RECURSO EDUCATIVO DIGITAL ABIERTO COMO MEDIADOR PARA EL FORTALECIMIENTO DEL APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA: EL CASO DE LAS CÓNICAS

Brayan Nicolás Guerrero Nieto

Luis Fernando Aldana Barón

Asesor:

Óscar Javier Molina Jaime

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de Matemáticas

Bogotá, D.C.

2023

DEDICATORIA

Dedicado a mis padres, Javier y Claudia, por su incondicionalidad durante toda mi vida.
A mi hermana, Tatiana, por su apoyo y compañía durante todos estos años.
A mi pareja, Paula, por ser mi equipo y compañera de vida.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mi familia por su apoyo incondicional, y por la fe que depositaron en mí desde el inicio de este trabajo hasta su culminación.

A mi pareja, Paula, por sus grandes contribuciones y aportes a este proyecto, y por todo el esfuerzo realizado en pro de hacer un buen trabajo.

A mi compañero y amigo, Luis Aldana, por haber aceptado hacer este trabajo tan significativo y haber trabajado codo a codo conmigo hasta el final.

Al profesor Óscar Molina, por todo el apoyo que nos ha brindado, la paciencia que nos ha tenido y, sobre todo, por todas las enseñanzas que nos dejó durante todo este trabajo.

A los profesores de la Universidad Pedagógica Nacional por haber puesto uno a uno su grano de arena en la conformación de nuestros saberes y aptitudes para alcanzar la meta de ser docentes.

Nicolas Guerrero

DEDICATORIA

Dedicado, especialmente, a toda mi familia. Ella me acompañó y orientó durante todo este proceso. Dedico, también, a todas aquellas personas que sirvieron como voz de aliento cuando la necesitaba, animándome a no desfallecer para poder lograr mis objetivos. A todos ellos infinitas gracias.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco, especialmente, a mis padres Yolanda y Moisés, quienes me han apoyado en cada paso de mi vida y me han acompañado durante todo este proceso.

Agradezco, de manera especial, al profesor Oscar Molina por ser una parte fundamental de este trabajo, por ser guía constante, por su paciencia, y por compartir todo su conocimiento con nosotros. Gracias por todo su apoyo, pues hizo posible culminar este trabajo.

Expreso mi agradecimiento a mi colega y amigo Nicolas Guerrero, por su compromiso y dedicación desde el inicio hasta el final, para poder lograr el diseño de esta propuesta. Aprendí mucho de él y le deseo éxitos en lo que se viene para su vida.

Infinitas gracias a toda mi familia por brindarme cariño y respeto siempre, por sus consejos y apoyo incondicional.

A mis amigos Johana, Wendy, Katherine, Catalina, Michael, Daniel, Jorge y Camilo, quienes me han acompañado durante esta etapa de mi vida. Gracias por su apoyo incondicional y por brindarme su amistad

Expreso mi gratitud a la Universidad Pedagógica Nacional y a la planta de profesores por bridarme una educación de calidad y las herramientas necesarias que me ayudaron en la elaboración de este trabajo.

Luis Aldana

TABLA DE CONTENIDO

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

RESUMEN

Luego de la pandemia por COVID 19, se vio con mayor claridad la necesidad y los potenciales beneficios de usar recursos digitales para el favorecimiento de la educación; dado el interés por contribuir con una herramienta de este tipo con una idoneidad que contemple más atributos respecto a las ya existentes, específicamente en relación con un tema típico de las matemáticas escolares, *las secciones cónicas*, decidimos crear un Recurso Educativo Digital Abierto (REDA) alusivo a estas. La propuesta consiste en una página web con applets, videos y texto informativo, que apunta a generar una cierta interactividad entre el usuario y la plataforma. El contenido del REDA se estructura de la siguiente manera: (i) se presentan tres usos de las secciones cónicas (uno relativo a la trayectoria y ubicación de un vehículo, basado en el Sistema de Loran, otro al arte Hilorama y otro a la reflexión de la luz en espejos con curvas cónicas). (ii) Alrededor de los usos, se presentan situaciones a maneras de video-historietas que ilustran tales usos. (iii) Para los objetos protagonistas que emergen de tales historietas, se presenta una elaboración de orden teórico que permite profundizar en el estudio de los atributos que estos objetos tienen. En ese marco, se presenta información a manera de texto y applets que procuran incentivar una cierta interacción con la página, y por ese medio, promover aprendizaje.

Para el diseño del recurso, seguimos criterios de idoneidad para la construcción de videos educativos y páginas web, así como la idea de espacios de trabajo geométricos descritos por Kuzniak y Rauscher (2014) que, a priori, apuntan a favorecer el estudio de los objetos geométricos en la escuela.

Palabras clave: usos de las cónicas, sistema de navegación, hiloramas, reflexión de la luz, cónica por lugar geométrico, cónica por envolventes, espacios de trabajo geométrico, Recurso Educativo Digital Abierto.

ABSTRACT

After the COVID 19 Pandemic, the need and potential benefits of using digital resources for the promotion of education became clearer; given the interest in contributing with a tool of this type with a suitability that contemplates more attributes with respect to the existing ones, specifically in relation to a typical topic of school mathematics, the conic sections, we decided to create an Open Digital Educational Resource (REDA) allusive to these. The proposal consists of a web page with applets, videos, and informative text, which aims to generate a certain interactivity between the user and the platform. The content of the REDA is structured as follows: (i) three uses of conic sections are presented (one related to the trajectory and location of a vehicle, based on the Loran System, another to Hilorama art and another to the reflection of light in mirrors with conic curves). (ii) Around the uses, situations are presented in the form of video-stories that illustrate such uses. (iii) For the protagonist objects that emerge from such cartoons, a theoretical elaboration is presented that allows a deeper study of the attributes that these objects have. Within this framework, information is presented in the form of text and applets that seek to encourage a certain interaction with the page, and thus promote learning.

For the design of the resource, we followed criteria of suitability for the construction of educational videos and web pages, as well as the idea of geometric workspaces described by Kuzniak (2014) which, a priori, aim to favor the study of geometric objects at school.

Keywords: uses of conics, navigation system, hiloramas, light reflection, conic by geometric locus, conic by envelopes, geometric workspaces, Open Digital Educational Resource.

INTRODUCCIÓN

El presente documento es una monografía de trabajo de grado, requisito para optar por el título de Licenciados en Matemáticas, de la Universidad Pedagógica Nacional. Este trabajo tiene como intención diseñar una herramienta que tiene rasgos de un Recurso Educativo Digital Abierto (REDA) alusivo a las secciones cónicas, que consiste en una página web con applets, videos y textos informativos contenidos en ella (https://lfaldanab.wixsite.com/seccionesconicas). Durante la elaboración de este recurso se procuró atender a algunos criterios de idoneidad propuestos por Godino (2013), los cuales adaptamos para diseñar la página web y los videos, con el objetivo de hacerlos accesibles y favorecer el aprendizaje, también se tomó en cuenta la idea de espacios de trabajo geométricos (ETG) descritos por Kuzniak (2014) que favorecen el estudio de objetos geométricos en la escuela. Para llevar a cabo lo anterior, hemos dispuesto que el documento se componga de cinco capítulos:

En el primero, se describe a detalle las razones por las que decidimos elaborar un recurso educativo digital alusivo a las curvas cónicas; exhibimos una problemática evidenciada en el periodo de pandemia (Covid 19), en el que se resaltó el potencial de los recursos digitales enfocados a la educación y la pertinencia de un material digital de corte divulgativo con algunos rasgos educativos, dedicado al estudio de las cónicas.

En el segundo capítulo se encuentra nuestro marco conceptual dividido en dos partes: la primera, alude a aspectos de orden didáctico, mientras que la segunda a aspectos de índole matemático. Esto se debe a que nuestros principales referentes didácticos (Kuzniak y Rauscher, 2014), con su propuesta de aproximación a la geometría escolar, sugieren una manera en la que nos basamos para presentar la información matemática, que contempla un abordaje tanto experimental como teóricos. También utilizamos la idea de criterios de idoneidad propuestos por el Enfoque-Ontosemiótico (Godino, 2013) como guía para diseñar un recurso educativo digital mucho más accesible para la escuela, articulando ciertos indicadores que se pueden controlar desde un recurso digital. Además, desde este mismo enfoque, procuramos usar la idea de objetos primario que nos permitieron, en detalle, considerar elementos teóricos (procedimientos, definiciones y propiedades, estos últimos articulados en argumentos -de corte deductivo-).

En el tercer capítulo se presenta la metodología que seguimos para la elaboración de nuestro REDA; esta se divide en tres fases: la primera describe la consulta documental realizada para fundamentar la elaboración del recurso. La segunda presenta el procedimiento de estructuración que se basa en la idea de *espacio de trabajo geométrico* (ETG) y en los *criterios de idoneidad*; esta se divide en tres subfases, la primera subfase detalla la elaboración de la página web, la segunda subfase describe los pasos que se siguieron para diseñar los videos, la tercera subfase expone la forma en la que se crearon los applets y la cuarta subfase contiene lo relativo a la organización del texto informativo que expande el aspecto teórico de los videos y se apoya en los applets; finalmente, en la tercera fase se describe nuestra propuesta de estudio y buen uso del recurso.

El cuarto capitulo expone la descripción de la página web en la que detallamos cada uno de los componentes que los conforman. En cuanto a la página web se resalta una descripción de cada uno de los marcos y pestañas que esta presenta, seguido de una caracterización general de los videos en los que se encuentra su contenido, objetivos y organización; luego, se presenta la naturaleza de los distintos tipos de applets y su intencionalidad respecto al recurso; finalmente, se describen documentos que presentan las diferentes demostraciones y algunos métodos de construcción que se condicen con la caracterización de curvas por envolventes.

Finalmente, el quinto capitulo contiene las conclusiones del trabajo de grado, descritas a partir de tres asuntos: el cumplimiento de nuestros objetivos, los aportes personales y académicos que nos dejó la realización del trabajo y las proyecciones que entrevemos de la actividad que implicó el diseño de nuestro REDA.

CAPÍTULO 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Este capítulo se divide en dos secciones: *Justificación* y *Objetivos*. En la primera sección, se exponen las razones que nos llevaron a considerar la elaboración de un recurso educativo digital como herramienta de apoyo para la enseñanza y aprendizaje de las secciones cónicas. También se especifica el tipo de recurso educativo construido, enfocado en las secciones cónicas. En la segunda sección, se planteó un objetivo general que orientó nuestro estudio, y se establecieron objetivos específicos que describieron el camino que seguimos para lograr dicho objetivo general.

Justificación

Debido a las circunstancias que ha venido atravesando la sociedad y el sector educativo luego de la pandemia relativa al Covid 19, en donde se le ha dado mayor protagonismo al uso de herramientas tecnológicas, es importante pensar en recursos que apoyen la enseñanza y promuevan el aprendizaje de las matemáticas, modificando en algo las metodologías tradicionales, con la intención de darle protagonismo a otros métodos de enseñanza. El Ministerio de Tecnologías y la Información (MINTIC) tiene un proyecto cuyo objetivo es mejorar el desempeño y rendimiento académico de los estudiantes, mediante la integración de las Tecnologías de la Información y Comunicaciones (TIC) en el aula y proporcionando formación a los docentes en el uso de estas tecnologías (MEN, 2015). (Hernandez Alzate, Zea Lengua, & Tebares Cano, 2016) resaltan la importancia de este tipo de recursos e indican cómo pueden generar una mayor motivación en los estudiantes; señalan que las actividades con TIC, combinadas con un buen proceso gestionado por el profesor, propician espacios pedagógicos y didácticos dinámicos que pueden favorecer el interés y la motivación de los estudiantes y, por tanto, generar un cambio en las practicas educativas usuales.

Procurar una enseñanza que atienda la exigencia citada en el párrafo anterior, implica retos mayúsculos desde los procesos de diseño y gestión por parte de los profesores de matemáticas. Nuestra experiencia durante la práctica pedagógica y como estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, devela que siguen siendo escasos o no idóneos los desarrollos de Recursos Educativos Digitales Abiertos (REDA) para ciertas temáticas, que han hecho uso de videos ilustradores o entornos de Geometría Dinámica. Además, hemos podido notar que los recursos educativos digitales usualmente recurren a (UNESCO, 2013)según la cual, la clase tradicional se traslada a medios virtuales soportados por tales plataformas, sin alguna intención de explotación de los recursos digitales con los que se cuentan, en la *web*, por ejemplo.

Esta lógica de importación pone de manifiesto que no hay un uso adecuado de las TIC en el currículo implementado, bien sea por desconocimiento de profesores, la falta de recursos tecnológicos o el subuso de los recursos disponibles (UNESCO, 2013). Nuestra propuesta apunta a subsanar la problemática citada en dos sentidos: por un lado, pretendemos diseñar una herramienta digital con rasgos de un recurso educativo virtual abierto sobre las secciones cónicas que pueda ser usado por profesores de matemáticas o aprendices, compuesto de una página web que contiene videos ilustradores que invitan a la exploración, construcciones geométricas interactivas e información idónea de los objetos matemáticos de interés; por el otro, apuntamos a que ciertos componentes del recurso, atiendan aspectos de idoneidad didáctica con el fin de ofrecer un recurso accesible, legible e interactivo que, en últimas, apoye el estudio de ciertos aspectos de dichos objetos.

Escogimos el tema de las secciones cónicas porque, usualmente, su estudio se hace a través de desarrollos teóricos-algebraicos y mediante metodologías basadas en una exposición magistral, para posteriormente recaer en la resolución de ejercicios (Valbuena-Duarte et al., 2021). En nuestro diseño, pretendemos abordar el estudio de las secciones cónicas usando la propuesta de Kuzniak y Rauscher (2014) para, con ello, tener una aproximación a estos objetos de una manera algo alternativa a la usual. En otras palabras, procuramos promover espacios de trabajo geométrico a partir de dos paradigmas geométricos (uno centrado en lo experimental y otro que se aproxima a un abordaje teórico sin procurar la formalidad exigida desde las matemáticas profesionales). Estos no se organizan en una jerarquía, más bien, sus ámbitos de trabajo son diferentes y la elección de un camino para el estudio depende de los propósitos de aprendizaje del orientador (profesor) o del paradigma del solucionador (que no tiene orientador). En cualquier caso, de alguna manera, nuestra postura nos lleva a inducir un camino en el que se privilegia primero la experimentación para luego proponer una formalización (aunque no tendría que ser así). Una descripción de los paradigmas se presenta en la Sección 0 del Marco de Referencia.

La propuesta no solo implica la elaboración del REDA panorámicamente descrito en los párrafos anteriores. También contiene sugerencias en una ruta o trayectoria de estudio que puede usar un profesor con la intención de sacar el mejor provecho del recurso diseñado. Esta trayectoria, se compone de descripciones que aluden a posibles formas de gestión por parte del profesor, que posibilite una actividad matemática que pueda llevar a cabo el estudiante.

Objetivos

Tomando en cuenta la problemática y la justificación de nuestro trabajo de grado descritos en la sección previa, proponemos los siguientes objetivos:

Objetivo general

Crear un recurso educativo digital abierto con el fin de favorecer procesos de aprendizaje alusivos a las secciones cónicas (Parábola, Hipérbola y Elipse).

Objetivos específicos

OE1. Determinar criterios de idoneidad, de orden epistémico, para el tema "secciones cónicas" que se puedan usar como insumo para el diseño de los recursos educativos digitales.

OE2. Diseñar cada uno de los elementos (videos, construcciones en GeoGebra y textos informativos), dedicados a las secciones cónicas, que tomen en cuenta los paradigmas geométricos propuestos por Kuzniak y Rauscher (2014).

OE3. Hacer una descripción del REDA diseñado indicando una posible ruta de estudio que puede emplear el profesor para sacar un mejor provecho del recurso.

CAPÍTULO 2. REFERENTES CONCEPTUALES

En este capítulo se presentan los referentes de orden didáctico y de índole matemático que sustentan el estudio desarrollado. Para contextualizar nuestra propuesta, en un primer momento presentamos las ideas de Kuzniak y Rauscher (2014) respecto a los paradigmas de trabajo geométrico presentes en la educación y los espacios de trabajo geométrico; estos sugieren organizar la información matemática aludiendo tanto a una faceta experimental o pragmática, como a una de un corte más teórico que yace inmersa en estos procesos. Luego de ello, mostramos referentes que nos fueron útiles para procurar un diseño del recurso con idoneidad. Finalmente, presentamos la información de índole matemático concerniente a los objetos geométricos (secciones cónicas) sobre los que versa nuestra propuesta, procurando explicitar el nexo de estos con los referentes descritos previamente.

2.1 Paradigmas para la geometría en la educación y espacios de trabajo

Kuzniak y Rauscher (2014) establecen un marco que permite analizar u organizar el estudio de la geometría en aulas escolares. Para ello, proponen dos nociones: paradigmas geométricos y espacios de trabajos geométricos. En seguida presentamos una breve descripción al respecto.

Con respecto a los paradigmas, vale indicar que cada uno es lo suficientemente global y coherente como para definir y estructurar la geometría como disciplina en procesos educativos y establecer los respectivos espacios de trabajo adecuados para resolver una amplia gama de problemas. Estos autores proponen que alumnos y profesores pueden adoptar implícitamente paradigmas diferentes; presentamos, enseguida, la caracterización de cada uno de los paradigmas: *Geometría natural, axiomática natural y axiomática formal.*

El *paradigma Geometría Natural* se ocupa del mundo de las prácticas (con instrumentos para abordar problemas matemáticos o Extra - matemáticos). En este paradigma, el modelo de un fenómeno y la realidad no se distinguen mucho y se permite cualquier argumento para justificar una afirmación y convencer a la audiencia; de hecho, las pruebas dinámicas y experimentales son aceptables; en suma, argumentos basados en la percepción, la experimentación y, eventualmente, la deducción es permitidos. Aparece en línea con una concepción de las matemáticas como un conjunto de herramientas que permite solventar problemas de la "vida cotidiana".

El *paradigma Geometría Axiomática-Natural*, cuyo arquetipo es la geometría euclidiana clásica (la geometría de Euclides, mejor dicho), se construye sobre un modelo que se acerca a la realidad sin fusionarse con ella. Una vez que se establecen los axiomas, los argumentos deben desarrollarse dentro del sistema de axiomas para que sean válidas. El sistema de axiomas puede quedar incompleto ya que algunos hechos que pueden ser demostrados pueden asumirse como axioma para privilegiar lo conceptual por sobre el rigor.

Las dos geometrías (paradigmas) descritas tienen estrechos vínculos con el mundo real, aunque de formas diversas; en particular, se diferencian en cuanto al tipo de validación (en la primera, se usa una rigurosidad matemática menor a la segunda) y en cuanto la naturaleza de las figuras (en la primera, se basa en una asociación con lo tangible y la figura no tiene un carácter de generalidad; en la otra, las figuras se caracterizan por sus atributos intrínsecos y tiene un carácter general).

La *Geometría Formal*, que no suele estar presente en la escolarización obligatoria, es la referencia implícita de los profesores de matemáticas que se forman en matemáticas avanzadas. En este paradigma, el sistema de axiomas es central y está desconectado de la realidad. El sistema es completo y no se preocupa por las posibles aplicaciones al mundo real. Se rompe la conexión con el espacio o entorno vivencial y esta geometría se preocupa más por problemas lógicos.

Vale decir que estos distintos paradigmas no están jerarquizados. Como se infiere de sus descripciones, sus horizontes de trabajo son diferentes y la elección de un camino hacia la solución de un problema, por ejemplo, viene determinada por su finalidad y el punto de vista del profesor. En este trabajo, nos concentramos en los dos primeros paradigmas, los cuales, tal como afirman los citados autores, son los que estarían presentes en la matemática escolar de secundaria.

Kuzniak y su colega, tomando de referencia la noción de Espacio de Trabajo Geométrico, plantean que los Paradigmas Geométricos viven en los entornos escolares de manera diferente. Para entender esto, daremos una descripción resumida de los espacios de trabajo, para luego aludir a las maneras en que tales paradigmas pueden vivir en los entornos escolares.

La geometría, y en general las matemáticas, tal y como nos las enseñan en la escuela, es una actividad humana que está inmersa en un sistema social y no puede reducirse a signos abstractos gestionados por sistemas formales. Considerar las matemáticas como una actividad social que lleva a cabo un cerebro humano puede ayudarnos a entender cómo las comunidades y los individuos adoptan un paradigma geométrico u otro en la práctica cotidiana de la disciplina. Cuando los especialistas intentan resolver algunos problemas geométricos, van y vienen entre paradigmas, pueden utilizar diagramas con diversos fines, a veces como objetos de estudio y otras, aunque solo sea temporalmente, como medio de validación de algunas propiedades.

Una nueva serie de cuestiones relativas a los usuarios de la geometría surge cuando pensamos en la geometría como trabajo humano. Este trabajo depende del papel que se otorgue a los instrumentos de visualización y dibujo en el proceso de validación, por ejemplo. También depende del modelo de propiedades y definiciones de los objetos geométricos. En última instancia, depende de la creencia y los conocimientos personales de cada alumno. Por ello, para describir la complejidad del trabajo geométrico, los autores citados introdujeron la noción de *Espacio de Trabajo Geométrico* (ETG). El ETG es un lugar organizado para garantizar el trabajo de las personas que resuelven problemas de geometría. Establece la referencia del entorno complejo (el descrito previamente) en el que actúa el solucionador de problemas. En ese sentido, un ETG solo existe a través de sus usuarios, actuales o potenciales. Su constitución depende de la forma en que los usuarios "vivan" ese entorno complejo para resolver problemas geométricos. También depende de las capacidades cognitivas de un usuario concreto, experto o principiante. La constitución de un ETG variará en función del sistema educativo (el ETG previsto), de las circunstancias escolares (el ETG implementado) y de los practicantes (el ETG personal de alumnos y profesores). En la práctica, la constitución de un ETG no depende de un único paradigma, sino más bien de la interacción entre diferentes paradigmas. Kuzniak y Rauscher (2014) identificaron tres espacios de trabajos en los que los paradigmas "viven" en entornos educativos. Cada tipo de ETG se etiquetó según la forma como los paradigmas viven en ellos:

Geometría establecida I. El estudio de configuraciones del mundo real es el objetivo de la Geometría I, donde se permite, e incluso se anima, a tomar medidas sobre una figura para resolver problemas. Algunos teoremas también pueden utilizarse como herramientas técnicas para sustituir las mediciones por cálculos: es el caso del Teorema de Pitágoras o del Teorema de Tales.

Geometría establecida II. La Geometría II se apoya en un conjunto de propiedades y experimentos proporcionados por la Geometría I y es intuitivamente útil. Sin embargo, el horizonte axiomático forma claramente parte de esta geometría, lo que la acerca a la geometría euclidiana.

Geometría fragmentada. Como en el caso anterior, la Geometría fragmentada se basa en un conjunto de propiedades y experimentos emitidos a partir de la Geometría I. Pero a diferencia del caso anterior, esta geometría se caracteriza por bloques discretos de razonamiento hipotético deductivo organizados en torno a propiedades y a algunas configuraciones geométricas básicas. Estos bloques de razonamiento se basan en unas pocas propiedades justificadas por un experimento validado por una medición o por un programa informático.

En la práctica escolar los espacios de trabajo no se basan en la utilización de un paradigma sino por el contrario en la interacción de ellos; la composición de un espacio de trabajo varía según el sistema educativo, las circunstancias escolares y los profesionales de la ciencia. Teniendo en mente esto, con el recurso diseñado, creemos que podemos promover varios de tales ETG. Más adelante, tendremos un contexto para precisarlos.

2.2 Criterios de idoneidad didáctica

En este apartado, presentaremos los referentes conceptuales utilizados para el diseño de nuestro REDA, basándonos en las propuestas de Kuzniak y Rausher (2014) sobre espacios de trabajo geométrico, y teniendo como referencia las ideas presentadas en las dos secciones anteriores. Utilizamos, además, la idea de criterios de idoneidad propuesta por Godino (2013), los cuales apoyan el diseño de un REDA adaptado a páginas web y videos educativos. Esto implica analizar cómo estos criterios pueden ser aplicados de manera efectiva y adecuada en el contexto digital.

En el ámbito educativo, las tecnologías de la información han ganado cada vez más popularidad como herramienta didáctica de aprendizaje, sin embargo, es fundamental que estos cumplan con ciertos criterios de idoneidad didáctica para asegurar su efectividad como recurso de enseñanza. Por esta razón, para el diseño de nuestro REDA se tienen en cuenta los criterios propuestos por Godino (2013), adaptados a la elaboración de una página web interactiva para mejorar la calidad de la enseñanza y el aprendizaje –en relación con el recurso web, hasta el momento se ha documentado su uso para evaluar la idoneidad de video en YouTube, por ejemplo, Beltrán-Pellicer, Giacomone, & Burgos (2018)-. Estos criterios de idoneidad se proponen desde dos enfoques, uno con el fin evaluativo y el otro para diseñar procesos de instrucción. Dada la naturaleza del estudio, los usamos en el segundo sentido, aunque sin abordar todas las facetas, componentes e indicadores; solo aquellas que están directamente relacionadas con la elaboración del recurso (epistémica, mediacional y ecológica). Esto supone la articulación coherente y sistemática de las distintas facetas implicadas en los procesos de estudio de las áreas curriculares específicas. A continuación, presentamos una idea global de los criterios que se tendrán en cuenta en nuestro trabajo.

Idoneidad epistémica. Se refiere a la coherencia y pertinencia de los contenidos educativos. Este criterio se refiere a la adecuación de los contenidos y actividades educativas en relación con el conocimiento matemático requerido. Se busca que los contenidos sean relevantes y significativos para los estudiantes (o cualquier usuario), permitiendo el desarrollo de competencias matemáticas y el aprendizaje de conceptos fundamentales.

Idoneidad mediacional. Supone el grado de disponibilidad y adecuación de los recursos didácticos y tecnológicos que promuevan la construcción de conocimientos para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje. Se refiere a la utilización de diferentes recursos y herramientas pedagógicas para facilitar el aprendizaje de los estudiantes. Esto incluye el uso de material concreto, tecnologías de la información y comunicación, actividades interactivas, entre otros. El objetivo es que los estudiantes puedan acceder al conocimiento de manera activa y participativa.

Idoneidad ecológica. Se refiere al grado en que la acción formativa es adecuada dentro del entorno; de manera más específica, se refiere a la adaptación del recurso educativo para que responda a las características de índole curricular. Este criterio considera el contexto en el que se desarrolla el proceso de enseñanza y aprendizaje, teniendo en cuenta aspectos como la cultura, el entorno social, económico y geográfico de los estudiantes. Se busca generar situaciones de aprendizaje que sean relevantes y significativas para los estudiantes, tomando en cuenta sus necesidades e intereses.

Estos criterios son fundamentales para el diseño de actividades y recursos educativos que promuevan un aprendizaje significativo y puedan adaptarse a las características y necesidades de los estudiantes. En resumen, la adaptación de los criterios de idoneidad propuestos por Godino (2013) en nuestro trabajo, implica ofrecer contenidos coherentes y pertinentes, adaptar el entorno educativo a las características educativas de los usuarios y utilizar herramientas tecnológicas que promuevan la construcción de conocimientos. De esta manera se puede mejorar la calidad de la enseñanza y el aprendizaje en entornos virtuales.

2.3 Referentes de índole matemático

En esta sección presentamos los aspectos centrales de orden matemático que atienden principalmente a las propuestas de Godino (2013) -sobre los criterios de idoneidad- y Kuzniak y Raucher (2014) -sobre ETG-. Teniendo en mente las ideas del primer autor, consideramos información sobre los objetos primarios relacionados con las curvas cónicas (definiciones, teoremas, procedimiento, tipos de situaciones y argumentos); esto dará un contexto para indicar aspectos que son referentes para los ETG presentes en el recurso diseñado. Así las cosas, de manera específica, primero presentamos los tipos de situaciones protagonistas en este Trabajo de Grado (tres usos de las cónicas) y las situaciones que darán pie a la necesidad de introducir otros objetos primarios asociados a las cónicas.

Los usos a los que hacemos referencia se enmarcan en tres situaciones diferentes, a saber: *situación de navegación o de trayectoria y ubicación de un vehículo*, en la que se suscita una definición por lugar geométrico para estas curvas; *situación artística* relativa a lo hiloramas, de la cual se suscita una caracterización de las curvas cónicas por envolventes, en la que la familia de curvas que las determinan son rectas; *situación relativa a la reflexión de la luz*, en la que se hacen ostensivas propiedades de las curvas cónicas relativas a ángulos con respecto a una recta tangente en un punto a la curva.

Con ese contexto, hemos decidido hacer una presentación en la que exponemos una descripción de los usos citados y de las situaciones problemas que proponemos en el REDA. Luego, para cada uno, indicamos los demás elementos de carácter epistémico que emergen de cada uso o situación. Esto, procurando relacionar esos usos con la información de carácter teórico que pretendemos trabajar en el REDA.

Dicho lo anterior, queremos hacer dos comentarios: (i) Vale decir que la información que presentamos en esta sección guarda relación con dos paradigmas de la geometría en el marco del Espacio de Trabajo Geometría fragmentada; esto dado que lo relativo a la caracterización de los objetos se acerca más a la geometría II, pues tomando de base un modelo para la geometría plana euclidiana, presentamos una porción del sistema que alude a tipos de cónicas. Por otro lado, lo relativo a los usos se acerca más a una geometría I, pues apunta a una geometría de tipo experimental que posibilita escenarios para la conjeturación o la intuición. (ii) Resaltamos que el orden en el que presentamos acá la información es el mismo al que queremos sugerir cuando la información esté dispuesta en el recurso diseñado; esto es, queremos inducir un abordaje en el que primero se estudien las situaciones de uso para luego profundizar en lo teórico de los objetos que allí están inmersos.

2.3.1 Situaciones de usos y objetos primarios asociados a cada situación

En esta sección, presentaremos los usos que son protagonista en el recurso digital diseñado; su tratamiento permite ilustrar un espacio de trabajo geométrico experimental que genera un referente, para luego hacer un estudio más formal de las curvas, cuyas propiedades, según el enfoque, permiten la solución de problemas específicos.

Las secciones cónicas tienen una gran variedad de aplicaciones y usos en fenómenos o situaciones que han sido de interés para la humanidad, desde artefactos simples para la refracción de la luz, hasta grandes edificaciones, representaciones artísticas y métodos que ayudan a describir el movimiento de los planetas. En este apartado se muestran algunos de sus usos: uno relativo a la trayectoria de un vehículo marítimo o aéreo, otro sobre el arte Hilorama y, finalmente, otro sobre la reflexión de la luz en espejos con curvas cónicas.

2.3.1.1 *Trayectoria y ubicación de un vehículo marítimo o aéreo*

Durante la Segunda Guerra Mundial se creó y utilizó ampliamente por navegantes civiles y militares un sistema basado en las trayectorias hiperbólicas. Este sistema, llamado Loran, es un sistema de navegación que utiliza el tiempo transcurrido entre la recepción de señales de radio transmitidas desde tres o más estaciones para determinar la posición del receptor. El nombre Loran viene de las siglas en inglés de Navegación de Largo Alcance (LOng RAnge Navigation). El principio básico del sistema Loran es el siguiente: cada estación transmisora envía una serie de pulsos codificados que identifican la estación y permiten corregir algunos errores. El receptor capta las señales de al menos dos estaciones, llamadas maestra y esclava, y mide el tiempo que tardan en llegar los pulsos desde cada una. Los vehículos, además de los receptores, cuentan con traductores, que indican la distancia que hay entre el barco y cada una de las antenas, con ayuda de tales tiempos se procura que la diferencia entre estas distancias es siempre constante, lo que alude a una curva-trayectoria de navegación en forma de hipérbola.

Para determinar una ubicación exacta hace falta una tercera antena emisora, que usando el método previamente descrito puede generar una tercera curva (hipérbola), que se interseca en un único punto con la anterior hipérbola. Esta intersección es la ubicación del barco en cuestión, de esta forma es posible ubicarse en el mapa y además trazar posibles trayectorias de navegación, como se muestra en la Figura 1.

Figura 1. Ejemplo de uso del Sistema de Loran

Fuente: Elaboración propia

Para efectos de este trabajo, nosotros nos basamos en esta idea para que, en uno de los videos diseñados, dos de sus personajes exploren trayectorias que se basan tanto en la diferencia entre tiempos como en la adición entre tiempos (que se traduce a diferencia o adición entre distancias). Esto para que aparezca dos posibles trayectorias (hiperbólicas y elípticas, respectivamente) y haya ocasión de cuestionar cuál de las dos es la “mejor” opción.

Dado este escenario, el estudio de una situación como la descrita en el marco de sistemas de trayectorias de vehículos posibilita el estudio de curvas cónicas bajo su caracterización por lugar geométrico. Así las cosas, conviene hacer una descripción al respecto.

2.3.1.1.1 Caracterización de cónicas por lugar geométrico

Se llama lugar geométrico a un conjunto de puntos en el plano o espacio que cumplen con una o varias propiedades. En seguida, presentaremos las definiciones para lugar geométrico de las curvas que se tipifican como cónicas, protagonistas para este este trabajo, a saber: elipse, hipérbola y parábola. Introducimos esta última, porque, aunque no emerge de la situación antes descrita, es un objeto cuya caracterización por lugar geométrico se usa más adelante:

Definición de parábola: Dados una recta l y un punto F fijos en el plano α, la parábola $\wp$ de foco F y directriz l es el lugar geométrico de los puntos X del plano que equidistan de F y l (Figura 2).

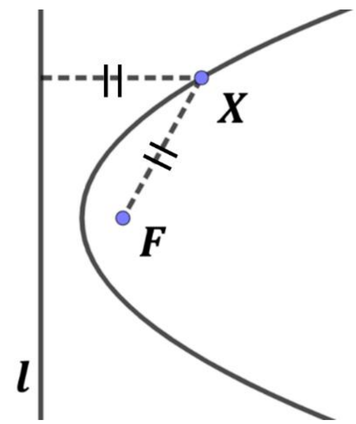


Figura 2. Representación gráfica de una parábola por lugar geométrico. En este caso, $X \in \wp$.

Fuente: Elaboración propia

Definición de Elipse: Dado dos puntos F_1 y F_2 fijos en el plano α, la elipse $\mathcal{E}$ de focos F_1 y F_2 es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que $d(F_1, X) + d(X, F_2) = k$, k un número real positivo constante (Figura 3).

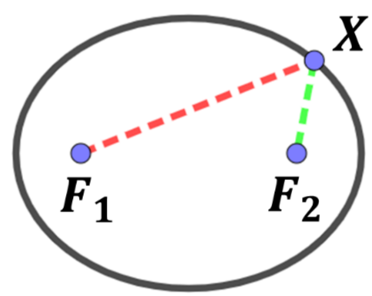


Figura 3. Representación gráfica de la elipse por lugar geométrico. En este caso, X∈ $\mathcal{E}$

Fuente: Elaboración propia

Definición de hipérbola: Dado dos puntos F_1 y F_2 fijos en el plano α, la hipérbola $\mathcal{H}$ de focos F_1 y F_2 es el lugar geométrico de todos los puntos del plano tales que, $|d(F_1, X) - d(X, F_2)| = k$, k un número real positivo constante (Figura 4).

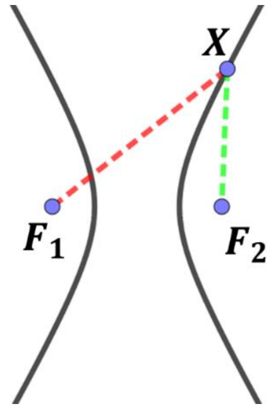


Figura 4. Representación gráfica de la hipérbola por lugar geométrico. En este caso, X∈ H.

Fuente: Elaboración propia

2.3.1.2 El arte del Hilorama

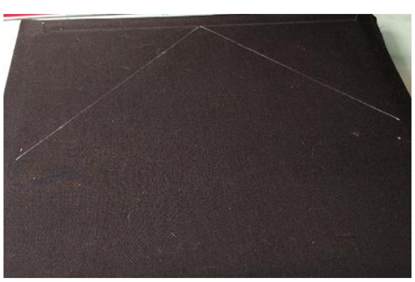
El *Hilorama* es una técnica artística que consiste en el templado de hilos de colores a través de ranuras o puntillas situadas de forma conveniente, los cuales forman composiciones de figuras geométricas como curvas con características especiales, tal como se muestra en la Figura 5, apoyándose a particularidades de la geometría euclidiana. La construcción de algunos hiloramas promueve la creatividad e innovación, pone en evidencia la relación entre el arte y las matemáticas. Con la construcción de estas obras se pretende generar diferentes maneras de abordar una clase de matemáticas desde un enfoque artístico, de modo que motive al estudiante, al desarrollar un pensamiento creativo y matemático en conjunto, desde la exploración estética y el reconocimiento de diferentes corrientes artísticas.

Figura 5. Técnica del hilorama

Nota. La imagen representa un ejemplo un hilorama en el arte de tensar hilos. por ARTESTú Stringart, 2022, (https://www.facebook.com/photo/?fbid=584296863384006&set=a.584296816717344).

Cabe resaltar que para la construcción de los hiloramas se tiene en cuenta una segunda manera de caracterización de las secciones cónicas, aquella conocida como "por envolventes". En lo que sigue, presentamos tres métodos de elaboración de hiloramas que dan lugar a sendas representaciones de curvas cónicas (parábola, elipse e hipérbola). Enseguida, exponemos una definición de curvas determinadas por envolventes, para luego presentar métodos de construcción por envolventes de las curvas referenciadas; estos se condicen con la construcción de los hiloramas que, para ese momento, se han presentado previamente.

Hilorama elemental: la construcción de este se relaciona directamente con la parábola por envolventes que se expone en la sección 0. A continuación, presentamos un modelo práctico de elaborar esta pieza artística. Para ello construimos dos segmentos perpendiculares, y ubicamos puntillas que equidisten unas de otras y por ellas tensando hilos; al segmento vertical, se le asigna una marca de arriba hacia abajo utilizando letras o números de tal forma que se establezca un orden, y, para el segmento horizontal, marcas de izquierda a derecha de la misma manera. Posteriormente, se tensa el hilo que en los extremos que se les asignó la misma marca y así hasta tensar el hilo por todas las puntillas. En la Tabla 1, se especifica la secuencia de pasos que se deben tener en cuenta para su elaboración.

Procedimiento para construir un hilorama clásico	
	*Paso 1 Elementos para la construcción:* antes de elaborar un hilorama, es importante primero considerar los objetos necesarios: • Superficie (tabla, cartón o lámina de corcho o icopor) • Hilos de color • Lápiz o bolígrafo • Trasportador para determinar el ángulo • Clavos o alfileres según sea el caso
	*Paso 2:* Sobre la superficie trazar dos segmentos perpendiculares

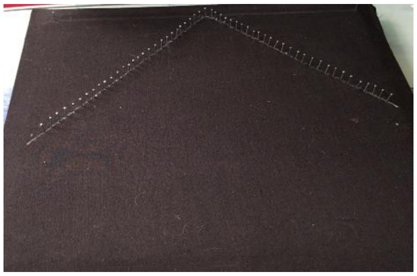
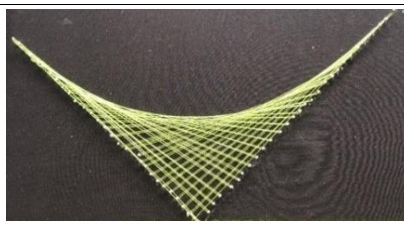
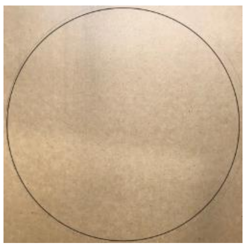
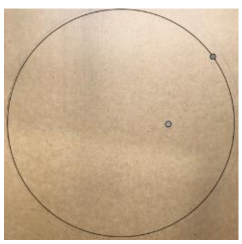
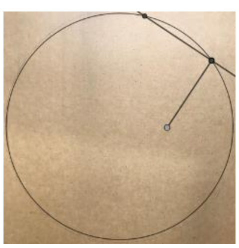
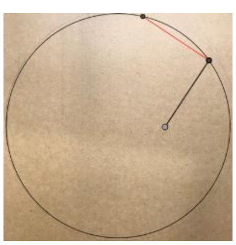
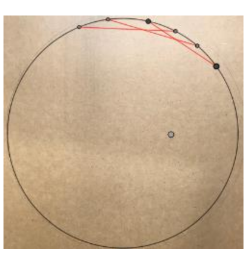
	*Paso 3:* Hacer marcas en los segmentos de tal forma que cada una de las marcas equidiste una de la otra. Sobre las marcas clavar cada una de las puntillas tal como se muestra en la imagen
	*Paso 4 Tensado del hilo:* Tensar el hilo de tal forma que pase por la primera puntilla de la izquierda y por la última de la derecha. Luego tensar el hilo por la segunda puntilla de la izquierda y por la penúltima de la derecha, seguir este procedimiento hasta pasar por cada una de las puntillas.
	*Producto final:* Luego de tensar el hilo por cada una de las puntillas se obtiene la elaboración del hilorama clásico o elemental.

Tabla 1. Procedimiento para construir un hilorama clásico

El hilorama de la Figura 6 deja ver el rastro de una elipse y en el centro una figura compuesta por parábolas previamente descritas. En cuanto a la elipse, su construcción se basa tomando puntos que pertenezcan a una circunferencia y tensando hilos en sus extremos, siguiendo los pasos que se exponen en la Tabla 2.

Figura 6. Hilorama de una composición de parábolas y una elipse

Fuente: Elaboración propia

Procedimiento para construir el hilorama de una curva elíptica	
	*Paso 1 Elementos para la construcción:* • Superficie de madera • Reglas • Compas • Clavos e hilos
	*Paso 2:* Sobre la superficie dibujar una circunferencia
	*Paso 3:* Dibujar un punto en la circunferencia y un punto en el interior de esta.
	*Paso 4:* Dibujar un segmento con extremos determinados por los puntos construidos en el paso anterior, y sobre este dibujar una perpendicular por el punto que pertenece a la circunferencia tal como se muestra en la imagen. En la intersección de la recta con la circunferencia establecemos marcas y sobre ellas clavamos puntillas.
	*Paso 5:* Tensar el hilo de color por las puntillas que se clavaron en el paso anterior.
	*Paso 6:* Repetir los pasos 4 y 5 hasta pasar por toda la circunferencia.

	*Producto final:* Luego de tensar el hilo siguiendo los pasos 4 y 5 obtenemos una curva elíptica tal como se muestra en la imagen.

Tabla 2. Procedimiento para construir el hilorama con una curva elíptica

En la Figura 7 se puede evidenciar la composición de un hilorama a partir de parábolas y una hipérbola en el centro. A continuación, mediante la Tabla 3, presentamos los pasos de construcción del hilorama que representa una hipérbola.

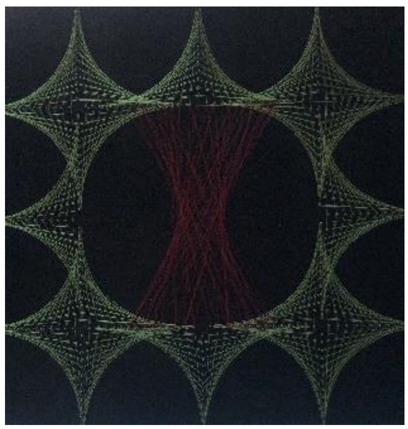
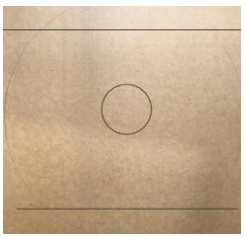
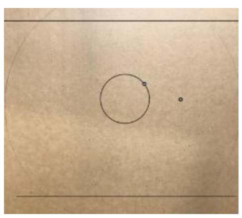
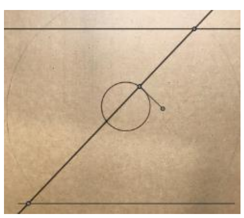
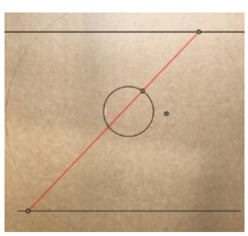
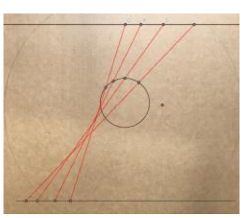


Figura 7. Hilorama de una composición de parábolas y una hipérbola

Fuente: Elaboración propia

<table>
<tr><td colspan="2">Procedimiento para construir el hilorama de una curva Hiperbólica</td></tr>
<tr><td></td><td>Paso 1 Elementos para la construcción:

Superficie de madera
Reglas
Compas
Clavos e hilos
</td></tr>
<tr><td></td><td>Paso 2: Sobre la superficie dibujar una circunferencia y dos rectas paralelas</td></tr>
<tr><td></td><td>Paso 3: Dibujar un punto en la circunferencia y un punto en el exterior de esta.</td></tr>
<tr><td></td><td>Paso 4: Dibujar un segmento determinado por los puntos construidos en el paso anterior y sobre este dibujar una perpendicular por el punto que pertenece a la circunferencia tal como se muestra en la imagen. En la intersección de la recta con las rectas paralelas establecemos marcas y sobre ellas clavamos puntillas.</td></tr>
<tr><td></td><td>Paso 5: Tensar el hilo de color por las puntillas que se clavaron en el paso anterior.</td></tr>
<tr><td></td><td>Paso 6: Repetir los pasos 4 y 5 hasta pasar por toda la circunferencia.</td></tr>
</table>

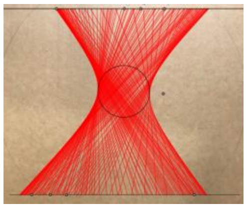
	*Producto final:* Luego de tensar el hilo siguiendo los pasos 4 y 5 obtenemos una curva hiperbólica tal como se muestra en la imagen.

Tabla 3. procedimiento de construcción de un hilorama con una curva hiperbólica.

2.3.1.2.1 Caracterización de cónicas por envolventes

A continuación, se presenta una segunda caracterización de las secciones cónicas; aquella denominada frecuentemente como envolventes por familias de curvas. Asociada a esta, se exhibe una forma de construir estas curvas a partir de rectas perpendiculares que cumplen ciertas condiciones, con base en las cuales, teniendo como horizonte el cumplimiento de las propiedades dadas en la definición por lugar geométrico, se puede justificar el resultado del procedimiento de construcción (esto es, que la curva es de algún tipo de cónica y que la recta perpendicular protagonista del procedimiento resulta ser tangente a la curva).

> *Definición de envolvente de curva:* una curva α es envolvente de una familia A de curvas, si (i) para cada punto P de α existe una curva ξ de la familia A tal que $\alpha \cap \xi = \{P\}$, y (ii) para cada curva ξ de la familia A existe un punto Q en α tal que $\alpha \cap \xi = \{Q\}$.

Como se puede apreciar en la Figura 8, la curva α con extremos A y B es envolvente a una familia de curvas A, que en este caso es el conjunto de rectas tangentes a la curva α.

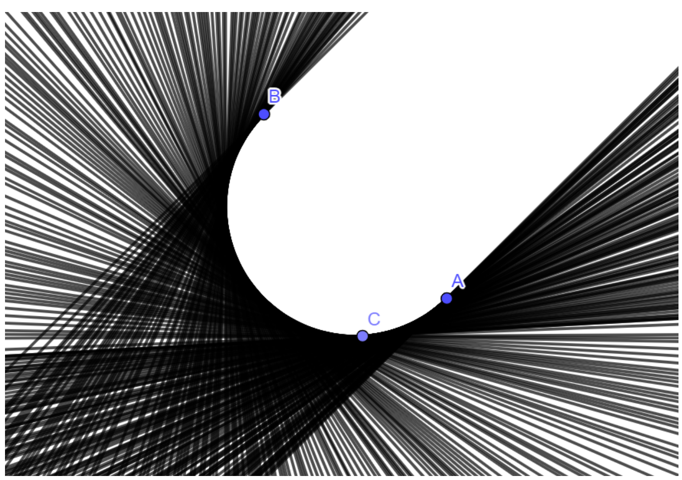


Figura 8. Representación gráfica de las rectas envolventes a una curva

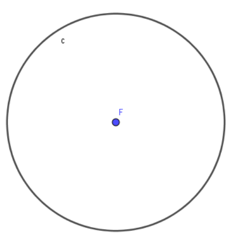
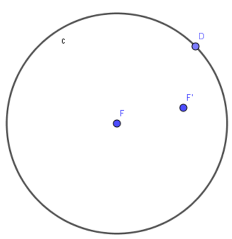
Fuente: Elaboración propia

En lo que sigue, presentaremos una caracterización por envolventes de cada uno de los tipos de cónicas citados. Dicha caracterización se basa en métodos constructivos que dan lugar a los diversos tipos de curvas. Exponemos, además, porqué cada método proporciona la curva correspondiente. Las justificaciones toman de referencia el sistema axiomático para la geometría euclidiana propuesto por Moise y Downs (1986). La presentación de estas construcciones es clave debido a que serán objeto de estudio en el recurso diseñado.

2.3.1.2.2 Construcción de curvas cónicas por envolventes

Para presentar una caracterización por envolventes de cada uno de los tipos de cónicas referenciados, primero presentamos dos métodos de construcción en GeoGebra que nos deja ver cuáles son las familias de rectas que determinan cada tipo de curva. Con base en ese procedimiento, formulamos y demostramos un teorema que alude al hecho que cada una de tales rectas resulta contener un punto de la curva y ser tangente a la curva en ese punto.

En lo que sigue, presentaremos dos métodos de construcción para determinar cada tipo de cónica (elipse, hipérbola y parábola) por envolventes, el primero (Tabla 4) necesario para justificar el segundo (Tabla 7); vale resaltar que, este último es el usual cuando se elaboran hiloramas (ver sección 0). La exposición de cada procedimiento, para cada tipo de cónica, se hace mediante sendas tablas.

Método 1 de construcción de elipse por envolventes	
	*Paso 1.* Construir una $\odot F_r$
	*Paso 2.* Construir un punto en el interior de la circunferencia y un punto que pertenezca a la circunferencia, para este caso, $D \in \odot F_r$ y $F' \in int \ \odot F_r$.

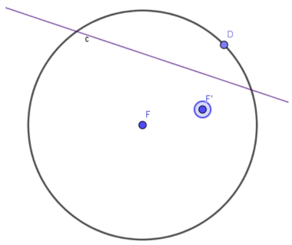
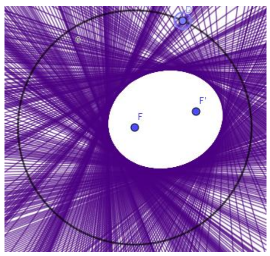
	*Paso 3.* Construir mediatriz al segmento que se genera de los puntos determinados en el paso anterior, para este caso, $\mathcal{M}_{\overline{DF\prime}}$.
	*Paso 4.* Usar la herramienta "rastro" del software (GeoGebra) y deslizar el punto D sobre la circunferencia; de esta manera, se vislumbramos todas las mediatrices que generan la curva elipse por envolvente.
Nótese que el centro de la circunferencia y el punto que se construye dentro de la misma son los focos de la elipse; a su vez, que las rectas mediatrices son tangentes a la curva.	

Tabla 4. Método 1 de construcción de una elipse por envolventes

A continuación, presentamos la justificación del método de construcción de una elipse por envolventes usando la mediatriz del $\overline{DF'}$ (Tabla 5). Esto significa, en suma, demostrar el siguiente teorema:

T. Envolvente de elipse: Dado una circunferencia con centro en F y radio FD, y un punto F', si $F' \in int \odot F_{FD}$, entonces la elipse $\mathcal{E}$ con focos F y F' es la envolvente de la familia de rectas mediatrices al $\overline{DF'}$.

La demostración del teorema la hemos dividido en dos partes: la primera (Figura 9) consiste en demostrar que hay un punto en la recta mediatriz que pertenece a la curva tipo elipse, cuyos focos son F y F'; luego, presentamos una demostración con la que validamos que la recta es tangente a la curva. Para efectos de esta demostración, caracterizamos la recta tangente a la curva en un punto como aquella que recta que es coplanar con la curva y la interseca en un único punto, dejando a todos los puntos de dicha curva en un mismo semiplano (somo conscientes que esta caracterización es válida para curvas convexas, lo cual es suficiente para este estudio).

Nota: El sistema teórico utilizado para las demostraciones se encuentra en el apartado de anexos del trabajo, el cual se condice con el sistema teórico de la geometría euclidiana.

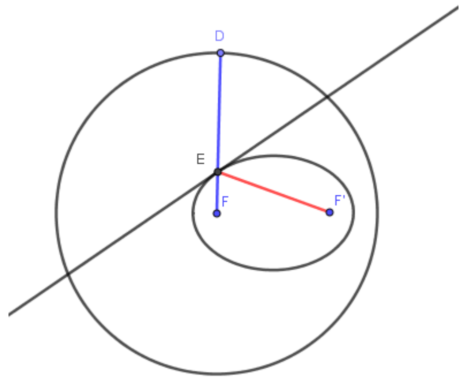


Figura 9. Representación gráfica de la recta tangente a una elipse
Fuente: Elaboración propia

	Núcleos	Pilares
1	Sean los puntos F y D, una $\odot F_{FD}$ y un punto F' tal que $F' \in int \odot F_{FD}$, en α	Dado
2	Sea el segmento $\overline{DF'}$	T. Existencia segmento (1)
3	Sea la $\mathcal{M}_{\overline{DF'}}$	T. Existencia mediatriz (2)
4	Sea r un número real positivo tal que, $r = DF$	P. Dos puntos número (1)
5	Sea el punto A tal que, $\{A\} = \mathcal{M}_{\overline{DF'}} \cap \overline{DF'}$, y A punto medio del $\overline{DF'}$.	T. Mediatriz (3)
6	$F' - A - D$	D. Punto medio (5)
7	$\mathcal{M}_{\overline{DF'}}$ determina los semiplanos δ_1 y δ_2	D. Semiplano (3)
8	$F' \in \delta_1,\ A \in \mathcal{M}_{\overline{DF'}},\ D \in \delta_2$	T. Puntos en distintos semiplanos (7)
9	$F \in \mathcal{M}_{\overline{DF'}}$	Suposición (1, 3)
10	$r = FF'$	D. Mediatriz (1, 4)
11	$F' \in \odot F_{FD}$	D. Circunferencia (1)
12	$F' \in int \odot F_{FD}$ y $F' \in \odot F_{FD}$	Conjunción (1, 11)
13	$F \notin \mathcal{M}_{\overline{DF'}}$	Principio de Reducción al Absurdo - PRA (9 – 12)
14	$F' \in \delta_1$	D. Semiplano (7)
15	Existe un punto E tal que, $\{E\} = \mathcal{M}_{\overline{DF'}} \cap \overline{DF}$	T. intersección de rectas (10)
16	$DE = EF'$	D. Mediatriz (3)

17	$DE + EF = DF$	D. Inter estancia (16)
18	$EF' + EF = DF$	Principio de sustitución (16, 17)
19	$EF' + EF = r$	Principio de sustitución (4, 18)
20	Debido a que r es constante, $EF' + EF$ también es constante.	Principio de sustitución (4, 19)
21	El lugar geométrico del punto E es una elipse ε	D. de elipse (20)

Tabla 5. Justificación del método para construir una elipse por envolventes

A continuación, se demostrará que la mediatriz del $\overline{DF}$ es tangente a la curva. En la Tabla 6, también se puede apreciar una ilustración grafica de la negación usada en la demostración (ver Figura 10).

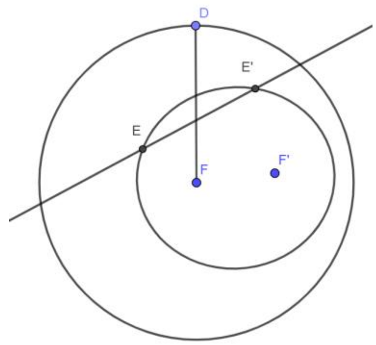


Figura 10. Recta secante a la curva (negación de la tesis)

Fuente: Elaboración propia

1	Existe un punto $E' \neq E$ tal que, E' pertenece a la $\mathcal{M}_{\overline{DF'}}$, y a la elipse ε	Hipótesis Negación de la Tesis
2	$FD < FE' + E'D$	T. Desigualdad triangular (1)
3	$r < FE' + E'D$	D. Circunferencia (2)
4	$FE' + E'F' = r$	D. Elipse (2, 3)
5	$F'E' = E'D$	D. Mediatriz (1)
6	$FE' + E'D = r$	Principio de sustitución (4, 5)
7	$r < FE' + E'D$ y $FE' + E'D = r$	Conjunción [contradicción] (3, 6)
8	No existe un punto $E' \neq E$ tal que, E' pertenece a la $\mathcal{M}_{\overline{DF'}}$ y a la elipse ε.	PRA

9	Luego $\mathcal{M}_{\overline{DF'}}$ es tangente a la elipse ε, por el punto E	Caracterización de tangente a una curva cerrada

Tabla 6. Justificación de la recta tangente a la curva

En suma, como el radio de la $\odot\ F_{FD}$ se mantiene constante, entonces $EF' + EF = r, r$ una constante al ser el radio de la circunferencia inicial. Por definición de Elipse, el lugar geométrico del punto E, determina una Elipse; además, $\mathcal{M}_{\overline{DF'}}$ es tangente a la elipse por E.

A continuación, en la Tabla 7 se presenta el segundo método (el cual, como indicamos antes, es el que se usa comúnmente para elaborar hiloramas). Enseguida mostramos la equivalencia entre este método con el previamente descrito (basado en la mediatriz).

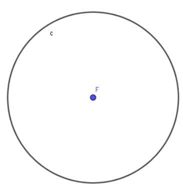
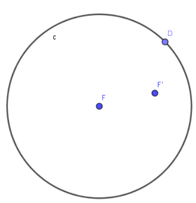
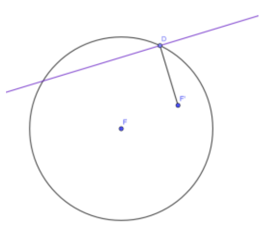
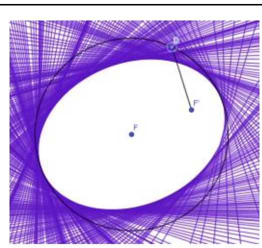
Método 2 de construcción de elipse por envolventes	
	*Paso 1.* Construir una $\odot\ F_r$.
	*Paso 2.* Construir un punto en el interior de la circunferencia y un punto que pertenezca a la circunferencia, para este caso, $D \in \odot\ F_r$ y $F' \in int\ \odot\ F_r$.
	*Paso 3.* Construir la recta perpendicular al segmento $\overline{F'D}$ que se genera de los puntos determinados en el paso anterior por el punto D.
	*Paso 4.* Ahora haciendo usa de la herramienta "rastro" del software (GeoGebra) deslizamos el punto D sobre la circunferencia, de esta manera vislumbramos todas las rectas perpendiculares que generan la envolvente.
Nótese que en este caso el centro de la circunferencia no es el foco, pero el punto que se construye dentro de la misma si se condice con uno de los focos de la elipse y a su vez las rectas perpendiculares son tangentes a la curva.	

Tabla 7. Método 2 de construcción de una elipse por envolventes

A continuación, se presenta en la Tabla 8 la equivalencia entre el método 1 de envolventes a una elipse con el uso de la mediatriz y el método 2 de construcción de la recta perpendicular al segmento que se determina con un punto en el interior de una circunferencia con cada uno de los puntos que pertenecen a esta, también se representa gráficamente esta equivalencia en la Figura 11.

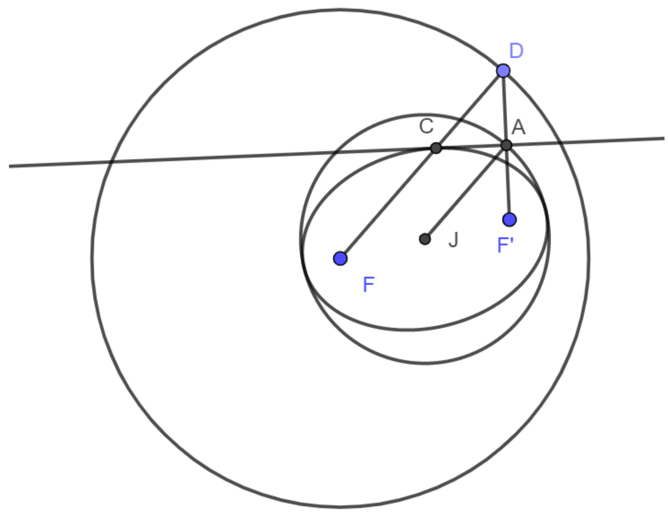


Figura 11. Representación gráfica de la equivalencia entre el método de construcción 1 con el 2

Fuente: Elaboración propia

	Núcleos	Pilares
1.	Sean los puntos F y D, una circunferencia $\odot F_{FD}$ y un punto F' tal que $F' \in int \odot F_{FD}$, en α	Dado
2.	Sea el segmento $\overline{DF'}$	T. Existencia segmento (1)
3.	Sea r un número real positivo tal que, $r = FD$	Pro. Reales (2)
4.	Sea la mediatriz $\mathcal{M}_{\overline{DF'}}$	T. Existencia mediatriz (2)
5.	Sea el punto A tal que, $\{A\} = \mathcal{M}_{\overline{DF'}} \cap \overline{DF'}$, y A punto medio del $\overline{DF'}$.	T. Mediatriz (4)
6.	$F' - A - D$	D. Punto medio (5)
7.	Sea el punto J tal que, J es punto medio de los puntos $\overline{FF'}$	T. Existencia del punto medio (1)
8.	Sean los triángulos $\triangle FDF'$ y $\triangle JAF'$	D. Triángulo (4 – 7)
9.	$FF' = 2JF'$	T. Punto medio (7)
10.	$F'D = 2F'A$	D. Mediatriz (5)
11.	$m\angle FF'D = m\angle JF'A$	D. Ángulos congruentes (5, 9, 10)
12.	$\triangle FDF' \cong \triangle JAF'$	P. LAL (9 – 11)
13.	$\overline{FD} \cong \overline{JA}$	Conjunción (12)

14.	$\overline{JA}$ es contante	D. Radio de circunferencia (3, 12, 13)
15.	Sea la $\odot J_{JA}$	D. Circunferencia (14)

Tabla 8. Justificación de la equivalencia entre métodos

Hipérbola por envolvente: Para determinar la hipérbola como envolvente de una familia de rectas el procedimiento es análogo al de la elipse, solo que en este caso el punto que se construye queda afuera de la circunferencia, donde el centro y el punto, al igual que la elipse, son los focos de la curva y de igual manera la recta mediatriz, es tangente a la hipérbola (ver Tabla 9 y Tabla 10).

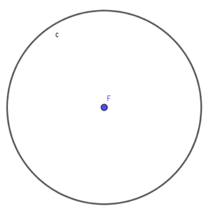
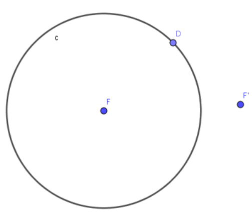
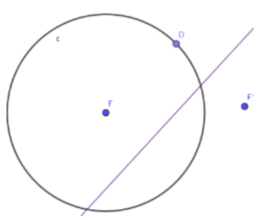
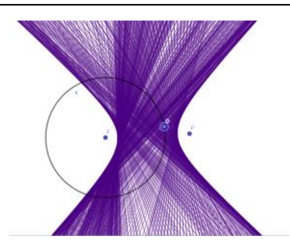
Método 1 de construcción de la hipérbola por envolventes	
	*Paso 1.* Construir una $\odot F_r$
	*Paso 2.* Construir un punto en el exterior de la circunferencia y un punto que pertenezca a la circunferencia $D \in \odot F_r$ $F' \in ext \odot F_r$
	*Paso 3.* Construir mediatriz al segmento que se genera de los puntos determinados en el paso anterior. $\mathcal{M}_{DF'}$
	*Paso 4.* Ahora haciendo usa de la herramienta “rastro” del software (GeoGebra) deslizamos el punto D sobre la circunferencia, de esta manera vislumbramos todas las rectas mediatrices que generan la envolvente.
Nótese que el centro de la circunferencia y el punto que se construye en el exterior de esta son los focos de la hipérbola y a su vez las rectas mediatrices son tangentes a la curva.	

Tabla 9. Método 1 de construcción de la hipérbola por envolventes

Del método anterior, se puede enunciar el siguiente teorema, el cual se demuestra de manera análoga al teorema previo; la diferencia en las demostraciones radica en tener como dato que el punto F' pertenece al exterior de la $\odot\ F_{FD}$, lo cual implica considerar una interestancia diferente ver Figura 12.

T. Envolvente de hipérbola: Dado $\odot\ F_{FD}$, y un punto F' en un plano α, si $F' \in ext \odot F_{FD}$, entonces la hipérbola $\mathcal{H}$ con focos F y F' es la envolvente de la familia de rectas mediatrices al $\overline{DF'}$.

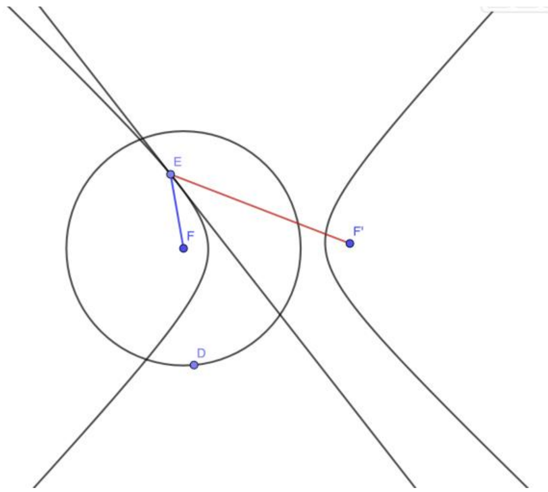
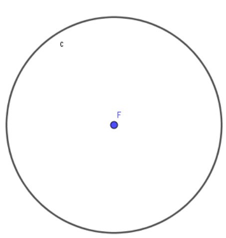


Figura 12. Representación gráfica T. Envolvente de Hipérbola

A continuación, en la Tabla 10. Método 2 de construcción Hipérbola por envolventes, se presenta el segundo método para la hipérbola (el cual, como indicamos antes, es el que se usa comúnmente para elaborar hiloramas).

Método 2 de construcción de la hipérbola por envolventes	
	*Paso 1.* Construir una $\odot\ F_r$

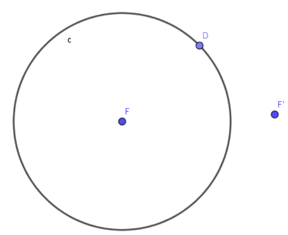
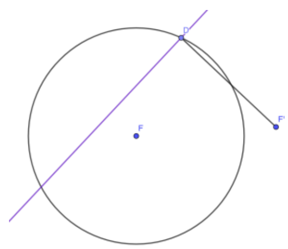
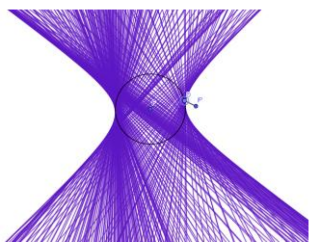
	*Paso 2.* Construir un punto en el exterior de la circunferencia y un punto que pertenezca a la circunferencia $D \in \odot F_r$ $F' \in ext \odot F_r$
	*Paso 3.* Construir la recta perpendicular al segmento $\overline{F'D}$ que se genera de los puntos determinados en el paso anterior por el punto D.
	*Paso 4.* Ahora haciendo usa de la herramienta "rastro" del software (GeoGebra) deslizamos el punto D sobre la circunferencia, de esta manera vislumbramos todas las rectas perpendiculares que generan la envolvente.
Nótese que en este caso el centro de la circunferencia no es el foco, pero el punto que se construye al exterior de la circunferencia si se condice con uno de los focos de la hipérbola y a su vez las rectas perpendiculares son tangentes a la curva.	

Tabla 10. Método 2 de construcción Hipérbola por envolventes

A continuación, presentaremos dos métodos de construir una parábola por envolventes, donde el segundo método se condice con el presentado en la sección 0 para la elaboración de hiloramas.

Parábola por envolvente: Para determinar la parábola como envolvente de una familia de rectas el procedimiento es similar a los que se han presentado anteriormente, puesto que es la familia de rectas mediatrices, las que determinan el lugar geométrico y esta a su vez es tangente a la curva. El primer método de construcción se presenta en la Tabla 11.

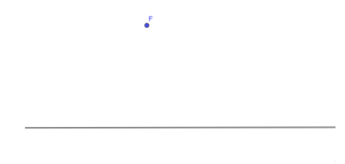
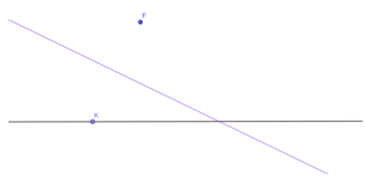
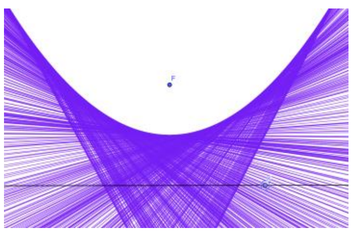
Método 1 de construcción de parábola por envolventes	
	*Paso 1.* Construir una recta l y un Punto F que no pertenezca a la recta.
	*Paso 2.* Construir un punto que pertenezca a la recta l y luego se construye la mediatriz al segmento $\overline{FK}$
	*Paso 3.* Ahora haciendo uso de la herramienta "rastro" del software (GeoGebra) deslizamos el punto K sobre la recta l de esta manera generamos todas las mediatrices del punto F y los puntos de la recta.
Nótese que el Punto F es el Foco de la parábola y la recta l es la directriz de esta a su vez las rectas mediatrices son tangentes a la curva.	

Tabla 11. Método 1 de construcción de parábola por envolventes

En la Tabla 12 presentamos la demostración del teorema Envolvente de una parábola, mediante el cual se muestra que la curva $\wp$ es envolvente de la familia de rectas que es mediatriz del segmento $\overline{AF}$ acompañada de su representación gráfica (Figura 13).

T. Envolvente de Parábola: Dado una recta l y un punto F en un plano α, si $F \notin l$, entonces la parábola $\wp$ con foco F es la envolvente de la familia de rectas mediatrices al $\overline{AF}$.

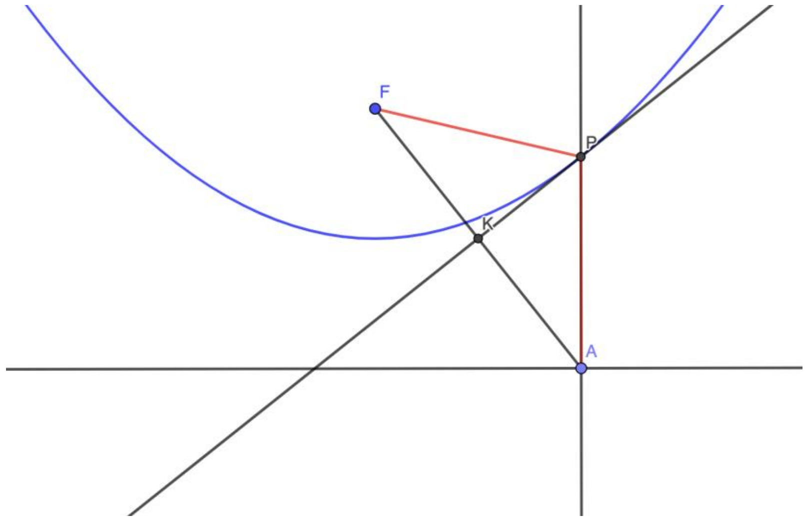


Figura 13. Justificación parábola por envolventes

La demostración del teorema la hemos dividido en dos partes: la primera consiste en demostrar que hay un punto en la recta mediatriz que pertenece a la curva (parábola) Tabla 12, donde el foco es F; luego, presentamos una demostración con la que validamos que la recta es tangente a la parábola.

	Núcleos	Pilares
1	Sea la recta l y F en un plano α, si $F \notin l$	Dado
2	Sea el segmento $\overline{AF}$	T. Existencia segmento (1)
3	Sea la mediatriz $\mathcal{M}_{\overline{AF}}$	T. Existencia mediatriz (2)
4	Sea el punto K tal que, $\{K\} = \mathcal{M}_{\overline{AF}} \cap \overline{AF}$, y K punto medio del $\overline{AF}$.	T. Mediatriz (3)
5	$FK = KA$	D. Mediatriz (4)
6	Sea la recta $m \perp l$ por A	T. Perpendicular por punto interno (2)
7	$\mathcal{M}_{\overline{AF}} \parallel m$	Suposición (3, 6)
8	$\mathcal{M}_{\overline{AF}} \perp l$	T. Paralelas – Perpendicular (3, 6)
9	Sea la $\overleftrightarrow{AF}$ y $\mathcal{M}_{\overline{AF}} \perp \overleftrightarrow{AF}$	T. Recta – rayo – segmento (2) T. Mediatriz – perpendicular (3)

10	$\mathcal{M}_{\overline{AF}} \perp \overleftrightarrow{AF}$ por A $\mathcal{M}_{\overline{AF}} \perp l$ por A	T. Existencia perpendicular por punto externo (8, 9)
11	Por lo tanto, la recta l y la recta $\overleftrightarrow{AF}$ son la misma y el punto F pertenece a l	T. Existencia perpendicular por punto externo (unicidad) (8, 9)
12	El punto F no pertenece a l y el punto F pertenece a l	Conjunción (1 y 12)
13	$\mathcal{M}_{\overline{AF}} \nparallel m$	P.R.A (8 – 13)
14	Existe el punto P tal que $P = \mathcal{M}_{\overline{AF}} \cap m$	D. Rectas paralelas (14)
15	Sean los triángulos $\triangle KFP$ y $\triangle KAP$	D. Triángulo (4, 12, 14)
16	$\angle KFP$ y $\angle KAP$ rectos	T. Mediatriz – Perpendicular (9, 14, 15)
17	$KP = KP$	Pro. Reflexiva
18	$\triangle KFP \cong \triangle KAP$	T. LAL (15, 16, 17)
19	$AP = FP$	D. Congruencia de triángulos (18)
20	El lugar geométrico del punto P es una parábola $\wp$	D. Parábola (19)

Tabla 12. Demostración T. Envolvente de parábola

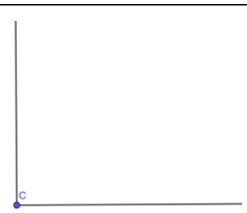
A continuación, en la Tabla 13 se demostrará que la mediatriz del $\overline{FA}$ es tangente a la curva $\wp$, por P.

	Núcleos	Pilares
1	$\mathcal{M}_{\overline{AF}}$ es secante a $\wp$	Negación de la tesis
2	Sean P y P_1 puntos tales que $\{P, P_1\} = \wp \cap \mathcal{M}_{\overline{AF}}$ $P \neq P_1$	D. Recta secante (1)
3	$P_1 \in \wp \wedge P_1 \in \mathcal{M}_{\overline{AF}}$	D. Intersección de conjuntos (1, 2)
4	$P_1F = P_1A$	D. Mediatriz (2)
5	$P_1F = d(P_1, l)$	D. Parábola (1)

6	Sea k recta tal que $k \perp l\ por\ P_1$	T. Recta perpendicular punto externo (2, 5)
7	Sea A_1 punto, tal que $A_1 = k \cap l$	T. Intersección de rectas (6)
8	$A_1 \in\ k\ \wedge\ A_1 \in l$	D. Intersección de conjuntos (7)
9	$d(P_1, l) = P_1A_1$	D. Distancia de un punto a una recta (6 – 8)
10	$P_1F = P_1A_1$	Principio de sustitución (5, 9)
11	$P_1A = P_1A_1$	Principio de sustitución (4, 10)
12	Sea $\Delta\ P_1A_1A$	D. Triángulo (2, 4, 7)
13	$\overline{P_1A}\ \cong\ \overline{P_1A_1}$	D. Segmentos congruentes (10)
14	El $\Delta\ P_1A_1A$ es isósceles	D. Triángulo isósceles (13)
15	$\angle P_1AA_1 \cong \angle P_1A_1A$	T. Triángulo isósceles (14)
16	$\angle P_1A_1A$ es recto	D. Perpendicularidad (15)
17	$\angle P_1AA_1$ es recto	T. Rectos congruentes (15)
18	$\mathcal{M}_{\overline{AF}}$ es tangente a $\wp$, por P	PRA (Principio de reducción al absurdo) (14,16,17) Para este caso, se tendría un triángulo con dos ángulos rectos, lo que es un absurdo.

Tabla 13. Demostración de la recta tangente a la parábola

A continuación, se presenta el método 2 de construcción de parábola por envolventes (Tabla 14) el cual es usual para construir Hiloramas.

Método 2 de construcción de parábola por envolventes	
	*Paso 1.* Construir dos rayos perpendiculares entre sí, y el punto C como intersección de los rayos.

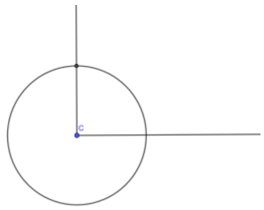
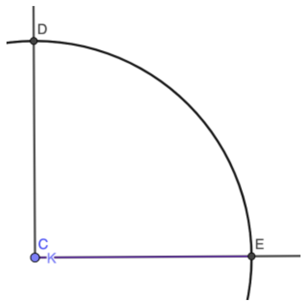
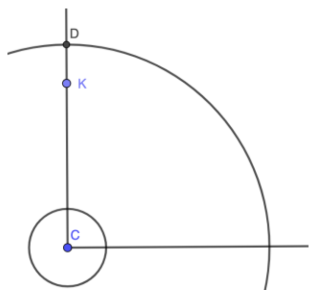
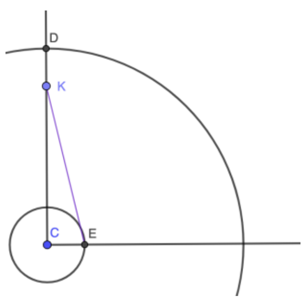
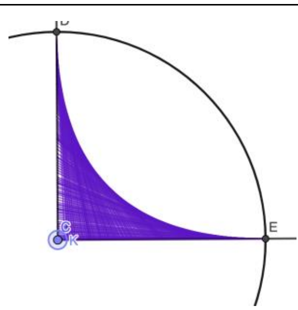
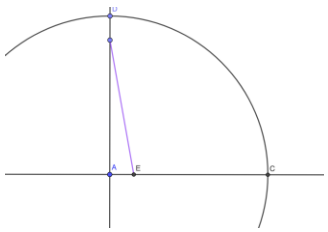
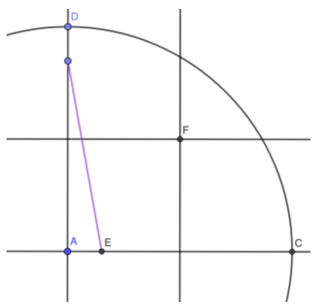
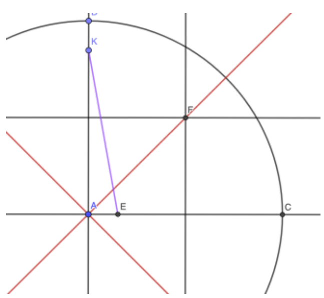
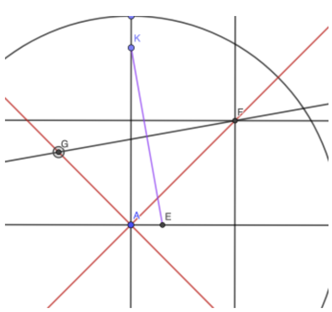
	*Paso 2.* Construir una $\odot\, C_r$
	*Paso 3.* Construir los puntos de intersección de la circunferencia con los rayos.
	*Paso 4.* Construir un punto K en uno de los rayos, después construir la $\odot\, C_{DK}$.
	*Paso 5.* Construir el punto E como intersección de la circunferencia con centro en C y radio DK con el rayo horizontal.
	*Paso 6.* Ahora haciendo usa de la herramienta "rastro" del software (GeoGebra) deslizamos el punto K sobre el rayo, de esta manera generamos la parábola por envolventes.
Nótese que para este método de construcción no es posible determinar el foco ni la directriz de la parábola para ello es necesario hacer algunos pasos adicionales.	

Tabla 14. Construcción de una parábola por envolventes

A continuación, se presenta un método de construcción que deja ver la equivalencia entre el método 1 de envolventes a una Parábola con el uso de la mediatriz y el método 2 que es usual para construir hiloramas. Lo anteriormente dicho se presenta en la Tabla 15.

Equivalencia entre métodos de construcción de la parábola por envolventes	
	*Paso 1.* Tomaremos como punto de partida el método 2 de parábola por envolventes.
	*Paso 2.* Se construyen las mediatrices de los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$ y F como intersección de las dos rectas. Nótese que el punto F se condice con el punto F de la construcción del metodo1 de la construcción de parábola por envolventes.
	*Paso 3.* Construir las bisectrices a los ángulos que determinan las rectas que contienen los rayos perpendiculares. Nótese que las bisectrices cumplen ciertas características una es la Directriz de la parábola y la otra su eje de simetría.
	*Paso 4.* Construir la recta perpendicular al segmento $\overline{KE}$ por F y G como punto de intersección de una de las bisectrices.

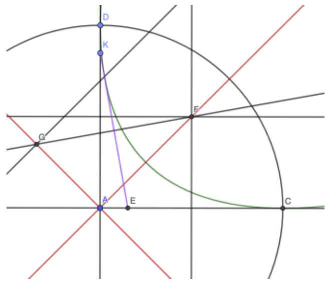
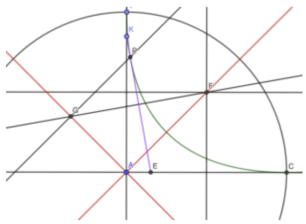
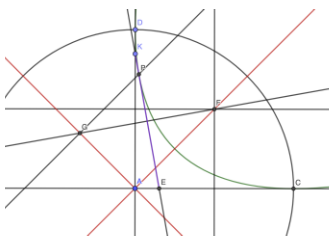
	*Paso 5.* Construir la perpendicular a bisectriz por el punto G.
	*Paso 6.* Construir P como punto de intersección de la recta perpendicular del paso anterior con el $\overline{KE}$.
	*Paso 7.* Por último, construimos $\overleftrightarrow{KE}$. Nótese que la $\overleftrightarrow{KE}$ resulta ser la mediatriz del $\overline{GF}$ lo que se condice con el primer método presentado para determinar una parábola por envolventes.
Al desarrollar cada uno de los pasos, anteriormente presentados se logra vislumbrar la equivalencia entre los dos métodos de construir una parábola por envolventes.	

Tabla 15. Equivalencia entre métodos de construir una parábola por envolventes

2.3.1.3 Comportamiento de los rayos de luz en espejos curvos

En esta sección describiremos el comportamiento de los rayos de luz reflejados según la curva que tenga el espejo en el que inciden y según la dirección de los rayos de luz incidentes.

Iniciamos recordando que, todo rayo de luz que incida con un grado de inclinación θ en un espejo plano, tendrá un rayo reflejado con el mismo ángulo de inclinación θ con respecto a la normal, siendo la normal una recta perpendicular al espejo que pasa por el punto de intersección entre el rayo de luz incidente y el espejo (Figura 14).

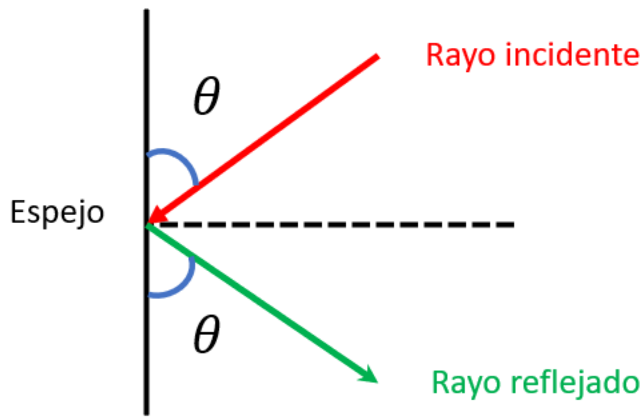
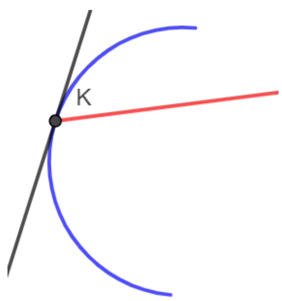
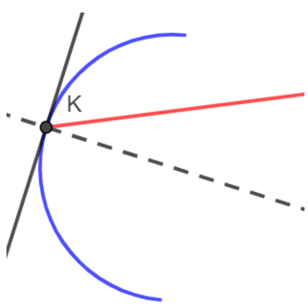


Figura 14. Representación gráfica del rayo de luz incidente en un espejo plano

Fuente: Elaboración propia

Forma de ilustrar la dirección del rayo de luz reflejado en un espejo curvo	
	*Paso 1:* se traza una recta tangente a la curva por el punto de intersección (K) entre el rayo incidente y el espejo curvo.
	*Paso 2:* se traza una recta (la normal) perpendicular a la tangente por el punto que tiene en común con la curva, es decir, K.

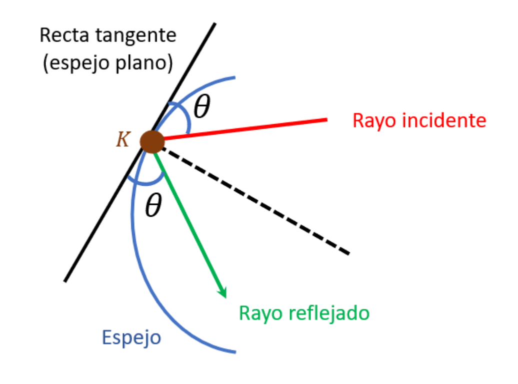
	*Paso 3:* se copia el ángulo de inclinación que tiene el rayo incidente con respecto a la normal de manera simétrica, con la normal como eje de simetría.

Tabla 16. Procedimiento para predecir la dirección de un rayo de luz reflejado en un espejo curvo

La construcción presentada en la Tabla 16, deja ver una relación entre los ángulos que determina la tangente a la curva en el punto K y los rayos incidente y reflejado. En lo que sigue, describiremos algunas propiedades de los rayos de reflexión cuando los espejos usados son de forma cónica procurando precisar propiedades con aire de familia a la ilustrada.

Espejo en forma de parábola: En la parte cóncava de un espejo con curva parabólica, los rayos de luz incidentes deben ser paralelos al eje central de la parábola, para que los rayos reflejados converjan en un único punto K, siendo este el foco de la parábola, como se muestra en la Figura 15.

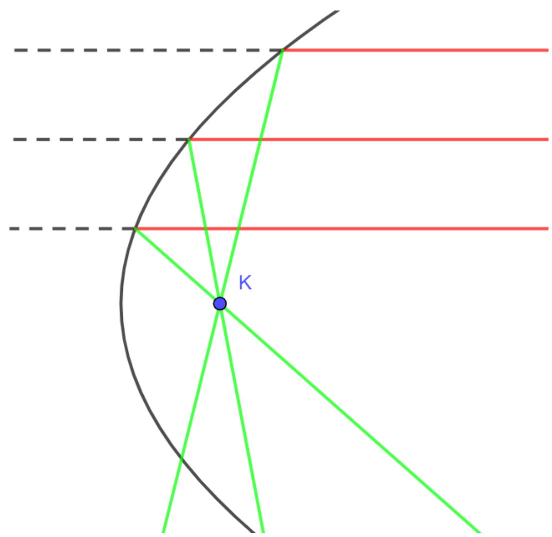


Figura 15. Representación gráfica del rayo de luz incidente en un espejo parabólico cóncavo

Fuente: Elaboración propia

De manera recíproca, un rayo de luz que incide en el espejo con curva parabólica, que además pasa por el foco, tendrá un rayo reflejado con dirección paralela al eje de la parábola.

En la parte convexa del espejo, los rayos incidentes con dirección paralela al eje central de la parábola tendrán como consecuencia rayos reflejados sin ninguna dirección aparente, pero estarán contenidos en rectas que contienen por el foco de la parábola k como se ve en la Figura 16.

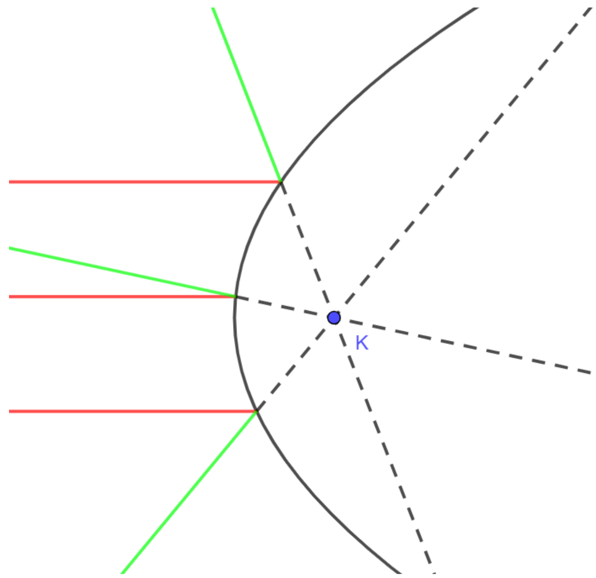


Figura 16. Representación gráfica del rayo de luz incidente en un espejo parabólico convexo

Fuente: Elaboración propia

A continuación, presentamos en la Tabla 17 la demostración de las propiedades previamente exhibidas de un espejo parabólico en la Figura 16:

T. Reflexión de luz en espejo parabólico: Dada una parábola p con directriz i y foco F, si una recta h incide en la curva en un punto K, interseca a la directriz en un punto C y además es paralela al eje de simetría s, entonces su rayo reflejado $\overrightarrow{KF}$ forma un ángulo con la recta tangente de tal forma que $\angle FKH \cong \angle DKG$ (Figura 17)

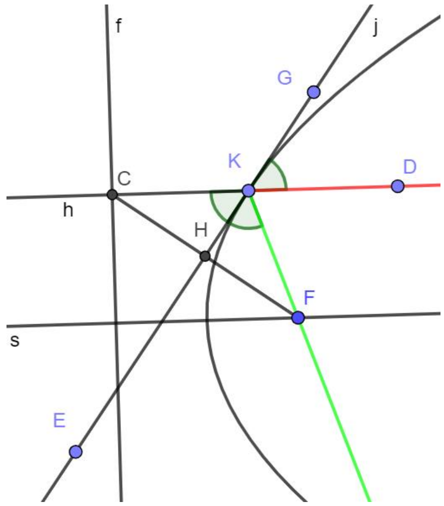


Figura 17. Representación gráfica "justificación rayo incidente en espejo parabólico”

Fuente: Elaboración propia

	Núcleos	Pilares
1	Sea la parábola p con directriz i y una recta h paralela al eje de simetría s. La recta h interseca a la curva en un único punto K y a la directriz en un único punto C	Dado
2	Sea la recta j tangente a la curva por el punto K, el punto D que pertenece a la recta h tal que C$-K-D$ y los puntos E y G que pertenecen a la recta j tal que $E-K-G$	T. Existencia de la tangente (1) T. Recta infinitos puntos (1)
3	Sea el ángulo $\angle DKG$	D. Ángulo (2)
4	Sea el rayo $\overrightarrow{KF}$	T. Existencia del rayo (2)
5	La recta j es mediatriz de los puntos C y F	Ver anteriores demostraciones (*T. Envolvente de Parábola*, *T. Envolvente de elipse*)
6	Sea el punto H tal que $H = j \cap \overline{CF}$	D. Mediatriz (5)
7	Sean $\angle DKG \cong \angle CKH$	T. Ángulos opuestos por el vértice (2, 3)

8	$\overline{CK} \cong \overline{KF}$ $\overline{CH} \cong \overline{HF}$	D. Mediatriz (5, 6)
9	$\triangle CKH \cong \triangle FKH$	T. LLL (7, 8)
10	$\angle CKH \cong \angle FKH$	D. Congruencia de triángulos (9)
11	$\angle FKH \cong \angle DKG$	Transitividad (5 y 8)

Tabla 17. Demostración del comportamiento de un rayo de luz reflejado en un espejo parabólico

Espejo elíptico: En la parte cóncava de un espejo con curva elíptica los rayos incidentes que pasen por uno de los focos serán reflejados en el otro foco (Figura 18).

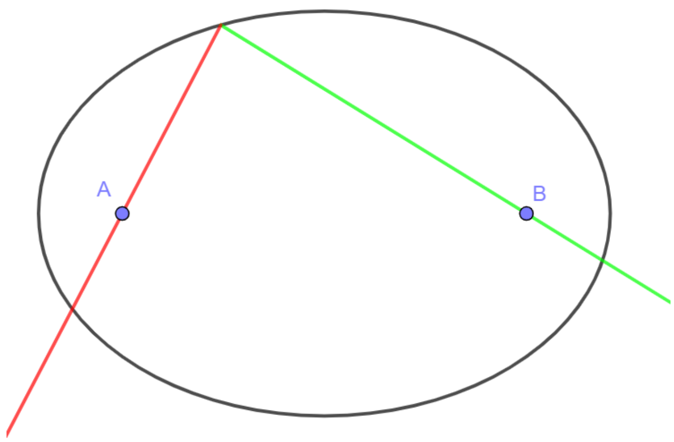


Figura 18. Representación gráfica del rayo de luz incidente en un espejo elíptico cóncavo

Fuente: Elaboración propia

Además, si se cuenta con varios rayos incidentes, paralelos entre sí y equidistantes a un rayo central que contenga el centro de la elipse, los rayos reflejados presentarán una aproximación de concurrencia, es decir que convergerán no de manera exacta, pero sí de manera aproximada como se ve en la Figura 19.

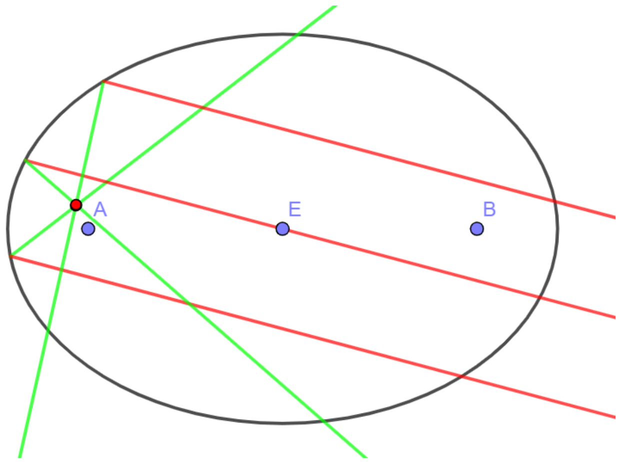


Figura 19. Representación gráfica de rayos de luz incidentes en un espejo elíptico cóncavo

Fuente: Elaboración propia

En la parte convexa de un espejo con curva elíptica, los rayos de luz incidentes sin dirección alguna causan rayos reflejados sin dirección especifica, a excepción de un rayo de luz incidente con dirección a un foco (punto B), este causará un rayo reflejado con dirección opuesta al otro foco y contenido en la recta que pasa por el mismo (punto A) como se ve en la Figura 20.

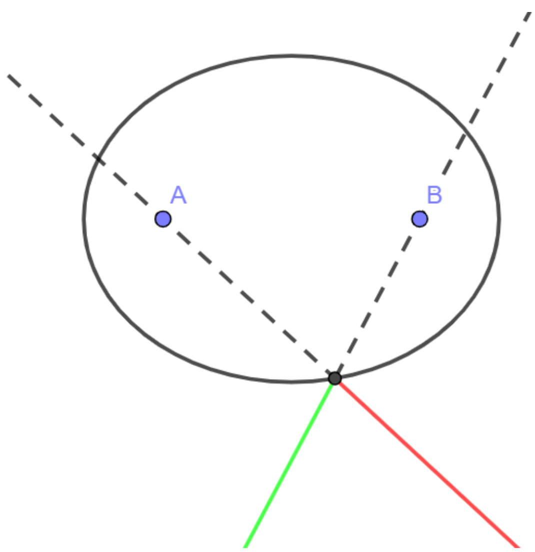


Figura 20. Representación gráfica del rayo de luz incidente en un espejo elíptico convexo

Fuente: Elaboración propia

A continuación, presentamos la demostración de las propiedades previamente exhibidas en la Figura 19 y Figura 20, en la Tabla 18 acompañada de una representación gráfica (Figura 21).

T. Reflexión de luz en espejo elíptico: Dada una elipse ε con focos F_1 y F_2, si una recta h incide en la curva en un punto K y contiene el foco F_1, y su rayo reflejado contiene el foco F_2 con los puntos, entonces el ángulo que forman el rayo incidente y la tangente es congruente con el que forman la recta tangente y el rayo reflejado (ver Figura 21).

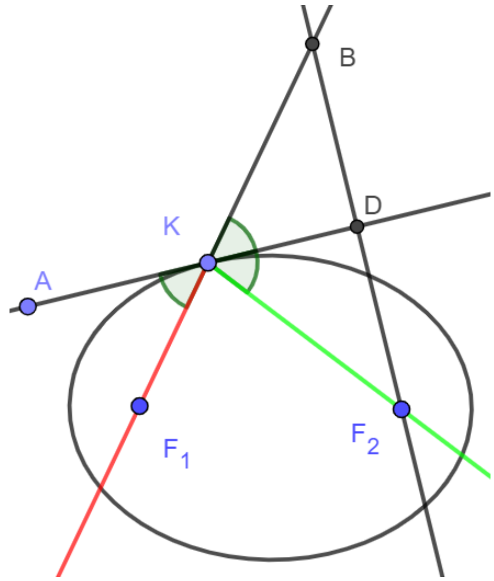


Figura 21. Representación gráfica "justificación rayo incidente en espejo elíptico”

Fuente: Elaboración propia

	Núcleos	Pilares
1	Sea la elipse ε con focos F_1 y F_2 y una recta h que interseca a la curva en un punto K, el punto F_1 pertenece a la recta h	Dado
2	Sea la recta j tangente a la curva por el punto K La recta j es mediatriz de los puntos F_2 y B, con el punto B que pertenece a la reca h	T. Envolvente de elipse (Tablas 5 y 6) Estas afirmaciones devienen del primer método de construcción presentado para la Elipse
3	Sea la recta i tal que contiene los puntos F_2 y B	P. Dos puntos recta (2)
4	Sea el punto D tal que $j \cap i = D$	P. Separación del plano (3)
5	Sea el punto A, tal que $A - K - D$	T. Punto medio – punto al lado (2, 4)
6	$\overline{F_2D} \cong \overline{DB}$ $\angle KDB$ y $\angle F_2DK$ son rectos	D. Mediatriz (2)

7	$\triangle KDB \cong \triangle KDF_2$	P. LAL (5, 6)
8	$\angle DKB \cong \angle DKF_2$	D. Congruencia de triángulos (7)
9	$\angle AKF_1 \cong \angle DKB$	T. Ángulos opuestos por el vértice (5, 8)
10	$\angle AKF_1 \cong \angle DKF_2$	Propiedad transitiva (8, 9)

Tabla 18. Demostración del comportamiento de un rayo de luz reflejado en un espejo elíptico

Espejo hiperbólico: En la parte cóncava de un espejo con curva hiperbólica, los rayos incidentes con dirección paralela al eje central generan rayos reflejados sin ninguna dirección en específico (no pasan por el foco) como se ve en la Figura 22.

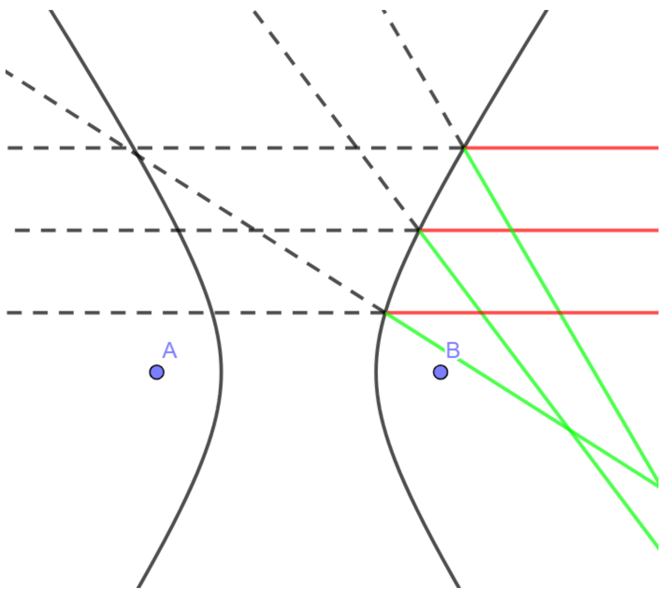


Figura 22. Representación gráfica de rayos de luz incidentes en un espejo hiperbólico cóncavo

Fuente: Elaboración propia

Sin embargo, si la dirección del rayo incidente apunta al foco A, el rayo reflejado tendrá una dirección que apunta al foco B como se aprecia en la Figura 23.

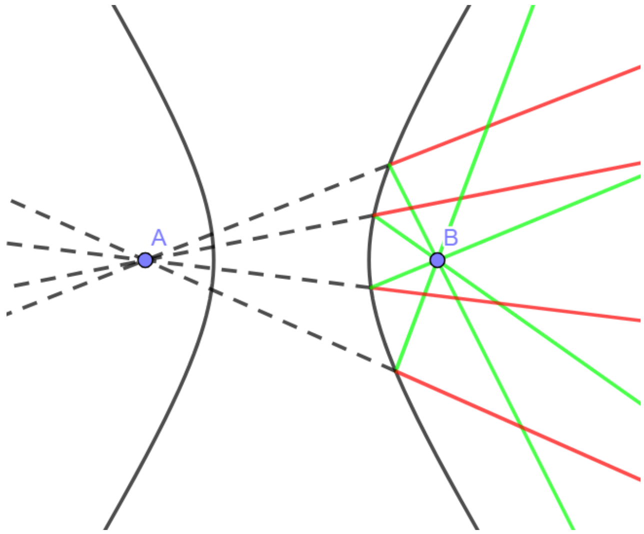


Figura 23. Representación gráfica de rayos de luz incidentes en un espejo hiperbólico cóncavo (2)

Fuente: Elaboración propia

Por otro lado, al igual que en la elipse, en la parte convexa de un espejo con curva hiperbólica, si el rayo incidente apunta a uno de los focos (punto B), el rayo reflejado apuntará al otro foco (punto A) como se muestra en la (Figura 24).

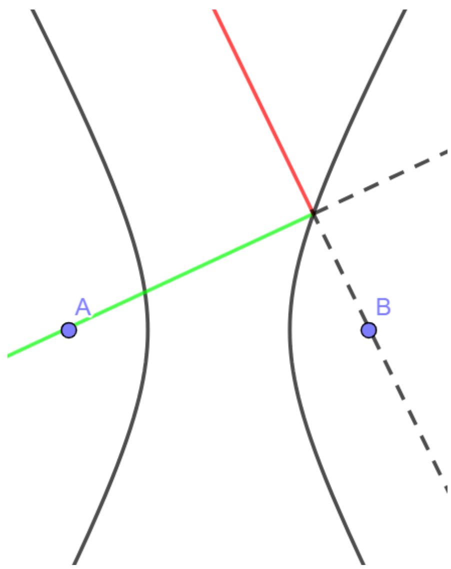


Figura 24. Representación gráfica del rayo de luz incidente en un espejo hiperbólico convexo

Fuente: Elaboración propia

Antena parabólica: Uno de los usos más comunes de la parábola es en la antena conocida como “Antena parabólica”, que es usada para poder sintonizar canales de televisión, esta antena presenta en su diseño una forma de paraboloide que permite recibir la señal y condensarla en un foco, haciendo uso de la propiedad de la parábola, la cual dice que todo rayo que incide en la parábola con dirección paralela al eje central, tendrá un rayo reflejado con dirección al foco de esta (ver Figura 25).

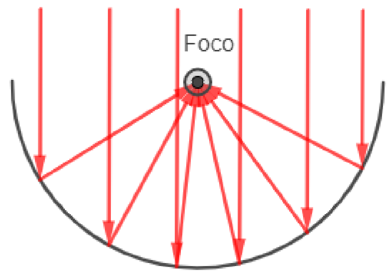


Figura 25. línea de ondas en las antenas parabólicas

Fuente: Elaboración propia

Otro de los usos más comunes es el de las farolas de automóviles y ciclomotores, el cual consiste en aprovechar la propiedad de la parábola anteriormente descrita, pero en este caso al revés, es decir, si se usa un paraboloide con una superficie que refleje la luz, como un espejo, y se ubica en el foco una bombilla, la luz que esta expida rebotará en el paraboloide de espejo y saldrá proyectada hacia afuera con dirección paralela al eje central de la parábola como se ve en la Figura 26.

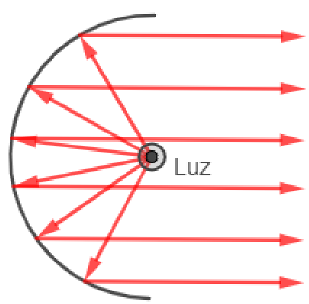


Figura 26. Rayos de luz proveniente del foco

Fuente: Elaboración propia

2.4 Sobre el diseño de REDA

En esta sección, exploramos los elementos fundamentales que hemos tenido en cuenta en la creación de nuestro recurso digital. Este proceso conlleva un desafío significativo, ya que debemos considerar la pertinencia de los elementos que lo componen. Al ser utilizado como una herramienta para el aprendizaje, es crucial que cumpla con estándares de diseño que garanticen su efectividad como recurso educativo.

Para lograrlo, nos hemos basado en los criterios de idoneidad didáctica propuestos por Godino (2013), así como en las características generales de los recursos digitales. Estos criterios y características se entrelazan de manera integral para lograr un diseño óptimo en el desarrollo de una página web educativa.

Al adaptar los criterios previamente mencionados, nuestro objetivo es garantizar que estas herramientas tecnológicas sean eficaces y enriquecedoras para el proceso de aprendizaje de los estudiantes. En la Tabla 19, presentamos los criterios de idoneidad adaptados a los recursos digitales y cómo se relacionan con los diferentes elementos pertinentes a considerar en la elaboración de estos recursos, adaptados de la propuesta de Suárez y Vallin (2017).

Elementos para recursos digitales	**Criterios de idoneidad**
Coherencia temática: es importante considerar que el contenido de la página web este alineado con los objetivos de aprendizaje y competencias que se desean desarrollar. Debe abordar los conceptos de manera secuencial y progresiva, evitando saltos bruscos o inconsistencias conceptuales.	*Espitemicos:* en el REDA, se puede garantizar la idoneidad epistémica si cuenta con un buen uso de *definiciones* y *propiedades* de los objetos protagonistas (secciones cónicas), se presentan correctamente los enunciados respectivos; además, si incluyen una variedad de *situaciones para contextualizar* o institucionalizar los objetos y de sus *representaciones*[1]. Así mismo, si se explicitan los *procedimientos* correspondientes al abordaje de ciertas situaciones (exploración o construcción) y algunos argumentos relativos a las principales propiedades. Como se verá en la sección de referentes conceptuales sobre aspectos matemáticos, se organizó tomando en cuenta estos elementos de una manera más precisa.
Pertinencia educativa: dentro del recurso se deben presentar situaciones o ejemplos que sean relevantes y significativos para los estudiantes, conectándolos con aspectos de la vida cotidiana y contextos reales. Deben proporcionar información clara y precisa utilizando un lenguaje adecuado al nivel de comprensión de los alumnos.	Dentro del contexto del REDA, garantizaríamos estos asuntos, si tomamos en cuenta dos aspectos en particular: *Ecológico*: aludir a temas que estén cercanos a la *zona de desarrollo de estudiantes* de secundaria en relación con objetos de las matemáticas escolares como los son las *secciones cónicas*[2] ya que estos temas se encuentran dentro del currículo en los grados superiores.

[1] Los elementos que aparecen en cursiva son los que nos van a permitir decir que se esta cumpliendo con el criterio de idoneidad epistémico cuando tanto en la metodología y la descripción de la tabla aparezcan

[2] Aspecto que fue resaltado en la introducción de este trabajo

	Epistémico: hacer referencia a situaciones que puedan tener algún grado de interés para los usuarios, en los que el uso de las secciones cónicas está involucrado (la trayectoria de un vehículo, el arte y la reflexión de la luz); y usar diferentes tipos de lenguaje acordes a los sujetos del nivel educativo de básica media y secundaria (articulación de representaciones gráficas dinámicas, con videos animados y texto que usa simbología propia de las matemáticas y de la geometría en particular).
Calidad audiovisual: El recurso digital y sus elementos (Videos y applets) deben tener una buena calidad técnica y ser visualmente atractivos para mantener la atención de los estudiantes. En cuanto a los videos su estructura debe considerar aspectos como; la duración de las escenas, el uso de animaciones o gráficos y la claridad del sonido, son aspectos importantes por considerar. A continuación, se listan características que se deben tener en cuenta para la elaboración de videos educativos: ✓ Debe tener un objetivo formativo. ✓ Debe tener una duración de 2 a 6 minutos; ello depende del tipo de contenido y al objetivo. ✓ La estructura debe ser lógica y coherente. ✓ Los receptores no deben tener dificultad en el seguimiento de los conceptos. ✓ Debe ser creativo, dinámico y motivador. ✓ Debe facilitar el recuerdo y la comprensión de la información. ✓ Debe promover la reflexión, la imaginación e intuición de forma tal que favorezca el auto aprendizaje.	*Algunos aspectos epistémicos y mediacionales:* El REDA cuenta con informacion precisa y verificable a la luz de las propiedades y demostarciones de los objetos geometricos. La forma en que se presenta la informacion en la pagina tiene una surte de interaccion con el usuario, pues no solo se busca que sea facil de manejar sino que su diseño sea intutivo para encontrar y comprender la informacion relevante.
Interactividad y Participación: es recomendable que en un entorno digital incluyan elementos interactivos que permitan a los estudiantes participar activamente como preguntas para reflexionar, actividades para resolver o pausas para discutir o hacer anotaciones. Esto fomentará la participación y el pensamiento crítico.	*Interaccional:* En lo que respecta a nuestro REDA, hemos procurado incorporar elementos interactivos y multimedia como *applets y videos ilustrativos*[3] que apoyen procesos de aprendizaje relativos a las secciones cónicas.
Retroalimentación y Evaluación: Dentro del REDA se deben proporcionar retroalimentación inmediata y clara sobre el trabajo realizado por los estudiantes. También es importante que incluyan momentos de evaluación	*Aspectos cognitivos, (*no muy desarrollado*)*[4]: En el REDA, este aspecto se desarrollo de diversas maneras: 1. En un video, cuando se propone una tarea para que sea hecha por el usuario, hay una realimentación que

[3] Estos elementos nos van a permitir decir que se esta cumpliendo con el criterio de idoneidad interaccional

[4] Aspecto no muy desarrollado por las connotaciones mismas del trabajo, no tenemos estudiantes para decir sus características, luego solamente podemos advertir los aspectos que citamos en la celda.

para que los alumnos puedan reflexionar y verificar su aprendizaje.	ilustra una respuesta inmediata respecto de la experimentación, inmersa en el video. 2. Cuando hay una invitación a experimentar mediante un applet, hay información dispuesta en la página que explica relaciones que están inmersas en los applets mismos.

Tabla 19. Relación entre elementos para recursos digitales y criterios de idoneidad

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA

En este capítulo presentamos, con detalle, la forma en la que elaboramos nuestro producto final, la página web y los elementos que la componen (videos educativos, applets e información escrita). Para ello, dividimos esta presentación en las siguientes tres fases: documentación, estructuración del REDA y propuesta de trayectoria de estudio. En la *primera*, detallamos los documentos y autores que consultamos, describimos la forma en la que lo hicimos y la razón de haberlos tenido en cuenta para la construcción del REDA. En la *segunda*, describimos la forma en la que elaboramos nuestro recurso digital. Dividimos esta información en cuatro subfases; cada subfase da cuenta del cómo elaboramos cada uno de los elementos protagonistas en nuestro recurso digital: La primera subfase alude a la estructura general de la página web. La segunda subfase se concentra en los videos; su elaboración se hizo en cuatro pasos: la escogencia de personajes, la estructura o scketches de cada video, la construcción de los libretos y la realización y edición de video). La tercera subfase alude a la construcción de los applets y la cuarta subfase especifica la construcción de los documentos informativos. Finalmente, en la *tercera* fase, establecimos una ruta de abordaje que serviría como guía para que el profesor promueva el estudio de los objetos expuestos en la página; esta ruta procura expresar una forma que, a nuestro parecer, es la más indicada para sacar el máximo provecho al material digital.

3.1 Fase 1. Documentación

En esta primera fase realizamos una indagación de la literatura con dos focos en mente: el didáctico y el matemático. Buscamos fuentes de información que permitieran ser una guía para la elaboración de videos y de la construcción de la página web; la forma en la que cada referente influyó en cada aspecto del REDA se describirá específicamente en las subfases de la *Fase 2*. En relación con los aspectos matemáticos, la información fue estructurada de la propuesta de Kuzniak y Rauscher (2014) sobre espacios de trabajo geométrico. La información sobre aspectos de índole didáctico se usaron como referente para elaborar el REDA con cierta idoneidad; en ese sentido, tomamos los criterios de idoneidad descritos por Godino (2013) como la principal fuente. Estas fuentes fueron específicamente sugeridas por nuestro asesor; nosotros procuramos estudiarlas para precisar los elementos que finalmente presentamos en el Capítulo 2, previamente presentado.

3.2 Fase 2. Diseño del REDA y cada uno de sus elementos

3.2.1 Subfase 1. Estructuración de la página web

La elaboración de la página web se dividió en 5 etapas (fuente): Establecer su propósito, hacer una Indagación de plataformas, planificar, diseñar, realizar pruebas y lanzamiento.

La primera consistió en establecer el *propósito*: el mismo se ha descrito con suficiencia en el Capítulo 1 de este trabajo. Lo podemos resumir en proveer un recurso para el estudio de las secciones cónicas desde dos espacios de trabajo propuesto por Kuniak y Rauscher (2014): *Geometría establecida I y Geometría establecida II*

Una vez establecido el propósito, se realizó una *indagación* que nos dotará de información acerca de plataformas virtuales más afortunadas para el diseño de páginas web. Después de explorar diferentes opciones como WordPress, Strikingly y Wix, tomamos la decisión de trabajar con Wix; esto, por cuanto, a comparación a las otras dos, es gratis y tiene un diseño intuitivo que favorecía la interacción con el usuario.

Antes de comenzar con el diseño propiamente dicho, se elaboró una *planificación* que ayudó a determinar el contenido que se incluiría en la página web y cómo se estructuraría. Cabe resaltar que a lo largo del diseño se consideraron algunos cambios, puesto que se buscaba que este recurso cumpliera con el propósito de presentar la información que garantizara el espacio de trabajo el de la Geometría establecida I en relación con la fase experimental, y la Geometría establecida II con respecto a la información de corte más teórica que profundizaba asuntos presentados en los videos (definiciones, validación de procedimientos de construcción, validación de teoremas relativos a tangencia, por ejemplo). En la Figura 27 se muestra la estructura final que se decidió en cuanto al diseño del recurso.

En la etapa de *Diseño y Desarrollo* se comenzó con el diseño de la página web, teniendo en cuenta la estructura y los elementos previamente definidos de la que estaría compuesta. Antes de iniciar con el diseño, se realizó una exploración de la plataforma Wix, con el propósito de determinar si nos permitía tener cada uno de los elementos que se establecieron en la estructuración; después se eligió una de las plantillas que nos ofrecía la plataforma (Figura 28), ya que esto nos generaba un punto de partida en torno al diseño del recurso y a una primera versión de la estructura de esta. Mas adelante presentamos a detalle el diseño de cada uno de los elementos que complementan nuestro recurso digital (videos, applets e información textual).

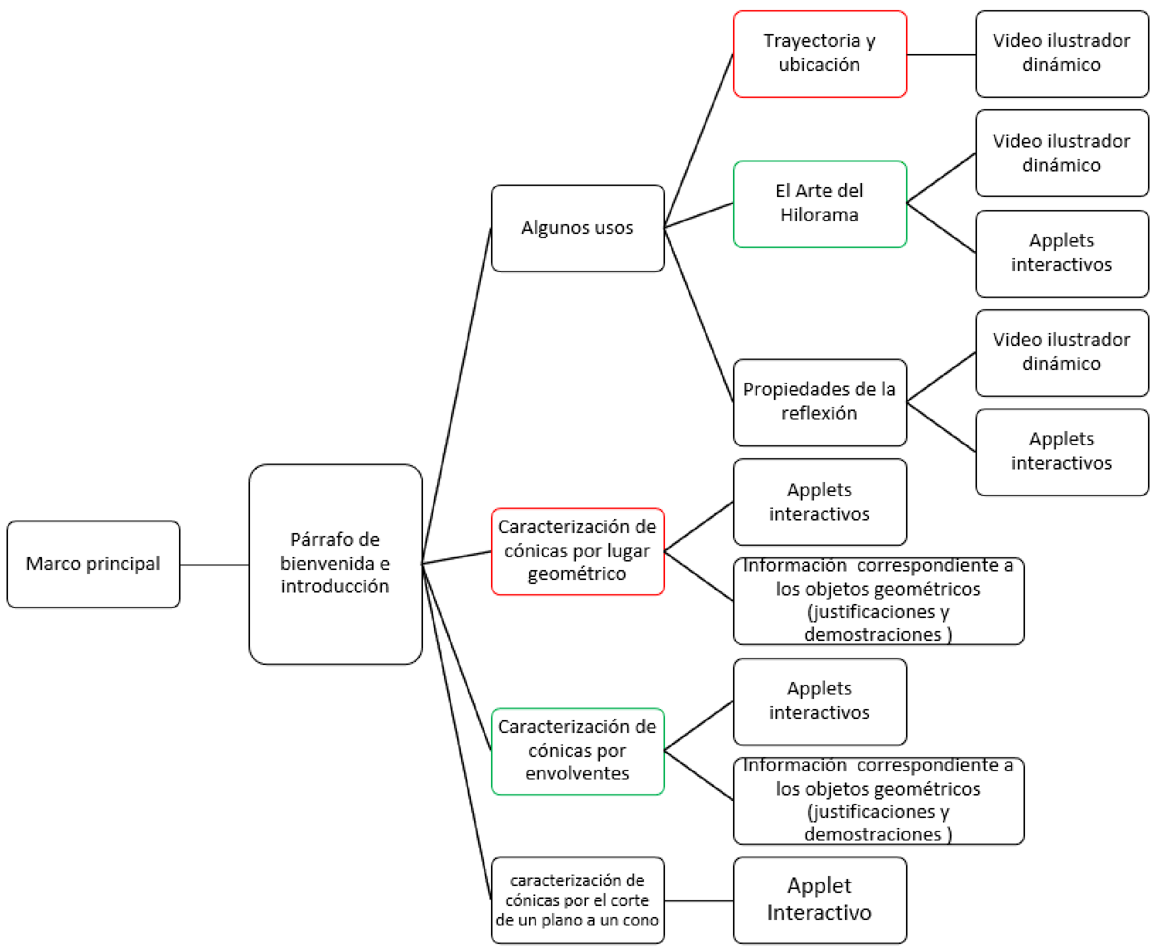


Figura 27. Estructura del Recurso Digital

Fuente: Elaboración propia

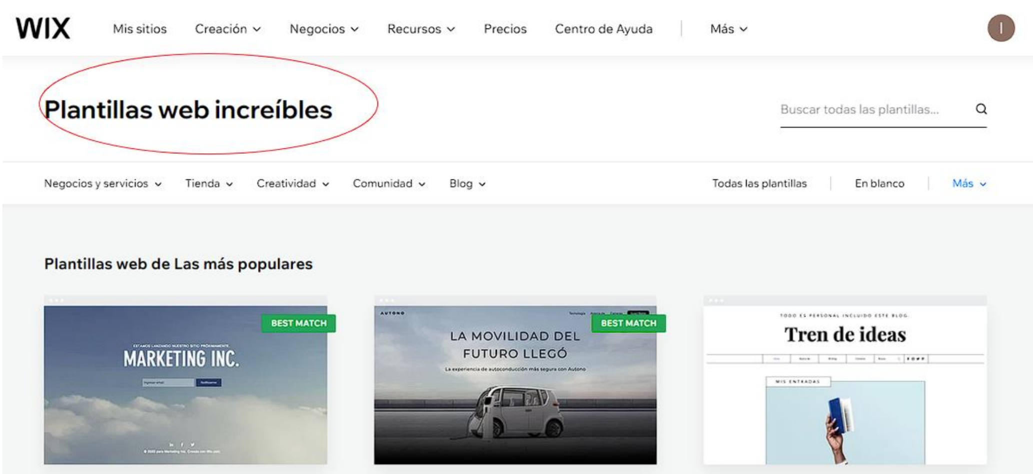


Figura 28. Plantilla Wix

Nota. La imagen ilustra algunos ejemplos de plantillas que sirven de apoyo para elaborar una página web en Wix, por Wix.com, 2023, (https://manage.wix.com/account/websites).

Pruebas y lanzamiento. Para garantizar la calidad y el correcto funcionamiento de la página web, se llevó a cabo una fase de pruebas exhaustivas antes de su lanzamiento. Durante esta etapa, se verificó minuciosamente cada uno de los elementos de la página para asegurarse de que funcionaran correctamente. Esto incluyó comprobar que los enlaces estuvieran activos y dirigieran a las ubicaciones correctas, que los videos se reprodujeran sin problemas, que los applets se pudieran manipular de manera adecuada, y que toda la información proporcionada fuera precisa y coherente.

Las pruebas desempeñaron un papel fundamental en el proceso de desarrollo de la página web, ya que permitieron identificar posibles errores o fallas que pudieran afectar la experiencia del usuario. Cada aspecto del sitio fue meticulosamente examinado y evaluado para garantizar que funcionara de manera óptima y cumpliera con los estándares establecidos. En el Capítulo 4 se presentará y describirá la estructura final de la página; esto es, sus frames, la disposición final de la información textual, de video y los applets, aspectos de interacción, etc.

3.2.2 Subfase 2. Diseño de videos

En esta subfase se estructuraron principalmente tres videos, los cuales, a nuestro parecer, son el foco de nuestro REDA; por tanto, toda la información de la página gira en torno a ellos. Para organizar esta subfase, distribuimos la información en cuatro pasos descritos a continuación:

Paso 1. Precisión de los personajes. Lo primero que hicimos fue precisar los personajes que serían los protagonistas de las historias relacionadas con las situaciones en las que están involucrados los tres usos descritos en la sección 0. Pensamos en un par de jóvenes en un primer momento, quienes, al involucrarse en ciertas vivencias, conocían sobre estos objetos; luego nos dimos cuenta de que hacía falta un tercer personaje, en este caso, secundario, que tuviera el papel de concluir o institucionalizar los conocimientos que los personajes principales iban poniendo en acto mientras experimentaban. Así las cosas, los dos protagonistas son Loran y Johan. La primera es una mujer y se le dio este nombre en relación con el sistema de navegación Loran descrito en la sección 0; el segundo es un joven cuyo nombre es en honor al matemático y astrónomo alemán Johannes Kepler (1571 – 1630), conocido por darle protagonismo a la curva *elipse* en sus leyes sobre el movimiento de los planetas en su órbita alrededor del sol. El tercer y último personaje que se concretó fue Apolonio; él se encarga de orientar a los jóvenes en las aventuras y, como se dijo antes, en hacer una suerte de institucionalización de la información. Se le puso este nombre en honor al matemático y astrónomo griego Apolonio de Perge (262 a. C. – 190 a. C.), quien es famoso por su obra sobre secciones cónicas. En lo que sigue, describimos la idea central (o *story*) de cada uno de los videos diseñados.

Paso 2. Precisión de la idea central del contenido de cada video: Como se dijo antes, fueron creados tres videos, relativos a cada una de las situaciones descritas en la Sección 0. En la Tabla 20 presentamos una descripción general de la idea central de cada video, con base en la cual fueron determinados los demás pasos del procedimiento para la elaboración de los videos. Vale indicar que una intención de los videos es que promueva un espacio de trabajo determinado; en ese sentido, la descripción que se presenta procura hacer ostensivo el espacio de trabajo que se favorece con cada video.

Temática	**Descripción**
Video sobre trayectorias de un vehículo marítimo (Lugar geométrico)	En este video, los protagonistas aparecen en un barco en medio del océano gracias al deseo que les cumplió Apolonio. Para poder navegar, ponen el barco en piloto automático, pero ello no les asegura saber cuál es su destino ni su ubicación; así las cosas, deciden abrir un manual que encuentran en el barco y con la información consignada en él, hacen simulaciones de trayectorias que podría seguir el barco. Es así como, por medio de la experimentación, los personajes logran determinar dos tipos de curvas de naturaleza distinta que desvelan las posibles trayectorias del barco. Con este video procuramos promover en el usuario la realización de los mismos experimentos que

	hacen los protagonistas, generando así el ETG (*geometría establecida I*). En ese marco, los usuarios tendrán que hacer procesos de visualización y conjeturación que permite una conceptualización de los objetos geométricos exhibidos relativa a lo herramental de estas, pero también a una aproximación conceptual más teórica.
Video sobre el arte Hilorama (Envolventes)	En este video, los personajes están en un museo de arte, donde pueden ver obras de arte Hilorama. Al cuestionarse por la forma de construir estas obras, Apolonio explica el paso a paso relativo a la construcción de obras que dejan vislumbrar algunas curvas de género cónicas. En este video puede evidenciarse el paradigma de la geometría natural, porque se basa en la construcción de curvas por envolventes, de manera implícita. Con este video, se procura promover en el usuario una actividad constructiva, de visualización y conjeturación respecto al tipo de curva que se forma, esto a su vez permite que se genere el ETG (*geometría establecida I*). La idea es aproximarse a una conceptualización de las curvas por envolventes.
Video sobre la reflexión de la luz en espejos curvos	En este video, los personajes están en el mismo museo, esta vez con piezas que emplean espejos curvos que deforman la perspectiva de sí mismos al reflejarse en ellos. Luego de preguntarse la razón de esos fenómenos de reflexión. Apolonio decide experimentar con un par de espejos curvos, con la intención de exhibir el comportamiento de los rayos de luz reflejados según la curva del espejo en el que inciden. En este video se incentiva el paradigma geometría natural, porque se concentra en la experimentación y visualización que se realiza con los espejos y los rayos de luz. Con este video, el usuario tiene la posibilidad de vivenciar un proceso de visualización y luego conjetura propiedades de las curvas cónicas relacionadas con la reflexión de la luz, porque se hace la invitación al usuario de que intente replicar de manera sencilla estos experimentos con materiales accesibles, procurando así generar el ETG (*geometría establecida I*).

Tabla 20. Relación entre las temáticas de los videos y los espacios de trabajo

Paso 3. Creación de los libretos: Previo a redactar los libretos, se hicieron borradores en donde discutimos la historia o contexto que daría lugar al estudio de las secciones cónicas, procurando siempre que este se diera a partir de uno de los tres usos descritos en la sección 0. Luego de tener claras las situaciones en general, procedimos a construir los diálogos que junto con notas de contexto y situaciones conformarían el libreto como tal. En la elaboración de los diálogos se debía tener presente que los personajes principales, Loran y Johan, no tenían un conocimiento profundo de las matemáticas, por ende, sus preguntas serían claves para simular una exploración que los llevara a estudiar las curvas cónicas.

Se procuró cambiar el orden tradicional en el que se presenta la información, poniendo como primer acercamiento la utilidad de la curva cónica en la vida cotidiana para, a partir de la exploración, construir un conocimiento, que de a poco, se acerca a uno más teórico. La elaboración de estos diálogos fue clave, porque con base en ellos se diseñaban los gráficos del video o la utilería. En el ANEXO A, se presenta un ejemplo del libreto construido para el video de trayectorias de un vehículo marítimo.

Paso 4. Precisión y uso de recursos técnicos y logísticos para la elaboración de cada video: Para este paso fue necesaria la colaboración de María Paula Bonilla Montero, estudiante de último semestre de Diseño Gráfico de la Fundación Universitaria del Área Andina, quien contribuyó significativamente con su esfuerzo y valiosos aportes.

Para la elaboración de los tres videos se usó programas de diseño gráfico, los cuales permitieron dar vida a las *stories* construidas previamente en los libretos. Inicialmente, para poder crear el primer video, se usaron los siguientes cuatro programas de edición de videos, los cuales permitieron ilustrar los personajes y escenarios pertinentes, así como su animación y sonido, para luego unificar todo esto y poder exportar el producto final, un video animado de forma digital en su totalidad. Describimos a continuación, grosso modo, el uso de los softwares usados:

Adobe Illustrador: Es un programa que permite crear lenguaje grafico contemporáneo mediante el dibujo vectorial, este se usó para la creación de los personajes y escenarios en vectores de todo el video alusivo al sistema Loran. En la Figura 29 se puede observar el panel de controles:

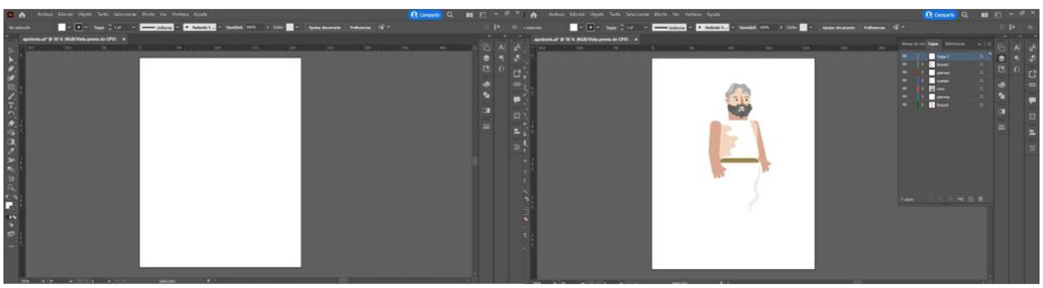


Figura 29. Panel de control de Adobe Illustrador

Fuente: Elaboración propia

Se debe aclarar que los personajes Loran y Johan no guardan ninguna relación con la o el matemático a quien corresponde su nombre, más allá de compartir éste. En las historias Loran y Johan son un par de adolescentes ajenos a las matemáticas y que no cuentan con un conocimiento profundo alusivo a las mismas; el personaje Apolonio sí posee conocimiento matemático y en su debido momento interviene para institucionalizar el conocimiento puesto en juego en cada video (el cual, se supone, van adquiriendo Loran y Johan por medio de su experiencia). En la Figura 30 se muestran los personajes.

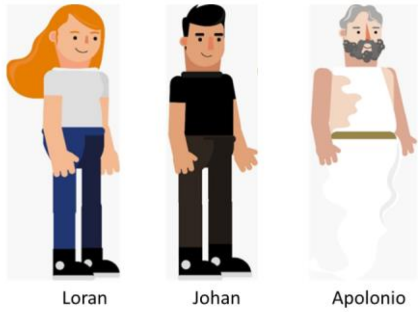


Figura 30. Ilustración de los personajes que aparecen en los videos

Fuente: Elaboración propia

Adobe Anímate: Es un programa que permite crear movimiento y manipular gráficos vectoriales como se aprecia en la Figura 31; este se utilizó para el montaje de escenas y animación de cada una de ellas, incluyendo la sincronización de labios con los audios grabados para darle voz a los personajes.

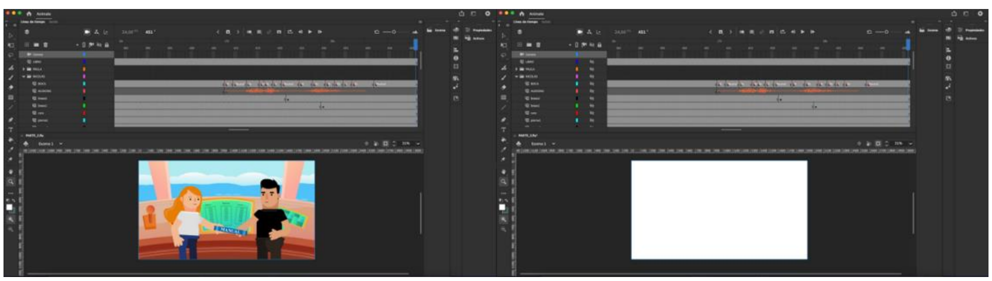


Figura 31. Representación gráfica del software Adobe Animate

Fuente: Elaboración propia

Adobe Premiere: Es un programa de edición de video, este se utilizó para realizar el montaje y unión de escenas que contaban previamente con animación, edición de tiempos, efectos y sonidos de fondo, este programa es la última fase por la que pasa el video para la exportación final (ver Figura 32).

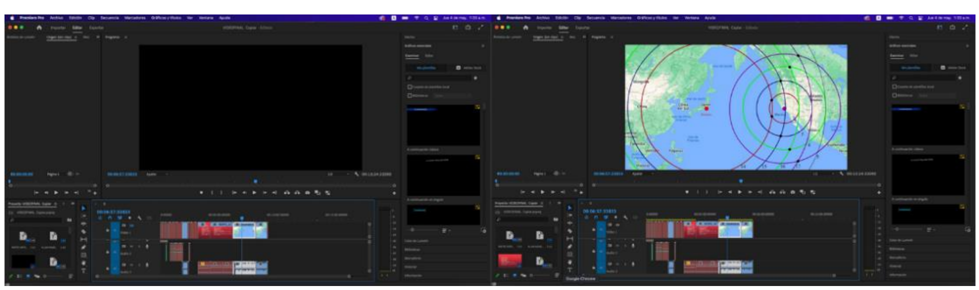


Figura 32. Representación gráfica del software Adobe Premiere

Fuente: Elaboración propia

Adobe Audition: Es un programa se utilizó para la edición de audio en precisión como quitar ruidos de fondo y recorte de partes extras o que no corresponden con el guion (ver Figura 33).

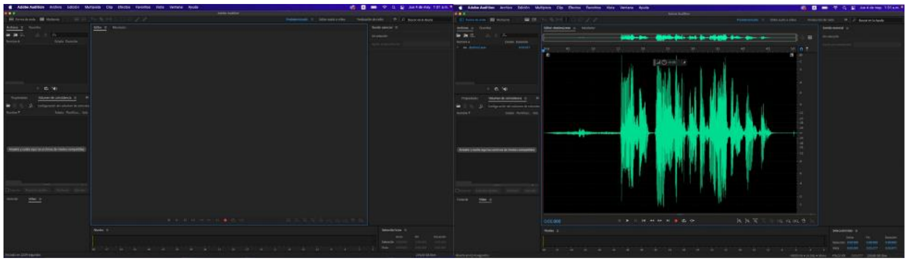
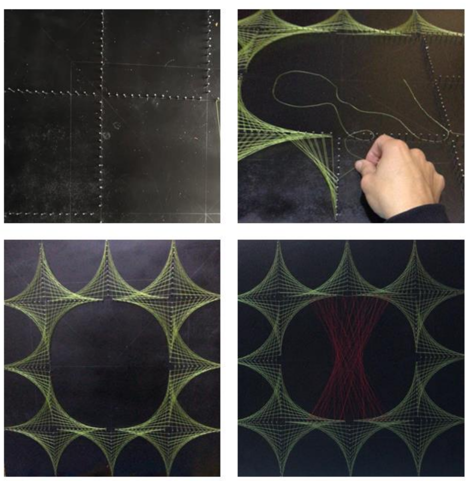


Figura 33. Representación gráfica del software Adobe Audition

Fuente: Elaboración propia

Para los dos videos restantes se usó un programa distinto, un programa que permite realizar videos en Stop Motion. Esta es una técnica que consiste en tomar una secuencia de fotos para luego unirlas y apreciar el movimiento de objetos según la secuencia, haciendo que estos cobren vida. Este cambio se debió a la falta de tiempo y la naturaleza de los experimentos realizados en estos videos.

Lo primero que hicimos para realizar videos en Stop Motion fue elaborar los personajes, los escenarios y la utilería con materiales fáciles de manipular. El proceso de construcción de cada uno de estos se especifica en la Tabla 21.

Elementos de utilería	Descripción asociada
	Se usaron maniquíes de dibujo como base para los personajes, porque sus extremidades pueden moverse con facilidad; la ropa de Apolonio se hizo con dos bombas blancas, y la de Loran y Johan se hizo con pedazos de tela y costuras. Finalmente, las cabezas se hicieron con plastilina de colores, siempre procurando imitar la apariencia de los personajes creados digitalmente en el anterior video.
	La utilería para el video del arte hilorama se hizo en tablas recicladas que permitieron la estabilidad y firmeza de las puntillas puestas en ellas. Con ello, se llevaron a cabo los procedimientos de construcción especificados en la sección 0.
	Los espejos que se muestran en el video sobre la reflexión de la luz fueron hechos sobre una base de madera. Primero se imprimió las tres curvas cónicas (parábola, elipse e hipérbola) y luego se les dio forma en madera con herramientas de ebanista; luego se les adhirió un stickers mirror, que son superficies flexibles que reflejan la luz actuando como un espejo curvo.

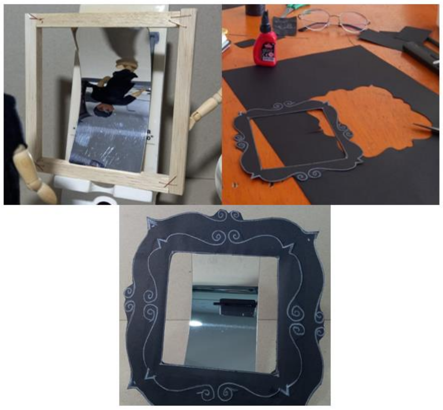
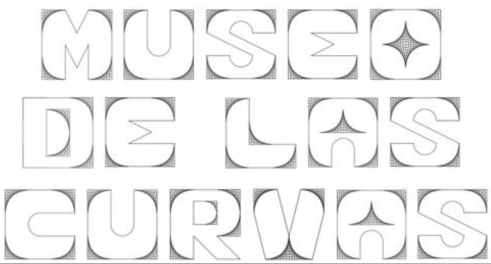
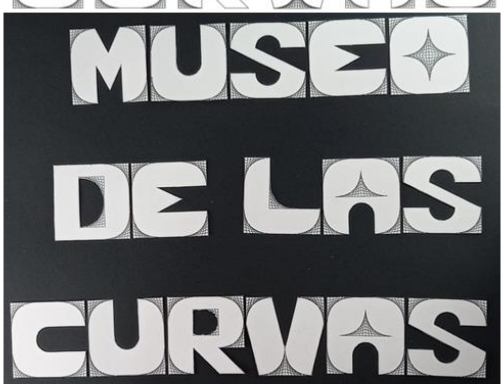
	Finalmente se construyó un marco con palos de balzo en donde simulan dos espejos de forma cónica.
	Para la introducción de los últimos dos videos se creó una tipografía en GeoGebra, usando curvas regladas (esto es, generadas por rectas que envuelven curvas) de forma tal que coincidan con las curvas que se generan por los hiloramas

Tabla 21. Creación de la utilería

Luego de crear todo lo necesario para realizar la sesión de fotos, se estableció un lugar en donde pudiesen ser acomodados los escenarios, utilería y personajes, con una iluminación adecuada, fondos en cartón piedra y una cámara de celular (Figura 34). Con esta base, se le “dio vida” a estos personajes.

Figura 34. Escenario de grabación

Fuente: Elaboración propia

Para llevar todas estas imágenes tomadas (más de mil fotos) y organizarlas se utilizó un software de edición de videos llamado CapCut (ver Figura 35). Este es un programa disponible para iOS, Android y Windows que permite almacenar y organizar fotos, además de poder realizar ediciones de tiempo al juntar todas las fotos para crear el movimiento. En este programa logramos obtener una secuencia de imágenes que juntas forman un video. Este programa también permite incluir sonidos de fondo, las voces de los personajes y dibujos o efectos especiales encima del video, esto último lo usamos para poder resaltar objetos matemáticos dentro de las escenas.

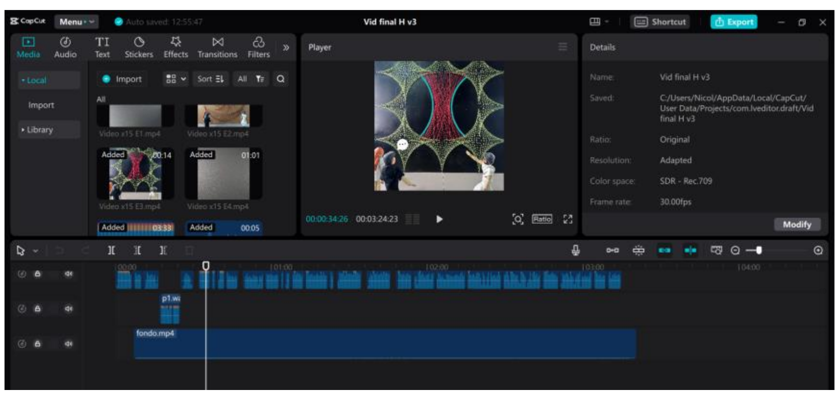


Figura 35. Software de edición de video CapCut

Fuente: Elaboración propia

En estos softwares también se editaron los audios de todos los videos y se conjugaron con la línea temporal en la que estaban ubicados los personajes y su escenario; la voz de Loran fue hecha por María Paula, la de Johan por Nicolas Guerrero y la de Apolonio por Luis Aldana.

Seguido de esto, se incluyeron los sonidos de fondo, como efectos especiales, interacciones o acciones de los personajes y música introductoria.

3.2.3 Sub-fase 3. Diseño de applets

El diseño de los applets se realizó con ayuda del aplicativo GeoGebra, que nos ofrece una manera visual y dinámica de estudiar objetos matemáticos; esta es una herramienta que cuenta con grandes atributos, puesto que permite al usuario crear imágenes dinámicas como lo son animaciones para explorar conceptos matemáticos.

Para comenzar con el diseño, primero fue importante tener claro el propósito de cada uno del applet. Se quiso que estos complementaran los asuntos abordados en los videos diseñados y, por supuesto, con la información de corte más teórico, presentada en la página web. Cada applet tiene un objetivo específico según la información respectiva. Algunos, por ejemplo, ilustran una definición, otros ilustran un procedimiento de construcción para una curva en específico, otros son apoyo para ciertos argumentos.

Una vez definido el objetivo de cada applet, se inició con el diseño en GeoGebra. Esto implicó determinar los botones, deslizadores y cuadros de entrada que facilitarían la interfaz con el usuario. Estos elementos nos exigieron determinar los parámetros clave para la interacción del usuario con la construcción, en términos de aquello geométrico que se quería destacar en esta. Algunos de los applets se diseñaron con el uso de Scripts, que son secuencias de comandos que permiten crear animaciones y simulaciones, lo que favorece con la comprensión de los conceptos matemáticos. En la Tabla 22 se presentan los diferentes tipos de applets que se diseñaron para el recurso digital.

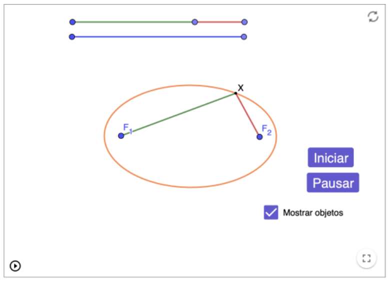
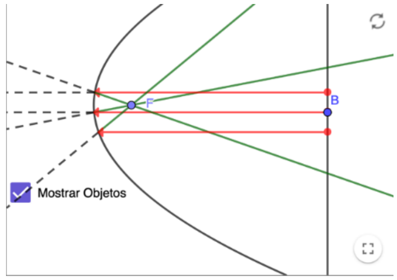
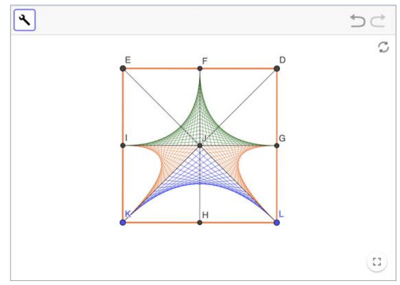
Caracterización del objeto: Se crearon con el propósito de mostrar al usuario la diferentes formas de caracterizar las secciones cónicas	**Propiedades del objeto:** Estos applets dejan ver las propiedades que cumplen las curvas cónicas.	**Interacción con el usuario:** Este tipo de applet se creó con la intención que el usuario logre interactuar con la herramienta
		

Tabla 22. Diferentes tipos de applets

3.2.4 Sub-fase 4. Construcción de documentos informativos

Estos documentos, esencialmente de carácter divulgativo, contienen tres tipos de información: caracterizaciones de los objetos protagonistas según el asunto de cada video (por lugar geométrico y por envolvente), procedimientos de construcción (principalmente asociados al video los hiloramas, esto es por envolvente) y las demostraciones de los teoremas asociados a tales procedimientos de construcción. Desde esa perspectiva, esta información pretende profundizar el estudio, en el marco de un *paradigma Geometría Axiomática-Natural*, de los objetos protagonistas en los videos, pero también poner en texto las ilustraciones de los applets elaborados.

En suma, estos documentos cumplen un papel importante dentro de la página web, dado que apuntan a concretar un ETG (geometría establecida II) teniendo en cuenta que su naturaleza apunta más a presentar definiciones, procedimientos de construcción y demostraciones en un tono más teórico. Los textos inmersos en la página web se construyeron con base en la información de índole matemático presentes en el Capítulo 2. Fueron puestos en macros de la página relativos a cada uno de los usos correspondientes. Una descripción completa al respecto se hace en el capítulo siguiente.

3.3 Fase 3. Trayectoria de estudio

En esta fase nos centramos en proponer una trayectoria de estudio para el usuario basada en las ideas propuestas por Kusniak y Rauscher (2014), que consiste en generar un espacio de trabajo en geometría, que articula aproximaciones experimentales y teóricas para el estudio de la geometría escolar. Para nuestra propuesta de trayectoria, quisimos privilegiar una secuencialidad que inicia con lo experimental para, a partir de las intervenciones del personaje secundario, hacer una introducción a los aspectos de orden más teórico y llegar a una aproximación del espacio de trabajo 2 (Geometría establecida II). Así las cosas, proponemos una secuencialidad que implica la observación de los videos en un orden específico, la invitación a la realización de las actividades que en estos se sugieren, el estudio de la información textual que apunta a esa aproximación teórica de los objetos de estudio y, con esto, a la experimentación con los applets usados como medio en el sentido dicho en la Tabla 22.

CAPÍTULO 4. DESCRIPCIÓN DEL REDA

Este capítulo está dividido en cuatro partes en la cual presentamos a detalle una descripción de cada uno de los elementos de los que se compone nuestro recurso digital. Primero, mostramos una descripción general de la página web; enseguida, se presentan los videos que son protagonistas para presentar diferentes usos de las secciones cónicas, luego presentamos una descripción de los documentos que muestran algunas de las justificaciones que acompañan la exploración de las diferentes caracterizaciones que son protagonistas dentro del REDA, y por último se presentan las descripciones de los applets que se elaboraron como recurso para la interacción con el usuario.

4.1 Descripción de la página web

La página web que describiremos a continuación la encuentras en el siguiente enlace: https://lfaldanab.wixsite.com/seccionesconicas.

Frame Principal (Figura 36): En la página principal del sitio web (menú *inicio*), los usuarios encontrarán un título que coincide con el nombre del sitio. En la parte superior e inferior encontramos el menú con enlaces a diferentes secciones de la página. El sentido de poner el menú en la parte inferior es para facilitar al usuario la navegación en el sitio. También encontraremos un texto de bienvenida que ubica al usuario acerca del contenido de la página. En la parte inferior se hace una invitación al usuario a navegar por los diferentes enlaces de la página y se exhorta a dar clic al botón *"explorar"* que lo llevara a la sección de los usos de las cónicas que describiremos más adelante, pues como hemos indicado anteriormente, se procura que el usuario realice primero una exploración experimental del asunto.

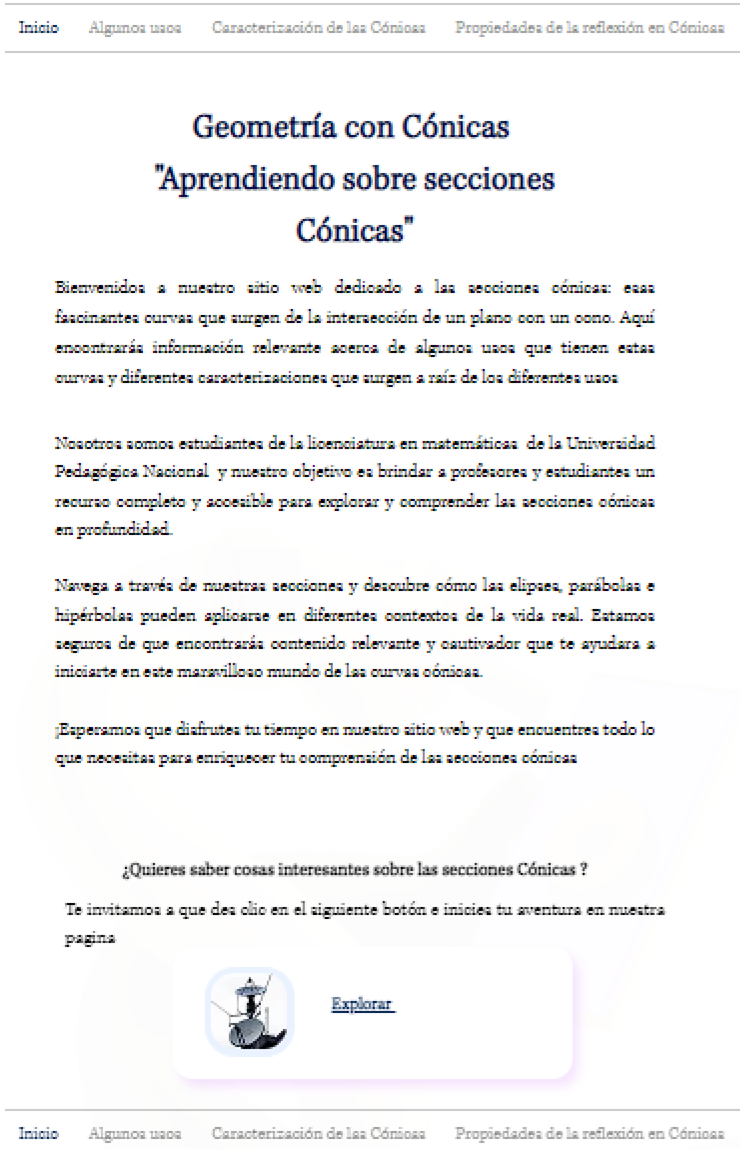


Figura 36. Frame Principal

Fuente: Elaboración propia

Menú de la página. El menú se divide en cuatro secciones: Inicio, Algunos usos, Caracterización de las cónicas y Propiedades de la reflexión en cónicas, que sirven como enlaces para navegar a lo largo de la página. El primer elemento de la lista, *Inicio*, fue descrito previamente. La opción *Algunos usos* presenta el primer submenú (Figura 37) ya que este se divide en tres. Este lleva a los usuarios a explorar algunas de los usos de las secciones cónicas que pretendemos divulgar con la página, y descritos a lo largo de este documento; así, al hacer clic en esa opción, se despliega una lista con tres opciones: Trayectorias y ubicación, Arte del hilorama, Reflexión en espejos Curvos. La opción *Caracterización de las cónicas* se compone de tres sub-opciones (Figura 38. Submenú 2): *Cónicas por lugar geométrico, Cónicas por envolventes* y *Corte de un cono por un plano*. Finalmente, en la opción *Propiedades de la reflexión en cónicas* lleva al estudio de las propiedades de la reflexión en espejos con curva cónica la cual se presenta en la sección 0.

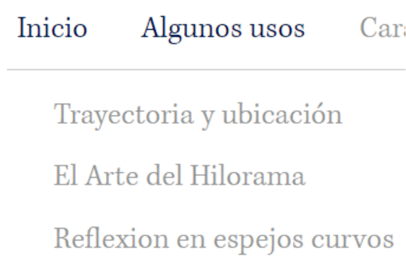


Figura 37. Submenú 1
Fuente: Elaboración propia

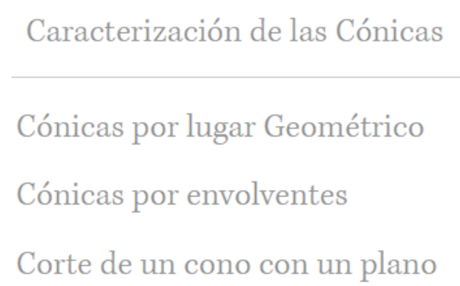


Figura 38. Submenú 2
Fuente: Elaboración propia

Con esta disposición y estructura en la página web, estamos facilitando la navegación y el acceso a la información relevante que quisimos abordar sobre las secciones cónicas, permitiendo que los usuarios exploren diferentes aspectos y enfoques de este tema. En lo que sigue, describimos un poco más cada opción.

Opción Algunos Usos (Figura 39). El primer enlace que se muestra en la página destaca algunos de los usos de las secciones cónicas. Cuando el usuario se ubique en esta sección encontrará tres opciones acompañadas de una breve introducción de lo que podrá encontrar en el enlace. Allí se presentan tres opciones que representan los diferentes usos que son importantes en el trabajo de grado y cada una de las secciones se describen más adelante. Cuando el usuario da clic en botón *"explorar"* en el apartado de trayectorias y ubicación, se encontrará con el primer uso citado en la sección 0, el segundo botón "*explorar*" lo dirige al apartado arte del hilorama que es el segundo uso descrito en la sección 0 que muestra obras de arte que se componen de tensar hilos de colores (hiloramas) y el tercer botón "explorar" lleva al usuario al uso de las secciones cónicas en espejos curvos que se encuentra en la sección 0 que aborda las propiedades de la reflexión desde la óptica.

Figura 39. Sección algunos usos

Fuente: Elaboración propia

Sección *Trayectorias y ubicación* (Figura 40) Cuando el usuario acceda al enlace de trayectorias y ubicación, verá un video alojado en YouTube que muestra el uso de las secciones cónicas análogo al del sistema de Loran (en la sección 4.2 presentamos una descripción amplia de los videos). seguido de un video que institucionaliza los objetos geométricos presentados en el primer video. En la parte inferior se encuentra un aviso textual que invita al usuario a seguir navegando en la página y se exhorta a dar clic al botón “*Explorar”* que en consecuencia lo dirige a la caracterización por lugar geométrico, sección que se describe más adelante.

Figura 40. Sección "Trayectoria y Ubicación "

Fuente: Elaboración propia

Sección *Hiloramas* (Figura 41) Dentro de este marco, se presenta primero un video sobre representaciones artísticas construidas mediante la tensión de hilos de colores (arte del Hilorama). Seguido se encuentra información textual que da una breve descripción de lo que es el arte de tensar hilos. También se muestra un applet que invita al usuario a interactuar construyendo un hilorama a partir de tres puntos el cual se describe más adelante. En la parte final de esta sección se invita al usuario a dar clic en el botón *"explorar"* que en seguida lo dirige a la segunda caracterización de las secciones cónicas, la cual es por envolventes ya que dicha caracterización se condice con el uso citado.

Figura 41. Sección Hiloramas

Fuente: Elaboración propia

Presentada el contenido asociado al subframe *Algunos usos*, nos adentramos en la descripción del listado asociado a opción (subframe) *Caracterización de las cónicas*. Como dijimos, este se compone de un menú con tres opciones; enseguida, describimos a cada una:

Secciones cónicas por lugar geométrico (Figura 42). En esta sección se presentan textos informativos con las definiciones de los tipos de secciones cónicas parábola, elipse e hipérbola relacionadas con el lugar geométrico. Estas definiciones se acompañan de representaciones gráficas (applets) dinámicas que ayudan a comprender mejor las características de las secciones cónicas. Estas representaciones gráficas pueden ser manipuladas por el usuario, lo que facilita la interacción.

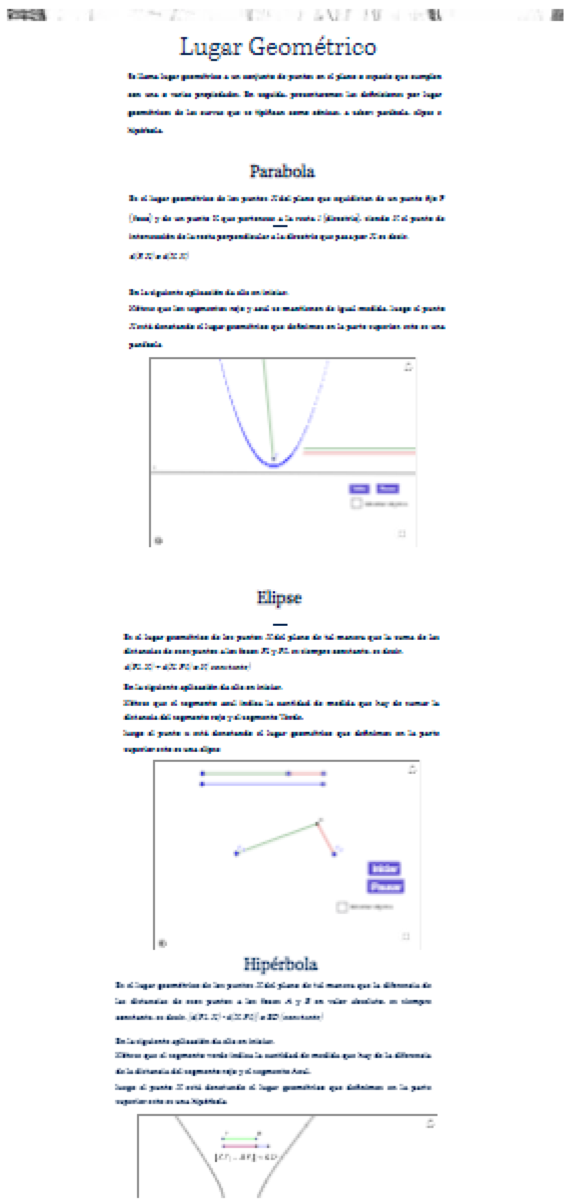


Figura 42. Secciones cónicas por lugar geométrico

Fuente: Elaboración propia

Secciones cónicas por envolventes (Figura 43): En esta sección de la página, se presenta información textual con una caracterización adicional de los objetos geométricos. Específicamente, se incluyen definiciones formales de las curvas por envolventes, acompañadas de procedimientos de construcción de las curvas por envolventes y de los que simulan la construcción de los hiloramas previamente presentados, con el fin que se evidencie la relacionan de estos métodos de construcción que se pueden visualizar mediante applets interactivos. Además, se presentan justificaciones del teorema que encapsulan tales procedimientos de construcción.

Secciones cónicas por envolventes

A continuación, se presenta una segunda caracterización de las secciones cónicas; aquella denominada frecuentemente como envolventes por familias de curvas. Asociada a esta, se exhibe una forma de construir estas curvas a partir de rectas perpendiculares que cumplen ciertas condiciones, con base en las cuales, teniendo como horizonte el cumplimiento de las propiedades dadas en la definición por lugar geométrico, se puede justificar el resultado del procedimiento de construcción (esto es, que la curva es de algún tipo de cónica y que la recta perpendicular protagonista del procedimiento resulta ser tangente a la curva).

Definición de envolvente de curva: una curva α es envolvente de una familia A de curvas, si (i) para cada punto P de α existe una curva ξ de la familia A tal que $\alpha \cap \xi = \{P\}$, y (ii) para cada curva ξ de la familia A existe un punto Q en α tal que $\alpha \cap \xi = \{Q\}$.

Como se puede apreciar en la imagen, la curva con extremos A y B es envolvente a una familia de curvas A, que en este caso es el conjunto de rectas tangentes a la curva .

En lo que sigue, presentaremos una caracterización por envolventes de cada uno de los

Figura 43. Sección caracterización por envolventes

Fuente: Elaboración propia

Corte de un cono por un plano (Figura 44): presenta información textual con la caracterización de las cónicas a partir del corte de un cono por un plano caracterización esta sugerida desde los griegos y que da lugar al nombre de las curvas determinadas por la intersección de tales objetos. En este apartado se presenta un applet interactivo que permite al usuario cambiar la posición del cono con respecto al plano, con el propósito de vislumbrar cada una de las secciones cónicas. Quisimos presentar esta caracterización, porque, aunque no se estudia a profundidad ni teóricamente ni en sus usos, sí posibilita dar sentido a nombre de los objetos protagonistas de este trabajo de grado.

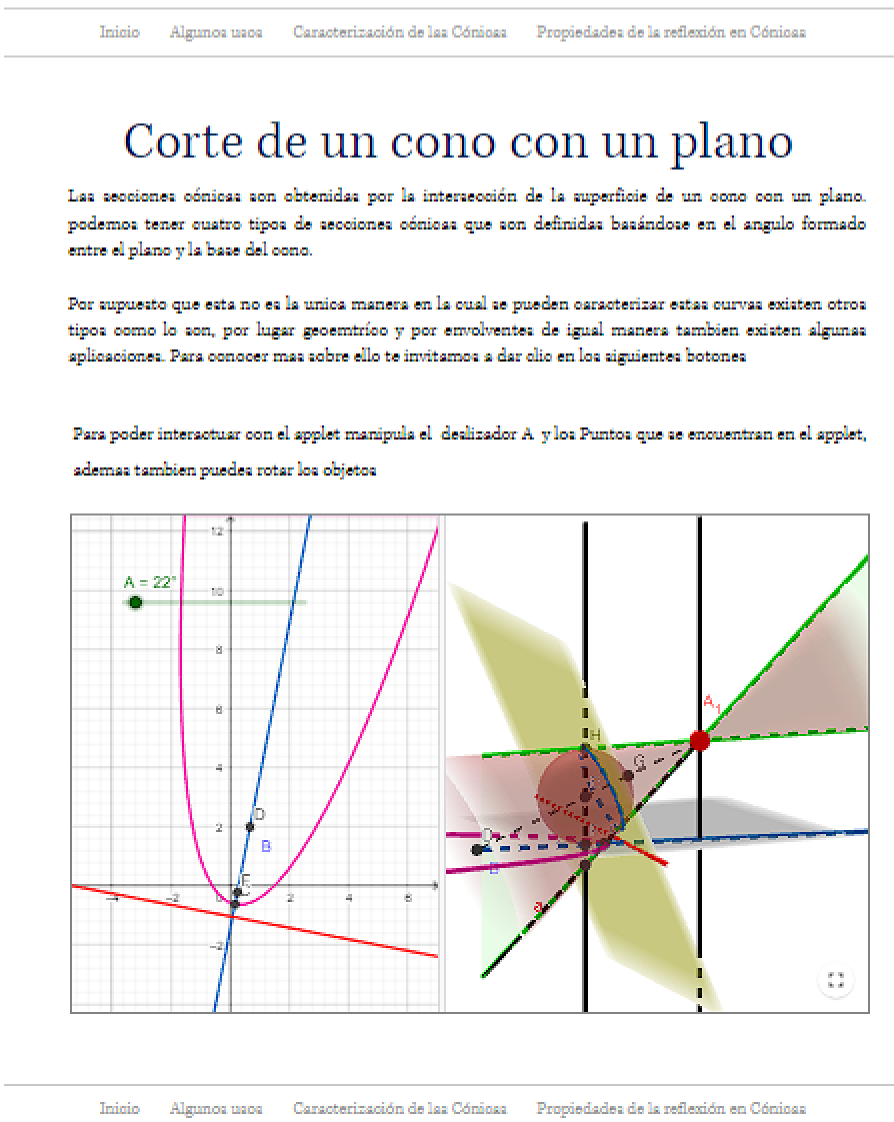


Figura 44. Corte de un cono por un plano

Fuente: Elaboración propia

Sección *Propiedades de la reflexión* (Figura 45): En la sección que se refiere a las propiedades de la reflexión en espejos con curvas cónicas, el usuario encontrará un video con una historia relacionada con el comportamiento de la reflexión de la luz con espejos de estas formas. También encontrará texto informativo acompañado de representaciones gráficas dinámicas (applets) que permiten al usuario interactuar y comprender algunas propiedades de la reflexión desde un punto de vista geométrico.

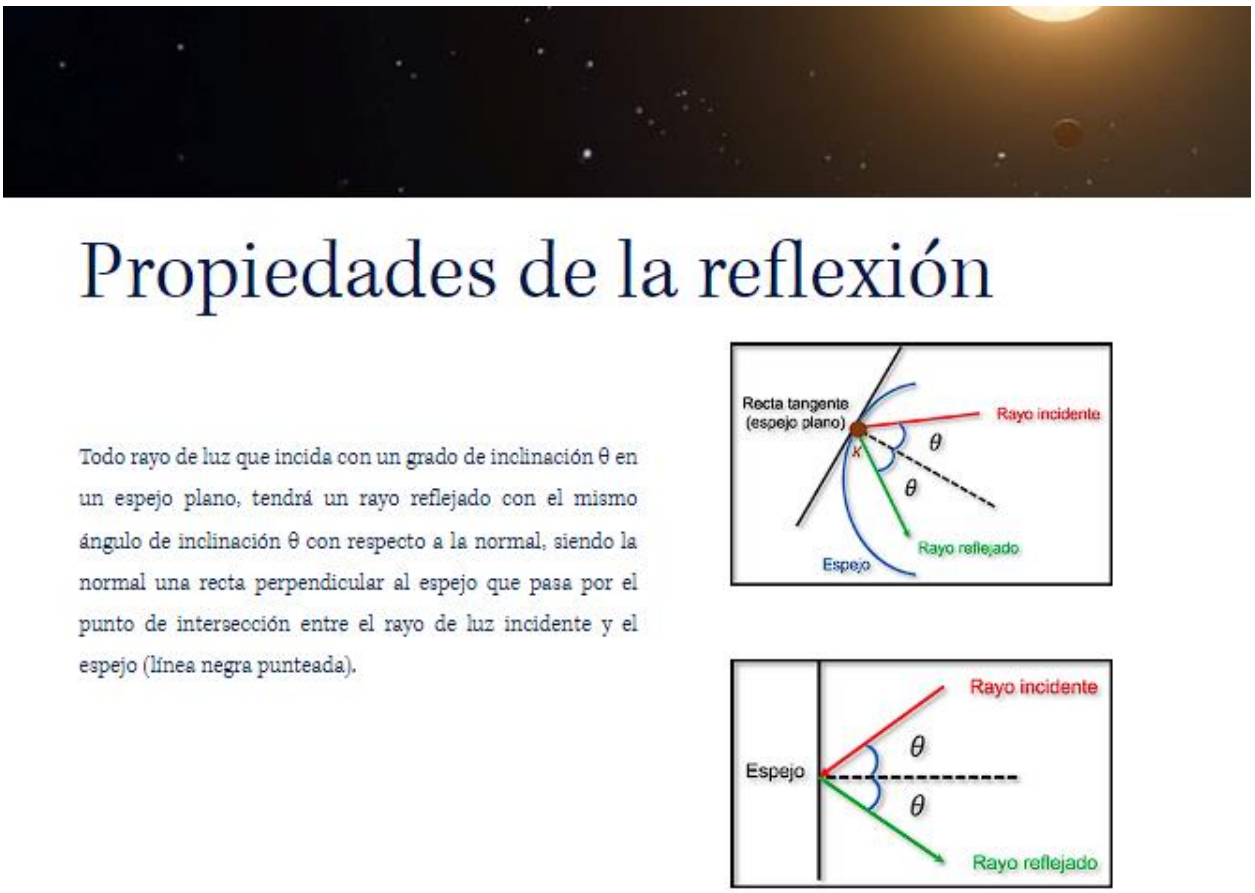
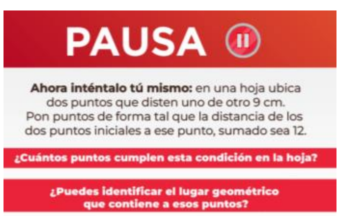
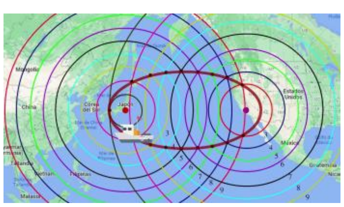


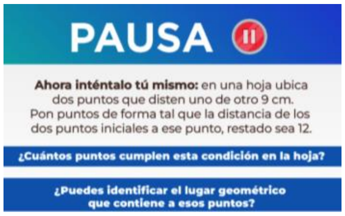
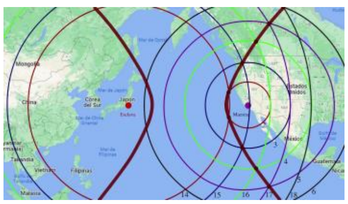
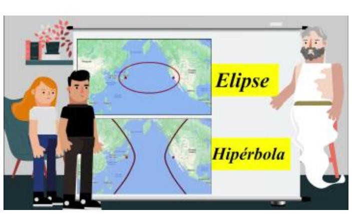
Figura 45. Sección Propiedades de la reflexión

Fuente: Elaboración propia

4.2 Descripción de los videos:

Mediante las Tablas 23, 24 y 25 se presentan sendas descripciones de contenido relativo a cada uno de los videos diseñados.

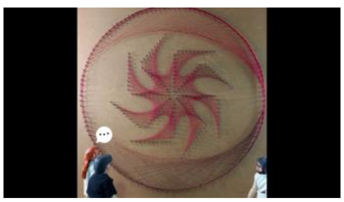
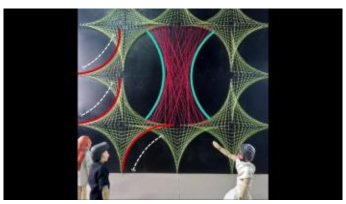
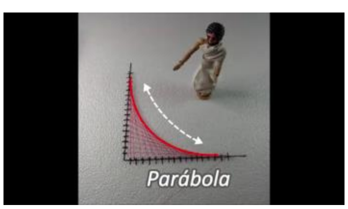
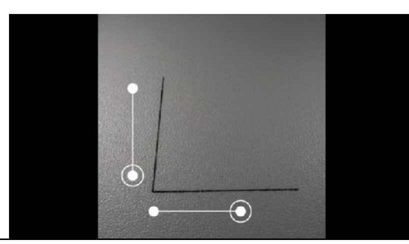
Video	Descripción
Video de trayectorias de un vehículo marítimo *Momento 1:* Introducción  Minutos: 0:00 – 2:31	En este video, Johan y Loran le piden un deseo al genio de la lámpara Apolonio, este los deja en medio del océano en un barco con un monitor lleno de datos acerca de la distancia que tienen con respecto a unas antenas, y con un manual lleno de información sobre los controles. Al intentar navegar y usar en los controles la opción del piloto automático Johan y Loran se dan cuenta de que no saben cuál es su rumbo ni ubicación, por ello deciden sacar el manual en busca de información, en este encuentran que el barco tiene un receptor de señal y la recibe desde dos estaciones distantes, una en Japón llamada Esclava y otra en Estados Unidos llamada Maestra, estas están sincronizadas y emiten una señal cada 0.05 segundos. El receptor de señales de radio está acompañado de una computadora que convierte estas señales en distancias, registrando en un monitor las distancias que tiene el barco con las dos antenas, en medio del registro de estas distancias se muestra un dato numérico que nunca cambia, este tiene el nombre de “relación” y es el único dato que se sigue mostrando luego de un incidente en donde entra agua al barco y el monitor deja de funcionar.
Momento 2: Invitación 1  Minutos: 2:32 – 5:39	Johan y Loran llegan a la conclusión de que ese dato es la relación que hay entre las distancias del barco a las dos antenas, y se preguntan ¿de qué manera se relacionan las distancias con el número 12? Suponen que al sumarse las distancias o restarse se puede obtener este número. Luego se preguntan ¿De qué manera el piloto automático mueve la nave cuando la suma siempre de 12? Por lo que deciden hacer una simulación en el mapa, suponiendo que las distancias sumadas siempre den como resultado 12. En este momento se explica cómo se puede hacer uso de la circunferencia para esta simulación y se hace una pausa que invita al usuario a hacer la simulación en una hoja de papel.
Momento 3: Ilustración de la simulación con la suma 	En este momento los personajes realizan la experimentación con la adición, escogiendo números cuya suma siempre sea igual a 12 y trazando circunferencias con centro en las antenas y con radios cuya suma sea ese número. Ejemplo: Se realiza una circunferencia de radio 9 con centro en la antena Esclava y una circunferencia de radio 3 con centro en la antena Maestra, de modo que $9 + 3 = 12$, luego se marcan los puntos donde se intersecan las circunferencias. Se repite el proceso con circunferencias de varios radios, pero que

Minutos: 5:40 – 6:18	mantengan la suma 12, hasta poder vislumbrar la curva resultante de marcar las intersecciones (Elipse).
Momento 4: Invitación 2  Minutos: 6:19 – 7:19	Después de haber ilustrado la forma en la que se hizo la simulación con la suma, se proporcionan un par de ejemplos de la forma en la que se puede hacer la simulación con la resta usando circunferencias. Posterior a ello se hace una invitación al usuario para que realice en una hoja de papel de manera análoga la metodología ilustrada previamente, con la intención de que pueda vislumbrar la curva resultante por sí mismo.
Momento 5: Ilustración de la simulación con la resta  Minutos: 7:20 – 8:18	En este momento los personajes realizaron la experimentación con la resta, escogiendo números cuya resta siempre sea igual a 12 y trazando circunferencias con centro en las antenas. Ejemplo: Se realiza una circunferencia de radio 14 con centro en la antena Esclava y una circunferencia de radio 2 con centro en la antena Maestra, de modo que $14 + 2 = 12$, luego se marcan los puntos donde se intersecan las circunferencias. Se repite el proceso hasta poder vislumbrar la curva resultante de marcar las intersecciones (Hipérbola).
Momento 6: Ubicación en el mapa   Minutos: 8:19 – 9:49	En este momento Johan y Loran se preguntan ¿Cuál de las anteriores trayectorias sigue nuestro barco? ¿Cuál es nuestra ubicación en el mapa?, para ello recurren a volver a leer el manual en busca de nueva información que les permita solucionar estas preguntas. Finalmente encontraron información acerca de una tercera antena, esta genera una segunda curva y el punto de intersección de estas dos curvas es la ubicación del barco. Con la primera trayectoria se genera dos intersecciones, por lo tanto, dos ubicaciones en el mapa, y con la segunda trayectoria se genera solo una intersección (al tomar solo una hoja de cada hipérbola) y por lo tanto una sola posible ubicación en el mapa.
Momento 6 (parte 2): Conclusiones  	Los protagonistas concluyen que, por conveniencia, la hipérbola es la curva que mejor se acomoda a su posible trayectoria; luego Apolonio llega para explicarles que estas son curvas muy importantes, les dice que una se llama elipse y la otra hipérbola, y que esta segunda curva es la utilizada en el sistema de navegación Loran, debido a que no genera más de una posible ubicación en el mapa, a diferencia de la elipse. Finalmente, Loran está muy emocionada por aprender acerca de estas curvas y le pide a Apolonio poder aprender más sobre curvas, con lo que este le

	concede su deseo y trona los dedos para llevarse a Johan y Loran a otro lugar en donde aprenderán más sobre estas curvas. Los otros dos videos aluden a ese lugar.

Tabla 23. Descripción del video de trayectorias de un vehículo marítimo

A continuación, se presenta en la siguiente Tabla 24 una descripción del contenido del video relativo al arte Hilorama y las curvas que este permite vislumbrar.

Video	**Descripción**
Video sobre el arte Hilorama *Momento 1:* Introducción   Minutos: 0:00 – 0:48	En este video, Loran y Johan aparecen en un museo llamado “Museo de las curvas” en donde ven obras de arte construidas a partir de un arte llamado Hilorama, esto es, ven cuadros que dejan ver curvas a partir del uso del hilo tensado. Apolonio, quien es su guía, les muestra distintos cuadros y las curvas exhibidas en ellos. Loran y Johan, logran recordar un par de curvas conocidas por su anterior aventura, emocionados por las obras, le preguntan a Apolonio ¿cómo fueron construidas estas obras? Y Apolonio decide mostrar paso a paso la forma en la que se construyen curvas cónicas por medio del arte Hilorama.
Momento 2: Construcción de una parábola con arte Hilorama  Minutos: 0:49 – 1:54	Apolonio invita a los usuarios a construir su propio cuadro Hilorama, advirtiendo los materiales necesarios para poder construirlo; estos son: • Una superficie que se pueda rayar y perforar • Puntillas • Hilo de distintos colores Posteriormente procede a explicar de manera detallada el paso a paso para la construcción de la parábola en Hilorama:  *Paso 1:* dibujar dos segmentos perpendiculares entre sí y con unión en uno de sus extremos.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>


Paso 2: realizar marcas en los segmentos de forma tal, que todas equidisten, posteriormente se deben clavar puntillas en estas marcas.

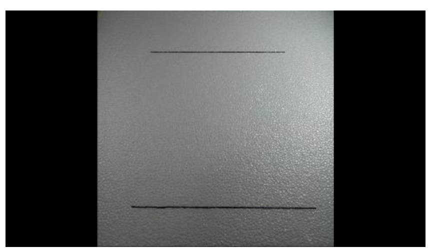
Paso 3: unir con el hilo la primera puntilla de izquierda a derecha del segmento horizontal, con la primera puntilla de arriba hacia abajo del segmento vertical, luego la segunda puntilla de izquierda a derecha del segmento horizontal, con la segunda puntilla de arriba hacia abajo del segmento vertical, y así sucesivamente.

Al repetir el paso 3 hasta acabar las puntillas, se podrá observar una parábola construida a partir del arte Hilorama.
</td>
</tr>
<tr>
<td>
Momento 3: Construcción de una hipérbola con arte Hilorama

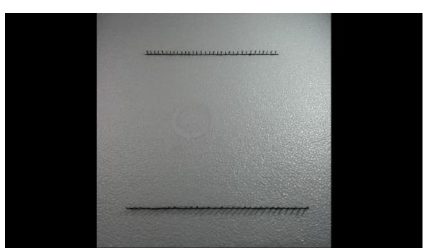
Minutos: 1:55 – 3:15
</td>
<td>
En este momento Apolonio invita al usuario a realizar un cuadro Hilorama advirtiendo cuales son los materiales necesarios para poder construirlo, estos son:

Una superficie que se pueda rayar y perforar
Puntillas
Hilo de distintos colores

Posteriormente procede a explicar de manera detallada el paso a paso para la construcción de la hipérbola en Hilorama:



Paso 1: dibujar dos segmentos paralelos entre sí.



Paso 2: realizar marcas en los segmentos de forma tal, que todas equidisten, posteriormente se deben clavar puntillas en estas marcas.
</td>
</tr>
</table>

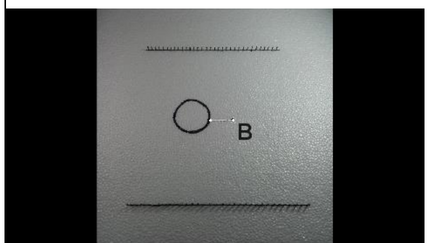
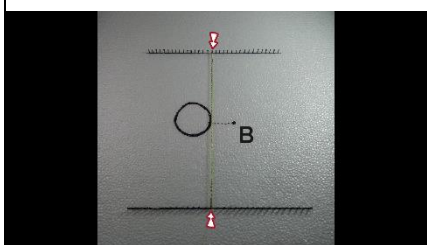
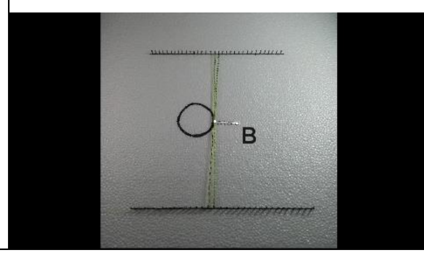
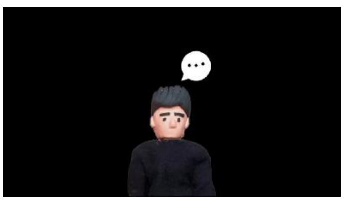
	 *Paso 3:* dibujar una circunferencia y un punto B fuera de la circunferencia.
	 *Paso 4:* dibujar un segmento del punto B a uno de los puntos de la circunferencia,
	 *Paso 5:* trazar una recta perpendicular a ese segmento y que pase por el extremo que pertenece a la circunferencia, de ese modo, aquella recta intersecará a dos puntillas, estas se deben unir con el hilo.
	 *Paso 6:* escoger otro punto en la circunferencia y repetir los *pasos 4* y *5* hasta poder vislumbrar la hipérbola.

Tabla 24. Descripción del video sobre el arte Hilorama

A continuación, se presenta en la siguiente Tabla 25 una descripción del contenido del video relativo a las propiedades de la luz al incidir en espejos con curvas cónicas.

Video	Descripción
Video sobre la reflexión de la luz en espejos curvos *Momento 1:* Introducción	En este video, Loran y Johan siguen en el Museo De Las Curvas, en el que Apolonio los guía por el tránsito de cuartos en los que hay espejos curvos que generan unos “reflejos” en los que las formas de sus cuerpos cambian. Esto hace que los protagonistas le pregunten a Apolonio cómo funcionan estos espejos. Para explicarlo, Apolonio los lleva a realizar un par de experimentos rayos de luz y espejos con curvas cónicas que develarán, según la curva, una propiedad diferente.

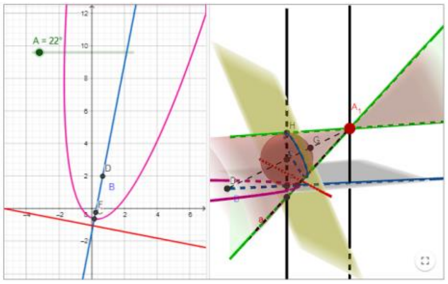
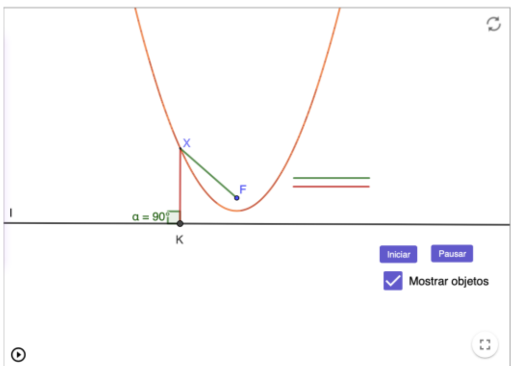
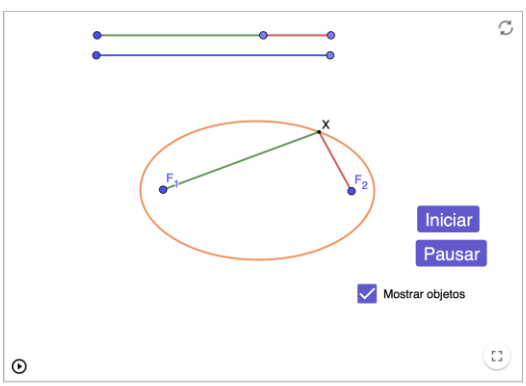
  Minutos: 0:00 – 0:59	
Momento 2: Invitación al usuario  Minutos: 1:00 – 1:15	Se hace una pausa de la historia en la que Johan invita al usuario a realizar el experimento por sí mismo con materiales de fácil acceso, le indica que podría usar papel aluminio para doblarlo de forma tal que consiga una curva de parábola o elipse y que junto con un láser puede intentar replicar el experimento.
Momento 2: Propiedades de la reflexión de la luz en un espejo parabólico  Minutos: 1:16 – 1:39	Apolonio menciona las propiedades que tienen los rayos de luz que inciden de forma paralela al eje de simetría en un espejo parabólico, esto es, que sus rayos reflejados inciden en un único punto llamado foco.

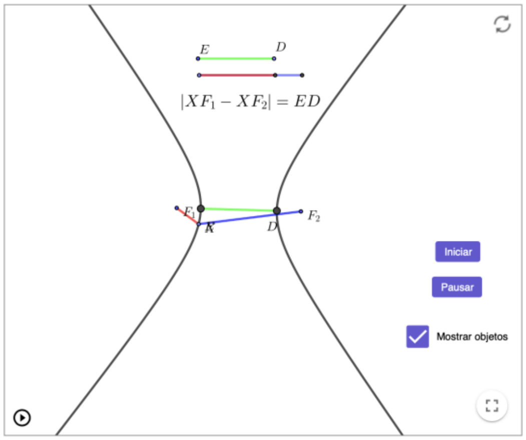
Momento 3: Propiedades de la reflexión de la luz en un espejo elíptico  Minutos: 1:40 – 2:01	En este momento Apolonio menciona las propiedades que tienen los rayos de luz que inciden en un espejo elíptico, esto es que, si estos pasan por el foco 1 de la elipse, su rayo reflejado pasará por el foco 2. Nota: En este video no se hizo experimento ni mención de la hipérbola dado que las propiedades que cumplen los rayos reflejados en un espejo con esta curva no poseen una propiedad especialmente útil.

Tabla 25. Descripción del video sobre la reflexión de la luz en espejos curvos

4.3 Descripción de los applets.

Como herramienta de interacción con el usuario, se decidió crear ilustraciones interactivas que fueran afortunadas al momento de presentar características o propiedades de las secciones cónicas; cada una de ellas se diseñó en relación con la información textual presente en la página: definiciones, demostraciones y procedimientos de construcción. para cada una de la información de carácter textual puesta en las opciones descritas previamente, se han diseñado unos applets que complementan esa información en tres sentidos, que determinan sendos tipos de applets: (i) caracterización de las secciones cónicas (por cortes del cono por un plano, por lugar geométrico, por envolventes); (ii) procedimientos de construcción (que simulan el arte hilorama y los rayos de reflexión en espejos de forma cónica), (iii) apoyos en las demostraciones (de las curvas por envolventes, de las propiedades de reflexión). A continuación, en la Tabla 26 se presenta una descripción de cada uno de los applets diseñados para el recurso educativo digital.

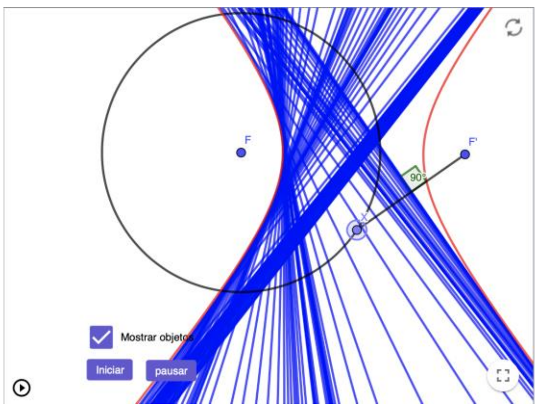
Applet	Descripción
Caracterización de las secciones cónicas	
	*Corte de un cono por un plano* Muestra una de las caracterizaciones fundamentales de las secciones cónicas: curva generada por la intersección de un plano con un cono. El usuario podrá interactuar con el applet moviendo los puntos y rotando el objeto geométrico. Este applet se presenta en la sección “caracterización por el corte de un cono por un plano”
	*Parábola por lugar geométrico* Se presenta una de la caracterización de la parábola por lugar geométrico, que expone la relación de igualdad entre la distancia de un punto de la parábola al foco con la distancia del punto a la recta directriz. En este applet el usuario podrá manipular la animación que ofrece el recurso con los botones que cuenta y mostrar los objetos involucrados. Este applet se presenta en el apartado de la “caracterización de cónicas por lugar geométrico” de la página web.
	*Elipse por lugar geométrico* Muestra la caracterización de la elipse por lugar geométrico a partir de la relación de la suma invariante entre un punto de la curva y los dos puntos dados o focos. Este applet permite al usuario manipular un punto que pertenece a la elipse y botones que pausan o detienen la animación. Este applet se presenta en el apartado de la “caracterización de cónicas por lugar geométrico” de la página web.

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>

Hipérbola por lugar geométrico

Muestra la caracterización de la hipérbola por lugar geométrico donde se evidencia la relación de las distancias de un punto de la hipérbola a los focos de esta, donde da cuenta de la invariante que se establece a partir de la diferencia de las distancias. El usuario tiene la posibilidad de interactuar con el applet pausando la animación y evidenciando los objetos geométricos presentes.

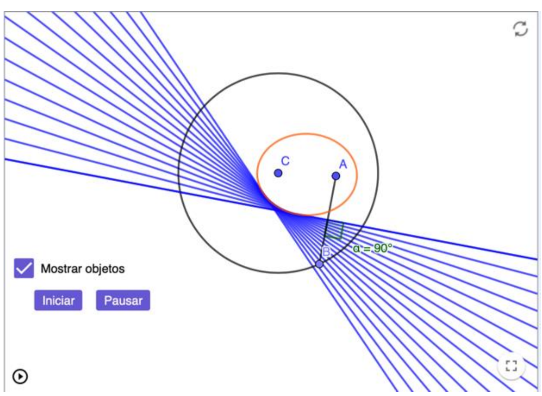
Este applet se presenta en el apartado de la “caracterización de cónicas por lugar geométrico” de la página web.

</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>

Hipérbola por envolventes

Presenta la caracterización de la hipérbola por envolventes. en donde se evidencia la relación que existe entre la recta mediatriz del punto que pertenece a la circunferencia y el que se encuentra al exterior de esta la cual el objeto mediatriz es el protagonista en la construcción, es un applet que permite al usuario manipular el objeto mediatriz ya que evidencia como esta es tangente a la curva.

Este applet se presenta en el apartado de la “caracterización de cónicas por envolventes” de la página web.

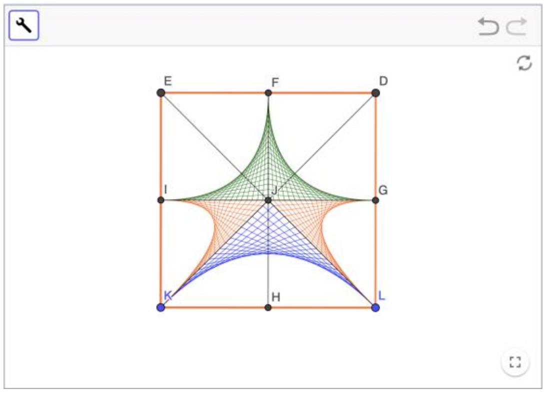
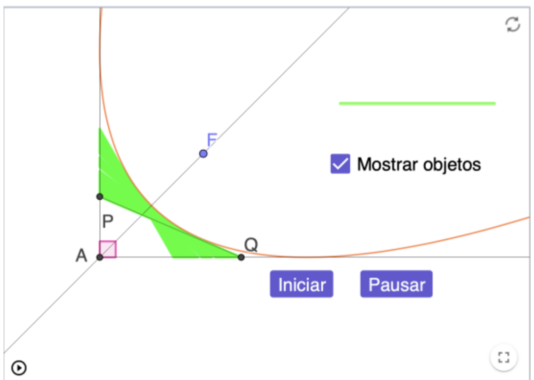
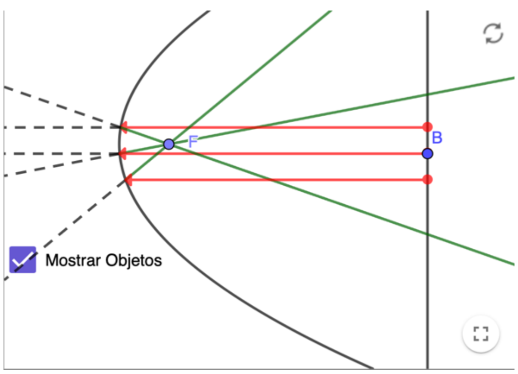
</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>

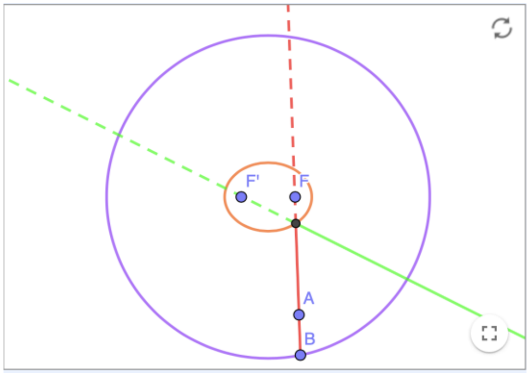
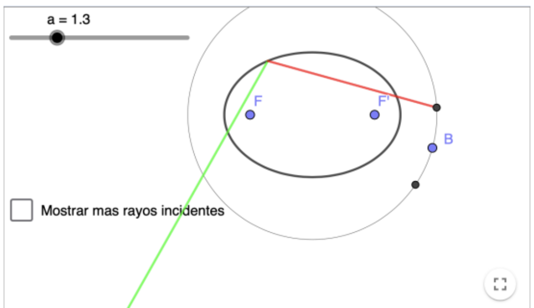
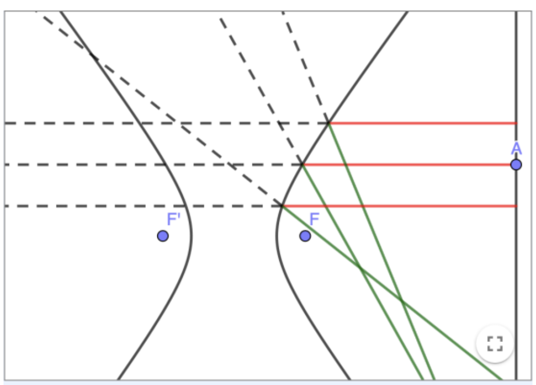
Elipse por envolventes

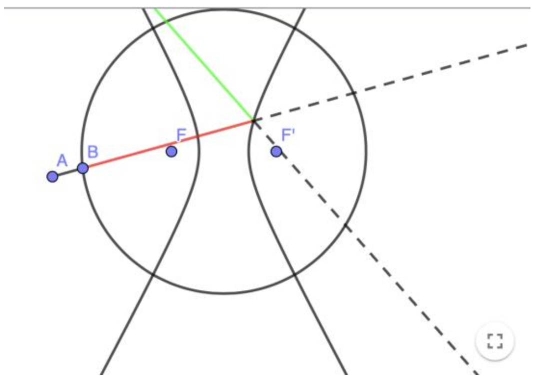
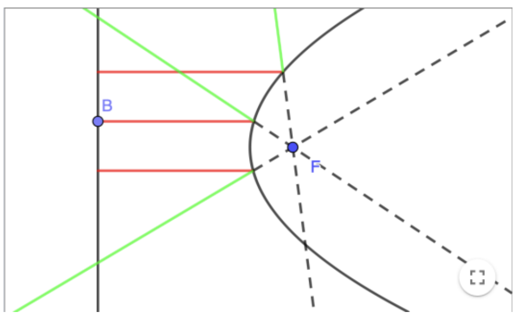
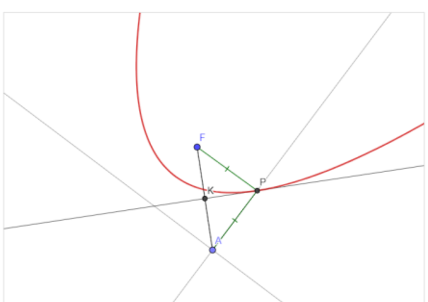
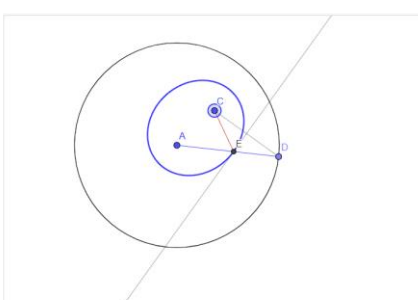
Presenta la caracterización de la elipse por envolventes. En ella la mediatriz del segmento $\overline{AB}$ es el protagonista en esta construcción. ya que es la familia de estas rectas mediatrices la que genera la envolvente. El usuario puede interactuar con el applet manipulando el punto que pertenece a la circunferencia, pausando la animación y mostrando los objetos geométricos qué están presentes en la caracterización.

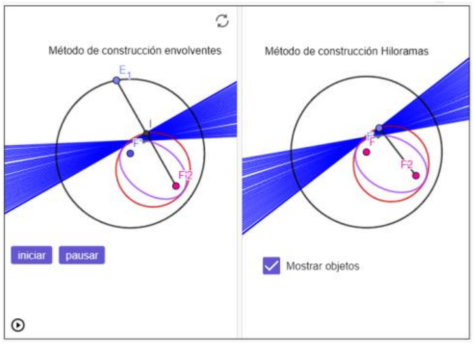
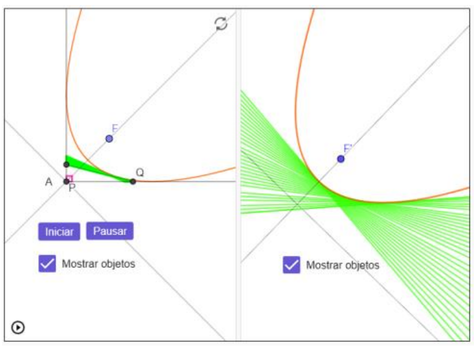
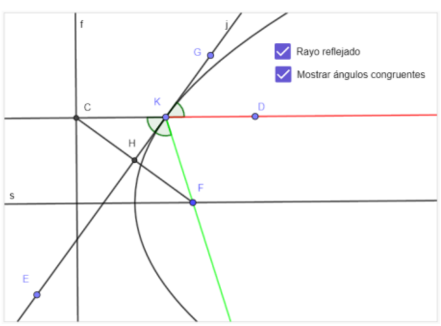
Este applet se presenta en el apartado de la “caracterización de cónicas por envolventes” de la página web.

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2" align="center">(ii) procedimientos de construcción (que simulan el arte hilorama y los rayos de reflexión en espejos de forma cónica</td>
</tr>
</table>

	*Cuadro de hilorama* Es un applet que se caracteriza por ser una herramienta que permite al usuario la facilidad de construir un hilorama, a partir de hacer clic en tres puntos determinados. Esta construcción se basa en el método 2 para construir una parábola que se presenta en la Tabla 14. Este applet se presenta en el apartado de la sección “el arte del hilorama”.
	*Hilorama parábola* Es un applet que muestra la manera en que se genera una parábola a partir del método 2 de construcción presentado para el hilorama elemental. Este applet permite al usuario la posibilidad de manipular la animación y mostrando los objetos protagonistas en el método de construcción. Este applet se presenta en el apartado de la “caracterización de cónicas por envolventes” de la página web.
	*Espejo Parabólico parte cóncava* Muestra la descripción del comportamiento de los rayos de incidencia en espejos parabólicos que se presentan paralelos al eje de simetría de la parábola. En este applet, el usuario podrá manipular los rayos de incidencia y observar cómo se comportan los rayos reflejados, los cuales, al ser paralelos al eje de simetría, concurren en el foco de la parábola. Cuando el usuario da clic en botón (mostrar objetos) observa los objetos que son protagonistas en esta construcción. Este applet se presenta en el apartado de la “propiedades de la reflexión de las secciones cónicas” de la página web.

	*Espejo elíptico parte convexa* Devela el comportamiento de los rayos de incidencia en un espejo elíptico que apunta a uno de los focos de la elipse; estos rayos están contenidos en las rectas que contienen a los focos. En este applet el usuario tiene la capacidad de interactuar con la representación moviendo los puntos A y B los cuales direccionan los rayos de incidencia. Este applet se presenta en el apartado de la "propiedades de la reflexión de las secciones cónicas" de la página web.
	*Espejo elíptico parte cóncava* Muestra el comportamiento de los rayos de incidencia en espejos elípticos y cómo estos al apuntar a uno de los focos, su rayo reflejado pasa por el otro foco de la elipse; la interacción con el usuario se da cuando manipula uno de los puntos de la circunferencia que a su vez controla la posición del rayo de incidencia. A diferencia con la construcción anterior los rayos se reflejan en la parte cóncava de la curva. Este applet se presenta en el apartado de la "propiedades de la reflexión de las secciones cónicas" de la página web.
	*Espejo Hiperbólico parte cóncava* En este applet se evidencia el comportamiento de los rayos de incidencia en espejos con curva hiperbólica; en este caso el usuario podrá manipular los rayos de incidencia moviendo el ponto A. Es una construcción que no devela ninguna propiedad en específico puesto que los rayos no concurren y no es característico que pase por alguno de los focos, la intención de elaborarlo se hizo para que el usuario notara la diferencia que tiene cuando la curva es parabólica o hiperbólica. Este applet se presenta en el apartado de la "propiedades de la reflexión de las secciones cónicas" de la página web.

	*Espejo hiperbólico parte convexa* Es un applet que muestra el comportamiento de los rayos de incidencia en espejos hiperbólicos convexos donde se evidencia el cómo el rayo de incidencia se comporta cuando este es apuntado a uno de los focos de la hipérbola ya que el rayo reflejado se dirige en dirección del otro foco. En este applet el usuario podrá manipular la dirección del rayo de incidencia moviendo los puntos A y B que pertenecen a una circunferencia el cual se construyó de esta manera porque permite tener una visión 360 de la situación. A diferencia de la construcción anterior los rayos que se reflejan apuntan a la parte convexa de la curva. Este applet se presenta en el apartado de la “propiedades de la reflexión de las secciones cónicas” de la página web.
	*Espejo parabólico parte convexa* Muestra el comportamiento de los rayos de incidencia en un espejo parabólico donde los rayos reflejados están contenidos tiene la posibilidad de manipular los rayos de incidencia con un punto, que, al deslizarlo por una recta, cambia la posición de los rayos incidentes. Este applet se presenta en el apartado de la “propiedades de la reflexión de las secciones cónicas” de la página web.
(iii) apoyos en las demostraciones (de las curvas por envolventes, de las propiedades de reflexión).	
	*Demostración parábola por envolventes* El applet que se presenta es un apoyo para la demostración de la parábola por envolventes del método 1 de construcción. En este applet el usuario podara interactuar, manipulando el Punto A que pertenece en este caso a la directriz de la parábola. Este applet se presenta en el apartado de la “caracterización de cónicas por envolventes” de la página web.
	*Demostración elipse por envolventes* El applet que se presenta es un apoyo para la demostración de la elipse por envolventes del método 1 de construcción. En este applet el usuario podrá interactuar, manipulando el punto D que pertenece a la circunferencia. Este applet se presenta en el apartado de la “caracterización de cónicas por envolventes” de la página web.

	*Equivalencia entre los métodos de determinar la elipse por envolventes* Es un applet que se divide en dos ventanas una por cada método de construcción presentado para determinar la caracterización por envolventes. En el applet el usuario podrá manipular los puntos de la construcción, controlar la animación y dando clic a la casilla interactiva para mostrar los objetos protagonistas en cada construcción. Además, las ventajas de este applet es que permite hacer inferencias al usuario ya que los objetos que se relacionan en ambas construcciones se presentan del mismo color. Este applet se presenta en el apartado de la “caracterización de cónicas por envolventes” de la página web.
	*Equivalencia entre los métodos de determinar la parábola por envolventes* Este applet presenta la equivalencia entre los dos métodos presentados para caracterizar la parábola por envolventes, uno de los cuales es fundamental para la construcción de los hiloramas. El siguiente applet se divide en dos ventanas, donde el usuario podrá interactuar, controlando la animación y mostrando los objetos que son imprescindibles en cada método de construcción. Además, el usuario podrá identificar los objetos que se relacionan en ambas construcciones ya que se presentan del mismo color. Este applet se presenta en el apartado de la “caracterización de cónicas por envolventes” de la página web.
	*Demostración propiedad de la reflexión de la parábola* Este applet sirve como apoyo en la demostración de las propiedades, de los rayos de incidencia en espejos parabólicos. El usuario podrá interactuar con el applet dando clic en las casillas de mostrar objetos y observar aquellos elementos que son fundamentales en la demostración. Este applet se presenta en el apartado de la “propiedades de la reflexión de las secciones cónicas” de la página web.

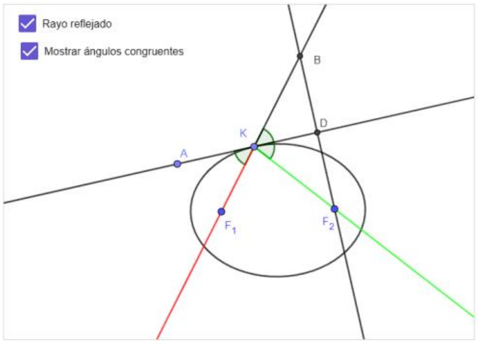
	*Demostración propiedad de la reflexión de la elipse* Este applet ayuda al usuario en la demostración de las propiedades de los rayos de incidencia en espejos con curva elíptica. El usuario podrá interactuar con applet dando clic en las casillas de mostrar objetos y observar aquellos elementos que son fundamentales en la demostración. Este applet se presenta en el apartado de la "propiedades de la reflexión de las secciones cónicas" de la página web.

Tabla 26. Descripción de los applets

Fuente: Elaboración propia

4.4 Descripción de la trayectoria de estudio

Dado que la página fue diseñada de forma tal que cada una de las secciones descritas previamente son autocontenidas (esto es, no hay una sección que sea prerrequisito de otra), nosotros creemos menester sugerir una ruta de estudio que potencie las características de la página y promueva un estudio de las secciones cónicas que se condiga con los ETG que quisimos exaltar y la secuencialidad *experimental-aproximación teórica*. Mediante la Figura 46 exponemos la trayectoria de estudio que consideramos altamente beneficiosa para que el profesor pueda aprovechar al máximo el REDA. Específicamente, la trayectoria propuesta se centra en seguir una fase experimental y empírica en relación con el uso de las secciones cónicas, para, a partir de esto, continuar con el estudio de información teórica que apunta a profundizar sobre caracterización y propiedades de los objetos protagonistas: parábola, elipse e hipérbola.

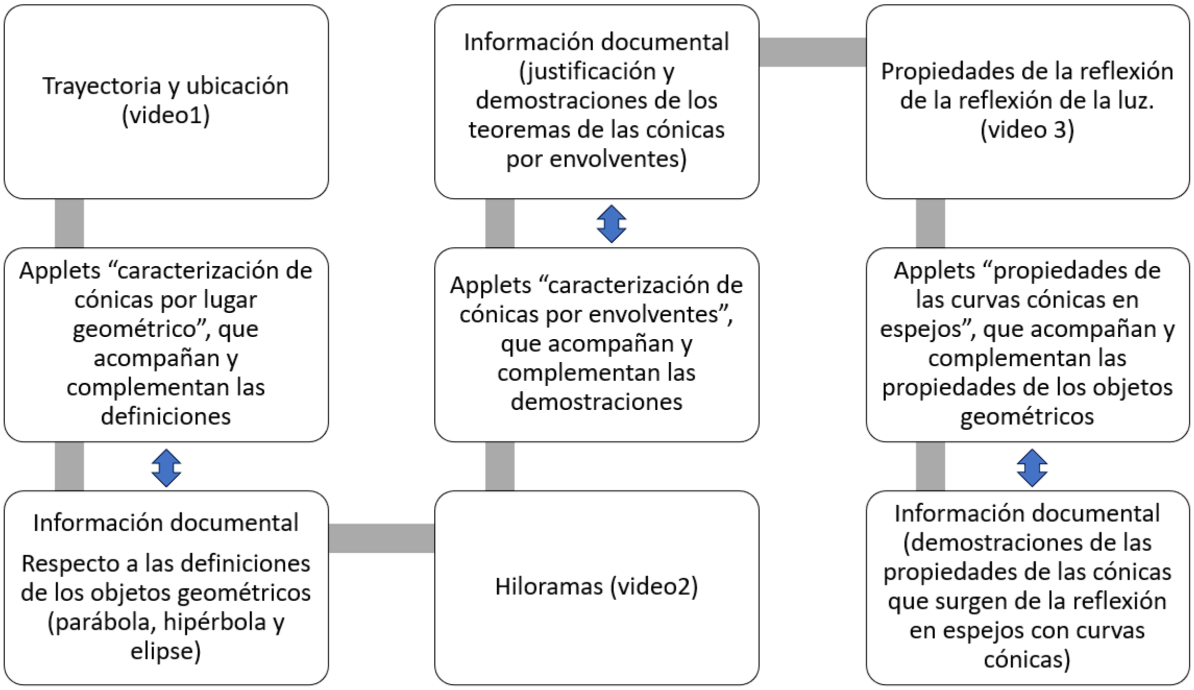


Figura 46. Trayectoria de estudio

Fuente: Elaboración propia

Enseguida, explicamos la trayectoria. En primer lugar, proponemos que el profesor o usuario entre en la pestaña "algunos usos" y en ella, se aborde, en su orden, la pestaña "Trayectoria y ubicación", "Hiloramas" y "Reflexión en espejos curvos". Para cada una, sugerimos hacer el estudio completo relativo a cada uno de tales usos.

Así, por ejemplo, proponemos que para el uso "trayectoria y ubicación", primero se observe el video con la historieta que ilustra el uso análogo al del Sistema de Loran. Si el video se observa en clase, sugerimos que el profesor invite a sus estudiantes a hacer las experimentaciones que los protagonistas proponen. Ello incentiva que los estudiantes hagan actividad matemática en el sentido de hacer procedimientos de construcción que sigan las instrucciones sugeridas por los protagonistas y, con base en estos, hace conjeturas a partir de lo que observan (esto es, establecer que un procedimiento lleva a una trayectoria tipo elipse, y el otro a una trayectoria tipo hipérbola).

Hecho esto, sugerimos que se aborde la caracterización de las secciones cónicas por lugar geométrico, bien sea por el botón "explorar" asociado al uso descrito o la pestaña "Cónicas por lugar geométrico" del menú "caracterización de las cónicas". En ese marco, sugerimos que el usuario lea o que el profesor invite al estudiante a leer el texto informativo sobre tal caracterización y manipule el applet que ilustra cada definición. Vale aclarar que en esta sección el estudiante puede leer también información sobre la parábola, así esta no esté inmersa en el video sobre trayectorias. Sugerimos al profesor que les indique a sus estudiantes que, al manipular los applets, pongan principal atención a los colores de los segmentos para que los asocien con las distancias involucradas en las definiciones; de esa manera, se favorece la comprensión de las definiciones provistas para cada objeto.

En segundo lugar, sugerimos que el usuario aborde, o el profesor invite a sus estudiantes a abordar, el uso relativo a los Hiloramas, cliqueando la opción respectiva en el menú “Algunos usos”. Sugerimos este orden dado que esta opción permite a los usuarios abordar otra manera de caracterizar las curvas tipo cónica, además, de una manera alternativa a la usual (i.e., la denomina “por envolventes”). Avisamos que la manera de adentrarse a este uso permite un acercamiento que motiva a los estudiantes o usuarios por cuanto tienen que ver con figuras artísticas que no solo se ilustran, sino que se experimentan; esto es, en medio del video correspondiente a este uso, sugerimos que el usuario lleve a cabo, o el profesor incentive a sus estudiantes a realizar, los procedimientos que indica el personaje Apolonio para construir un hilorama específico. Por supuesto, al asumir una perspectiva en la que la experimentación no es suficiente, sugerimos que el usuario profundice o que el profesor invite a sus estudiantes a profundizar en los resultados obtenidos mediante los procedimientos de construcción, a partir del estudio de estas construcciones al punto de determinar por qué, teóricamente, los objetos construidos determinan curvas específicas. Así las cosas, mediante el botón “Explorar” asociado a ese uso, o la pestaña “Cónicas por envolventes” del menú “caracterización de las cónica” se sugiere hacer el estudio respectivo.

En ese orden de ideas, sugerimos que el usuario realice una lectura de la introducción que se muestra en esta sección, donde se presenta la definición de una curva por envolventes; cabe resaltar que la definición cobrará sentido a medida que el usuario o estudiante explore con cada uno de los elementos presentados en esta sección. Así las cosas, sugerimos al profesor que invite a sus estudiantes a interactuar con cada uno de los applets contenidos en esta sección, y a identificar el papel de cada uno de sus elementos. En esta sección se presentan dos tipos de applets: (i) los que dan lugar a la caracterización de las cónicas por envolventes y los que se condicen con los procedimientos de construcción para los hiloramas (que también dan lugar a esta caracterización);

y (ii) los que son apoyo y se condicen con los documentos que presentan las demostraciones y ayudan al usuario a comprender las justificaciones que las sustentan.

En tercer lugar, sugerimos el estudio relativo a las propiedades de la reflexión de la luz en espejos curvos, al que se accede desde el submenú “Algunos usos” y cliqueando luego “Reflexión en espejos curvos”. En este marco se hace un abordaje de las propiedades de las secciones cónicas desde la física, estudiando fenómenos de reflexión de la luz en espejos curvos de forma cónica. En primer lugar, se sugiere al profesor ver el video con sus estudiantes y realizar los experimentos que sugiere el protagonista “Apolonio”, los cuales (con ayuda de materiales de fácil acceso) se pueden replicar construyendo un espejo con las características de ser una curva cónica. En esta exploración se espera que el estudiante realice conjeturas acerca del comportamiento de los rayos reflejados. Finalizando con la actividad planteada en el video, se hace la invitación a continuar con aspectos relacionados con la fase de experimentación de una manera más teórica. Cliqueando en el botón “explorar” o en la parte izquierda del menú “propiedades de la reflexión”.

Hecho lo anterior, sugerimos abordar las propiedades de la reflexión en espejos con curva cónica, sugiriendo que el usuario o el estudiante interactúe con los applets que presentan las propiedades de la reflexión antes descritas. De esta manera se pretende que el estudiante analice las conjeturas planteadas en la etapa de experimentación, se sugiere que posteriormente se manipule aquellos applets que apoyan y se relacionan directamente con las demostraciones presentadas de manera escrita y que dan lugar a las propiedades de la reflexión de la luz en espejos con curva cónica.

Finalmente, como contenido adicional en la página web, pero que no se desarrolla, se sugiere estudiar la caracterización de las cónicas por el corte de un cono por un plano, que se encuentra en el submenú “caracterización de las cónicas”. Para este apartado sugerimos al profesor que presente esta caracterización acompañada de un contexto histórico, después de haber explorado el resto de información contenida en la página web, para indicar que esa es una caracterización típica o usual de las curvas cónicas cuyo estudio no es el protagonista en la página.

CAPITULO 5. CONCLUSIONES

En este capítulo se presentan las conclusiones de la elaboración de nuestro REDA en relación con tres apartados en específico: el cumplimiento parcial o completo de los objetivos planteados; los aportes y aprendizajes que nos dejó la elaboración de este trabajo como personas y futuros docentes; y finalmente, las proyecciones que tenemos para el REDA.

5.1 Cumplimiento de los objetivos

En la siguiente Tabla 27 se presenta un contraste entre los objetivos planteados y su cumplimiento parcial o completo, describiendo la forma en la que se procuró llevarlos a cabo durante el desarrollo de este trabajo.

Objetivo general	
Crear una página web con rasgos de un recurso educativo digital abierta, con el fin de favorecer procesos de estudio alusivo a las secciones cónicas.	Se elaboró una página web que proporciona información y recursos útiles que podrían promover el aprendizaje de las secciones cónicas. La página contiene videos, applets y textos informativos de nuestra autoría; hemos procurado hacer un diseño accesible e interactivo. Dentro de esta plataforma digital nos enfocamos en privilegiar algunos de los usos de las secciones cónicas que apunta a favorecer una fase experimental que da lugar a distintas caracterizaciones de las cónicas, para luego, promover un acercamiento teórico. Creemos que nuestra propuesta concreta una manera de estudio alternativa diferente a la tradicional, esto se evidencia en la organización de la información, porque primero se presentan los problemas y a partir de ellos se llegan a aspectos de orden teórico.
Objetivos específicos	
OE1. Determinar criterios de idoneidad, de orden epistémico, para el tema "secciones cónicas" que se puedan usar como insumo para el diseño de los recursos educativos digitales.	Procuramos atender criterios de idoneidad didáctica propuestos por Godino (2013), que están directamente relacionados con nuestro recurso digital; específicamente, tomamos en cuenta aspectos de orden epistémico, el mediacional y el ecológico. En cuanto a lo *epistémico*, se procuró garantizar coherencia entre los aspectos situacionales con aquellos elementos de orden teórico que estos suscitan *definiciones, propiedades y argumentos*. Mediante las situaciones descritas en los videos quisimos presentar una faceta funcional de los objetos protagonistas (secciones cónicas) para generar mayor motivación por parte de los usuarios de la página. En este sentido, creemos que promovemos un Espacio de Trabajo Geométrico (ETG) que apunta a suscitar experimentación y conjeturación. Al aludir a objetos cercanos a los estudiantes que se articulan con el desarrollo coherente del currículo (Parábola, Elipse e Hipérbola), hemos considerado criterios de idoneidad *ecológico*. La forma en que presentamos la información con la página web, tuvo en cuenta el criterio de orden *mediacional*. Específicamente, procurar articular videos animados,

	applets construidos en GeoGebra e información de carácter textual que apuntaban a promover interacción con el usuario. Así las cosas, partes de los videos invitan a que los usuarios hagan exploraciones similares a los que hacen sus protagonistas, y los applets están pensados para que los usuarios visualizasen propiedades puestas en texto sobre las cónicas. En resumen, estos criterios de idoneidad nos brindaron una orientación en cuanto a la metodología usada para diseñar la página web, los videos, los applets y los textos informativos contenidos en ella.
OE2. Diseñar cada uno de los elementos (videos, construcciones en GeoGebra y textos informativos), dedicados a las secciones cónicas, que tomen en cuenta los paradigmas geométricos propuestos por Kuzniak y Rauscher (2014).	El REDA se construyó de forma tal, que sus componentes atiendan la propuesta de Kuzniak y Rauscher (2014) sobre los paradigmas de la geometría escolar y los ETG. Así las cosas, procuramos involucrar una aproximación experimental que invite al usuario a realizar actividades geométricas que generen los ETG denominados geometría natural I y Geometría establecida I: • Los videos fueron diseñados de forma tal, que presentan una situación problema en la que después de ponerse en pausa, invite al usuario a interactuar, proponiendo que realice actividades según las indicaciones hechas. • Los applets o construcciones en GeoGebra fueron diseñados con la intención de que el usuario evidencie distintas caracterizaciones y propiedades de las curvas por medio de la manipulación de estos. • Los textos informativos contenidos en la página web, procuran ahondar en las matemáticas que yacen inmersas en los usos de las secciones cónicas, proporcionando diferentes formas de caracterizarlas y demostraciones de propiedades. Estos a su vez tienen la intención de generar el ETG – Geometría establecida I.
OE3. Hacer una descripción del REDA diseñado indicando posibles rutas de enseñanza que puede emplear el profesor para sacar un mejor provecho del recurso.	Inicialmente, se estableció el objetivo de crear una cartilla que sirviera como guía de apoyo para el profesor, con la cual se pretendía ofrecer a las indicaciones para un uso de la página web (esto es, posibles trayectorias de aprendizaje) que lo explotaran al máximo. Sin embargo, la elaboración de los recursos digitales (videos con historietas, applets y estructura de la página misma) nos tomó más tiempo del planeado. Ello llevó a la necesidad de modificar este objetivo advirtiendo que solo presentaríamos una trayectoria de estudio y unas pocas sugerencias al profesor. Dicho lo anterior, propusimos una trayectoria que pretende garantizar el mayor aprovechamiento del recurso digital, respetando la secuencialidad experimentación-estudio teórico sugerida por los ETG (geometría natural I y geometría establecida I).

Tabla 27. Cumplimiento de los objetivos

5.2 Aportes y aprendizajes como futuros profesores de matemáticas

La realización de este trabajo nos dejó varios aprendizajes que aportan en nuestra formación como futuros profesores de matemáticas, estos son:

Sobre la didáctica: adquirimos conocimientos acerca de la creación y diseño idóneo de recursos digitales enfocados al favorecimiento del estudio autónomo de objetos de las matemáticas escolares como los son las cónicas, procurando suscitar en él una motivación generada por la faceta funcional de estos objetos, los videos que describen esos usos, las invitaciones que estos hacen para realizar actividad experimental y los applets de interacción. También, aprendimos acerca de los aspectos que procuran garantizar que un recurso digital de lugar a la generación de espacios de trabajos geométricos.

Sobre lo matemático: Aprendimos que las secciones cónicas tienen una gran variedad de usos en el arte, en la navegación, en la construcción, en la descripción de movimientos planetarios, en la ingeniería y en la óptica. Aunque todos estos usos no se toman en cuenta en este trabajo, sí fueron aprendizajes que salieron a relucir en medio de la investigación documental. De manera más específica, pudimos profundizar en tres usos de las cónicas que no conocíamos y que nos permitieron ahondar en aspectos de orden matemático subyacentes a tales usos. Así, por ejemplo, aprendimos a hacer cuadros de arte Hilorama y cómo esta técnica de tensar hilos se relaciona con la caracterización de curvas por envolventes; aprendimos sobre el funcionamiento de un sistema de navegación marítimo, que usa las propiedades de la invarianza de la hipérbola y cómo este puede dar lugar al estudio de la caracterización de curvas por lugar geométrico.

Sobre el uso de las TIC: Durante la elaboración del REDA, conocimos varias plataformas que ofrecían distintas herramientas y servicios que contribuyeron a la elaboración de los componentes de nuestro proyecto. Esto debido a que no contábamos con un bagaje intelectual acerca del diseño de páginas web, edición y creación de videos animados y programación de applets interactivos; esto nos supuso un reto mayúsculo que procuramos solucionar con la indagación acerca del uso de varias herramientas para crear contenido digital; aprendimos a montar escenarios virtuales y avatares que interactúan entre sí dando vida a las historias consignadas en los libretos, además de una segunda forma de hacer videos con la técnica de Stop Motion y lo que implica crear su utilería; en cuanto a las imágenes interactivas, es decir applets, aprendimos sobre cómo programarlos y el potencial interactivo que estos aportan a una plataforma digital. Todo esto lo hicimos más bien mediante una aproximación empírica que fuimos fundamentando a la vez que explorábamos cada una de las herramientas.

En cuanto a la proyección como futuros profesores: Finalmente, consideramos que hubo una mejora en nuestra escritura y estructuración de textos, cambió nuestra perspectiva tradicional acerca de la forma en la que se introducen objetos matemáticos al aula. Como futuros educadores, este trabajo nos enseñó que el aprendizaje en el aula no solo se logra a través de clases magistrales, sino que esto puede ser complementado con recursos digitales que ayuden al maestro a generar cierta motivación en el estudiante de la mano de las TIC. Adicional a esto, sumamos el aprendizaje de situaciones que podemos llevar al aula, mostrando la utilidad de las matemáticas y en especial de la geometría en asuntos de interés común, generando conciencia de la faceta herramiental de las matemáticas, como una aproximación inicial a aspectos de índole un poco más teóricos.

Consideramos que la elaboración de este tipo de trabajos de grado, que pretende construir un recurso digital, podría incentivar a otros estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas o carreras afines a realizar un trabajo similar, que tiempo después contribuya al fortalecimiento y a la diversidad de herramientas digitales que puedan ser usadas por la comunidad de docentes para la educación.

5.3 Dificultades y proyecciones sobre nuestro REDA

Una de las mayores dificultades que atravesamos en la elaboración de nuestro REDA fue el diseño de los componentes digitales que conforman nuestro recurso: al no contar con conocimientos previos ni suficientes al respecto, nos vimos obligados a indagar exhaustivamente y consultar a expertos en el tema para poder garantizar cierta calidad e idoneidad; esta falta de experticia provocó una demora en cuanto a alcanzar la meta de finalizar el recurso, esto es, la creación de una cartilla que sirviera como guía de apoyo para el docente, en vez de ello, sugerimos una ruta de estudio que consideramos es la más conveniente.

Otra de las dificultades tuvo que ver con vernos enfrentados a proponer una organización alternativa a la tradicional, que se basó en presentar primero los usos y aplicaciones de los objetos protagonistas para luego profundizar en aspectos de orden teórico, esto es diferente a la organización de la información tradicional porque en ella se presenta primeramente aspectos de orden teórico para luego ahondar en la forma en la que estos conocimientos se pueden aplicar o usar. Por supuesto, nuestro esquema mental era al contrario de este y al tenerlo tan apropiado, fue muy difícil seguir una línea coherente con la idea original de una organización alternativa.

Esperamos que nuestra página web pueda ser difundida, a la vez que seguimos trabajando en el diseño de esta para ganar mayor calidad en la presentación de información y en las posibilidades de interacción. Somos conscientes que este último asunto sigue siendo limitado y que para que nuestro recurso sea aproxime más a un REDA debe tener posibilidades de hacer seguimiento al aprendizaje del usuario.

En línea con seguir alimentando información en nuestra página, una proyección del trabajo consiste en incorporar otros tipos de usos que den lugar a otras caracterizaciones de las curvas presentadas; por ejemplo, mediante lugares geométricos establecidos de otras maneras.

Finalmente, una proyección clave consiste en usar este recurso en las clases de matemáticas, de manera que podamos complementar o seguir avanzando con la propuesta de esta monografía al contar con datos y relatos específicos que pongan en evidencia las fortalezas y debilidades de nuestro REDA, sugerencias de uso por parte de estudiantes y profesores, etc.

BIBLIOGRAFÍA

Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B., & Burgos, M. (2018). *Los Vídeos educativos en línea desde las didácticas específicas: el caso de las matemáticas*. Cultura y Educación, 1-30.

Burgos Navarro, M., & Castillo cespedes, M. (2021). *Criterios de idoneidad emitidos para futuros maestros de primaria en la valoracion de videos educativos de matematicas*. Granada.

Combina, S., & Rossetti, J. (2016). Propiedades de un hilorama clásico. *Revista FCEFYN*, 55-62.

Godino, J. D. (2011). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática (CIAEM-IACME)*, (pág. 20). Recife.

Godino, J. D. (2013). *Indicadores de idoneidad didactica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matematicas.* Granada.

Hernandez Alzate, O. A., Zea Lengua, E., & Tebares Cano, D. E. (2016). *La enseñanza de las matemáticas con tic como propuesta para el mejoramiento de la motivación en los estudiantes del grado 11° de la Escuela Normal Superior "La Merced" del municipio de Yarumal. Yarumal, Antioquia, Colombia*.

Kuzniak, A., & Rauscher, j. c. (2014). *How do teachers' approaches to geoemtric work relate to geometry students' learning difficulties?*

MEN. (2015). Informe de gestio 2010 - 2014. *Educación de calidad el camino para la prosperidad*. Bogotá.

Suárez Carrasco, L., & Vallin Gallegos, A. (2017). Cómo elaborar videos educativos. *Red universitaria de julisen*.

UNESCO. (2013). *Enfoque estratégico sobre las TICS en educación en América*. Chile: OREALC-UNESCO.

Valbuena-Duarte, S., Tamara-Gutiérrez, Y., & Berrio-Valbuena, J. (2021). *Intervención didáctica tecnológica para el estudio de las secciones cónicas basada en el potencial semiótico.*

ANEXO A

LIBRETO DEL VIDEO DE TRAYECTORIAS DE UN VEHÍCULO MARÍTIMO

AM: Avatar mujer, AH: Avatar hombre.

Parte 1 escenas 1, 2, 3 y 4

Escena 1 (introducción – contexto)

Contexto: AM y AH están en la casa y ven una lampara de lava encima de uno de los muebles, deciden agitarla y de ella sale un personaje fantástico llamado Apolonio, ellos le piden el siguiente deseo

Parte 1 escena 5, 6 y 7

Apolonio: Yo soy el gran Apolonio de perga, puedes pedirme el deseo que quieras.

AH: Yo quisiera ser navegante.

AM: ¡Yo también!

Parte 2 escena 1

AM: Increíble, estamos en medio del océano, siempre he querido navegar

AH: Pero hay un problema, ¿Cómo haremos para navegar y no perdernos? No sé cómo usar estos controles.

AM: Mira, acabo de encontrar un manual con instrucciones.

AH: Muy bien veámoslo.

Parte 2 escena 3

AM: Se llama… Manual de naveg… Está muy sucio y viejo, algunas partes están dañadas o incompletas.

AH: Ven, deja ver.

AH: Ahí dice como poner el barco en piloto automático.

Parte 2 escena 4

Ponen el barco en piloto automático

Parte 2 escena 5

AH: Veamos que podemos leer.

AM: Dice que es posible saber nuestra ubicación en el mapa a partir de la recepción de las señales de radio.

AH: ¿Señales de radio? Y ¿de dónde provienen?

AM: Sí, aquí dice que se emiten desde dos estaciones distantes, una en Japón llamada esclava y otra en Estados Unidos llamada maestra.

AH: Mira, también dice que las estaciones están sincronizadas y que emiten una señal cada 0,05 segundos

Parte 2 escena 6

AM: Pero ¿eso cómo nos puede ayudar a ubicarnos?

AH: El barco debe tener un receptor de señal.

AM: Debe ser esto (señala un monitor)

AH: Según el manual este dispositivo recibe la señal y con ayuda de la velocidad en que esta llega, puede determinar la distancia a la antena.

AM: Entonces ¿Esto nos indica que tan lejos estamos de cada antena?

AH: Si.

AM: Muy bien, pero ¿Qué hacemos con esas distancias?

Parte 3 escena 1

Ven el monitor y notan que este les arroja las distancias, después de darse cuenta de esto, se filtra agua accidentalmente en el monitor, dañando gran parte de este.

AM: Ay no mira, ya no aparecen las distancias.

AH: Pero mira, arriba de ese dato dice “relación”

Parte 3 escena 2

AM: ¿Significa que ese dato es la relación que hay entre las distancias?

AH: ¿Pero de qué manera se podrían relacionar?

Parte 3 escena 3

AM: Mmm… De pronto si sumas las distancias te da ese número.

AH: ¿Te da 12?

AM: Si, o también podría ser que las distancias restadas den 12.

AH: Pero ¿cómo puede ser eso posible? si yo vi que las distancias cambiaban, debido a que vamos en movimiento.

Fondo dañado

AM: Pues si las distancias aumentan o disminuyen siempre de la misma manera, la suma o la resta puede que se mantenga, es decir, puede haber varios pares de números que restados siempre den 12 o sumados siempre den 12.

AH: ¿Cómo cuáles?

Niña suma los numero en una nube solo parte de la cabeza

AM: Por ejemplo, 6 y 6, sumados dan 12; 5 y 7, sumados también dan 12, 4 y 8, no sé, 3 y 9; todos esos números sumados dan 12.

AH: ¿Y con la resta?

AM resta los numero en una nube solo parte de la cabeza

AM: Mmm… 14 menos 2, o 27 menos 15, o 73 menos 61, no sé, hay varias posibilidades.

AH: Entonces lo que tú dices es que, ¿las distancias cambian de manera que o sumadas o restadas siempre dan 12?

AM: Si, exacto.

AH: Pero ¿Por qué harían eso las distancias? Es más, ¿Por qué el piloto automático mueve la nave de tal forma que ocurra eso? No tiene sentido, ¿Para qué?

AM: No sé, pero en el libro dice que de esa forma podemos saber nuestra ubicación en el mapa.

AH: Pues no veo como eso nos puede ayudar.

Personaje estira la mano

AM: Mira, aquí hay un mapa

se ve un mapa cerrado

Simulan con la suma

MA: ¿Qué crees que pase si los datos arrojados son la suma de las distancias del barco a las antenas?

MH: No lo sé, pero podríamos hacer una simulación en el mapa

DIALOGO 7 Pares de circunferencias

AM: Es cierto, muy bien, entonces lo primero es usar circunferencias.

AH: ¿Por qué circunferencias?

AM: Porque la circunferencia nos permite ver todos los puntos que mantienen una distancia determinada a las antenas.

AH: ¿Cómo es eso?

Animación circunferencias

AM: Mira, si hacemos esta circunferencia con radio 3, obtenemos todas las posibles ubicaciones que estén a una distancia de 3 de la antena Maestra.

AH: Y ¿también hacemos lo mismo con la otra antena?

AM: Sí, como la circunferencia contiene todos los puntos que equidistan de su centro, así obtendremos todas las ubicaciones posibles que estén a la misma distancia de la antena.

AH: Ah claro, y el centro serían las antenas.

AM: Si, ahora lo que tenemos que ver es que la suma sea 12.

AH: Si, la otra circunferencia debería tener entonces radio de 9 para que sumada con la de radio 3 den 12.

AM: Mira, se interseca en dos puntos, tenemos que marcarlos.

AH: Sigamos, haré la circunferencia de 4.

AM: Muy bien, yo haré la que le corresponde.

AM: Una de 8.

AH: Mira, otra vez dos puntos.

AM: Bien sigamos, marca las circunferencias de la antena Maestra y yo las de la Esclava.

AH: Listo, entonces sigue la de 5.

AM: Bien, ahora la de 7.

AH: Ahora la de 6.

AM: yo también haré una de 6, sumadas dan 12.

AH: Ahora la de 7.

AM: Yo hago la de 5.

AH: La de 8.

AM: La de 4.

AH: Ya va tomando forma.

AM: Si, hagamos una más.

AH: Ok, aquí una de 9.

AM: Y aquí la de 3.

AM: Mira, si seguimos obtendremos una curva así.

AH: Que bien, ya tenemos la primera posible trayectoria de nuestro barco.

AM: Exacto.

Ahora simulan con la resta

AM: Ahora, ¿Qué pasaría si no es suma, sino que es resta?

AH: ¡Probemos!

AM: Bien, borremos todo e iniciemos de nuevo.

AH: Ahora todas las circunferencias restadas tienen que dar 12.

Empieza con las circunferencias

AM: Entonces si hacemos una circunferencia en la antena Esclava de 14, ¿con cuál circunferencia en la antena Maestra la tendríamos que emparejar?

AH: Yo creo que, con una de 2, de ese modo su resta va a ser de 12.

AH: Bien, podemos seguir así, haré una de 15.

AM: Entonces yo haré una de 3.

AH: Si perfecto, la diferencia entre 15 y 3 es 12, bien sigamos así.

AH: Listo, haré una de 16.

AM: Entonces yo una de 4.

AH: Ahora una de 17.

AM: Y otra de 5.

AH: Que bien, solo hay que restar 12 a la circunferencia más grande para saber el radio de la otra circunferencia.

AM: Exacto.

AH: Entonces si la siguiente es de 18, y 18 menos 12 es 6, la que debes dibujar es de 6.

AM: Si exacto, de 6.

**Aparece la hipérbola**

AH: Perfecto, mira la curva que se formó.

AM: Es muy diferente a la anterior.

AH: Lo es.

AM: Se me acaba de ocurrir algo, si estuviéramos más cerca de la antena Esclava, la trayectoria habría rodeado esa misma antena.

AH: Recuerdo que los datos de la parte derecha de la pantalla eran menores a los datos de la izquierda, eso quiere decir que estamos más cerca de la antena Maestra y podríamos decir que estamos en esta trayectoria.

AM: Bien, ya tenemos dos posibles trayectorias.

AH: Y ahora como le hacemos para saber cuál de las dos trayectorias sigue nuestro barco.

AM: Mmm… Bueno yo recuerdo que en el libro hablaban de una tercera antena.

AH: ¿y eso para qué?

AM: No sé, pero decía que con ella se podía determinar nuestra ubicación exacta en el mapa.

AH: ¿En serio? Entonces ¿hacemos simulaciones con la tercera antena?

AM: Si, como ya sabemos qué curva resulta de hacer la suma y la resta podemos hacerla rápidamente.

AH: Entiendo, entonces simulemos la curva resultante en ambos casos para saber nuestra ubicación.

AM: Iniciemos con la primera curva.

**Se muestra la elipse y arriba la antena 3**

AM: La tercera antena quedaría por aquí.

**Segunda elipse con la antena 3**

AH: Entonces la otra curva que resultó de la suma se vería algo, ¿así?

AM: Si, pero aquí hay un problema.

AH: ¿Cuál?

AM: Se supone que la intersección entre las curvas refleja nuestra ubicación en el mapa.

AH: Si, ¿y luego?

AM: Pues mira, se interseca en dos puntos diferentes.

Se muestra la intersección entre las dos curvas

AH: Y si probamos con la otra curva

AM: Buena idea

Se borra todo y aparece solo el mapa y las antenas (m y e)

AH: Bien, miremos ahora la curva resultante de hacer el procedimiento con la resta.

AM: Aquí está la curva.

Aparece la hipérbola

AH: Listo, ahora intentémoslo con la tercera antena.

AM: Quedaría una curva así.

Aparece la segunda hipérbola

AM: Mira, en este caso no tenemos el problema de tener dos intersecciones, entonces hay solo una posible ubicación en el mapa.

AH: Eso significa que nuestro barco sigue esta trayectoria ya que no genera dos posibles ubicaciones, por el contrario, solo una.

AM: Exacto, esta es nuestra ubicación.

ANEXO B

ELEMENTOS TEÓRICOS USADOS EN LA DEMOSTRACIÓN DE LOS REFERENTES MATEMÁTICOS

POSTULADOS

P. Dos Puntos – Recta Dados dos puntos diferentes existe una única recta que los contiene.

P. Separación del plano Dados una recta m y un plano α tal que $m \subset \alpha$, sean δ_1 y δ_2 semiplanos determinados por m en α. Entonces

1. δ_1 y δ_2 son conjuntos convexos de puntos.
2. Si $A \in \delta_1$ y $B \in \delta_2$ entonces $\overline{AB} \cap m \neq \emptyset$.

P. LAL Dados ΔABC y ΔMNO. Si $\angle A \cong \angle M$, $\overline{AB} \cong \overline{MN}$ y $\overline{AC} \cong \overline{MO}$ entonces $\Delta ABC \cong \Delta MNO$.

DEFINICIONES

D. Interestancia El punto B está entre los puntos A y C si y solo si:

a) A, B y C colienales.
b) $AC = AB + BC$.

$Notación$: $A - B - C$

D. Rayo $\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cup \{X \mid A - B - X\}$.

D. Punto medio M es punto medio de $\overline{AB}$ si y solo si: **(i)** $AM = MB$ y (ii) $A - M - B$.

D. Segmentos congruentes $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ si y solo si $AB = CD$.

D. Semiplano Dada recta m y plano α tal que $m \subset \alpha$, m determina en α dos conjuntos δ_1 y δ_2 llamados semiplanos, tal que:

a) $\delta_1 \cap \delta_2 = \emptyset$.
b) $\delta_1 \cap m = \emptyset$.
c) $m \cap \delta_2 = \emptyset$.
d) $\delta_1 \cup \delta_2 \cup m = \alpha$.

D. Ángulos congruentes $\angle ABC \cong \angle MNO$ si y solo si $m\angle ABC = m\angle MNO$.

D. Ángulos opuestos por el vértice Dados $\angle ABC$ y $\angle MBN$. $\angle ABC$ es opuesto por el vértice al $\angle MBN$ si y solo si:

a) $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BM}$ son rayos opuestos y
b) $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{BN}$ son rayos opuestos.

D. Ángulo recto $\angle ABN$ es recto si y solo si $m\angle ABN = 90$.

D. Rectas perpendiculares $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$ si y solo si $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \{X\}$ y$\angle CXA$ recto

D. Triángulo ΔABC= $\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}$ donde A, B, C no colineales.

D. Congruencia de triángulos $\Delta ABC \cong \Delta MNO$ si y solo si $\angle A \cong \angle M$, $\angle B \cong \angle N, \angle C \cong \angle O$, $\overline{AB} \cong \overline{MN}, \overline{BC} \cong \overline{NO}$, y $\overline{AC} \cong \overline{MO}$

D. Mediatriz La mediatriz del $\overline{AB}$, $\mathcal{M}_{\overline{AB}}$, es el conjunto de puntos del plano que equidistan de A y B. $\mathcal{M}_{\overline{AB}} = \{X \mid AX = XB, \text{donde } X, A, B \text{ coplanares,}\}$.

D. Equidistancia: Un punto X equidista de dos o más objetos (puntos, rectas, subconjuntos de esta) si la distancia de X a los objetos es igual. [e.g., X equidista de los puntos A y B si $AX = BX$].

D. Distancia de un punto a una recta Dados una recta m (o subconjunto de ella) y un punto P tal que P no pertenece a m. Sea $\overline{PQ} \perp m$, $Q \in m$ (o tal subconjunto). El número PQ es la distancia del punto P a la recta m (o tal subconjunto).

TEOREMAS

T. Punto al lado Dados puntos A y B diferentes existen un punto C tal que $A - B - C$.

T. Existencia del punto medio Dados los puntos A y B diferentes existe un único punto C tal que C es punto medio del $\overline{AB}$.

T. Punto medio - punto al lado Dados los puntos A y B. Entonces existe un C tal que B es punto medio de $\overline{AC}$.

T. Intersección de rectas Si dos rectas diferentes se intersecan, entonces su intersección es un único punto.

T. Puntos mismo semiplano Dados δ_1, δ_2 semiplanos determinados por m en α. Si $A \in m$, $B \in \delta_1$y Z es un punto tal que $A - Z - B$ entonces $Z \in \delta_1$.

T. Puntos en distintos semiplanos Dados un plano α, m recta $m \subset \alpha, \delta_1, \delta_2$ semiplanos determinados por m en α. Si $B \in m$, $A, C \notin m$, $A - B - C$ y $A \in \delta_1$, entonces $C \in \delta_2$.

T. Existencia perpendicular punto interior Dados recta l y plano α, $l \subset \alpha$ y un punto $A \in l$ entonces existe una única recta m en α tal que $m \perp l$ por A.

T. Existencia perpendicular punto externo Dados recta l y plano α y un punto $A \notin l$ entonces existe una única recta m en α tal que $m \perp l$ por A.

T. Existencia mediatriz Dado el $\overline{AB}$ existe una única $\mathcal{M}_{\overline{AB}}$.

T. Mediatriz: Si $m = M_{\overline{PQ}}$ en un plano α, entonces $m \perp \overline{PQ}$ y contiene su punto medio.

T. Recíproco de la mediatriz: Si $\ell \perp \overline{PQ}$ y contiene su punto medio, entonces $\ell = M_{\overline{PQ}}$.

T. ALA Dados ΔABC y ΔMNO. Si $\angle A \cong \angle M$, $\overline{AB} \cong \overline{MN}$ y $\angle B \cong \angle N$ entonces $\Delta ABC \cong \Delta MNO$.

T. LLL Dados ΔABC y ΔMNO. Si $\overline{AB} \cong \overline{MN}$ y $\overline{BC} \cong \overline{NO}$ y $\overline{AC} \cong \overline{MO}$ entonces $\Delta ABC \cong \Delta MNO$.

T. LAA Dados ΔABC y ΔMNO. Si $\angle A \cong \angle M$, $\overline{BC} \cong \overline{NO}$ y $\angle B \cong \angle N$ entonces $\Delta ABC \cong \Delta MNO$.

SISTEMA TEÓRICO DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

D. Parábola: Dados un punto F y una recta l. El Lugar geométrico de todos los puntos P en un plano α tales que $PF = d(P, l)$ se denomina parábola.

D. Elementos de Parábola. Al punto *F* se le denomina foco y a la recta *l* la directriz de la parábola ($\wp$). La recta *s* perpendicular a *l* por *F* se denomina eje de la parábola. El punto *V* de intersección entre *s* y $\wp$ se denomina vértice de la parábola. Sea *t* la recta perpendicular a *s* por *F*; sean *B* y *B*' los puntos de intersección de *t* con $\wp$. $\overline{BB'}$ se denomina lado recto de $\wp$.

D. Elipse: Dados dos puntos F_1 y F_2 en un plano α. Una *elipse* ε es el conjunto de todos los puntos P del plano α tales que $PF_2 + PF_1 = r, r > 0, r$ constante.

D. Elementos de Elipse: Los puntos *F* y *F*' denominan *focos* de ε. La recta que contiene los focos se denomina *eje principal* de ε. Los puntos de intersección de dicha recta con ε (*V* y *V*') se denominan *vértices* de ε. $\overline{FF'}$ se denomina *eje focal* de ε. $\overline{VV'}$ se denomina *eje mayor* de ε. El punto medio de $\overline{VV'}$ se denomina *centro C* de ε. Los puntos (*B* y *B*') de intersección entre ε y la recta perpendicular a $\overline{VV'}$ por el centro de ε determinan el segmento ($\overline{BB'}$) denominado *eje menor* de ε. Los $\overline{CB}$, $\overline{CV}$ y $\overline{CF}$ se denominan, respectivamente, *semieje menor*, *semieje mayor* y *semieje focal*.

D. Hipérbola: Dados dos puntos F_1 y F_2 en un plano, la hipérbola $\mathcal{H}$ es el conjunto de puntos P de dicho plano tales que $|PF_1 - PF_2| = r$, r una constante.

D. Elementos de hipérbola: Los puntos F y F' denominan focos de $\mathcal{H}$. La recta que contiene los focos se denomina eje principal de $\mathcal{H}$. Los puntos de intersección de dicha recta con $\mathcal{H}$ (V y V') se denominan vértices de $\mathcal{H}$. $\overline{FF'}$ se denomina eje focal de $\mathcal{H}$. $\overline{VV'}$ se denomina eje traverso de $\mathcal{H}$. El punto medio de $\overline{VV'}$ se denomina centro C de $\mathcal{H}$. Los $\overline{CV}$ y $\overline{CF}$ se denominan, respectivamente, semieje traverso y semieje focal. donde $c = CF$ y $a = CV$. El eje conjugado de $\mathcal{H}$ es el $\overline{BB'}$ con C su punto medio, y B y B' en la recta perpendicular a $\overline{VV'}$ por C, tales que $CB = CB' = b$ donde $b^2 = c^2 - a^2$. El $\overline{CB}$ se denomina semieje conjugado.