



Conocimientos que aportan los espacios
académicos de la Línea de Geometría de la
Licenciatura en Matemáticas sobre
transformaciones geométricas en la formación de
profesores de matemáticas

Carol Vanessa Galindo Pineda



2025
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
Facultad de Ciencia y Tecnología
Departamento de Matemáticas
Licenciatura en Matemáticas
Bogotá D.C

Conocimientos que aportan los espacios académicos de la Línea de Geometría de la Licenciatura en Matemáticas sobre transformaciones geométricas en la formación de profesores de matemáticas.

Carol Vanessa Galindo Pineda

Trabajo de grado como requisito para optar el título de Licenciada en Matemáticas.

Asesor:

Mg. John Alejandro Mendoza Rodríguez

2025

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas

Dedicatoria

Inicialmente a mi mamá, por todo el apoyo incondicional que me ha dado durante toda mi vida y los esfuerzos que día a día hace por mí y mis hermanos. Gracias a ella he podido afrontar cada situación difícil que se me ha presentado, pues es mi motor de vida y mi ejemplo por seguir.

A mi papá, quien me ha apoyado en todo mi proceso de estudio universitario, aconsejándome y brindándome todo su amor y comprensión.

A mi sobrina Hadde, que, así como ella me inspira a ser mejor cada día, yo la inspiraré a que ella pueda ser una de las mejores docentes en matemáticas en un futuro. Es mi alegría y mi orgullo.

A mi pareja sentimental, que sin duda alguna ha estado conmigo en mis mejores y peores momentos, apoyándome y guiándome a tomar buenas decisiones en mi vida.

Agradecimientos

A mi mamá que es mi apoyo incondicional en cada momento de mi vida, además de que nunca ha dudado de mí y es la persona por la cual lucho cada día por tener mi título universitario.

A mi papá y a mis hermanos que siempre me recuerdan que soy capaz de lograr muchas cosas, y sobre todo me han comprendido y apoyado durante el transcurso de mi carrera.

A mi pareja sentimental, quien ha sido una persona fundamental para luchar día a día por mis sueños, es sin duda mi gran apoyo emocional en todos estos años que llevo en mi carrera universitaria.

*A mi asesor Alejandro Mendoza, por ser un guía y apoyo para mí, ya que gracias a sus conocimientos, enseñanzas y puntos de vista pude desarrollar una excelente investigación.
Gracias por apoyarme y confiar en mí.*

A todos los docentes que han aportado en mi formación como futura educadora matemática, por compartirme sus conocimientos, dejaron grandes aprendizajes en mí.

A los estudiantes y profesores que hicieron parte de mi investigación, a partir del desarrollo de entrevistas y las tareas planteadas.

Índice general

Introducción	- 9 -
Justificación	- 10 -
Objetivos	- 11 -
Objetivo General	- 11 -
Objetivos específicos	- 11 -
Metodología	- 13 -
Antecedentes	- 19 -
Marco conceptual	- 26 -
Documentos Curriculares Nacionales	- 26 -
Lineamientos Curriculares (LC) (MEN, 1998)	- 26 -
Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (EBCM, 2006)	- 29 -
Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) (MEN, 2016).....	- 31 -
Documentos curriculares Internacionales	- 33 -
Bachillerato Internacional (IB, por sus siglas en inglés)	- 33 -
National Council of Teachers of Mathematics (NTCM) (2000).....	- 36 -
Syllabus de los espacios académicos de la Línea de Geometría	- 41 -
Espacios obligatorios.....	- 41 -
Espacio electivo	- 46 -
Espacios optativos	- 46 -
Análisis general espacios académicos de la línea de geometría.	- 46 -
Fundamento matemático	- 48 -
Definiciones	- 48 -
Transformaciones geométricas:	- 48 -
Traslación:	- 48 -
Rotación:	- 48 -
Reflexión:.....	- 49 -
Homotecia:.....	- 49 -
Vector:.....	- 49 -

Segmento de recta dirigido	- 49 -
Magnitud de un vector:	- 49 -
Dirección de un vector:	- 49 -
Teoremas	- 49 -
Teorema Reflexión-Rotación	- 50 -
Teorema Reflexión-Traslación	- 59 -
Teorema Homotecia 1	- 67 -
Teorema Homotecia 2	- 67 -
Desarrollo	- 69 -
Elaboración de tareas	- 69 -
Tarea 1	- 72 -
Tarea 2	- 72 -
Tarea 3	- 73 -
Traslación	- 73 -
Rotación	- 74 -
Reflexión	- 74 -
Homotecia	- 75 -
Tarea 4	- 75 -
Reflexión-Traslación	- 75 -
Reflexión- Rotación	- 76 -
Homotecia	- 76 -
Elaboración entrevista semiestructurada	- 80 -
Entrevistas a docentes	- 80 -
Entrevistas estudiantes de primer semestre	- 81 -
Entrevistas estudiantes de últimos semestres	- 82 -
Análisis	- 84 -
Desarrollo de tareas	- 84 -
Tarea 1	- 84 -
Respuestas estudiantes primer semestre	- 84 -
Respuestas estudiantes últimos semestre	- 84 -
Tarea 2	- 86 -
Algunas respuestas estudiantes primer semestre	- 86 -
Respuestas estudiantes últimos semestre	- 88 -

Tarea 3	- 91 -
Respuestas estudiantes primer semestre	- 91 -
Respuestas estudiantes últimos semestre	- 95 -
Tarea 4	- 101 -
Respuestas estudiantes primer semestre	- 101 -
Respuestas estudiantes últimos semestre	- 101 -
Entrevista a docentes	- 104 -
Entrevista estudiantes primer semestre	- 107 -
Entrevista estudiantes último semestre.	- 108 -
<i>Conclusiones</i>	- 109 -
<i>Reflexiones</i>	- 113 -
<i>Referencias</i>	- 114 -
<i>Anexos</i>	- 117 -

Índice de figuras

Figura 1 Plan de ejecución de la estrategia estudio del caso	- 14 -
Figura 2 Representación de la tarea de traslación	- 24 -
Figura 3 Representación de la tarea de reflexión	¡Error! Marcador no definido.
Figura 4 Representación de la tarea de rotación.....	- 24 -
Figura 5 Representación tarea IB	- 35 -
Figura 6 Representación gráfica caso 1 Teorema 1	- 50 -
Figura 7 Representación gráfica caso 2 Teorema 1	- 53 -
Figura 8 Representación gráfica caso 3 Teorema 1	- 56 -
Figura 9 Representación gráfica caso 1 Teorema 2	- 60 -
Figura 10 Representación gráfica caso 2 Teorema 2	- 62 -
Figura 11 Representación gráfica caso A	- 67 -
Figura 12 Representación gráfica caso B	- 67 -
Figura 13 Representación gráfica caso C	- 67 -
Ilustración 14 Respuesta Ilustración homotecia	- 94 -
Ilustración 15 Respuesta representación de traslación de estudiantes de últimos semestres ...	- 96 -

Índice de tablas

Tabla 1 Relación plan de ejecución y la investigación.....	- 15 -
Tabla 2 Clasificación de documentos relación con el tema central de esta investigación.-	19
-	
Tabla 3 Estándares- Transformaciones geométricas.....	- 30 -
Tabla 4 DBA- Transformaciones geométricas.....	- 31 -
Tabla 5 Definiciones según la IB.....	- 34 -
Tabla 6 Estándares NCTM	- 37 -
Tabla 7 Análisis syllabus espacios obligatorios.....	- 42 -
Tabla 8 Respuestas Tarea 2 Estudiantes primer semestre.....	- 86 -
Tabla 9 Respuestas Tarea 2 Estudiantes últimos semestres.....	- 89 -
Tabla 10 Respuestas estudiantes primer semestre Tarea 3	- 92 -
Tabla 11 Representaciones Tarea 3 Rotación Estudiantes primer semestre	- 92 -
Tabla 12 Respuestas Tarea 3 Reflexión Estudiantes primer semestre	- 93 -
Tabla 13 Respuestas Tarea 3 rotación de estudiantes de últimos semestres.....	- 98 -
Tabla 14 Respuestas Tarea 3 reflexión de estudiantes de últimos semestres	- 99 -
Tabla 15 Respuestas Tarea 3 homotecia de estudiantes de últimos semestres	- 99 -

Introducción

En mi experiencia como docente en formación de la Licenciatura en Matemáticas (LM) de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN), resalto, la importancia del espacio académico Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría. Dicho espacio es fundamental en la formación de los Futuros Educadores Matemáticos (FEM), puesto que se estudia la enseñanza y el aprendizaje de algunos objetos geométricos, los errores y dificultades que se presentan y el fomento de la argumentación en el aula de clases. Cuando cursé este espacio, me llamó la atención que nos centramos en el estudio de la enseñanza y el aprendizaje de las transformaciones geométricas en el plano. Los estudiantes, que, para ese entonces, 2023-1, cursábamos dicho espacio, teníamos poco conocimiento sobre este objeto matemático, por lo que se inició con el propósito de entender qué es una transformación, los tipos de transformaciones isométricas (traslación, rotación y reflexión) e isomorfias (homotecia) y sus invariantes. Me causó curiosidad que en los espacios académicos que cursé de la Línea de Geometría para ese tiempo (Elementos de geometría, Geometría plana, Geometría del espacio y Geometría analítica), no se estudiaron las transformaciones geométricas, sino que esto se hiciera en el espacio Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría, ubicado en quinto semestre de la LM. Esto me extrañó, dado que considero que las transformaciones geométricas son relevantes en la formación de un FEM.

Así mismo, como estudiante de la LM de la UPN, he podido constatar que la enseñanza de los cursos de la Línea de Geometría que he cursado (Elementos de geometría, Geometría plana, Geometría del espacio, Geometría analítica, Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría y Geometrías no euclidianas), tiene un enfoque argumentativo donde se desarrollan habilidades como la exploración, la visualización, el razonamiento deductivo, la conjeturación, la demostración, entre otros procesos. Sin embargo, revisando algunos syllabus de estos espacios académicos, evidencio que la enseñanza de las transformaciones geométricas no son un objetivo principal en los cursos. En síntesis, mi propósito para el desarrollo de mi investigación consiste en analizar el aporte de los espacios académicos de la Línea de Geometría de la LM, en relación con los conocimientos sobre transformaciones, que obtiene un FEM después de haber cursado dichos espacios académicos.

Justificación

En mi investigación tengo la intención de analizar qué se debería enseñar, en la educación escolar, según los documentos curriculares nacionales, sobre transformaciones geométricas. Esto, con el fin de indagar sobre qué conocimientos deberían alcanzar los profesores de matemáticas en su formación profesional y evidenciar si los logran o no, a partir de lo estudiado en los espacios académicos de la Línea de Geometría.

Para desarrollar lo mencionado anteriormente, es importante el análisis de documentos curriculares nacionales e internacionales, con el fin de constatar si las transformaciones geométricas son un objeto de estudio en la educación escolar. Además, gracias a este análisis pretendo dar respuesta a los siguientes interrogantes: ¿Se enseñan transformaciones geométricas en el colegio?, ¿por qué es importante enseñarlas?, ¿se tienen en cuenta la enseñanza y el aprendizaje de transformaciones geométricas en el proceso de formación de FEM?

Dos propósitos relevantes de esta investigación son: (i) medir el impacto que tienen los espacios académicos de la Línea de Geometría de la LM de la UPN en la formación de los futuros licenciados en matemáticas, en referencia a su conocimiento sobre las transformaciones geométricas, mediante la elaboración, aplicación y evaluación de tareas con estudiantes de la LM; y, (ii) examinar la pertinencia o no de la inclusión de la enseñanza y el aprendizaje de las transformaciones geométricas en algún espacio académico de matemáticas la Línea de Geometría de la LM.

Objetivos

Objetivo General

Establecer el aporte de los espacios académicos de la Línea de Geometría de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, a la formación de los futuros licenciados en matemáticas respecto a su contribución en la construcción de conocimientos alusivos a las transformaciones geométricas, a partir de la elaboración, aplicación y evaluación de tareas y entrevistas con estudiantes y docentes de la Licenciatura en Matemáticas.

Objetivos específicos

- Estudiar documentos especializados en aspectos matemáticos y didácticos de las transformaciones geométricas, con el fin de identificar los conocimientos que deberían alcanzar los futuros educadores matemáticos en relación a este objeto de estudio geométrico.
- Encontrar evidencias sobre la importancia de la enseñanza y el aprendizaje de las transformaciones geométricas en la educación escolar, a partir de lo declarado en documentos curriculares nacionales.
- Realizar un análisis de los *syllabus* de los espacios académicos de la Línea de Geometría, con el fin de analizar si se tienen en cuenta la enseñanza y el aprendizaje de las transformaciones geométricas en la formación de futuros licenciados en matemáticas.
- Elaborar, implementar y evaluar situaciones problemas con estudiantes de primer y últimos semestres de la LM, en relación con transformaciones geométricas, con el fin de analizar los conocimientos que tienen sobre las transformaciones geométricas
- Elaborar e implementar entrevistas con algunos estudiantes y profesores de la LM, con el fin de contrastar información obtenida, a partir del estudio de los *syllabus* de los espacios académicos de la Línea de Geometría, y de la evaluación de situaciones problema aplicadas a estudiantes de primer y últimos semestres de LM.

- Examinar la pertinencia de la inclusión de la enseñanza y el aprendizaje de las transformaciones geométricas en algún espacio de matemáticas la Línea de Geometría de la LM.

Metodología

En este capítulo expreso qué enfoque, aproximación, estrategia y recursos tuve en cuenta para el desarrollo de mi investigación.

Mi enfoque es fenomenológico que, según Camargo (2021, p.16), corresponde al “conjunto de supuestos, visiones y prácticas de acercamiento que, desde una aproximación antropológica, hermenéutica, o colaborativa social asumen quienes consideran que los fenómenos de indagación sistemática pueden ser descritos, interpretados, explicados y cuestionados”, es decir, son ideas o prácticas que son posibles de describir, interpretar y cuestionar, a partir de formulación de preguntas, recopilación de datos y análisis de información. Así mismo, este tiene como objetivo obtener “inferencias, descripciones o explicaciones” (Camargo, 2021, p.16). Por consiguiente, en el transcurso de esta investigación, hago inferencias o presupuestos sobre el tema central, realizo descripciones ya sea en documentos, estudiantes, etc., y finalizo con una explicación o justificación de mi hipótesis.

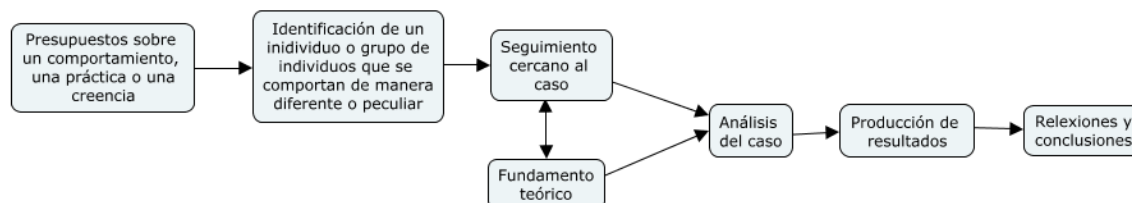
La aproximación interpretativa o hermenéutica adoptada tiene como fin “profundizar sin juzgar los significados que proponen los estudiantes y profesores sobre objetos y procesos matemáticos” (Camargo, 2021, p.18). Es decir, como investigadora profundicé en los significados que plantean los estudiantes que cursan por primera vez el espacio académico Elementos de Geometría y los que terminaron de cursar los espacios obligatorios de la Línea de Geometría en la UPN, sobre transformaciones geométricas. Además, realicé entrevistas a algunos docentes de la LM, con el propósito de conocer información, perspectivas y experiencias que contribuyen al objetivo principal de esta investigación. Esta información recolectada fue contrastada con los planteamientos desarrollados en el marco conceptual.

La estrategia investigativa que llevé a cabo para el desarrollo de mi investigación es la de estudio de caso. Esta estrategia se centra en la descripción de una situación, en el que inicialmente se fundamenta en presupuestos de un fenómeno, después se identifica el grupo en el que se hará la investigación, luego un seguimiento de la situación y el análisis del caso, y, por último, la producción de resultados. A continuación, en la **¡Error! No se encuentra el**

origen de la referencia., se muestra el esquema en el cual se evidencia el plan de ejecución de esta estrategia.

Figura 1

Plan de ejecución de la estrategia estudio del caso



Nota. Tomado y adaptado de Camargo (2021, p.68)

A este plan de ejecución, me permito añadir un proceso más, después de la producción de resultados y es el de “reflexiones y conclusiones”, puesto que considero que mi investigación aporta aprendizajes para mí como investigadora, dejando reflexiones y conclusiones relevantes (a modo de ejemplo: sugerencias para la organización de los contenidos de la Línea de Geometría de la LM de la UPN).

Después de describir el plan de ejecución de la estrategia, es pertinente mencionar que el caso de estudio de esta investigación se centra en el conocimiento que adquieren los FEM a partir de experiencias de formación relacionadas con las transformaciones geométricas en la Línea de Geometría de la LM de la UPN. Este caso de estudio resulta particularmente relevante, debido a que, en el transcurso de algunos semestres de la LM, se abordó el estudio de un objeto geométrico (las transformaciones geométricas) en un espacio académico centrado en la didáctica de la geometría (Enseñanza y aprendizaje de la geometría). Esto permite analizar el aporte de los espacios académicos de la Línea de Geometría al proceso de aprendizaje de los futuros educadores matemáticos sobre las transformaciones geométrica. Esto implica que el estudio de asuntos matemáticos y didácticos se desarrollen de forma integrada, al menos en la línea de geometría, principalmente en el curso de Enseñanza y aprendizaje de la geometría.

Resulta fundamental profundizar en diversos aspectos, tales como: el análisis de documentos curriculares nacionales e internacionales, los documentos del fundamento matemático y los

syllabus de los espacios académicos de la Línea de Geometría de la LM; los conocimientos que tienen los FEM sobre las transformaciones geométricas; las perspectivas y aportes de algunos estudiantes y docentes responsables de la Línea de Geometría respecto a la enseñanza y el aprendizaje de las transformaciones geométricas en la LM.

El estudio de estos aspectos tiene como propósito comprender ¿cuáles son los conocimientos que debería tener los FEM sobre transformaciones geométricas?, ¿los espacios académicos de la Línea de Geometría contribuyen a la construcción y desarrollo de dichos conocimientos? Y si es así, ¿Qué aportan?

En la Tabla 1 muestro cómo se relaciona el plan de ejecución de la estrategia estudio de caso, con el desarrollo de mi investigación.

Tabla 1 Relación plan de ejecución y la investigación

Proceso del plan de ejecución	Relación en mi investigación
Presupuestos sobre un comportamiento, una práctica o una creencia.	Mi presupuesto es que en la Línea de Geometría de la LM no se enseña el concepto de transformaciones geométricas, solo, si acaso, hasta cursar el espacio académico Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría.
Identificación de un individuo o grupo de individuos que se comportan de manera diferente o peculiar.	Como se ha mencionado con anterioridad el caso es relevante de investigar porque, se abordó el estudio de un objeto geométrico en un espacio académico centrado en la didáctica de la geometría. Esto ocasiona que analice dos grupos de estudiantes que cumplen las siguientes características: <ul style="list-style-type: none"> • Cursan por primera vez el espacio académico Elementos de Geometría puesto que, con ellos se puede examinar qué conocimientos tienen sobre transformaciones geométricas según lo aprendido en el colegio, ya que algunos de ellos son recién egresados de la educación escolar. Con el fin de conocer los conocimientos que como estudiantes

	<p>nuevos de la LM tienen sobre las transformaciones geométricas.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Cursaron todos los espacios académicos obligatorios de la Línea de Geometría, para conocer los conocimientos que aportaron dichas materias sobre transformaciones geométricas. Es decir, estos estudiantes cursaron el espacio académico de Enseñanza y aprendizaje de la geometría, razón por la cual resulta pertinente desarrollar esta investigación.
<p>Seguimiento cercano al caso - Fundamento teórico</p>	<p>Me informé de libros universitarios que aportaron a mi investigación sobre las matemáticas que soportan las Transformaciones Geométricas (definiciones, teoremas) y sobre didáctica (diseño de tareas). Además, realicé entrevistas a algunos docentes de la Línea de Geometría en la LM y a los estudiantes que cursan por primera vez el espacio académico Elementos de Geometría y los que ya cursaron totalmente los espacios obligatorios de la Línea de Geometría; e implementé algunas tareas sobre transformaciones, que se propusieron a los dos grupos de estudiantes mencionados anteriormente.</p>
<p>Análisis del caso</p>	<p>Llevé a cabo un análisis de documentos curriculares nacionales e internacionales, así como de textos matemáticos, con el propósito de identificar los conocimientos que deberían adquirir los FEM respecto a las transformaciones geométricas. Realicé una revisión detallada de los syllabus de los espacios académicos que conforman la Línea de Geometría, con el objetivo de contrastar lo que se propone enseñar con lo que, según la literatura y los referentes curriculares, se considera necesario saber sobre este contenido.</p>

	<p>Además, analicé dos casos en mi investigación que se basan en los conocimientos sobre transformaciones geométricas en algunos estudiantes que: 1) cursan por primera vez el espacio académico Elementos de Geometría y 2) los que cursaron todos los espacios de la Línea de Geometría, basándome en la creación e implementación de tareas y entrevistas realizadas a algunos alumnos con las características mencionadas anteriormente, y docentes de la Línea de Geometría.</p> <p>A partir de los referentes estudiados y la implementación de la tarea y las entrevistas, se conocen ¿Qué conocimientos deberían tener los FEM sobre las transformaciones geométricas? y ¿Cómo los espacios académicos de la línea de la geométrica aportan al desarrollo de estos conocimientos?</p>
Producción de resultados	<p>Establecí si existe o no alguna diferencia de conocimientos sobre las Transformaciones Geométricas, en estudiantes que cursan por primera vez el espacio académico Elementos de Geometría y los que cursaron todos los espacios académicos obligatorios de la Línea de Geometría. Además, si los espacios de la línea aportan a los conocimientos que debería tener los FEM sobre transformaciones geométricas.</p>
Reflexiones y conclusiones	<p>Señalé el impacto de haber cursado los espacios obligatorios de la Línea de Geometría de la LM, en relación con el conocimiento adquirido por los futuros profesores de matemáticas en relación con las Transformaciones Geométricas.</p>

Nota. Elaboración propia

En la Tabla 1 se evidencia que cada paso de la estrategia estudio de caso se relaciona con el desarrollo de mi investigación, por lo que se puede concluir que efectivamente dicha estrategia es la más adecuada para mi trabajo de grado.

Por último, los recursos que tuve en cuenta son:

- Documentos curriculares nacionales: Lineamientos Curriculares Nacionales (LC), Estándares Básicos de Competencias de Matemáticas (EBCM) y los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA).
- Documentos curriculares internacionales: Orientación del Bachillerato Internacional (IB por sus siglas en inglés) y National Council of Teachers of Mathematics (NTCM).
- Syllabus de los espacios académicos obligatorios: Elementos de Geometría, Geometría Plana, Geometría del Espacio, Geometría Analítica y Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría; optativos: Geometrías no euclidianas; y, electivos: Geometría en primaria de la Línea de Geometría.
- Tareas sobre transformaciones geométricas que se implementarán a algunos estudiantes que cursan por primera vez el espacio académico de Elementos de Geometría y los que cursaron todos los espacios académicos obligatorios de la Línea de Geometría.
- Entrevistas a algunos estudiantes que cursan por primera vez el espacio académico de Elementos de Geometría y los que cursaron todos los espacios académicos obligatorios de la Línea de Geometría.
- Entrevistas a algunos docentes de la Línea de Geometría de LM de la UPN.

Antecedentes

Durante la revisión de documentos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las transformaciones geométricas, evidencié dos categorías generales que abarcan estos documentos. Dichas categorías fueron: aquellos que están relacionados con propuestas para la enseñanza y el aprendizaje de las transformaciones geométricas de estudiantes universitarios y documentos relacionados con las transformaciones geométricas en el currículo nacional colombiano. Estas categorías se relacionan con algunos de los objetivos propuestos para esta investigación, como lo son: el análisis de documentos curriculares nacionales e internacionales y la elaboración de tareas para algunos estudiantes de la LM de la UPN. Cabe resaltar que la cantidad de documentos en el que estas dos categorías están explícitas son muy pocos, lo que evidencia una posible limitación en la literatura disponible para el tema. La búsqueda de documentos se basó principalmente en las página web de Google académico, Funes y repositorio institucional de la UPN en donde se alojan trabajos de grado y productos de investigación de miembros de la comunidad.

En el repositorio institucional de la UPN, la búsqueda se basó principalmente en trabajos dirigidos por profesores de la Línea de Geometría. Los trabajos cuyos títulos probablemente no aportaban a esta investigación eran descartados o, en algunos casos, tomados en cuenta si en su resumen se detectaba información relevante para este estudio. Para la página web de FUNES, utilicé palabras clave como transformaciones geométricas, movimientos rígidos, traslación, rotación, reflexión y homotecia. Además, apliqué el filtro de “formación profesional”. Realicé la lectura de los títulos y resúmenes, y con base en ello descarté la mayoría de los documentos.

En Google Académico, realicé dos búsquedas: una fue con bases en las palabras clave “transformaciones geométricas en universitarios” y la otra “transformaciones geométricas y currículo nacional colombiano”. También decidí aplicar un proceso de selección similar al anteriormente mencionado, agregando filtros como el rango de fechas entre 2000 y 2024, y el idioma español.

Cabe resaltar que, aunque en la búsqueda se obtuvo una gran cantidad de documentos, la mayoría fueron descartados a partir de los títulos, ya que solo contenían alguna(s) de las

palabras clave, pero no aportaban de manera directa a esta investigación. Cuando notaba, por el título que probablemente el documento podía ser útil, procedía a leer los resúmenes. En ese proceso, observé que muchos documentos abordaban el proceso de enseñanza y aprendizaje en el contexto de la educación escolar; otros no mencionaban explícitamente el nivel educativo, y solo unos pocos indicaban de forma clara que se trataba de educación universitaria.

Por esta razón, descarté la mayoría de los documentos y seleccioné únicamente algunos, los cuales presentaré más adelante. Aunque están enfocados en la enseñanza escolar, captaron mi atención por las propuestas innovadoras que plantean para la enseñanza de las transformaciones geométricas.

En la Tabla 2 presento una clasificación de cada producción con su respectivo autor, categorización y posible aporte a mi trabajo de grado.

Tabla 2 Clasificación de documentos relación con el tema central de esta investigación.

Nº	Producción académica	Autoría	Categorización	Aporte
1	Geometría indígena y currículo escolar. Una revisión del estado del arte	Córdoba, Iguad y Blanco (2022)	Transformaciones geométricas y el currículo nacional colombiano.	Análisis de documentos relacionados con el pensamiento espacial para sistematizar estrategias etnomatemáticas en el ámbito curricular.
2	Simetría y transformaciones geométricas en el plano, algunas ideas para su enseñanza	Hugo Barrantes (2019)	Propuestas de enseñanza y aprendizaje en estudiantes universitarios	Propuesta de enseñanza de simetría basándose en patrones, usando regla y compás, relacionándolo con teselados y diferentes teoremas.
3	Transformaciones geométricas en el plano, con	Leidy Robayo (2021)	Transformaciones geométricas y el	Se evidencia orientaciones curriculares que fundamentan la

	proyección cultural y aporte a la paz		currículo nacional colombiano.	propuesta y que ubican el tema de transformaciones en el plano en el currículo colombiano.
4	Algunas transformaciones geométricas del plano	Fonseca y Sánchez (2007)	Propuestas de enseñanza y aprendizaje en estudiantes universitarios	Actividades para la construcción de las nociones de isometrías del plano, así como deducir sus características a partir de teselados, doblados de papel, simetría en algunas letras, etc.
5	Una mirada al trabajo documental de un profesor de primaria al seleccionar recursos para enseñar geometría	Santacruz y Sacristán (2019)	Transformaciones geométricas y el currículo nacional colombiano.	Algunos recursos del docente de matemáticas al enseñar geometría según el currículo colombiano.
6	Isometrías en la resolución de problemas y obras de arte	Ramírez y Fernández (2018)	Propuestas de enseñanza y aprendizaje en estudiantes universitarios	Resolución de problemas con isometrías, basándose en el arte de Escher, más específicamente en un teselado de reptiles que se ha obtenido a partir de un hexágono regular, modificado mediante isometrías por medio de un programa de geometría dinámica.

7	Competencia matemática y digital del futuro docente mediante el uso de GeoGebra	García y Martín (2023)	Propuestas de enseñanza y aprendizaje en estudiantes universitarios	Los futuros educadores matemáticos utilizan competencia digital en contextos de aprendizaje. El objetivo de este trabajo es que los docentes en formación dominen las técnicas relacionadas con las transformaciones geométricas a la vez que mejora la competencia digital.
8	Recursos heurísticos para la actividad de enseñanza de las transformaciones geométricas en el nivel preuniversitario	Morales, Locia y Salmerón (2016)	Propuestas de enseñanza y aprendizaje en estudiantes universitarios	En este artículo se describe una estrategia didáctica para favorecer la planeación de enseñanza de la transformación isométrica: traslación, en el nivel preuniversitario. El marco teórico-metodológico que sustenta el trabajo recaen en los aportes sobre metodologías para los procedimientos de solución de problemas
9	Moviéndonos en el plano a ciegas	Ávila y Valera (2019)	Propuestas de enseñanza y aprendizaje en	En este documento se presenta el diseño, implementación y evaluación de un material

			estudiantes universitarios	didáctico que busca que estudiantes con discapacidad visual definan la rotación en el plano.
--	--	--	-------------------------------	--

Nota. Elaboración propia

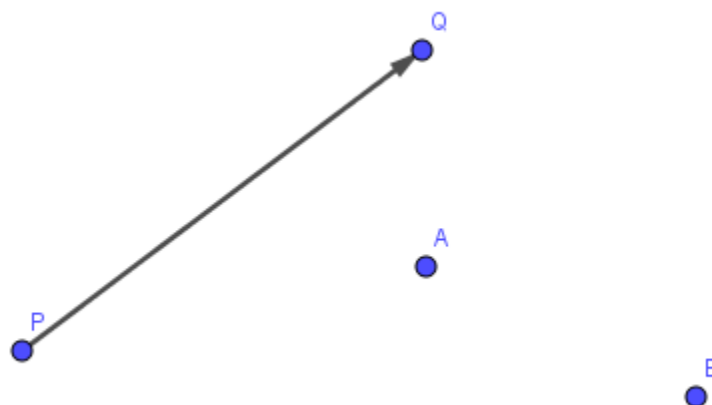
A continuación, analizo dos de los documentos mencionados anteriormente, ya que estas investigaciones tienen mayor afinidad con mi trabajo de grado. Además, menciono algunas ideas principales, con el fin de saber cómo dichos artículos son elementos para justificar la importancia de que los FEM tengamos conocimientos de las transformaciones geométricas y en el diseño de tareas sobre estas mismas. Los textos por analizar son: “Una mirada al trabajo documental de un profesor de primaria al seleccionar recursos para enseñar geometría” y “Algunas transformaciones geométricas del plano”.

En el documento de Fonseca et. al (2007) titulado “Algunas transformaciones geométricas del plano” se lee, en primer lugar, una presentación en la que los autores mencionan que la importancia de enseñar transformaciones geométricas recae en la relación que tienen estas con la resolución de problemas. Los autores exponen una serie de actividades que aportan a la enseñanza y el aprendizaje de las transformaciones geométricas. Desde mi punto de vista, las tareas diseñadas resultan particularmente significativas, ya que lograron captar mi atención por su carácter sencillo y, al mismo tiempo, por el potencial que tienen para favorecer el desarrollo de procesos de enseñanza y aprendizaje de las transformaciones geométricas. Se trata de actividades accesibles y por tanto se harán adaptaciones para aplicar una tarea a algunos estudiantes de la LM, a modo de ejemplo, muestro una actividad propuesta para algunas transformaciones:

- **Tarea 1: Traslación**

Enunciado: “Dada la traslación PQ representada por la flecha P a Q , encuentra la imagen de los puntos A y B a través de PQ . Si se nombran A' y B' la imagen de A y B por PQ respectivamente ¿Qué relaciones observas entre los $\overline{AA'}$ y $\overline{BB'}$?” (Fonseca y Sánchez, 2007, p.4)

Figura 2 Representación de la tarea de traslación

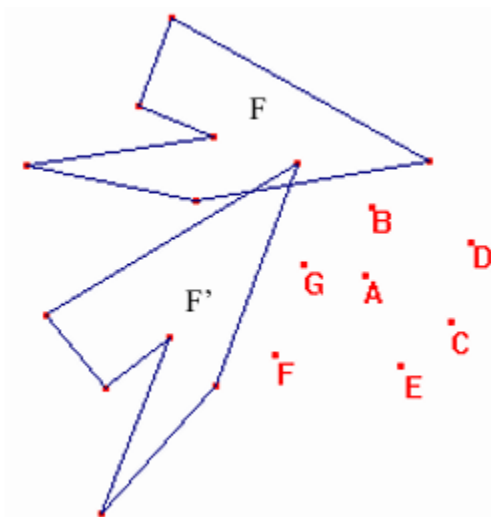


Nota. Tomado y adaptado de Fonseca y Sánchez (2007, p. 4)

- **Tarea 2: Rotación**

Enunciado: “El polígono F' es la imagen de F por alguna rotación. Determine la medida del ángulo de rotación y cuál de los puntos que se muestran en la figura, es el centro de rotación.” (Fonseca y Sánchez, 2007, p.8)

Figura 3 Representación de la tarea de rotación



Nota. Tomado de Fonseca y Sánchez (2007, p.9)

El documento de Santacruz y Sacristán (2019) titulado “Una mirada al trabajo documental de un profesor de primaria al seleccionar recursos para enseñar geometría”, se basa principalmente en analizar los recursos que utiliza un docente para la enseñanza y el

aprendizaje de las transformaciones geométricas. El aporte significativo para mi investigación consiste en la selección de recursos importantes para la enseñanza de las transformaciones. Los autores mencionan la necesidad de establecer una relación entre lo estático y lo dinámico, puesto que se “propone una visión (epistemológica y didáctica) de las transformaciones como aplicaciones en el plano, las cuales se pueden enseñar propiciando actividades como caminar en línea recta, girar el cuerpo o el uso de distintos recursos como el doblado de papel” (Santacruz y Sacristán, 2019, p.11); En otras palabras, las transformaciones geométricas se pueden analizar como un movimiento o como una correspondencia; dependiendo de esto se pueden enseñar con diferentes recursos. Además, en dicho documento mencionan que el “uso de recursos digitales son promovidos, para el caso de los profesores colombianos, por cambios y orientaciones curriculares, llamadas mallas de aprendizaje” (Santacruz y Sacristán, 2019, p.10). Es decir, según este escrito, en los documentos curriculares nacionales colombianos se incentiva el uso de recursos digitales en el proceso de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

En los trabajos revisados, logro evidenciar que el tema difiere un poco con mi tema central, por lo que es de mi interés realizar un aporte a este tema de investigación. Además, la información obtenida en estos documentos puede aportar significativamente en el estudio sobre los conocimientos que aportan los espacios académicos de la Línea de Geometría a los FEM, ya sea en la elaboración de tareas sobre las transformaciones geométricas o conocer sobre la importancia de que un FEM estudie dicho objeto matemático.

Marco conceptual

Para el desarrollo de mi investigación, analicé documentos curriculares nacionales (LC, EBC, DBA) e internacionales (NTCM y IB), syllabus de los espacios académicos obligatorios, electivos y optativos de la Línea de Geometría de la UPN y documentos de fundamento matemático sobre transformaciones geométricas. Con el propósito de responder las preguntas: ¿qué debería saber un FEM acerca de las transformaciones geométricas? y ¿se tiene en cuenta la enseñanza y el aprendizaje de transformaciones geométricas en el proceso de formación de futuros educadores matemáticos?

Documentos Curriculares Nacionales

Lineamientos Curriculares (LC) (MEN, 1998)

Los LC son orientaciones pedagógicas y curriculares que tienen como objetivo guiar el “proceso de fundamentación y planeación de las áreas obligatorias y fundamentales definidas por la Ley General de Educación” (Ministerios de Educación Nacional, 2018). A continuación, indico lo que mencionan los LC sobre la enseñanza y el aprendizaje de las transformaciones geométricas.

Los LC mencionan que “con esta visión global e integral del quehacer matemático, proponemos considerar tres grandes aspectos para organizar el currículo” (Ministerio de Educación Nacional, 1998, p.18) estos tres aspectos son conocimientos básicos, conocimientos sobre procesos y conocimientos del contexto.

El conocimiento sobre procesos lo definen como aquellos “que tienen que ver con el aprendizaje, tales como el razonamiento; la resolución y planteamiento de problemas; la comunicación; la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos.” (Ministerio de Educación Nacional, 1998, p.18), estos procesos aportan a que el aprendizaje de las matemáticas debe posibilitar al estudiante la aplicación de sus conocimientos fuera del ámbito escolar, donde debe tomar decisiones, enfrentarse y adaptarse a situaciones nuevas y exponer sus opiniones.

Los conocimientos básicos “tienen que ver con procesos específicos que desarrollan el pensamiento matemático y con sistemas propios de las matemáticas” (Ministerio de Educación Nacional, 1998, p.18), más adelante profundizaremos en este aspecto.

Y, por último, los conocimientos del contexto “tiene que ver con los ambientes que rodean al estudiante y que le dan sentido a las matemáticas que aprende.” (Ministerio de Educación Nacional, 1998, p.19). Estos conocimientos son de gran relevancia, puesto que es necesario relacionar los contenidos de aprendizaje con la experiencia cotidiana de los alumnos, así como presentarlos y enseñarlos en un contexto de situaciones problemas.

Ahora bien, los conocimientos básicos “se relacionan con el desarrollo del pensamiento numérico, el espacial, el métrico, el aleatorio y el variacional, entre otros. Los sistemas son aquellos propuestos desde la Renovación Curricular: sistemas numéricos, sistemas geométricos, sistemas de medida, sistemas de datos y sistemas algebraicos y analíticos.” (Ministerio de Educación Nacional, 1998, p.19), dada la contextualización de esta investigación nos centraremos en pensamiento espacial y sistemas geométricos.

En primer lugar, en los LC se menciona que la “geometría escolar tiene en cuenta el movimiento de figuras geométricas desde diferentes posiciones y movimientos que impliquen el cambio del tamaño o de la forma” (Ministerio de Educación Nacional, 1998, p.40). En otras palabras, este documento hace explícito que el movimiento de figuras geométricas se enseña en la educación escolar, por lo que es de vital importancia que un docente en matemáticas tenga conocimientos sobre la enseñanza y el aprendizaje de estos conceptos.

Además, allí se indica que la enseñanza de las transformaciones geométricas “debería iniciar con movimientos del cuerpo en el plano o deslizando objetos, con el fin de tener una idea intuitiva de la traslación y rotación. Después de esto se sugiere estudiar las definiciones y su representación formalmente” (Ministerio de Educación Nacional, 1998, p.40). Esto con el fin de que los estudiantes tengan una idea intuitiva de lo que son las transformaciones geométricas, sin necesidad de iniciar con una definición formal de estas.

Otra idea fundamental de la importancia de la enseñanza de las transformaciones geométricas recae en la resolución de problemas y en su relación con el mundo real (en relación con

movimientos, localización de objetos o personas, entre otros). Se propone desarrollar una geometría activa, es decir, “se trata pues de ‘hacer cosas’, de moverse, dibujar, construir, producir y tomar de estos esquemas operatorios el material para la conceptualización o representación interna” (Ministerio de Educación Nacional, 1998, p.37). Lo que conlleva a que un docente de matemáticas deba tener conocimientos sobre algunas estrategias de enseñanza sobre las transformaciones geométricas, con el objetivo de generar aprendizajes significativos y relacionados al contexto de los estudiantes.

Además, los LC mencionan: “Esta conceptualización va acompañada en un principio por gestos y palabras del lenguaje ordinario, hasta que los conceptos estén incipientemente contruidos a un nivel suficientemente estable para que los alumnos mismos puedan proponer y evaluar posibles definiciones y simbolismos formales.” (Ministerio de Educación Nacional, 1998, p.37) Es decir, un profesor de matemáticas debe tener conocimientos conceptuales de las transformaciones geométricas (definiciones, representaciones, teoremas y demostraciones).

También, los LC dicen que “el uso de los computadores en la educación matemática ha hecho más accesible e importante para los estudiantes temas de la geometría” (Ministerio de Educación Nacional, 1998, p.18), por lo tanto, el uso de recursos tecnológicos es relevante a la hora de enseñar un objeto matemático (en nuestro caso, las transformaciones geométricas).

Teniendo en cuenta lo planteado en los LC, es fundamental que un FEM comprenda las transformaciones geométricas tanto desde una perspectiva didáctica como matemática, entendidas como movimientos en el plano que permite el cambio de posición, orientación o tamaño de las figuras. Además, debe ser capaz de diseñar situaciones problema que propicien un aprendizaje activo y significativo, permitiendo que los estudiantes transiten de lo intuitivo a lo especializado. Finalmente debe reconocer el valor de la tecnología en el proceso de la enseñanza y el aprendizaje, incorporando herramientas digitales y, por tanto, desarrollar competencias tecnológicas que le permitan integrarlas de manera pertinente y efectiva.

Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (EBCM, 2006)

Los EBCM son “criterios claros y públicos que permiten establecer los niveles básicos de calidad de la educación a los que tienen derecho los niños y las niñas de todas las regiones del país” (Ministerio de Educación Nacional, 2024). Los EBCM no se centran en el desarrollo netamente de contenidos, si no que hacen mayor énfasis en las competencias que debería tener un estudiante a nivel escolar con criterios establecidos.

A continuación, en la Tabla 3 se observa los estándares relacionados con el aprendizaje de transformaciones geométricas en la educación escolar.

Tabla 3 Estándares- Transformaciones geométricas

Estándar	Grado
Reconocer y aplicar traslaciones y giros sobre una figura.	Al terminar tercer grado.
Reconocer y valorar simetrías en distintos aspectos del arte y el diseño.	
Identificar, representar y utilizar ángulos en giros, aberturas, inclinaciones, figuras, puntas y esquinas en situaciones estáticas y dinámicas.	Al terminar quinto grado.
Conjeturar y verificar los resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano para construir diseños.	
Predecir y comparar los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte.	Al terminar séptimo grado.

Nota. Tomado de MEN (2006)

Es importante mencionar que, en los EBCM, el concepto de las transformaciones geométricas se desarrolla matemáticamente hasta el grado séptimo, teniendo como principal objetivo predecir resultados al aplicar cualquier transformación geométrica. En comparación con los cursos restantes mencionados en la Tabla 3 (tercero y quinto) su principal objetivo es reconocer e identificar las transformaciones geométricas, aunque en grado quinto se espera también que los estudiantes realicen conjeturas y verifiquen los resultados.

Es importante mencionar que, en los EBCM, el concepto de las transformaciones geométricas se desarrolla matemáticamente hasta el grado séptimo, teniendo como principal objetivo predecir resultados al aplicar cualquier transformación geométrica. En comparación con los cursos restantes mencionados en la Tabla 3 (tercero y quinto) su principal objetivo es reconocer e identificar las transformaciones geométricas, aunque en grado quinto se espera también que los estudiantes realicen conjeturas y verifiquen los resultados.

Teniendo en cuenta los EBCM, un profesor de matemáticas debe poseer conocimientos conceptuales sobre las transformaciones geométricas ya que la enseñanza y el aprendizaje de este objeto matemático “requiere del estudio de conceptos y propiedades de los objetos en el espacio físico y de los conceptos y propiedades del espacio geométrico en relación con los

movimientos del propio cuerpo y las coordinaciones entre ellos y con los distintos órganos de los sentidos.”(Ministerio de Educación Nacional, 2006, p.61). Los FEM deben, por lo tanto, no solo comprenderlas conceptualmente como traslación, rotación, reflexión y homotecia, sino también saber cómo deben ser introducidas y desarrolladas progresivamente en el aula. A medida que avanza el grado escolar, debe ser capaz de guiar a los estudiantes en la representación, a partir de uso de ángulos, aberturas, inclinaciones, figuras, puntas y esquinas. Además, que los FEM reconozcan y comprendan los procesos relacionados con la conjetura, la verificación y la predicción de los efectos de aplicar transformaciones geométricas en figuras. Estas habilidades, junto a otras (argumentación y visualización) no solo forman parte del pensamiento geométrico, sino que también debe ser entendidas como competencias clave que los FEM deben dominar y saber integrar en el proceso de la enseñanza y el aprendizaje de las transformaciones geométricas en la educación escolar.

Además de que “relacionar el estudio de la geometría con el arte y la decoración; con el diseño y construcción de objetos artesanales y tecnológicos; con la educación física, los deportes y la danza.” (Ministerio de Educación Nacional, 2006, p.61) son algunas estrategias que recomienda los EBCM para el desarrollo del pensamiento geométrico. Lo que significa que un profesor de matemáticas debería tener conocimientos sobre recursos para el desarrollo de la enseñanza y el aprendizaje de las transformaciones.

Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) (MEN, 2016)

En los DBA se proponen los siguientes enunciados y evidencias de aprendizaje relacionados con las transformaciones geométricas:

Tabla 4 DBA- Transformaciones geométricas

Enunciado	Evidencias	Grado
Formula y resuelve problemas que se relacionan con la posición, la dirección y el movimiento de	Localiza objetos o personas a partir de la descripción o representación de una trayectoria y construye representaciones pictóricas para describir sus relaciones.	Tercero.
	Identifica y describe patrones de movimiento de figuras bidimensionales que se asocian con	

objetos en el entorno.	transformaciones como: reflexiones, traslaciones y rotaciones de figuras.	
	Identifica las propiedades de los objetos que se conservan y las que varían cuando se realizan este tipo de transformaciones.	
	Plantea y resuelve situaciones en las que se requiere analizar las transformaciones de diferentes figuras en el plano.	
Identifica los movimientos realizados a una figura en el plano respecto a una posición o eje (rotación, traslación y simetría) y las modificaciones que pueden sufrir las formas.	Aplica movimientos a figuras en el plano.	Cuarto.
	Diferencia los efectos de la ampliación y la reducción.	
	Elabora argumentos referentes a las modificaciones que sufre una imagen al ampliarla o reducirla.	
	Representa elementos del entorno que sufren modificaciones en su forma.	

Nota. Tomado de MEN (2016)

Se evidencian diferencias entre los DBA y los EBCM, ya que en los DBA se aclara que para el grado tercero se “Formula y resuelve problemas...” relacionados con las transformaciones geométricas, mientras que en los EBCM mencionan que se “Reconocen y aplican...”. Desde mi punto de vista, estos dos objetivos no tienen concordancia, puesto que, aunque sea cierto que en la formulación y resolución de problemas se requiere implícitamente el reconocimiento y aplicación de las transformaciones, no se tiene el mismo enfoque u orientación.

A partir de lo expuesto en los DBA un docente de matemáticas debe tener conocimientos matemáticos con el fin de guiar a sus estudiantes en la formulación y resolución de problemas relacionados con la posición, dirección y movimiento de figuras. Así mismo, debe fomentar procesos de argumentación y resolución de problemas teniendo en cuenta situaciones de su entorno.

Documentos curriculares Internacionales

Bachillerato Internacional (IB, por sus siglas en inglés)

El IB es una organización que tiene como fin “formar jóvenes solidarios, informados y ávidos de conocimiento, capaces de contribuir a crear un mundo mejor” (Organización del Bachillerato Internacional, 2019, p.4).

En el libro de Buchanan et. al (2015) titulado “Matemáticas nivel medio” conocido también como el libro del alumno, se proponen una serie de contenidos matemáticos que deben aprender los estudiantes en su educación escolar; se incluyen definiciones y algunas actividades.

En Colombia, algunas instituciones educativas han adaptado este currículo (el del IB), siendo así este libro un apoyo para profesores que enseñar en dichos colegios.

En la

Tabla 5 presento las definiciones que propone el IB de las transformaciones geométricas. Cabe resaltar que la esencia de esta tabla es diferente a las anteriores pues en esta, no se menciona qué aprendizajes o competencias se espera que el estudiante desarrolle.

Tabla 5 Definiciones según la IB

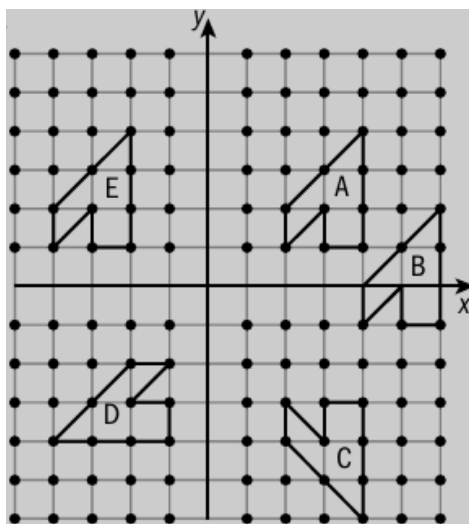
Concepto	Definición según el IB
Transformaciones geométricas	Una transformación puede cambiar tanto la posición como el tamaño de un objeto. Una transformación determina una aplicación entre un objeto y su imagen
Traslación	Una traslación mueve cada punto una distancia fija, en la misma dirección. Para describir una traslación escribimos el vector columna $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, donde x representa el desplazamiento en la dirección del eje x y y el desplazamiento en la dirección del eje y
Rotación	Una rotación hace que un objeto gire un cierto ángulo alrededor de un punto fijo llamado centro de rotación, en un sentido determinado. Para describir una rotación, damos las coordenadas del centro de rotación, el sentido y el ángulo de giro.
Simetría	Cuando se aplica una simetría respecto de un eje, el objeto y su imagen son simétricos respecto del eje de simetría. Cada punto de la imagen está a la misma distancia del eje de simetría que el punto correspondiente en el objeto. Para describir una simetría, debemos indicar la ecuación del eje de simetría.
Homotecia	Una homotecia aumenta o disminuye el tamaño de un objeto aplicando una razón determinada. Para describir una homotecia, damos las coordenadas del centro de la homotecia y la razón. La imagen después de la homotecia es matemáticamente semejante al objeto original.

Nota. Tomado de Buchanan et.al (2015)

Como se mencionó inicialmente, el IB también propone tareas que se relacionan con los contenidos matemáticos que se plantean. Una de las tareas captó especialmente mi atención debido a la sencillez de su enunciado y a la intensidad didáctica que la sustenta. Esta actividad plantea como objetivo identificar tres transformaciones geométricas a partir de una única imagen, lo que representa un enfoque integrado y esta forma de presentar la tarea facilita la comprensión conjunta de los conceptos, la tarea es la siguiente:

Enunciado: “La grilla contiene cinco figuras de la *A* a la *E*. Describa la transformación única que transforma a: *A* en *B*, *A* en *C*, *A* en *D*, *A* en *E* y *C* en *D*” (Buchanan et al., 2015, p.675)

Figura 4 Representación tarea IB



Nota. Tomado de Buchanan et.al (2015, p.675)

Esta tarea captó mi atención, ya que permite que el estudiante que la desarrolle, analice y comprenda qué transformación geométrica se aplicó en cada caso, trabajando varias transformaciones geométricas en una sola tarea.

Si bien este texto guía, presenta diversas tareas que pueden ser empleadas por un profesor de matemáticas para la enseñanza y el aprendizaje de las transformaciones geométricas, también exigen unas definiciones que requieren mayor dominio del contenido matemático, al hacer referencia, por ejemplo, en el uso de vectores y ecuaciones de la recta. Esto sugiere que un FEM a parte de tener conocimientos didácticos, debe tener un dominio de las matemáticas especializadas respecto a las transformaciones geométricas, con el fin de generar un

aprendizaje progresivo en sus estudiantes con posibilidades de formalización del conocimiento matemático cuando el contexto lo permita.

National Council of Teachers of Mathematics (NTCM) (2000)

La NTCM es una organización profesional para profesores de matemáticas en Estados Unidos, en el que uno de sus objetivos es mejorar los estándares de las matemáticas en la educación.

En su documento, mencionan que los niños pequeños tienen ideas vagas de las transformaciones, relacionándolas con deslizamientos, volteretas y giros, usando espejos, doblando papel y trazando. Sin embargo, estas ideas primitivas deben formalizarse en su educación escolar, de tal manera que puedan “investigar los efectos de las transformaciones y comenzar a describirlas en términos matemáticos y aprender los atributos necesarios para definir una transformación” (National Council of Teachers of Mathematics, 2000, p.43) En grados intermedios “los estudiantes deben aprender a comprender lo que significa que una transformación preserva la distancia” (National Council of Teachers of Mathematics, 2000, p.43). En el caso de secundaria “deben aprender múltiples formas de expresar transformaciones”. (National Council of Teachers of Mathematics, 2000, p.43). Es decir, los NCTM mencionan que los estudiantes deben tener un desarrollo de transformaciones más “formal” en su educación escolar, y que están presentes en varios grados escolares, desarrollando así una competencia acorde a este sobre transformaciones geométricas.

A continuación, en la Tabla 6 se evidencia el estándar a desarrollar en diferentes grados y una explicación sucinta de este.

Tabla 6 Estándares NCTM

Grado	Los estudiantes deberían...	Interpretación
Pre K-2	<ul style="list-style-type: none"> • Reconocer y aplicar deslizamientos, volteretas y giros. • Reconocer y crear formas que tengan simetría. 	<p>Como se mencionó anteriormente, los estudiantes más pequeños tienen una idea intuitiva de transformaciones. La exploración más cercana es resolver un rompecabezas, esto ayuda los estudiantes a tomar conciencia de los movimientos y a predecir los resultados de cambiar la posición u orientación de una forma. Así mismo, los estudiantes deben reconocer, describir y probar informalmente las características simétricas</p>
3 - 5	<ul style="list-style-type: none"> • Redactar y describir los resultados de deslizar, voltear y girar formas bidimensionales. • Describir un movimiento o una serie de movimientos que demuestren que dos formas son congruentes • Identificar y describir la simetría lineal y rotacional en formas y diseños bidimensionales y tridimensionales. 	<p>Los estudiantes de 3-5 ya podrían realizar tareas más especializadas teniendo así una mayor precisión a medida que describen los movimientos necesarios para mostrar congruencia. En los grados 3 a 5, deben usar un lenguaje sobre giros y ángulos para describir diseños y trabajar con varios ejes de simetría, pues incluso deberían ser capaces de visualizar la imagen mentalmente al aplicar una transformación geométrica.</p>
6-8	<ul style="list-style-type: none"> • Describir tamaños, posiciones y orientaciones de formas bajo transformaciones informales como volteos, giros, deslizamientos y escalas. 	<p>Los estudiantes de 6-8 exploran las características de los giros, vueltas y deslizamientos y deben investigar las relaciones entre las composiciones de transformaciones.</p>

	<ul style="list-style-type: none"> • Examinar la congruencia, la similitud y la simetría lineal o rotacional de los objetos mediante transformaciones. 	Incluso relacionar las transformaciones geométricas con congruencia o semejanza es un aporte significativo en el aprendizaje de los estudiantes.
9-12	<ul style="list-style-type: none"> • Comprender y representar traslaciones, reflexiones, rotaciones y dilataciones de objetos en el plano mediante el uso de bocetos, coordenadas, vectores, notación de funciones y matrices. • Utilizar diversas representaciones para ayudar a comprender los efectos de las transformaciones simples y sus composiciones. 	En la escuela secundaria aprenderán a representar estas transformaciones con matrices, explorando las propiedades de las transformaciones.

Nota. Tomado y adaptado de NCTM (2000)

Los NCTM mencionan que la homotecia se empieza a enseñar en los grados de 6-8; en consecuencia, para los estudiantes más pequeños recomiendan trabajar traslación, reflexión y rotación. Mientras que en los documentos curriculares nacionales se menciona que la homotecia se puede desarrollar en los grados de cuarto y séptimo.

El documento también propone unos objetivos que evidencian una progresividad en el desarrollo del conocimiento sobre las transformaciones geométricas, partiendo de la identificación y exploración de estas en los primeros años escolares, hasta alcanzar niveles de mayor formalidad en el lenguaje y razonamiento matemático en los grados superiores. Esto implica que un docente en matemáticas debería tener conocimientos especializados de las matemáticas, que le permita comprender conceptos relacionados.

Teniendo en cuenta lo mencionado sobre documentos curriculares nacionales e internacionales, cabe resaltar que en todos se identifica la importancia de la enseñanza y el aprendizaje de las transformaciones geométricas en la educación escolar. Aunque se presentan algunas diferencias en los grados a enseñar, la esencia es la misma. Los estudiantes deben aprender de transformaciones de forma especializada en su educación escolar. El tema está presente en varios grados escolares, desarrollando así una competencia acorde a la edad sobre transformaciones geométricas. Aunque los estudiantes de los primeros grados inician con la identificación de estas, más adelante deberán ir desarrollando sus conocimientos de manera más especializada.

Además, a grandes rasgos los conocimientos que deberían tener los profesores en matemáticas según los documentos curriculares nacionales e internacionales son:

- **Conocimientos conceptuales:** Comprensión de aspectos de la geometría euclidiana que sustentan las propiedades de las transformaciones geométricas, teniendo en cuenta definiciones, representaciones (en la imaginación y en el plano del dibujo) y aspectos de matemáticas especializadas como, por ejemplo, teoremas asociados a estas transformaciones que permite al docente profundizar en los conceptos, explicarlos con mayor claridad y establecer conexiones significativas entre diferentes temas. Este dominio formal también le brinda herramientas para tomar decisiones más acertadas en el proceso de enseñanza y aprendizaje, y anticipar las dificultades que los estudiantes puedan presentar.

- **Conocimientos de recursos:** Conocimientos sobre algunas estrategias para la enseñanza y el aprendizaje de las transformaciones geométricas. A modo de ejemplo; el aprendizaje de las transformaciones geométricas debe comenzar por los desplazamientos que pueden hacerse con el cuerpo o mediante el deslizamiento de objetos y figuras sobre el plano del piso, del papel o del tablero. Estas experiencias concretas permiten a los estudiantes construir una comprensión intuitiva de conceptos como la traslación, la rotación, la reflexión y la homotecia. A partir de estas bases, se puede avanzar hacia una comprensión más formal, que integre definiciones precisas, representaciones mentales y gráficas.
- **Conocimientos acerca de competencias y habilidades** que se desarrollan en el aula como la conjeturación, la visualización y la argumentación.
- **Conocimiento acerca de los procesos generales** que se deben desarrollar en el proceso de enseñanza ya aprendizaje de las matemáticas (el razonamiento; la resolución y planteamiento de problemas; la comunicación; la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos).
- **Conocimiento acerca del contexto de los estudiantes.**

En conclusión, con lo mencionado anteriormente, es de vital importancia que un docente de matemáticas tenga conocimientos sobre las transformaciones geométricas pues, teniendo en cuenta los documentos curriculares nacionales e internacionales analizados, la enseñanza y el aprendizaje de estas están presentes en la educación escolar. Este asunto nos lleva a analizar si este contenido geométrico está presente en la formación de profesores de matemáticas.

Syllabus de los espacios académicos de la Línea de Geometría

A continuación, analizo si en los syllabus de los espacios académicos de la Línea de Geometría de la UPN se aportan conocimientos sobre la enseñanza y el aprendizaje de las transformaciones geométricas en la formación de Licenciados en Matemáticas. Se dividen dichos espacios en obligatorios, electivos y optativos.

Espacios obligatorios

En la Tabla 7 se evidencian los espacios obligatorios de la Línea de Geometría de la LM de la UPN, sus contenidos, presentación del curso y un análisis sobre si hay evidencias de aportes a la enseñanza y el aprendizaje de las transformaciones geométricas.

Tabla 7 Análisis syllabus espacios obligatorios

Espacio académico	Contenidos	Presentación del curso	Análisis
Elementos de Geometría	<ul style="list-style-type: none"> • Relaciones entre rectas. • Relaciones entre punto, recta y plano. <ul style="list-style-type: none"> • Subconjuntos de recta. <ul style="list-style-type: none"> • Ángulos. • Triángulos. 	<p>El propósito de este curso es tener afinidad con conceptos y relaciones geométricas, de tal manera que se cree una base para procesos como la formulación de conjeturas y argumentación a partir de un sistema axiomático relacionado con geometría euclidiana.</p>	<p>No hay evidencias sobre el aporte en la enseñanza y el aprendizaje de las transformaciones geométricas en la formación docente. Este curso se centra en tener un primer acercamiento en hacer conjeturas y demostraciones en algunos teoremas de la geometría, teniendo en cuentas algunas nociones básicas (puntos, rectas, etc.)</p>
Geometría Plana	<ul style="list-style-type: none"> • Propiedades de puntos en la recta. • Caracterización del plano. • Propiedades de rayos en el plano. <ul style="list-style-type: none"> • Relaciones entre rectas. <ul style="list-style-type: none"> • Triángulos. 	<p>El objetivo principal de este espacio académico se basa en la formulación de un sistema axiomático formal de geometría no euclidiana, en el cual se va profundizando con el estudio de algunos contenidos propuestos.</p>	<p>No hay evidencias sobre el aporte en la enseñanza y el aprendizaje de las transformaciones geométricas en la formación docente. En este curso se siguen desarrollando procesos de conjeturación y formalización con</p>

	<ul style="list-style-type: none"> • Cuadriláteros. 		algunos elementos de la Geometría Plana.
Geometría del espacio	<ul style="list-style-type: none"> • Propiedades de triángulo. • Propiedades de Cuadriláteros. • Circunferencia y esfera. • Superficies y poliedros. 	Este espacio académico sigue con la misma metodología que se viene presentando (sistema axiomático formal), Además se desarrolla habilidades como; la visualización, exploración, conjeturación, comunicación con lenguaje formal, argumentación en el marco de un sistema teórico, etc.	No hay evidencias sobre el aporte en la enseñanza y el aprendizaje de las transformaciones geométrías en la formación docente. Este curso se centra en el estudio de objetos geométricos, en el espacio, teniendo en cuenta las competencias que se han venido desarrollando en los otros cursos (conjeturación, demostración, etc.)
Geometría Analítica	<ul style="list-style-type: none"> • Relación Análisis y síntesis. • Sistema de coordenadas. <ul style="list-style-type: none"> • Rectas. • Secciones cónicas: circunferencia, parábola, elipse, hipérbola • Ecuación general de segundo grado. 	En este curso, los temas a tratar de desarrollaran principalmente desde una perspectiva hipotético-deductiva, a partir del uso de una estructura axiomática formal. El enfoque de este se basa en un sistema de coordenadas para representar puntos, un	No hay evidencias sobre el aporte en la enseñanza y el aprendizaje de las transformaciones geométrías en la formación docente. Este curso se basa en cómo se desarrolla la geometría en un sistema de coordenadas.

	<ul style="list-style-type: none"> • Ecuaciones paramétricas y polares. 	razonamiento analítico y el uso del álgebra simbólica.	
Enseñanza y aprendizaje de la geometría	<ul style="list-style-type: none"> • Naturaleza y evolución del pensamiento geométrico. • Enseñanza y aprendizaje de la geometría en grados sexto a noveno de Educación Básica Secundaria. • Fundamentos didácticos para el estudio del contenido geométrico que será tratado en las clases que se impartirán en la práctica inicial. • Fundamentos sobre los procesos de conceptualización y de argumentación. • Aspectos centrales en la preparación de una clase de geometría, su implementación y 	Este curso se resalta la fundamentación conceptual y el desarrollo de conocimiento teórico-práctico en aspectos específicos de la didáctica de la geometría, relacionados especialmente con su enseñanza y su aprendizaje.	Este espacio conlleva la práctica docente a la escuela en el ámbito geométrico. El contenido “Enseñanza y aprendizaje de la geometría en grados sexto a noveno de Educación Básica Secundaria” se relaciona con el tema central de mi investigación, pues aporta en la enseñanza y aprendizaje de transformaciones geométricas, ya que según los EBCM en grados tercero, quinto y séptimo se hace explícito la enseñanza de esta.

	la evaluación de la gestión realizada.		
--	---	--	--

Espacio electivo

El espacio electivo por analizar es Geometría en primaria. Este es un curso que está “diseñado para dotar a los futuros educadores matemáticos de estrategias y herramientas didácticas que le permitan desarrollar el Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos, con estudiantes de primaria” (Universidad Pedagógica Nacional, 2024, p.1) incluso uno de sus objetivos es construir recursos y materiales didácticos y diseñar tareas que aporten a la enseñanza y el aprendizaje de la geometría en primaria.

En este espacio académico, sí hay evidencia sobre el aporte en la enseñanza y el aprendizaje de las transformaciones geométricas en la formación docente, pues un resultado de aprendizaje es “identificar los conceptos geométricos fundamentales asociados a la geometría en primaria.” (Universidad Pedagógica Nacional, 2024, p.2). Esto se relaciona con lo que se mencionó en el análisis de documentos curriculares nacionales, ya que en los cursos de primaria en donde se enseñan transformaciones geométricas.

Espacios optativos

El espacio optativo por analizar es Geometrías no euclidianas. Este espacio busca “estudiar la interdependencia lógica entre algunas proposiciones geométricas relevantes, examinar el papel del V postulado en el desarrollo de la geometría e identificar las ideas centrales alrededor de las cuales se construyen las diversas geometrías” (Universidad Pedagógica Nacional, 2024, p.1) Este espacio se centra en estudiar principalmente el impacto del V postulado y cómo este tuvo gran impacto en el desarrollo de nuevas geometrías. Por lo tanto, en este espacio no hay evidencias sobre el aporte en la enseñanza y el aprendizaje de las transformaciones geométricas en la formación docente.

Análisis general espacios académicos de la línea de geometría.

Cabe resaltar que estas conclusiones realizadas para cada espacio académico, se realizan teniendo en cuenta lo evidenciado en los syllabus, de modo que puede suceder que en algún espacio académico se desarrolle la enseñanza y el aprendizaje de las transformaciones geométricas, teniendo en cuenta un currículo oculto. A modo de ejemplo, puede suceder que en el espacio académico de Geometría analítica se estudien las transformaciones geométricas

en un sistema de coordenadas; sin embargo, en el syllabus de este, no se menciona explícitamente, pero el docente a cargo lo desarrolle internamente.

Así mismo, se identifican dos espacios en los que se infiere una posible contribución a la enseñanza y el aprendizaje de las transformaciones geométricas, aunque no se evidencia de manera explícita que dicho contenido matemático sea abordado de forma específica. Un ejemplo de ello se encuentra en el curso de Geometría en primaria donde se plantea como objetivo “identificar los conceptos geométricos fundamentales asociados a la geometría en primaria” (Universidad Pedagógica Nacional, 2024, p.2). No obstante, no se explicita el tratamiento de las transformaciones geométricas dentro del curso. Una situación similar se presenta en el curso de Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría.

Es importante destacar que las hipótesis formuladas anteriormente emergen del análisis inicial de los syllabus y han sido construidas desde una perspectiva interpretativa propia. En consecuencia, dichas hipótesis serán contrastadas mediante la aplicación de entrevistas semiestructuradas a un grupo seleccionado de docentes de la Línea de Geometría, con el objetivo de obtener más información sobre la enseñanza y el aprendizaje de las transformaciones geométricas en la LM.

A continuación, presento una revisión de las transformaciones geométricas desde un punto de vista matemático con el fin de justificar la elaboración de las diferentes tareas, propuestas para algunos estudiantes de la LM como definiciones y teoremas.

Fundamento matemático

A continuación, aludiré a algunas definiciones y teoremas que son relevantes para el desarrollo de esta investigación, ya que como se mencionó en el objetivo general, elaboré y evaluaré una serie de tareas, por lo que un análisis desde un enfoque matemático de las transformaciones geométricas es esencial para el desarrollo de estas actividades. Esto permite identificar algunos¹ de los conceptos fundamentales, propiedades y procedimientos matemáticos involucrados que deberían saber los FEM.

Definiciones

Es importante mencionar que los autores mencionados a continuación son elegidos como referencia principal, debido a que desde mi percepción presentan definiciones rigurosas, completas y formalmente estructuradas.

Transformaciones geométricas:

Según Chuaqui y Riera “una transformación del plano es una biyección del plano en sí mismo. Si f es una tal transformación, entonces para cada punto P hay una única imagen P' , $f(P) = P'$; y recíprocamente para cada punto P' hay una única preimagen P ” (2011, p.20).

Traslación:

“Dado un vector \vec{a} , llamamos traslación de vector \vec{a} a la transformación T_a tal que $T_a(P) = P'$ sí y solo si $\overrightarrow{PP'} = \vec{a}$ ” (Jaime y Gutiérrez, 1996, p.23).

Rotación:

“Una rotación con centro en O y ángulo α es una transformación que representa cada punto P del plano en un punto P' :

- a. Si P es el punto central, entonces $P = P'$
- b. Si $P \neq O$, entonces $P'O = PO$ y $m\angle POP' = \alpha$

P' es la imagen rotada de P ”(Clemens y Cooney, 1989, p.488).

¹ Se menciona que son algunos conceptos, propiedades y procedimientos, ya que las transformaciones son un objeto de estudio amplio que se puede abordar desde diferentes ópticas, por ejemplo, con matrices, ecuaciones, etc.

Reflexión:

“En un plano, una reflexión sobre la recta l es una transformación que representa cada punto P del plano en el punto P' como sigue:

- a. Si $P \in l, P = P'$
- b. Si $P \notin l$, entonces l es la mediatriz de $\overline{PP'}$

P' es la imagen reflejada de P ” (Clemens y Cooney, 1989, p.476).

Homotecia:

“Sea $k > 0$ y sea un punto A del plano. Se denomina homotecia de razón k y centro A , y se denota $H_{A,k}$ a la aplicación biyectiva dada por $H_{A,k}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, H_{A,k}(X) = X'$, tal que $\overline{AX'} = k \overline{AX}$ ” (Estruch et al., 2018, p.76)

Vector:

“El conjunto de todos los segmentos de recta dirigidos equivalentes a un segmento de recta dirigido dado se llama vector.” (Grossman y Flores, 2012, p.233).

Segmento de recta dirigido

Sean P y Q dos puntos en el plano. Entonces el segmento de recta dirigido de P a Q , denotado por \overrightarrow{PQ} , es el segmento de recta que va de P a Q . Las dos propiedades más importantes de un segmento de recta dirigido son su magnitud y su dirección. (Grossman y Flores, 2012, p.232).

Magnitud de un vector:

“Siendo $v = (a, b)$, entonces $|v| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ” (Grossman y Flores, 2012, p.233).

Dirección de un vector:

Sea el vector \overrightarrow{PQ} la dirección es dada por la recta que pasa por P y Q

Teoremas

A continuación, menciono y demuestro algunos teoremas, que son el sustento para las tareas que diseñé e implementé con algunos estudiantes de la LM. Además, considero importante conocer las matemáticas que soportan las transformaciones geométricas, con el fin de tener un conocimiento más profundo sobre el tema a investigar. Tomé de referencia a Chuaqui y

Riera (2011). Dichas demostraciones son producciones propias, mediante el uso de un sistema teórico (ver anexo A) y las definiciones mencionadas con anterioridad.

Teorema Reflexión-Rotación

Sea l y m dos rectas que se intersecan en el punto O y la figura geométrica punto P . P' es la imagen correspondida por reflexión de P sobre la recta l y P'' es la imagen correspondida por reflexión de P' sobre la recta m , entonces P'' es la imagen correspondida por rotación de P y $m\angle POP''$ es dos veces el ángulo formado por l y m .

Demostración

Esta demostración tiene los siguientes casos:

Caso 1: $P \notin l, P \notin m, P \notin \text{int}\angle QOQ'$

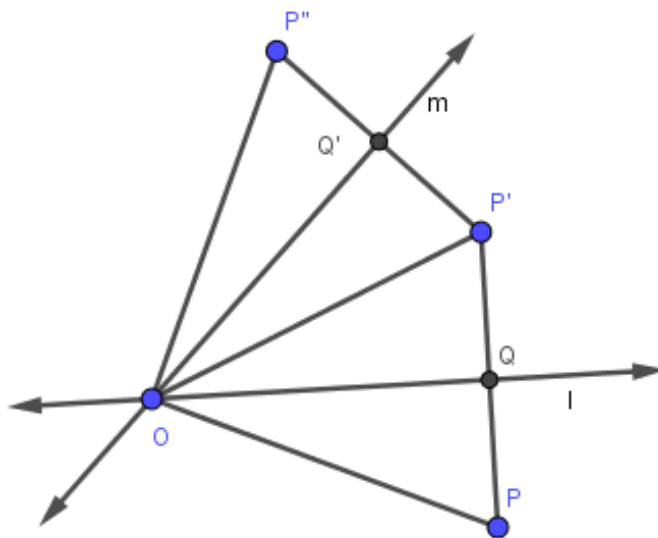
Caso 2: $P \notin l, P \notin m, P \in \text{int}\angle QOQ'$

Caso 3: $P \in l$

Caso 4: $P \in m$

Demostración Caso 1

Figura 5 Representación gráfica caso 1 Teorema 1



Nota. Elaboración propia

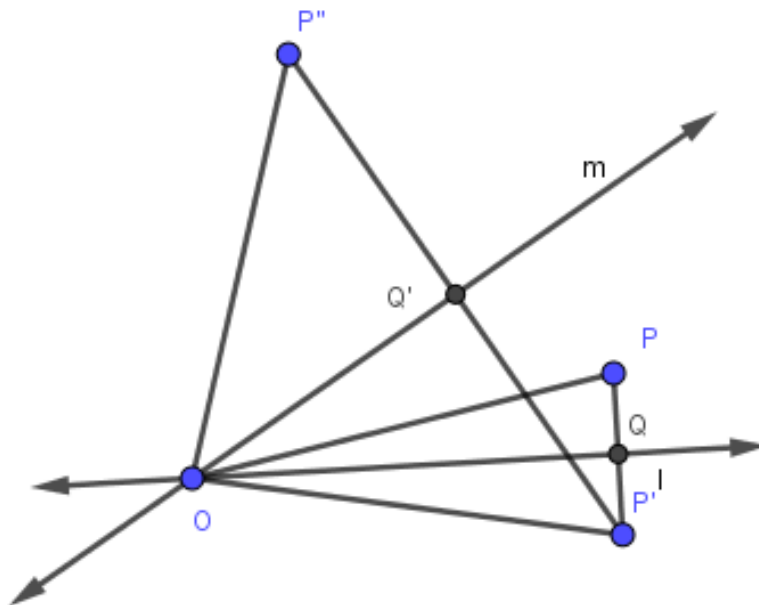
No.	Afirmación	Garantía
1.	Sea l y m dos rectas que se intersecan en el punto O	Dado
2.	P' es la imagen correspondida por reflexión de P sobre la recta l	Dado
3.	P'' es la imagen correspondida por reflexión de P' sobre la recta m	Dado
4.	l es mediatriz de $\overline{PP'}$	D. Reflexión (2)
5.	m es mediatriz de $\overline{P'P''}$	D. Reflexión (3)
6.	Sea Q la intersección de $\overline{PP'}$ y l $P'Q = PQ$ $\overline{PP'} \perp \overline{OQ}$	T. Mediatriz (4.1)
7.	Sea Q' la intersección de $\overline{P'P''}$ y m $P'Q' = P''Q'$ $\overline{P'P''} \perp \overline{OQ'}$	T. Mediatriz (5.1)
8.	$m\angle PQO = 90^\circ$ $m\angle P'QO = 90^\circ$	D. Rectas perpendiculares D. Angulo recto (6)
9.	$m\angle P'Q'O = 90^\circ$ $m\angle P''Q'O = 90^\circ$	D. Rectas perpendiculares D. Angulo recto (7)
10.	$\angle PQO \cong \angle P'QO$ $\angle P'Q'O \cong \angle P''Q'O$	D. Ángulos congruentes (8.9)
11.	$OQ = OQ$ $OQ' = OQ'$	Prop. Reflexiva
12.	$\Delta PQO \cong \Delta P'QO$ $\Delta P'Q'O \cong \Delta P''Q'O$	P. LAL (7.10.11)
13.	$Q \in \text{int}\angle POP'$	Hipótesis gráfica

	$P' \in \text{int}\angle POP'$ $Q' \in \text{int}\angle POP'$	
14.	$m\angle QOP' = m\angle POQ$ $m\angle P'OQ' = m\angle Q'OP''$	D. Triángulos congruentes D. Ángulos Congruentes (12)
15.	$OP = OP'$ $OP' = OP''$	D. Triángulos congruentes D. Ángulos congruentes (12)
16.	$m\angle POP' = m\angle POQ + m\angle QOP' + m\angle P'OQ' + m\angle Q'OP''$	P. Adición de medida de ángulos (13)
17.	$P' \in \text{int}\angle QOQ'$	Hipótesis gráfica
18.	$\text{Sea } \angle QOQ'$	D. Ángulo (6)
19.	$m\angle QOQ' = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}^+, 0 < \alpha < 180$	P. Ángulo-número (18)
20.	$m\angle QOQ' = m\angle QOP' + m\angle P'OQ'$	P. Adición de medida de ángulos (17)
21.	$\alpha = m\angle QOP' + m\angle P'OQ'$	Prop. Transitiva (19.20)
22.	$\alpha = m\angle POQ + m\angle Q'OP''$	Prop. Transitiva (14.21)
23.	$m\angle POP'' = \alpha + \alpha$	Prop. Transitiva (16.22)
24.	$m\angle POP'' = 2\alpha$	Prop. Reales (23)
25.	$OP = OP''$	Prop. Transitiva (15)

26.	P'' es la imagen correspondida por rotación de P	D. Rotación (24.25)
-----	--	------------------------

Demostración Caso 2

Figura 6 Representación gráfica caso 2 Teorema 1



Nota. Elaboración propia

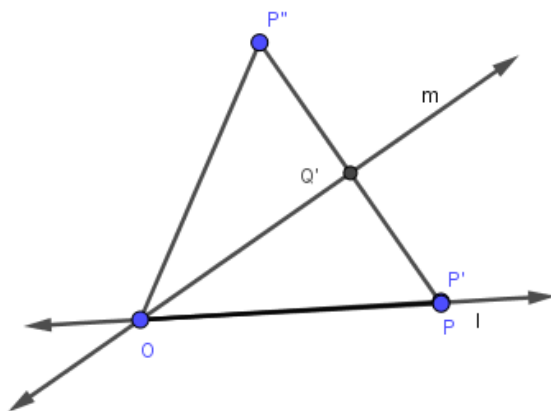
Nº	Afirmación	Garantía
1.	Sea l y m dos rectas que se intersecan en el punto O	Dado
2.	P' es la imagen correspondida por reflexión de P sobre la recta l	Dado
3.	P'' es la imagen correspondida por reflexión de P' sobre la recta m	Dado
4.	l es mediatriz de $\overline{PP'}$	D. Reflexión (2)
5.	m es mediatriz de $\overline{P'P''}$	D. Reflexión (3)
6.	Sea Q la intersección de $\overline{PP'}$ y l $P'Q = PQ$ $\overline{PP'} \perp \overline{OQ}$	T. Mediatriz (4.1)

7.	<p>Sea Q' la intersección de $\overline{P'P''}$ y m</p> $P'Q' = P''Q'$ $\overline{P'P''} \perp \overleftrightarrow{OQ'}$	T. Mediatriz (5.1)
8.	$m\angle PQO = 90^\circ$ $m\angle P'QO = 90^\circ$	D. Rectas perpendiculares D. Angulo recto (6)
9.	$m\angle P'Q'O = 90^\circ$ $m\angle P''Q'O = 90^\circ$	D. Rectas perpendiculares D. Angulo recto (7)
10.	$\angle PQO \cong \angle P'QO$ $\angle P'Q'O \cong \angle P''Q'O$	D. Ángulos congruentes (8.9.10)
11.	$OQ = OQ$ $OQ' = OQ'$	Prop. Reflexiva
12.	$\Delta PQO \cong \Delta P'QO$ $\Delta P'Q'O \cong \Delta P''Q'O$	P. LAL (6.7.11.12)
13.	Sea $\angle QOQ'$	D. Ángulo (6)
14.	$m\angle QOQ' = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}^+, 0 < \alpha < 180$	P. Ángulo-número (13)
15.	$P \in \text{int}\angle QOQ'$	Hipótesis gráfica
16.	$m\angle QOQ' = m\angle QOP + m\angle POQ'$	P. Adición de medida de ángulos (15)
17.	$\alpha = m\angle QOP + m\angle POQ'$	P. Transitiva (14.16)
18.	$Q \in \text{int}\angle POP''$	Hipótesis gráfica
19.	$m\angle POP'' = m\angle POQ' + m\angle QOP''$	P. Adición de medida de ángulos (18)

20.	$\angle QOP'' \cong P'OQ'$	D. Triángulos congruentes D. Ángulos congruentes (12)
21.	$\angle P'OQ \cong QOP$	D. Triángulos congruentes D. Ángulos congruentes (12)
22.	$OP = OP''$	D. Triángulos congruentes
23.	$m\angle POP'' = m\angle POQ' + m\angle P'OQ'$	P. Transitiva (19.21)
24.	$Q \in \text{int}\angle P'OQ'$ $P \in \text{int}\angle P'OQ'$	Hipótesis gráfica
25.	$m\angle P'OQ' = m\angle P'OQ + m\angle QOP + m\angle POQ'$	P. Adición de medida de ángulos (24)
26.	$m\angle POP'' = m\angle POQ' + m\angle P'OQ + m\angle QOP + m\angle POQ'$	P. Transitiva (23.25)
27.	$m\angle POP'' = m\angle POQ' + m\angle QOP + m\angle QOP + m\angle POQ'$	P. Transitiva (21.26)
28.	$m\angle POP'' = \alpha + \alpha$	P. Transitiva (17.27)
29.	$m\angle POP'' = 2\alpha$	P. Reales (28)
30.	P'' es la imagen correspondida por rotación de P	D. Rotación (22.29)

Demostración Caso 3

Figura 7 Representación gráfica caso 3 Teorema 1



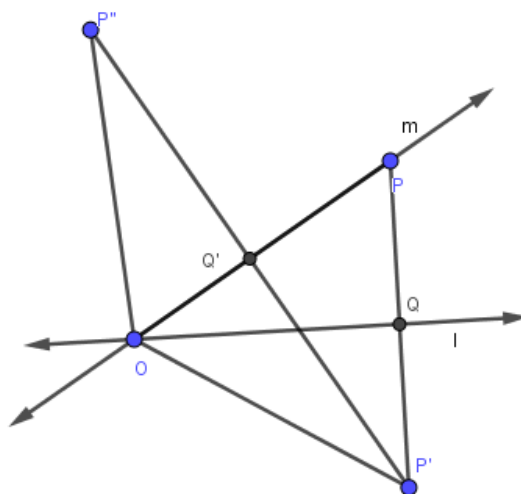
Nota. Elaboración propia

Nº	Afirmación	Garantía
1.	Sea l y m dos rectas que se intersecan en el punto O	Dado
2.	$P \in l$	Caso
3.	P' es la imagen correspondida por reflexión de P sobre la recta l	Dado
4.	P'' es la imagen correspondida por reflexión de P' sobre la recta m	Dado
5.	$P' = P$	D. Reflexión (2.3)
6.	m es mediatriz de $\overline{P'P''}$	D. Reflexión (4)
7.	Sea Q' la intersección de $\overline{P'P''}$ y m $P'Q' = P''Q'$ $\overline{P'P''} \perp \overrightarrow{OQ'}$	T. Mediatriz (4.1)
8.	$m\angle P'Q'O = 90^\circ$ $m\angle P''Q'O = 90^\circ$	D. Rectas perpendiculares D. Angulo recto (7)
9.	$m\angle P'OQ' = m\angle Q'OP''$	P. Transitiva (8)

10.	$OQ = OQ'$	Prop. Reflexiva
11.	$\Delta P'OQ' \cong \Delta Q'OP''$	P. LAL (7.9.10)
12.	$OP' = OP''$	D. Triángulos congruentes (11)
13.	$OP = OP''$	P. Transitiva (5.12)
14.	$m\angle P'OQ' = m\angle Q'OP''$	D. Triángulos congruentes D. Ángulos congruentes (11)
15.	$m\angle POQ' = m\angle Q'OP''$	P. Transitiva (5.15)
16.	$m\angle POQ' = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}^+, 0 < \alpha < 180$	P. Ángulo-número (15)
17.	$Q' \in \text{int}\angle POP''$	Hipótesis gráfica
18.	$m\angle POP'' = m\angle POQ' + m\angle Q'OP''$	P. Adición medida de ángulos (17)
19.	$m\angle POP'' = m\angle POQ' + m\angle POQ'$	P. Transitiva (15.18)
20.	$m\angle POP'' = \alpha + \alpha$	P. Transitiva (16.19)
21.	$m\angle POP'' = 2\alpha$	P. Reales (20)
22.	P'' es la imagen correspondida por rotación de P	D. Rotación (13.21)

Demostración Caso 4

Figura Representación gráfica caso 4 Teorema 1



Nota. Elaboración propia

N°	Afirmación	Garantía
1.	Sea l y m dos rectas que se intersecan en el punto O	Dado
2.	P' es la imagen correspondida por reflexión de P sobre la recta l	Dado
3.	P'' es la imagen correspondida por reflexión de P' sobre la recta m	Dado
4.	l es mediatriz de $\overline{PP'}$	D. Reflexión (2)
5.	m es mediatriz de $\overline{P'P''}$	D. Reflexión (3)
6.	Sea Q la intersección de $\overline{PP'}$ y l $P'Q = PQ$ $\overline{PP'} \perp \overline{OQ}$	T. Mediatriz (1.4)
7.	Sea Q' la intersección de $\overline{P'P''}$ y m $P'Q' = P''Q'$ $\overline{P'P''} \perp \overline{OQ'}$	T. Mediatriz (1.5)
8.	$m\angle PQO = 90^\circ$ $m\angle P'QO = 90^\circ$	D. Rectas perpendiculares D. Ángulo recto (7)
9.	$m\angle P'Q'O = 90^\circ$ $m\angle P''Q'O = 90^\circ$	D. Rectas perpendiculares D. Angulo recto (7)
10.	$\angle PQO \cong \angle P'QO$ $\angle P'Q'O \cong \angle P''Q'O$	D. Ángulos congruentes (8.9)
11.	$OQ = OQ$ $OQ' = OQ'$	Prop. Reflexiva
12.	$\Delta PQO \cong \Delta P'QO$ $\Delta P'Q'O \cong \Delta P''Q'O$	P. LAL (6.7.10.11)
13.	$m\angle Q'OP'' = m\angle P'OQ'$ $m\angle P'OQ = m\angle QOP$	D. Triángulos Congruentes

		D. Ángulos Congruentes (12)
14.	Sea $\angle QOQ'$	Def. ángulo (6)
15.	$m\angle QOQ' = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}^+, 0 < \alpha < 180$	P. Ángulo-número (14)
16.	$\angle QOQ' = \angle QOP$	$P \in m$
17.	$Q \in \text{int}\angle P'OQ'$	Hipótesis gráfica
18.	$m\angle P'OQ' = m\angle P'OQ + m\angle QOP$	P. Adición medida de ángulos (17)
19.	$m\angle P'OQ' = m\angle QOP + m\angle QOP$	P. Transitiva (13.18)
20.	$m\angle P'OQ' = \alpha + \alpha$	P. Transitiva (15.19)
21.	$m\angle P'OQ' = 2\alpha$	P. Reales (20)
22.	$m\angle POP'' = 2\alpha$	P. Transitiva (10.13)
23.	P'' es la imagen correspondida por rotación de P	D. Rotación (22)

Teorema Reflexión-Traslación

Sea l y m dos rectas paralelas y la figura geométrica punto P . P' es la imagen correspondida por reflexión de P sobre la recta l y P'' es la imagen correspondida por reflexión de P' sobre la recta m , entonces P'' es la imagen correspondida por traslación de P y $P'P'' = 2(d(l, m))$

Demostración

Esta demostración tiene los siguientes casos:

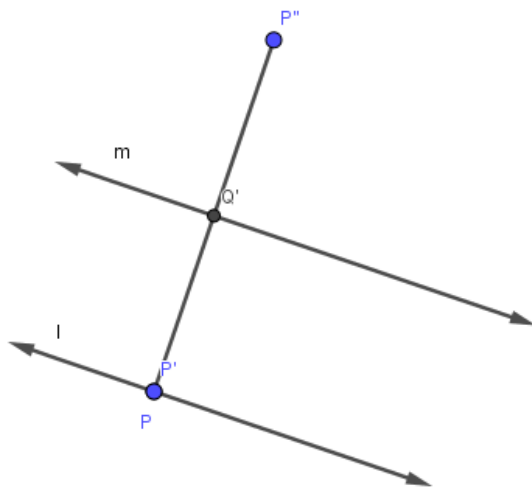
Caso 1: $P \in l$

Caso 2: $P \in m$

Caso 3: $P \notin m, P \notin l$. (este caso presenta tres casos más, y se evidenciarán en el transcurso de la demostración. La representación gráfica de estos se muestra al finalizar la demostración)

Demostración Caso 1

Figura 8 Representación gráfica caso 1 Teorema 2



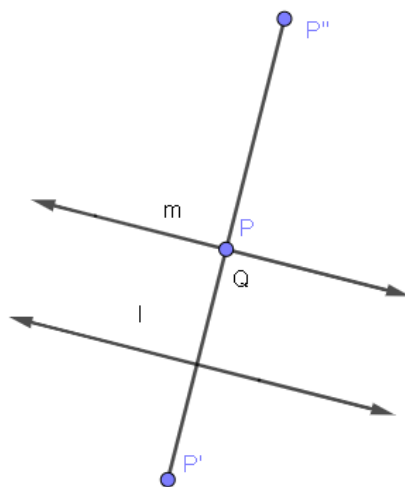
Nota. Elaboración propia

Nº	Afirmación	Garantía
1.	Sea $l \parallel m$	Dado
2.	$P \in l$	Caso
3.	P' es la imagen correspondida por reflexión de P sobre la recta l	Dado
4.	P'' es la imagen correspondida por reflexión de P' sobre la recta m	Dado
5.	$P' = P$	D. Reflexión (2.3)
6.	m es mediatriz de $\overline{P'P''}$	D. Reflexión (4)
7.	Sea Q' la intersección de $\overline{P'P''}$ y m $P'Q' = P''Q'$ $\overline{P'P''} \perp \overline{P'Q'}$	T. Mediatriz (4)
8.	$d(l, m) = PQ'$	D. Distancia entre dos rectas paralelas (7)

9.	Q' es punto medio de $\overline{P'P''}$	D. Mediatriz D. Equidistancia (6.7)
10.	$P' - Q' - P''$ $P'' - Q' - P'$	D. punto medio (1. 9)
11.	P', Q', P'' son colineales $P'Q' + Q'P'' = P'P''$	D. Interestancia (10)
12.	$P'Q' + Q'P' = P'P''$	P. Transitiva (7.11)
13.	$PQ' + PQ' = P'P''$	P. Transitiva (5.12)
14.	$2PQ' = P'P''$	P. Reales (13)
15.	$2(d(l, m)) = P'P''$	P. Transitiva (8.14)
16.	P, Q', P'' son colineales	P. Transitiva (5.11)
17.	P y P' pertenecen a la misma recta	D. Colinealidad (16)
18.	$\exists \overline{PP''}$	D. Vector (15.17)
19.	P'' es la imagen correspondida por traslación de P	D. Traslación (18)

Demostración Caso 2

Figura 9 Representación gráfica caso 2 Teorema 2



Nota. Elaboración propia

Nº	Afirmación	Garantía
1.	Sea $l \parallel m$ $P \in m$	Dado
2.	P' es la imagen correspondida por reflexión de P sobre la recta l	Dado
3.	P'' es la imagen correspondida por reflexión de P' sobre la recta m	Dado
4.	l es mediatriz de $\overline{PP'}$	D. Reflexión (2)
5.	m es mediatriz de $\overline{P'P''}$	D. Reflexión (3)
6.	Sea Q la intersección de $\overline{PP'}$ y l $P'Q = PQ$ $\overline{PP'} \perp \overline{OQ}$	T. Mediatriz (4)
7.	Sea Q' la intersección de $\overline{P'P''}$ y m $P'Q' = P''Q'$ $\overline{P'P''} \perp \overline{OQ'}$	T. Mediatriz (5)

8.	$d(l, m) = QQ'$	D. Distancia entre dos rectas paralelas (7)
9.	Q es punto medio de $\overline{PP'}$	D. Mediatriz
10.	Q' es punto medio de $\overline{P'P''}$	D. Equidistancia (4.5.6.7)
11.	$P = Q'$	D. Reflexión (1.3)
12.	$P - Q - P'$	D. Punto medio
13.	$P' - Q' - P''$	(1.9.10)
14.	$P' - P - P''$	P. Transitiva (11.13)
15.	P, P', P'' son colineales	D. Interestancia (14)
16.	P' es punto medio de $\overline{P'P''}$	P. Transitiva (10.11)
17.	$PP' = PP''$	D. Punto medio (16)
18.	$PQ + QP' = PP'$	D. Interestancia (12)
19.	$PQ + QP' = PP''$	P. Transitiva (17.18)
20.	$QP' + QP' = PP''$	P. Transitiva (6.19)
21.	$2QP' = PP''$	P. Reales (20)
22.	$2QQ' = PP''$	P. Transitiva (11.21)
23.	$2(d(l, m)) = P'P''$	P. Transitiva (8.22)
24.	P y P' pertenecen a la misma recta	D. Colinealidad (15)
25.	$\exists \overrightarrow{PP''}$	D. Vector (23.24)
26.	P'' es la imagen correspondida por traslación de P	D. Traslación (25)

Demostración Caso 3:

Nº	Afirmación	Garantía
1.	Sea $l \parallel m$	Dado
2.	P' es la imagen correspondida por reflexión de P sobre la recta l	Dado
3.	P'' es la imagen correspondida por reflexión de P' sobre la recta m	Dado
4.	l es mediatriz de $\overline{PP'}$	D. Reflexión (2)
5.	m es mediatriz de $\overline{P'P''}$	D. Reflexión (3)
6.	Sea Q la intersección de $\overline{PP'}$ y l $P'Q = PQ$ $\overline{PP'} \perp \overline{OQ}$	T. Mediatriz (4)
7.	Sea Q' la intersección de $\overline{P'P''}$ y m $P'Q' = P''Q'$ $\overline{P'P''} \perp \overline{OQ'}$	T. Mediatriz (5)
8.	$d(l, m) = QQ'$	D. Distancia entre dos rectas paralelas (7)
9.	Q es punto medio de $\overline{PP'}$	D. Mediatriz
10.	Q' es punto medio de $\overline{P'P''}$	D. Equidistancia (4.5.6.7)
11.	Caso A: $P - Q - P' \wedge P' - Q' - P''$ Caso B: $P' - Q - P \wedge P' - Q' - P''$ Caso C: $P - Q - P' \wedge P'' - Q' - P'$	D. Punto medio (1.9.10) Casos
12.	$P - Q - P' \wedge P' - Q' - P''$	Caso A (11)
13.	$Q - P' - Q'$	P. Transitiva (12)
14.	$P - Q - P' - Q' - P''$	
15.	$QP' + P'Q' = QQ'$	D. Interestancia
16.	P y P' son colineales	(13.14)

	$PQ + QP' + P'Q' + Q'P'' = PP''$	
17.	$QP' + QP' + P'Q' + Q'P' = PP''$	P. Transitiva (6.7.16)
18.	$QQ' + QQ' = PP''$	P. Transitiva (15.17)
19.	$2QQ' = PP''$	P. Reales (19)
20.	$2(d(l, m)) = P'P''$	P. Transitiva (8.20)
21.	P y P' pertenecen a la misma recta	D. Colinealidad (17)
22.	$\exists \overrightarrow{PP''}$	D. Vector (21.22)
23.	P'' es la imagen correspondida por traslación de P	D. Traslación (23)
24.	$P' - Q - P \wedge P' - Q' - P''$	Caso B (11)
25.	$Q - P - Q'$	P. Transitiva (25)
26.	$P' - Q - P - Q'$	
27.	P y P'' son colineales $P - Q' - P''$	
28.	P y P'' son colineales $QP + PQ' = QQ'$	D. Interestancia (26.27.28)
29.	$P'Q + QP + PQ' = P'Q'$	
30.	$PQ' + Q'P'' = PP''$	
31.	$PQ' + Q'P' = PP''$	P. Transitiva (7.29)
32.	$PQ' + P'Q + QP + PQ' = PP''$	P. Transitiva (30.32)
33.	$PQ' + PQ + QP + PQ' = PP''$	P. Transitiva (6.33)
34.	$QQ' + QQ' = PP''$	P. Transitiva (29.34)
35.	$2QQ' = PP''$	P. Reales (35)
36.	$2(d(l, m)) = P'P''$	P. Transitiva (8.36)
37.	P y P' pertenecen a la misma recta	D. Colinealidad (28)
38.	$\exists \overrightarrow{PP''}$	D. Vector (37.38)
39.	P'' es la imagen correspondida por traslación de P	D. Traslación (39)
40.	$P - Q - P' \wedge P'' - Q' - P'$	Caso C (11)

41.	$Q - P'' - Q'$	P. Transitiva (40)
42.	$P - Q - P''$	
43.	$P' - Q' - P'' - Q$	
44.	$QQ' = QP'' + P''Q'$	D. Interestancia (41.42.43)
45.	P y P'' son colineales $PP'' = PQ + QP''$	
46.	$P'Q = QP'' + P''Q' + Q'P'$	
47.	$PP'' = P'Q + QP''$	P. Transitiva (6.45)
48.	$PP'' = QP'' + P''Q' + Q'P' + QP''$	P. Transitiva (46.47)
49.	$PP'' = QP'' + P''Q' + Q'P'' + QP''$	P. Transitiva (7.48)
50.	$PP'' = QQ' + QQ'$	P. Transitiva (44.49)
51.	$PP'' = 2QQ'$	P. Reales (50)
52.	$2(d(l, m)) = P'P''$	P. Transitiva (8.51)
53.	P y P' pertenecen a la misma recta	D. Colinealidad (45)
54.	$\exists \overrightarrow{PP''}$	D. Vector (52.53)
55.	P'' es la imagen correspondida por traslación de P	D. Traslación (54)

A continuación, se muestran las representaciones gráficas de los casos A, B y C

Figura 10 Representación gráfica caso A

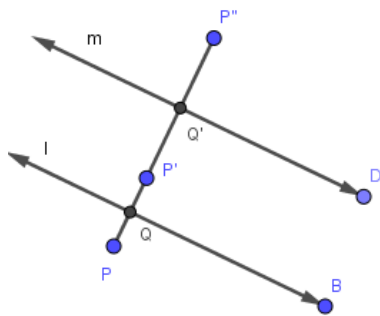


Figura 11 Representación gráfica caso B

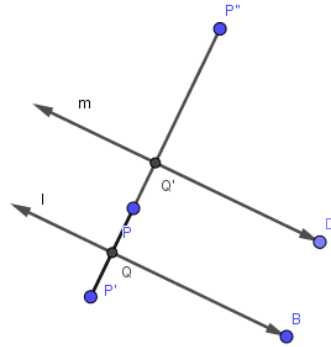
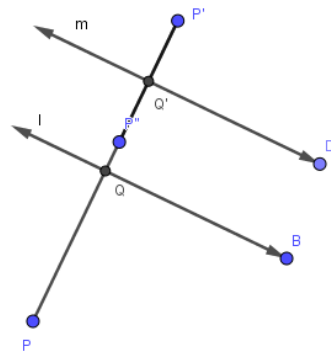


Figura 12 Representación gráfica caso C



Teorema Homotecia 1

Sea el punto O y la figura geométrica punto P . P' es la imagen homotética con razón k_1 y centro O de P , P'' es la imagen homotética con razón k_2 y centro O de P' . Si $k_1 k_2 = 1$, entonces P'' es la imagen de P por traslación.

Nº	Afirmación	Garantía
1.	P' es la imagen homotética con razón k_1 y centro O de P	Dado
2.	P'' es la imagen homotética con razón k_2 y centro O de P'	Dado
3.	$k_1 k_2 = 1$	Dado
4.	$\overrightarrow{OP'} = k_1 \overrightarrow{OP}$	D. Homotecia (1)
5.	$\overrightarrow{OP''} = k_2 \overrightarrow{OP'}$	D. Homotecia (2)
6.	$\overrightarrow{OP''} = k_2 k_1 \overrightarrow{OP}$	P. Sustitución (4,5)
7.	$\overrightarrow{OP''} = \overrightarrow{OP}$	P. Sustitución (3,6)
8.	$P = P'$	D. Conjuntos iguales (7)
9.	$\overrightarrow{PP'}$ es un vector nulo	D. Vector nulo (7,8)
10.	P'' es la imagen de P por traslación	D. Traslación (9)

Teorema Homotecia 2

Sea el punto O y la figura geométrica punto P . P' es la imagen homotética con razón k_1 y centro O de P , P'' es la imagen homotética con razón k_2 y centro O de P' . Si $k_1 k_2 \neq 1$, entonces P'' es la imagen homotética de P .

N°	Afirmación	Garantía
1.	P' es la imagen homotética con razón k_1 y centro O de P	Dado
2.	P'' es la imagen homotética con razón k_2 y centro O de P'	Dado
3.	$k_1 k_2 \neq 1$	Dado
4.	$\overrightarrow{OP'} = k_1 \overrightarrow{OP}$	D. Homotecia (1)
5.	$\overrightarrow{OP''} = k_2 \overrightarrow{OP'}$	D. Homotecia (2)
6.	$\overrightarrow{OP''} = k_2 k_1 \overrightarrow{OP}$	P. Sustitución (4.5)
7.	$k_1 k_2 = k_3$ $k_3 \neq 1$	P. Reales
8.	$\overrightarrow{OP''} = k_3 \overrightarrow{OP}$	P. Sustitución (6.7)
9.	P'' es la imagen homotética de P .	D. Homotecia (8)

Desarrollo

Elaboración de tareas

Para esta investigación elaboré e implementé una serie de tareas sobre las transformaciones geométricas. Estas fueron desarrolladas por 10 estudiantes de la LM de la UPN, de los cuales cinco cursaban por primera vez el espacio de Elementos de Geometría y habían culminado su educación escolar en los últimos dos años. Según los documentos curriculares nacionales e internacionales, sí se enseñan las transformaciones geométricas en el colegio, por lo que dichos estudiantes tuvieron mayor probabilidad de recordar lo estudiado en su etapa escolar. Los otros cinco estudiantes fueron aquellos que ya cursaron todos los espacios académicos obligatorios de la Línea de Geometría. Es importante señalar que la participación de los estudiantes fue voluntaria, ya que ellos decidieron involucrarse de manera autónoma en el desarrollo de las tareas.

Para la elaboración de las tareas tuve en cuenta lo leído en los documentos curriculares nacionales e internacionales y los documentos mencionados en los antecedentes. En ellos se menciona que a medida que se va estudiando las transformaciones geométricas deben desarrollarse nuevas competencias, por lo que propuse las siguientes tareas, su objetivo principal y su justificación.

Tarea 1: Los estudiantes interpretan qué es una transformación geométrica y cuáles transformaciones existen.

En esta tarea se debe tener en cuenta ideas que tienen los estudiantes sobre las transformaciones geométricas, antes de profundizar sobre este contenido.

Tarea 2: Los estudiantes identifican las transformaciones geométricas visualmente.

Los teselados son una herramienta pertinente para desarrollar habilidades de visualización mediante el estudio de las transformaciones geométricas. Por esta razón al diseñar esta tarea, es fundamental indagar si el estudiante logra identificar cada transformación por su nombre. No obstante, más allá del reconocimiento nominal es igualmente importante cuestionar cómo percibe o describe dicha transformación visualmente, ya que puede suceder que un estudiante

comprenda el efecto de una rotación, por ejemplo, pero no sepa que se trata de una transformación geométrica.

Tarea 3: Los estudiantes definen y reconocen algunas propiedades de las transformaciones geométricas.

Teniendo en cuenta este objetivo, en la tarea 3 se pregunta explícitamente sobre qué es cada transformación y su representación con cada invariante.

Tarea 4: Los estudiantes reconocen algunos teoremas sobre composición de transformaciones.

La elección de los teoremas propuestos para la elaboración, implementación y evaluación de las tareas se fundamentan en que dichos teoremas establecen relaciones entre diferentes transformaciones geométricas. Este aspecto no solo es coherente con la idea fundamental de que las matemáticas deben construirse a partir de conexiones entre conceptos, sino también permite ampliar y/o profundizar el conocimiento que los estudiantes desarrollan sobre las transformaciones geométricas, al comprender cómo interactúan entre sí.

Si bien, los enunciados de los teoremas seleccionados no son los mismos que están en el marco conceptual, considero que facilitan su comprensión, principalmente a los estudiantes de primer semestre. Además, estos teoremas pueden ser explorados mediante el uso de geometría dinámica, lo cual permite una representación visual que podría contribuir significativamente a la comprensión del trasfondo matemático por parte del estudiante. Igualmente, las preguntas asociadas a la tarea 4 están formuladas con el propósito de incentivar en los estudiantes un proceso de conjeturación y argumentación.

Además, en la

Tabla 8 menciona cómo cada tarea se relaciona con algunos de los conocimientos que deberían tener los FEM sobre las transformaciones geométricas según los documentos curriculares.

Tabla 8 Relación entre las tareas y los conocimientos que debería tener un FEM

Tarea	Conocimiento	Explicación
Tarea 1	Conocimientos conceptuales	Se pregunta sobre que ¿Qué son las transformaciones geométricas?, y, ¿cuáles son las transformaciones geométricas que conoce
	Conocimiento acerca de los procesos generales (comunicación)	Los estudiantes “expresan ideas hablando, escribiendo, demostrando y describiendo visualmente” (Ministerio de Educación Nacional, 1998, p.74)
Tarea 2	Conocimientos acerca de competencias y habilidades que se desarrollan en el aula (visualización y argumentación)	Los estudiantes identifican visualmente las transformaciones geométricas en un teselado y deben justificar como hallaron cada una.
	Conocimiento acerca de los procesos generales (razonamiento y comunicación)	Razonamiento: Ya que el estudiante “Justifica las estrategias y los procedimientos puestos en acción en el tratamiento de problemas” (Ministerio de Educación Nacional, 1998, p.54) Comunicación: Los estudiantes “expresan ideas hablando, escribiendo, demostrando y describiendo visualmente de diferentes formas” (Ministerio de Educación Nacional, 1998, p.74)
Tarea 3	Conocimientos conceptuales.	Debido a que los estudiantes expresan qué es cada transformación geométrica.
	Conocimiento acerca de los procesos generales (modelación y comunicación)	Modelación: Los estudiantes a partir de la realización de representaciones de las transformaciones geométrica “descubren relaciones y descubren regularidades”

		(Ministerio de Educación Nacional, 1998, p.77) Comunicación: Los estudiantes “expresan ideas hablando, escribiendo, demostrando y describiendo visualmente de diferentes formas” (Ministerio de Educación Nacional, 1998, p.74)
Tarea 4	Conocimientos acerca de competencias y habilidades que se desarrollan en el aula (Conjeturación y argumentación)	Los estudiantes realizan una conjetura sobre lo que hallan y argumentar dicha conjetura.
	Conocimiento acerca de los procesos generales (Comunicación y razonamiento)	Razonamiento: Ya que el estudiante “Justifica las estrategias y los procedimientos puestos en acción en el tratamiento de problemas” (Ministerio de Educación Nacional, 1998, p.54) Comunicación: Los estudiantes “expresan ideas hablando, escribiendo, demostrando y describiendo visualmente de diferentes formas” (Ministerio de Educación Nacional, 1998, p.74)
	Conocimientos sobre recursos.	Manejo de geometría dinámica

Nota. Elaboración propia

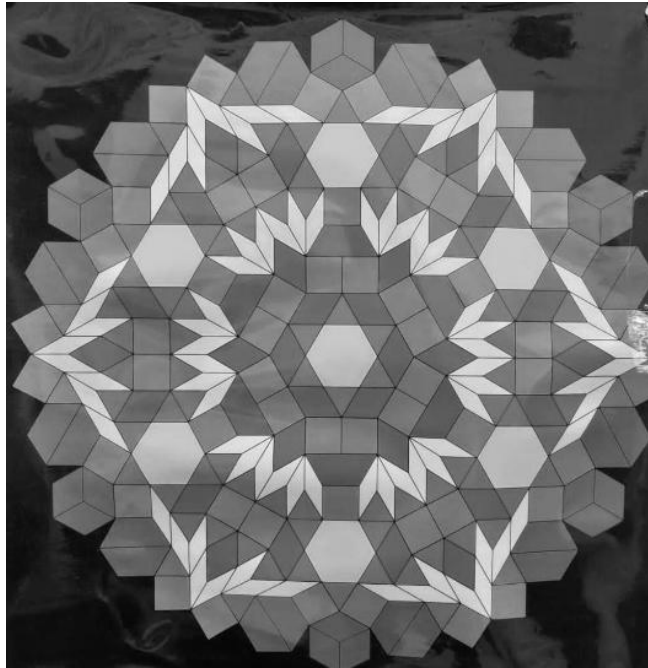
A continuación, se muestra las tareas planeadas.

Tarea 1

Responde: ¿Qué son las transformaciones geométricas?, y, ¿cuáles son las transformaciones geométricas que conoces?

Tarea 2

Observa el siguiente teselado y responde:

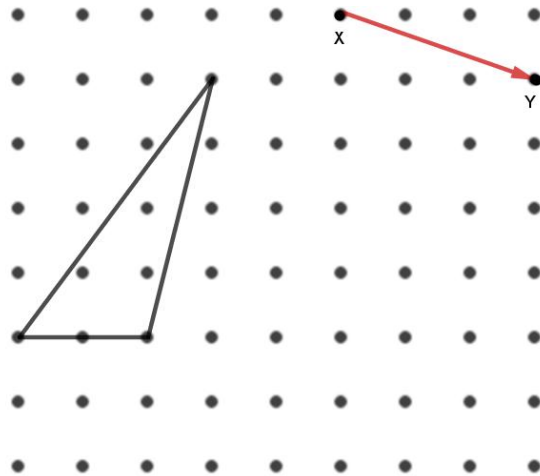


- ¿Identificas una traslación? ¿Cómo la identificaste? Si es así, señala con rojo las figuras que se corresponden por traslación.
- ¿Identificas una rotación? ¿Cómo la identificaste? Si es así, señala con amarillo las figuras que se corresponden por rotación.
- ¿Identificas una reflexión? ¿Cómo la identificaste? Si es así, señala con azul las figuras que se corresponden por reflexión.
- ¿Identificas una homotecia? ¿Cómo la identificaste? Si es así, señala con verde las figuras que se corresponden por homotecia.

Tarea 3

Traslación

1. Explica ¿Qué es una traslación?
2. Dada la siguiente figura. Dibuja su imagen trasladada con el segmento dirigido XY

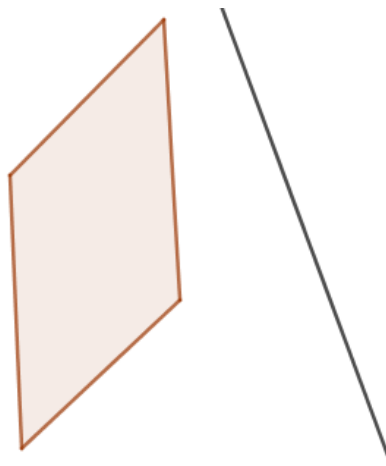


Rotación

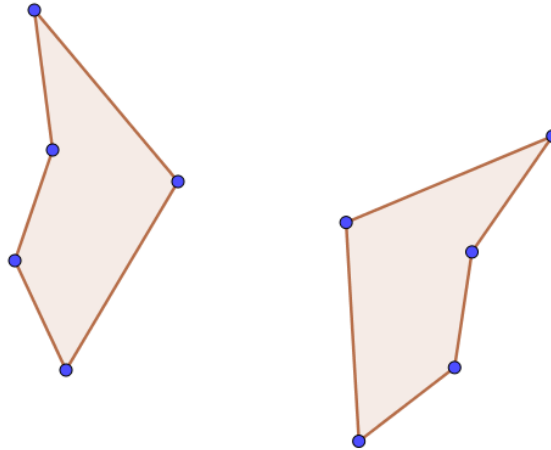
1. Explica ¿Qué es una rotación?
2. Dibuja un ΔABC y un punto O en una hoja de papel. Con un transportador y un compás, dibuja la imagen de ΔABC en una rotación de 50° en la dirección de las manecillas del reloj.

Reflexión

1. Explica ¿Qué es una reflexión?
2. Dibuja la imagen reflejada de la siguiente figura dada, sobre la recta l



3. Encuentra el eje de simetría de la siguiente reflexión



Homotecia

1. Explica ¿Qué es una homotecia?
2. Dibuja un cuadrilátero $ABCD$ y un punto O que no pertenezca al cuadrilátero ni a su interior. Con una regla, dibuja la imagen del cuadrilátero $ABCD$, cuya razón es de 3cm.

Tarea 4

Reflexión-Traslación

GeoGebra

1. Abre GeoGebra.
2. Con la opción “polígono” construye un cuadrilátero. Dicho cuadrilátero lo nombrarás z .
3. Traza dos rectas, r y s paralelas con la opción “paralela.”
4. Con la opción “simetría axial” obtén la imagen del cuadrilátero que se corresponda por reflexión, cuyo eje de simetría es la recta r . Para esto selecciona primero el polígono z y después la recta r . (El cuadrilátero resultante lo nombras w).
5. Con la opción “simetría axial” obtén la imagen del cuadrilátero w que se corresponda por reflexión, cuyo eje de simetría es la recta s . Para esto selecciona primero el polígono w y después la recta s . (Este polígono lo nombras b).
6. ¿Qué relación tienen los polígonos z y b ?
7. Realiza una conjetura sobre lo que hallaste. ¿Por qué crees que pasa esto?

Reflexión- Rotación

GeoGebra

1. Abre GeoGebra.
2. Con la opción “polígono” construye un cuadrilátero. (Llámalo z).
3. Traza dos rectas, r y s tal que estas se corten en un punto.
4. Con la opción “simetría axial” obtén la imagen del cuadrilátero que se corresponden por reflexión, cuyo eje de simetría es la recta r . Para esto selecciona primero el polígono z y después la recta r . (el cuadrilátero resultante lo nombras w).
5. Con la opción “simetría axial” obtén la imagen del cuadrilátero w que se corresponden por reflexión, cuyo eje de simetría es la recta s . Para esto selecciona primero el polígono w y después la recta s . (este polígono lo nombras b).
6. ¿Qué relación tienen los polígonos z y b ?
7. Realiza una conjetura sobre lo que hallaste ¿Por qué crees que pasa esto?

Homotecia

GeoGebra

1. Abre GeoGebra.
2. Selecciona dos puntos que tengan coordenadas diferentes (A y B).
3. Con la opción “polígono” traza un triángulo.
4. Con la opción “Homotecia” obtén la imagen del triángulo que se corresponden por homotecia cuyo centro es A y $k_1 = 2$ el triángulo resultante lo nombraremos w .
5. Con la opción “Homotecia” obtén la imagen del triángulo w que se corresponden por homotecia cuyo centro es B y k_2 lo escogerás a tu gusto.
6. ¿Qué pasa si el producto de ambas razones ($k_1 k_2$) es igual a 1?
7. ¿Qué pasa si el producto de las ambas razones ($k_1 k_2$) es diferente de 1?
8. Realiza una conjetura sobre tus hallazgos.
9. ¿Por qué crees que pasa esto?

Para el análisis de las respuestas dadas por los estudiantes a las tareas propuestas se propone una rúbrica en la cual se establecen unos criterios de evaluación cualitativos, teniendo en cuenta el fundamento matemático establecido en el marco conceptual. Estos criterios se establecen tomando como punto de partida el objetivo de cada tarea. A continuación, se evidencia dicha rúbrica.

Tabla 9 Rubrica de evaluación

TAREA 1			
Criterio	Nivel 0	Nivel 1	Nivel 2
1. Comprensión conceptual de las transformaciones geométricas.	Confunde el concepto, da una explicación incorrecta o no responde esta parte.	Propone una definición incompleta o poco clara (redundante).	Propone una definición completa sobre transformaciones geométricas (movimiento o correspondencia).
2. Reconocimiento del tipo de transformaciones geométricas.	No reconoce ningún tipo de transformación geométrica.	Reconoce solo algunos tipos de transformaciones geométricas el plano.	Reconoce la traslación, la rotación, la reflexión y la homotecia como tipos de transformaciones geométricas en el plano.
TAREA 2			
Criterio	Nivel 0	Nivel 1	Nivel 2
1. Identificación de la transformación geométrica mencionada	No identifica alguna transformación geométrica mencionada en el teselado.	Identifica al menos una transformación geométrica correctamente sin confundirla con otra.	Identifica una traslación, una rotación, una reflexión y una homotecia en el teselado.
2. Coherencia y sentido de la	No hace una explicación, o	La explicación tiene contradicciones o no	Las explicaciones tienen coherencia y sentido.

explicación de cómo identifica las transformaciones geométricas (visualización)	la explicación carece de coherencia, es contradictoria o no tiene sentido.	está bien conectada con lo que se observa en el teselado.	Cada transformación es reconocida con base en evidencias visuales.
--	--	---	--

TAREA 3

Criterio	Nivel 0	Nivel 1	Nivel 2
1. Reconocimiento de los invariantes en la representación de las transformaciones	En la representación no tiene en cuenta los invariantes de la cada transformación geométrica en el plano para la representación.	En la representación tiene en cuenta algunos invariantes o características de cada transformación geométrica en el plano para la representación.	En la representación que realiza tiene en cuenta los invariantes de cada transformación geométrica en el plano para la representación.
2. Comprensión conceptual	No reconoce qué es cada transformación geométrica en el plano ni sus invariantes.	Reconoce qué es cada transformación geométrica en el plano como movimiento o correspondencia, pero confunde sus invariantes.	Reconoce cada transformación geométrica en el plano como movimiento o correspondencia de puntos y sus invariantes.

TAREA 4

Criterio	Nivel 0	Nivel 1	Nivel 2
1. Manejo de GeoGebra	Se le dificulta el uso de GeoGebra para	Desconoce algunas herramientas de GeoGebra	Utiliza adecuadamente las herramientas de GeoGebra para resolver

	resolver las tareas sobre las transformaciones geométricas.	para resolver las tareas sobre las transformaciones geométricas.	las tareas sobre las transformaciones geométricas.
2. Relación Conjeturación y explicación	No realiza una conjetura o si la realiza no se evidencia cual es la relación entre las transformaciones implicadas. Además, su explicación no tiene sentido ni coherencia.	Realiza una conjetura ambigua, incompleta, pero se evidencia cual es la relación entre las transformaciones implicadas. Usa pocas veces el lenguaje matemático y presenta una explicación confusa.	Realiza una conjetura clara y coherente en la que se evidencia cual es la relación entre las transformaciones implicadas. Usa lenguaje matemático apropiado y presenta una explicación clara y coherente de sus resultados.

Nota. Elaboración propia

Es importante mencionar que, para la elaboración de esta rúbrica, se tienen en cuenta tanto características matemáticas como didácticas de las transformaciones geométricas. Según lo expuesto en el fundamento matemático, las transformaciones geométricas son correspondencias entre puntos; por lo tanto, desde una perspectiva estrictamente matemática, no pueden definirse como movimientos. Sin embargo, desde un punto de vista didáctico sí es posible concebirlas como tales. Incluso, en el análisis de los documentos curriculares se encontró sugerencias de iniciar la enseñanza de las transformaciones geométricas a partir de movimientos.

Por tanto, en el nivel 2 del criterio 1 de la tarea 1, y el criterio 2 de la tarea 3, se consideran las transformaciones geométricas tanto como movimientos como correspondencia. Esto se justifica en que los estudiantes de primer semestre podrían reconocerlas principalmente como movimientos debido a su formación escolar previa, mientras que los estudiantes de último

semestre también podrían reconocerlas así porque las han estudiado desde una perspectiva didáctica en el curso de Enseñanza y aprendizaje de la geometría.

Elaboración entrevista semiestructurada

Como he mencionado anteriormente, realicé una entrevista a seis profesores de la Línea de la Geometría que habían tenido a su cargo uno o varios espacios académicos de dicha línea y a algunos estudiantes de la LM de primer y últimos semestres, con el fin de recolectar información sobre algunas percepciones que tienen estos docentes y estudiantes respecto a mi tema central. Para esto, planeé una entrevista semiestructurada, ya que en esta “se decide de antemano qué tipo de información se requiere y con base en ello se establece un guion de preguntas. Además, las cuestiones se elaboran de forma abierta” (Folgueiras, 2016, p.3). El objetivo de dichas entrevistas fue obtener información complementaria para el desarrollo de mi investigación y poder contrastarla con el análisis obtenido en el marco conceptual, es decir con los conocimientos que los FEM deberían tener sobre las transformaciones y las tareas desarrolladas por algunos estudiantes de la LM. Además, estas preguntas fueron diseñadas para ampliar y conocer información sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de las transformaciones geométricas en la formación de los FEM de la LM de la UPN. A continuación, se describe cada entrevista.

Entrevistas a docentes

Esta entrevista se realizó a docentes que han tenido a cargo espacios académicos de la Línea de Geometría de la LM., las preguntas realizadas fueron las siguientes:

1. ¿Cuáles espacios académicos de la Línea de Geometría o relacionados con la enseñanza de la geometría has tenido a cargo?
 - a. ¿Cuántas veces ha desarrollado ese (os) espacio(s)?
2. En esos espacios académicos que ha orientado, ¿has enseñado transformaciones geométricas o contenidos asociados a ellas?
 - a. **Sí:**

- i. Como parte de la monografía que estoy escribiendo, estudié los syllabus de los cursos, y me percaté que en dichos documentos no aparece de manera explícita como un contenido de estudio, las transformaciones geométricas. ¿Por qué consideras que las TG no son un contenido explícito en los syllabus?
 - ii. ¿Por qué consideras importante que un futuro profesor de matemáticas aprenda TG?
 - iii. ¿Qué ha enseñado en esos cursos sobre TG?
 - iv. ¿Por qué crees que se enseñan TG en ese curso particular?
- b. **No:**
- i. ¿Por qué las TG no han sido parte de la enseñanza en los cursos que ha orientado?
 - ii. ¿Considera importante que un FEM conozca sobre TG? ¿Por qué?
 - 1. Sí: ¿En cuáles espacios académicos consideras que debería enseñarse?
 - iii. He revisado los syllabus de los espacios académicos relacionados con la geometría, y me percaté que las TG no aparecen como un contenido explícito en los cursos. ¿Consideras que, aunque no están de manera explícita, en el transcurso de la carrera sí aprenden sobre TG?
3. ¿Crees que la enseñanza de las TG es un objeto principal en el currículo escolar?

Entrevistas estudiantes de primer semestre

Es de resaltar que algunas de las preguntas realizadas a los compañeros de primer semestre, dependieron de las respuestas de cada una en las tareas propuestas anteriormente. Sin

embargo, se propusieron las siguientes preguntas con el fin de conocer qué conocimientos tienen los estudiantes de primer semestre que recuerdan de su educación escolar respecto a las transformaciones geométricas.

1. ¿En qué colegio(s) estudiaste?
2. ¿Recuerdas haber estudiado las transformaciones geométricas en el transcurso de tu educación escolar? Si es así ¿En qué grado escolar?
3. Cuando desarrollaste las tareas propuestas ¿conocías algo o todo fue nuevo para ti?

Entrevistas estudiantes de últimos semestres

Esta entrevista se realizó a cinco estudiantes de últimos semestres de la LM que cursaron todos los espacios académicos obligatorios de la Línea de Geometría. Las siguientes preguntas se plantearon con el objetivo de conocer experiencias y perspectivas de los estudiantes de últimos semestres sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de las transformaciones geométricas que se lleva a cabo en la LM.

Las preguntas realizadas fueron las siguientes

1. ¿En el transcurso de la carrera aprendiste sobre las transformaciones geométricas, al cursar algún espacio académico de la Línea de Geometría? Si tu respuesta es sí, menciona el espacio académico y el o la docente a cargo de dicho espacio académico cuando lo cursaste.
Si tu respuesta fue sí en la anterior pregunta, responde:
 - ¿Qué alcanzaron y no alcanzaron a estudiar en dicho curso sobre las transformaciones geométricas?
 - Suponga que en el trascurso de tu carrera profesional no aprendiste sobre las transformaciones geométricas en el espacio académico que mencionaste, ¿crees que hubieras podido resolver la tarea propuesta?
2. ¿Consideras importante que un FEM tenga conocimientos de las transformaciones geométricas? ¿Por qué?
3. ¿Consideras importante que se enseñe las transformaciones geométricas en el transcurso de la carrera? ¿Por qué?

4. ¿Consideras importante que se enseñe las transformaciones geométricas en el transcurso de la educación escolar? ¿Por qué?
5. ¿Qué debería saber un FEM sobre transformaciones geométricas en la educación escolar?
6. ¿Cómo aportó a tu formación profesional los primeros cuatro espacios de la Línea de Geometría?
7. ¿Eres capaz de aprender por sí solo transformaciones geométricas?

Análisis

En este capítulo presento los hallazgos e información encontrada al implementar las tareas y las entrevistas a docentes de la Línea de Geometría y algunos de los estudiantes de la LM. Dicha información la clasifiqué en: desarrollo de tareas, entrevista a docentes, entrevista a estudiantes primer semestre y entrevista a estudiantes últimos semestres.

Desarrollo de tareas

En esta sección describo las repuestas a las tareas de algunos estudiantes, proponiendo luego una conclusión sobre si se cumple el objetivo de cada tarea. Por consiguiente, se presentan las respuestas de los estudiantes con su respectivo análisis y conclusiones a partir de la rúbrica creada para la evaluación de estas tareas.²

Tarea 1

Respuestas estudiantes primer semestre

De los 5 estudiantes de primer semestre que aportaron a esta actividad, ninguno respondió a la pregunta ¿Qué son las transformaciones geométricas? En la entrevista mencionaron que no saben qué es esto. Por lo tanto, no identifican una definición sobre transformaciones geométricas, aunque implícitamente sí conocen algunas transformaciones, pues esto se evidencia en la tarea 2.

Respuestas estudiantes últimos semestre

Los estudiantes entrevistados, al ser de últimos semestres, ya cursaron todos los cursos obligatorios de la Línea de Geometría. En la entrevista, los compañeros comparten que durante el desarrollo de las clases de la Enseñanza y el Aprendizaje de la Geometría, estudiaron las transformaciones geométricas desde un punto de vista matemático y didáctico.

² Las respuestas se mencionan anteponiendo E1, E2, E3, ... para relacionarlas con el estudiante que desarrolló que la produjo, con el fin de guardar su confidencialidad.

Todos los estudiantes de últimos semestres respondieron a la pregunta de la tarea 1, además de que reconocen y definen las transformaciones geométricas. Una de las definiciones dadas fue: “Dada la figura geométrica, una transformación geométrica es una relación que tiene como dominio, los puntos de la figura y el rango, los puntos imágenes obtenidos de la relación de la transformación” (E6). Además, las transformaciones geométricas que conocen son: Traslación, rotación, reflexión y homotecia. Aunque uno de los compañeros (E8) menciona que no conoce la homotecia.

A continuación, se muestra los resultados de la rúbrica aplicada para esta tarea.

Tabla 10 Aplicación Rúbrica Tarea 1

Estudiante	Nivel criterio 1	Nivel criterio 2
E1	0	0
E2	0	0
E3	0	0
E4	0	0
E5	0	0
E6	2	2
E7	2	2
E8	2	1
E9	2	2
E10	2	2

Nota. Elaboración propia

Es importante mencionar que los estudiantes cuyas respuestas se clasificaron en el nivel 0 no lograron identificar qué es una transformación geométrica, ni reconocieron ninguno de sus tipos. En contraste, aquellos que, según el criterio 1, se ubicaron en el nivel 2, presentaron definiciones con características similares a la mencionada anteriormente, y todos lograron identificar el concepto de transformación geométrica. En cuanto al criterio 2, los estudiantes que alcanzaron el nivel 2 reconocieron todos los tipos de transformaciones geométricas, mientras que el estudiante E8 identificó únicamente tres de ellas: traslación, rotación y reflexión.

Es interesante notar cómo algunos estudiantes no reconocen inicialmente los tipos de transformación que existen. Esto puede deberse al impacto inicial de las tareas o al lenguaje utilizado, que en un primer momento puede resultar confuso o intimidante. Sin embargo, más adelante es común notar que, a medida que avanzan en el desarrollo de las tareas, los mismos estudiantes comienzan a aplicar correctamente esos conceptos, incluso sin darse cuenta.

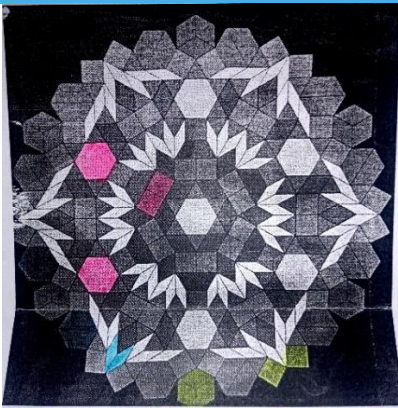
Tarea 2

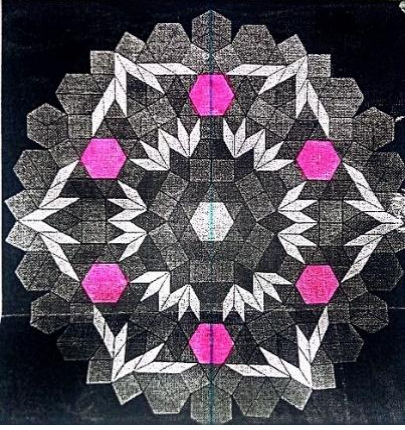
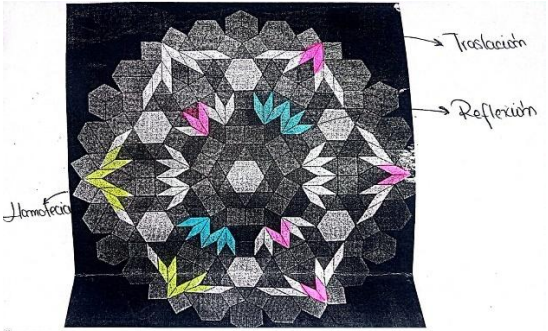
Algunas respuestas estudiantes primer semestre

Para el desarrollo de esta tarea 2, tres estudiantes de primer semestre respondieron esta tarea. Mientras que los dos resultantes manifestaron no reconocer las transformaciones mencionadas en dicha tarea.

En la siguiente tabla se evidencia algunas respuestas de la tarea 2 de estudiantes de primer semestre.

Tabla 11 Algunas respuestas Tarea 2 Estudiantes primer semestre

E	Identificación teselados	¿Cómo lo identificó?
E1		<p>Traslación: “La identifico ya que es la misma figura, pero en diferente lugar.”</p> <p>Rotación: “Es la misma figura que cambia su dirección teniendo un punto fijo.”</p> <p>Reflexión: “Es la figura que se ve en simetría y como si fuera un espejo.”</p>

E2		<p>Traslación: “Son la misma figura en una posición diferente.”</p> <p>Reflexión: Aunque no señalo algún par de figuras correspondidas por reflexión, escribí “por un eje central.”</p>
E3		<p>Traslación: “cuando una figura se traslada a otra posición.”</p> <p>Rotación: “Cuando una figura va moviéndose de un lugar a otro, en una misma dirección continuamente.”</p> <p>Reflexión: “cuando una figura se proyecta o refleja en otro lugar.”</p>

A continuación, se muestra los resultados de la rúbrica aplicada para esta tarea.

Tabla 12 Aplicación rúbrica Tarea 2 Estudiantes primer semestre

Estudiante	Nivel criterio 1	Nivel criterio 2
E1	1	1
E2	1	1
E3	0	1
E4	0	0
E5	0	0

Nota. Elaboración propia

La clasificación de los niveles alcanzados por los estudiantes de primer semestre en esta tarea dependió, principalmente, del reconocimiento y la justificación que tienen respecto a las

transformaciones presentes en el teselado. En este sentido, los compañeros E4 y E5, ubicados en el nivel 0, no identificaron ninguna transformación geométrica en el teselado y, en consecuencia, no presentaron una explicación de lo que realizaron. Por su parte, el estudiante E3, aunque también se encuentra en el nivel 0, difiere de los anteriores, ya que identificó la rotación, pero la confundió con otros tipos de transformaciones. En sus respuestas, todas las figuras coloreadas corresponden a rotaciones; sin embargo, el estudiante las clasifica en los otros tipos de transformaciones.

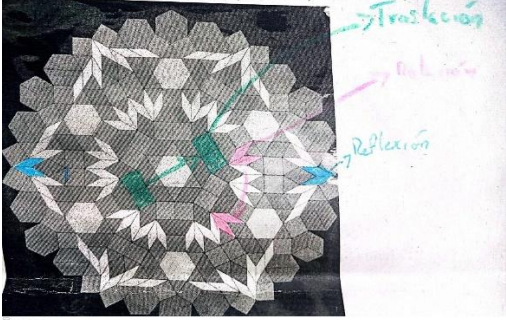
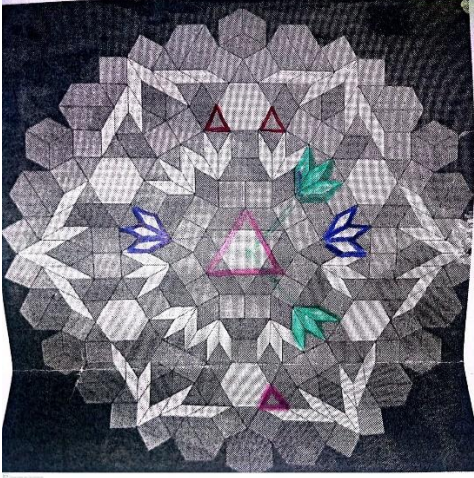
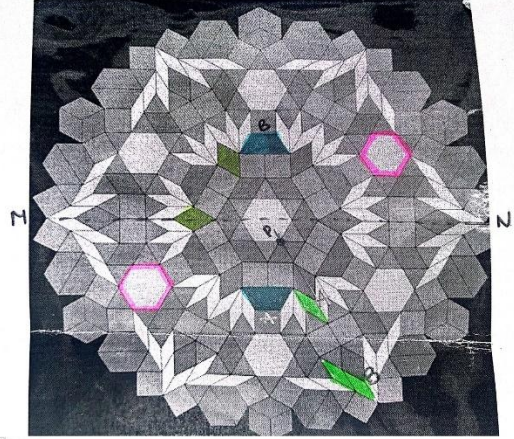
Por otro lado, los estudiantes que se ubicaron en el nivel 1 presentaron respuestas en las que, como se evidencia en la Tabla 11, identifican correctamente al menos una transformación geométrica sin confundirla con otra. No obstante, las explicaciones tienen contradicciones o no están bien conectadas con lo que se observa en el teselado. Por ejemplo, el estudiante E2 identificó correctamente la traslación sin confundirla con otras transformaciones, pero su explicación resulta imprecisa, ya que menciona que “Son la misma figura en una posición diferente” (E2), una característica demasiado general que podría aplicarse también a otros tipos de transformaciones geométricas.

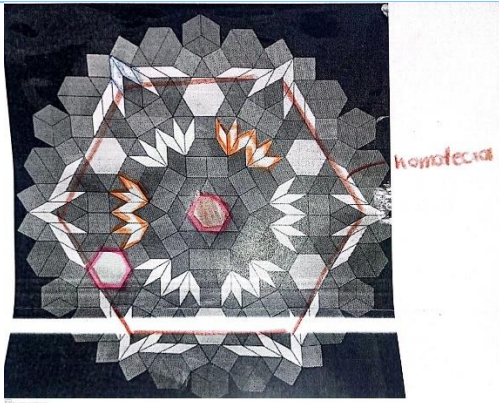
A partir de las evidencias recolectadas, es posible inferir que los estudiantes poseen una comprensión intuitiva de algunas transformaciones geométricas, las cuales asocian con conceptos como dirección, posición y reflejo. Estos conocimientos se derivan de experiencias cotidianas y referencias del entorno, tales como la rotación y la traslación de la Tierra, o la reflexión observada en un espejo. No obstante, se evidencia un desconocimiento en relación con la homotecia. Así mismo, interpreto que los estudiantes reconocen algunas transformaciones a partir de características perceptibles, pero sin comprender plenamente sus propiedades formales. En consecuencia, se concluye que los estudiantes logran identificar visualmente algunas transformaciones geométricas, a partir de ideas intuitivas de estas.

Respuestas estudiantes últimos semestre

A continuación, se muestra algunas respuestas de la tarea 2 de los estudiantes de últimos semestres, aunque cabe resaltar que todos los compañeros de últimos semestres resolvieron esta tarea.

Tabla 13 Algunas respuestas Tarea 2 Estudiantes últimos semestres

E	Identificación teselados	¿Cómo lo identificó?
E8		<p>Traslación: “Conservación del tamaño y su orientación.”</p> <p>Rotación: “Conserva el tamaño, pero cambia su sentido.”</p> <p>Reflexión: “Se invierte el sentido.”</p>
E9		<p>Traslación: “Identifiqué su dirección y sentido.”</p> <p>Rotación: “Identifiqué el centro de rotación.”</p> <p>Reflexión: “Identifiqué el eje de reflexión.”</p> <p>Homotecia: “Se mantuvo sus características, pero cambio de tamaño.”</p>
E6		<p>Traslación: “Las figuras se corresponden mediante vectores congruentes, es decir con igual magnitud, dirección y sentido (cambio de lugar, pero no de tamaño ni inclinación).”</p> <p>Rotación: “Si consideramos el centro del teselado como el centro de giro, entonces los puntos del cuadrilátero se mueven en un ángulo aproximado de 55° (cambio de lugar, de dirección, pero no de tamaño)”</p>

		<p>Reflexión: “Ya que las distancias de cada uno de los puntos correspondientes a la \overline{NM} es la misma. Así mismo, se identifica que cada trapecio simula la imagen en forma de espejo de la otra.”</p> <p>Homotecia: “La distancia de los puntos de la figura A al punto P es la mitad a la distancia de los puntos de la figura B al punto P.”</p>
E7		<p>Traslación: “Mantiene la forma, no gira y se puede decir que se movió de un lugar a otro y no es una simetría porque está se puede formar por una rotación que no se hace”</p> <p>Rotación: “La figura rotó respecto a un punto, que en este caso sería la mitad del teselado, el cual sería el centro”</p> <p>Reflexión: “La imagen correspondiente es como si estuviera invertida, además de cumplir con la condición de mantener congruencias de distancias de un punto a un eje. El eje se puede inferir como el que está en medio de las figuras”</p> <p>Homotecia: “Porque si se unen los vértices correspondidos de los hexágonos con rectas, habrá un punto de intersección. Además, una de las figuras es más grande que la otra.”</p>

Nota. Elaboración propia

A continuación, se muestra los resultados de la rúbrica aplicada para esta tarea.

Tabla 14 Aplicación Rubrica Tarea 2 Estudiantes último semestre

Estudiante	Nivel criterio 1	Nivel criterio 2
E6	2	1
E7	2	2
E8	1	1
E9	2	2
E10	2	2

Nota. Elaboración propia

Es de resaltar que los compañeros que realizaron las tareas, identifican las transformaciones de manera visual a partir de un dominio conceptual sólido en el cual tiene en cuenta invariantes o características principales de cada transformación geométrica. Sin embargo, algunos de ellos no señalaron la homotecia, las razones por las que pudo suceder esto es: porque no saben que es una homotecia, pues no lo trabajaron en el espacio de Enseñanza y aprendizaje de la geometría; o saben que es una homotecia, pero no la observaron en el teselado.

Tarea 3

Respuestas estudiantes primer semestre

A continuación, se observan las respuestas de la tarea 3 de algunos estudiantes de primer semestre.

Cabe resaltar que, en la sección correspondiente a la traslación, todos los estudiantes respondieron. En el caso de la rotación, solo cuatro estudiantes dieron respuesta, ya que el restante manifestó no saber qué escribir porque no conocía el concepto de rotación. En cuanto a la reflexión, todos los estudiantes respondieron, mientras que en la homotecia únicamente un estudiante mencionó algo sobre lo que consideraba que era esta transformación, pues los demás señalaron que nunca habían escuchado ese término.

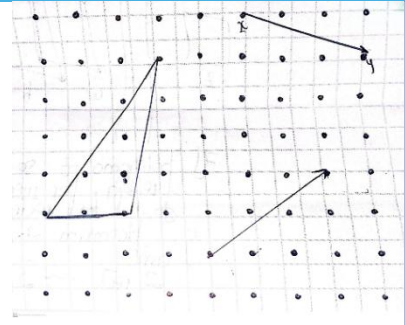
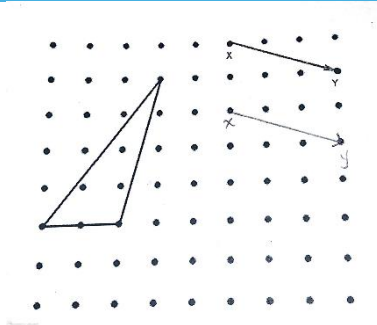
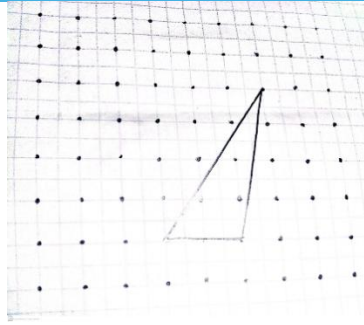
Traslación: Algunas definiciones que proponen los compañeros son:

- “Cuando una figura cambia de lugar sin alterar su posición.” E1
- “Cuando un cuerpo se mueve de un lugar a otro.” E2
- “Una figura aparenta tener cambio de posición- lugar.” E3

- “Es el movimiento de una figura geométrica con el mismo tamaño.” E4
- “Cuando cogemos un elemento y lo movemos de un lugar y seguirá con las mismas medidas.” E5

Algunas de representaciones del punto que consiste en dibujar una imagen trasladada representada por un segmento dirigido, son las siguientes:

Tabla 15 Respuestas estudiantes primer semestre Tarea 3

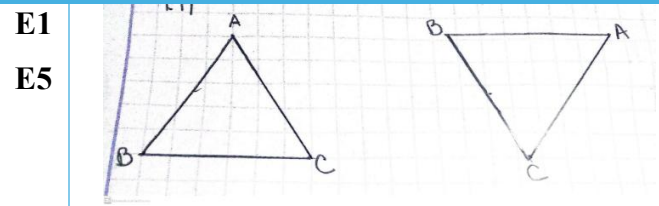
Representación E3	Representación E2	Representación E1
		

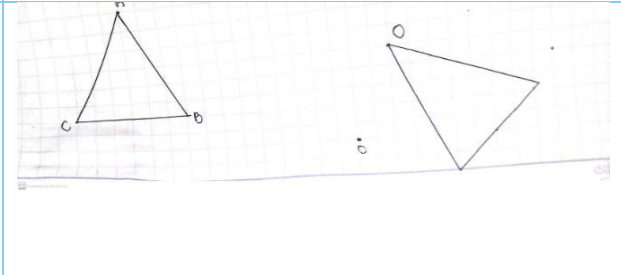
Rotación: Algunas definiciones escritas por los estudiantes son:

- “Cuando una figura va moviéndose de un lugar a otro, en una misma dirección continuamente.” E3
- “Cuando un objeto gira o rota sobre su propio eje”. E1, E2 y E5

A continuación, se evidencia algunas representaciones de rotación elaboradas por los compañeros.

Tabla 16 Representaciones Tarea 3 Rotación Estudiantes primer semestre

E	Representación	Explicación
E1 E5		“El enunciado dice que nos movamos hacia las manecillas del reloj, es decir a la derecha” prosigue a mover el transportador cuyo centro estaba en B a la derecha hasta C “y me dice que

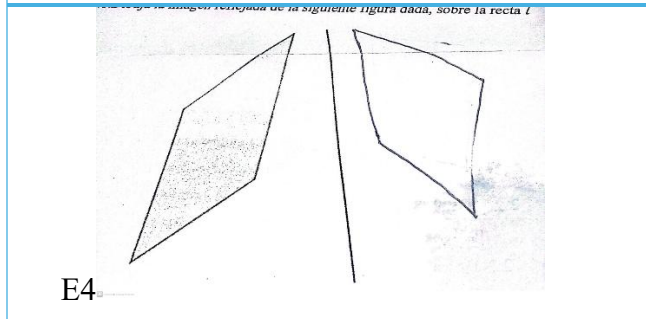
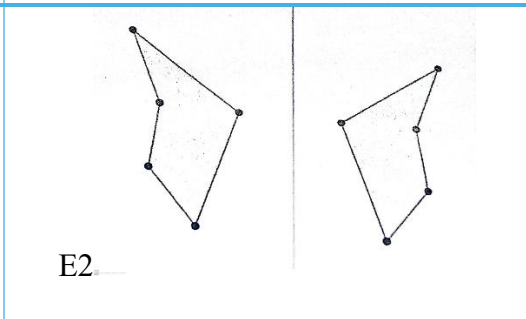
		50°” dibuja un segmento que forma un ángulo de 50° con la horizontal que pasa por C “y completo el triángulo con esta medida”
E3		“Con el punto O formo un ángulo de 50°” este ángulo también lo tiene en cuenta con la horizontal que pasa por O “y trato de hacer el mismo triángulo en este punto”

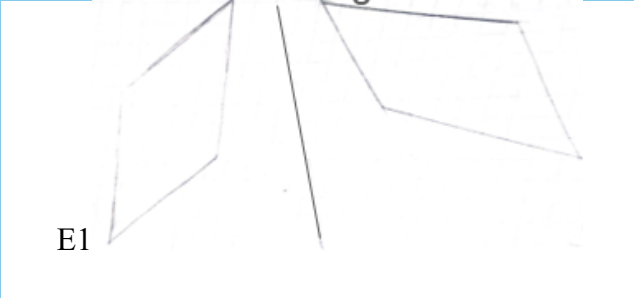
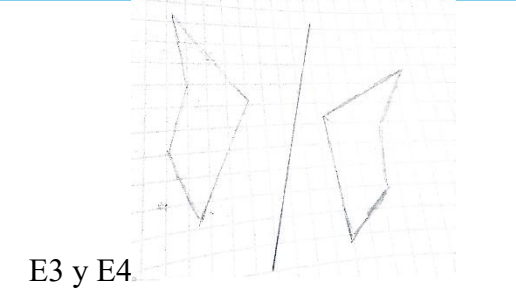
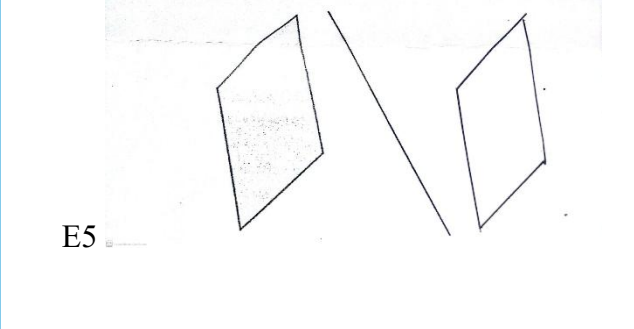

Reflexión: Algunas definiciones propuestas por los compañeros para reflexión son:

- “Es el efecto espejo que se puede generar con una figura ya sea vertical, horizontal, vertical o diagonal.” E1
- “Una figura se proyecta o se refleja en otro lugar.” E3
- “Cuando una figura tiene una figura igual con todos los ángulos congruentes entre sí.” E5

Así mismo, se ilustra en la siguiente tabla, algunos resultados de la imagen correspondida por reflexión de un cuadrilátero y de encontrar el eje de simetría de dos figuras reflejadas.

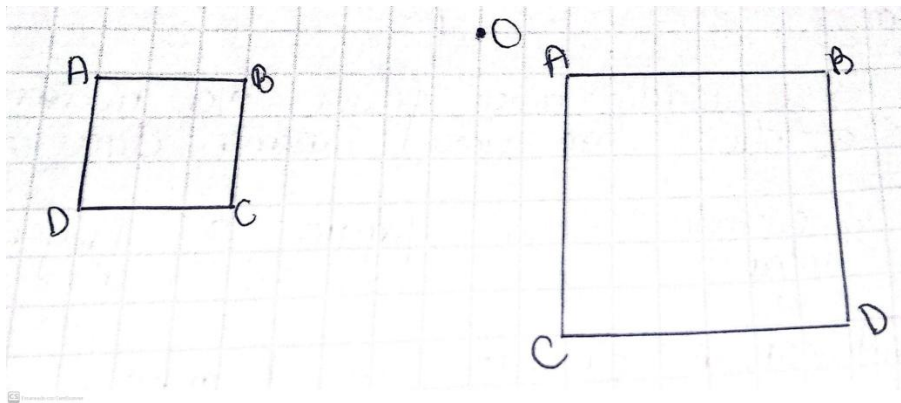
Tabla 17 Respuestas Tarea 3 Reflexión Estudiantes primer semestre

Cuadrilátero imagen por reflexión	Eje de simetría
 <p>E4</p>	 <p>E2</p>

 <p>E1</p>	 <p>E3 y E4</p>
 <p>E5</p>	 <p>E5</p>
Explicación	
<p>“Quiero hacer la misma imagen pero reflejada o invertida”</p>	<p>“La recta debe pasar por la mitad de los puntos”</p>

Homotecia: Ninguno definió la homotecia, sin embargo, una estudiante intuyó su procedimiento, pues realizó lo siguiente.

Ilustración 13 Respuesta Ilustración homotecia



Nota. Elaborado por E3

Explicación: “Cuando leí que la razón fuera de 3cm, supuse que debía agrandar el cuadrilátero”

A continuación, se muestra los resultados de la rúbrica aplicada para esta tarea.

Tabla 18 Aplicación Rubrica Tarea 3 Estudiantes primer semestre

Estudiante	Traslación		Rotación		Reflexión		Homotecia	
	Criterio 1	Criterio 2	Criterio 1	Criterio 2	Criterio 1	Criterio 2	Criterio 1	Criterio 2
E1	2	1	1	1	1	1	0	0
E2	0	1	0	1	1	0	0	0
E3	0	1	1	1	1	1	1	0
E4	2	1	0	0	1	0	0	0
E5	2	1	1	1	1	1	0	0

Nota. Elaboración propia

Con base en lo observado respecto a la Tarea 3, se puede afirmar que los estudiantes de primer semestre que realizaron las tareas propuestas logran reconocer algunas propiedades fundamentales de las transformaciones geométricas, tales como la congruencia entre las figuras, la noción implícita del eje de simetría (el cual debe equidistar de los puntos correspondientes en las figuras reflejadas) y la identificación de centro de giro. Así mismo, como se ha mencionado anteriormente, los estudiantes manifiestan ideas intuitivas sobre las transformaciones geométricas, lo que les permite formular definiciones que, si bien son aproximadas, en algunos casos carecen de precisión o presenta vacíos conceptuales. Por ejemplo, ante la definición de traslación expresada como: “Cuando cogemos un elemento y lo movemos de un lugar y seguirá con las mismas medidas”, se puede observar que, aunque es válida para describir una traslación, también podría aplicarse a otras transformaciones como la reflexión y la rotación. Esto evidencia la necesidad de complementar dichas definiciones con información más rigurosa. Por lo que los estudiantes aun presentan dificultades tanto en la conceptualización como en la representación gráfica de estas transformaciones.

Respuestas estudiantes últimos semestre

Para el desarrollo de esta tarea, los cinco estudiantes que participaron respondieron las secciones correspondientes a traslación y rotación. En el caso de la reflexión, solo cuatro estudiantes dieron respuesta, y se desconocen las razones por las cuales el otro estudiante no respondió. Finalmente, en la sección de homotecia también respondieron cuatro estudiantes;

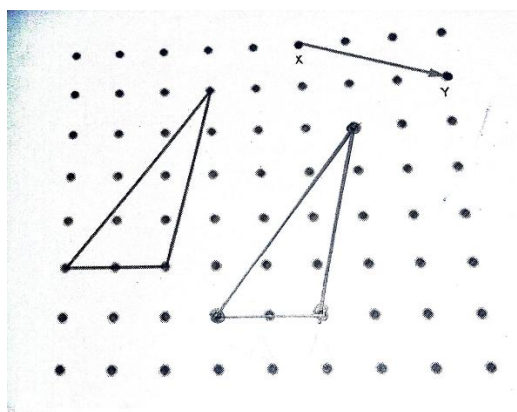
ya que como se mencionó anteriormente, E8 no reconoce la homotecia como una transformación geométrica, razón por la cual no escribió nada en esta parte.

A continuación, se evidencian las respuestas de los estudiantes de últimos semestres de la tarea 3.

Traslación: Algunas definiciones y representaciones propuestas por los compañeros para traslación son:

- “Es una transformación geométrica representada en el plano, se presenta en forma de vector. Sus invariantes son la dirección, el sentido y la magnitud igual entre puntos.” E6
- “Es un movimiento en el plano, con una magnitud y dirección en el cual puede ser representado por un vector. Además, la figura mantiene su forma.” E7
- “Es el movimiento en el plano donde la figura se mueve de forma horizontal, vertical y sus diferentes combinaciones, manteniendo siempre sus dimensiones y sentido.” E8
- “Una traslación es un movimiento en el plano donde una figura se desliza según un vector que le da dirección y sentido.” E9
- “Es el movimiento de una figura según cierta condición, en este caso indica que la figura sea trasladada en el sentido, dirección y distancia indicada por un vector.” E10

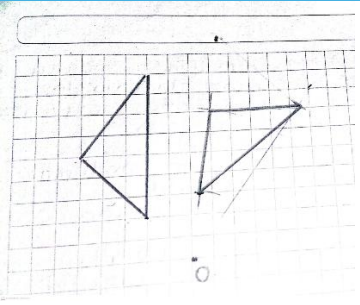
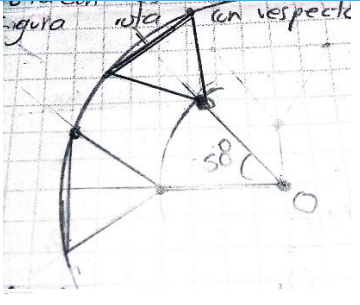
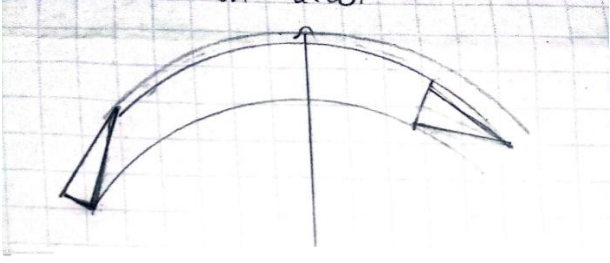
Ilustración 14 Respuesta representación de traslación de estudiantes de últimos semestres



Rotación: Algunas definiciones y representaciones propuestas por los compañeros para rotación son:

- “Es una transformación que tiene como invariantes un ángulo de rotación y un centro de rotación, así como un sentido hacia las manecillas del reloj o en contra de las manecillas del reloj.” E6
- “Es un movimiento en el plano, donde una figura gira, respecto a un punto y un sentido que puede ser hacia las manecillas del reloj o en contra.” E7
- “Es el movimiento en el plano donde la figura se mueve sobre un arco.” E8
- “Una rotación es un movimiento en el plano donde una figura rota con respecto a un centro de rotación.” E9

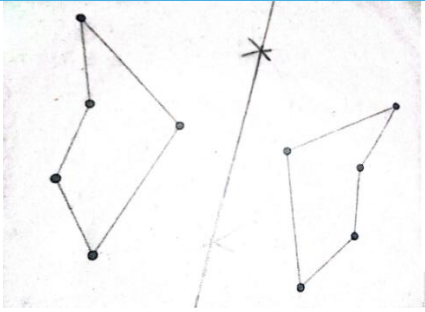
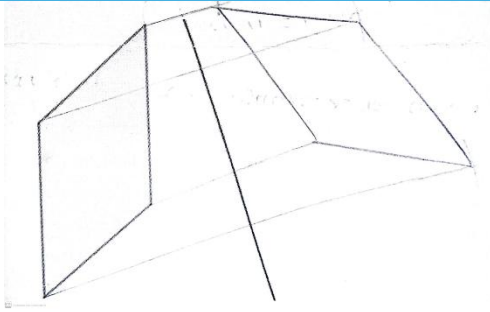
Tabla 19 Algunas Respuestas Tarea 3 rotación de estudiantes de últimos semestres

Representación E10	Representación E9
	
Representación E8	
	

Reflexión: Las definiciones y representaciones propuestas por los estudiantes para reflexión son:

- “Es una transformación que vista desde el plano tiene como invariantes el eje de simetría que es una recta del plano. Dos figuras que se encuentran correspondidas por simetría cumplen que la distancia a la recta de cada punto que se corresponde es la misma.” E6
- “Es la reflexión de una figura respecto a una recta, donde la distancia de un punto a la recta es igual a la distancia de la recta a su punto imagen.” E7
- “Es un movimiento en el plano donde la figura cambia de sentido y su movimiento es lineal.” E8
- “Una reflexión es una transformación en el plano que actúa como un espejo siendo este el eje de reflexión.” E9
- “Es un movimiento que refleja a la figura.” E10

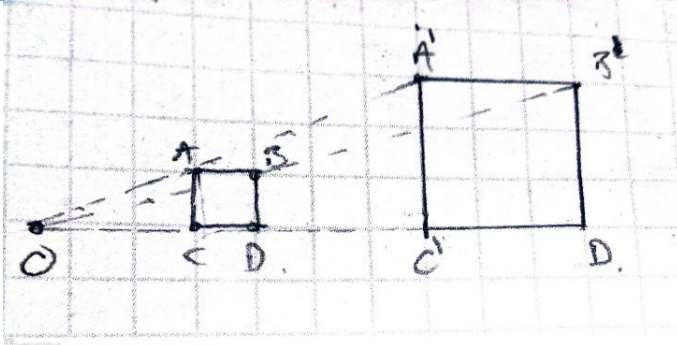
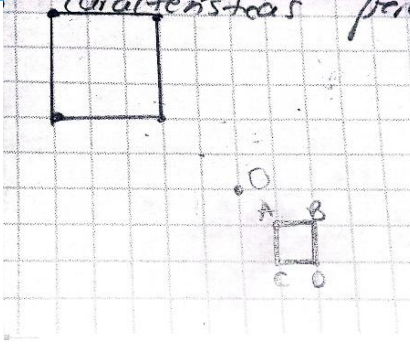
Tabla 20 Respuestas Tarea 3 reflexión de estudiantes de últimos semestres

Representación general ³ 1	Representación general 2
	

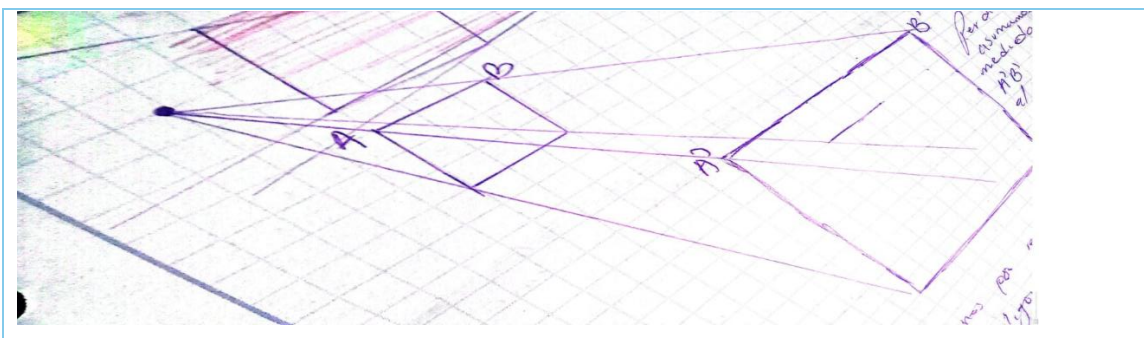
Homotecia: Algunas definiciones y representaciones propuestas por los estudiantes para homotecia son:

- “No es una transformación rígida ya que el tamaño de la figura cambia a razón de un número. Esta transformación permite que las figuras se vuelvan más grandes o pequeñas, sus invariantes son el punto de la homotecia y la razón.” E6
- “Es una transformación en el plano, donde la figura mantiene sus características, pero cambia de tamaño.” E7
- “Es un movimiento en el plano donde la figura sufre un cambio de sus dimensiones de forma proporcional.” E9
- “Es el movimiento que se le aplica a una figura en un plano proyectivo.” E10

Tabla 21 Respuestas Tarea 3 homotecia de estudiantes de últimos semestres

Representación 6	Representación E8
	
Representación E10	

³ Se menciona que es general porque todos los estudiantes llegaron a una representación similar.



A continuación, se muestra los resultados de la rúbrica aplicada para esta tarea.

Tabla 22 Aplicación Rubrica Tarea 3 Estudiantes últimos semestre

Estudiante	Traslación		Rotación		Reflexión		Homotecia	
	Criterio 1	Criterio 2	Criterio 1	Criterio 2	Criterio 1	Criterio 2	Criterio 1	Criterio 2
E6	2	2	2	2	2	2	2	2
E7	2	2	2	1	2	2	2	1
E8	2	2	2	1	2	1	0	0
E9	2	2	2	1	2	1	2	1
E10	2	2	2	2	2	1	2	1

Nota. Elaboración propia

Con las evidencias anteriores se puede deducir que los estudiantes de últimos semestres definen las transformaciones, pero en ciertos casos se presenta algunas falencias, ya que algunas de las definiciones presentadas son circulares como: “Una rotación es un movimiento en el plano donde una figura rota con respecto a un centro de rotación” ya que se muestra una redundancia al mencionar que la rotación es cuando una figura rota, es decir es una definición que usa el término que se está definiendo; otras presentan más formalidad, por ejemplo: “Es una transformación que tiene como invariantes un ángulo de rotación y un centro de rotación, así como un sentido hacia las manecillas del reloj o en contra de las manecillas del reloj”. Además, la mayoría de los estudiantes reconocen los invariantes de cada transformación, es decir, reconocen algunas propiedades de las transformaciones geométricas.

Basado en lo mencionado antes, se puede deducir que los estudiantes de últimos semestres logran definir las transformaciones geométricas de manera parcial. Puesto que, si bien algunas de las definiciones carecen de coherencia conceptual (“Es un movimiento que refleja

a la figura”), otras evidencian un mayor nivel de formalidad y dominio del lenguaje matemático (“Es una transformación que vista desde el plano tiene como invariantes el eje de simetría que es una recta del plano. Dos figuras que se encuentran correspondidas por simetría cumplen que la distancia a la recta de cada punto que se corresponde es la misma”). En general los estudiantes logran identificar los invariantes asociados a las transformaciones geométricas y definir las parcialmente

Tarea 4

En esta tarea, es importante mencionar que todos los estudiantes de últimos semestres la desarrollaron, pero se mostrarán algunas de estas. Mientras que algunos estudiantes de primer semestre respondieron ciertas secciones de esta tarea, ya que, por cuestiones de tiempo no lograron culminarla.

Respuestas estudiantes primer semestre

1. Respuestas teorema reflexión -traslación.
 - “El polígono b es como una traslación del polígono z .” E1
 - “ b es traslación de z .” E2
 - “El polígono z y b , su relación es que es el mismo polígono con la misma medida, pero en diferente lugar.” E4
2. Respuestas teorema reflexión-rotación.
 - “ b es la rotación de z .” E2
 - “El polígono z y b se relaciona en que ambos polígonos tienen la misma medida, pero se mueve su posición y ángulo.” E4
3. Respuestas teorema homotecia.
 - “Cuando ambas razones son uno, la figura queda en el mismo lugar.” E2
 - “Veo que w es más grande que el triángulo original pero aún no se identificó su relación.” E5

Respuestas estudiantes últimos semestre

1. Respuestas teorema reflexión -traslación.

- “Correspondencia por traslación. Porque una doble reflexión de un objeto permite que llegue a su posición inicial además la paralela lo que provoca es que aumente la distancia entre la posición inicial y la posición final del objeto.” E6
- “S r y s son paralelas las dos simetrías se verán como una traslación. Porque la figura se refleja dos veces, lo que equivale a quedar en misma forma y sentido inicial.” E8
- “La composición de reflexiones sobre rectas paralelas resulta ser una traslación.” E9
- “La figura no cambia su forma y tamaño”. E10

2. Respuestas teorema reflexión-rotación.

- “Es una rotación, porque la simetría le permite a una figura crear una imagen en forma de espejo al hacer una simetría en otra recta la figura vuelve a tener su forma original, además la intersección de las rectas es el centro de giro.” E6
- “Se presenta una rotación. Al momento que las rectas se intersecan se presenta una rotación ya que cambia su posición con respecto al punto de intersección.” E8
- “La composición de reflexiones sobre rectas que se intersecan resulta en una rotación” E9

3. Respuestas teorema homotecia.

- “Es una traslación cuando el producto es igual a 1 porque no se aumenta la forma de la figura ya que las constantes de la homotecia se cancelan lo que hace que se traslade la figura es que los puntos de la homotecia son diferentes y la distancia entre estos puntos implica magnitud o norma de un vector. La figura aumenta su tamaño cuando $k_1 k_2 > 1$. Cuando $k_1 k_2 < 1$ entonces el tamaño disminuye.” E6
- “Si $k_1 k_2 = 1$ la homotecia final es una traslación del objeto original. Si $k_1 k_2 \neq 1$ e crea otra homotecia del triangulo orginial.” E7
- “En la composición de homotecias, si el producto de las razones es 1, la composición resulta ser una traslación de lo contrario es una homotecia.” E9
- “Si es mayor la figura se amplía si es menor se reduce.” E10

A continuación, se muestra la rúbrica aplicada para la tarea 4

Tabla 23 Aplicación rúbrica tarea 4

Estudiante	Nivel criterio 1	Nivel criterio 2
E1	1	0
E2	1	0
E3	1	0
E4	2	1
E5	2	1
E6	2	2
E7	2	1
E8	2	2
E9	2	1
E10	2	1

Nota. Elaboración Propia

Es importante destacar que no todos los estudiantes de primer semestre completaron esta parte de la tarea debido a limitaciones de tiempo. Considero que, de haber contado con más tiempo, habrían podido responder con mayor profundidad y justificar sus respuestas adecuadamente. Pero en general, considero que sí encontraron las generalidades y relaciones que se esperaba de cada teorema. Por otro lado, los estudiantes de últimos semestres presentaron conjeturas y justificaciones con un lenguaje más formal, de tal manera que la mayoría identificara la regularidad de cada teorema, esto se podría atribuir a la experiencia adquirida a lo largo de su formación en la Línea de Geometría.

El análisis de las tareas propuesta permite evidenciar cómo los estudiantes de primer semestre tienen algunos conocimientos sobre las transformaciones geométricas, a partir de experiencias en diferentes contextos como; la vida cotidiana y su educación escolar, relacionando así este contenido con otras asignaturas (física) y/u objetos habituales como el espejo. Mientras que los estudiantes de últimos semestres muestran mayor formalidad en sus definiciones y se evidencia como los espacios de la Línea de Geometría aportaron a sus conocimientos respecto a las transformaciones geométricas en el transcurso de su carrera profesional, principalmente en el desarrollo de conocimientos, habilidades y competencias.

Entrevista a docentes

Al desarrollar las entrevistas a un total de seis profesores que hacen parte de la Línea de Geometría de la LM de la UPN, tuve la oportunidad de obtener información relevante para mi investigación.⁴

Una de las ideas principales es que la mayoría (4) de los docentes entrevistados (P1, P2, P3, P4) mencionan que actualmente no enseñan transformaciones geométricas en los espacios académicos que tienen a cargo. Sin embargo, P1 y P2, indican que antes de que se hiciera una renovación curricular en el plan de estudios de la LM, en algunas ocasiones en el curso de Elementos de Geometría se trataba dicho objeto geométrico en relación con el libro guía de este espacio titulado Elementos de Geometría (Samper et al., 2013). El último capítulo de este libro se titula Teselado y transformaciones. Sin embargo, por cuestiones de tiempos o eventos ocasionales de la universidad, no se abordaba en todos los semestres.

Por otro lado, P3 que tiene a cargo espacios optativos de la Licenciatura señala que en dichos cursos se estudian temas relacionados con las transformaciones geométricas, como lo son: fractales, funciones contractivas, entre otros. Aunque cabe resaltar que los cursos optativos de la Licenciatura no son obligatorios, por lo que no todos los estudiantes de la LM cursan dichos espacios. Otros docentes como P5 y P6 mencionan que hasta el semestre 2024-2 sí enseñaron las transformaciones geométricas en el curso de Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría. En este espacio se estudió rotación, traslación, simetría, si el tiempo alcanza, homotecia, y aspectos relacionados con la didáctica respecto a este contenido (errores, dificultades, diseño de tareas, entre otros).

Sin embargo, otros docentes (P1, P2 y P4) indicaron que no enseñan las transformaciones geométricas, puesto que por cuestiones de tiempo es complicado enseñar este concepto, ya que en la universidad se presenten diversos eventos que retrasan algunas actividades en los cursos. Además, los espacios de Elementos de Geometría, Geometría Plana, Geometría del espacio y Geometría Analítica ya están “saturados” con todos los contenidos que abordan actualmente, por lo que adicionar una nueva temática no es favorable. Aunque, en un

⁴ Las respuestas se mencionan por P1, P2, P3, ... relacionándolas con cada profesor(a) que participó en la entrevista con el fin de guardar su confidencialidad.

intervalo de tiempo se trabajó las transformaciones geométricas en Elementos de Geometría, con el pasar del tiempo ya casi no se enseñaba. Los docentes a cargo se percataron de que trabajar una geometría formal en primer semestre era muy complicado (P1 y P2) para los estudiantes de la LM, ya que no están acostumbrados a tener un estudio riguroso de la geometría en su educación escolar, por lo que decidieron modificar los objetivos de este curso en particular.

Además, todos los profesores señalan que es esencial que un FEM aprenda sobre las transformaciones geométricas, pues consideran que este contenido es objeto principal en el currículo escolar. Sobre todo, P5 señala, que es un tema divertido y llama la atención de los estudiantes de educación escolar, aporta significativamente con la alfabetización matemática, ayuda a tener una visión de lo estático y lo dinámico, y está relacionado en el contexto de la vida diaria, por ejemplo, en la identificación de patrones, la estética, el arte y los movimientos.

Sin embargo, es importante preguntarnos ¿en qué espacios académicos de la LM se debería enseñar las transformaciones geométricas?, P4 comenta que debería tratarse en la electiva de Geometría en primaria; en la Enseñanza y el Aprendizaje de la geometría, P1 y P3 opinan que podría desarrollarse cualquiera de los siguientes espacios: Elementos de Geometría, Geometría Plana, Geometría del espacio. Pero, es importante mencionar que, incluir este contenido en alguno de los tres espacios mencionados, requiere de un gran trabajo de parte de los profesores, pues se debería cambiar el sistema axiomático que se aborda actualmente. Otro docente (P5), alude a que debería haber un curso en la LM llamado didáctica de la geometría, dicho espacio se centraría en estudiar contenidos geométricos que no se alcanzan a estudiar en la LM, desde un punto una vista netamente matemática, pues también menciona que los espacios de la Línea de Geometría captan su atención en desarrollar procesos y es necesario que un FEM conozca “lo matemático” para abordar procesos en la enseñanza escolar.

Esta observación fue crucial para la renovación del currículo de la LM en el año 2018, pues al notar que es importante que un FEM tenga conocimientos de las transformaciones geométricas, y, no se alcanzaba a abordar en los espacios de la Línea de Geometría, el grupo de investigación de la Geometría concluye que, se desarrolle en el curso de La Enseñanza y

Aprendizaje de la Geometría. Pero ¿por qué este curso?, la respuesta resuena con lo anterior mencionado, y es que los demás cursos de la línea no tienen cabida, además de que se considera que es bueno que un FEM aprenda algo nuevo de geometría, a la vez que aprende algo de didáctica. También, se justifica con el argumento de que para estudiar didáctica se debe escoger un tema en el cual se trabaje, al notar que las transformaciones geométricas en la mayoría de las ocasiones no se enseñaban, por cuestiones de tiempo y saturación, este fue el designado.

Con lo mencionado antes, se concluye que efectivamente un FEM aprende sobre las transformaciones geométricas en el transcurso de la carrera, incluso no necesariamente en la Línea de Geometría, pues también se estudian transformaciones en cálculo, algebra lineal, entre otros espacios.

La opinión P2, P3, P4 de la Línea de Geometría recae en estar de acuerdo con adicionar el estudio de las transformaciones geométricas, en el curso de Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría, debido a las razones que ya mencioné con anterioridad. Mientras que P1 considera que este espacio no es oportuno para enseñar las transformaciones geométricas, pues este curso se debería centrar en lo didáctico, por lo que, no debería enseñarse un contenido matemático en este espacio.

En el semestre 2025-1, en el curso de Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría no se está estudiando las transformaciones geométricas, pues la docente a cargo menciona que hay otros contenidos geométricos, que no se alcanzan a estudiar en los otros espacios de la Línea de Geometría como lo son: sólidos, semejanza de triángulos y todo lo relacionado con métrica, por lo que decide, trabajar y centrar el espacio en sólidos. Además, de que menciona que como las transformaciones geométricas se han venido estudiando en los últimos semestres, decidió cambiarlo para hacer algo diferente en el curso. En el momento que tuve la oportunidad de dialogar con la docente a cargo del espacio Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría, le comenté si era posible estudiar todos estos objetos matemáticos faltantes, en este curso, de tal manera que se divida a los estudiantes que cursan dicho espacio, teniendo en cuenta estos contenidos carentes, con el fin de que los FEM estudien cada objeto, comparta sus conocimientos con sus compañeros y se tenga un proceso de aprendizaje colectivo, con algunas ideas básicas de cada tema. Sin embargo, la docente indica que esta actividad

requiere tiempo y que no es suficiente una “pincelada o brochazo” ya que se quedarían con una idea muy general de lo que es cada contenido. Incluso menciona que el proceso de conceptualización es importante para desarrollar una planeación para una clase y en algunas ocasiones esto no se logra en el curso, debido a la falta de tiempo. Desde mi punto de vista, concuerdo con la idea que tiene la docente respecto a una “pincelada o brochazo”, ya que como FEM debemos tener conocimientos amplios y profundos sobre los contenidos que enseñaremos a futuro, con el fin de comprender a profundidad los conceptos y procedimientos matemáticos. Además, este saber ampliado, brinda la capacidad de anticipar y resolver dudas complejas, adaptar las explicaciones a diferentes niveles de aprendizaje, entre otros beneficios.

Ahora bien en capítulos anteriores comenté que las transformaciones geométricas no son un contenido explícito en los syllabus de los espacios de la Línea de Geometría, según P5, esto sucede porque, cuando se hizo el diseño curricular de la Línea de Geometría, los docentes a cargo de esta actividad optaron por enfocarse con mayor profundidad en Geometría plana y Geometría del espacio, teniendo así un énfasis en la construcción de sistemas teóricos locales, esto requirió mucho esfuerzo y tiempo, para que los estudiantes logren desarrollar esa forma de trabajo en matemáticas.

Entrevista estudiantes primer semestre

Los estudiantes entrevistados de primer semestre expresaron que no recuerdan haber estudiado las transformaciones geométricas cuando cursaron la educación escolar. Sin embargo, un estudiante mencionó que asociaba un tema de física con reflexión pues en este curso le explicaron algo de esta transformación; otros estudiantes lo asociaron con ideas intuitivas de lo que es traslación, rotación y reflexión como los movimientos de la tierra y espejos. Sin embargo, ninguno reconoció lo que era homotecia, pues algunos de ellos lo observaron por primera vez cuando realizaron la última tarea de GeoGebra, mientras otra estudiante intuyó el procedimiento de cómo se realiza una homotecia en el instante que leyó el enunciado de uno de los puntos de las tareas propuestas.

Entrevista estudiantes último semestre.

Todos los estudiantes de últimos semestres entrevistados comentaron que, en el transcurso de la carrera, sí estudiaron las transformaciones en el curso de la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría. Allí se estudió rotación, traslación y reflexión como movimientos y como correspondencia; en el caso de la homotecia los compañeros indican que algunos lo trabajaron y otros no.

Además, los estudiantes entrevistados de últimos semestres consideran que es importante que se enseñe las transformaciones geométricas en la LM ya que en el currículo de matemáticas de las instituciones educativas se incluye la enseñanza y el aprendizaje de este contenido, así mismo, las transformaciones permiten estudiar otros conceptos del área de matemáticas, por lo que también es importante enseñarlas en la educación escolar.

Según los estudiantes entrevistados, si no hubieran estudiado las transformaciones geométricas, probablemente hubieran podido resolver algunos puntos relacionados con traslación y rotación por ideas intuitivas que tendrían en dado caso, sin embargo, uno de los estudiantes mencionó que no hubiera podido resolver las tareas propuestas, ya que ejemplifica que cuando cursó el espacio de la Enseñanza y el Aprendizaje de la Geometría, los FEM que estaban en dicho curso no tenían conocimientos de lo que son las transformaciones, a pesar de que ya habían cursado los otros espacios obligatorios de la Línea de Geometría. Así mismo, los estudiantes mencionan que estos espacios aportaron en su vida profesional para poder argumentar, conjeturar, demostrar, visualizar y a comprender que no todo lo que uno observa es cierto.

Por último, como ya se aludió con anterioridad, según docentes y estudiantes de la LM reconocen la importancia de que un FEM tenga conocimientos sobre las transformaciones geométricas, pero ¿qué debería saber un FEM sobre estas?; según algunos estudiantes, se debería tener en cuenta: definiciones, invariantes, teoremas asociados, aplicaciones y las relaciones con otras áreas para poder enseñarlas.

Conclusiones

Este trabajo presenta algunas evidencias de la importancia de fomentar la enseñanza y el aprendizaje de las transformaciones geométricas en la LM, dado que este objeto geométrico está presente en los documentos curriculares tanto nacionales como internacionales. Así mismo, estudiantes y docentes coinciden en que su enseñanza es fundamental, al considerar que forma parte de la educación escolar. Además, algunos de ellos destacan la relevancia de abordar este objeto de estudio en grados escolares, dado que su aplicación se extiende a diversos contextos como el arte, la música y otros ámbitos. De igual manera, reconocen que su estudio contribuye a una mejor comprensión de conceptos relacionados, como la congruencia, la semejanza y las funciones.

En el análisis de los syllabus de los espacios académicos de la Línea de Geometría, se planteó la hipótesis de que los espacios académicos Geometría en Primaria y Enseñanza y Aprendizaje de la geometría tienen una posible contribución a la Enseñanza y el Aprendizaje de las transformaciones geométricas, aunque no se evidenció de manera explícita en los syllabus que dicho contenido matemático sea abordado de forma específica. Por otro lado, en los otros espacios (obligatorios y optativos) de la Línea de Geometría no muestran evidencias sobre el aporte a la Enseñanza y el Aprendizaje de las transformaciones geométricas.

A partir de las entrevistas realizadas a seis docentes de la LM, se evidenció que, durante algunos semestres, las transformaciones geométricas eran abordadas en el curso de Elementos de Geometría. No obstante, debido a limitaciones de tiempo y a la sobrecarga de contenidos, este objeto matemático fue excluido de este espacio. Además, por esta misma razón, en los demás espacios académicos no se aborda este contenido. En el marco de un proceso de renovación curricular, una docente propone incorporar las transformaciones geométricas en el espacio de Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría. Sin embargo, esta inclusión se sostuvo hasta el semestre 2024-2, cuando otra docente al identificar que las transformaciones geométricas no eran el único objeto matemático ausente en la formación de FEM, puesto que la docente alude que dichos contenidos faltantes son: sólidos, semejanza de triángulos y todo lo relacionado con métrica, por lo que decide, trabajar y centrar el espacio académico en sólidos.

En relación con el objetivo planteado inicialmente elaboré una serie de tareas ateniendo a un análisis conceptual, matemático, y didáctico. A partir de esta actividad desarrollada con los algunos estudiantes de la LM, evidencí las diferencias en los conocimientos que tienen sobre las transformaciones geométricas, debido a que los estudiantes de últimos semestres muestran mayor formalidad en sus definiciones, deducciones y argumentos. Si bien, los estudiantes de primer semestre tienen ideas intuitivas algo acertadas sobre este tema, considero que dichos conocimientos no son suficientes para llevar a cabo un proceso de enseñanza y aprendizaje significativo en la educación escolar, cuando ellos sean profesores en ejercicio, pienso que el marco matemático (definiciones formales, diferencias entre sí, invariantes, teoremas y demostraciones) debe ser amplio y sólido para planear e implementar clases innovadoras y con sentido. Con esta idea resalto la importancia de la enseñanza y el aprendizaje de las transformaciones geométricas en el transcurso de la formación académica que reciben los estudiantes por el paso de la LM.

Por otro lado, según lo dialogado con algunos FEM, varios estudiantes señalan que no recuerdan haber abordado este objeto durante su educación escolar, por lo que planteo las siguientes tres hipótesis de por qué sucede esto: el desarrollo de clases en el que el docente define cada transformación y propone ejercicios en el que no se fomente ninguna habilidad o competencia; la falta de tiempo destinado a la enseñanza de la Geometría en algunas instituciones educativas y la dificultad para retener ciertos conocimientos. Capta mi atención la primera hipótesis, puesto que, si un docente de matemáticas comprende el sentido de enseñar un objeto matemático, es posible que logre un aprendizaje significativo en sus estudiantes. No obstante, para lograr este objetivo, un FEM debe tener conocimiento de los conceptos a enseñar.

Sobre los estudiantes que no abordaron las transformaciones geométricas en el espacio académico de la Enseñanza y el Aprendizaje de la Geometría, planteo la hipótesis de que no tienen conocimientos sólidos sobre este contenido, sino más bien ideas intuitivas, aunque más desarrolladas que las de los compañeros de primer semestre. Esta suposición surge a partir de lo dialogado con algunos docentes y estudiantes de la LM, quienes señalan que dicha temática no ha sido abordada formalmente en los otros espacios obligatorios de la Línea de Geometría en los últimos semestres; no obstante, sí ha sido mencionada en otros cursos como

Álgebra Lineal, Precálculo, entre otros. Cabe aclarar que esta es solo una hipótesis, ya que en el marco de mi investigación no se desarrolló un análisis concreto sobre este aspecto.

Según lo dialogado con otros compañeros de últimos semestres, consideramos que la carrera nos incentiva a tener un estudio autónomo. Incluso, todos los estudiantes entrevistados de últimos semestres consideran que sí hubieran podido aprender sobre las transformaciones geométricas por sí solos. Sugiero el libro titulado “El grupo de las isometrias del plano”(Gutierrez y Jaime, 1996) y el libro de “Traslaciones, giros y simetrias en el plano”(Gutierrez y Jaime, 1986), como material de estudio y como recurso para diseñar planeaciones de clase, porque considero que son trabajos que muestran definiciones y teoremas con lenguaje formal y ayudan a la comprensión de las transformaciones geométricas a partir de tareas claras y concisas. Sin embargo, al evidenciar que las transformaciones geométricas están presentes en los documentos curriculares y que tanto estudiantes como docentes consideran que se deba enseñar en la LM, no está demás que se incluyan en el plan de estudios. Conuerdo con una propuesta de uno de los docentes entrevistados que sugiere de abrir un espacio académico en el que los FEM logren desarrollar la enseñanza y el aprendizaje de otras temáticas de la Geometría, que no se logran abarcar en los espacios de la Línea de Geometría, y que estén propuestos en los documentos curriculares. Dicho espacio tendría como objetivo profundizar aquellos contenidos que cumplan con esta característica.

Teniendo en cuenta los conocimientos que deberían tener los FEM acerca de las transformaciones geométricas según lo planteado en el marco teórico, considero que la LM ha aportado significativamente en varios aspectos. En primer lugar, ha contribuido al desarrollo de conocimientos sobre recursos, ya que el espacio de enseñanza y aprendizaje de la geometría resalta la fundamentación conceptual y promueve el desarrollo de un conocimiento teórico-práctico en aspectos específicos de la didáctica de la geometría. Esto permite que los FEM reflexionen sobre cómo enseñar los objetos geométricos en el aula. Asimismo, los conocimientos acerca de las competencias y habilidades están presentes en la mayoría de los espacios de la LM, los cuales buscan trabajar principalmente estos aspectos con los FEM a partir del estudio de varios objetos geométricos. De manera similar, los conocimientos sobre procesos también se abordan dentro de estos espacios de la Línea de

Geometría. Estos conocimientos surgen a partir de la elaboración de sistemas teóricos, situaciones problema, entre otras circunstancias. En cuanto a los conocimientos conceptuales sobre las transformaciones geométricas, estos se desarrollan parcialmente, ya que, por razones de tiempo, solo se trabajaron en algunos espacios académicos específicos. Según lo analizado de las entrevistas implementadas este conocimiento, se trabajó de manera articulada con las matemáticas propias y la didáctica durante algunos semestres posteriores de la última renovación curricular. Aunque antes de esta renovación en algunos cursos se desarrollaba de este conocimiento conceptual en el curso de Elementos de geometría, a partir de un texto guía.

Es decir, los espacios académicos de la Línea de Geometría contribuyen al conocimiento de las transformaciones geométricas, haciendo así aportes como el desarrollo de diferentes habilidades como la exploración, la visualización, el razonamiento deductivo, la conjeturación, la demostración, entre otras, y/o en el desarrollo de conocimientos matemáticos y didácticos propios de las transformaciones geométricas. Para mayor especificidad, desde la última renovación curricular en la LM hasta el semestre 2024-1, el espacio académico de Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría ha permitido “avanzar” de conocimientos intuitivos hacia saberes más cercanos al nivel especializado. Esto se evidencia en el estudio de las definiciones, representaciones, propuestas de enseñanza y aprendizaje en la educación escolar e implementación y evaluación de estas. Sin embargo, no se realiza un estudio formal de este contenido e incluso no se logra estudiar la homotecia, debido a limitaciones de tiempo, objetivos establecidos para el curso, entre otras razones.

A partir de lo expuesto anteriormente, se puede afirmar que los objetivos de mi investigación fueron cumplidos de manera efectiva mediante el uso de la estrategia investigativa. Cada proceso del plan de ejecución contribuyó directamente al cumplimiento de los propósitos establecidos. Principalmente en seguimiento cercano al caso, fundamento teórico, análisis del caso y producción de resultados.

Reflexiones

El desarrollo de esta investigación me aportó significativamente en los ámbitos personal, investigativo y matemático. En el plano personal, valoro haber escuchado distintos puntos de vista, haber comprendido el impacto de realizar una actividad con estudiantes de primer semestre y haber intentado motivarlos para que confiaran en mí y no me vieran como una autoridad. Asimismo, tuve el privilegio de aprender de docentes expertos en el tema y considerar sus aportes en el desarrollo de esta investigación.

Además, me aportó para tener un pensamiento más crítico y reflexivo. A medida que avanzaba en el trabajo, surgían nuevas hipótesis y cuestionamientos que enriquecieron el proceso investigativo, como, por ejemplo: ¿Por qué enseñamos y aprendemos sobre las transformaciones geométricas?, ¿cuál es el impacto de los espacios académicos de la Línea de Geometría en nuestra formación como FEM?, entre otras. Además, me informé sobre diversas concepciones, investigaciones, aportes y perspectivas en torno al tema central de esta investigación. En el ámbito matemático, destaco el estudio de distintas definiciones, teoremas y sus respectivas demostraciones, los cuales profundicé gracias al proceso de aprendizaje que he vivido a lo largo de mi formación como FEM.

Referencias

- Ávila, C., Varela, J. (2019). *Moviéndonos en el plano a ciegas*. Universidad Pedagógica Nacional.
- Buchanan, L., Fensom, J., Kemp, E., Rondie, P., & Stevens, J. (2015). *Matemáticas nivel medio*. Oxford University Press. <https://doi.org/9780198338765>
- Barrantes, H. (2019). *Simetría y transformaciones geométricas en el plano, algunas ideas para su enseñanza*. Costa Rica
- Camargo, L. (2021). *Estrategias cualitativas de investigación en educación matemática: Recursos para la captura de información y análisis*. Editorial Universidad de Antioquia . <https://doi.org/978-958-501-036-9>
- Chuaqui, M., & Riera, G. (2011). *Transformaciones en geometría euclidiana y no euclidiana*. Univeridad Católica de Chile. <https://doi.org/978-956-306-075-1>
- Clemens, S., & Cooney, T. (1989). *Geometría con aplicaciones y solución de problemas*. Addison-Wesley Iberoamericana . <https://doi.org/0.201.64407>
- Cordoba, Z., Iguad, L., Blanco, H. (2022). *Geometría indígena y currículo escolar. Una revisión del estado del art*. Universidad de Nariño. <https://doi.org/2027-064>
- Estruch, V., Gregori, V., & Roig, B. (2018). *Geometría Euclidea*. Universidad Politécnica de Valencia . <https://doi.org/978-84-9048-729-7>
- Folgueiras, P. (2016). La entrevista. <https://diposit.ub.edu/dspace/bitstream/2445/99003/1/entrevista%20pf.pdf>
- Fonseca, J., & Sanchez, B. (2007). Algunas trasformaciones en el plano. <https://doi.org/oai:generic.eprints.org:11462/core475>
- García, D., Martin, R. (2023). *Competencia matemática y digital del futuro docente mediante el uso de GeoGebra*. Universidad Rey Juan Carlos. <https://doi.org/10.17163>
- Grossman, S., & Flores, J. (2012). *Algebra Lineal*. University of Montana y Universidad College London. <https://doi.org/978.607.15.0760.0>

- Gutierrez, A., & Jaime, A. (1986). *Traslaciones, giros y simetrias en el plano*. Universidad de Valencia. <https://doi.org/84.600.4275.8>
- International Baccalaureate Organization. (2019). *Mathematics: analysis and approaches guide*. Reino Unido
- Jaime, A., & Gutierrez, A. (1996). *El grupo de las isometrias del plano*. SÍNTESIS, S.A. <https://doi.org/84.7738.346.4>
- Ministerio de Educación Nacional . (2016). *Derechos basicos de aprendizaje*. Colombia.
- Ministerio de Educacion Nacional. (2006). *Estándares basicos de competencias*. Colombia.
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares de las matematicas*. Colombia.
- Ministerio de Educación Nacional. (22 de Agosto de 2018). *Mineducación*. <https://www.mineduacion.gov.co/portal/micrositios-preescolar-basica-y-media/Direccion-de-Calidad/Referentes-de-Calidad/339975:Lineamientos-curriculares>
- Ministerio de Educación Nacional. (14 de noviembre de 2024). *Mineducación*. <https://www.mineduacion.gov.co/1621/article-87440.html>
- Morales, A., Locia, E., Salmerón, P (2016). *Recursos heurísticos para la actividad de enseñanza de las transformaciones geométricas en el nivel preuniversitario*. Universidad de Matanzas Camilo Cienfuegos. <https://doi.org/1682-2749>
- National Council of Teachers oh Mathematics. (2000). *Principles and Standards for school mathematics*. <https://doi.org/0-87353-480-8>
- Ramirez, R., & Fernandez, J. (2018). *Isometrías en la resolución de problemas y obras de arte*. Universidad de Granda.
- Robayo, L. (2021). *Transformaciones geométricas en el plano con proyección cultural y aporte a la paz*. Universidad Pedagógica Nacional.
- Samper, C., Echeverry, A., & Molina, O. (2013). *Elementos de Geometría*. Universidad Pedagógica Nacional . <https://doi.org/9789588650463>

Santacruz, M., & Sacristan, I. (2019). *Una mirada al trabajo documental de un profesor de primaria al seleccionar recursos para enseñar geometría*. Cinvestav. <https://doi.org/10.24844>

Universidad Pedagógica Nacional . (2024). Syllabus de Geometrías no euclidianas.

Universidad Pedagógica Nacional. (2024). Syllabus de Geometría en primaria.

Universidad Pedagógica Nacional. (2024). Syllabus de Elementos de Geometría.

Universidad Pedagógica Nacional. (2024). Syllabus Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría.

Universidad Pedagógica Nacional. (2024). Syllabus Geometría Analítica.

Universidad Pedagógica Nacional. (2024). Syllabus Geometría del espacio.

Universidad Pedagógica Nacional. (2024). Syllabus Geometría Plana.

Anexos

Definiciones

D. Ángulo: La unión de dos rayos que comparten el vértice y no son rayos colineales.

D. Ángulos congruentes: Dos ángulos son congruentes si sus medidas son iguales.

D. Angulo recto: Un ángulo es recto si su medida es 90.

D. Colinealidad: Tres o más puntos son colineales si pertenecen a la misma recta.

D. Conjuntos iguales: Dos conjuntos son iguales si y solo si contienen los mismos elementos.

D. Distancia entre dos rectas paralelas: Sea $l \parallel m$ y un punto P tal que $P \in l$. Sea $\overline{PQ} \perp m, Q \in m$. \overline{PQ} es la distancia entre l y m .

D. Equidistancia: Dos o más puntos equidistan de un punto dado si y solo si las distancias de tales puntos al punto dado son iguales entre sí.

D. Interestancia: El punto B está entre los puntos A y C si:

1. A, B y C son colineales y
2. $AB + BC = AC$

D. Mediatriz: Dado el \overline{PQ} . En un plano, la mediatriz del \overline{PQ} es la recta perpendicular al segmento que contiene su punto medio.

D. Punto medio: M es punto medio del \overline{AB} si se cumplen las siguientes condiciones:

1. A, M y B son puntos colineales
2. $AM = MB$

D. Rectas perpendiculares: dos rectas, segmentos o rayos son perpendiculares si determinan un ángulo recto.

D. Triángulos congruentes: Dos triángulos son congruentes si existe una correspondencia entre los vértices de uno de los triángulos y los del otro, de tal forma que los ángulos y sus lados sean congruentes.

Postulados

P. Adición de medida de ángulos: Si $C \in \text{int}\angle DAB$ entonces $m\angle DAC + m\angle CAB = m\angle DAB$.

P. Ángulo-número: A cada ángulo le corresponde un único número real entre 0 y 180.

Lado ángulo lado (L.A.L.): Dados $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$, si $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ y $\angle BAC \cong \angle EDF$, entonces $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Teoremas

T. Mediatriz: Dados \overline{AB} y M mediatriz de \overline{AB} , si $p \in m$ entonces $\overline{AP} \cong \overline{BP}$

Principios y propiedades

P. Sustitución: Si $A = B$, entonces para cualquier propiedad P que sea cierta para A , también será cierta para B .

Prop. Reflexiva: Sea A un objeto geométrico, y R una relación que exprese igualdad, congruencia o semejanza, entonces A se relaciona con A .

Prop. Transitiva: Si $A = B$, $B = C$ entonces $A = C$.