Complutense de Madrid.

Muñoz, C. (2014). *Los materiales en el aprendizaje de las matemáticas. (Trabajo de grado).* Logroño, España: Universidad de la Rioja.

Serrazina, L. y Matos, J. (1968). *O Geoplano na sala de aula*. Associação de Professores de Matemática. Portugal:Grua.

Socas, M. M. (1997). *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria.* (Cap. V, pp. 125-154). En Rico, L. y otros: *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Barcelona: Horsori.

Stewart, J., Redlin, L. y Watson, S. (2012). *Precálculo: Matemáticas para el Cálculo (6ta ed.)*. México: Cenage Learning.

Stillwell, J. (2005). *The Four Pillars of Geometry*. Springer Science & Business Media.

ANEXO 1 – GUÍA ACTIVIDAD 1

COLEGIO: ______________________________ FECHA: ____________________

ESTUDIANTE(S): ____

ACTIVIDAD 1 - DEDUCIENDO ALGUNOS PRODUCTOS NOTABLES

Para realizar la siguiente actividad vas a utilizar tu Geoplano al momento que se te pida construir ciertas figuras, y en la tabla que aparece al final de los pasos vas a ir registrando tus resultados:

PASO 1: debes pensar y elegir una pareja de números **a** y **b** que al ser sumados den como resultado el número 9. Escribe los números que elegiste en tu tabla *(ten en cuenta que el número **a** debe de ser el de mayor valor)*.

PASO 2: utiliza tu tabla, y escribe los resultados para la suma $(a+b)$ y la resta $(a-b)$ de los números.

PASO 3: utiliza tu geoplano, y en él, construye un rectángulo en el cual uno de los lados mida $a+b$ y el otro $a-b$. Uno de estos lados será la base y el otro la altura.

PASO 4: utiliza tu tabla y el rectángulo construido en el **paso 3**, y escribe cual es el área correspondiente al rectángulo (cuenta cuantas unidades cuadradas tiene).

PASO 5.1: utiliza tu geoplano y, construye un cuadrado cuyos lados tengan como medida al número a, ten en cuenta que uno de los vértices del cuadrado debe estar sobre el origen del geoplano (0,0).

PASO 5.2: utiliza tu geoplano y, construye un cuadrado cuyos lados tengan como medida al número b, ten en cuenta que uno de los vértices del cuadrado debe estar sobre el origen del geoplano (0,0); asimismo, ten presente que el cuadrado del **paso 5.1** debe conservarse en el geoplano *(vas a utilizar la banda elástica del otro color)*.

PASO 6: utiliza tu tabla y los cuadrados construidos en el **paso 5.1 y el paso 5.2**, y escribe cual es el área asociada a cada uno de ellos (cuenta cuantas unidades cuadradas tiene cada cuadrado en su interior).

PASO 7: utiliza tu tabla y los cuadrados construidos en el **paso 5** *(también puedes usar las fichas de color para recubrir el cuadrado más pequeño, si así lo deseas)*, y escribe cual es el área asociada a la diferencia entre las áreas de los cuadrados (cuenta cuantas unidades cuadradas quedan al tomar el área del cuadrado más grande y quitarle el área del cuadrado más pequeño; es decir, contar las unidades cuadradas que simultáneamente **NO** están encerradas en el cuadrado del **paso 5.2**, pero si están encerradas entre el cuadrado del **paso 5.1**).

PASO 8: desarmar las figuras asociadas a la pareja anterior, y ahora, vas a pensar y escoger una nueva pareja de números **a** y **b**, con la condición de que ahora su suma debe dar como resultado al número 8. Con base en dicha pareja, vas a realizar los procedimientos desde el **paso 1** hasta el **paso 7**, para anotar tus resultados utiliza la segunda fila de la tabla (pareja 2).

PASO 9: desarmar las figuras asociadas a la pareja anterior, y ahora, vas a pensar y escoger una nueva pareja de números **a** y **b**, con la condición de que ahora su suma debe dar como resultado algún número menor o igual a 7. Con base en dicha pareja, vas a realizar los procedimientos desde el **paso 1** hasta el **paso 7**, para anotar tus resultados utiliza la tercera fila de la tabla (pareja 3).

	#	#	Suma	Resta	Área rectángulo (base)*(altura)	Área cuadrado a	Área cuadrado b	Diferencia de cuadrados
	a	b	$a+b$	$a-b$	$(a+b)(a-b)$	a^2	b^2	a^2-b^2
Pareja 1								
Pareja 2								
Pareja 3								

OBSERVANDO LOS RESULTADOS DE LA TABLA

- ¿Qué relación observas o encuentras entre los resultados de la columna asociada al área del rectángulo y la columna asociada al área de la diferencia de cuadrados? EXPLICA: ________________________________

____
____
____
____
____

PASANDO AL LENGUAJE ALGEBRAICO

La relación que acabas de observar se conoce como **DIFERENCIA DE CUADRADOS** y es muy común hallar su estructura en ejercicios de álgebra escolar, tu labor es establecer la expresión algebraica asociada a los resultados que obtuviste y evidenciaste. Para ello utiliza las letras $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ asociadas a los números, y también las expresiones asociadas a los recuadros de la tabla que llenaste y relacionaste anteriormente.

	$=$	

COMPROBANDO MIS RESULTADOS

Para poder verificar que la expresión establecida en el recuadro anterior está bien, es necesario realizar algunas pruebas con valores específicos para los números $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$. Utiliza la tabla y comprueba tu expresión con dos nuevas parejas de números, cada una de ellas compuesta por números grandes (al **menos de dos cifras**).
El recuadro del final es para las operaciones que necesites realizar (sumar, restar, multiplicar).

Prueba pareja 4: $\boldsymbol{a} =$ $\boldsymbol{b} =$	**Prueba pareja 5:** $\boldsymbol{a} =$ $\boldsymbol{b} =$
Operaciones	**Operaciones**

ANEXO 2 – GUÍA ACTIVIDAD 2

COLEGIO: ______________________________ FECHA: ____________________

ESTUDIANTE(S): ______________________________________

ACTIVIDAD 2 – UTILIZANDO "ROMPECABEZAS"

Actividad 2.1 - TANGRAM

Para realizar la primera parte de la actividad vas a utilizar el tangram, y el triángulo de referencia que se te entrega *(el cual es idéntico a los triángulos más grandes del tangram)*:

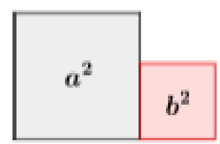
PASO 1: utiliza las siete fichas del tangram y construye el cuadrado correspondiente a la hipotenusa del triángulo de referencia.

PASO 2: utiliza las fichas del tangram y construye los cuadrados correspondientes a los dos catetos del triángulo de referencia.
Nota: es necesario usar y repartir todas las piezas entre ambos catetos, sin que falten o sobren, y además es muy importante no sobreponer piezas (norma básica del tangram chino).

Con base en las construcciones realizadas, ¿qué relación encuentras o que puedes establecer entre las áreas del cuadrado del PASO 1 y los cuadrados del PASO 2? Explica con tus palabras: ____________________
____

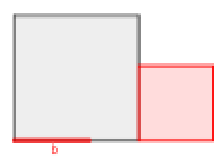
Actividad 2.2 - ROMPECABEZAS

Para realizar la siguiente parte de la actividad necesitas tijeras y un octavo de cartulina o algún material similar, pues lo que vas a construir es tu propio rompecabezas:

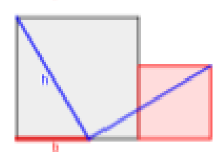


PASO 1: construye y recorta (**en una sola pieza**) dos cuadrados de distinto tamaño, de forma tal que queden uno al lado del otro.

PASO 2: como se ilustra en la imagen, el cuadrado más grande tendrá una medida de lado a, mientras el cuadrado más pequeño tendrá una medida de lado b.



PASO 3: copia y haz una marca de la medida del lado del cuadrado más pequeño sobre el lado inferior del cuadrado más grande, empezando en el vértice de la parte izquierda.



PASO 4: a partir de la marca realizada con la medida del PASO 3, traza los dos segmentos como se ilustra en la imagen **(color azul)**.

PASO 5: utiliza las tijeras y recorta únicamente los segmentos construidos en el PASO 4 **(color azul)**, ¿Qué tipos de triángulos obtienes? ____________________
¿Qué relación observas entre los dos triángulos que obtuviste? ____________________
____

PASO 6: con las tres piezas que obtuviste a partir de los recortes del **PASO 5**, construye un cuadrado (usando las tres "fichas" obtenidas). Con base en las construcciones realizadas, las medidas y expresiones algebraicas utilizadas, ¿Cómo expresar algebraicamente el área del cuadrado construido en el **PASO 4** a partir del rompecabezas? ______ Explica tu respuesta: ____________________
____

OBSERVANDO Y ANALIZANDO MIS RESPUESTAS

Usando los resultados de los procedimientos asociados a la Actividad 2.2 - ROMPECABEZAS, ¿Cuáles serían las letras que representan las medidas de cada uno de los lados en cada triángulo?

CATETO 1: ____, CATETO 2: ____, HIPOTENUSA: ____

¿Qué relación observas o encuentras entre las áreas de los cuadrados del PASO 1 y el cuadrado del PASO 6?

EXPLICA: ____

____

____

PASANDO AL LENGUAJE ALGEBRAICO

La relación que acabas de observar entre las áreas de los cuadrados de los triángulos rectángulos se conoce como **TEOREMA DE PITÁGORAS** y es uno de los conocimientos matemáticos más utilizados y promulgados en la historia de la humanidad (egipcios, griegos, chinos, y demás culturas antiguas lo conocían y aplicaban en su diario vivir por ciertas necesidades).

Tu labor es establecer la expresión algebraica asociada al **TEOREMA DE PITÁGORAS** haciendo uso de los resultados que obtuviste y evidenciaste. Para ello utiliza también las letras $\boldsymbol{a, b, h}$ asociadas a los lados del triángulo rectángulo (a, b para los catetos; h para la hipotenusa) y las expresiones de los cuadrados de sus lados.

	=	

COMPROBANDO MIS RESULTADOS

Utiliza la expresión algebraica establecida para el Teorema de Pitágoras con los siguientes valores.

Prueba 1: Dado un triángulo rectángulo cuyos catetos miden $\boldsymbol{a = 8\ cm}$, $\boldsymbol{b = 6c\ m}$, ¿Cuál es el valor asociado a la medida de la hipotenusa?

Procedimientos/operaciones:
$\boldsymbol{h =}$ ____ $\boldsymbol{cm}$

EN TU HOJA CUADRICULADA Y CON LA REGLA: COMPRUEBA TU RESULTADO REALIZANDO LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA (DIBUJO) DEL TRIÁNGULO RESPETANDO SUS RESPECTIVAS MEDIDAS.

Prueba 2: Dado un triángulo rectángulo en el cual la hipotenusa mide $\boldsymbol{h = 13\ cm}$ mientras uno de sus catetos mide $\boldsymbol{a = 12\ cm}$, ¿Cuál es el valor asociado al cateto restante?

Procedimientos/operaciones:
$\boldsymbol{b =}$ ____ $\boldsymbol{cm}$

EN TU HOJA CUADRICULADA Y CON LA REGLA: COMPRUEBA TU RESULTADO REALIZANDO LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA (DIBUJO) DEL TRIÁNGULO RESPETANDO SUS RESPECTIVAS MEDIDAS.

ANEXO 3 – GUÍA ACTIVIDAD 3

COLEGIO: ____ FECHA: ____________________
ESTUDIANTE(S): ____

ACTIVIDAD 3 – SUMAS DE CUADRADOS Y RECTÁNGULOS

Para desarrollar la siguiente actividad vas a necesitar la regla, colores, una hoja de block cuadriculada, tijeras, colbón y un octavo de cartulina. Primero vas a realizar algunas representaciones gráficas (dibujos) en la hoja de block cuadriculada y con base en ellas vas a completar la tabla.

Paso 1: Elige una pareja de números (x, y); y anota cada uno de ellos en las columnas correspondientes para la primera pareja en la tabla. Es importante que la suma entre ellos no sea mayor que 15 ni menor que 10.

Paso 2: Elabora una representación gráfica (dibujo) de un cuadrado cuyo lado tenga la medida del número x que escogiste. Halla el área de este cuadrado y anota el valor de su área en la columna correspondiente.

Paso 3: Elabora una representación gráfica (dibujo) de un cuadrado cuyo lado tenga la medida del número y que escogiste. Halla el área de este cuadrado y anota el valor de su área en la columna correspondiente.

Paso 4: Elabora una representación gráfica (dibujo) de dos rectángulos idénticos, para los cuales sus dimensiones sean los números que escogiste; la medida de su base será el valor del número x, mientras que la medida de su altura será el valor del número y.
Halla el área de cada rectángulo y anota el valor de la suma de sus áreas en la columna correspondiente.

Paso 5: Suma las áreas del paso 2, el paso 3 y el paso 4, y escribe el resultado de dicha suma en la columna llamada: SUMA DE ÁREAS.

Paso 6: Realiza la suma entre la pareja de números que escogiste y escribe el resultado en la casilla correspondiente.

Paso 7: Elabora una representación gráfica (dibujo) de un cuadrado cuyo lado tenga la medida del resultado de la suma $x + y$ con relación a la pareja de números que escogiste. Halla el área de este cuadrado y anota el valor de su área en la columna correspondiente.

Paso 8: Para completar los valores de la tabla correspondientes a la fila de la **pareja 2**, vas a realizar nuevamente todos los pasos desde el 1 hasta el 7, empezando por escoger una nueva pareja de números diferentes a la **pareja 1** y realizar sus respectivas gráficas.

	#	#	**Área del primer cuadrado**	**Área del segundo cuadrado**	**Suma de áreas de los 2 rectángulos**	SUMA DE ÁREAS	**Suma de los dos números**	**Área del cuadrado de la suma**
	x	y	x^2	y^2	$2xy$	$x^2 + y^2 + 2xy$	$x + y$	$(x + y)^2$
Pareja 1								
Pareja 2								

OBSERVANDO LOS RESULTADOS DE LA TABLA

- ¿Qué relación observas o encuentras entre los resultados de la columna SUMA DE ÁREAS y la columna **Área del cuadrado de la suma**? EXPLICA: ____
____
____
____
____
____

Elaborado por: Henry Stiven Escobar Peraza, profesor de matemáticas

COLEGIO: ____ FECHA: ____________________
ESTUDIANTE(S): ____

PASANDO AL LENGUAJE ALGEBRAICO

La relación que observaste y estableciste se conoce como **EL CUADRADO DE UN BINOMIO** y su resultado es un **TRINOMIO AL CUADRADO PERFECTO**, aunque lo hiciste aplicando la suma, este producto notable también puede darse en la resta, pero ello genera un cambio en una parte de los signos.

Utiliza las estructuras algebraicas brindadas en la tabla para establecer la expresión algebraica asociada a lo que dedujiste u observaste:

	=	

COMPROBANDO TUS RESULTADOS

Para comprobar geométricamente que lo establecido es verdadero, utiliza una de las parejas que habías puesto en la tabla, y en el octavo de cartulina construye los cuadrados y rectángulos asociados a los pasos: **2, 3, 4 *y* 7. (Utiliza centímetros).**

- ➔ Una vez tengas los tres cuadrados (pasos **2**, **3** y **7**) y los dos rectángulos (paso **4**), los vas a recortar y decorar con colores distintos (***menos los dos rectángulos, esos si deben quedar con un mismo color***).
- ➔ Cuando tengas todos los recortes decorados, utiliza los cuadrados de los pasos **2** y **3**, más los rectángulos del paso **4**, para construir en modo de rompecabezas un cuadrado idéntico (congruente) al cuadrado que obtuviste del paso **7**.
- ➔ Cuando logres el rompecabezas, llama al profe y muéstrale tu resultado para que te indique como y donde pegarlos.

Elaborado por: Henry Stiven Escobar Peraza, profesor de matemáticas