EL OSCILADOR ARMÓNICO EN LA TEORÍA DE LA RADIACIÓN DEL CUERPO NEGRO: UN ENFOQUE DESDE PLANCK Y SU IMPACTO EN LOS FUNDAMENTOS DE LA MECÁNICA CUÁNTICA.

Santiago Barragán Sánchez

Línea de profundización:

La enseñanza de la física y la relación física-matemática

Universidad Pedagógica Nacional de Colombia

Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de Física

Bogotá D.C

2024

EL OSCILADOR ARMÓNICO EN LA TEORÍA DE LA RADIACIÓN DEL CUERPO NEGRO: UN ENFOQUE DESDE PLANCK Y SU IMPACTO EN LOS FUNDAMENTOS DE LA MECÁNICA CUÁNTICA.

Presentado por:

Santiago Barragán Sánchez

Trabajo de grado para optar al título de licenciado en Física.

Asesor:

Víctor A. Heredia Heredia
Docente del departamento de Física

Línea de profundización:
La Enseñanza de la Física y la Relación Física Matemática

Universidad Pedagógica Nacional de Colombia

Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de Física

Bogotá D.C

2024

Contenido

Ilustraciones

INTRODUCCIÓN

El estudio de la física puede ser un reto para las personas que abordan por primera vez esta disciplina, dado que las cantidades de variables es abrumador, o relacionar un concepto con su respectiva descripción matemática, la cual hay varios métodos para enfrentar esta problemática. El presente trabajo tiene un enfoque de recontextualización histórica teniendo como marco los acontecimientos y lineamientos de la época, sobre el problema de la radiación del cuerpo negro abordada por Planck, el cual tiene como resultados significativos aparte de la distribución de energía, como es la cuantización de la energía en el que la energía no se emite de manera continua, si no, por paquetes discretos lo cual sienta las bases para nuevas teorías. A su vez se resalta el papel que cumple el oscilador armónico modelando la interacción de la radiación y como este se convirtió en un pilar para entender fenómenos físicos y desarrollar teorías cuánticas.

Además, este trabajo busca enfatizar la importancia de comprender los conceptos físicos en su contexto histórico y matemático, mostrando cómo cada avance en la formulación teórica responde a las preguntas y necesidades de una época particular. De esta forma, no solo se entiende mejor la física detrás del oscilador armónico y el cuerpo negro, sino que también se aprecia cómo los científicos, como Planck, formularon sus teorías a partir de los conocimientos y limitaciones de su tiempo. Esta aproximación permite ver la evolución de ideas, facilitando un aprendizaje más profundo y contextualizado que va más allá de los modelos y ecuaciones.

El presente trabajo se desarrolla en 5 capítulos, el cual el primer capítulo consiste en la caracterización del problema planteado y los objetivos a llegar del trabajo. El segundo capítulo está enfocado en el contexto histórico del desarrollo del trabajo del cuerpo negro y las formulaciones y conceptos bases desde el planteamiento de Planck.

El tercer capítulo se centró en la descripción de las formulaciones matemáticas que aportaron significativamente en lo conceptual y en el desarrollo del cuerpo negro. El cuarto capítulo se centró en el desarrollo de la solución del cuerpo negro con el uso del oscilador armónico como herramienta con base al trabajo de Planck. El capítulo V se centró en abrir la discusión sobre la relevancia del trabajo de Planck en el desarrollo de la radiación del cuerpo negro y como el oscilador armónico fue relevante en este.

CAPÍTULO I: GENERALIDADES.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Cuando se es principiante en el estudio de la física, en especial de la física moderna, el manejo de la cantidad de “variables”[1] a tener en cuenta al momento hacer un análisis de cualquier tipo, puede presentar dificultades procedimentales y conceptuales (Ayala y otros, 2007). Una de las razones por las cuales se presentan dificultades al momento de hacer un análisis de cualquier tipo, es que no se toma en cuenta el contexto en donde se desarrollaron ciertos conceptos o leyes, que en su desarrollo fueron influenciadas por la forma de pensar del autor o autores (representación de la realidad), puesto que los modelos físicos son una representación de la naturaleza que sistematiza los fenómenos que se observan. En términos generales, se puede decir que el contexto cultural de la época en la que surge una teoría puede haber influenciado a los autores de los conceptos o leyes desarrolladas y por tanto las “variables” a tener en cuenta dependen del tipo del análisis y sus alcances.

Una alternativa para hacer frente a este contexto en la enseñanza de la física es dejar de lado la separación entre la actividad científica y su producto (cosificación, “en donde el hombre pasa a ser derivado de las condiciones externas que dominan sobre el”) (Ayala M. M., 2006, pág. 27). Entonces:

> *La ciencia es concebida como una actividad de comprensión del mundo que, de acuerdo a contextos socio-culturales específicos y dando respuesta a éstos, desarrolla una comunidad que se ha venido constituyendo históricamente, legitimándose socialmente, generando tradiciones y recomponiéndose de acuerdo a las dinámicas de las condiciones históricas. (Ayala, 2006, p.27).*

Teniendo en cuenta lo anterior, las teorías científicas están sujetas a una forma de pensar dado por su contexto sociocultural. Adicional a esta situación, se contempla que en la historia de la ciencia se han presentado cambios en las formas de percibir la realidad lo que se ve reflejado en cómo los autores hacen una representación de ésta. Este tipo de dinámicas se pueden relacionar con la idea

[1] Propiedad intrínseca del sistema, o elementos que caracterizan en un sistema

de paradigma[2], por lo que se puede decir que existieron varios cambios de paradigma en el transcurso de la historia de las ciencias, por ejemplo, la ley de gravedad planteada por Newton a la relatividad general de Einstein; el efecto del observador en la medida donde antes el observador no influía en los resultados dado por la escala de los fenómenos. Otro ejemplo de cambio de paradigma es el de la interpretación de la energía de lo continuo a lo discreto; este cambio sentó las bases para el desarrollo de la mecánica cuántica. Todos estos en su momento permitieron el desarrollo de nuevas teorías y formas de explicar fenómenos naturales objeto de estudio en su época.

Considerando lo anterior, es importante resaltar que antes del surgimiento de la mecánica cuántica existe una serie de acontecimientos y cambios en los paradigmas establecidos a finales del siglo XIX y principios del siglo XX, que llevaron a la necesidad de pensarse de forma diferente la realidad. Esos acontecimientos fueron marcados por fenómenos físicos, en donde la mecánica clásica era insuficiente para poder explicar los nuevos eventos, entre los que se destacan: la radiación de cuerpo negro, el efecto fotoeléctrico, los espectros atómicos y las propiedades ondulatorias de algunas partículas (García, 2003), dado que estos eventos dan inicio para el desarrollo de nuevas áreas de investigación de la física, ya que el marco teórico de su momento no daba solución y quedaban inconclusos o eran consideradas excepciones de la teoría, lo cual no dejaba satisfecho a los científicos de la época. Los modelos matemáticos y físicos de la época eran entonces incompatibles con los fenómenos descubiertos, encontrando inconsistencias en las teorías vigentes, como lo afirma Richard Feynman.

> *Luego se descubrió también que las reglas para los movimientos de las partículas eran incorrectas. Las reglas mecánicas para la «inercia» y las «fuerzas» son erróneas -las leyes de Newton son erróneas- en el mundo de los átomos. En su lugar se descubrió que las cosas a pequeña escala no se comportan como las cosas a gran escala. (Feynman, 1998, P. 54).*

Una de las herramientas matemáticas[3] fundamentales para a física clásica y que es relevante en los estudios de la mecánica cuántica son los osciladores armónicos. Con estos se puede hacer una

---

[2] Donde el término “paradigma” fue introducido por Thomas Kuhn en su libro *La Estructura de las Revoluciones Científicas*, aquí se define paradigma de la siguiente forma: “Considero a éstos como realizaciones científicas universalmente reconocidas que, durante cierto tiempo, proporcionan modelos de problemas y soluciones a una comunidad científica” (Kuhn, 1971, P. 13).
[3] Herramienta matemática permite representar ideas abstractas de forma sistemática como modelos para conceptos matemáticos o ayudar a visualizar una relación o patrón (Devlin, 1996).

transición “conceptual” de osciladores al concepto de campo, ya que a partir de los primeros se pueden deducir las ecuaciones de campo y por tanto la transición de medios discretos a continuos (Goldstein, 1987), de este modo, la descripción del oscilador armónico no solo permite analizar las características físicas de un punto específico, sino que también puede ampliarse para estudiar sistemas más complejos, como resonadores, donde múltiples osciladores trabajan en conjunto. Esta extensión de la descripción del oscilador armónico contribuye a la caracterización de fenómenos en un espacio más amplio y complejo, esto a su vez nos permite encontrar la modelación matemática.

Es así como, el oscilador armónico se puede usar como referente para la modelación e introducción a la mecánica cuántica, y en consecuencia para futuras referencias que lleguen hasta la mecánica cuántica de campos por medio de los osciladores armónicos cuánticos. Por tanto, este trabajo se centra en revisar el papel que tiene el oscilador armónico en relación con la energía y en la concepción de energía en mecánica clásica y mecánica cuántica, ya que este se usó en la solución de la radiación del cuerpo negro, además, es el modelo matemático que cumple característica de unidireccionalidad debido a la segunda ley de la termodinámica (entropía)[4]. Todo esto desde un punto de vista histórico y presentando de manera paralela su descripción matemática en las primeras etapas del estudio de la mecánica cuántica.

Actualmente los textos de introducción a la mecánica cuántica, que son el referente teórico para los cursos introductorios a esta, hacen una presentación de la energía potencial asociada a la ecuación del oscilador armónico, mostrando de forma analítica las relaciones con los conceptos físicos perdiendo de vista la importancia conceptual de usar esta relación entre la energía y el análisis del sistema por medio del oscilador (García, 2003). Por tanto, al realizar un análisis histórico con relación del concepto de energía y el modelo del oscilador armónico, se puede hacer un acercamiento que resalte la importancia del uso del oscilador armónico para la modelación de fenómenos cuánticos.

Pregunta Problema.

¿Cómo se presenta el cambio de la interpretación de la energía mediante el uso del oscilador armónico en la explicación de radiación del cuerpo negro?

[4] la entropía en termodinámica se relaciona con el número de configuraciones accesibles de un sistema, el grado de irreversibilidad en los procesos, y su tendencia a maximizarse en el equilibrio. (Callen, 1985)

Objetivos.

- **Objetivo General.**

  Realizar una recontextualización sobre la relación entre el concepto de energía y oscilador armónico desde los trabajos de Planck en los inicios de la mecánica cuántica.

- **Objetivos específicos.**

- Examinar la fenomenología del cuerpo negro y su papel en la evolución de las descripciones teóricas que explican de manera más precisa su radiación.
- Caracterizar las formulaciones que aportaron significativamente al desarrollo de la solución de la radiación del cuerpo negro teniendo en cuenta los trabajo de Wien y Rayleigh-Jeans.
- Elaborar una aproximación a la solución que plantea Planck con el uso del oscilador armónico y su relación con la energía
- Discutir la importancia del planteamiento que propone Planck para dar solución al problema del cuerpo negro.

Antecedentes.

Acercamiento al concepto de energía cuantizada por medio del cálculo de los estados ligados de sistemas mecánico-cuánticos unidimensionales.

Eduardo Andrés Muñoz, (2016)

Tesis de pregrado.

Universidad Pedagógica Nacional.

"Trabajo de grado donde el autor busca mostrar la importancia de la programación y los métodos numéricos aplicados al problema de los estados ligados, la cuantización de la energía y los objetos usados en la descripción de sistemas donde se observan estos fenómenos, los pozos de potencial, sobre los cuales se trabajará los cálculos, la obtención de los datos de interés y en los cuales se basa la simulación". De este trabajo se tomó el desarrollo matemático, sobre la solución analítica a la ecuación de schrödinger, el uso del pozo potencial, y el oscilador armónico cuántico para el análisis de la cuantización de la energía, a diferencia de esta investigación se va a contemplar el análisis de la relación entre el oscilador armónico y su energía y el cómo se da.

Modelando un punto cuántico: una aproximación pedagógica.

H.R Caicedo-Ortiz. (2015).

Articulo.

Corporación Universitaria Autónoma del cauca.

En este articulo determina el comportamiento energético de un electrón en el interior de un punto cuántico, en donde punto cuántico se modela usando un pozo potencial infinito y el oscilador armónico cuántico bidimensional y se soluciona a través del formalismo de segunda cuantización. "Este sistema tiene una alta relevancia por sus potenciales aplicaciones en la construcción de dispositivos para el procesamiento cuántico de información. Esta descripción presenta las aplicaciones de problemas clásicos de la mecánica cuántica en el diseño y construcción de dispositivos optoelectrónicos y puede ser empleada en los cursos de física aplicada a nivel de licenciatura o posgrado". De este trabajo se tomó la caracterización de un sistema física con el oscilador armónico cuántico por medio del hamiltoniano, en esta investigación se analizó el cómo se da la relación con el hamiltoniano del oscilador armónico.

Espectro de Energía Real de un Hamiltoniano P-Pseudo Hermitiano: caso Oscilador Armónico Bidimensional"

Jorge Armando Ytusa Pacheco. (2014).

Tesis de pregrado.

Universidad Nacional del Callao.

En el presente trabajo se postula un hamiltoniano bidimensional no Hermitiano, rasgo no característico con la mecánica cuántica convencional.
Se demuestra que tal hamiltoniano posee simetría paridad, también llamada P-pseudo hermiticidad, seguidamente el hamiltoniano es representado en función de operadores matemáticos, con propiedades similares a los ya conocidos creación y aniquilación a fin de calcular y examinar su espectro de energía, obteniendo finalmente solo valores reales y positivos, coherente con la mecánica cuántica". De este trabajo se tomó el desarrollo analítico de las ecuaciones del oscilador armónico unidimensional y bidimensional, en donde tienen la finalidad de encontrar las auto funciones de energía, donde muestra paso a paso de las deducciones de las ecuaciones y de las autofunciones, y se analiza el cómo se relaciona el oscilador armónico con la energía por medio de la "recontextualización de saberes".

Capitulo II: Contexto del estudio de la radiación del cuerpo negro

En este capítulo se presenta un recorrido por los eventos clave que contribuyeron al desarrollo del concepto de radiación del cuerpo negro. Se analizan los acontecimientos que enmarcaron el problema de este fenómeno y cómo se planteó como una cuestión teórica relacionada con el comportamiento de la energía. Para abordar este problema, se proponen diferentes soluciones, como los enfoques de Wien y Rayleigh: el primero basado en consideraciones termodinámicas y el segundo en la combinación de termodinámica y electromagnetismo. Ambos presentan limitaciones, destacando lo que se conoce como la "catástrofe ultravioleta". En respuesta a esta problemática, Planck desarrolla su propuesta, partiendo de la premisa de que la radiación del cuerpo negro puede estudiarse de dos maneras: analizando un punto donde convergen los rayos o examinando la historia de los rayos (emisión, propagación y absorción).

Recontextualización Histórica.

A mediados del siglo XIX, durante el auge de la termodinámica y el electromagnetismo, se creía que el conocimiento del mundo físico estaba prácticamente completo. Aunque existían algunos casos particulares que no encajaban plenamente en las teorías conocidas, los científicos de la época consideraban que todo estaba prácticamente descubierto. Uno de estos casos era el fenómeno de la radiación del cuerpo negro. Este fenómeno se basa en que todo cuerpo, al aumentar su temperatura, emite y absorbe radiación electromagnética, lo que se conoce como radiación térmica (Rivadulla, 2002). El desafío principal radicaba en la modelación matemática y conceptual de este fenómeno, ya que las teorías existentes no concordaban con los datos experimentales. Aunque se propusieron dos modelos principales que describían el comportamiento de la radiación del cuerpo negro, ambos solo funcionaban dentro de rangos específicos de frecuencia y no lograban explicar el fenómeno en su totalidad.

El inicio del estudio del cuerpo negro empezó con William Herschel (en 1801) que había descubierto los rayos infrarrojos, más adelante Pierre Prévost (en 1809) afirmaba que todo cuerpo en equilibrio térmico con su entrono emite la misma energía que absorbe, hasta que Gustav Robert Kirchhoff (en 1859) hace los estudios que llevan a la formulación del cuerpo negro, pero el estudio de la relación entre emisión y absorción (en 1810) son por parte de Joseph Von Fraunhofer. Donde Kichhoff denomina cuerpo negro aquellos que absorben toda la luz que incide sobre ellos, pero a ciertas temperaturas también puede emitir radiación, en lo que los convierten en fuentes lumínicas ideales, ya que presentan la propiedad de que independientemente de la naturaleza del objeto todos presentan el mismo espectro de radiación térmica si tiene la misma temperatura, provocando el interés de los científicos de la época en la cual surgieron dos explicación teórica a este fenómeno, siendo una primera ley de Wien y la otra es la ley de Rayleigh-jeans.

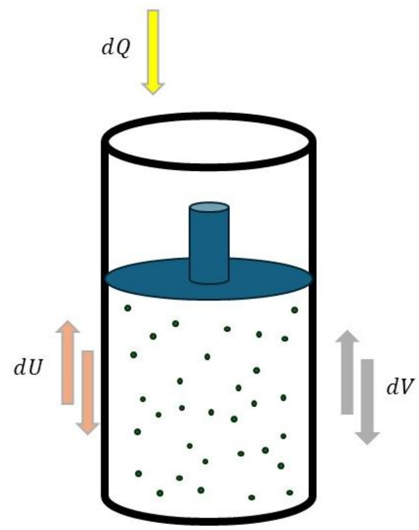
Pero hubo dos pasos antes de los trabajos propuestos por Wien y el Lord Rayleigh que fueron el trabajo de Joseph Stefan (1879) que concluyó que la radiación total es proporcional a T^4, con base a los trabajos experimentales de John Tyndall (1850). Además, Ludwig Boltzmann (1884) complemento lo anterior teóricamente con consideraciones termodinámicas y electromagnéticas, afirmando que:

> *"Considera un volumen lleno solo con radiación electromagnética en equilibrio con las paredes del contenedor y supón que el volumen está cerrado por un pistón de manera que el 'gas' de radiación puede comprimirse o expandirse. Ahora añade algo de calor Q al 'gas' de manera reversible. Como resultado, la energía interna total aumenta en dU y se realiza trabajo sobre el pistón, de modo que el volumen aumenta en dV."* (Longair, 2003, pág. 289)

Por consiguiente, Boltzmann describe propiedades termodinámicas de un "gas" de radiación electromagnética, con la finalidad de relacionar la presión electromagnética con la densidad de la energía, ruta que permite deducir teóricamente la ley de Stefan con consideraciones clásicas (la ilustración 1 se visualiza el proceso), dado que en la época solo se contaba con evidencia experimental y no había una teoría que lo sustentara.

Dicho esto, se propone que la radiación electromagnética en equilibrio presenta varias características notables. En primer lugar, es isotrópica, lo que significa que tiene la misma intensidad en todas las direcciones. Además, es homogénea, ya que la densidad de energía es uniforme en todo el volumen. Cuando se encuentra en equilibrio térmico, la emisión y la absorción de energía son iguales, lo que evita cambios netos de energía a lo largo del tiempo. Otra característica importante es que el espectro de la radiación es estable, es decir, no varía con el tiempo. Esto implica que la distribución de la energía depende únicamente de la frecuencia o longitud de onda. (Longair, 2003)

Ilustración 1: Proceso termodinámico



Fuente: Elaboración propia

A partir de lo mencionado anteriormente y considerando el primer y segundo principio de la termodinámica, se tienen en cuenta las siguientes consideraciones: la primera ley de la termodinámica, que describe la conservación de la energía en el sistema como $dU = dQ - dW$. A su vez, la segunda ley relaciona la variación del calor con la temperatura y la entropía mediante la ecuación $\mathrm{dQ} = \mathrm{T.dS}$, mientras que el trabajo se relaciona con la presión y la variación del volumen como $d\mathrm{W} = -\mathrm{p.dV}$. Al reemplazar estas expresiones en la ecuación de la primera ley termodinámica, se obtiene la siguiente ecuación.

$$T.dS = dU + p.dV$$

Ecuación 1. 1

En donde relaciona la temperatura, la entropía, la variación de la energía, la presión y la variación del volumen, Reajustamos la ecuación con $\frac{1}{dV}$, con el fin de poder relacionar con las ecuaciones de Maxwell ya que esta es una herramienta que simplifica el análisis de los sistemas termodinámicos también facilita relacionar las variables termodinámicas (Borgnakke, 2013).

$$T.\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p$$

Ecuación 1. 2

Se relaciona la temperatura, la variación de la entropía con el volumen, también la variación de la energía con el volumen y la presión usando la relación termodinámica de Maxwell[5] se sustituye, para dejar en término la variación de la presión.

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T$$

Se obtiene:

$$T.\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p$$

Ecuación 1. 3

Teniendo en cuenta lo siguiente. La presión de radiación[6] de un gas es [7]$p = \frac{1}{3} E$, donde E es la densidad total de energía de radiación, y también se tiene en cuenta $U = EV$. Al remplazar en la **ecuación 1.3**, y resolviendo aritméticamente se obtiene[8]:

$$\frac{dE}{E} = 4\frac{dT}{T}$$

Ecuación 1. 4

Al resolver la **ecuación 1.4** mediante una integración se deduce que $E \propto T^4$, Es la que se conoce como La ley de Stefan-Boltzmann, el aporte de Boltzmann es la demostración matemática de la proporcionalidad que Stefan había concluido con los experimentos de A. Wüllner, Además, fue confirmada experimental a finales del siglo XIX, por múltiples experimentos en los que se destacan los de Otto Lumeer y Ernst Pringsheim[9].

---

5 Las relaciones clásicas de Maxwell son ecuaciones fundamentales de la termodinámica que conectan las propiedades macroscópicas de un sistema, como la temperatura (T), presión (P), volumen (V) y entropía (S). Estas derivan de los potenciales termodinámicos (energía interna, entalpía, energía libre de Helmholtz y energía libre de Gibbs) y de la simetría de las segundas derivadas cruzadas de funciones continuas (Callen, 1985).
6 Presión de radiación planteada por Maxwell, en la que prevé que las ondas electromagnéticas ejercen presión sobre una superficie, dado que una onda plana que incide perpendicular sobre la superficie ejerce una presión (Kuhn, 1987)
7 Se desarrolla en el capítulo III
8 En Anexo I se desarrolla el proceso aritmético

Trabajo de Wien y Rayleigh.

Al igual que Boltzmann, Wien aborda las propiedades del gas para desarrollar el problema, pero con la diferencia de que él se enfoca en los cambios de propiedad del gas de radiación. cuando está en una expansión adiabática, y con base a dos limitantes que plantea Kirchhoff que la radiación es isotrópica y que el único parámetro que puede describir el espectro de radiación es la temperatura (Longair, 2003).

En 1894 Wilhelm Wien obtiene una relación termodinámicamente, a la cual llega por medio de considerar el proceso adiabático e infinitamente lento en el volumen de la "radiación negra"[10], llegando a la conclusión de que la distribución de la densidad de energía de la radiación del cuerpo negro es la descrita inicialmente por la **Ecuación 1. 5** si se conoce la densidad de energía[11] del cuerpo negro, es decir, (E) en términos de la frecuencia (v), y de una función arbitraria que incluya T y v que seria $f\left(\frac{v}{T}\right)$ [12] (Longair, 2003), lo cual sería la distribución espectral para cualquier otra temperatura (Planck, 1914).

$$E(v,T) = v^3 f\left(\frac{v}{T}\right)$$

Ecuación 1. 5

En la que se denomina la primera ley de Wien (Ley de radiación de Wien), que también se puede expresar en términos de la longitud de onda, haciendo la siguiente consideración: Se parte que la densidad de energía en el intervalo de frecuencia $[v, v + dv]$ es $E\ (v)dv$, además, que la velocidad de la luz se puede expresar como $v = \frac{c}{\lambda}$, de la cual se obtiene $dv = -\frac{c}{\lambda^2}d\lambda$ se sustituye en la **ecuación 1.5** (**ecuación 1.6**).

$$E(\lambda,T) = \frac{c^4}{\lambda^5} f\left(\frac{c}{\lambda T}\right)$$

Ecuación 1. 6

[10] El término hace alusión a la radiación del cuerpo negro usada por Planck (Planck, 1914) para describir el trabajo de Wien.
[11] Hace referencia a la cantidad de energía almacenada en un sistema o región del espacio por cada unidad de volumen (Serway, 2014)
[12] Función arbitraria que dependa de las dos variables T y v.

Esto se realiza con el propósito de comparar las variables utilizadas en los experimentos con las de la formulación teórica, además de determinar el valor máximo de la función, el cual mostraba un comportamiento diferente dependiendo de la frecuencia, y de comprobar experimentalmente los máximos de la frecuencia.

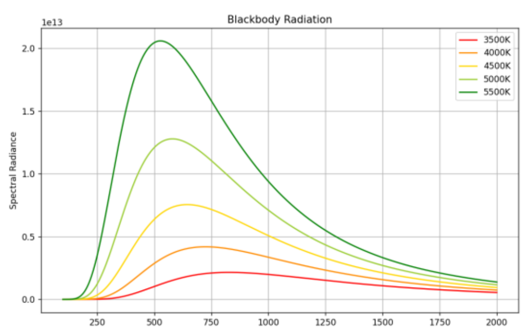
Por lo tanto, $E(\lambda)$ alcanza su valor máximo en el punto λ_{max} en $\frac{dE(\lambda)}{d\lambda} = 0$ (**ecuación 1.7**), por lo que se deduce que $E(\lambda)$ es 0 cuando $\lambda = 0$ y en $\lambda = \infty$, reescribiendo se obtiene.

$$\frac{c}{\lambda T}\frac{df\left(\frac{c}{\lambda T}\right)}{d\lambda} + 5f\left(\frac{c}{\lambda T}\right) = 0$$

Ecuación 1. 7

La **ecuación 1.7** tiene un valor definido para el argumento de $\left(\frac{c}{\lambda T}\right)$ que corresponde a λ_{max} para la intensidad de radiación $E(\lambda)$, en la cual se deduce $\lambda_{max}.T = cte$[13] (ilustración 2). La expresión inicial de la primera ley Wien (**Ecuación 1. 5**) no da suficiente información para poder analizar[14], por lo cual se deja en términos de la longitud de onda. Esta relación para λ_{max} también es conocida como la ley del desplazamiento de Wien, la cual establece que a medida que aumente la temperatura de un cuerpo, el máximo de su distribución de energía se desplaza hacia longitudes de onda más cortas (Fritzsche, 2016).

Ilustración 2: Espectro de radiación Térmica del cuerpo negro



Fuente: Elaboración propia

[13] Que representa, además, cte es una constante de proporcionalidad y de valor numérico de la $cte = 0.2898\ cm\ K$

[14] Por qué no se sabe el valor de todas las variables y no se tiene definido la función arbitraria de la ecuación 1.5 por lo que se expresa que no se tiene toda la información para analizar la ecuación.

Además, de lo que se describió anteriormente, aunque se conozcan los valores de λ_{max} faltó por describir la forma de la función $f\left(\frac{v}{T}\right)$, dejando incompleta la solución al no poder caracterizar la curva del espectro de radiación térmica del cuerpo negro. La ecuación de Wien al final solo determina los máximos de emisión y absorción de cada temperatura para el cuerpo negro.

Como Wien no logro determinar la función $f\left(\frac{v}{T}\right)$ con observaciones termodinámicas, utiliza consideraciones estadísticas, describiendo el sistema como un proceso adiabático e irreversible, y de esto propone una solución $f\left(\frac{v}{T}\right) = \alpha e^{-\frac{\beta v}{T}}$, mediante descripciones de la mecánica estadística, en especial la distribución de Maxwell, la cual propone el segundo principio de la termodinámica, que la entropía es descrita con probabilidad[15] (Kuhn, 1987). donde $\alpha\ y\ \beta$ tienen las dimensiones del sistema que describen, sin embargo, Wien no define estas constantes y las deja planteados[16]. Finalmente, la ecuación de Wien se puede escribir de la siguiente manera:

$$E(v,T) = \alpha v^3 e^{-\frac{\beta v}{T}}$$

Ecuación 1. 8

Sin embargo, los experimentos más precisos de la época mostraron desviaciones que eran más pronunciadas a mayor longitud de onda (frecuencias más bajas) de las radiaciones térmicas observadas. Esto llevó a pensar que el campo de la termodinámica había llegado a sus límites. Para poder determinar completamente la distribución espectral de la radiación del cuerpo negro, se consideró necesario analizar los intercambios de energía entre la materia y la radiación. En ese momento, esto parecía sencillo gracias a las teorías corpusculares de la electricidad, especialmente la teoría de Lorentz, donde la emisión y absorción se describen como procesos continuos en las teorías electromagnéticas.

A partir de este punto, Lord Rayleigh introdujo consideraciones estadísticas, ya que las reflexiones de la mecánica clásica alcanzaron un punto inconcluso al no poder explicar completamente el problema del cuerpo negro. Aunque existía cierta inconformidad entre los académicos debido a

[15] En el capítulo III se desarrolla estos elementos
16 En el capítulo IV se retoma esta descripción desde la propuesta de Planck.

las posturas epistemológicas en torno a cómo se percibía este fenómeno[17], Dado que Rayleigh-Jeans se enfocaron en las ondas electromagnéticas y logró demostrar mediante la estadística de Maxwell-Boltzmann uno de estos elementos es la partición de energía, que establece que, si se deja el sistema actuar durante un tiempo suficiente, las irregularidades en la distribución de energía entre las oscilaciones se equilibran gracias a estos mecanismos de intercambio de energía y en donde cada modo de oscilación esta descrito por $E = kT$ en términos clásicos (Longair, 2003) se ajustaban a los resultados experimentales de manera parcial. Fue así como Rayleigh y Jeans, mediante este enfoque, establecieron la primera ley de distribución espectral del cuerpo negro (Rayleigh-Jeans), que es descrita por la **ecuación 1.9**

$$E(v, T) = \frac{8\pi v^2}{c^3}\, kT$$

Ecuación 1. 9

Donde k es la constante de Boltzmann y c la velocidad de la luz en el vacío, esta ecuación describe la densidad de energía de radiación producida en una cavidad por ondas electromagnéticas, además, es de gran interés teórico porque describe la distribución de energía que se obtiene cuando la radiación está en equilibrio estadístico con moléculas materiales, utilizando la dinámica clásica sin necesidad de introducir la hipótesis de los cuantos (Planck, 1914).

El panorama del problema del cuerpo negro se complicaba debido a la existencia de dos leyes que ofrecían respuestas satisfactorias en límites distintos. La ley de Rayleigh-Jeans coincidía con la ley de desplazamiento de Wien, es decir con los máximos de energía por frecuencia y se ajustaba a los resultados experimentales en frecuencias bajas. Por otro lado, la ley de radiación de Wien concordaba con los resultados experimentales en frecuencias altas, pero presentaba inconsistencias hacia frecuencias ultravioleta. Además, la densidad de la energía total se calcula integrando todas las frecuencias, utilizando la siguiente **ecuación 1.10.**

[17] Las dos posturas: el mecanismo sostenía que todos los fenómenos naturales podían explicarse mediante leyes físicas y mecánicas, tratando a los sistemas vivos como máquinas. Por otro lado, el energetismo proponía que la energía y sus transformaciones eran fundamentales en la naturaleza, y que no todo podía explicarse solo con principios mecánicos, subrayando la importancia de procesos energéticos.

$$E(v,T) = \frac{8\pi\, kT}{c^3} \int_0^{\infty} v^2\ dv$$

Ecuación 1. 10

Al resolver la **ecuación 1.10**, y evaluando sus límites da una divergencia hacia infinito, es decir, que la energía crece indefinidamente, por tanto, es incongruente con los datos experimentales, por lo que esta situación fue llamada la catástrofe ultravioleta, dado este punto, no se podría avanzar más con base a las teorías clásicas de la física.

Partiendo de lo anterior Planck, se propuso resolver las inconsistencias que surgían al intentar aplicar conjuntamente la segunda ley de la termodinámica y las ecuaciones de Maxwell en la explicación de la radiación del cuerpo negro teniendo una visión mecanicista de la naturaleza, Afirmaba que: *"uno debería utilizar todos los medios a su alcance para extraer las consecuencias últimas de la visión mecánica en todas las áreas de la física, química, etc"* (Martínez, 1999, pág. 62)

A pesar de la poca aceptación de Planck respecto a la idea de un sistema discreto, y que los otros científicos usaron todos los medios posibles al alcance para poder dar solución al problema del cuerpo negro bajo la visión mecanicista, como se evidencia en los trabajos mencionados anteriormente de Wien y Rayleigh se llegó a inconsistencias entre la teoría y los datos experimentales, utilizando consideraciones mecanicistas como es la termodinámica y el electromagnetismo, sin embargo, Planck también decía:

> *"quienquiera que haya estudiado las obras de Maxwell o Boltzmann difícilmente escapará a la impresión de que la notable intuición física y habilidad matemática desplazada en la conquista de estos problemas están precariamente recompensadas por la fertilidad de los resultados obtenidos."* (Martínez, 1999, pág. 62)

De lo anterior se puede inferir que, Planck comenzó a considerar las propuestas de Maxwell y Boltzmann, por sus investigaciones teóricas que eran distintas a las corrientes de pensamiento del momento. Estos autores sentaron las bases de la mecánica estadística y de la termodinámica estadística, incluyendo el segundo principio de la termodinámica, donde se realizan consideraciones de probabilidades sobre la entropía. Un inconveniente de este planteamiento probabilístico es que, al manejar millones de partículas, existe la posibilidad de que al menos una de ellas viole este principio (el diablillo de Maxwell[18]). Boltzmann complementó estas ideas con el Teorema H[19], en el cual se explica que la cantidad H[20] de un sistema disminuye hasta alcanzar su punto mínimo, momento en el cual se llega al equilibrio térmico o a la distribución de Maxwell. Además, este teorema se relaciona con la entropía, indicando que los sistemas tienden a su estado más probable.

Planteamiento de Planck

Basándose en los trabajos previos sobre el cuerpo negro y la radiación térmica, este fenómeno ha sido abordado desde diversas perspectivas. Desde la termodinámica, los estudios de Wien llevaron al desarrollo de una ecuación de distribución de energía que es válida en frecuencias altas. Por otro lado, la combinación de termodinámica y electromagnetismo en los trabajos de Rayleigh y Jeans resultó en una ecuación de distribución que se ajusta a frecuencias bajas. Asimismo, la integración de la mecánica estadística por parte de Maxwell y Boltzmann proporcionó las primeras interpretaciones de la entropía en términos estadísticos, destacando las diferencias entre procesos reversibles e irreversibles. Estos enfoques han sido fundamentales en el avance hacia la solución del problema de la radiación del cuerpo negro. Es así como para Planck poder describir el cuerpo negro toma una serie de consideraciones que se van ajustando con base a los resultados.

La primera consideración de Planck es que, se debe tener en cuenta que el calor puede fluir de dos formas[21], la primera es por medio de conducción que describe su comportamiento con el gradiente de temperatura; la segunda, por medio de radiación, en donde no es necesario el contacto físico para la transmisión del calor, también es independiente de la temperatura ambiente, y tampoco lo describe un flujo de calor (Planck, 1914). Cada "rayo" de calor es independiente entre sí, además, unas de las características de los "rayos" de calor, es la similitud en comportamiento de los rayos de luz con los "rayos" de calor, siempre y cuando tengan la misma frecuencia, esto se evidencio con los experimentos de Herschel (Moreno Arias, 2017) en la cual determino que los "rayos" de calor también tienen la característica de refrangibilidad, característica que se describe en el

[18] Diablillo de maxwell consiste en que hay una partícula que va en contra del sentido natural, es decir, la excepción de la dirección del flujo de evolución del sistema, como al ser probabilístico no existe el termino imposible si no, improbable.
[19] En capitulo III se desarrolla este elemento.
[20] La cantidad H se abordará en el capítulo III.
21 Según en The Theory of Heat Radiation de Planck define que para ese momento se pensaba que el calor fluye de dos formas.

experimento de Newton con la luz, también determino que la variación de la temperatura del espectro de luz dependía del "color", mostrando que el rayo de luz y el "rayo" de calor tiene comportamientos similares.

Por lo tanto siempre y cuando tengan la misma frecuencia los rayos de luz y de calor, se puede aplicar todo termino teórico de la óptica experimental a los rayos de calor, además, para connotar el periodo o longitud de onda se relaciona con el término "color", la reflexión y refracción y se excluye el fenómeno de la difracción, dada que una de las restricciones es que las superficies son grandes en comparación a las longitudes de onda, por ello se desprecia la difracción. (Planck, 1914)

En la radiación térmica también se connota la distinción entre longitudes de ondas grandes y pequeñas ya que esto se traduce en tiempos mayores y menores, dado que a mayor longitud de onda es mayor tiempo y viceversa, esto se relaciona con la definición de intensidad de un "rayo" de calor (esta por unidad de tiempo), es decir, que es independiente de la fase de vibración de la partícula, teniendo que es mucho mayor que esta (Planck, 1914). Se diferencia también entre cambios de vibraciones rápidas y las relativamente lentas, en comparación de la partícula y la unidad de tiempo de la intensidad del rayo de calor, con el fin de determinar las variaciones de las intensidades se debe tener en cuenta la restricción mencionada.

Haciendo la aclaración de las leyes teóricas y las restricciones en el estudio de la radiación térmica con el fin de evitar inconvenientes en el desarrollo, ya que si no se toman en cuenta los puntos mencionados con anterioridad se complicaría los cálculos y en el análisis del fenómeno. En el ámbito de investigación de cuáles leyes describen el fenómeno de radiación de calor en un medio, se plantean de dos formas, el primero, que toma una superficie y se analizan los rayos que pasan por esta a lo largo del tiempo; y la otra forma es tomar un rayo e investigar su historia, es decir, el proceso de cómo se crea, se propaga y se destruye. Como punto de desarrollo se optará por el segundo método, siguiendo el lineamento de Planck en su libro *The Theory of Heat Radiation*, a continuación, se abordarán los tres procesos nombrados.

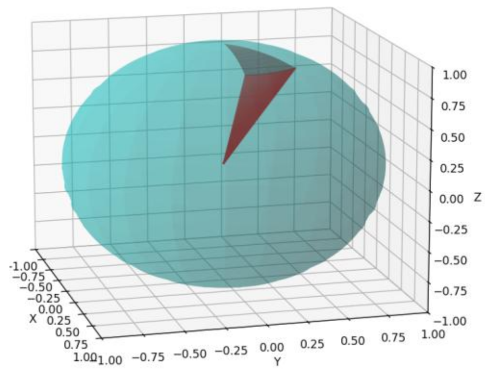
Estos tres procesos *emisión*, *propagación y absorción* se consideran bajo condiciones donde el medio es homogéneo e isotrópico. En el primer proceso, la *emisión* es en la que nace o se produce, ahí se da por la expansión de otras formas de energía, ya sea química, eléctrica, etc., de acuerdo al principio de la conservación de la energía, dado que un sistema tiene cierta cantidad de energía, y por lo anteriormente mencionado la energía no desaparece solo se transforma, por lo cual en la transición de estados, la energía sobrante o faltante de un proceso crea un rayo de calor, que en consecuencia el estudio de estos se debe centrar en los materiales que lo producen y no en la superficie de los objetos, aunque en ocasiones se habla por brevedad de que cierta superficie emite rayos de calor pero, a profundidad la superficie nunca los emite solo permite el paso de esos, que vienen del interior y de acuerdo a la cantidad que se refleja lo que parece transmitir más o menos intensidad de radiación.

Por lo tanto, se considera el interior de una sustancia emisora, en la que se asume que es físicamente homogénea lo que permite pensar que la intensidad de radiación es igual en toda la sustancia, si tomamos un elemento de volumen que lo llamaremos igual que en el libro de Planck(1914) $d\tau$, de magnitud no demasiado pequeño[22] haciendo alusión al mundo atómico, ya que si tomamos un $d\tau$ de esa magnitud se complicaría y no podría suponer la homogeneidad de la sustancia en el volumen, además, como se dijo anteriormente la energía emitida es radiación por unidad de tiempo en toda la superficie de ese elemento de volumen y es proporcional a $d\tau$, pero se hace la suposición que cada elemento $d\tau$ participa de forma uniforme en el fenómeno de emisión para así poder simplificar los cálculos (Planck, 1914).

Cada punto de $d\tau$ se considera un vértice de un lápiz[23] rayos de calor que convergen o divergen en todas las direcciones (Planck, 1914). Este punto no representa una cantidad finita de energía en sí, sino una cantidad finita emitida desde un pequeño volumen. Además, se asume que la energía está asociada a un rango de frecuencias de v a $v + \mathrm{d}v$ emitida en el tiempo dt en la dirección del elemento cónico $\mathrm{d}\Omega$ por un elemento $\mathrm{d}\tau$ se tiene $(dt)(d\tau)(d\Omega)(dv)(2\epsilon_v)$, el cual la ϵ_v es de cantidad finita conocida como coeficiente de emisión para la frecuencia v. La emisión total del volumen del elemento $d\tau$ se obtiene integrando sobre todas las direcciones y frecuencias. Dado que v es independiente de la dirección, la integral sobre el elemento cónico de $d\Omega$ es de 4π, obteniendo $dt \cdot d\tau \cdot 8\pi \int_0^\infty \epsilon_v dv$. Es importante destacar que el coeficiente de emisión depende no solo de la frecuencia, sino también del estado de la sustancia emisora, es decir, que la emisión está influenciada por lo que sucede dentro de dicho elemento (Planck, 1914).

[22] Del orden entre 10^{-6}.
[23] Según en The Theory of Heat Radiation de Planck define lápiz como un conjunto de rayos de luz que convergen en un solo punto o divergen.

Ilustración 3 Lápiz



Fuente: Elaboración propia

Además, se tiene en cuenta que el estado físico de la sustancia emisora solo depende de su temperatura absoluta T, aparte de la frecuencia y de la naturaleza del medio, con esta consideración se omiten algunos fenómenos de radiación como es el caso de la fluorescencia, la fosforescencia, la luminosidad eléctrica y química, denominados fenómenos de luminiscencia (Planck, 1914).

La segunda etapa, la *propagación*, el fenómeno de difracción queda excluido, no obstante, de forma general, cada rayo es afectado en la propagación por un debilitamiento dado que parte de la energía se desvía de su dirección original y se dispersa en otras direcciones, este fenómeno que se denomina dispersión no significa la destrucción y creación de energía radiante, sino un cambio en la distribución. También hay discontinuidad en los medios, es decir, no hay medios absolutamente homogéneos en el sentido de la palabra, ya que existen pequeñas impurezas que son micropartículas que presentan discontinuidad[24], visto que contienen partículas extrañas pero que no afectan la homogeneidad del medio siempre y cuando las dimensiones lineales de estas partículas sean lo suficientemente pequeñas en comparación con las longitudes de onda.

Se toma en cuenta que la dispersión es cuando cada rayo en su recorrido en un medio arbitrario pierde cierta cantidad de su intensidad, en una distancia pequeña s[25], y el coeficiente de dispersión β_v (Planck, 1914) es independiente de la intensidad de la radiación y se denomina coeficiente de dispersión del medio. Al considerar el medio isotrópico, β_v también es independiente de la dirección de propagación y de la polarización del rayo, además, solo depende de la frecuencia, es

[24] A estos medios se les denomina turbios

[25] la dispersión representa la pérdida de intensidad de cada rayo a medida que se propaga en un medio arbitrario. Esta pérdida de intensidad ocurre sobre una pequeña distancia s, y se caracteriza mediante el coeficiente de dispersión β_v, al suponer que el medio es isotrópico, β_v también es independiente de la dirección y de la polarización del rayo, siendo dependiente únicamente de la frecuencia. (Planck, 1914)

decir, que en los casos en donde la frecuencia es mayor la dispersión es notable, por esta razón la relación de la dispersión es $\beta_v s$, que describe cómo los rayos dispersan su energía en el medio, donde en algunos casos los rayos son virtualmente destruidos o caso contrario la dispersión es tan baja que se llega a despreciar.

Cuando un rayo cambia de un medio, el segundo medio se sigue considerando homogéneo e isotrópico pero la incidencia de esto medio puede describirse como "lisa" o "rugosa", la distinción entre estas dos es que en la primera, la dispersión se da en la superficie y la segunda se da en capas más o menos gruesas dentro del medio, otra característica es cuando una superficie lisa refleja completamente todos los rayos incidentes se denomina reflectante y cuando un superficie rugosa refleja todos los rayos incidentes se le denomina "blanca" y la superficie rugosa que tiene la propiedad de transmitir completamente la radiación incidente se describe como " negra" o "cuerpo negro" que tiene como propiedad que la entrada de todos los rayos incidentes sin que se reflejen en la superficie y que no salgan de nuevo. Por consiguiente, el cuerpo tiene tres condiciones, la primera es que debe tener una superficie *negra* que permita el paso de los rayos incidentes y que no tengan reflexión, la segunda es que el *cuerpo negro* debe tener un grosor mínimo el cual no permita la salida de los rayos absorbidos y por último el cuerpo debe tener un coeficiente de dispersión muy pequeño[26] de lo contrario se dispersarían en el interior del cuerpo negro (Planck, 1914).

La última etapa la *absorción*, en la cual los rayos de calor se "destruyen" en el proceso, pero según el principio de conservación de la energía, la energía térmica se transforma en otras formas de energía, siendo las partículas de los materiales que pueden absorber estos rayos de calor y no el elemento de superficie. En el momento que el rayo de calor atraviesa el medio, este debilita una parte de la intensidad por cada distancia recorrida s, de lo cual se relaciona con $\alpha_v s$, siendo α_v el coeficiente de absorción del medio, sin embargo, en un caso especial con α_v igual a cero, el medio muestra la absorción "selectiva". Para los colores en los que $\alpha_v = 0$ y también el coeficiente de dispersión es $\beta_v = 0$, el medio es descrito como "transparente"[27]. Considerando los medios y las sustancias como homogéneas e isotrópicas se asume que el coeficiente de absorción tiene el mismo

[26] Rango de dispersión mínimo
[27] Se considera un medio transparente o diatérmico cuando los coeficientes de dispersión y de absorción son cero.

valor en todos los puntos y direcciones del medio, en consecuencia, solo dependerá de la frecuencia v, la temperatura T y la naturaleza del medio (Transparente u opaco).

Al contextualizar las características del fenómeno basándose en los principios de Planck, se establecen los fundamentos y elementos necesarios para construir y desarrollar la solución al problema de la radiación del cuerpo negro. Estos fundamentos fueron el punto de partida para formular la distribución de la energía. Como se describe en la propagación, el cuerpo negro es un caso especial que tiene la propiedad de absorber completamente la radiación incidente. Para la caracterización del sistema, se determinó la dependencia de la temperatura (T) en la distribución de la radiación, así como el rango de frecuencias correspondientes a diferentes colores, lo que requiere el uso del oscilador armónico debido a sus efectos equilibradores.[28].

[28] Que en el capítulo IV se describe a profundidad la razón del uso del oscilador armónico en este sistema

Capítulo III: Formulaciones matemáticas.

En el capítulo anterior se abordó de forma conceptual e histórica sobre el proceso del trabajo de Planck de la radiación del cuerpo negro, pero no se profundizo sobre el desarrollo matemático; en este capítulo se abordan los desarrollos matemáticos retomando los trabajos de Maxwell sobre la presión de radiación, de Boltzmann sobre el trabajo del teorema H y su relación con la entropía, y cómo con estos desarrollos Planck los retoma para poder dar solución al problema de la radiación del cuerpo negro.

Teniendo en cuenta que la radiación térmica se puede describir con las formulaciones de la luz, y a su vez, que la luz se puede describir como una onda electromagnética, y esta puede ser descrita con las ecuaciones de Maxwell, en consecuencia, de esas se da la presión de radiación de Maxwell, que en las aplicaciones de las ecuaciones en onda plana que incide sobre una superficie reflectora se ejerce una presión que es igual a la densidad de energía.

Se tienen en cuenta las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo en el sistema Heaviside-Lorentz[29] para el desarrollo de la presión de radiación de Maxwell:

$$\nabla . E = \rho$$
$$\nabla . H = 0$$
$$\nabla \times \mathrm{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t}$$
$$\nabla \times \mathrm{H} = \frac{1}{c}\mathrm{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t}$$

Ecuación 3. 1 Ecuaciones de Maxwell para el campo electromagnético para el sistema Heaviside-Lorentz

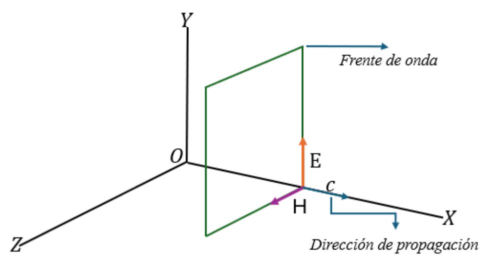
Donde E es el campo eléctrico, H la intensidad del campo magnético, y los parámetros comunes que se manejarían en las ecuaciones de Maxwell serían las siguientes: ρ es la densidad de carga eléctrica, ϵ_0 es la permitividad eléctrica en el vacío, μ_0 es la permeabilidad magnética en el vacío, j es la densidad de corriente eléctrica, pero con el reajuste del sistema Heaviside-Lorentz la

[29] Las unidades racionalizadas de Heaviside-Lorentz son un sistema en el cual se simplifica las ecuaciones de Maxwell en el vacío, eliminando factores geométricos como el 4π que aparecen en algunos sistemas. Esto se logra ajustando las definiciones de las unidades de carga y corriente (Jackson, 1999).

permitividad y la permeabilidad se reajustan a 1 (Jackson, 1999), por tanto la relación es $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$, convierte a c el único parámetro para las ecuaciones.

Para el desarrollo de la presión de radiación se toma las siguientes consideraciones (Planck, 1914). La primera es que se describe una onda electromagnética plana[30] (**Ilustración 4 Onda electromagnética plana**) en el vacío que depende del tiempo y en un sistema ortogonal, también el campo eléctrico E y la intensidad del campo magnético H son perpendiculares entre sí, y respectivamente los campos están en los ejes Y y Z, además, el campo se encuentra en el vacío lo que implica que no hay cargas libres ni corrientes por lo tanto la densidad de carga eléctrica es igual a cero ($\rho = 0$) y la densidad de corriente eléctrica es cero ($j = 0$) en las ecuaciones de Maxwell (Alonso & Finn, 2000).

Ilustración 4 Onda electromagnética plana



Fuente: Elaboración propia

Con las consideraciones anteriores se tiene que $E_x = 0, E_y = E, E_z = 0$ y $H_x = 0, H = 0, H_z = \mathrm{H}$ al reemplazar las condiciones en las ecuaciones de Maxwell en su versión diferencial:

$$\nabla . E = 0$$

$$\nabla . H = 0$$

$$\nabla \times \mathrm{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathrm{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t}$$

Ecuación 3. 2 Ecuaciones de Maxwell para una onda electromagnética plana

[30] La onda plana es una abstracción, ya que en la práctica no existen ondas planas perfectamente extendidas. Sin embargo, se usa este concepto porque permite simplificar el análisis de la propagación de ondas y es una aproximación válida (Alonso & Finn, 2000)

Con el resultado anterior se procede a resolver el rotacional en el campo eléctrico y la intensidad del campo magnético para poder determinar las componentes E y H y así poder definir la ecuación de onda que describe el sistema, en donde se obtiene lo siguiente[31] (Planck, 1914):

$$\frac{\partial E_{x'}}{\partial t} = 0$$
$$\frac{\partial E_{y'}}{\partial t} = -c\ \frac{\partial \mathrm{H}_{z'}}{\partial x'}$$
$$\frac{\partial E_{z'}}{\partial t} = c\ \frac{\partial H_{y'}}{\partial x'}$$
$$\frac{\partial E_{x'}}{\partial x'} = 0$$

$$\frac{\partial H_{x'}}{\partial t} = 0$$
$$\frac{\partial H_{y'}}{\partial t} = c\ \frac{\partial E_{z'}}{\partial x'}$$
$$\frac{\partial H_{z'}}{\partial t} = -c\frac{\partial E_{y'}}{\partial x'}$$
$$\frac{\partial H_{x'}}{\partial x'} = 0$$

Ecuación 3. 3: campo electrico ***Ecuación 3. 4: Campo magnetico***

Lo que se observa de las ecuaciones es la característica de las ondas transversales en donde los campos son perpendiculares entre sí, también de la dirección de propagación, además, del acoplamientos entre los campos, otra característica es la de una onda plana en la cual se propaga en un sola dirección (Jackson, 1999), en lo que se evidencia que solo hay variación de los campos que son perpendicular a la dirección de propagación, por lo que estas ecuaciones son para un sistema de onda electromagnética plana en la cual a partir de estas ecuaciones se deduce la ecuación de onda:

$$\frac{\partial^2 E_{y'}}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 E_{y'}}{\partial x'^2} \qquad \frac{\partial^2 H_{z'}}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 H_{z'}}{\partial x'^2}$$

Ecuación 3. 5 Ecuaciones de onda electromagnética

De modo que la solución general d'Alembert (onda viajera) para una onda electromagnética plana que pasa a través del vacío en dirección del eje x' positivo es (Griffiths, 2012):

[31] En el anexo II se muestra el proceso detallado

$$E_{x'} = 0$$
$$E_{y'} = f\left(t - \frac{x'}{c}\right)$$
$$E_{z'} = g\left(t - \frac{x'}{c}\right)$$

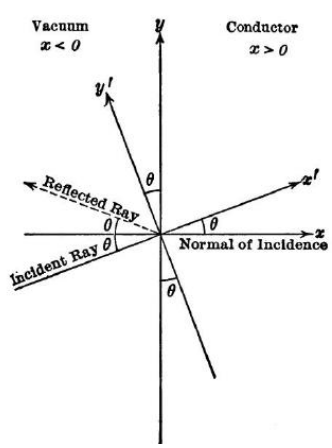
Ecuación 3. 6: Onda plana campo electrico

$$H_{x'} = 0$$
$$H_{y'} = g\left(t - \frac{x'}{c}\right)$$
$$H_{z'} = f\left(t - \frac{x'}{c}\right)$$

Ecuación 3. 7: Onda plana Campo magnetico

Donde, f y g son funciones arbitrarias con el mismo argumento. Ahora se plantea que la onda plana golpea una superficie reflectante que tiene las siguientes características: la superficie es un conductor absoluto de conductividad infinitamente grande, lo que implica una intensidad eléctrica infinitamente pequeña que produce corriente de conducción finita, también, se supone que el conductor no es magnetizable, es decir, que la inducción magnética B es igual a la intensidad del campo magnético H en el vacío, también se implementa un sistema de coordenadas ortonormal a lo largo de la superficie orientada hacia el interior donde, el eje x es la normal de incidencia (**Ilustración 5 Acción de rayo sobre la superficie**), además, se toma que el eje z coincida con el eje z', el cual es el origen común de los sistemas de coordenadas, también θ representa el ángulo de incidencia, la relación de las ecuaciones del sistema de coordenadas transforma las componentes de la intensidad del campo eléctrico o magnético[32].

Ilustración 5 Acción de rayo sobre la superficie



[32] Puede profundizar en la relación de estas componentes en The *Theory of Heat Radiation (1914),*

Tomado de: The Theory of Heat Radiation (1914), plano incidente que representa el sistema planteado, sobre la onda electromagnética plana golpea una superficie.

De la ilustración, se tiene plano cartesiano (xy) y con la restricción del eje z en el origen, se plantean las ecuaciones con sus respectivas componentes y una rotación del sistema respecto al ángulo de incidencia, evidenciando, la invariancia del fenómeno ante las rotaciones se aplica para la intensidad del campo magnético y del campo eléctrico, con lo que se reajusta el argumento f y g de las ecuaciones 3.6 y 3.7.

Al tener en cuenta estas consideraciones y en adición al planteamiento hay una onda reflejada que tiene la característica de estar superpuesta sobre la primera onda de tal forma que los componentes del campo eléctrico de las dos ondas se cancelen en las direcciones y y z, con la finalidad de expresar la magnitud de la fuerza mecánica que ejerce un rayo de calor al golpear una superficie reflectante por lo que el resultado de las transformaciones de coordenadas lo que indica el argumento de las funciones f y g (Ecuaciones 3.6 y 3.7) que es el siguiente:

$$f\left(t-\frac{x'}{c}\right)=f\left(\frac{t-\ ysin\theta}{c}\right);\ g\left(t-\frac{x'}{c}\right)=g\left(\frac{t-\ ysin\theta}{c}\right)$$

Dado una fuerza[33] determinada que actúa sobre el conductor debido a la influencia del campo electromagnético el cual tiene componentes de origen eléctrico y magnético, esta fuerza es perpendicular a la superficie. Por ello, una parte de la fuerza eléctrica F_e puede definirse como el producto de la carga y la intensidad del campo eléctrico, es decir, $F_e = qE$[34]. Sin embargo, la intensidad del campo es discontinua debido a la presencia de una carga eléctrica en la superficie, lo que lleva a que $F_e = -\frac{sen^2\theta}{2\pi}f^2 d\sigma$ (Planck, 1914).

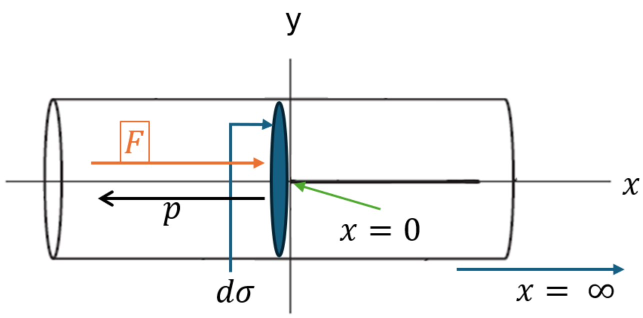
Por otro lado, la fuerza de origen magnético se genera a partir de una corriente de conducción en el interior del conductor, cuya intensidad y dirección están determinadas por el vector

[33] Planck es su trabajo The Theory of Heat Radiation (1914*)*, usa este término para hacer referencia a la acción que genera la onda electromagnética al chocar con un conductor (Planck, 1914), ya que esta al transporta energía, también tienen momento que al chocar ese momento ejerce cierta fuerza.

[34] la definición para este sistema es $q = \frac{1}{2\pi}sen\theta.f$ y $E = -sen\theta.f$ definido en The Theory of Heat Radiation (1914)

$I = \frac{c}{4\pi}\nabla\times\ H$. Esta se relaciona con cada elemento de volumen $\frac{d\tau}{c}[\mathrm{I}\times H]$, para considerar la fuerza magnética definida como $F_m = \frac{d\tau}{c}\int[\mathrm{I}\times H]\,dx$ (Planck, 1914),

Ilustración 6 situación del conductor en el eje x



Fuente: Elaboración propia

Teniendo en cuenta lo anterior, se considera un segmento rectilíneo de conductor que transporta una corriente I. el conductor es perpendicular a la superficie con sección transversal $d\sigma$, que se extiende de $x = 0$ a $x = \infty$, tal que $d\tau = d\sigma x$, y se evalúa la fuerza magnética en $x = 0$, además, se define el producto cruz de $\mathrm{I}\times H$ el cual da como resultado $\left(H_y\frac{\partial H_y}{\partial x} + H_z\frac{\partial H_z}{\partial x}\right)$ el cual se integra y se evalúa $x = 0$ a $x = \infty$, como resultado del proceso se tiene[35] $F_m = \frac{d\sigma}{2\pi}(cos^2\theta\ .\ g^2 +\ f^2)$ (Planck, 1914).

Esta expresión describe la fuerza magnética en el eje x. Por lo tanto, la fuerza total a lo largo del eje es la suma de las fuerzas F_e y F_m obteniéndose la siguiente ecuación:

$$F = \frac{d\sigma}{2\pi}cos^2\theta(f^2 + g^2)$$

Ecuación 3. 8 Ecuación de Fuerza Total

La fuerza total es ejercida sobre la superficie del conductor que genera una presión hacia el interior con dirección normal, y que se denomina presión de radiación de Maxwell, la cual es predicha por la teoría electromagnética, de la cual se relaciona la intensidad de la onda con la fuerza total por

[35] Las componentes de la onda electromagnética plana teniendo en cuanta la onda reflejada son: $E_x = 0$; $E_y = 0$; $E_z = 0$; $H_x = 0$; $H_y = -cos\theta\ .g$; $H_z = 2f$ Planck es su trabajo The Theory of Heat Radiation (1914),

medio del vector Poynting que describe el flujo de energía por unidad de área y por unidad de tiempo a través de un área de sección transversal perpendicular a la dirección de la propagación, que relaciona la intensidad[36] de onda y la potencia que es el flujo de energía por unidad de tiempo (Young & Freedman, 2009) $I\ dt = P\ dt$ siendo [37]$P = \frac{c}{4\pi}\left(E_y H_z + E_z H_y\right) d\sigma$, por lo tanto se tiene $Idt = \frac{c}{4\pi} cos\theta(f^2 + g^2)\ d\sigma dt$, y por comparación de la ecuación 3.8 se obtiene la **Ecuación 3. 10**, al tener la fuerza en termino de intensidad se procede a relacionar la densidad de energía con la presión de radiación por medio de la siguiente expresión $p = \int F . d\Omega$ (Planck, 1914) teniendo como resultado la siguiente relación con la densidad de energía $p = \frac{u}{3}$ la relación de la presión con la energía se mantendrá siempre y cuando la reflexión de la radiación se produce en la superficie de un conductor absoluto no magnetizable (Planck, 1914). Para validar que la presión de radiación es una consecuencia de la teoría electromagnética se procede a realizar el mismo proceso pero con la leyes de Newton (teoría de la luz- emisión)[38], comparando la presión de radiación de Newton (**Ecuación 3. 9**) con la presión de radiación de Maxwell (**Ecuación 3. 10**), en lo que se muestra que la **Ecuación 3. 9** es dos veces más grande que la **Ecuación 3. 10**, confirmando que la presión de radiación de Maxwell no se puede deducir de consideraciones generales de la energía, sino, de la consecuencia de la teoría del electromagnetismo.

$$F = \frac{4cos\theta}{c} I$$

Ecuación 3. 9

$$F = \frac{2cos\theta}{c} I$$

Ecuación 3. 10

Al ser la radiación del cuerpo negro de característica electromagnética y termodinámica admite aplicar la ley de Stefan-Boltzmann directamente a la radiación del cuerpo negro (Kuhn, 1987) por lo que Planck uso la presión de radiación de Maxwell como parte del marco clásico de la teoría electromagnética para analizar cómo los cuerpos absorbían y emitían radiación. Sin embargo, descubrió que la teoría clásica no podía explicar la distribución espectral observada experimentalmente.

---

36 Mas adelanta esta intensidad va a ser equivalente para el trabajo desde Planck será J_0

[37] Las componentes de la onda electromagnética plana son: $E_x = -sen\theta . f$; $E_y = cos\theta . f$; $E_z = g$; $H_x = sen\theta . g$; $H_y = -cos\theta . g$; $H_z = 2f$ Planck es su trabajo The Theory of Heat Radiation (1914*)*,

[38] Para efecto del trabajo se tomará en cuenta resultado.

ENTROPIA PARA EL CUERPO NEGRO:

En el trabajo de Boltzmann sobre la entropía, descrito a través de formulaciones estadísticas desarrolladas en su teoría de los gases, se presenta el teorema H[39], Este teorema introduce la función H y la cantidad[40] H. Siendo este relevante para el trabajo de Planck que usa como referente en el desarrollo del problema de distribución de energía de la radiación del cuerpo negro, ya que relaciona la entropía con la probabilidad por medio de la distribución de velocidades, y con la definición de la función H, por lo tanto **Ecuación 3. 11**, donde la función H define la evolución del sistema donde este tiende a disminuir, f es la función de distribución de probabilidad de las velocidades y $ln(f)$ es la probabilidad del estado, lo que caracteriza el comportamiento de un sistema de partículas (Boltzmann, 1964), además, Boltzmann demostró que la variación mínima de H (**Ecuación 3. 12**) es la variación de la entropía con signo contrario dado que el signo expresa que H al llegar a su mínimo la entropía llega a su máximo que sería el equilibrio del sistema térmico (Boltzmann, 1964) .

$$H(t) = \int f ln(f) d\omega$$

Ecuación 3. 11

$$\Delta H_{min} = -\frac{\Delta Q}{T} = -\Delta S$$

Ecuación 3. 12

Otra de las preocupaciones es calcular la probabilidad del estado más probable. Boltzmann asume que las moléculas tienen valores continuos de energía, pero distribuidos en intervalos finitos. En una situación real, se considera un espacio tridimensional de velocidades con componentes pequeñas e intervalos discretos. Según Boltzmann, las moléculas son distinguibles, lo que significa que un mismo estado puede alcanzarse de diferentes maneras. Para describir esto, se utiliza la herramienta matemática de las permutaciones, que organiza un conjunto de partículas bajo ciertas restricciones.

[39] El teorema H de Boltzmann es un resultado fundamental en la teoría cinética de los gases y se relaciona con la evolución de la distribución de las velocidades de las partículas en un sistema (Haar, 1995)

[40] La función H es una expresión matemática asociada a la distribución de velocidades de las partículas en un sistema y la cantidad H se refiere al valor calculado de la función H en un momento específico. Representa un número asociado al estado particular del sistema en ese instante (Boltzmann, 1964).

Ecuación 3. 13 (Ecuación de Permutación) describe a Z como la frecuencia relativa de ocurrencia de distribución en el espacio de velocidades *(Kuhn, 1987)*. Por lo que el objetivo es maximizar la expresión de Z para determinar el estado más probable, lo que implica minimizar el denominador, y esto lleva al problema planteado en la **Ecuación 3. 14**

$$Z = -\frac{n!}{\prod\prod_{-\infty}^{+\infty}\prod \omega_{abc}!}$$

Ecuación 3. 13

$$\Omega = -\iiint_{-\infty}^{+\infty} f(u,v,\omega)\, log\, f(u,v,\omega) du\, dv\, d\omega$$

Ecuación 3. 14

Las siguientes restricciones están para descartar las complexiones (estados) que no cumplan con los criterios, ya que estas indican la conservación tanto de la materia como de la energía en el sistema, ya que la energía total de los n átomos debe ser igual a E_T, y la primera restricción es para determinar la cantidad total de partículas n que es la **Ecuación 3. 15** siendo esta constante, y la segunda restricción indica la energía total del sistema **Ecuación 3. 16**, las complexiones que cumplan estos requisitos son los estados posibles del sistema (Boltzmann, 1964).

$$\mathrm{n} = \iiint_{-\infty}^{+\infty} f(u,v,\omega) du\, dv\, d\omega$$

Ecuación 3. 15

$$E_T = \frac{m}{2}\iiint_{-\infty}^{+\infty} (u^2 + v^2 + \omega^2) f(u,v,\omega) du\, dv\, d\omega$$

Ecuación 3. 16

La magnitud Ω es equivalente a la función H, pero con el signo opuesto, al comparar las ecuaciones **3.14** y **3.11**. H alcanza su valor mínimo cuando f corresponde a la distribución de Maxwell, que también coincide con el estado más probable del gas. Además, Boltzmann demuestra que este es el único estado posible cuando el sistema tiende al equilibrio (Boltzmann, 1964). Su trabajo establece las bases para describir el segundo principio de la termodinámica en términos de probabilidad. A partir de esto, también se describe la entropía en un proceso irreversible, ya que la entropía permanece constante en procesos reversibles (Kuhn, 1987), mientras que en los irreversibles tiende a aumentar hacia el estado más probable. Esta idea es utilizada por Planck para deducir la función de distribución de densidad de energía, donde su análisis muestra que la división de las celdas no es arbitraria, sino que está definida por h.

Estos elementos ayudaron para la respuesta del problema de la radiación del cuerpo negro y de su descripción por medio del oscilador armónico.

Capítulo IV: Oscilador armónico y la energía

El trabajo de Planck se enfocó más en la radiación del cuerpo negro en vez de la teoría de gases por lo cual se centró en hallar una relación entre la energía del resonador U_0 y la intensidad de radiación[41] J_0. Esta formulación la denomino "la ecuación fundamental" previo de formalizar la relación mencionada, se toma en cuenta la ecuación de energía de un resonador **Ecuación 4. 1**, además, Planck define el periodo y el coeficiente de amortiguamiento (disipación de la energía), donde estos dependen de las constantes del resonador, base con que inicia el desarrollo de dicha relación. Se plantea el uso del oscilador armónico lineal ya que tiene la característica de unicidad en la dirección durante el proceso, característica que es necesaria para que las formulaciones sean irreversibles y no estén en contradicción con el segundo principio de la termodinámica.

Ecuación 4. 1 Energia de un Oscilador armonico

$$U = \frac{1}{2}Kf^2 + \frac{1}{2}L\dot{f}^2$$

Ecuación 4. 2 Periodo

$$\tau_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{K}}$$

Ecuación 4. 3 Coeficiente de amortiguamiento

$$\sigma = \frac{2\pi}{3c^3L}\sqrt{\frac{K}{L^3}}$$

La **Ecuación 4. 1** describe la energía de un oscilador armónico donde U es la energía total, K y L son constantes asociadas a las propiedades del sistema. f representa el momento dipolar (Planck, 1914), por analogía en la **Ecuación 4. 1 Energia de un Oscilador armonico** el primer término representa la energía potencial y el segundo termino representa la energía cinética. Las ecuaciones

[41] La "intensidad" de la radiación J es una medida base de la magnitud del campo ya que promedia los valores de la radiación. Su evolución en el tiempo, utilizada por Planck para demostrar la irreversibilidad, describe la tasa a la que una esfera emite radiación, es decir, un valor promedio en función del t (tiempo) (Kuhn, 1987).

Ecuación 4. 2 Periodoy **Ecuación 4. 3 Coeficiente de amortiguamiento** están en función de las propiedades del oscilador armónico (K y L). Para la relación con el campo eléctrico (E), se tiene la condición de que la energía (U) del resonador responda lentamente a las variaciones externas (Kuhn, 1987), teniendo que el coeficiente de amortiguamiento sea $\sigma \ll 1$ obteniendo la **Ecuación 4. 4**, donde caracteriza la energía (U) de un oscilador armónico con el flujo neto E, dado que la descripción del sistema está con base al oscilador armónico y al no haber información sobre la estructura del oscilador se extrapola al interior, en el cual se describe la energía.

Ecuación 4. 4

$$Kf + \frac{2K}{3c^3L}\dot{f} + L\ddot{f} = E$$

Para determinar la ecuación que relaciona la energía y la intensidad de radiación, Planck comienza a promediar la **Ecuación 4. 1** y la **Ecuación 4. 4** en intervalos de tiempo menores al periodo, dado que le interesaba tener cierto número de oscilaciones, es decir que no haya variación en la energía del oscilador, puesto que los intervalos de tiempo con referente a un numero de oscilaciones son pequeñas respecto al periodo y no afecta a la energía del sistema (Kuhn, 1987), lo que describe que para amortiguaciones pequeñas se cumple que el promedio de las energías cinéticas y potencial es equivalente a la energía total $\overline{Kf^2} = \overline{L\dot{f}^2} = U_0$ lo que implica que la energía del sistema se conserva.

Considerando lo anterior, la absorción de energía depende de la energía media del campo, mientras que la tasa de emisión tiene en cuenta la variación de la energía respecto al tiempo, la frecuencia, el área y la energía del resonador. Además, si un oscilador en vibración no emitiera ni absorbiera energía, esta se mantendría constante, ya que no habría interacción con el medio ni influencias externas que afectaran al oscilador. Sin embargo, en el sistema estudiado, existe interacción con el medio, lo que da lugar a la **Ecuación 4. 5**, donde el término de la izquierda de la igualdad representa la tasa en la que el resonador absorbe energía, mientras el lado derecho representa la tasa de emisión[42] de energía (Kuhn, 1987).

---

42 La radiación emitida por un sistema está asociada con su energía interna y se expresa el cambio de energía como la tasa de cambio $\frac{dU_0}{dt}$ que este asociado a la energía emitida y $2v_0\sigma U_0$ refleja la interacción entre las propiedades del medio (mediante σ) y la energía interna (Kuhn, 1987)

Ecuación 4. 5

$$\overline{E\dot{f}} = \frac{dU_0}{dt} + 2v_0\sigma U_0$$

La **ecuación 4.6** representa una ecuación diferencial de primer orden. Para resolverla, se busca reformularla en una forma lineal que facilite su solución. Esto se logra mediante una expansión en serie de Fourier, y así descomponer la función en términos de frecuencia. Esta transformación convierte la ecuación diferencial en una ecuación lineal, simplificando así el proceso de resolución. (Jackson, 1999), obteniendo como resultado un término constante que da cuenta de la estructura física del sistema $\frac{3c^3\sigma}{16\pi^2 v_0}$ y la intensidad de radiación J_0, lo cual lleva a la **Ecuación 4. 6 ecuación Fundamental**[43].

Ecuación 4. 6 ecuación Fundamental

$$\frac{3c^3\sigma}{16\pi^2 v_0} J_0 = \frac{dU_0}{dt} + 2v_0\sigma U_0$$

A partir de la ecuación anterior, se establece una relación entre las dos magnitudes U_0 y J_0 , donde U_0 representa la energía del resonador y J_0 la intensidad de radiación, ambas describiendo el comportamiento de la radiación del cuerpo negro. La densidad de energía radiante caracteriza así la energía total en función del volumen ocupado. En condiciones de equilibrio, todas las componentes de E son iguales, por lo que $\bar{E}^2$se iguala a J_0, permitiendo expresar la densidad de energía en términos de intensidad como $u = 3J_0/4\pi$ (Planck, 1914). Además, en equilibrio, se cumple que $dU_0/dt = 0$, de modo que la ecuación fundamental (**Ecuación 4. 6 ecuación Fundamental**) se reescribe en la forma de la **Ecuación 4. 7**, facilitando la medición de densidad de energía en términos de la frecuencia, la cual se emplea como parámetro principal en los experimentos.

[43] El desarrollo de esta solución se puede encontrar en el libro “La teoría del cuerpo negro y la discontinuidad cuántica 1894 – 1912” 107 – 108 pg

Ecuación 4. 7

$$u_v = \frac{8\pi v^2}{c^3} U_v$$

En la **Ecuación 4. 7** no se tiene en cuenta la entropía e irreversibilidad en el campo al momento de calcular U_0 por lo que primero se realizan los pasos del proceso de Boltzmann (Kuhn, 1987) donde primero se da una *prueba de la irreversibilidad*, luego se exhibe una *función de entropía electromagnética* y se deduce de ella una *distribución de equilibrio*.

Con lo anterior, la prueba de irreversibilidad es la función que determina el estado instantáneo del sistema y tiene como característica que cambia en una sola dirección a lo largo del proceso, hay varias funciones, pero solo basta con conocer una. Planck usa dos intensidades de onda que son la entrante y saliente donde suma las dos expresiones llegando a una versión parecida a la **Ecuación 4. 6 ecuación Fundamental** además, define la entropía de un resonador como $S = \frac{U}{av} \ln\left(\frac{U}{ebv}\right)$ (Kuhn, 1987)[44], adicionalmente, la entropía llega a su valor máximo cuando el sistema de resonadores ha llegado al equilibrio, siguiendo este hilo, se describe la energía teniendo en cuenta la variación de la entropía del sistema, comparando la variación de la entropía y de la energía en un sistema constante, se tiene que $U = bve^{-av/\theta}$ que para la distribución de la densidad de energía se describe con la **Ecuación 4. 8**.

Ecuación 4. 8

$$u = \frac{8\pi b v^3}{c^3} e^{-av/\theta}$$

A su vez la **Ecuación 4. 8** que está en función de la intensidad de la radiación se reescribe en términos de la longitud de onda, que resulta en la **Ecuación 4. 9**, esta tiene forma idéntica a la ley de Wien (**Ecuación 1. 8**), pero esta formulación tiene un inconveniente: la sustentación de la ecuación de la entropía planteada descrita en el párrafo anterior, ya que Planck no pudo demostrar (Kuhn, 1987) la relación $\theta = T$, porque no era la "verdadera" función de entropía ya que no podía

[44] "*Planck, sin argumento preparatorio alguno, «define» sencillamente la entropía de un resonador de frecuencia v y energía U mediante la ecuación*" (Kuhn, 1987)

aplicar la ecuación termodinámica $\partial S_0/\partial E_o = 1/T$, dado que la función definida por Planck para la entropía tendía a un máximo con el tiempo (Kuhn, 1987)

Ecuación 4. 9

$$K_\lambda = \frac{2c^2 b}{\lambda^5} e^{-ac/\lambda\theta}$$

Por consiguiente, Planck hace uso de la combinatoria[45] para definir la entropía, partiendo del argumento que se consideran las diversas maneras en que podría subdividirse la energía total en p (cantidad de partículas) elementos de tamaño ε de manera que la energía total sea igual a $p\varepsilon = E$.

La combinatoria se define como $R = \frac{(N+P-1)!}{(N-1)!P!}$ siendo la expresión que calcula el número de formas posibles de distribuir P elementos indistinguibles en N cajas distinguibles. Los estados se denominan como un arreglo específico de la configuración del conjunto de elementos P , que fija el número de elementos ε atribuidos por el conjunto de N resonadores, para definir la entropía se debe maximizar R_0 y se escribe la ecuación de la entropía del resonador en equilibrio como $S_0 = klnR_0$ (Planck, 1914).

Definir la entropía del resonador en equilibrio es poder determinar la temperatura con la relación termodinámica $\partial S_0/\partial E_o = 1/T$, sin embargo, una de las diferencias del proceso de Planck y de Boltzmann es que para Boltzmann ε es de tamaño arbitrario pero entero, en cambio Planck agrega una hipótesis especial en la que determina que ε tiene un valor no arbitrario[46] $\varepsilon = hv$, con las nuevas consideraciones se realiza el proceso de Boltzmann, en el que se deduce U_λ y se obtiene la siguiente ecuación de densidad de energía, que satisface la de ley de Wien[47].

Ecuación 4. 10

$$u_v = \frac{8\pi b v^3}{c^3} \frac{1}{e^{hv/kt} - 1}$$

[45] La combinatorio combinatoria en el trabajo de Planck es crucial para determinar cómo se distribuyen la energía y da la introducción de "cuantificar" la energía en paquetes para un sistema en equilibrio térmico, lo que lleva a la famosa ley de radiación de cuerpo negro que dependía de la temperatura y de la frecuencia de la radiación.

[46] Descripción de la hipótesis especial detallado en el libro "La teoría del cuerpo negro y la discontinuidad cuántica 1894 – 1912" 159-160 pg.

[47] Remitir al capítulo II sección de Wien.

Esta ecuación describe la densidad de energía espectral de la radiación del cuerpo negro, resolviendo el problema clásico de la distribución de energía en el espectro de emisión. A diferencia de la ley de Rayleigh-Jeans y los planteamientos de Wien, que no lograban explicar la radiación a altas y bajas frecuencias, la formulación de Planck incorpora el concepto de cuantos de energía $\varepsilon = hv$, permitiendo una representación precisa de la radiación en todo el espectro. Este avance fue crucial para entender cómo se distribuye la energía entre las frecuencias y cómo se alcanza el equilibrio en la radiación electromagnética.

Asimismo, El papel de la entropía y el modelo del oscilador armónico son fundamentales en la conexión entre la energía y la radiación. Siguiendo los postulados de Boltzmann, se establece una relación que involucra la irreversibilidad y la cuantización de la energía, lo que llevó a Planck a derivar la ecuación de la distribución de equilibrio. Al incluir consideraciones combinatorias, se introducen los cuantos de acción, revolucionando la comprensión de la energía como no continua, sino discreta. Este enfoque no solo clarificó la naturaleza de la radiación del cuerpo negro, sino que también sentó las bases para el desarrollo de la mecánica cuántica y transformó la física moderna.

El desarrollo de la solución del cuerpo negro conllevo a usos de métodos que en la época no lo consideraban por estar fuera del sentido común, como cuantificar la energía, el uso de la probabilidad para determinar el estado de un sistema físico, la implementación de nuevas hipótesis como h en donde los científicos de la época comenzaron un nuevo desarrollo para las nuevas teorías física que Establecen las bases de la física moderna la ciencia.

Capitulo V: Discusión de la importancia del planteamiento que propone Planck para dar solución al problema del cuerpo negro.

El problema de la radiación del cuerpo negro tuvo un impacto significativo en la relación entre la teoría y los datos experimentales, pues se buscaba comprender la distribución de energía en el espectro de radiación en procesos de absorción y emisión. Wien propuso su ley de desplazamiento, que dejó sin definir la función de densidad de energía. Como resultado, diversos científicos intentaron deducir esta función a partir de consideraciones de mecánica estadística, termodinámica y electromagnética, pero sin lograr una correspondencia con los datos experimentales. Planck también abordó esta problemática intentando relacionar la entropía con procesos irreversibles de la mecánica del continuo[48]. Sin embargo, tras analizar los datos experimentales, se evidenció que los enfoques anteriores no describían adecuadamente el sistema, debido a la incongruencia entre los datos teóricos y los observados.

Esto debido a que el planteamiento de las ecuaciones de energía estaba con base a teorías electromagnéticas implicando una característica de reversibilidad para el fenómeno de la radiación del cuerpo negro, entrando en contradicción con el segundo principio de la termodinámica, la entropía, a lo que Planck propuso que la descripción debía cumplir con un cambio unidireccional hacia efectos conservativos, de modo que las formulaciones se alinearan con el segundo principio de la termodinámica, característico de los procesos irreversibles, debido que los resultados experimentales mostraban esta consecuencia para la radiación del cuerpo negro, siendo esto un gran problema para las descripciones teóricas del fenómeno.

Debido a lo anterior, Planck introduce el oscilador armónico para aplicar las características de efectos equilibradores[49] como el de una onda plana que viaja a una sola dirección, además, la relación entre la entropía y la energía de radiación fue esencial para describir adecuadamente la

[48] Mecánica del continuo se entiende por rama de la física que ocupa el estudio de del comportamiento mecánico de materiales continuos, enfocado en describir el comportamiento de sólidos y fluidos en términos de variables continuas, como la densidad, la velocidad, la presión, entre otras, en lugar de considerar las propiedades a nivel atómico o molecular.

[49]Las características equilibradores del oscilador armónico se relacionan con su capacidad para restaurar y estabilizar el sistema cuando se aparta de la posición de equilibrio, así como con la regularidad y la previsibilidad en su movimiento: Restauración hacia la posición de equilibrio, Periodicidad y regularidad en el movimiento, Estabilidad en sistemas mecánicos, Amortiguamiento en osciladores armónicos amortiguados.

distribución de energía, logrando finalmente una correspondencia acorde con los datos experimentales del cuerpo negro.

A su vez, el problema de la radiación del cuerpo negro es resuelto mediante la *ecuación fundamental*, que complementa los trabajos de Wien y Rayleigh, mostrando que los resultados en frecuencias altas y bajas coinciden con las predicciones de dicha ecuación. Esto permite una descripción completa de la radiación del cuerpo negro en cualquier rango de frecuencia. Además, este desarrollo también implicó la relación entre la entropía y la estadística, en sistemas en equilibrio termodinámico, donde la estadística permite describir cómo la probabilidad de cada microestado afecta la distribución de energía en el sistema, lo cual está vinculado con el concepto de máxima entropía.

El oscilador armónico, usado como modelo matemático, permitió representar los modos de vibración de la radiación electromagnética y su relación con la entropía del sistema por lo que el oscilador admite la solución que plantea Planck para la radiación del cuerpo negro, con este modelo matemático que expone las características que requería para el desarrollo del planteamiento, como es la unicidad de la dirección y también la descripción de la energía, *que a partir de la ecuación de energía del oscilador se deduce la distribución de la densidad de energía del sistema*, llevando a la culminación de la solución de la radiación del cuerpo negro dado que se representa la función arbitraria que plantea la ley de Wien y detalla completamente el espectro electromagnético del cuerpo negro.

La formulación de la distribución de densidad de energía propuesta por Planck tiene profundas implicaciones conceptuales, como el uso de la probabilidad para definir un estado y la aplicación de la entropía para determinar la energía. El desarrollo de la teoría de la radiación del cuerpo negro comenzó con la ley de Wien, que describía la distribución de energía sólo en condiciones específicas, como altas frecuencias y bajas temperaturas, pero no se aplicaba de manera general. Planck resolvió este problema mediante su ecuación, introduciendo el concepto de cuantos de energía en la forma $\varepsilon = h\nu$, donde h es la constante de Planck y ν la frecuencia. Esto permitió una descripción precisa de la radiación del cuerpo negro en todo el espectro.

La inclusión de la energía $\varepsilon = h\nu$ en cálculos combinatorios para determinar la entropía permitió a Planck introducir el concepto de cuantización, con un valor discreto para los intercambios energéticos. Esta idea revolucionaria sugirió que la energía no se distribuía de forma continua, sino en "cuantos" o unidades discretas, sentando así las bases de la mecánica cuántica. La ecuación fundamental de Planck entrelazó los conceptos de entropía, irreversibilidad y cuantización de la energía, elementos que resultaron esenciales para comprender la física cuántica. Este avance, además, proporcionó a los científicos posteriores un marco para construir la mecánica cuántica sobre principios de energía discreta.

Es importante destacar que un enfoque histórico en la construcción de un producto de la actividad científica (Ayala M. M., 2006), permite analizar las circunstancias y lineamientos de pensamiento propios de la época en que esta actividad se desarrolló. En este documento se pone de relieve cómo, en la época de desarrollo de la teoría del cuerpo negro, existían dos enfoques dominantes en física: el mecanicismo y el energetismo. Planck, más cercano al mecanicismo, abordó inicialmente el problema de la radiación del cuerpo negro utilizando formulaciones mecanicistas. Aquí se explora cómo este cambio de perspectiva dio paso a nuevas herramientas matemáticas para describir físicamente el sistema, como el uso de la probabilidad para definir la entropía, el modelo del oscilador armónico (que cumple con los principios de unidireccionalidad y equilibrio), y la hipótesis innovadora de la cuantificación de la energía. A diferencia de Boltzmann, para quien la cuantización tenía un valor arbitrario, Planck estableció un valor definido para los cuantos de energía.

Este acercamiento histórico permite observar relaciones de distintas teorías que enlazan conceptos que permiten la descripción de un fenómeno en particular para este trabajo, la teoría electromagnética, termodinámica, probabilístico, teorema H, y concepto tales como la presión de radiación, la combinatoria, entropía y la energía, en marcados en el modelo matemático del oscilador armónico para describir la radiación del cuerpo negro, evidenciando la evolución de un producto científico y las implicaciones que tuvo en el avance de la física. Además, este tipo de abordaje en el estudio de un fenómeno permite entender un marco amplio en el desarrollo de las explicaciones como un recurso pedagógico. En particular desde este trabajo para entender las explicaciones de la radiación del cuerpo negro, se reconoció que es una suma de elementos, en el que cada uno aporto para el desarrollo de la descripción de la radiación del cuerpo negro y el desarrollo de una teoría que lograra explicarlo.

Por otra parte, al profundizar en el tema propuesto y en su desarrollo, pude acercarme al contexto histórico y a las implicaciones inherentes a la evolución de las ideas científicas. Este análisis muestra que la construcción de soluciones a problemas científicos no es un proceso lineal, sino que está moldeado por la participación de la comunidad científica. También se destaca la influencia de las corrientes de pensamiento de los científicos y como se refleja en el predominio de unas ideas sobre otras en particular, el mecanicismo y el energetismo en aquella época.

Finalmente, profundizar en el marco matemático como aplicar diferentes herramientas matemáticas permite hacer descripciones aproximadas al fenómeno mediante el uso rotacionales, expansión de Fourier, aplicación de función estadística, función de onda plana, permiten entender de forma más completa la descripción y el desarrollo de un fenómeno en particular como es el caso de este trabajo la radiación del cuerpo y sus implicaciones.

Referencias Bibliográficas

Alonso, M. F. (1999). *Fisica Vol I: Mecanica.* Mexico: Addison wesley, ISBN 968-444-223-8.

Alonso, M., & Finn, E. J. (2000). *Física: Volumen II Campos y Ondas.* Mexico: Addison-Wesley Iberoamericana. ISBN 968-6630-02-3.

Ayala, M. M. (2006). Los análisis histórico-críticos y la recontextualización de saberes científicos. Construyendo un nuevo espacio de posibilidades. *Pro-Posições, 17*(1), 19-37.

Ayala, M., Gárzon, M., & Malagón, F. (2007). Consideraciones sobre la formalización y matematización de los fenomenos físicos. *Praxis Filosófica*(25), 39-54. ISSN: 0120-4688.

Boltzmann, L. (1964). *Lectures on Gas Theory.* New York: Dover Publications, INC. https://doi.org/10.1525/9780520327474

Borgnakke, C. S. (2013). *Fundamentals of Thermodynamics.* Hoboken: Wiley. ISBN 978-1-118-13199-2.

Callen, H. B. (1985). *Termodinámica: Introducción a las teorías físicas de la termostática del equilibrio y de la termodinámica irreversible.* Madrid: AC, ISBN 9788472880429.

Devlin, K. (1996). *"Mathematics: The Science of Patterns.".* New york: Scientific American Library. ISBN 9780805073447.

Eisberg, R. R. (1978). *Física cuántica: átomos, moléculas, sólidos, núcleos y partículas.* C.D Mexico: Limusa Wiley. ISBN: 9681804198.

Feynman, R. P. (1998). *Seis piezas fáciles.* Barcelona: Crítica. ISBN: 8417067558.

French, A. P. (2006). *Vibraciones y ondas.* Barcelona: Reverté. S.A. ISBN: 9788429140989.

Fritzsche, H. (26 de 10 de 2016). *Encyclopedia Britannica.* Wien's law. https://www.britannica.com/science/Wiens-law

García, M. (2003). *Introducción a la física moderna.* Bogotá: Universidad Nacional de Colombia. ISBN 9581700188.

Goldstein, H. (1987). *Mecánica Clásica.* Barcelona: Reverté, S.A. ISBN 9788429143065.

Griffiths, D. J. (2012). *Introduction to Electrodynamics.* New York: Pearson, ISBN-13: 978-0-321-85656-2.

Haar, D. t. (1995). *Elements of statical mechanics.* Oxford: Butterworth-Heinemann Ltd. ISBN 9780750623476.

Jackson, J. D. (1999). *Classical Electrodynamics (Third Edition).* California: John Wiley & Sons, Inc. ISBN: 978-0-471-30932-1.

Kuhn, T. (1987). *La teoria del cuerpo negro y la discontiniudad cuantica 1894 - 1912.* Madrid: Alianza Universidad. ISBN: 8420622621.

Kuhn., T. S. (1971). *La estructura de las revoluciones cientificas.* Mexico: Fondo de cultura económica, ISBN: 9789681604431.

L. D. Landau, E. M. (1983). *Mecánica Cuántica no-relativista Vol. 3.* Barcelona: Reverté. S.A. ISBN: 9788429140835.

L. De la peña, M. V. (2003). *Problemas y ejercicios de mecánica cuántica.* Mexico: Fondo de cultura económica. ISBN: 9681670353.

Longair, M. (2003). *Theoretical Concepts in Physics.* Cambridge: Cambridge university press. https://doi.org/10.1017/9781108613927

Marion, J. B. (2003). *Dinámica clásica de las partículas y sistemas.* Barcelona: Reverté. S.A. ISBN: 8429140948.

Martínez, R. (1999). La teoria de la radiacion del cuerpo negro. *MOMENTO - Revista de Física*(19), 59-75. https://doi.org/10.15446/mo

Moreno Arias, C. C. (2017). Radiación Térmica: Construyendo la identidad entre luz y calor. *(Monografia de pregrado).* Universidad Pedagógica Nacional de Colombia, Bogota D.C. URI: http://hdl.handle.net/20.500.12209/9925.

Planck, M. (1914). *The Theory of Heat Radiation.* Philadelphia: P. Blakiston's Son & Co. ISBN: 0486668118.

Rivadulla, A. (2002). La solución revolucionaria de planck del problema de la radiación del cuerpo negro. En *Historia y Filosofia de la física cuántica* (págs. 43-55). Madrid: Universidad Complutense de Madrid, Facultad de Filosofía. ISBN 84-7491-640-2.

Serway, R. A. (2014). *Física para ciencias e ingeniería con Física Moderna Vol 2.* Mexico: Cengage Learning, ISBN: 9786075192017.

Young, H. D., & Freedman, R. A. (2009). *Física Universitaria con fisica moderna Vol 2.* Mexico: Pearson. ISBN 978-607-32-2190-0.

Anexos

Anexo I

$$T\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p$$

$p = \frac{1}{3}\ E$, donde E es la densidad total de energía de radiación, $U = EV$. Se remplaza y se tiene:

$$T\left(\frac{\partial \frac{1}{3}\ E}{\partial V}\right)_V = \left(\frac{\partial EV}{\partial V}\right)_T + \frac{1}{3}\ E$$

$$\frac{T}{3}\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V = E\left(\frac{\partial V}{\partial V}\right)_T + \frac{1}{3}\ E$$

$$\frac{T}{3}\frac{\partial E}{\partial T} = \frac{4}{3}\ E$$

$$T\frac{\partial E}{\partial T} = 4\ E$$

$$\frac{\partial E}{E} = 4\ \frac{\partial T}{T}$$

Se integra:

$$\int_{E_0}^{E}\frac{\partial E}{E} = \ 4\int_{T_0}^{T}\frac{\partial T}{T} \quad \rightarrow \ lnE - lnE_0 = 4(lnT - lnT_0)$$

$$ln\frac{E}{E_0} = \ ln\left(\frac{T}{T_0}\right)^4 \rightarrow E = \left(\frac{E_0}{{T_0}^4}\right)T^4$$

Se obtiene:

$$E\ \propto\ T^4\ \rightarrow\ E = \ aT^4$$

Anexos

Anexo II

$$\nabla \times \mathrm{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathrm{H} = \frac{1}{c}\,\frac{\partial E}{\partial t}$$

Se resuelve el rotacional en los campos teniendo en cuanta las condiciones de la onda electromagnética plana.

$$\nabla \times \mathrm{E} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{bmatrix}$$

$$\nabla \times \mathrm{E} = \left(\frac{\partial E_{z'}}{\partial y'} - \frac{\partial \mathrm{E}_{y'}}{\partial z'}\right) i + \left(\frac{\partial E_{z'}}{\partial x'} - \frac{\partial \mathrm{E}_{x'}}{\partial z'}\right) j + \left(\frac{\partial \mathrm{E}_{y'}}{\partial x'} - \frac{\partial E_{x'}}{\partial y'}\right) k$$

Dado que la onda electromagnética plana se propaga en dirección x' se asume que $\mathrm{E}_{x'} = 0$, queda reducido a:

$$\nabla \times \mathrm{E} = \frac{\partial \mathrm{E}_{z'}}{\partial x'} j + \frac{\partial \mathrm{E}_{y'}}{\partial x'} k$$

Para componentes magnéticos:

$$\nabla \times \mathrm{H} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{bmatrix}$$

$$\nabla \times \mathrm{H} = \left(\frac{\partial H_{z'}}{\partial y'} - \frac{\partial \mathrm{H}_{y'}}{\partial z'}\right) i + \left(\frac{\partial H_{z'}}{\partial x'} - \frac{\partial \mathrm{H}_{x'}}{\partial z'}\right) j + \left(\frac{\partial \mathrm{H}_{y'}}{\partial x'} - \frac{\partial H_{x'}}{\partial y'}\right) k$$

Dado que la onda electromagnética plana se propaga en dirección x' se asume que $\mathrm{H}_{x'} = 0$, quedo reducido a:

$$\nabla \times \mathrm{H} = \frac{\partial \mathrm{H}_{z'}}{\partial x'} j + \frac{\partial \mathrm{H}_{y'}}{\partial x'} k$$

Anexos

Reorganizando las ecuaciones tenemos:

$$\frac{\partial E_{x'}}{\partial t} = 0 \qquad \frac{\partial H_{x'}}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial E_{y'}}{\partial t} = -c\ \frac{\partial \mathrm{H}_{z'}}{\partial x'} \qquad \frac{\partial H_{y'}}{\partial t} = c\ \frac{\partial E_{z'}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial E_{z'}}{\partial t} = c\ \frac{\partial H_{y'}}{\partial x'} \qquad \frac{\partial H_{z'}}{\partial t} = -c\ \frac{\partial E_{y'}}{\partial x'}$$

$$\frac{\partial E_{x'}}{\partial x'} = 0 \qquad \frac{\partial H_{x'}}{\partial x'} = 0$$

Para la deducción de las ecuaciones de onda se deriva temporalmente $\partial E_{y'}$ y $\partial H_{z'}$

$$\frac{\partial E_{y'}}{\partial t} = -c\ \frac{\partial \mathrm{H}_{z'}}{\partial x'}$$

Derivamos:

$$\frac{\partial^2 E_{y'}}{\partial t^2} = -c\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathrm{H}_{z'}}{\partial x'}\right)$$

Sabemos que:

$$\frac{\partial H_{z'}}{\partial t} = -c\ \frac{\partial E_{y'}}{\partial x'}$$

Sustituimos:

$$\frac{\partial^2 E_{y'}}{\partial t^2} = -c\ \frac{\partial}{\partial t}\left(-c\ \frac{\partial E_{y'}}{\partial x'}\right)$$

Simplificando:

$$\frac{\partial^2 E_{y'}}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 E_{y'}}{\partial {x'}^2}$$

$$\frac{\partial H_{z'}}{\partial t} = c\ \frac{\partial E_{y'}}{\partial x'}$$

Derivamos:

$$\frac{\partial^2 H_{z'}}{\partial t^2} = -c\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial E_{y'}}{\partial x'}\right)$$

Sabemos que:

$$\frac{\partial E_{y'}}{\partial t} = -c\ \frac{\partial \mathrm{H}_{z'}}{\partial x'}$$

Sustituimos:

$$\frac{\partial^2 H_{z'}}{\partial t^2} = -c\ \frac{\partial}{\partial t}\left(-c\ \frac{\partial \mathrm{H}_{z'}}{\partial x'}\right)$$

Simplificando:

$$\frac{\partial^2 H_{z'}}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 H_{z'}}{\partial {x'}^2}$$

Anexos

Se tiene las ecuaciones de onda:

$$\frac{\partial^2 E_{y'}}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 E_{y'}}{\partial {x'}^2} \qquad \frac{\partial^2 H_{z'}}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 H_{z'}}{\partial {x'}^2}$$