UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

ESTUDIO NUMÉRICO DE LA DINÁMICA DE PLANETAS EXTRASOLARES

Tesis presentada por Eduardo Antonio Mafla Mejia

dirigida por:

Camilo Delgado Correal

Nestor Mendez Hincapie

para obtener el grado de Licenciado en Física

2015

Departamento de Física

Dedico este trabajo a mi mamá,
quien me apoyo en mi deseo
de seguir el camino de la educación.
Sin su apoyo este deseo no lograría
ser hoy una realidad.

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	ESTUDIO NUMÉRICO DE LA DINÁMICA DE PLANETAS EXTRASOLARES
Autor(es)	Mafla Mejia, Eduardo Antonio
Director	Méndez Hincapié, Néstor; Delgado Correal, Camilo
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2015. 61 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	DINÁMICA DE EXOPLANETAS, LEY GRAVITACIONAL DE NEWTON, ESTUDIO NUMÉRICO.

2. Descripción

Trabajo de grado que se propone evidenciar si el modelo matemático clásico newtoniano, y en consecuencia las tres leyes de Kepler, se puede generalizar a cualquier sistema planetario, o solo es válido para determinados casos particulares. Para lograr esto de comparar numéricamente los efectos de las diferentes correcciones que puede adoptar la ley de gravitación de Newton para modelar la dinámica de planetas extrasolares aplicándolos en los sistemas extrasolares Gliese 876 d, Gliese 436 b y el sistema Mercurio – Sol. En los exoplanetas examinados se encontró, que en un buen grado de aproximación, la dinámica de los exoplanetas se logran describir con el modelo newtoniano, y en consecuencia, modelar su movimiento usando las leyes de Kepler. Pero hay que revisar más exoplanetas donde no sirve la aproximación kepleriana y se deba recurrir a otros parámetros de corrección.

3. Fuentes

Comparación de Métodos Numéricos para la Solución Ecuación Diferencial de 1 orden. fglongatt.org/OLD/Archivos/Archivos/SP_II/ComparaMeto.pdf. [Online; accessed 08-octubre-2015].

Laboratorio de habitabilidad planetaria - Universida de Puerto Rico. http:// phl.upr.edu/projects/habitable-exoplanets-catalog. [Online; accessed 28-septiembre-2015].

Daniel C Fabrycky. Non-keplerian dynamics. arXiv preprint arXiv:1006.3834, 2010.

Harvey Gould y Jan Tobochnik. An Introduction to Computer Simulation Methods: Applications to Physical Systems. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., Boston, MA, USA, 2nd edicion., 1995. ISBN 0201506041

Augustus Edward Hough Love. Some Problems of Geodynamics: Being an Essay to which the Adams Prize in the University of Cambridge was Adjudged in 1911. Cambridge, 1911.

Rosemary A Mardling. On the long-term tidal evolution of gj 436b in the presence of a resonant companion. arXiv preprint arXiv:0805.1928, 2008.

Charles W Misner, Kip S Thorne, y John Archibald Wheeler. Gravitation. Macmillan, 1973.

4. Contenidos

1. Planetas extrasolares: Se describe lo que caracteriza un planeta extrasolar, sus métodos de detección y algunas motivaciones como es encontrar planetas en una zona habitable.
2. Movimiento de cuerpos celestes: Se describe las correcciones:
- Postnewtoniana
- En caso de cuerpos no esféricos
Y el modelo de los n cuerpos
3. Diseño de órbitas: Se diseña las órbitas de los diferentes exoplanetas usando el modelo clásico y las diferentes correcciones que puede tomar este realizando un análisis de sus diferencias o similitudes.

5. Metodología

No aplica

6. Conclusiones

La integración numérica permite encontrar soluciones a las ecuaciones diferenciales sin importar la complejidad de estas. Con esta idea, se fue agregando términos que describan perturbaciones, siempre y cuando estén expresados en función de las variables utilizadas, logrando soluciones rápidas y precisas.

En los exoplanetas examinados se encontró, que en un buen grado de aproximación, la dinámica de los exoplanetas se logran describir con el modelo newtoniano, y en consecuencia, modelar su movimiento usando las leyes de Kepler. Pero hay que revisar más exoplanetas donde no sirve la aproximación kepleriana y se deba recurrir a otros parámetros de corrección.

En el transcurso del desarrollo de esta tesis, se descubrió que existe una sinergia en el uso apropiado de las TIC, para la enseñanza de las leyes de Kepler. Este trabajo puede ser llevado al aula, mediante el adecuado uso pedagógico. Es una buena forma de mostrar la relación entre la programación y la física, aplicando la ley de gravitación universal propuesta por Newton, para trabajar problemas actuales, como es la dinámica de planetas extrasolares.

Los códigos desarrollados en este trabajo pueden ser mejorados dependiendo de la evolución que tomen los métodos numéricos y el software. También pueden ser aplicados a cualquier sistema exoplanetario, dependiendo de las características que presenten dichos sistemas y las correcciones que se desee realizar.

Elaborado por:	Eduardo Antonio Mafla Mejia
Revisado por:	Néstor Méndez

Fecha de elaboración del Resumen:	01	12	2015

Índice general

1. INTRODUCCIÓN **1**

2. PLANETAS EXTRASOLARES **4**

2.1. DEFINICIÓN DE PLANETAS EXTRASOLARES 5

2.2. MÉTODOS DE DETECCIÓN DE PLANETAS EXTRASOLARES 7

2.2.1. VELOCIDAD RADIAL 7

2.2.2. ASTROMETRÍA 7

2.2.3. FOTOMETRÍA 8

2.2.4. MICROLENTES GRAVITACIONALES 9

2.2.5. OBSERVACIÓN DIRECTA 10

2.3. PLANETAS EN LA ZONA HABITABLE 11

3. MOVIMIENTO DE CUERPOS CELESTES **14**

3.1. EL PROBLEMA DE LOS DOS CUERPOS 16

3.1.1. EFECTOS RELATIVISTAS 17

3.1.2. EFECTOS DE CUERPOS NO ESFÉRICOS 18

3.2. EL PROBLEMA DE LOS N CUERPOS 20

4. DISEÑO DE ÓRBITAS **22**

4.1. ÓRBITA NEWTONIANAS CLASICA Y ÓRBITA CON CORRECCIÓN 1 PN 24

4.2. ÓRBITA NEWTONIANA Y ÓRBITA DE PLANETA ACHATADO 28

4.3. ÓRBITA NEWTONIANA Y ÓRBITA ALREDEDOR DE UNA ESTRELLA ACHATADA 32

4.4. N CUERPOS 36

5. CONCLUSIONES **41**

6. ANEXOS **44**

6.1. Código Órbitas Newtonianas y Postnewtonianas 44

6.2. Código Órbitas N-Cuerpos 46

6.2.1. Cálculos 46

6.2.2. Integrador 47

6.2.3. Sistema solar 48

6.3. Código Órbita Kepleriana y Órbita De Planeta Achatado 51

6.4. Código Órbita Kepleriana y Órbita De Estrella Achatada 54

Bibliografía **57**

Índice de figuras

2.1. Numero de planetas descubiertos por año. 5
2.2. Velocidad radial 8
2.3. Astrometría 9
2.4. Fotometria 10
2.5. Microlente 11
2.6. Observación directa 12
2.7. Zona de habitabilidad 13

3.1. Ley de gravitación de Newton 15
3.2. Forma real, Geoide, Elipsoide, cuerpo esférico 19

4.1. Orbita Gliese 876 d 25
4.2. Orbita Gliese 876 d - ampliación 26
4.3. Diferencia entre el radio vector newtoniano y postnewtoniano de Gliese 876 d 27
4.4. Evolución temporal del radio vector de Gliese 876 d con el modelo newtoniano y postnewtoniano. 28
4.5. Órbita Gliese 436 b 29
4.6. Órbita Gliese 436 b - ampliación 30
4.7. Órbitas con distintos valores de k_L para el planeta Gliese 436 b. . . . 30
4.8. Diferencia entre los radio vector newtoniano y planeta achatado de Gliese 436 b 31
4.9. Evolución temporal del radio vector de Gliese 436 b durante 1 meses . 32
4.10. Órbita newtoniana y órbita causada por la corrección de achatamiento del Sol de Mercurio. 33

4.11. Órbitas de Mercurio - ampliación 35
4.12. Diferencia entre los radios vectores newtoniano y causado por por la corrección correspondiente al achatamiento del sol. 35
4.13. Evolución temporal del radio vector de Mercurio durante 1 meses . . 36
4.14. Órbitas de los exoplanetas del sistema Gliese 876 37
4.15. Resonancia orbital 38
4.16. Órbita de Gliese 876 b y Gliese 876 c, cada uno sin interacción con otros cuerpos. 39
4.17. Efectos de resonancia en las órbitas de Gliese 876 b y Gliese 876 c . . 39
4.18. Comparacion de orbiras Gliese 876 d. 40
4.19. Órbitas de Gliese 876 40

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

Durante muchos años, la humanidad, al mirar el firmamento y contemplar su majestuosidad, se preguntó si estamos solos en el universo, si existe vida en algún lugar de ese cielo y si es así ¿porqué no tenemos evidencia de ello? Motivados por estos cuestionamientos hace varias décadas, un grupo de astrónomos se hizo a la tarea de detectar planetas fuera de nuestro sistema solar que orbitan estrellas cercanas, conocidos como exoplanetas [25].

Nuestro sistema solar, que se encuentra en la galaxia denominada vía láctea, está compuesto de una estrella y 8 planetas que orbitan alrededor de ella debido a su atracción gravitacional [5]. La vía láctea tiene cerca de 100 mil millones de estrellas y más aún, el universo hospeda más de 100 mil millones de galaxias [3]. Esto hace pensar en la existencia de sistemas solares, no necesariamente iguales al nuestro [35].

Las teorías actuales, defienden que los planetas se formaban a partir de discos compuestos del gas y polvo sobrantes tras el nacimiento de una estrella. En nuestro sistema solar, los planetas gigantes gaseosos, como Júpiter y Saturno, tomaron forma a gran distancia y migraron hacia dentro, mientras el arrastre gravitacional del polvo y el gas sobrantes fueron erosionando sus órbitas [17]. En este proceso, los planetas se enfrentan a la inestabilidad dinámica (Cambios orbitales a largo plazo gracias a los efectos gravitacionales y efectos de marea de su estrella anfitriona) que pueden ser expulsados fuera del sistema planetario formado, o ser atraído y consumi-

do por su estrella. Estos casos no pasaría si los planetas formados siguieran órbitas keplerianas (planetas y estrella que actúan como masas puntuales, que orbitan entre sí, de manera aislada de otros cuerpos, según la teoría de la gravedad de newton).

Objetivo General

Comparar numéricamente los efectos de las diferentes correcciones que puede adoptar la ley de gravitación de Newton para modelar la dinámica de planetas extrasolares.

Objetivos Específicos

- Modelar numéricamente los sistema extrasolares Gliese 876 d, Gliese 436 b y el sistema Mercurio – Sol, usando el modelo gravitacional clásico.

- Modelar numéricamente los sistema extrasolares Gliese 876 d, Gliese 436 b y el sistema Mercurio – Sol, aplicando específicos términos de corrección al modelo gravitacional clásico.

- Modelar numéricamente el sistema extrasolar Gliese 876 como problema de n cuerpos.

Para cumplir con este objetivo, se dará la definición de planeta extrasolar, se mencionará las ventajas y limitaciones de los métodos de detección y se explicará lo que se conoce como zona de habitabilidad. Para modelar las diferentes interacciones existentes, exploraremos la dinámica no kepleriana. Será un desarrollo numérico que consiste inicialmente en el estudio de la ecuación diferencial del problema de los dos cuerpos clásico. Tras obtener la solución usando integración numérica, se agregarán diferentes términos correspondientes a correcciones de tipo:

- Postnewtonianas: Realizan correcciones de potencial al modelo newtoniano, conocidas como correcciones de segundo orden 1PN [14].

- Planeta achatados: Se agregan términos al modelo clásico, que dan cuenta del

grado de achatamiento del planeta. El término agregado más influyente es conocido como número love k_L [14].

- Estrellas achatadas: La acción de rotación de las estrellas, hace que sus formas no seas perfectamente esféricas. Éste grado de achatamiento es representado por el número love $k_{L\star}$ para estrellas [14].

También se estudiarán sistemas con más de un planeta (N cuerpos) que interactúan entre sí bajo el modelo clásico newtoniano, para ser comparado con el modelo clásico de dos cuerpos.

Las diferentes correcciones al modelo clásico y el problema de n cuerpos serán programados bajo el lenguaje de programación python y aplicados a los sistemas extrasolares Gliese 876, Gliese 436 y Mercurio. La mayoría de conceptos dinámicos fueron originalmente diseñados para describir el sistema solar; el descubrimiento de exoplanetas a llevado a los investigadores a realizar estudios analíticos y numéricos debido a que se tiene en cuenta pequeñas cantidades (relaciones de masa, excentricidades, inclinaciones). Las aproximaciones que se logran con el modelo kepleriano son aceptadas para nuestro Sistema Solar, pero se requiere de modelos más generales para describir con mayor precision la inmensa cantidad de sistemas planetarios descubiertos en los últimos años. Es por esta razón que este trabajo tomara la dirección del estudio numérico de la solución de los casos mencionados anteriormente.

Capítulo 2

PLANETAS EXTRASOLARES

Los planetas extrasolares o exoplanetas son aquellos que orbitan en torno a otras estrellas distintas al Sol, y en consecuencia, forma parte de sistemas planetarios distintos al nuestro. Estos planetas se nombran usando el nombre de la estrella huésped, más una letra minúscula ordenada alfabéticamente según el orden del descubrimiento del planeta en el sistema planetario, empezando por la letra "b"[28].

En 1995 se dio a conocer a la comunidad científica, y sobre todo a la humanidad, la existencia de planetas fuera del sistema solar. Michel Mayor y Didier Queloz de la Universidad de Ginebra, mostraron su descubrimiento, llamando a éste planeta 51 pegasis b, siendo el primero fuera del sistema solar detectado por el hombre que órbita la estrella Pegasi, que está en la constelación Pegaso, a 47,9 años luz del Sol [25]. En enero de 1996, Geoffrey W. Marcy, investigador en la Universidad de San Francisco junto con R. Paul Butler, de la Universidad de California en Berkeley, anunciaron que habían hallado dos nuevos planetas en torno a una estrella similar al Sol [20]. Así, desde el 2011, los astrónomos vienen descubriendo un promedio de tres exoplanetas por semana. Algunos se encuentra en la zona de habitabilidad de su estrella, región en la cual la temperatura de un planeta es ideal para encontrar agua [35].

Al 7 de mayo del 2015, se conocen 1523 planetas confirmados, 3303 planetas candidatos, para un total de 4826 planetas [4]. Estos descubrimientos impulsan a

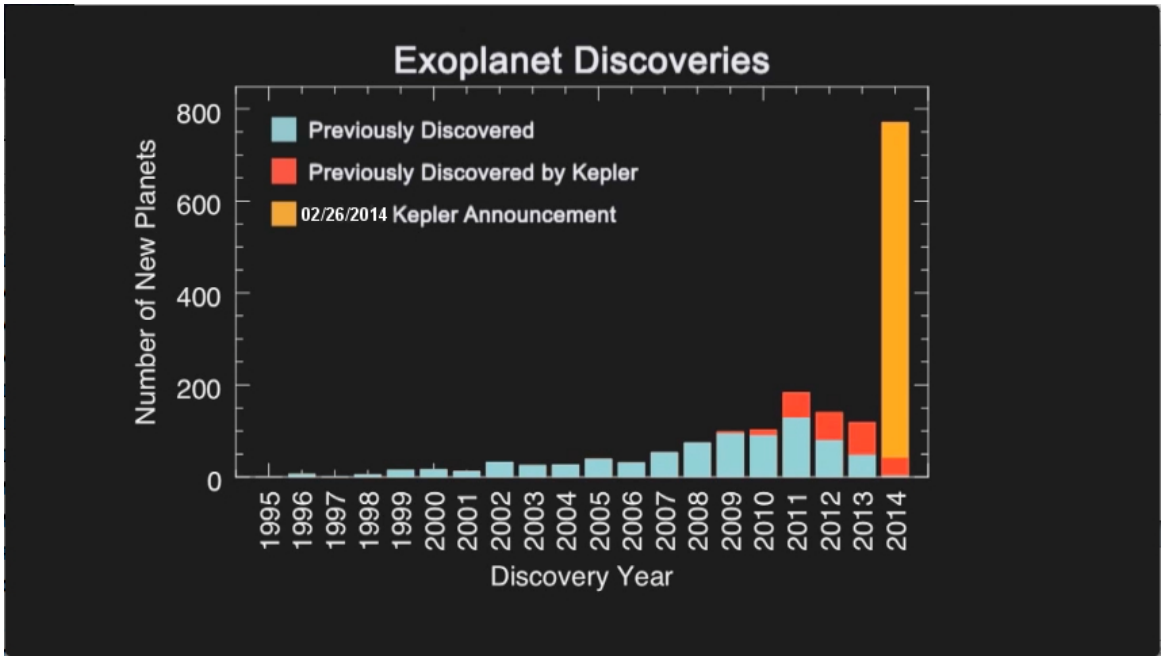


Figura 2.1: Numero de planetas descubiertos por año [7].

muchos jóvenes científicos a la caza de estos, convirtiéndose en la especialidad astrofísica de moda. Para ésto, se pusieron en marcha muchos proyectos como la red SONG (Stellar Observations Network Group), dirigida por la Universidad de Aarhus (Dinamarca) y en la que colaboran la Universidad de Copenhague y el Instituto de Astrofísica de Canarias (IAC) con el fin de encontrar planetas y estudiarlos para poder resolver interrogantes relacionados con la formación planetaria [12].

2.1. DEFINICIÓN DE PLANETAS EXTRASOLARES

Para poder dar una definición concreta de exoplaneta y no caer en ambigüedades, el grupo de planetas extrasolares (WGESP) de la IAU (Union Astronomica Internacional) concluyo lo siguiente:

> *En lugar de tratar de construir una definición detallada de qué es un planeta, designado a cubrir todas las posibilidades futuras, el WGESP acordó restringirse a si mismo en desarrollar una definición aplicable a*

los casos reclamados como una detección, es decir: los relevamientos de velocidad radial para compañeros de estrellas tipo solar(en su mayoría) y los cambios de imagen directas para objetos flotantes libres en cúmulos de estrellas jóvenes. A medida que se hagan nuevos descubrimientos en el futuro, el WGESP va a definir sus méritos individuales y circunstancias y tratara de ajustar los nuevos objetos en la definición de "planeta", revisándola cuando sea necesario. Este es un enfoque gradual de una definición que evoluciona, guiada por las observaciones que son las que definen todo finalmente. Enfatizando que es sólo una definición de trabajo, sujeta a cambios a medida que se aprenda mas sobre el censo de compañeros de baja masa, el WGESP ha acordado las siguientes afirmaciones:

1) Los objetos con masas reales abajo del límite de masa para fusión termonuclear del deuterio (actualmente calculando en 13 M_{jup} para objetos de metalicidad solar), que orbiten estrellas o remanentes de estrellas son planetas sin importar cómo se hayan formado. La masa/tamaño mínima requerida para un objeto extrasolar para ser considerado un planeta debe ser la misma que la usada en nuestro Sistema solar.

2) Los objetos subestelares con masas superiores al limite de masas para la fusión termonuclear del deuterio son enanas marrones, sin importar cómo se forme o dónde se localicen

3) Los objetos flotantes libres en los cúmulos estelares jóvenes, con masas inferiores al limite de fusión termonuclear del deuterio no son planetas, sino sub-enanas marrones o cualquier nombre que sea más apropiado. [9]

Actualmente se utiliza esta definición. La masa mínima es difícil de detectar con los instrumentos disponibles hasta el momento, por otro, lado la masa máxima puede ser un buen punto de partida para definiciones futuras [15].

2.2. MÉTODOS DE DETECCIÓN DE PLANETAS EXTRASOLARES

Los planetas no emiten luz propia, sino que reflejan parte de la luz que recibe de su estrella anfitriona. Esto hace que su observación sea difícil, ya que el brillo del planeta con respecto al de la estrella es muy sutil, es como tratar de ver una pequeña llama muy cerca de un incendio ubicado a kilómetros del observador. A pesar de esto, existen técnicas para la detección directa e indirecta; la mayoría de métodos fueron usados para el estudio de estrellas dobles [13] y sus mejoras permitieron observar objetos de masa subestelar. A continuación se detallan los métodos mas usados para la detección de planetas fuera del sistema solar.

2.2.1. VELOCIDAD RADIAL

La detección de planetas alrededor de estrellas de muy baja masa con el método de la velocidad radial (VR) se ve obstaculizada debido que las longitudes de onda son débiles, y la mayoría de los espectrómetros de alta precisión no pueden detectarlas. Una forma de solucionarlo, es hacer medición en el infrarrojo, así se puede obtener la masa del exoplaneta que interactúa con la estrella [33]. Este método mide el desplazamiento de las líneas espectrales de la estrella cuando se aleja o acerca en su movimiento en torno del centro de masas. Usando el efecto Doppler, se puede calcular la velocidad de alejamiento y acercamiento de la estrella como se aprecia en la figura 2.2.

2.2.2. ASTROMETRÍA

Éste método mide el cambio de posición de la estrella en su movimiento en torno al centro de masa, como se muestra en la figura 2.3. Esta técnica es más sensible en planetas masivos con órbitas lejanas a la estrella, y que no se encuentren muy lejos de la Tierra (20-25 pc) debido a las limitaciones en la calidad de observación. Así se logra determinar la masa del planeta y la inclinación de la órbita. Un punto

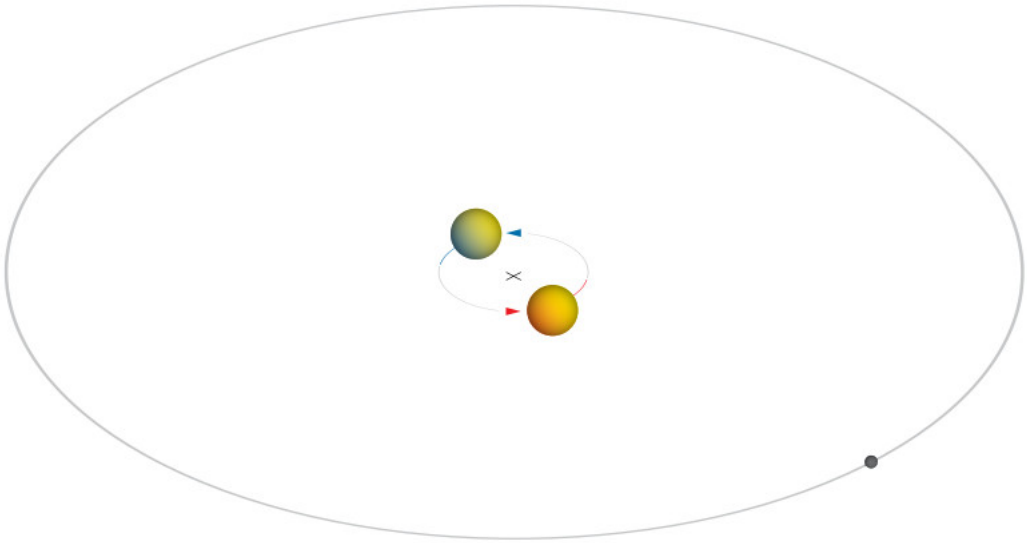


Figura 2.2: **Velocidad radial**. La estrella y el planeta se mueve en torno del centro de masas. Si se aleja o se acerca la estrella con respecto al observador (Tierra), las lineas espectrales se desplazan al rojo (la estrella se aleja) o al azul (la estrella se acerca). También es posible observar el cambio de posición de la estrella respecto al fondo [35].

en contra es que requiere de mucho tiempo de observación (décadas) para detectar el planeta y estudiar su periodo.

2.2.3. FOTOMETRÍA

Éste método usa los datos de luminosidad de la estrella. Cuando un planeta transita frente a su estrella, desde la linea de visión de la Tierra se detecta disminución de su luminosidad. Solo se puede ver si el planeta tiene un plano orbital que permita observar el transito desde la Tierra. Usando la curva de luz como se ve en la figura 2.4 y conociendo el tamaño de la estrella, puede saberse el tamaño del planeta. Con ayuda del método de velocidad radial, que permite calcular las masas, se puede obtener la densidad del planeta y así poder tener una idea de la estructura interna.

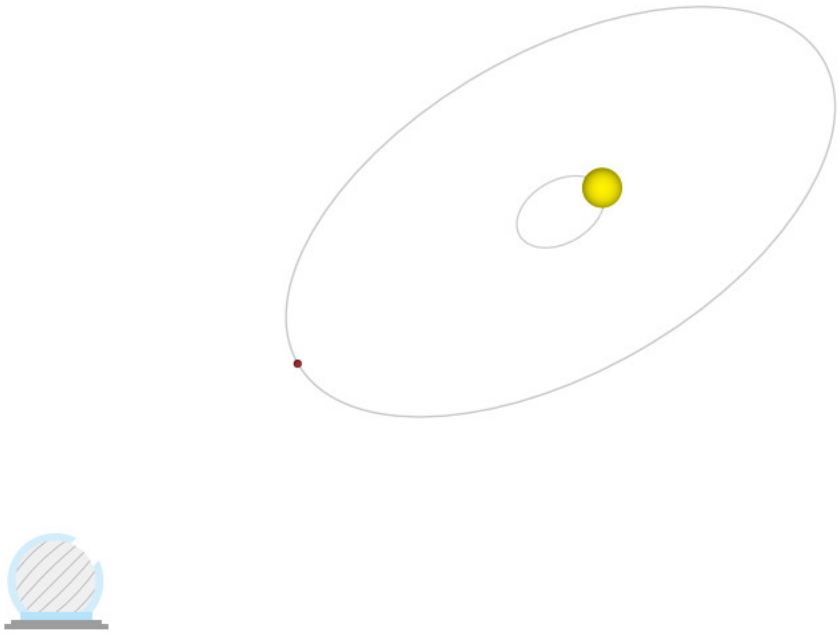


Figura 2.3: **Astrometría**. Es similar a la técnica de la velocidad radial en que se mide el movimiento de la estrella debido a la influencia gravitacional del planeta. Pero la astrometría mide el movimiento de la estrella en el plano del cielo, en contraste con la técnica de la velocidad radial, que mide el movimiento de la estrella en la linea de visión [35].

2.2.4. MICROLENTES GRAVITACIONALES

La mayor parte de Planetas extrasolares son descubiertos usando los métodos de velocidad radial y de tránsito. Ambos están dirigidos hacia planetas que están relativamente cerca de sus estrellas. Los estudios revelan que alrededor del 17 al 30 % de las estrellas similares al sol, albergan un planeta [11]. El método de Microlentes gravitacionales, por otro lado, explora planetas que están lejos de sus estrellas.

Éste método usa un fenómeno predicho por la Teoría de la Relatividad General. Según esta teoría, la masa produce una curvatura en el tejido espacio-tiempo: Cuando un exoplaneta pasa por delante de una estrella diferente a su estrella anfitriona,

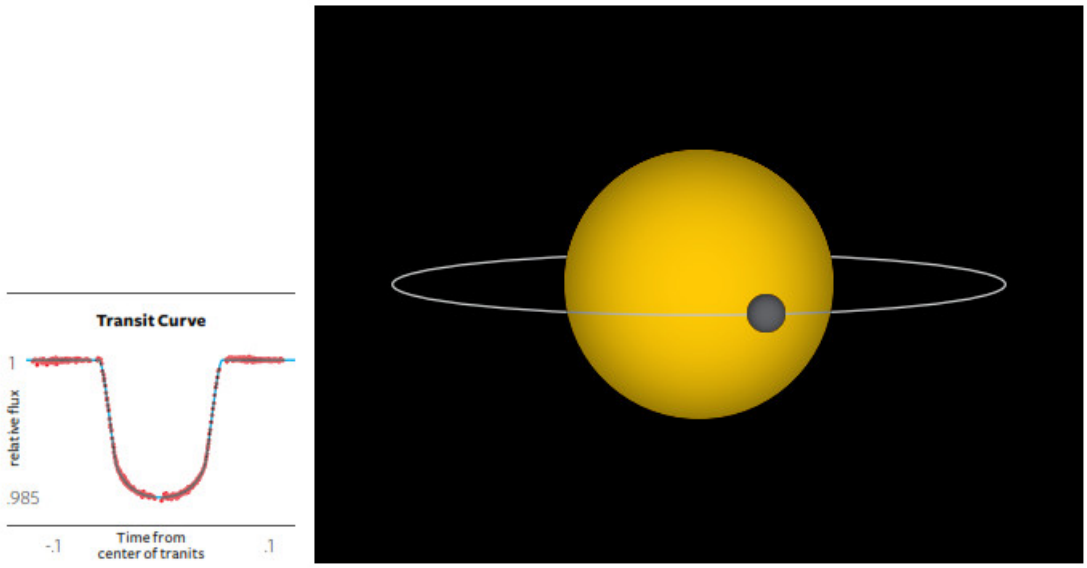


Figura 2.4: **Fotometria**. Tránsito y ocultación planetaria y la curva de luz de la estrella. Cuando el planeta se oculta, el 100 % de la luz captada es de la estrella. Cuando el planeta transita frente de ella, se puede notar variaciones leves (2 %) de la luz [35].

los rayos de luz de esta, se curvan por efecto de la atracción gravitatoria del planeta. Esto causa un pequeño aumento aparente en la luminosidad de la estrella [13], ya que sus rayos de luz se concentran de igual manera que pasa con una lupa, como se ve en la figura 2.5.

2.2.5. OBSERVACIÓN DIRECTA

La Tierra es mil millones de veces menos brillante que el Sol, debido a su tamaño y poca luminosidad. Los nuevos telescopios espaciales han permitido encontrar un gran numero de cuerpos que cumplen con la condición de planeta. Aunque la razón de brillo es desfavorable en el rango visible, puede ser favorable en el infrarrojo, ya que una estrella típica es "solo"1 millón de veces mas brillante que un planeta en este espectro. La detección directa de la luz reflejada por los planetas aporta datos para conocer la composición atmosférica. [35].

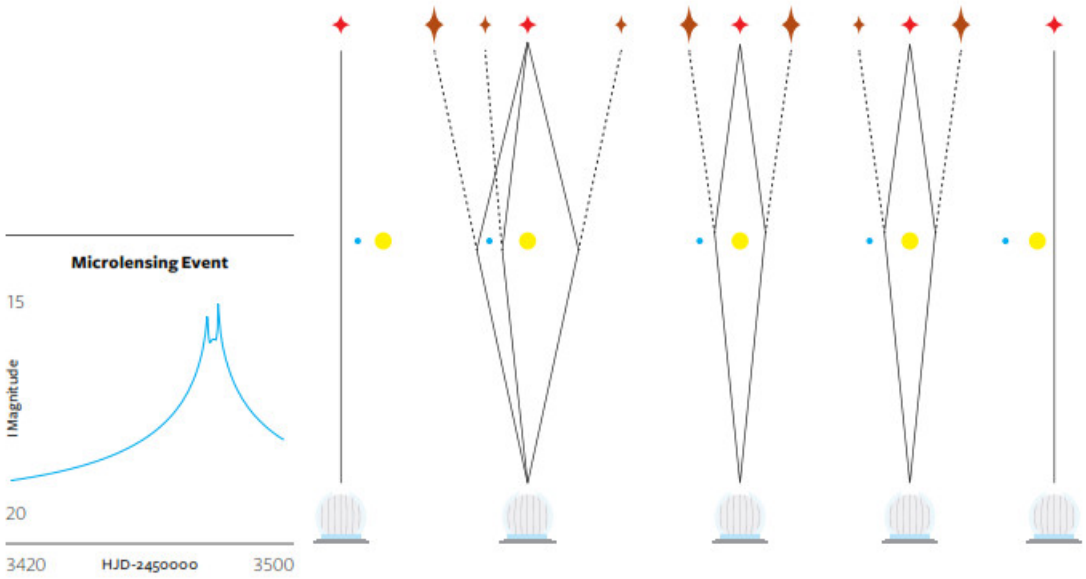


Figura 2.5: **Microlente**. Una estrella que pasa frente de una estrella alejada, actúa como una lupa, dirigiendo los rayos de luz a la Tierra [35].

La método de observación directa puede ayudar a complementar las búsquedas realizadas con el método de velocidad radial. En primer lugar, por el contrario a la técnica de VR, las imágenes no dependen del tipo espectral de la estrella, la masa o la inclinación del sistema. En segundo lugar, puede poner a prueba los métodos de formación estelar. En tercer lugar, no requiere largos periodos de observación como el método VR que necesita periodos mayores o iguales a 1000 días [19].

2.3. PLANETAS EN LA ZONA HABITABLE

Conociendo la distancia planeta-estrella, la radiación de la estrella y la reflexión de la radiación del exoplaneta, se puede calcular la temperatura de la atmósfera. Calculando la temperatura superficial de equilibrio, se logra definir para una estrella una zona en la cual, si un planeta órbita en ella, es posible encontrar agua en estado liquido en su superficie como se ve en la figura 2.7. Esta región se conoce como zona

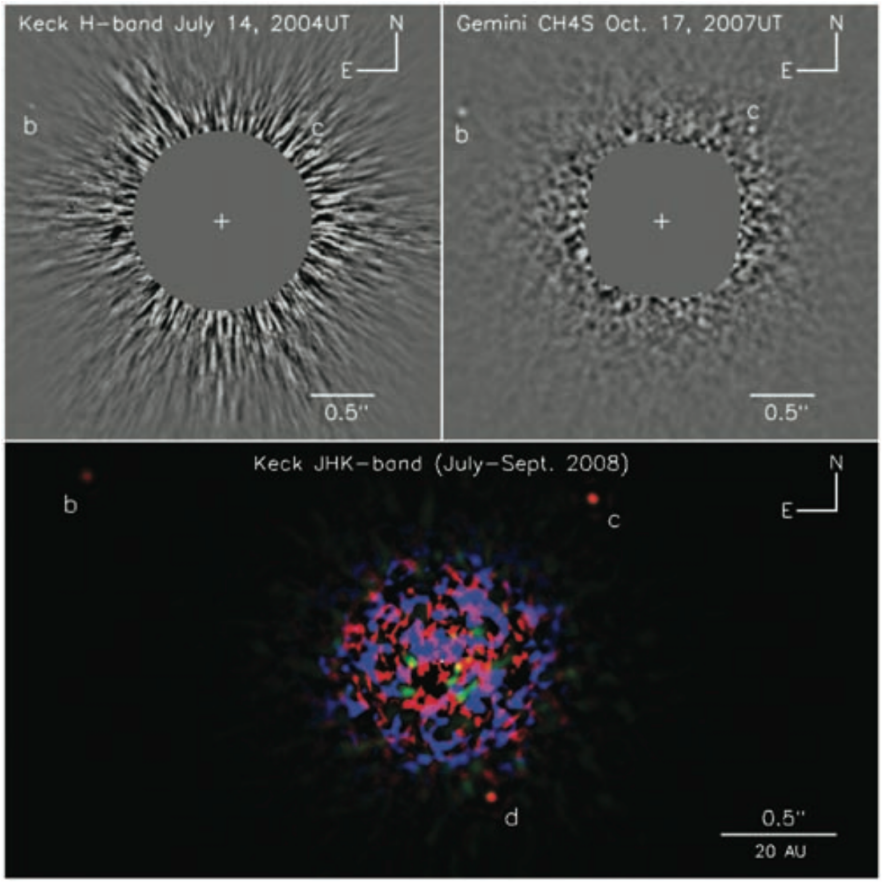


Figura 2.6: **Observación directa**. Tres exoplanetas orbitando la joven estrella HR 8799 [24].

habitable del sistema planetario [29]. A mediados del 2015 los exoplanetas potencialmente habitables son los siguientes cuadro [6]:

- Kepler-438 b: Pertenece al sistema Kepler-438, situado a 472,9 años luz, su masa es de 1,27 M_{Tierra} y esta a una distancia de 0,1717 U.A. de su estrella principal, su periodo orbital es de 35,23319 días. Presenta un indice de similitud con la Tierra del 88 %. Fue detectado por el método del transito. La masa de su estrella principal es de 0,54 M_{Solar}.

- Kepler-296 e: Fue detectado por el método de transito astronómico. Su semieje ma-

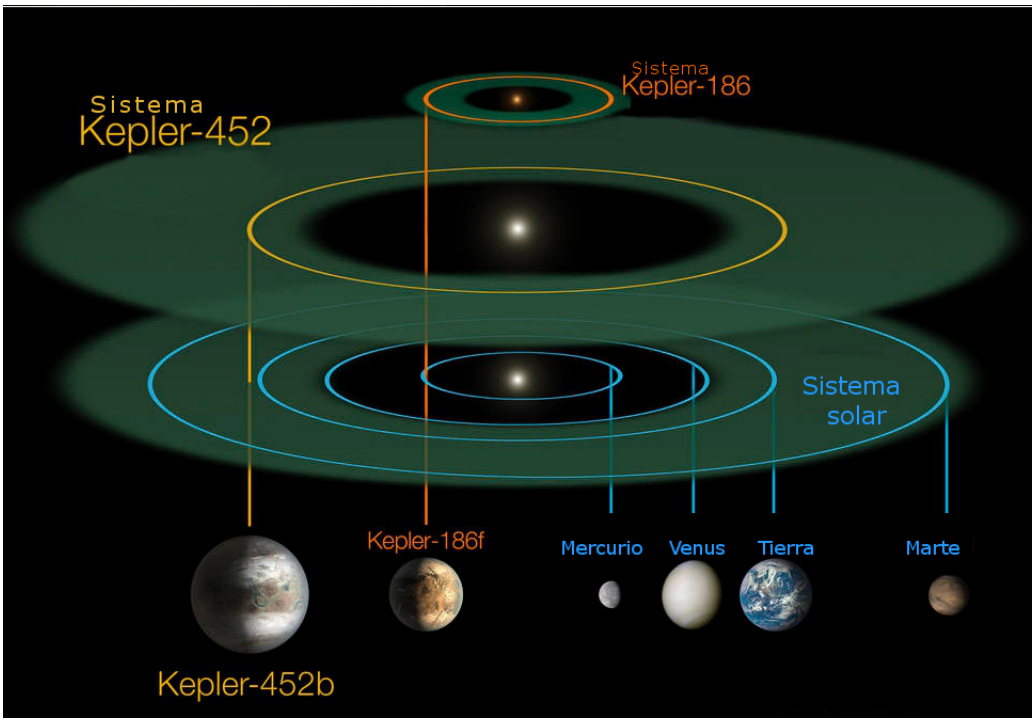


Figura 2.7: **Zona de habitabilidad**. Comparación de los sistema Kepler-452, sistema Kepler-186 y el sistema solar [8].

yor es de 0,2060 U.A., su masa es de 3,32 M_{Tierra} y su periodo orbital es de 34,1423 días. Su indice de similitud con la Tierra es del 85 %. La masa de su estrella principal es de 0,45 M_{solar}.

- GJ 667C c: Fue descubierto el 21 de noviembre de 2011 mediante el método de velocidad radial. Su masa es de 3,80 M_{Tierra}. Su periodo orbital es de 28,100 días, su semieje mayor es de 0,1250 U.A., su indice de similitud con la Tierra es del 84 %. La masa de su estrella principal es de 0,33 M_{solar}.

- Kepler-442 b: Fue confirmado a principios de enero del 2015. Su masa es de 2,34 M_{Tierra}. Su semieje mayor es de 0,3861 U.A. con un periodo orbital de 112,3053 días. La masa de su estrella principal es de 0,61 M_{solar} y su indice de similitud con la Tierra es del 84 %.

Capítulo 3

MOVIMIENTO DE CUERPOS CELESTES

El movimiento de los planetas es uno de los temas que mas a llamado el interés a lo largo de la historia de la ciencia. Al tratar de darle una explicación, han surgido diversos métodos matemáticos, modelos físicos y creación de nuevas disciplinas para trabar esta temática. Johannes Kepler (1571-1630) fue el personaje que dio el paso fundamental en la explicación del movimiento de los planetas. A partir de observaciones llevadas por su maestro, el astrónomo danes Tycho Brahe (1546-1601), dedujo tres principios de movimiento conocidos como *Leyes de Kepler* [31].

Las leyes de kepler son las siguientes:

Primer ley: Los planetas se mueven alrededor del Sol describiendo órbitas elípticas (no circulares). El Sol ocupa uno de los focos de dicha elipse.

Segunda ley: Los planetas barren áreas iguales en tiempos iguales.

Tercera ley: Los cuadrados de los periodos de traslación (tiempo que toma un planeta en dar una vuelta completa alrededor del Sol) son proporcionales al cubo de las distancias medias existentes entre los planetas y el Sol.

Las leyes de Kepler explican con exactitud el movimiento de los planetas, pero no dan una explicación de las causas del movimiento. Isaac Newton (1642-1727), quien a partir de las leyes de Kepler y estructurando las bases de la mecánica y el calculo diferencial, publica la ley de gravitación universal que es vigente hasta la introducción de la teoría de la relatividad de Einstein. El modelo newtoniano sigue siendo usado actualmente, dando buenas respuestas de las preguntas que plantea el movimiento orbital. Usando las leyes de Kepler se puede deducir la ley de gravitación de Newton [28]:

$$F = -G\frac{m_p m_\star}{r^2}\frac{x}{r} \tag{3.1}$$

La *Ley de gravitación de Newton* dice: la fuerza que ejerce el Sol sobre un planeta es atractiva. lleva la dirección de ambos cuerpos y es proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de sus distancias mutuas.

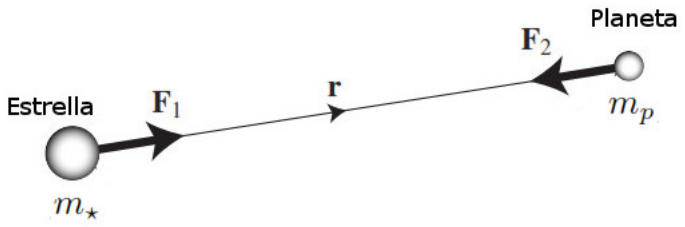


Figura 3.1: Las fuerzas que actúan sobre una estrella de masa $m_\star$ y un planeta de masa m_p con vectores de posición r_1 y r_2.

Las leyes de Kepler y la ley de gravitación de Newton, consideran a los astros como cuerpos puntuales. Se considera que toda su masa esta concentrada en el centro de cada cuerpo de la figura 3.1, sin embargo hay situaciones que esta suposición no es apropiada para trabajar con cuerpos reales, es decir, cuerpos con forma bastantemente aparta de de una esfera perfecta.

3.1. EL PROBLEMA DE LOS DOS CUERPOS

El problema de los dos cuerpos es uno de los temas mas estudiados en la mecánica celeste. El problema plantea que dados dos cuerpos perfectamente esféricos con distribución de densidad uniforme en su interior, o en otras palabras, cuya densidad sea sólo función de la distancia [31], de masas m_1 y m_2 completamente aislados de los demás cuerpos del universo, encontrar el estado dinámico de ambos cuerpos, respecto a un sistema inercial dado, cuando la única fuerza que actúa entre ellos es la atracción gravitacional.

Al hablar de cuerpos totalmente aislados del universo, se supone que las otras masas del universo están a grandes distancias, comparadas con la distancia r que existe entre m_1 y m_2, o que los cuerpos son de masas tan pequeñas respecto a m_1 y m_2, que la fuerza gravitacional que ejercen sobre éstas, es completamente despreciable.

Analizando el problema de los dos cuerpos, incluyendo los términos perturbativos, se considera la masa del planeta y la estrella respectivamente $m_\star$ y m_p. El elemento orbital de desplazamiento del planeta, en relación a la estrella, sera el vector $\mathbf{r}$ de (magnitud r). La ecuación de movimiento es:

$$\ddot{r} = -G(m_\star + m_p)\frac{\mathbf{r}}{r^3} + f \tag{3.2}$$

Donde f es una fuerza distinta de la fuerza de gravedad de masas puntuales. Si $f = 0$ se obtiene un movimiento clásico newtoniano. En el contexto clásico se conoce como aceleración perturbadora [32], y se asume que tiende a cero ya que la fuerza perturbativa generalmente es de baja intensidad. La ecuación 3.2 en algunos casos, dependiendo de la forma que tome f, no posee solución analítica cerrada, sin embargo siempre se puede acudir a soluciones aproximadas de ellas, mediante técnicas numérica.

3.1.1. EFECTOS RELATIVISTAS

Newton plantea que el Sol crea un campo gravitacional que ejerce una fuerza sobre los planetas del Sistema solar, causando que ellos orbiten el Sol en lugar de seguir una linea recta. Albert Einstein con su Teoría de Relatividad General (TRG) dice que la masa-energía del Sol genera una curvatura en la geometría espacio-tiempo [27]. No hay fuerzas que actúen sobre los planetas del sistema solar, se desplazan en un movimiento libre en las distintas geodésicas de la métrica espacio-temporal, pero a causa de la curvatura espacio - temporal, ellos órbita el Sol.

Inicialmente se permitía plantear las ecuaciones de campo y las ecuaciones de movimiento separadamente, como se hace en la mecánica newtoniana, en la cual se incluye separadamente la teoría de campo (ecuaciones de Poisson) y las ecuaciones de movimiento (leyes de newton). A finales de los años 1920s, se logro demostrar con la TRG, que las ecuaciones de movimiento de cuerpos materiales están relacionadas con las ecuaciones de campo.

La diferencia entre la TRG y la mecánica newtoniana se evidencia matemáticamente por la estructura de las ecuaciones de campo, y las ecuaciones de la geodésica. Físicamente, se diferencia entre los datos observacionales y los teóricos. Tiempo después de la publicación de la TRG surgió un método de aproximación conocido como postnewtoniano propuesto por Eddington (1922), Robertson (1962), Schiff (1962, 1967), Nordtvedt (1968b, 1969), Will (1971c), y Nordtvedt (1972) [27], permitiendo comparar la TRG con la teoría newtoniana. Con el fin de comparar, se acostumbra a restringir el problema de la obtención de las ecuaciones de movimiento, mediante la aproximación del movimiento lento y el campo débil en la TRG [32].

Las aproximaciones del campo débil y el movimiento de expansión lento da lugar a las siguientes clasificaciones postnewtonianas [27]:

1. Orden cero: Un espacio - tiempo plano, vacío.
2. Primer orden: Tratamiento newtoniano del sistema solar.
3. Segundo orden (1 PN): Correcciones postnewtonianas del tratamiento newtoniano.

4. Tercer orden (2 PN): Correcciones postpostnewtonianas del tratamiento newtoniano.

En el Sistema solar, para comparar los modelos, la TRG considera:

$\phi = Potencial\ newtoniano \leq 10^{-6}$.
$v^2 = (Velocidad\ relativa\ del\ centro\ de\ masa\ del\ sistema\ solar)^2 \leq 10^{-6}$.
$T_{jk}/\rho = (Tension\ dividida\ por\ la\ dencidad\ barionica) \leq 10^{-6}$.
$\Pi = (\rho - \rho_0/\rho_0) = (Dencidad\ de\ energia\ interna\ por\ unidad\ de\ dencidad\ de\ materia\ barionica) \leq 10^{-6}$.

La corrección posnewtoniana (1 PN) pueden ser descrita mediante la fuerza [14]:

$$\mathbf{f}_{GR} = -\frac{G(m_\star + m_p)}{r^2 c^2} \times (-2(2-\eta)\dot{r}\dot{\mathbf{r}} + [(1+3\eta)\dot{r}.\dot{r} - \frac{3}{2}\eta\dot{r}^2 - 2(2+\eta)\frac{G(m_\star + m_p)}{r}]\widehat{r}) \tag{3.3}$$

donde $\eta = \frac{m_* m_p}{(m_* + m_p)^2}$ para f de la ecuación 3.2.

3.1.2. EFECTOS DE CUERPOS NO ESFÉRICOS

La ley de atracción gravitacional, es un modelo que se puede aplicar a cuerpos materiales cuya masa esta concentrada en un punto. En las observaciones, los cuerpos celestes no presentan esta distribución de masa. Newton demostró que un cuerpo gigantesco genera fuerza gravitacional similar a la que produciría si toda su masa estaría concentrada en su centro, si cumplen dos requisitos:

- El cuerpo debe ser rigurosamente esférico.
- La distribución de masa en su interior debe ser uniforme, en otras palabras, la densidad del cuerpo sea solo una función de la distancia al centro.

En principio, los planetas del sistema solar, cumplen con estos requisitos, pero no completamente [31]. La mayoría de los planetas tienen radios un poco mayores en el ecuador que en los polos, es decir, se alejan del modelo de cuerpo esférico perfecto

como se ve en la figura 3.2. Para modelar el movimiento de estos planetas con una mayor precision, se utilizan las correspondientes correcciones f en la expresión 3.2.

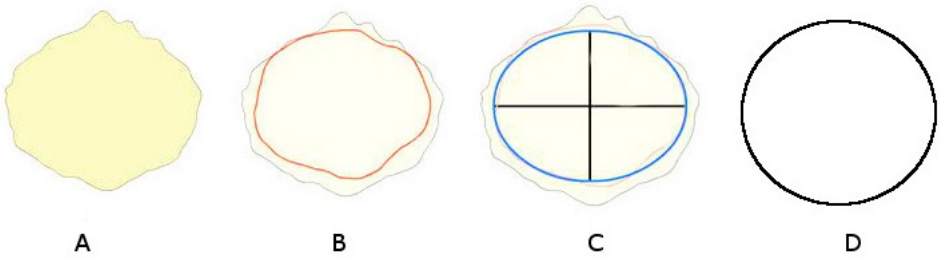


Figura 3.2: A: Forma real del planeta. B: Geoide. C: Elipsoide (planeta achatado). D: cuerpos esférico perfecto.

Los parámetros orbitales cambian cuando consideramos los cuerpos no como masas puntuales, sino como objetos físicos capaces de distorsionar y disipar la energía interna. Efectos de marea en la órbita se vuelven mas y mas pronunciados a medida que dos cuerpos gravitatorios, de extensión finita, se acercan. Posiblemente las fuerzas de Marea han causado muchas órbitas de exoplanetas a convertirse en circulares, si estos están a 0,1 UA de sus estrellas [14].

NÚMERO LOVE k_L

El número love, es un valor adimensional que cuantifica la deformación del campo gravitacional de un planeta (k_L) o estrella ($k_{L\star}$), en respuesta a la perturbación externa de un cuerpo de masa M [14]. Puede ser una estrella madre, un planeta o un satélite que se mueve en una órbita circular de radio a alrededor de él, causando un aumento de la fuerza de marea [21]. El número love ademas de dar cuenta de la deformación de los planetas por efecto de marea, contienen información importante sobre la estructura interior de ellos, ya que el único dato necesario para ser calculado, es la distribución de densidad radial del planeta [18].

En un planeta, la estrella provoca un abultamiento de marea de tamaño $\propto r^{-2}$. Esta abultamiento crea su propio campo externo que decrece a razón r^{-3}. Todas estas consideraciones se tiene en cuenta en la ecuación 3.4.

$$\mathbf{f}_T = -3k_L \frac{Gm_\star^2}{m_p} \frac{R_p^5}{r^7} \hat{\mathbf{r}} \tag{3.4}$$

donde:
k_L = Número love del planeta [14].
R_p = Radio ecuatorial del planeta.

Para un estrella, por acción de la rotación, hace que se vuelva achatada [37]. Su grado de achatamiento depende del cuadrado de la velocidad angular de rotación estelar $\Omega_\star$, dividida por el limite de la velocidad angular $\sqrt{\frac{Gm_\star}{R_\star^3}}$ (velocidad de rotación, en la cual la estrella se desintegra). El potencial cuadrupolar mas allá de la estrella varia a razón de r^{-3} [14], Así la forma de la estrella giratoria provoca una fuerza adicional que se expresa en la ecuación 3.5:

$$\mathbf{f}_R = -\frac{1}{2} k_{L_\star} \Omega_\star^2 \frac{R_\star^5}{r^4} \hat{\mathbf{r}} \tag{3.5}$$

donde:
$k_{L_\star}$ = Número love de la estrella [14].
Ω = Velocidad angular de la estrella.
$R_\star$ = Radio ecuatorial de la estrella.

El termino f de la ecuación 3.2 se remplazara por $\mathbf{f}_{GR}$ (3.3), $\mathbf{f}_T$ (3.4) y $\mathbf{f}_R$ (3.5) dependiendo de las correcciones orbitales que se modelaran en el capitulo 4.

3.2. EL PROBLEMA DE LOS N CUERPOS

El problema de los n cuerpos plantea: Conociendo en cualquier tiempo, la posición y velocidad de n cuerpos que se mueven debido a sus mutuas atracciones gravitacionales, calcular sus posiciones y velocidades para cualquier otro tiempo. Cuando una estrella alberga $N(>1)$ planetas, las interacciones gravitacionales pueden afectar sus

órbitas de manera compleja. Despreciando los efectos discutidos en la sección 3.1.1 y 3.1.2, la ecuación del movimiento del planeta i con masa m_i es [31]:

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = -G(m_0 + m_i)\frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3} + G\sum_{j=1;j\neq i}^{N} m_j \left(\frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{[\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i]^3} - \frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3}\right) \tag{3.6}$$

Donde cada una de las coordenadas r_i es referente a la estrella central, de masa $m_0 = m_\star$. Los términos de interacción en la ecuación 3.6 son el de la fuerza directa gravitatoria (primer termino) y la fuerza efectiva indirecta debida a la estrella (segundo termino).

El problema de los tres cuerpos no tiene solución analítica, mucho menos el de cuatro o mas cuerpos [28]. Para resolver un sistema de ecuaciones diferenciales, en necesario encontrar tantas integrales independientes como el orden de dicho sistema. Si un sistema de n cuerpos que interactúa gravitacíonalmente entre si, con respecto a un sistema inercial dado, hay $3n$ ecuaciones diferenciales de segundo orden que se reducen a $6n$ ecuaciones diferenciales de primer orden. Tenemos en total un sistema de orden $6n$ lo que implica obtener $6n$ constantes de movimiento para resolver el sistema.

Puesto que han resultado infructuosos los trabajos de los matemáticos para encontrar mas de 10 integrales independientes [31], los investigadores terminan por trabajar en demostrar la no existencia de más integrales independientes, o soluciones numéricas de la ecuación 3.6.

Capítulo 4

DISEÑO DE ÓRBITAS

Las simulaciones por computador son ahora una parte integral de la física. La programación se ha convertido en un factor importante de la teoría y la experimentación, debido a que en los últimos años es parte del repertorio esencial de los docentes de investigación [16]. Existen dos acercamientos a la solución de ecuaciones diferenciales 3.2: la integración numérica por medio de herramientas computacionales y los métodos analíticos a partir de ciertas consideraciones iniciales [32]. En este capitulo se abordara la soluciones de las ecuaciones 3.2 y 3.6 con las diferentes formas que tome f por el medio de integración numérica. No es objetivo de este trabajo realizar soluciones analíticas de las ecuaciones diferenciales anteriormente mencionadas.

Los códigos de programación utilizados para este trabajo, expuestos en el cap 6 fueron realizados bajo el lenguaje de programación python, el cual es un lenguaje que proporciona estructuras de datos de alto nivel (listas, matrices asociativas, módulos, librerías), orientado a objetos. Tiene una sintaxis simple y muy elegante [34]. El entorno utilizado es el software Enthought Canopy, debido a su fácil instalación y su gran variedad de herramientas para el análisis de datos interactivo, visualización y desarrollo de aplicaciones [2].

Para comparar los diferentes modelos expuestos en el capitulo 3.1 se estudiarán 4 sistemas diferentes. El primer sistema está conformado por el exoplaneta Gliese 876 d alrededor de su estrella Gliese 876 ignorando la presencia de los demás cuer-

pos del sistema extrasolar. La dinámica del exoplaneta sera modelada con la teoría clásica newtoniana ($f = 0$) y posnewtoniana (1 PN), sustituyendo f de la ecuación 3.2 por 3.3. En segundo sistema lo conforma un planeta extrasolar en torno a la estrella Gliese 436, sera modelado con la teoría clásica newtoniana y se considerando el achatamiento del planeta, sustituyendo f por 3.4. El tercer sistema sera el conformado por Mercurio y Sol, se programara usando la teoría newtoniana y considerando el achatamiento de la estrella sustituyendo f por 3.5. Finalmente se programara el problema de n cuerpos utilizando la ecuación 3.6 usando los datos observacionales del sistema Gliese 876.

4.1. ÓRBITA NEWTONIANAS CLASICA Y ÓRBITA CON CORRECCIÓN 1 PN

En la actualidad hay mas de 1642 exoplanetas, en su mayoría con masas del orden de Júpiter [4], girando a distancias muy pequeñas de su estrella materna, varias veces más pequeñas que la distancia que separa a Mercurio del Sol. Puesto que los efectos relativistas se acentúan a medida que la distancia entre los objetos disminuye, es de esperarse que la corrección de los dos cuerpos postnewtoniano, sea la descripción más adecuada para explicar detalladamente el movimiento de uno de los cuerpos con respecto al otro [32].

Se ha escogido como sistema de estudio el planeta Gliese 876 d, que órbita la estrella enana roja Gliese 876. Fue detectado por el método de velocidad radial y tarda menos de dos días en completar una órbita (0,00548 años). Esta a una distancia de tan sólo 1/5 de la existente entre Mercurio y el Sol. Además, está situado en la región más interior de su sistema planetario. Se tomara como componentes cartesianas el semieje mayor en torno a su estrella principal para un tiempo $t = 0$, la masa de la estrella, masa del exoplaneta y la excentricidad, las consignadas en la tabla 4.1.

Gliese 876 d	
Masa estrella	0.3 M_{Sol}
Masa planeta	$41{,}75 \times 10^{-5}$ M_{Sol}
Semieje mayor	0.02081 U.A.
Excentricidad	0.207

Cuadro 4.1: Condiciones iniciales para el planeta Gliese 876 d referidas al plano del ecuador celeste [4].

Se ha adoptado como unidad de distancia a la unidad astronómica (U.A) equivalente a 149,597,870,700 metros y como unidad de tiempo años. Con el fin de poder analizar la solucion newtoniana y postnewtoniana se han obtenido las componentes cartesianas de la posición y la velocidad de Gliese 876 d a intervalos regulares de 1 hora durante 1 mes (0.08 años) a partir de la fecha de referencia.

En la gráfica 4.1 se puede apreciar la órbita del exoplaneta. Solo se puede observar la trayectoria postnewtoniana (puntos azules) a primera vista ya que las órbitas están superpuestas. La tabla 4.2 contiene los valores de los radios vectores r. La segunda columna muestra la solución clásica newtoniana, la tercera es la solución postnewtoniana y la cuarta columna muestra la diferencia entre los radios anteriormente mencionados. En la tabla 4.2 al restar los valores de las columnas 2 y 3, se obtienen diferencias del orden de 1×10^{-7} U.A., es decir una diferencia de 15 kilómetros.

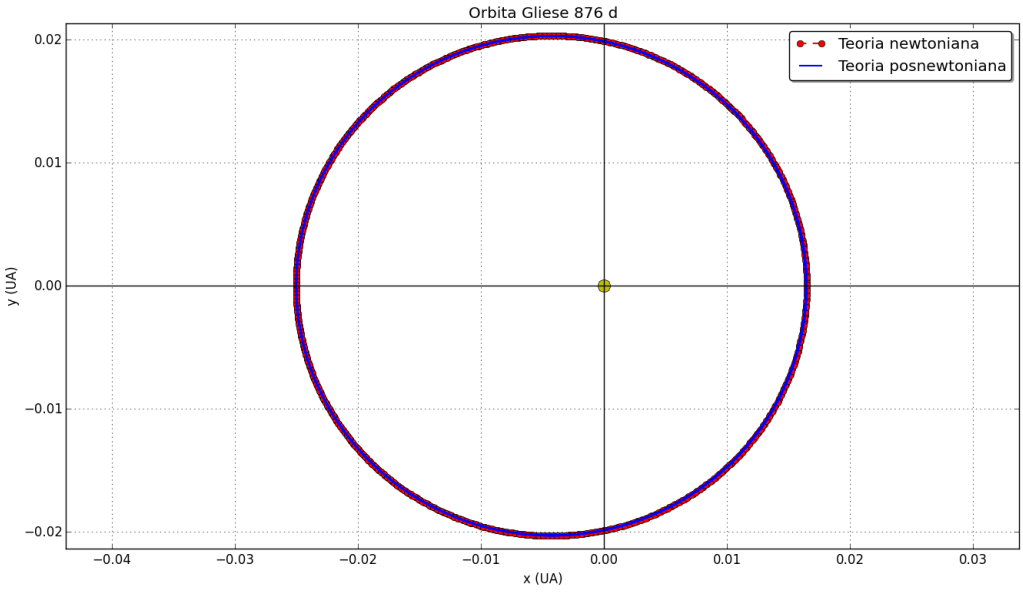


Figura 4.1: Orbita newtoniana y postnewtoniana de Gliese 876 d.

Tiempo	r newtoniana	r postnewtoniana	rn-rp $\times 10^{-7}$
0.08179329205249987	0.01650238	0.01650237	-1.77713442
0.0819073691683332	0.01656337	0.01656318	1.86721504
0.08202144628416654	0.01673686	0.0167365	3.58353680
0.08213552339999987	0.01701378	0.01701326	5.11454280

Cuadro 4.2: Datos finales del radio vector en función del tiempo.

Al realizar una ampliación la gráfica 4.1, se puede observar la trayectoria newtoniana (linea roja) como se ve en la gráfica 4.2. Como se menciono anteriormente, la diferencia entre los dos modelos es muy pequeña, esto también se puede ver en la gráfica 4.3, que muestra la diferencia de los radio vectores calculados con los dos modelos, conforme avanza el tiempo. El aumento lento de la diferencia conforme avanza el tiempo se debe a los efectos de redondeo que causan una pérdida cada vez más creciente en la exactitud de las últimas cifras significativas, característico de las integraciones numéricas [32]. Desde el inicio se obtienen diferencias del orden de 1×10^{-7} U.A., si tenemos en cuenta que la línea de las ápsides está precesando, esta diferencia tenderá a aumentar con el tiempo.

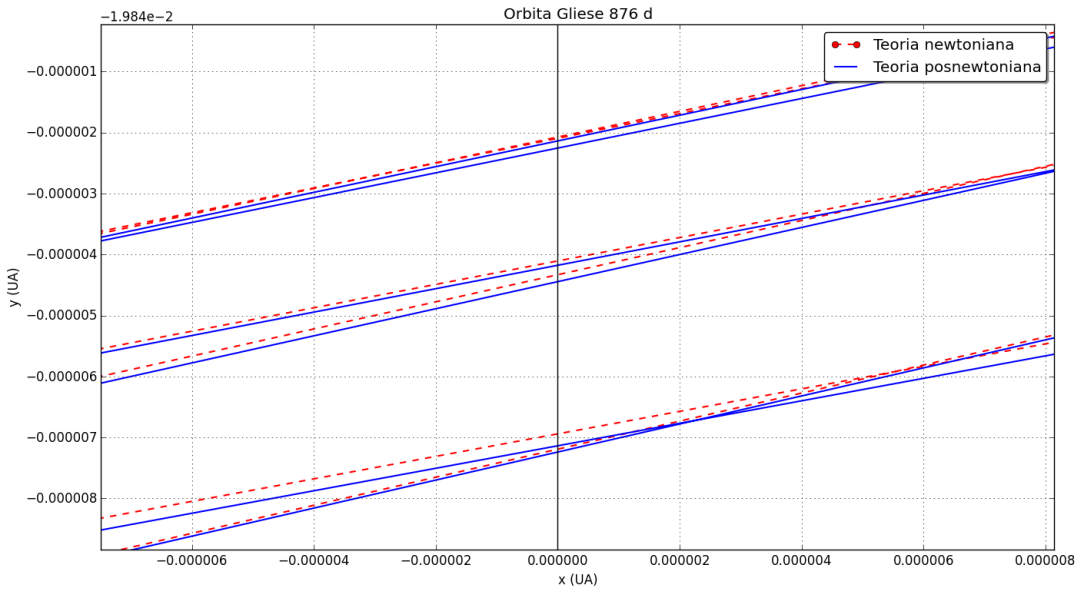


Figura 4.2: Ampliación órbita de Gliese 876 d.

Inicialmente para $t = 0$, el exoplaneta se encuentra en el periastro $r = 0{,}01650$ U.A., la gráfica 4.4 muestra la máxima y mínima posición (apoastro - periastro) durante $t = 0{,}082$ años (1 mes). Interpretando esta gráfica se puede decir, que el radio vector oscila entre $(0{,}01650 - 0{,}02512)$ U.A, y que la perturbación de la curvatura espacio-tiempo no genera grandes cambios. Ademas podemos afirmar que los periodos

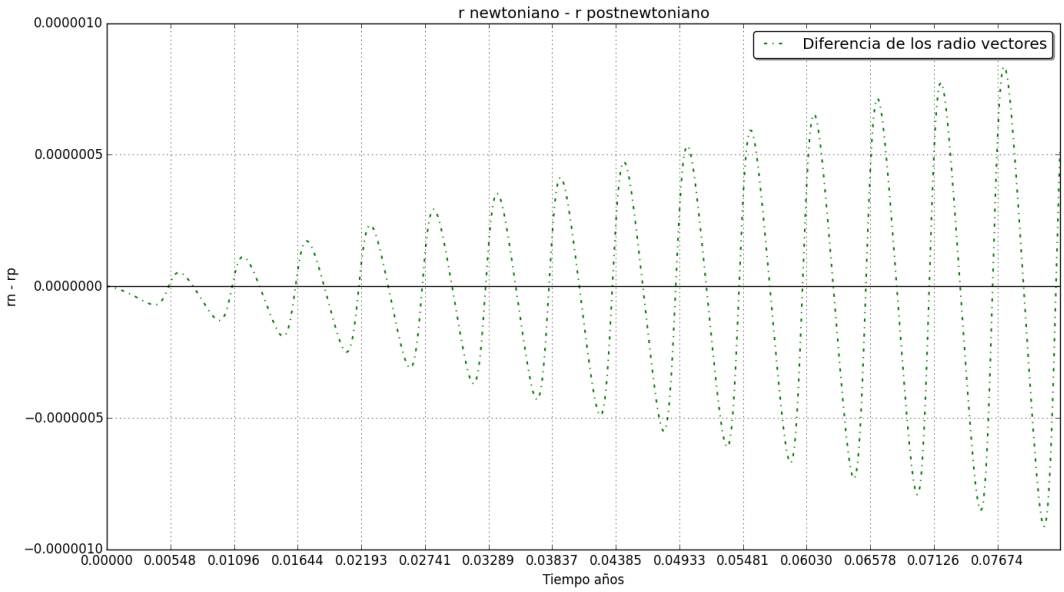


Figura 4.3: Diferencia entre el radio vector newtoniano y postnewtoniano de Gliese 876 d conforme avanza el tiempo.

de oscilación de ambos modelos coinciden con el periodo sideral del planeta que es cercano a 0,00548 años. Esto se puede ver claramente, ya que el programa diseña la cuadricula de las gráficas de evolución temporal de radio vector 4.4 y diferencia entre los radios vectores 4.3, con una separación igual al periodo sideral. Esto se debe tener en cuenta en las gráficas de los siguientes modelos.

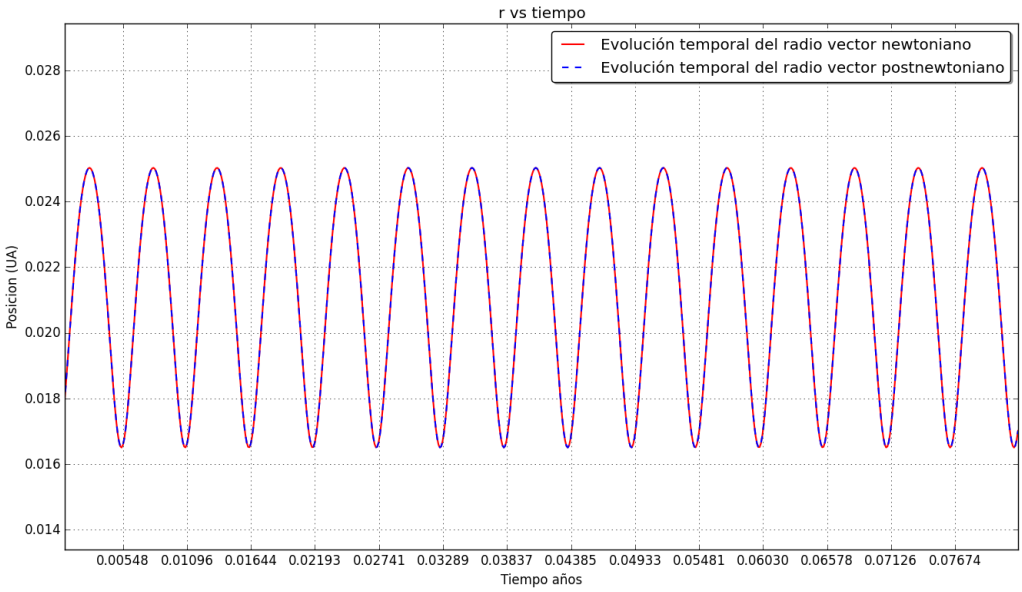


Figura 4.4: Evolución temporal del radio vector de Gliese 876 d con el modelo newtoniano y postnewtoniano

4.2. ÓRBITA NEWTONIANA Y ÓRBITA DE PLANETA ACHATADO

Gliese 436 b es un exoplaneta del tamaño de Neptuno, el primero en determinarse que albergaba agua. Fue descubierto por el método de velocidad radial en el 2004 y en el 2007 por medio de tránsitos con su estrella, se determino su masa y radio [22]. Tienen un periodo orbital de $7{,}23 \times 10^{-3}$ años $(2,6$ días) y su periastro es 0,02412 U.A. La excentricidad de la órbita es incompatible con los modelos de evolución de sistemas planetarios (e= 0.160). Inicialmente se propuso para mantener su órbita, una resonancia 1:2 con un planeta interior sin descubrir, aunque posteriores estudios descartaron esta hipotiposis ya que no se a logrado confirmar un Gliese 436 c [30].

Se tomara como componente cartesiana el semieje mayor en torno a su estrella principal, para un tiempo $t = 0$. La masa de la estrella, masa del exoplaneta y el

número k_L están consignados en la tabla 4.3.

Gliese 436 b	
Masa estrella	0.542 M_{Sol}
Masa planeta	$7{,}27 \times 10^{-5}$ M_{Sol}
Semieje mayor	0.029 U.A.
Periodo orbital	$7{,}23 \times 10^{-3}$ años
k_L	0.346

Cuadro 4.3: Coordenadas, masa estrella, masa planeta y k_L para el planeta Gliese 876 b referidas al plano del ecuador celeste [22].

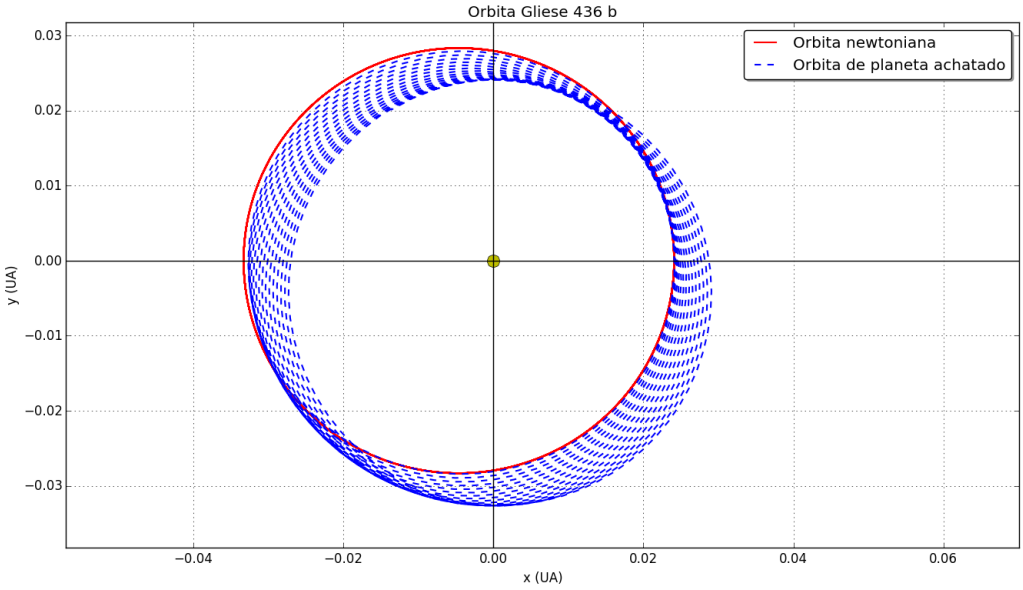


Figura 4.5: Órbita clásica (roja) y órbita con número love $k_L = 0{,}346$ (azul) del exoplaneta Gliese 436 b durante 30 días.

Con el fin de comparar el modelo newtoniano y el de planeta achatado, se han obtenido las componentes cartesianas de la posición y la velocidad de Gliese 876 d a intervalos regulares de 1 hora durante 1 meses (0.08 años) a partir de $t = 0$. Posteriormente se obtiene la gráfica de su órbita que se observa en la figura 4.5.

Cuando se amplia la figura 4.5, se evidencia con mas detalle la notoria diferencia entre las órbitas como se ve en la figura 4.6. A diferencia de la corrección postnewtoniana trabajada anteriormente, el termino k_L tiene gran importancia en la ecuación 3.5. Si $k_L = 0$, el modelo de planeta achatado tiende al clásico newtoniano, como se ve en la figura 4.7a. A medida que aumenta k_L la órbita de aleja de la clásica, ver 4.7b.

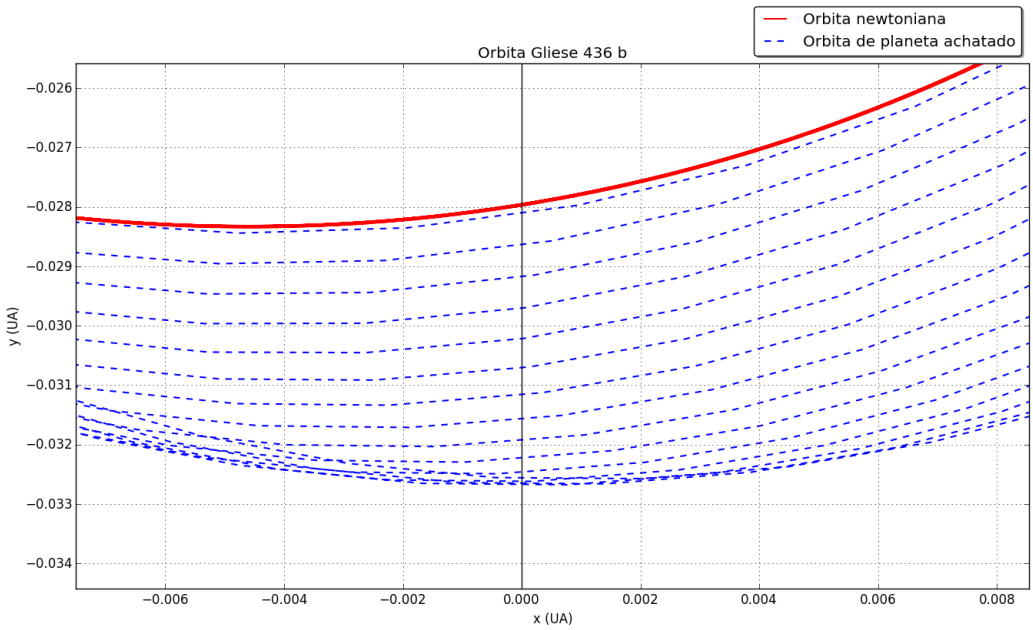
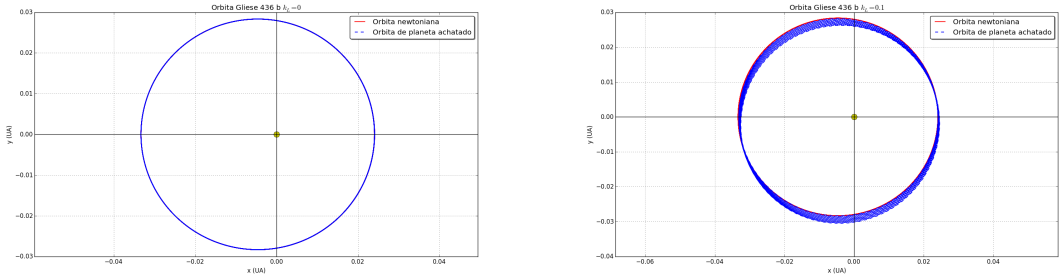


Figura 4.6: Ampliación órbita de Gliese 436 b.



(a) $k_L = 0$ (b) $k_L = 1$

Figura 4.7: Órbitas con distintos valores de k_L para el planeta Gliese 436 b.

La figura 4.8 muestra la diferencia entre los valores del radio vector calculados con la teoría clásica y la corrección de planeta achatado en función del tiempo. En este caso la diferencia es del orden de 1×10^{-5} U.A., esto es del orden de 1495 km. La diferencia de los valores de r crecen rápidamente con el tiempo, desde el inicio se obtienen diferencias del orden de 1×10^{-5} U.A., si se tiene en cuenta que la linea de las ápsides está precesando, esta diferencia tendería a aumentar con el tiempo.

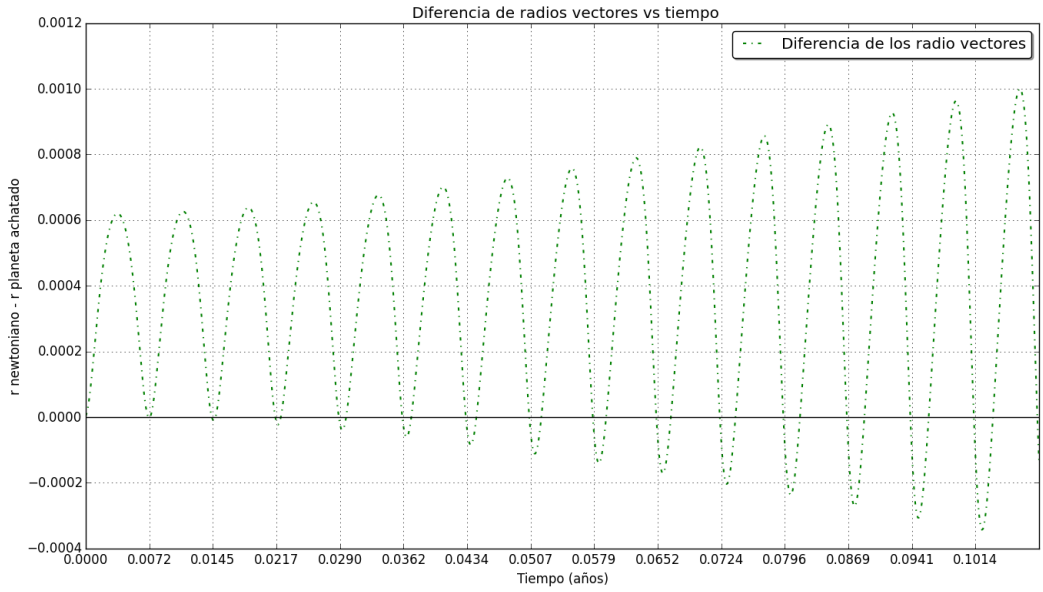


Figura 4.8: Diferencia entre el radio vector newtoniano y del modelo de planeta achatado del planeta Gliese 436 b.

En figura 4.9, muestra la evolución temporal del radio vector durante 1 mes. Se puede distinguir los dos modelos claramente. Para $t = 0$ el exoplaneta parte del periastro $r = 0{,}01650$ U.A., pero a medida que trascurre el tiempo, discrepan los valores del radio vector entre los dos modelos. El termino que indica el achatamiento del cuerpo, genera cambios secuenciales en la órbita. El período de oscilación de ambos modelos coincide con el período sideral del planeta que es cercano a 0,00724 años.

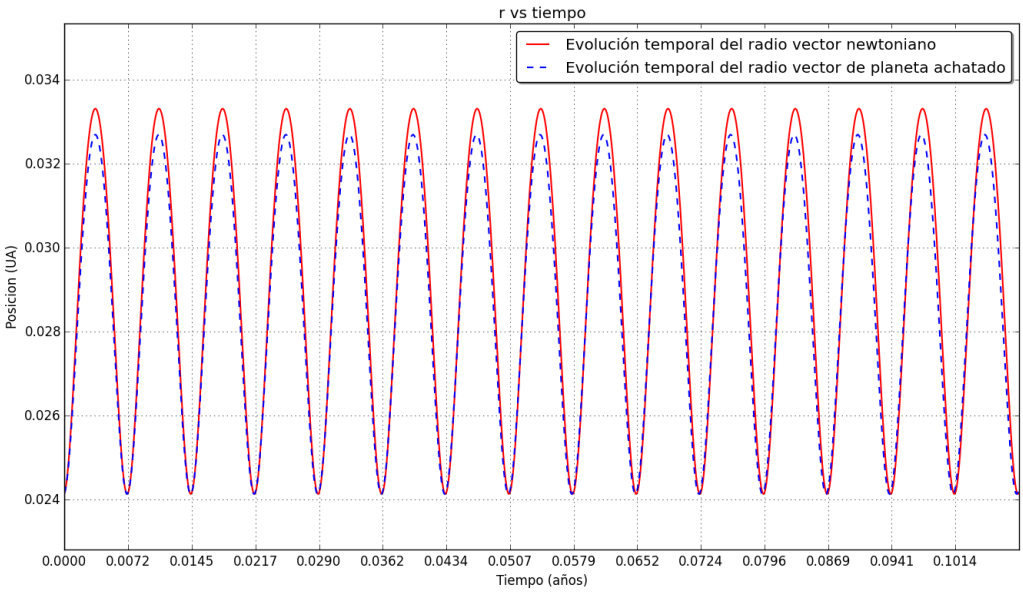


Figura 4.9: Evolucion temporal del radio vector de Gliese 436 b durante 1 meses del modelo newtoniano y planeta achatado.

4.3. ÓRBITA NEWTONIANA Y ÓRBITA ALREDEDOR DE UNA ESTRELLA ACHATADA

Se tomara como componentes cartesianas (ecuatoriales heliocéntricas) de la posición y de la velocidad del planeta Mercurio entorno al Sol, para un tiempo $t_r = 0$, las consignadas en la tabla 4.4. Con el fin de poder analizar el modelo de corrección, se han obtenido las componentes cartesianas de la posición y la velocidad de Mercurio a intervalos regulares de 1 día por 600 días a partir de la fecha de referencia. Para esta simulación el Sol tiene una velocidad angular $\dot{w} = 94{,}62$ 1/año [26] y su número love es $k_{L\star} = 0{,}02$ [23].

A primera vista en la figura 4.10, se nota la superposición de las dos órbitas, debido a que los dos modelos, pareciese que no tiene grandes diferencias. Ampliando la figura 4.10, se ve las dos trayectorias, figura 4.11. Tienen una diferencia del orden

Mercurio	
Masa estrella	1 M_{Sol}
Masa planeta	$1{,}652 * 10^{-7}$ M_{Sol}
semieje mayor	0.387098
excentricidad	0.20563069 U.A.
$k_{L\star}$	0.02

Cuadro 4.4: Masa, semieje mayor, número love para el Sol y excentricidad del planeta Mercurio [4].

de 1×10^{-10} U.A., siendo del orden de 14 m como se puede ver en la columna 4 de la tabla 4.5.

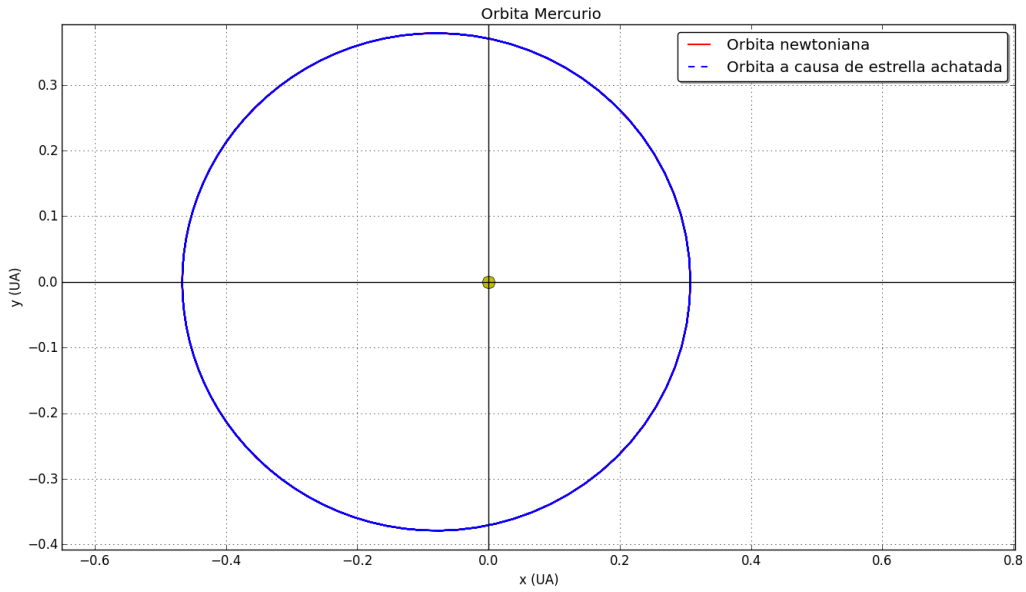


Figura 4.10: Órbita newtoniana y órbita causada por el achatamiento del Sol de Mercurio.

La gráfica de la columna 4 vs columna 1 de la tabla 4.5 se ve en la figura 4.12. El aumento lento de la razón de radios vectores conforme avanza el tiempo, como se dijo en el caso postnewtoniano, se debe al redondeo de las últimas cifras significativas característico de las integraciones numéricas.

Tiempo	r newtoniana	r estrella achatada	rn-rp $\times^{-10}$
1.6235455125399973	0.40218418758214985	0.40218418706264053	5.19509324
1.6262833633199973	0.39674341357915338	0.3967434130516756	5.2747778360
1.6290212140999973	0.39117959461053747	0.39117959407695146	5.33586008
1.6317590648799973	0.38551491407492605	0.38551491353729767	5.37628386
1.6344969156599973	0.37977411828689811	0.37977411774751396	5.39384148
1.6372347664399973	0.37398471646727699	0.37398471592865862	5.38618372
1.6399726172199973	0.36817716342798723	0.36817716289290292	5.35084310
1.6427104679999973	0.36238501066945944	0.36238501014093183	5.28527610
1.6454483187799973	0.35664500758767581	0.35664500706898367	5.18692144
1.6481861695599973	0.35099713017571016	0.35099712967038305	5.05327113

Cuadro 4.5: Últimos valores de los radios vector en función del tiempo.

Inicialmente para $t = 0$, Mercurio esta en el periastro $r = 0{,}30750$ U.A., la gráfica 4.13 muestra la máxima y mínima posición (apoastro - periastro) durante $t = 1{,}64$ años (600 días). Interpretando esta gráfica se puede decir, que el radio vector oscila entre $(0{,}30750 - 0{,}46670)$ U.A. y que la perturbación generada por el termino k_L no genera grandes cambios. Ademas, la velocidad angular de rotación del Sol es menor con respecto a otras estrellas [26]. Se puede afirmar que los periodos de oscilación de ambos modelos coinciden con el periodo sideral del planeta que es cercano a 0,24087 años.

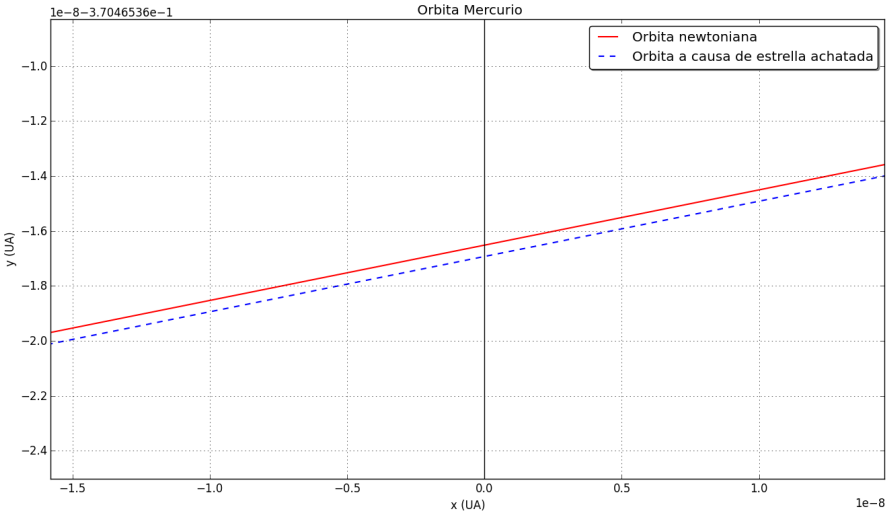


Figura 4.11: Ampliación órbitas de Mercurio.

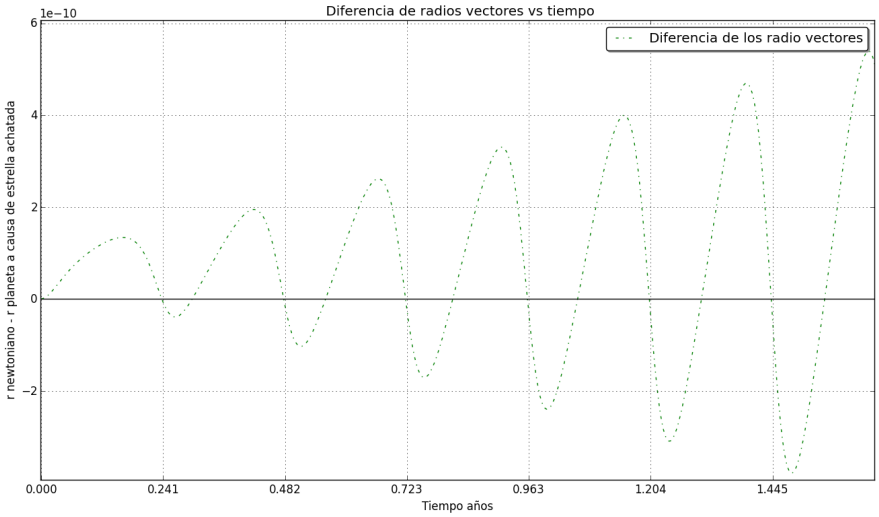


Figura 4.12: Diferencia entre el radio vector newtoniano y del modelo de estrella achatada aplicados a Mercurio.

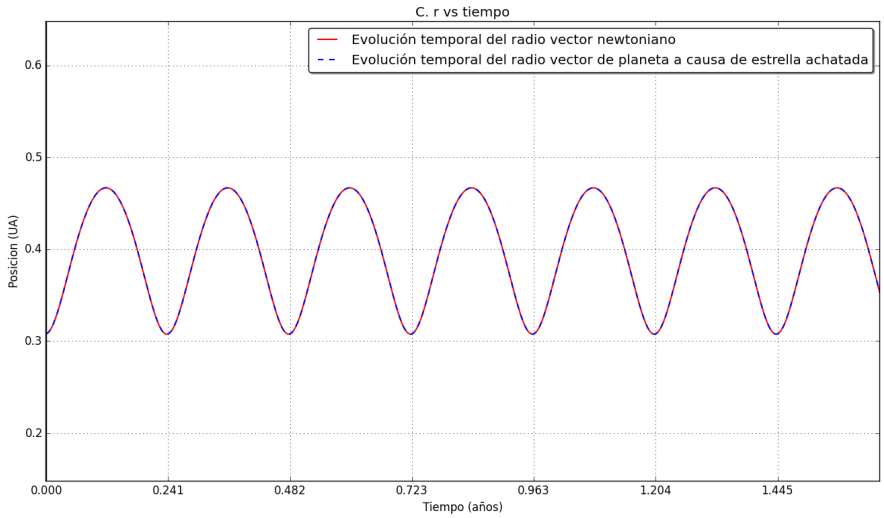


Figura 4.13: Evolucion temporal del radio vector de Mercurio durante 1 mese, usando del modelo newtoniano y la corrección correspondiente a la estrella achatada aplicados a Mercurio.

4.4. N CUERPOS

El sistema planetario Gliese 876 a sido uno de los descubrimientos más notables que han surgido de la primera década de detecciones de planetas extrasolares, debido a que sus planetas son extraordinarios. El planeta d con periodo orbital de 1,974 días, es el exoplaneta masivo con la órbita más cercana a una estrella de secuencia principal. Ademas, los planetas compañeros c y d de masas similares a Júpiter se encuentran acoplados en una resonancia orbital 2 : 1. Los planetas extrasolares de Gliese 876 son los más cercanos que se han caracterizado de forma fiable y se han observado durante más de una década [38]. La tabla 4.6 muestra los valores de las componentes de posición y velocidad en relación a un sistema cuyo origen está en el centro de Gliese 876.

Se ha adoptado como unidad de distancia 1 U.A y como unidad de tiempo años. En este caso, se han obtenido las componentes cartesianas de la posición y la velocidad del sistema Gliese 876 a intervalos regulares por 125 días a partir de la fecha

Sistema Gliese 876				
	d	c	b	e
Masa (Kg)	$3{,}49 * 10^{25}$	$1{,}16 * 10^{27}$	$3{,}70 * 10^{27}$	$7{,}44 * 10^{25}$
x (U.A)	0,01650233	0,096434064	0,20135756	0,314685
$\dot{x}$ (U.A/Años)	23,8	12,4	7,78	6,29

Cuadro 4.6: Coordenadas y velocidades para los planetas que orbitan al rededor de Gliese 876. Su masa es $5{,}9673 * 10^{29}$ Kg y esta en la posición (x, y)= (0,0), con velocidad $(\dot{x},\dot{y})$= (0,0) [4].

de referencia.

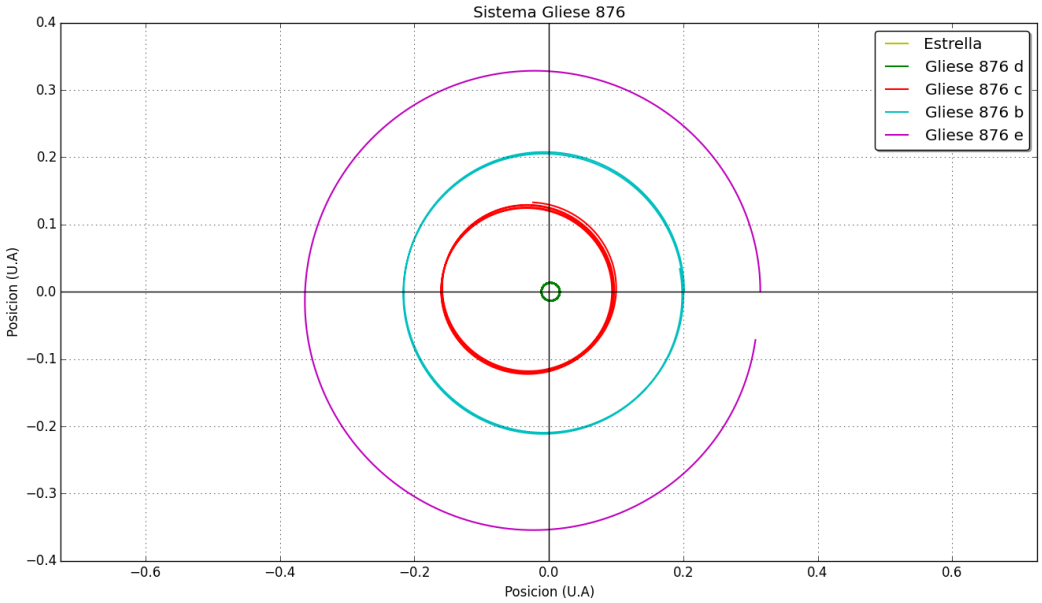


Figura 4.14: Órbitas de los exoplanetas del sistema Gliese 876.

Al ejecutar el programa que se encuentra en el capitulo 6.2, se obtiene las órbitas del sistema planetario Gliese 876 y la energía total inicial - final. Para las condiciones iniciales expuestas en la tabla 4.6, la energía total inicial y final respectivamente es $-3{,}9494 * 10^{36}$ J y $-3{,}9499 * 10^{36}$ J, evidenciando que hay una conservación de la energía del sistema [36] y que el método numérico para estas condiciones es fiable.

En la figura 4.14, se ve las órbitas de los cuatro miembros del sistema Gliese 876, las cuales presenta diferentes excentricidades (c = 0.25, e = 0.055, d=0.207, b = 0.0324) [38]. Al realizar una ampliación de la figura anterior, podemos evidenciar la resonancia orbital 2:1 (cada 2 vueltas del planeta b al rededor de Gliese 876, c da 1) entre los planetas c (órbita roja) y b (órbita cían), ver figura 4.15.

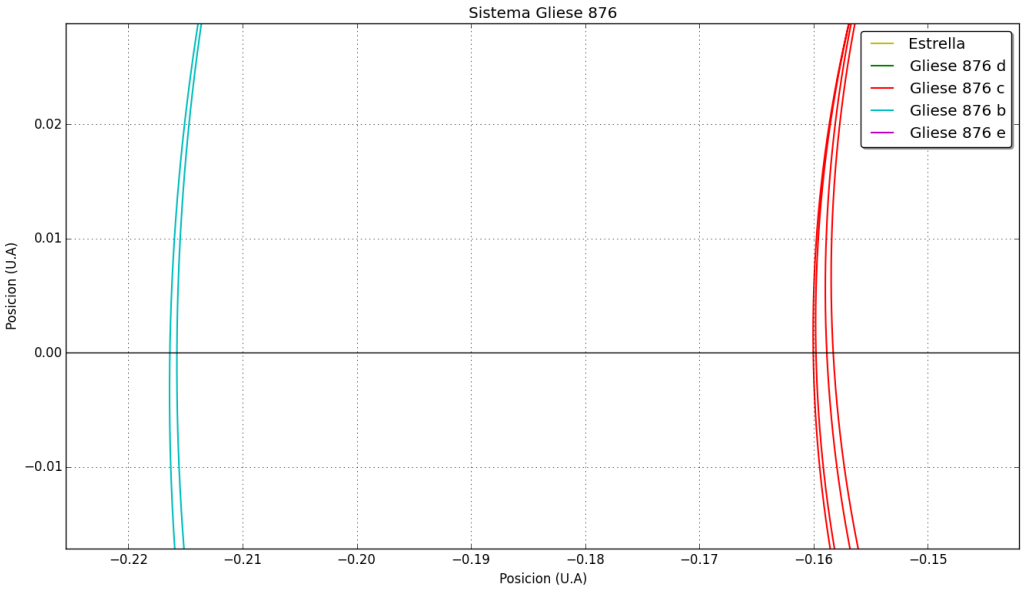
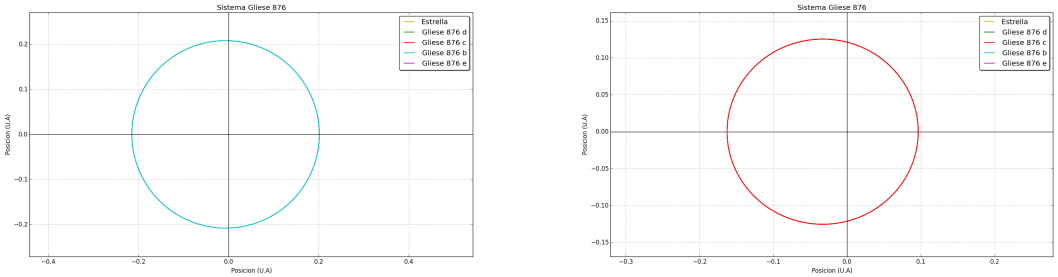


Figura 4.15: Resonancia orbital de los exoplanetas c y b.

La resonancia orbital se presenta, cuando las órbitas de dos cuerpos tienen períodos cuya razón es una fracción de números enteros simple. Consecuencia de ello, es una influencia gravitatoria regular, generando una amplificación de la fuerza que llega a afectar de forma notable a los movimientos de los dos cuerpos [39]. En la figura 4.16 se puede ver la resonancia en los planetas Gliese 876 b y Gliese 876 c. En la figura 4.16a se observa la órbita del planeta b sin interacción con otro cuerpo distinta a la de su estrella, la órbita no muestra alteraciones como se evidencia en la figura 4.14. De igual manera sucede con la órbita del planeta c como se aprecia en la figura 4.16b.



(a) Gliese 876 b (b) Gliese 876 c

Figura 4.16: Órbita de Gliese 876 b y Gliese 876 c, cada uno sin interacción con otros cuerpos.

Cuando interactúan los planetas b y c, se aprecia los efectos de la resonancia orbital debido a la fuerte interacción gravitatoria entre ellos, figura 4.17. Esta interacción causa que los elementos orbitales cambien rápidamente [10]. El planeta e, al estar muy alejado de b y c, los efectos gravitacionales que genera sobre ellos son casi nulos.

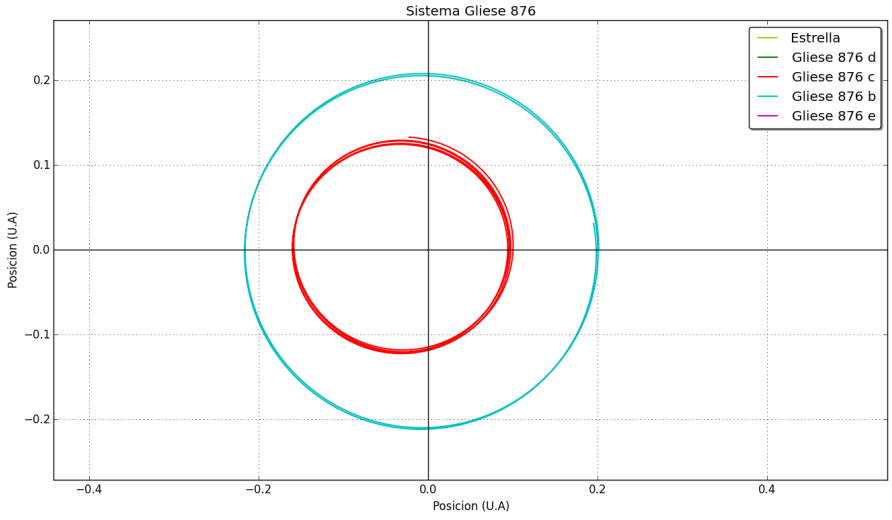
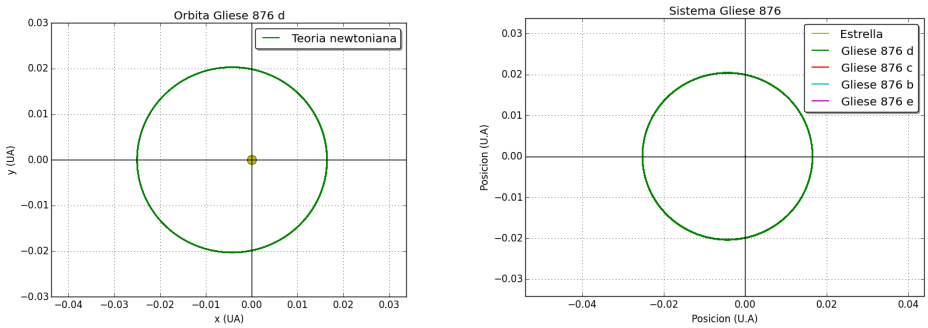


Figura 4.17: Efectos de resonancia en las órbitas de Gliese 876 b y Gliese 876 c.

La órbita de Gliese 876 d, que se calculo es la sección 4.1, presenta similitud a la

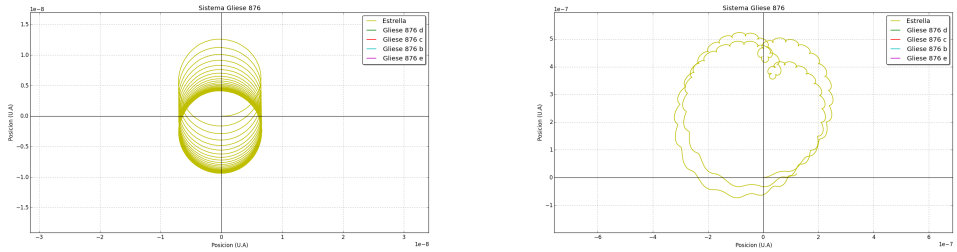
calculada con el código de N cuerpos, figura 4.18. El planeta Gliese 876 c que esta mas proximo a d, sus efectos gravitacionales son casi nulos debido a que la distancia entre ellos es mayor a comparación a la distancia Gliese 876 - Gliese 876 d. La estrella Gliese 876 también muestra cambios en su posición por efectos de atracción gravitatoria con los otros planetas como lo muestra la figura 4.19. La órbita que describe la estrella en presencia únicamente del planeta d, figura 4.19a, es muy diferente a la que se genera cuando esta en presencia de todos los planetas, figura 4.19b. Una posible explicación de la figura 4.19b, puede ser que el código diseñado no este optimizado para trabajar con mas de 5 cuerpos y este despreciando cifras significativas por causas de redondeo.



(a) Gliese 876 d - problema de los dos cuerpos clásico.

(b) Gliese 876 d - problema de los n cuerpos clásico.

Figura 4.18: Comparacion de orbiras Gliese 876 d.



(a) Gliese 876 en presencia únicamente con Gliese 876 d.

(b) Gliese 876 en presencia de todos los planetas.

Figura 4.19: Órbitas de Gliese 876

Capítulo 5

CONCLUSIONES

A lo largo de este trabajo se ha realizado un estudio sobre la teoría involucrada en el movimiento planetario, donde se ha tenido en cuenta algunos de los modelos dinámicos utilizados para describir las orbitas de los exoplanetas, los cuales presentan diversas excentricidades. Tomando como base los modelos de corrección de la teoría newtoniana (postnewtoniano, planeta achatado y estrella achatada) y el caso de los n cuerpos clásico, se programaron las ecuaciones diferenciales de cada uno, con el fin de llegar a una solución numérica. En este tiempo donde los computadores presentan software muy superior a los de años atrás y que están al alcance de todos, resolver ecuaciones diferenciales que no tienen solución analítica ya no es un problema. La integración numérica permite encontrar soluciones a las ecuaciones diferenciales sin importar la complejidad de estas. Con esta idea, a la ecuación 3.2, se fue agregando términos que describan perturbaciones, siempre y cuando estén expresados en función de las variables utilizadas, logrando soluciones rápidas y precisas.

En los exoplanetas examinados se encontró, que en un buen grado de aproximación, la dinámica de los exoplanetas se logran describir con el modelo newtoniano, y en consecuencia, describir su movimiento usando las leyes de Kepler. Pero hay que revisar mas exoplanetas donde no sirve la aproximación kepleriana y se deba recurrir a otros parámetros de corrección.

En el caso de la corrección postnewtoniana del modelo clásico, presenta una di-

ferencia de su radio vector del orden de 1×10^{-7} U.A., es decir unos 15 Km. Si se requiere un cálculo no tan complejo se aconseja usar el modelo clásico sin corrección; pero si fuese necesario un grado mayor de precisión, como el caso de enviar un cohete a un exoplaneta que se encuentra muy cerca de su estrella, es recomendable usar la corrección postnewtonana. De la misma manera, aplicando la corrección de estrella achatada, se tiene una diferencia del orden de 1×10^{-10} U.A.

El estudio numérico presenta algunas desventajas que generan dificultades, como el problema de la convergencia, la elección del paso adecuado, perdida de cifras significativas y con ello crecimiento del error. Para evitar el problema de cifras significativas, las simulaciones no se ejecutaban a tiempos muy extensos (30 – 600 días). Para probar si el código presentaba problemas de convergencia, se tomó pasos muy pequeños (horas), obteniendo los mismos valores de r y v, comparados al usar pasos mayores. Aunque es recomendable escoger adecuadamente el paso; esto se evidenció al aplicar la corrección debida al achatamiento del planeta, el cual presentaba un periodo orbital de casi 3 días, lo que obligo a usar pasos de una hora.

El diseño y la optimización del código es necesario, a la hora de calcular las efemérides de los exoplanetas. Para la solución de las distintas ecuaciones diferenciales que puede tomar la ecuación 3.2, se usó el método numérico Runge-Kutta de 4to orden, el cual presenta el menor error absoluto comparado con Runge-Kutta de 2do orden y Euler, para el mismo paso de integración [1]. Para el código de n cuerpos, inicialmente se usó el método de Euler, el cual no es muy preciso, modificando el método numérico, se adoptó el método de salto de rana (leap-frog) mostrando gran diferencia en los datos de posición y velocidad de los cuerpos comparados con el método de Euler.

En el transcurso del desarrollo de esta tesis, se descubrió que existe una sinergia en el uso apropiado de las TIC, para la enseñanza de las leyes de Kepler. Este trabajo puede ser llevado al aula, mediante el adecuado uso pedagógico. Es una buena forma de mostrar la relación entre la programación y la física, aplicando la ley de gravitación universal de Newton, para trabajar problemas actuales, como es la dinámica de

planetas extrasolares, que no lleva mucho tiempo ser objeto de estudio.

Los códigos desarrollados en este trabajo pueden ser mejorados dependiendo de la evolución que tomen los métodos numéricos y el software. También pueden ser aplicados a cualquier sistema exoplanetario, dependiendo de las características que presenten dichos sistemas y las correcciones que se desee realizar.

Capítulo 6

ANEXOS

6.1. Código Órbitas Newtonianas y Postnewtonianas

```
1  # -*- coding: utf-8 -*-
2  import scipy, scipy.integrate
3  import matplotlib as mpl
4  import matplotlib.pyplot as plt
5  from numpy import *
6  import math
7  from matplotlib.patches import Ellipse
8
9  def funcionNewton(t,Y):
10     xn,yn,vxn,vyn,xp,yp,vxp,vyp = Y
11
12     mestrella = 0.3
13     mplaneta=  41.75e-5
14     M=mestrella+mplaneta
15     n=(mestrella*mplaneta)/(M**2)
16     G =39.47
17     C = 63.24107708e3
18     dn = (xn**2+yn**2)**1.5
19     axn=-G*M*xn/dn
20     ayn=-G*M*yn/dn
21     dp = (xp**2+yp**2)**1.5
22     dp1=sqrt(xp*xp+yp*yp)
```

```
23      axp1=(G*M/(C*C*dp))*(((G*M/dp1)*(4+2*n)-(1+3*n)*(vxp*vxp+vyp*vyp)
            +((3*n)/(2*dp1*dp1))*(xp*xp*vxp*vxp+yp*yp*vyp*vyp+2*xp*yp*vxp*
            vyp))*xp+(xp*vxp+yp*vyp)*(4-2*n)*vxp)
24      ayp1=(G*M/(C*C*dp))*(((G*M/dp1)*(4+2*n)-(1+3*n)*(vxp*vxp+vyp*vyp)
            +((3*n)/(2*dp1*dp1))*(xp*xp*vxp*vxp+yp*yp*vyp*vyp+2*xp*yp*vxp*
            vyp))*yp+(xp*vxp+yp*vyp)*(4-2*n)*vyp)
25      axp0=-G*M*xp/dp
26      ayp0=-G*M*yp/dp
27      axp=axp0+axp1
28      ayp=ayp0+ayp1
29
30      return array([vxn,vyn,axn,ayn,vxp,vyp,axp,ayp])
31
32  k=15
33  q=24
34  t0 = 0
35  tfinal = 5.3e-3*k
36  dt = 2.73785078e-3/(q)
37  y0 = array([0.02081,0.0,0.0,23.9,0.02081,0.0,0.0,23.9])
38
39  solucionador = scipy.integrate.ode(funcionNewton)
40  solucionador.set_integrator('dopri5')
41  solucionador.set_initial_value(y0,t0)
42
43  xN = []
44  yN = []
45  xp = []
46  yp = []
47  vNy = []
48  vpy = []
49  vNx = []
50  vpx = []
51
52  while solucionador.successful() and solucionador.t < tfinal:
53      solucionador.integrate(solucionador.t+dt)
54      xN.append(solucionador.y[0])
55      yN.append(solucionador.y[1])
56      vNx.append(solucionador.y[2])
57      vNy.append(solucionador.y[3])
```

```
58      xp.append(solucionador.y[4])
59      yp.append(solucionador.y[5])
60      vpx.append(solucionador.y[6])
61      vpy.append(solucionador.y[7])
62
63 i = 0
64 tfinal = 5.3e-3*k
65 dt = 2.73785078e-3/(q)
66 tiempo = []
67 fig = plt.figure()
68 plt.plot(xN,yN, color="red", linewidth=1.5, linestyle="-", label="
       Teoria newtoniana")
69 plt.plot(xp,yp, color="blue", linewidth=1.5, linestyle="--", label="
       Teoria posnewtoniana")
70 plt.plot(0,0,'oy',markersize=12)
71 plt.title('Orbita Gliese 876 d')
72 plt.xlabel('x (UA)')
73 plt.ylabel('y (UA)')
74 lgd = plt.legend(loc=0.0, bbox_to_anchor=(1,1), ncol=1, fancybox=True,
       shadow=True)
75 plt.grid(True)
76 plt.axis('equal')
77 plt.show()
```

6.2. Código Órbitas N-Cuerpos

El programa de n-cuerpos esta conformado por cuatro archivos:

- Cálculos: Calcula la energía total del sistema.
- Integrador: Esta definido el método de integración (leap-frog).
- Sistema solar: Programa principal.

6.2.1. Cálculos

```
1 # -*- coding: UTF-8 -*-
2 import scipy as sp
```

```
3 import scipy.constants
4 import numpy as np
5
6 def aceleracion_gravitacional(ri, rj, mj):
7     diff = rj - ri
8     return sp.constants.G * mj * (diff / (np.linalg.norm(diff) ** 3))
9
10 def energia_cinetica(m, v):
11     return 0.5 * m * (np.linalg.norm(v) ** 2)
12
13 def energia_potencial(mi, mj, ri, rj):
14     diff = rj - ri
15     return (-sp.constants.G * mi * mj) / np.linalg.norm(diff)
16
17 def calcula_energia_total(cuerpos):
18     ekin = 0
19     epot = 0
20     for cuerpo in cuerpos:
21         ekin += energia_cinetica(cuerpo['masa'], cuerpo['velocidad'])
22         for c in cuerpos:
23             if np.any(cuerpo['posicion'] != c['posicion']):
24                 epot += energia_potencial(cuerpo['masa'], c['masa'],
25                                           cuerpo['posicion'], c['
                                              posicion'])
26     epot /= 2
27
28     return ekin + epot
```

6.2.2. Integrador

```
1 # -*- coding: UTF-8 -*-
2 from calculos import aceleracion_gravitacional
3 import numpy as np
4
5 def euler_step(cuerpos, dt):
6     for cuerpo in cuerpos:
7         aceleracion1 = calcular_aceleracion(cuerpo, cuerpos)
```

```
8           cuerpo['posicion'] += cuerpo['velocidad'] * dt + 0.5*
                aceleracion1*dt*dt
9           aceleracion2 = calcular_aceleracion(cuerpo, cuerpos)
10          cuerpo['velocidad'] += 0.5*(aceleracion1+aceleracion2) * dt
11
12  def calcular_aceleracion(cuerpo, cuerpos):
13      aceleracion = 0.0
14      for c in cuerpos:
15          if np.any(cuerpo['posicion'] != c['posicion']):
16              aceleracion += aceleracion_gravitacional(cuerpo['posicion'
                    ], c['posicion'], c['masa'])
17      return aceleracion
```

6.2.3. Sistema solar

```
1  # -*- coding: UTF-8 -*-
2  from integrador import euler_step
3  import scipy as sp
4  import numpy as np
5  import matplotlib.pyplot as plt
6  from calculos import calcula_energia_total
7
8  dt = 300
9
10 sol = {'masa': 5.9673e29,
11         'posicion': np.array([0, 0, 0]),
12         'velocidad': np.array([0, 0, 0])}
13 Gliese876d = {'masa': 3.49232e25,
14                'posicion': np.array([0.02081 * sp.constants.
                      astronomical_unit, 0, 0]),
15                'velocidad': np.array([0, 113104.03148935536, 0])}
16 Gliese876c = {'masa': 1.1616e27,
17           'posicion': np.array([0.1296 * sp.constants.astronomical_unit
                 , 0, 0]),
18           'velocidad': np.array([0, 45322.266959609347, 0])}
19 Gliese876b = {'masa': 3.70e27,
20           'posicion': np.array([0.2081 * sp.constants.astronomical_unit
                 , 0, 0]),
```

```
21            'velocidad': np.array([0, 35766.635205376937, 0])}
22 Gliese876e = {'masa': 7.44e25,
23            'posicion': np.array([0.333 * sp.constants.astronomical_unit,
                  0, 0]),
24            'velocidad': np.array([0, 28274.309562605948, 0])}
25 steps = 38000
26
27 cuerpos = [sol, Gliese876d, Gliese876c, Gliese876b, Gliese876e]
28
29 historia_x1 = []
30 historia_y1 = []
31 historia_z1 = []
32 historia_vx1 = []
33 historia_vy1 = []
34 historia_vz1 = []
35 historia_x2 = []
36 historia_y2 = []
37 historia_z2 = []
38 historia_vx2 = []
39 historia_vy2 = []
40 historia_vz2 = []
41 historia_x3 = []
42 historia_y3 = []
43 historia_z3 = []
44 historia_vx3 = []
45 historia_vy3 = []
46 historia_vz3 = []
47 historia_x4 = []
48 historia_y4 = []
49 historia_z4 = []
50 historia_vx4 = []
51 historia_vy4 = []
52 historia_vz4 = []
53 historia_x5 = []
54 historia_y5 = []
55 historia_z5 = []
56 historia_vx5 = []
57 historia_vy5 = []
58 historia_vz5 = []
```

```
59
60 etot_inicial = calcula_energia_total(cuerpos)
61
62 while steps >= 0:
63     euler_step(cuerpos, dt)
64
65     if steps %1000 == 0:
66         print "Faltan %d steps " %(steps)
67
68     historia_x1.append(sol['posicion'][0])
69     historia_y1.append(sol['posicion'][1])
70     historia_z1.append(sol['posicion'][2])
71     historia_vx1.append(sol['velocidad'][0])
72     historia_vy1.append(sol['velocidad'][1])
73     historia_vz1.append(sol['velocidad'][2])
74     historia_x2.append(Gliese876d['posicion'][0])
75     historia_y2.append(Gliese876d['posicion'][1])
76     historia_z2.append(Gliese876d['posicion'][2])
77     historia_vx2.append(Gliese876d['velocidad'][0])
78     historia_vy2.append(Gliese876d['velocidad'][1])
79     historia_vz2.append(Gliese876d['velocidad'][2])
80     historia_x3.append(Gliese876c['posicion'][0])
81     historia_y3.append(Gliese876c['posicion'][1])
82     historia_z3.append(Gliese876c['posicion'][2])
83     historia_vx3.append(Gliese876c['velocidad'][0])
84     historia_vy3.append(Gliese876c['velocidad'][1])
85     historia_vz3.append(Gliese876c['velocidad'][2])
86     historia_x4.append(Gliese876b['posicion'][0])
87     historia_y4.append(Gliese876b['posicion'][1])
88     historia_z4.append(Gliese876b['posicion'][2])
89     historia_vx4.append(Gliese876b['velocidad'][0])
90     historia_vy4.append(Gliese876b['velocidad'][1])
91     historia_vz4.append(Gliese876b['velocidad'][2])
92     historia_x5.append(Gliese876e['posicion'][0])
93     historia_y5.append(Gliese876e['posicion'][1])
94     historia_z5.append(Gliese876e['posicion'][2])
95     historia_vx5.append(Gliese876e['velocidad'][0])
96     historia_vy5.append(Gliese876e['velocidad'][1])
97     historia_vz5.append(Gliese876e['velocidad'][2])
```

```
98
99      steps -= 1
100
101 rnx1 = np.array(historia_x1)
102 rny1 = np.array(historia_y1)
103 magn1 = np.sqrt((rnx1*rnx1)+(rny1*rny1))
104 magnlistan = np.array(magn1)
105 magnlistan.tolist()
106 etot_final = calcula_energia_total(cuerpos)
107 print "Energia total inicial: %s" %(str(etot_inicial))
108 print "Energia total final: %s" %(str(etot_final))
109 plt.plot(historia_x1, historia_y1, 'y-', linewidth=1.5,label="Estrella"
    )
110 plt.plot(historia_x2, historia_y2, 'g-', linewidth=1.5,label="Gliese
    876 d")
111 plt.plot(historia_x3, historia_y3, 'r-', linewidth=1.5,label="Gliese
    876 c")
112 plt.plot(historia_x4, historia_y4, 'c-', linewidth=1.5,label="Gliese
    876 b")
113 plt.plot(historia_x5, historia_y5, 'm-', linewidth=1.5,label="Gliese
    876 e")
114 plt.grid(True)
115 plt.axis('equal')
116 plt.title('Sistema Gliese 876')
117 plt.xlabel('Posicion (m)')
118 plt.ylabel('Posicion (m)')
119 lgd = plt.legend(loc=0.0, bbox_to_anchor=(1,1), ncol=1, fancybox=True,
    shadow=True)
120 plt.show()
```

6.3. Código Órbita Kepleriana y Órbita De Planeta Achatado

```
1 # -*- coding: utf-8 -*-
2 import scipy, scipy.integrate
3 import matplotlib as mpl
4 import matplotlib.pyplot as plt
```

```
5  from numpy import *
6  import math
7  from matplotlib.patches import Ellipse
8
9  def funcionNewton(t,Y):
10     xn,yn,vxn,vyn,xp,yp,vxp,vyp = Y
11     mestrella = 0.452
12     mplaneta= 7.27e-25
13     M=mestrella+mplaneta
14     G = 39.47
15     kl = 0.346
16     rplaneta= 1.8e-7
17     dn = (xn**2+yn**2)**1.5
18     axn=-G*M*xn/dn
19     ayn=-G*M*yn/dn
20     dp = (xp**2+yp**2)**1.5
21     dp1=sqrt(xp*xp+yp*yp)
22     axp1=-3*kl*(G*mestrella**2/mplaneta)*(rplaneta**5/dp1**7)*(xp/dp1)
23     ayp1=-3*kl*(G*mestrella**2/mplaneta)*(rplaneta**5/dp1**7)*(yp/dp1)
24     axp0=-G*M*xp/dp
25     ayp0=-G*M*yp/dp
26     axp=axp0+axp1
27     ayp=ayp0+ayp1
28
29     return array([vxn,vyn,axn,ayn,vxp,vyp,axp,ayp])
30
31 f= 0.08
32 q=24
33 t0 = 0
34 tfinal = f
35 dt = 2.73785078e-3/q
36 y0 = array([0.02872,0.0,0.0,24.9,0.02872,0.0,0.0,24.9])
37 solucionador = scipy.integrate.ode(funcionNewton)
38 solucionador.set_integrator('dopri5')
39 solucionador.set_initial_value(y0,t0)
40 xN = []
41 yN = []
42 xp = []
43 yp = []
```

```
vNy = []
vpy = []
vNx = []
vpx = []

while solucionador.successful() and solucionador.t < tfinal:
    solucionador.integrate(solucionador.t+dt)
    xN.append(solucionador.y[0])
    yN.append(solucionador.y[1])
    vNx.append(solucionador.y[2])
    vNy.append(solucionador.y[3])
    xp.append(solucionador.y[4])
    yp.append(solucionador.y[5])
    vpx.append(solucionador.y[6])
    vpy.append(solucionador.y[7])

i = 0
tfinal = f
dt = 2.73785078e-3/q
tiempo = []

fig = plt.figure()
plt.plot(xN,yN, color="red", linewidth=1.5, linestyle="-", label="
    Teoria newtoniana")
plt.plot(xp,yp, color="blue", linewidth=1.5, linestyle="--", label="
    Numero Love")
plt.plot(0,0,'oy',markersize=12)
plt.title('Orbita Gliese 436 b')
plt.xlabel('x (UA)')
plt.ylabel('y (UA)')
lgd = plt.legend(loc=0.0, bbox_to_anchor=(1,1), ncol=1, fancybox=True,
    shadow=True)
plt.grid(True)
plt.axis('equal')
plt.show()
```

6.4. Código Órbita Kepleriana y Órbita De Estrella Achatada

```
1  # -*- coding: utf-8 -*-
2  import scipy, scipy.integrate
3  import matplotlib as mpl
4  import matplotlib.pyplot as plt
5  from numpy import *
6  import math
7  from matplotlib.patches import Ellipse
8
9  def funcionNewton(t,Y):
10     xn,yn,vxn,vyn,xp,yp,vxp,vyp = Y
11     mestrella = 1
12     mplaneta=  1.652e-7
13     M=mestrella+mplaneta
14     G =39.47
15     kl = 0.02 #numero love sol
16     restrella = 4.65e-3
17     oe= 94.62 #rotacion angular
18     dn = (xn**2+yn**2)**1.5
19     axn=-G*M*xn/dn
20     ayn=-G*M*yn/dn
21     dp = (xp**2+yp**2)**1.5
22     dp1=sqrt(xp*xp+yp*yp)
23     axp1=-(0.5*kl*oe**2)*(restrella**5/dp1**5)*(xp/dp1)
24     ayp1=-(0.5*kl*oe**2)*(restrella**5/dp1**5)*(yp/dp1)
25     axp0=-G*M*xp/dp
26     ayp0=-G*M*yp/dp
27     axp=axp0+axp1
28     ayp=ayp0+ayp1
29     return array([vxn,vyn,axn,ayn,vxp,vyp,axp,ayp])
30
31 k=1.6438
32 t0 = 0
33 tfinal = k
34 dt = 2.73785078e-3
```

```
35 y0 = array
       ([0.357260212546963715,-0.0915490552856159762,1.2292634996635798,
36 9.084610135718835,0.357260212546963715,-0.0915490552856159762,
37 1.2292634996635798,9.084610135718835]) #mercurio
38
39 solucionador = scipy.integrate.ode(funcionNewton)
40 solucionador.set_integrator('dopri5')
41 solucionador.set_initial_value(y0,t0)
42
43 xN = []
44 yN = []
45 xp = []
46 yp = []
47 vNy = []
48 vpy = []
49 vNx = []
50 vpx = []
51
52 while solucionador.successful() and solucionador.t < tfinal:
53     solucionador.integrate(solucionador.t+dt)
54     xN.append(solucionador.y[0])
55     yN.append(solucionador.y[1])
56     vNx.append(solucionador.y[2])
57     vNy.append(solucionador.y[3])
58     xp.append(solucionador.y[4])
59     yp.append(solucionador.y[5])
60     vpx.append(solucionador.y[6])
61     vpy.append(solucionador.y[7])
62
63 i = 0
64 tfinal = k
65 dt = 2.73785078e-3
66 tiempo = []
67
68 fig = plt.figure()
69 plt.plot(xN,yN, color="red", linewidth=1.5, linestyle="-", label="
       Teoria newtoniana")
70 plt.plot(xp,yp, color="blue", linewidth=1.5, linestyle="--", label="
       Teoria estrella achatada")
```

```
71 plt.plot(0,0,'oy',markersize=12)
72 plt.title('Orbita Mercurio')
73 plt.xlabel('x (UA)')
74 plt.ylabel('y (UA)')
75 lgd = plt.legend(loc=0.0, bbox_to_anchor=(1,1), ncol=1, fancybox=True,
       shadow=True)
76 plt.grid(True)
77 plt.axis('equal')
78 plt.show()
```

Bibliografía

[1] Comparación de Métodos Numéricos para la Solución Ecuación Diferencial de 1 orden. fglongatt.org/OLD/Archivos/Archivos/SP_II/ComparaMeto.pdf. [Online; accessed 08-octubre-2015].

[2] Enthought Canopy. https://www.enthought.com/products/canopy/. [Online; accessed 08-octubre-2015].

[3] HOW MANY STARS ARE THERE IN THE UNIVERSE? http://www.esa.int/Our_Activities/Space_Science/Herschel/How_many_stars_are_there_in_the_Universe. [Online; accessed 06-mayo-2015].

[4] http://www.exoplanets.org/. http://www.exoplanets.org/table. [Online; accessed 07-mayo-2015].

[5] IAU 2006 General Assembly: Result of the IAU Resolution votes. http://www.iau.org/news/pressreleases/detail/iau0603/. [Online; accessed 06-mayo-2015].

[6] Laboratorio de habitabilidad planetaria - Universida de Puerto Rico. http://phl.upr.edu/projects/habitable-exoplanets-catalog. [Online; accessed 28-septiembre-2015].

[7] NASA's Kepler Mission Announces a Planet Bonanza, 715 New Worlds. https://www.nasa.gov/ames/kepler/nasas-kepler-mission-announces-a-planet-bonanza. [Online; accessed 05-noviembre-2015].

[8] NASA's Kepler Mission Discovers Bigger, Older Cousin to Earth. http://www.nasa.gov/press-release/nasa-kepler-mission-discovers-bigger-older-cousin-to-earth. [Online; accessed 05-noviembre-2015].

[9] Position statement on the definition of a "planet". http://home.dtm.ciw.edu/users/boss/definition.html, 2003. [Online; accessed 07-mayo-2015].

[10] RP Butler, JT Wright, GW Marcy, DA Fischer, SS Vogt, CG Tinney, HRA Jones, BD Carter, JA Johnson, C McCarthy, et al. Catalog of nearby exoplanets. *The Astrophysical Journal*, 646(1):505, 2006.

[11] Arnaud Cassan, D Kubas, J-P Beaulieu, M Dominik, K Horne, J Greenhill, J Wambsganss, J Menzies, A Williams, Uffe Gråe Jørgensen, et al. One or more bound planets per milky way star from microlensing observations. *Nature*, 481(7380):167–169, 2012.

[12] Maria Cruz y Robert Coontz. Exoplanets. 2013.

[13] P.P.C. Díaz. *Dinámica de exoplanetas y exosatélites: trabajo de fin de máster, Máster Universitario en Matemáticas*. P.P. Campo, 2012. URL https://books.google.com.co/books?id=iPPqmAEACAAJ.

[14] Daniel C Fabrycky. Non-keplerian dynamics. *arXiv preprint arXiv:1006.3834*, 2010.

[15] Cristian Andrés Giuppone. Ajustes orbitales y dinamica de sistemas planetarios extrasolares. 2011.

[16] Harvey Gould y Jan Tobochnik. *An Introduction to Computer Simulation Methods: Applications to Physical Systems*. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., Boston, MA, USA, 2nd ed$^{\underline{\text{ón}}}$., 1995. ISBN 0201506041.

[17] Hannu Karttunen. *Fundamental astronomy*. Springer Science & Business Media, 2007.

[18] U Kramm, N Nettelmann, R Redmer, y DJ Stevenson. On the degeneracy of the tidal love number k2 in multi-layer planetary models: application to saturn and gj 436b. *Astronomy & Astrophysics*, 528:A18, 2011.

[19] A-M Lagrange y C Moutou. Direct imaging of extrasolar planets. En *Extrasolar Planets: Today and Tomorrow*, tomo 321, pág. 23. 2004.

[20] Michael D Lemonick. El amanecer de los exoplanetas. *Investigación y ciencia*, (444):16–23, 2013.

[21] Augustus Edward Hough Love. *Some Problems of Geodynamics: Being an Essay to which the Adams Prize in the University of Cambridge was Adjudged in 1911.* Cambridge, 1911.

[22] Rosemary A Mardling. On the long-term tidal evolution of gj 436b in the presence of a resonant companion. *arXiv preprint arXiv:0805.1928*, 2008.

[23] Rosemary A Mardling y DNC Lin. On the survival of short-period terrestrial planets. *The Astrophysical Journal*, 614(2):955, 2004.

[24] Christian Marois, B Zuckerman, Quinn M Konopacky, Bruce Macintosh, y Travis Barman. Images of a fourth planet orbiting hr 8799. *Nature*, 468(7327):1080–1083, 2010.

[25] Michel Mayor y Didier Queloz. A jupiter-mass companion to a solar-type star. *Nature*, 378(6555):355–359, 1995.

[26] D McNally. The distribution of angular momentum among main sequence stars. *The Observatory*, 85:166–169, 1965.

[27] Charles W Misner, Kip S Thorne, y John Archibald Wheeler. *Gravitation.* Macmillan, 1973.

[28] Isaías Rojas Peña. *Astronomia Elemental.* USM ediciones, 2012, Av. España 1680 Valparaíso, Chile, 2015.

[29] Isaías Rojas Peña. *Astronomia Elemental vol. 2.* USM ediciones, 2012, Av. España 1680 Valparaíso, Chile, 2015.

[30] F Pont, RL Gilliland, H Knutson, M Holman, y D Charbonneau. Transit infrared spectroscopy of the hot neptune around gj 436 with the hubble space telescope. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, 393(1):L6–L10, 2009.

[31] José Gregorio Portilla. Elementos de astronomía de posición. *Bogotá: Observatorio Universidad Nacional de Colombia*, 2001.

[32] José Gregorio Portilla. *ESTUDIO ANALÍTICO DE LAS PERTURBACIONES A LA SOLUCIÓN EXACTA DEL PROBLEMA DE LOS DOS CUERPOS POST-NEWTONIANO (1PN)*. 2001-12-03. URL http://168.176.8.14/paginas/docentes/main/.

[33] A Reiners, JL Bean, KF Huber, S Dreizler, A Seifahrt, y S Czesla. Detecting planets around very low mass stars with the radial velocity method. *The Astrophysical Journal*, 710(1):432, 2010.

[34] Michel F Sanner et al. Python: a programming language for software integration and development. *J Mol Graph Model*, 17(1):57–61, 1999.

[35] Sara Seager. *Is There Life Out There ? The Search for Habitable Exoplanets*. Cambridge, Inglaterra, 2009. URL http://seagerexoplanets.mit.edu/ProfSeagerEbook.pdf.

[36] Francis W Sears, M Zemansky, Hugh D Young, y Roger A Freedman. Física universitaria vol. 1. 2004.

[37] G Shajn y O Struve. On the rotation of the stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 89:222–239, 1929.

[38] P. D. Shankland, E. J. Rivera, G. Laughlin, D. L. Blank, A. Price, B. Gary, R. Bissinger, F. Ringwald, G. White, G. W. Henry, P. McGee, A. S. Wolf, B. Carter, S. Lee, J. Biggs, B. Monard, y M. C. B. Ashley. On the search for transits of the planets orbiting gliese 876. *The Astrophysical Journal*, 653(1):700, 2006. URL http://stacks.iop.org/0004-637X/653/i=1/a=700.

[39] Ricardo Vicente Solé y Susanna C Manrubia. *Orden y caos en sistemas complejos: aplicaciones*, tomo 2. Univ. Politèc. de Catalunya, 2009.