APROXIMACIÓN AL PENSAMIENTO VARIACIONAL MEDIANTE LA MECÁNICA CUÁNTICA EN ESTUDIANTES DE QUINTO DE PRIMARIA

Jefferson Arley Garcia Carreño

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

BOGOTÁ D.C.

2022

APROXIMACIÓN AL PENSAMIENTO VARIACIONAL MEDIANTE LA MECÁNICA CUÁNTICA EN ESTUDIANTES DE QUINTO DE PRIMARIA

Jefferson Arley Garcia Carreño

Trabajo de grado para obtener el título de Licenciado en Física

Asesora: Sandra Bibiana Avila Torres

Línea de Profundización: La enseñanza de la física y la relación física matemática

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

BOGOTÁ D.C.

2022

AGRADECIMIENTOS

Agradezco y dedico este trabajo a mis padres Antonio y Nazareth, quienes hicieron un gran esfuerzo para cumplir esta meta grupal y me dieron todo el amor que pudieron, a mis hermanas Julieth y Sara, quienes con su apoyo me llenaron de "energía" en cada uno de los momentos difíciles en los que estuve inmerso, a mi tía María, quien siempre estuvo a mi lado para rodearme de concejos, a mis amigos, que sin entender mucho de los que les decía me orientaban para avanzar por el camino menos arduo, a aquellos integrantes de mi familia que estuvieron pendientes de mi proceso académico, a mi asesora por caminar conmigo en la construcción, desarrollo y finalización de esta loca idea, a cada persona que en pasillos y sitios de la universidad, citas y en cada trago me incentivaban a ser mejor persona y por último a cada persona que hoy ya no está y a la misma universidad por hacer de mi lo que soy. Es por esto que a cada persona mencionada les doy un gracias totales.

Contenido

Tabla de imágenes

Tabla de ecuaciones

Nomenclaturas

M.C: Mecánica cuántica

P.V: Pensamiento variacional

MEN: Ministerio de Educación Nacional

Introducción

El presente trabajo tiene como propósito la presentación de diferentes actividades que permitan el fortalecimiento del pensamiento variacional en estudiantes de quinto de primaria a través de actividades experimentales, donde el principio de superposición desde la mecánica cuántica sea el principal componente. Esta investigación surge de un ejercicio de indagación donde se analizó cómo se ha dado la enseñanza del pensamiento variacional en los colegios en Colombia, el cual es uno de los estilos de pensamiento que propone el MEN y que se espera sea desarrollado en el progreso académico de los estudiantes a medida que cursan el nivel de básica. Se encontró que este no es abordado directamente en los cursos, debido a factores que se van a resaltar en la problemática, junto con la manera en la que se enseña la física en la escuela, con el fin de proponer la pregunta problema y los objetivos que fueron guía a lo largo de la investigación.

Posteriormente, se presentan los antecedentes que sirvieron para dar fundamento la idea desarrollada, resaltando la importancia de enseñar la mecánica cuántica en la escuela y el desarrollo del pensamiento variacional, ya que estos permiten generar espacios en los que los estudiantes puedan ser partícipes de sus procesos de enseñanza aprendizaje, esto permite que sean formados como sujetos críticos y científicos.

Adicional a esto, para dar cumplimiento con los objetivos específicos propuestos el documento se organizó en tres capítulos, los cuales se sintetizan de la siguiente forma:

El capítulo I, presenta una problematización histórica de diferentes situaciones en las que el pensamiento variacional ha influido de manera indirecta en la construcción de ciencia, como por ejemplo la formulación de la función abordada desde los estudios de movimiento desde las bases conceptuales de los griegos, pasando por las descripciones gráficas de Oresme, los análisis de Galileo, las concepciones de Newton y Leibniz, hasta llegar a la definición de ésta como una relación entre conjuntos. Luego, describe, algunas interpretaciones del pensamiento variacional en los procesos de enseñanza-aprendizaje, para esto, se emplean autores como Vasco (2002), MEN (2006), Cabezas y Mendoza (2016), Grozdev y Terzieva (2010) y Cantoral (2004), con el fin de proponer una concepción de este pensamiento. Seguido de un análisis de conceptos físicos, como estado, estado cuántico, principio de superposición desde la mecánica clásica y una contextualización de cómo Bohr entendía el principio de superposición desde una perspectiva cuántica. Por último, se da una interpretación del experimento mental del gato de Schrödinger con el fin de dar una relación más evidente entre la mecánica cuántica y el pensamiento variacional, teniendo en cuenta el uso de la modelación.

El capítulo II, se centra en la descripción de la metodología pedagógica usada para la implementación de la secuencia de aprendizaje construida de acuerdo con los objetivos específicos propuestos. Esta metodología pedagógica, es una articulación entre el pensamiento activo, la actividad experimental en la enseñanza de la física y la pedagogía de la pregunta, debido a que se consideró el aula como un espacio dinámico. Además, se presentan los criterios del pretest realizado con el fin de recolectar información sobre el estado del pensamiento variacional en el que se encontraban los estudiantes y realizar un análisis de los datos recolectados, para de esta manera finalizar con los resultados y algunas recomendaciones para cumplir con lo que se estableció.

En el capítulo III, se describen las actividades implementadas para fortalecer el pensamiento variacional de los estudiantes, posteriormente, se dan unos criterios que ayudan a analizar como los estudiantes interpretaron las actividades propuestas. También, se presenta el taller que constituye el postest realizado a los educandos, resaltando los mismos criterios empelados en el pretest, con el fin de analizar el nivel del pensamiento variacional de los estudiantes luego del desarrollo de las actividades. Finalmente, se presenta un análisis comparativo entre los resultados del pretest y el postest para evidenciar el potencial que tiene la propuesta en estos entornos de aprendizaje. Por último, pero no menos importante, se dan unas conclusiones que se establecen desde la pregunta problema, el objetivo general y los objetivos específicos.

Planteamiento del problema

Se vive actualmente una época donde la información está al servicio de las personas que tengan a la mano un dispositivo electrónico con conectividad a internet, aquí la cultura se ve obligada a estar en un continuo cambio debido a las problemáticas sociales, económicas y consumistas de las poblaciones. Lo anterior, permite redefinir el rol y la implementación de la educación en el país, dejando de lado las prácticas tradicionales de enseñanza, para pasar a otras maneras de orientar los procesos de aprendizaje en los estudiantes (Moreno Fernández & Herrera Beltrán, 2016) (Bauman, 2004), que les ayude a construir su conocimiento y a la resolución de problemáticas desde su contexto y de este modo, pase a segundo plano la trascripción y repetición de la información necesaria a lo largo del proceso.

Alrededor de la enseñanza de la física, se percibe que en los ciclos de básica secundaria y media las teorías a estudiar son la mecánica newtoniana, la teoría ondulatoria y el electromagnetismo clásico (Ministerio de Educación Nacional, 2006). Las prácticas más empleadas para la enseñanza de dichas teorías se puede encontrar una transcripción y repetición de la información almacenada en los libros de física, donde en ocasiones se deja de lado las interpretaciones de las ecuaciones y los conceptos de las teorías, y el estudiante destacado es aquel que memoriza dichas formulas logrando así una buena calificación (Ramírez Casallas, 2013) (Jara, 2005); También se encuentran las practicas experimentales o actividades experimentales que los estudiantes pueden desarrollar a lo largo de sus clases, en ésta, la problemática radica en que en algunas ocasiones se deja de lado la formalización matemática (Jara, 2005) (Malagón Sánchez, Ayala Manrique, & Sandoval Osorio, Construcción de fenomenologías y procesos de formalización, 2013).

Como se puede observar, desde los estándares básicos de aprendizaje del Ministerio de Educación Nacional (MEN) (2006) la enseñanza de la física es un requerimiento en los ciclos de básica y media en Colombia, sin embargo, se podría decir que la gran mayoría de colegios públicos y privados solo se enfocan en la enseñanza de la física clásica. Por lo cual, se puede concluir que se deja de lado la enseñanza de la física moderna en la educación básica secundaria, cuyas teorías han servido de base para la física contemporánea (Sinarcas & Solbes, 2013). Si un docente quiere introducir las teorías modernas en el aula de clase, debe buscar ramificaciones; lo cual se evidencia en el estándar especifico del ciclo de 10° a 11° ubicado en el entorno físico y procesos físicos se tiene la siguiente propuesta: “establezco relaciones entre el modelo del campo gravitacional y la ley de gravitación universal” (p.141) dicho estándar no deja claro qué tipo de teoría es la más acorde de enseñar para satisfacer lo pedido, algunos docentes pueden interpretar que se busca enseñar la teoría gravitacional de Newton mientras otros lo pueden relacionar con la teoría la relatividad de Einstein. Esto no solo pasa con este estándar sino en general, con los que se encuentran en este mismo entorno, lo cual genera un estado preocupante, porque desde los documentos del MEN no se está incentivando la enseñanza de la física moderna.

Con respecto a la enseñanza de la física en el ciclo de básica primaria, ésta se orienta a partir de la clase de ciencias naturales, porque no existe la asignatura de física, química o biología; en este caso, los docentes prefieren centrar sus cursos en la enseñanza de la biología, haciendo un breve acercamiento a los temas de química o física, un posible factor de ello, sea el tiempo dedicado por semana en las instituciones educativas, ya que, por lo general las asignaturas de matemáticas y lenguaje son consideradas más importantes que las demás en estos niveles de escolaridad, debido a los procesos lingüísticos y lógico-matemáticos que se deben desarrollar en estos grados (MEN, 2006)(MEN, 2016)

A su vez, uno de los temas centrales de física en este ciclo es el modelo atómico, basando su enseñanza en dar vagamente una idea de cómo es la estructura atómica: el átomo se concibe como la parte indivisible de la materia, la cual se compone de neutrones, protones y electrones, dejando el trasfondo de modelo a niveles de escolaridad superiores (Perez Mora, 2016). Sin embargo, en la enseñanza de la astronomía, más puntualmente la enseñanza del sistema planetario se la asignan a las ciencias sociales, donde se puede dejar de lado el pensamiento científico, dependiendo de la finalidad que el docente le asigné al tema.

Desde lo anterior, se encuentra que los estudiantes del ciclo de básica primaria no aprenden para un pensamiento enfocado a la física moderna o contemporánea, sino para un pensamiento clásico, enfocando a estudios físicos que en la actualidad son vistos desde otras perspectivas, además, como se mencionó la época ha traído otro tipo de implicaciones que han obligado a establecer otros tipos de pensamientos.

Estos tipos de pensamiento, son complejos de desarrollarlos en el entorno educativo debido a que se prima la enseñanza de las temáticas y el terminar de manera acorde los planes curriculares y por ende pocos maestros se centran en desarrollarlos, como pasa con el estilo de pensamiento desarrollado para la comprensión y el estudio de la física moderna (Jara, 2005) (Sinarcas & Solbes, 2013), por lo cual se propone introducir éste a partir de uno de los tipos de pensamientos que se abordan en matemáticas desde los estándares básicos de aprendizaje: el pensamiento variacional; por su parte, este pensamiento es poco desarrollado y abordado en la escuela (Cárcamo Barriosnuevo, Maury Mancilla, & Palmezano Sarmiento, 2012), esta afirmación se da, porque desde su definición se percibe como algo complejo, en ocasiones se sobre entiende que con el trabajo de los demás pensamientos ya se puede desarrollar. También por la forma en la que se perciben las matemáticas en los primeros grados de escolaridad, dicha forma se centra en el entendimiento de las operaciones básicas y en el valor de los números, dejando a un lado la percepción de la variación en los contextos, es decir, las variaciones que se dan en el entorno y a partir de éstas como construir descripciones. Por último, dicho pensamiento es poco conocido debido a la falta de documentación sobre éste, en relación con las variaciones en los patrones que se perciben, ya que lo definen más para el trabajo y la enseñanza del algebra y del cálculo (Obando, Posada, & autores, Interpretación e implementación de los estándares básicos de matemáticas, 2005) (Cabezas & Mendoza, Manifestaciones emergentes del pensamiento variacional en estudiantes de cálculo inicial, 2016).

Con base en lo anterior, surge la propuesta de trabajar el pensamiento variacional desde la mecánica cuántica, enfocándose en el principio de superposición. La propuesta se encamina desde experimentos (incluyendo los mentales), razón por la cual surge la siguiente **pregunta problema**:

¿Cómo fortalecer el pensamiento variacional a través del principio de superposición en la mecánica cuántica, para estudiantes de quinto de primaria, mediante el uso de experiencias en el aula y experimentos mentales?

Objetivos

Objetivo general

Proponer una estrategia para el desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de quinto de primaria, por medio de experiencias en el aula donde se aborde el principio de superposición desde la mecánica cuántica.

Objetivos específicos

- Realizar una deconstrucción de la noción del principio de superposición desde la mecánica cuántica y la concepción e importancia del pensamiento variacional.
- Identificar el estado del pensamiento variacional en los estudiantes de quinto de primaria mediante un pretest a partir de diferentes situaciones en donde la variación se presente desde patrones de recurrencia o desde relaciones entre diferentes contextos.
- Realizar una propuesta de actividades a partir de experiencias y experimentos mentales, donde se presente el principio de superposición desde la mecánica cuántica.
- Evaluar los resultados del diagnóstico inicial con los resultados obtenidos luego de la aplicación de las actividades alrededor del pensamiento variacional.

Antecedentes

Desde el planteamiento de tres categorías se pudo encontrar tres antecedentes, cada antecedente representa una categoría, cada categoría corresponde a un concepto primordial para el presente proyecto. La primera categoría se centra en el papel del pensamiento variacional en la enseñanza de las matemáticas y como se ha transformado con el paso del tiempo. La segunda categoría, describe el rol e importancia de los experimentos para abordar conceptos básicos de la mecánica cuántica y la última categoría da cuenta de la enseñanza de la mecánica cuántica en la escuela.

El primer antecedente es un artículo de la revista Formación Universitaria vol. 9(6) cuyos autores son Cabezas y Mendoza titulado “Manifestaciones emergentes del pensamiento variacional en estudiantes de cálculo inicial” del año 2016. En éste, se hace una introducción sobre el pensamiento variacional, su origen, implementación y objetivo en la educación de las matemáticas. Luego, definen el pensamiento variacional desde diferentes autores, como Carlos Vasco (2003, 2006), Cantoral y Farfán (2003), MEN (2006), Grozdev, y Todorka, (2010), Carlson (2002), Arcavi (2003), entre otros, pero la mayoría concuerda en concebir el pensamiento variacional como un estilo de pensamiento importante para la enseñanza de las matemáticas.

La metodología empleada es el enfoque Onto-Semiotico, el cual se usó para el análisis de datos, en este caso, para el análisis de pruebas diagnósticas, talleres y sesiones de estudio. La importancia de este articulo al presente trabajo es el abordaje sobre el origen, definición, implementación y rol en la educación del pensamiento variacional, puesto que da referentes bibliográficos, además de esto, proponen el análisis de datos desde la creación de categorías, lo que permite un análisis de la información un poco más detallada y organizada.

El segundo antecedente es un trabajo de grado para el título de Lic. En Física de la Universidad Pedagógica Nacional de Luz Angélica Walteros Rodríguez en el año 2016 titulado “Actividades experimentales para la construcción de explicaciones alrededor de los fundamentos básicos de la mecánica cuántica”. El documento inicia presentando el uso de los experimentos a través de la historia, en especial en los dos últimos siglos. Luego, define la noción de estado y el principio de superposición como lo trabaja Dirac, pero se retoma la notación que emplea Feynman entorno al experimento de Stern-Gerlach y finalmente revisa actividades experimentales con polarizadores. Por último, establece y menciona la aplicación de los experimentos que a su parecer pueden ayudar a definir la noción de estado y el principio de superposición desde la mecánica cuántica. Este trabajo de grado permite construir bases sobre la importancia que tienen las actividades experimentales en la enseñanza de la mecánica cuántica, también, permite pensar en actividades que se puedan implementar en el aula con el fin de introducir la idea de superposición de estados.

El tercer antecedente es un trabajo de grado de maestría de la Universidad Nacional titulado “Enseñanza de la mecánica cuántica en la escuela media a partir del concepto de superposición” de Gustavo Eduardo López Ramírez en el año 2014. En esta investigación aclara el carácter cualitativo del trabajo realizado, aplicando un tratamiento naturalista e interpretativo al estudio de casos. Se centra en la dinámica presente en la comprensión del concepto de superposición en mecánica cuántica y describe cómo realizó la recolección por medio de guías y el análisis desde la sistematización de redes pedagógicas, para cada una de las guías trabajadas. Por último, concluye y resalta unas recomendaciones para aquellas personas que desean dar la enseñanza de mecánica cuántica desde la informática.

De este documento se resalta la metodología usada para el análisis de la información mediante la sistematización de redes pedagógicas, la cual se da desde la aplicación e implementación de recursos didácticos en el aula de clase. Además, en las recomendaciones un punto importante es la extensión y contenido de las guías para evitar el agotamiento de los estudiantes, así como la linealidad en la implementación que evite la confusión en los estudiantes, lo cual es evidente en las guías propuestas y aplicadas por el autor.

Capítulo 1 Análisis de la relación entre el pensamiento variacional y la mecánica cuántica

Cuando se realiza un acercamiento al estudio de la mecánica cuántica, por lo general se dejan de lado las percepciones y consideraciones empleadas cotidianamente para la indagación de fenómenos físicos; por ejemplo, en el caso del movimiento de un cuerpo convencionalmente se asigna una posición específica en un determinado tiempo, es decir, si éste se encuentra en las coordenadas 0,0,0 (el origen) establecidas por un plano cartesiano tridimensional cuyos ejes son X, Y, Z, al origen le corresponde uno y solo un tiempo, siempre que no se esté estudiando un movimiento circular o periódico. Este tiempo se puede escribir como $t_0 = 0\ s$, ya que se parte de la concepción de la linealidad temporal, por tanto, el cuerpo no se podría encontrar en otras coordenadas a los ceros segundos y en consecuencia en $t_1 = 1\ s$ el objeto va a estar en otras coordenadas espaciales bien definidas. Al momento de unir los puntos de la posición de t_0 a t_1, se obtendría una película (la trayectoria), y agregando más puntos en diferentes tiempos se tendría una noción del movimiento del objeto.

Ahora bien, si consideramos un objeto cuántico como un electrón u otra partícula, las consideraciones establecidas anteriormente no servirían para definir con certeza el movimiento de la partícula (trayectoria), debido a que, al tener un comportamiento dual, como partícula y como onda, requiere de la observación para definir su posición. Aplicar un observable sobre este tipo de objetos genera alteraciones en el estado de este, y si no se aplica un observable la partícula tiene una posición indeterminada. Este es solo un breve ejemplo respecto al comportamiento de las partículas cuánticas que llevó a los físicos a replantease la forma de explicar su comportamiento, en específico la forma en que se aborda el principio de superposición, el cual va a ser desarrollado algunos apartados más adelante en este texto.

Retomando el estudio del movimiento de un cuerpo desde una mirada clásica, lo normal es asociarle una función real que logre describir su comportamiento en el espacio, estableciendo variables de estado como la posición y el tiempo, el tiempo se toma como una variable independiente, mientras que la posición se considera la variable dependiente y la relación en términos de variación entre estas son las que logran describir el movimiento del cuerpo.

Si bien, hasta el momento se ha mencionado el estudio del movimiento de un cuerpo desde la idea de funciones, es decir desde la relación entre dos variables, aun no se ha definido lo que es una variable, o más puntualmente lo que implica que algo varié con respecto a un factor. Por otro lado, con la concepción de número a lo largo de la historia, se puede visualizar cómo el pensamiento variacional ha estado enfocado en diferentes conceptos de las ciencias naturales, como por ejemplo en la construcción de la idea de función, siendo éste un concepto transversal y fundamental para la formalización de múltiples fenómenos físicos, para mayor descripción e información de dicho proceso se recomienda ver el Anexo 1.

1.1 Breve construcción del concepto del pensamiento variacional desde diferentes enfoques

Retomando la idea principal sobre la definición de variable, hasta el momento solo se ha mencionado los temas en los que se usa la variación para la comprensión de algunos fenómenos y aspectos cotidianos, como los planteados con la necesidad de establecer un sistema numérico en la antigüedad, aspectos de proporcionalidad, en especial en torno a la música y aún más evidente con las definiciones que ha tenido el concepto de función. Sin embargo, estos aspectos permiten entender un poco el concepto de variable, entendida como aquella cantidad que puede estar sometida a perturbaciones o cambios, bien sean de manera proporcional, de forma que indiquen patrones en su tasa de cambio; estas perturbaciones van a depender de otra cantidad que éste relacionada con las condiciones específicas de cada problema. Como por ejemplo las variaciones que estaban presentes en la construcción del sistema numérico dependían de las condiciones específicas, como por ejemplo el lenguaje y la interpretación que cada tribu podría tener en torno a un mismo número. Además, en el análisis del concepto de función, las variables especificas estaban relacionados con los temas de interés de cada uno de los matemáticos que realiza el estudio.

Todo lo anterior, permite pensarse sobre el estilo de pensamiento empleado en cada uno de los temas presentados y curiosamente, todos los temas, tenían en común situaciones de cambio o de variación, esto implica que la variación debe ser un factor relevante en el pensamiento empleado en la resolución de los “problemas”. Esto indica que, para la solución de cada uno de los problemas, en especial en el caso del estudio de las funciones, este estilo de pensamiento es predominante, lo cual determina las implicaciones que tienen las variaciones en los fenómenos físicos, que en su mayoría se estudian asociando una función para la su comprensión. Pero también, este estilo de pensamiento debe ser capaz de emplearse en el caso de situaciones comunes, como por ejemplo en el caso de la construcción de un sistema numérico, la observación de cuerpos celestes y situaciones del entorno.

Esto no solo muestra a la ciencia y la matemática como construcciones sociales y culturales, sino evidencia la necesidad de poder establecer modelos que den cuenta de los fenómenos que están en la cotidianidad de los individuos y a su vez aquellos que el mismo hombre crea; la necesidad está ampliamente relacionada con la forma en la que se comunican las teorías estudiadas, ya que la modelación debe satisfacer la teoría al ser una estructura especifica en la que los parámetros pertinentes están íntimamente relacionados con las condiciones de los fenómenos o situaciones estudiadas (Fraassen, 1980).

Además, el estilo de pensamiento empleado debe tener otra característica primordial: facilitar la interpretación de las situaciones de estudio, considerando todos los factores que puedan perturbar al escenario y que se pueda aplicar a cualquier situación estudiada, es decir, con base en esta característica hacer que el comportamiento del fenómeno sea el mismo para cualquier escenario (invariante), y al mismo tiempo la interpretación del fenómeno pueda ser comprensible para cualquier persona, para ello se debían entablar modelos que dieran razón del fenómeno. Un ejemplo de esto es la teoría de latitudes de Oresme donde se evidencia una primera representación gráfica de cómo es posible pensarse las diferentes situaciones de cambio.

El pensamiento que satisface los dos aspectos anteriormente mencionados es el pensamiento variacional (PV), que como su nombre lo indica está relacionado con las variaciones o más puntualmente con las situaciones de cambio, pero este pensamiento también se encuentra enfocado en modelar diferentes situaciones problema.

El pensamiento variacional en el sector educativo colombiano ha estado presente desde la década de 1960 y nace como un gran movimiento internacional, el cual tenía como objetivo poder enseñar aspectos o temas matemáticos modernos en la educación básica y media del país, en la década de 1970 cambia su énfasis y toma un carácter abstracto y formal para la enseñanza de las matemáticas en la escuela, por último en 1994 con la renovación curricular en el país, se empieza a establecer como uno de los pensamientos para desarrollar en la enseñanza de las matemáticas (MEN 2004).

Así como el desarrollo del pensamiento variacional ha cambiado desde la década de 1960, también lo ha hecho su definición, ya que hay autores que resaltan el tema de función como el fuerte para su desarrollo en los niños y jóvenes, mientras que otros, lo enfocan hacia la modelación de situaciones. En este punto es pertinente mencionar que pese a las diferencias mencionadas todos los autores en sus investigaciones sobre este pensamiento resaltan la importancia de su desarrollo en la etapa de formación escolar.

Hasta el momento solo se han presentado algunas características del pensamiento variacional desde el desarrollo del concepto de funciones, pero aún no se ha definido que es este tipo de pensamiento. Se iniciará con la definición del autor Vasco (2002) para quien es una manera de pensar dinámica, la cual intenta producir mentalmente sistemas en donde sus variables internas estén relacionas de tal manera que covaríen entre sí, es decir que se puedan relacionar dos conjuntos o magnitudes diferentes.

Este autor menciona que se presentan cuatro momentos particulares cuando se piensa de manera variacional, el primero lo denominó momento de capacitación, el cuál es un análisis para distinguir qué es lo que cambia y qué permanece constante, pero también de reconocer los patrones que se pueden repetir en ciertos procesos, poniendo como ejemplo las variaciones que presenta la temperatura en un solo día. El segundo se denomina momento de producción de modelos mentales, en esta fase el objetivo es ser capaz de construir un modelo que permita visualizar de manera aproximada las covariaciones detectadas. El tercero, es el momento donde se pone a "echar" a andar, como lo manifiesta el autor, el modelo que previamente se ha construido con base a las observaciones del primer momento, y el último momento es el de verificación, donde se hace un proceso evaluativo con el fin de comparar el modelo propuesto vs. los datos analizados, en este hay dos opciones, o se pule el modelo haciéndolo más eficiente, o simplemente se abandona y se busca la construcción de un nuevo modelo.

Sin embargo, Vasco (2002) resalta que en casos donde se usen tecnologías socialmente disponibles, es decir, palabras, señas, dibujos u otros símbolos, aparecerá un momento de formulación simbólica del sistema mental a través de algún simbolismo con su respectiva tecnología, esta formulación permite objetivar el modelo mental para que, de este modo, se pueda calcular por medio de la representación tecnológica empleada y así proseguir con los momentos de comparación y reformulación del modelo propuesto.

Vasco no solo resalta el PV como un estilo dinámico de pensar o los diferentes momentos que surgen cuando se emplea, sino que también intenta asumirle una finalidad, por lo que menciona que:

> ...el objeto del pensamiento variacional es pues la covariación entre cantidades de magnitud, principalmente las variaciones en el tiempo, y su propósito rector es tratar de modelar los patrones que se repiten en la covariación entre cantidades de magnitud en subprocesos de la realidad (Vasco, 2002, p. 63).

Con lo anterior, es posible pensarse que la finalidad del pensamiento variacional es la modelación, entendiéndola como la capacidad artística de poder producir modelos matemáticos que sean capaces de simular la dinámica de ciertos subprocesos que pueden ocurrir en espacios cotidianos.

Con respecto al trabajo histórico sobre el concepto de función que se realizó en párrafos anteriores en relación al PV desde Vasco, es importante mencionar que para el autor este pensamiento "no consiste en saberse una definición de función. Al contrario, las definiciones usuales de función son estáticas: conjuntos de parejas ordenadas que no se mueven ni hacen nada" (2002, p. 62). Pero la correspondencia entre estos aspectos se da con la forma en que se puede desarrollar este estilo de pensamiento matemático.

Si bien, para Vasco el PV no consiste en el dominio de la definición de función, por lo que estaría en contra de haber abordado los aspectos históricos del concepto de este tema, si considera necesario abordar las funciones para desarrollar este pensamiento, pero desde dicho abordaje, lo que busca el autor es pensarse el trabajo de funciones como lo haría Newton o Leibniz, que era desde las diferentes formas de ver las razones de cambio y el cómo las variables iban a depender del tiempo, e inclusive contemplar la definición de Dirichlet.

Por tanto, los conceptos primitivos de función podrían ser útiles en el desarrollo de este pensamiento. Sin embargo, para Vasco (2003) no es la única forma en la que se puede desarrollar, ya que para él, este estilo de pensar de manera dinámica contiene los demás estilos de pensamiento matemáticos: el pensamiento numérico, el pensamiento probabilístico, el pensamiento espacial y el pensamiento lógico matemático. Un ejemplo que propone el autor respecto a cómo se podría desarrollar el PV desde el pensamiento espacial, es con el análisis de variaciones de una figura geométrica; podría ser un triángulo dibujado en el plano cartesiano, donde la ubicación de uno de sus vértice sea constante, lo que implica que no varía su ubicación al hacer que las longitudes de los lados varíen (imagen 1.1), se podría establecer una variación implícita con respecto al área, la cual nos ayudaría a entablar relaciones de cambio e inclusive la modelación podría surgir cuando el estudiante considere pertinente establecer un argumento lógico que dé razón a las variaciones que está contemplando.

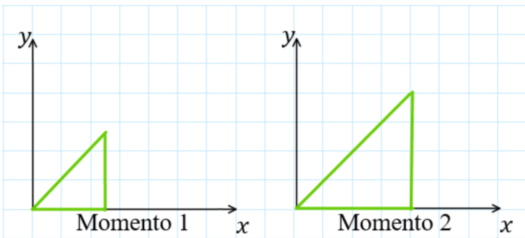


Imagen 1.1 Forma gráfica de la invariancia de la posición de un triángulo

Pasando a otra formade concebir el PV, se retoma la estipulada por el MEN (2006) donde mencionan que este tipo de pensamiento involucra el reconocimiento, la percepción, la identificación y la categorización de las variaciones y el cambio en los contextos, así como la modelación, descripción y la representación en distintos sistemas o registros simbólicos (pueden ser verbales, gráficos, icónicos o algebraicos). Por lo cual, dicho pensamiento cumple un papel importante en la resolución de problemas que citen a las variaciones y al cambio, en la modelación de los procesos de la vida cotidiana en cada una de las ciencias (ciencias naturales, ciencias sociales) y en las mismas matemáticas.

Analizando la definición del MEN con la de Vasco (2003), se encuentra que para Vasco el pensamiento variacional no debe centrarse en la resolución de problemas o en la solución de ejercicios, sino que debe dar razón de la modelación. No obstante, menciona que para resolver problemas debe partir de un modelo matemático que ayude en la solución, por lo que considera que primero se debe activar el pensamiento variacional, antes de dar una solución al problema. Si bien, es algo contradictorio, porque en sí, si es empleado el PV para la resolución de problemas, se podría decir, que no es lo esencial, ya que lo importante es la modelación como excusa de la activación del pensamiento.

A su vez, el MEN contempla el PV como "la capacidad para darle sentido a las funciones numéricas y manejarlas en forma flexible y creativa, para entender, explicar y modelar situaciones de cambio, con el propósito de analizarlas y transformarlas" (2004, p. 17), desde esta concepción se establece que la principal finalidad u objetivo del PV es desarrollar las nociones de funciones y que estas puedan tener una simbolización para quien las estudia, en términos de enseñanza, que los estudiantes pueden dejar a un lado la mirada abstracta de este concepto matemático y así poder relacionarlos con su cotidianidad, con la ayuda de la modelación como herramienta para la comprensión y el análisis de las funciones.

Por lo anterior, se pensaría que el PV no es posible desarrollarlo en primaria, debido que en su concepción se habla únicamente de funciones y se resalta que la modelación debe dar razón de los análisis de estas, desde los estándares básicos de competencias de matemáticas del MEN (2006) en primaria este tema no se enseña o se aprende, pese a esto, si contempla la posibilidad de desarrollar este pensamiento en los estudiantes de primaria, desde el inicio del estudio de regularidades y la detección de los criterios que las rigen y teniendo en cuenta la forma de identificar el patrón.

Además, se puede desarrollar este tipo de pensamiento desde los fenómenos de variación, los cuales estén representados en gráficos y datos, esta manera de aproximación permite manejar los sistemas de datos y sus representaciones, ya que podría ser otra manera de modelar matemáticamente los fenómenos variacionales, debido a que el análisis empleado es cuidadoso permitiendo identificar las variaciones que ocurren, inclusive se pude llegar a precisar la magnitud de los cambios en relación al tiempo (MEN, 2006).

Otros autores que abordan en tema son Cabezas y Mendoza (2016) quienes definen el pensamiento variacional como una orientación al desarrollo de habilidades de orden superior, partiendo de diferentes situaciones, donde se tiene en cuenta las variaciones y situaciones de cambio de los procesos, fenómenos y situaciones que ocurran alrededor del sujeto sin importar el ambiente en el que se sitúen. En este orden de ideas, desde el análisis que estos autores le hacen a Maury (2012) "este pensamiento involucra elaboración de estrategias, formas de razonamiento, elementos y estructuras lingüísticas, que permiten comunicar el estudio y análisis del cambio y la variación" (2016, p. 15).

De lo anterior se puede resaltar que el pensamiento variacional es un estilo de pensamiento independiente del concepto de función y de la resolución de problemas, cuya característica es el análisis y la modelación de situaciones de cambio en diferentes espacios, ya sean cotidianos o académicos, para ello en la metodología de su desarrollo debe haber un proceso investigativo sobre los escenarios cotidianos de los estudiantes, donde los fenómenos de variación y cambio estén presentes.

Sin embargo, las acciones anteriores requieren de prácticas de seguimiento, esto indica que otra de las características del PV son estas prácticas, debido a que otra de las funciones de este pensamiento es el descubrimiento de propiedades ocultas, conexiones y correlaciones en las realidades de los estudiantes; aunque estas deben ser consideradas bajo procesos de transformación, como condiciones de los fenómenos debido a que solo con el uso del pensamiento conceptual y visual-figurativo se vuelve difícil de conseguir un análisis global de la realidad (Grozdev & Terzieva, 2010).

En este punto, se evidencian diferencias entre las concepciones del PV, debido a que para algunos autores como Vasco (2003) y el MEN (2004-2006) en sus definiciones si resaltan el desarrollo y definición de este pensamiento a través del estudio, análisis y modelación de funciones y de situaciones de cambio, pero dejan a un lado las características e importancia del entorno social, mientras para Cabezas y Mendoza (2016) este aspecto juega un rol importante en el pensamiento variacional, de igual manera como lo contemplan Grozdev y Terzieva (2010) en donde la cotidianidad pasa a ser condiciones de los fenómenos. Sin embargo, para Cantoral:

> El pensamiento y lenguaje variacional, desde la perspectiva socioepistemológica, estudia fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y en el medio social. Pone atención en el estudio de los procesos cognitivos, culturales, históricos e institucionales con que las personas asignan y comparten sentidos y significados utilizando diferentes estructuras y lenguajes variacionales, investigación que posee una orientación múltiple. Se ocupa de estructuras variacionales específicas desde un punto de vista fenomenológico, estudia funciones cognitivas que se desarrollan mediante el uso de conceptos y propiedades matemáticos del cambio, y tiene en cuenta los problemas y situaciones que se abordan en el terreno de lo social mediante estructuras variacionales consideradas en la escuela y el laboratorio (2004, p. 8).

Desde este enfoque, Cantoral (2004) intenta unir las diferencias de las definiciones anteriormente mencionadas, resaltando los análisis funcionales y sociales como ejes importantes para el desarrollo de este pensamiento dinámico, si bien, en su definición al inicio solo habla de comunicaciones entorno a los conceptos matemáticos propios de la variación y el cambio, también resalta el rol que tiene este pensamiento con los procesos cognitivos que se pueden presentar en las situaciones ligadas al cambio y a la variación.

También, resalta la importancia de la modelación desde un aspecto social, en donde los integrantes del proceso son capaces de establecer un lenguaje desde el análisis de situaciones de cambio y variación. Sin embargo, para la construcción del lenguaje es necesario comprender el fenómeno y darle un significado. Desde la definición de Cantoral (2004) podemos entender la modelación como la manera en la que el sujeto es capaz de construir una explicación del fenómeno.

Con base en lo anterior, Cabezas y Mendoza (2016) hacen un análisis de lo que involucra pensar variacionalmente, resaltando los procesos cognitivos y el entorno social de los sujetos, como se evidencia en la siguiente cita:

> Pensar variacionalmente desde este enfoque es desarrollar capacidades que permitan utilizar diferentes representaciones, interpretarlas y analizar dinámicamente lo que sucede en la otra representación si se modifica una condición particular. Se trata de un proceso mental activo en el que se generan secuencias de imágenes mentales (no ostensivas) que se van refinando hasta que la comprensión de la situación, vía procesos de visualización, conduce a un modelo mental de la situación planteada, la cual es objetivada por representaciones que dan cuenta de la covariación de las variables involucradas, manifestada en algún tipo de soporte material (registro ostensivo) (Cabezas & Mendoza, 2016, p. 15).

Por tanto, pensar variacionalmente consiste en la creación, organización y confrontación de diversas situaciones involucradas en procesos de cambio y de variación, además de construirle significados a los fenómenos que se estén estudiando, donde el proceso de construcción tenga tres momentos específicos: primero, la creación y desarrollo de estructuras mentales con base en los aspectos más importantes para el individuo, segundo, los procesos de construcciones interpersonales cuyo objetivo es con base al dialogo establecer un lenguaje en el que las dos partes puedan entender las características fundamentales de los fenómenos y por último se debe hacer una evaluación de la modelación generada, donde la modelación en un aspecto transversal en el pensamiento variacional.

1.2 Recuento histórico del concepto del principio de superposición desde la mecánica clásica hasta la mecánica cuántica

Hasta este punto, se han mencionado aspectos históricos enfocados en los escenarios donde el pensamiento variacional es predominante, así como las definiciones y características de estas desde diferentes autores. Pero uno de los objetivos del proyecto es poder entablar una relación entre el PV y la mecánica cuántica (MC) para lo cual no se debe tener en cuenta el termino de función, porque en la teoría cuántica no se habla de función como se describió en párrafos anteriores, sino que se habla de funciones de onda y estados del sistema.

Antes de establecer una relación entre estos conceptos, se puede decir que la mecánica cuántica (MC) es una de las teorías físicas más importantes dentro del campo de la física, porque con esta se analiza y comprende el comportamiento de fenómenos de escala atómica y subatómica, la cual se puede definir gracias a la constante de Plank; ésta nos dice qué objetos se pueden entender como grandes o pequeños cuando se trabaja en el contexto de esta teoría.

Adicionalmente, la noción de estado en la física depende de la teoría que se esté abordando y del fenómeno: en la física clásica se define teniendo en cuenta la descripción temporal de un sistema, lo que indica que el estado se puede entender como la comprensión de cómo está el sistema sin que se presente una perturbación, y para ello es importante conocer sus variables dinámicas (Mendoza Cely & Rozo Clavijo, 2011). Lo que indica, que para definir un estado clásico se consideran las cualidades del sistema, dependientes de la observación, es decir, de las variables dinámicas en un tiempo dado.

Desde la concepción de Dirac (1968) el estado en la MC no se define como en la mecánica clásica, debido a la complejidad que se tiene al momento de realizar la observación de un sistema cuántico; se sabe que para que el sistema sea considerado cuántico la constante de Planck debe ser considerable para él, como en la MC se trabajan sistemas pequeños, los datos que se pueden obtener son muy pocos, por lo que el estado de un sistema atómico debe estar caracterizado por datos más imprecisos que aquellas variables dinámicas precisas que determinaban coordenadas y velocidades en un tiempo particular.

Así que se ha definido el estado de un sistema físico visto desde la teoría clásica y la teoría cuántica, con estos conceptos ya se puede aproximar a lo que implica el principio de superposición desde éstas. En páginas anteriores se discutió sobre el estudio de movimiento, enfocado a las variables que este podría tener, lo que permitió llegar al concepto de función, concepto que facilita la comprensión de fenómenos físicos en el contexto de la física clásica, pero, se retomará el estudio del movimiento, puntualmente, en el movimiento parabólico para comprender el principio de superposición en la teoría clásica.

El movimiento parabólico es denominado de esta manera, porque se compone de la combinación lineal, entre un movimiento horizontal (X) con uno vertical (Y), y al modelarlo en un plano cartesiano se genera una parábola. Por lo cual, existe la separabilidad en el movimiento que se está describiendo, estas son la componente en X y la componente en Y, cada una de estas representa un desplazamiento particular que tiene sus propias características, es decir, si se elimina la componente X, se termina describiendo una caída libre, y si se quita la componente en Y, se describe un movimiento rectilíneo uniforme, con esto se puede hablar de individualidades dentro del movimiento. Sin embargo, cuando se observa el efecto, no se identifica las componentes que se están mencionando, sino que se percibe solo la trayectoria parabólica, diferente a la percepción de sus individualidades (Organista, Gómez, Jaimes, & Rodríguez, 2007).

$$\Delta\vec{r} = \Delta X\,\hat{\imath} + \Delta Y\,\hat{\jmath} + \Delta Z\,\hat{k}$$

Ecuación 1

La Ecuación 1 permite representar un movimiento tridimensional como una combinación vectorial, en esta se perciben las cualidades de individualidad, separabilidad y la percepción de un todo que se describieron en el ejemplo del movimiento parabólico, pero cuando se emplea el espacio vectorial como una formalización, en este caso no solo para el movimiento n-dimensional, sino que también para el principio de superposición, va a aparecer un cuarta cualidad denominada como contribución, que tiene que ver con la multiplicación entre un escalar y una individualidad (Organista, Gómez, Jaimes, & Rodríguez, 2007).

En síntesis, en palabras de Organista & Otros “el principio de superposición clásico establece entonces, que existen entidades físicas y matemáticas que se pueden expresar como una combinación de “elementos” que coexisten conservando su individualidad” (2007, p. 85).

Con respecto al principio de superposición visto desde la teoría cuántica, para Organista & Otros (2007), no se debe preguntar cuáles son las diferencias entre el principio de superposición visto desde la teoría clásica en relación con la teoría cuántica, debido a que en las dos teorías se pueden definir las magnitudes físicas de manera n-dimensional, y lo que cambia es el nombre en cada teoría, en la física clásica estas son denominadas como magnitudes vectoriales clásicas, mientras que en la MC se mencionan como vectores de estado.

Otro paralelismo, es que en la física clásica se puede determinar los atributos de un sistema de manera a priori, sin la necesidad de realizar alguna medición para la comprobación de dichos atributos, mientras que en la MC desde la interpretación de Copenhague, la cual resalta que si bien se pueden pensar las magnitudes físicas del sistema de manera a priori, estos atributos deben ser vistos como una superposición de n-estados, pero en este caso la observación del sistema va a permitir la manifestación de las magnitudes físicas, esto indica que es el observador quien determina el sistema físico, esta forma de concebir los atributos del sistema hacen ver a los vectores de estado como una superposición de posibilidades a estar (Organista, Gómez, Jaimes, & Rodríguez, 2007).

Si bien, para estos autores no es conveniente pensar en las diferencias de cómo se percibe el principio de superposición en las dos teorías, debido a que las cuatro cualidades o nociones con las que se puede interpretar dicho principio son las mismas, resaltan dos cambios fundamentales, el primero es concebir a las individualidades como las posibilidades en las que puede ser o estar el sistema, estas individualidades se encuentran en un espacio complejo. La segunda y más relevante para ellos es con relación a la contribución, ya que desde la MC esta noción no representa una información directa del sistema, porque para conocer la contribución es necesario elevar al cuadrado la norma del coeficiente, y dicho valor es interpretado como la amplitud de probabilidad en la que puede estar o ser el sistema.

Uno de los mayores exponentes del principio de superposición en la MC fue Bohr, en especial en su conferencia “Cómo” donde habló del principio. En esta conferencia se propone el principio de superposición desde una perspectiva ondulatoria, por lo que Bohr en su afán de corregir el planteamiento de Heisenberg pensaba que los estados debían de tener una posición bastante definida, como en el caso de la superposición de ondas planas y como lo había definido Schrödinger. Sin embargo, Bohr ya había considerado que el principio de superposición de estados era muy diferente de cualquier otro principio de superposición, incluso entendía la superposición de ondas como una superposición de estados y la interpretación de su probabilidad permitía entender los resultados de las mediciones, este segundo elemento era algo que en ninguna teoría física mencionaba (Dass, 2013).

La noción de estado cuántico aquí descrita surge a partir de la construcción del modelo atómico de Bohr, solo que, en su momento él los denomino estados estacionarios. Esta misma definición de estado estacionario la abordó Heisenberg en su mecánica matricial, pero en ésta eliminó las trayectorias clásicas y en su lugar puso observables clásicos como la posición y el momento desde una notación matricial en la que los estados estacionarios eran las etiquetas.

Es aquí donde aparece el segundo gran interprete del concepto de superposición desde la MC, Paul Dirac, quien consideró que poner como etiqueta los estados estacionarios a los observables era innecesariamente restrictivo, ya que, si se consideraba que los observables tenían el mismo comportamiento de los estados estacionarios, la etiqueta podía ser arbitraria, con el fin de obedecer las propiedades algebraicas de las matrices propuestas por Heisenberg. Al considerar el etiquetado arbitrario en las matrices significó que los vectores empleados podían transformase entre sí. De lo anterior surge el interrogante respecto a si a todo vector en el que se transforman los vectores de los estados estacionarios también podía ser visto como un estado cuántico. La respuesta la dio Dirac al hacer una observación crítica, su posición se basaba en la centralidad de los valores propios del hamiltoniano de la mecánica matricial, esto indica que los valores propios del hamiltoniano en los estados estacionarios se debían interpretar como el valor de dicha energía en el estado correspondiente, esto fue "comprobado" con la identificación empírica de los valores propios con los términos de los espectros atómicos (Dass, 2013).

Para Dass (2013), "*we see the superposition principle as the glue, in a precisely stated manner, of the three milestones that underlie the physical interpretation of quantum theory, namely, the uncertainty principle, complementarity principle and the probability interpretation*" (p. 3) y resalta que esto es exclusivo bajo ciertas reglas empleadas en las mediciones cuánticas, la cuales son fundamentales para la interpretación del propio principio.

Con respecto al por qué es el pegamento de estos tres hitos, ya se ha mencionado que Bohr da una primera interpretación del principio con fines de corregir la interpretación de Heisenberg sobre la teoría, con respecto a la complementariedad se puede expresar un estado cuántico en componentes ondulatorios o corpúsculos, como es el caso de las ondas de materia de Broglie y por último, las interpretaciones de la probabilidad, mencionada en uno de las cuatro nociones descritas por Organista & otros (2007).

Dirac (1968) considera un sistema cuántico compuesto por estados A y B, al realizar observaciones sobre A da siempre como resultado a, del mismo modo, si se realiza una observación sobre B da como resultado únicamente b, de tal manera que si se realizan diversas observaciones sobre el sistema se puede encontrar como resultado a o b, donde la contribución de cada estado va a depender de la probabilidad intermedia de los estados de partida, más no de los estados de llegada. Los vectores que representan los estados iniciales tienen que estar normalizados, debido a que la sumatoria de estos implican una amplitud de probabilidad que no debe ser mayor a 1, ya que este representa una probabilidad del 100%.

El anterior sistema se denomina por facilidad el estado C y no es más que una combinación entre el estado A y el estado B. Esto no indica que C no sea un estado bien definido, sino todo lo contrario, en MC se piensa que los estados definidos están compuestos por una serie de estados, diferente a como son concebidos en la física clásica. Pero ¿de cuantos estados posibles puede estar compuesto el estado C? es evidente que la cantidad de estados posibles en los que puede estar compuesto C es inmensa, ya que hay infinitos conjuntos o series de las que puede estar conformado, por lo que el conjunto que se debe considerar para estudiar el estado C va a depender de las condiciones físicas particulares del problema que se esté tratando (Dirac, 1968).

Definir los estados en los que está compuesto un estado definido va a depender de los observables que se estén empleando en la medición, ya que estos son los que definen las condiciones físicas estudiadas. Por lo cual, el principio de superposición desde la mecánica cuántica depende de la manipulación que se le está haciendo al sistema, es decir, si no se interactúa con el sistema su estado es único, sin importar que dicho estado pueda escribirse como una suma o superposición de estados posibles, para saber o conocer cuáles son esos estados, se necesita de una interacción con el mismo sistema que permita identificar cuáles son los estados que lo componen (Spinel Gómez, 2009).

1.3 Modelación del experimento mental del gato de Schrödinger

Teniendo una definición del pensamiento variacional (PV) y del principio de superposición desde la mecánica cuántica (PSMC), aún no se ha descrito como se relación o los aspectos que tienen en común estos conceptos. A continuación, se va a describir el experimento mental del gato de Schrödinger con la ayuda de la modelación, recordemos que la modelación es un aspecto transversal del PV.

El experimento mental del gato de Schrödinger fue propuesto en 1935 cuya finalidad era replicar las diferentes interpretaciones que se le daban a la mecánica cuántica, sin embargo, éste paso a ser uno de los experimentos mentales más influyentes para el desarrollo de la teoría cuántica, además, en la actualidad el concepto de fondo que tiene el experimento es empleado en la ciencia ficción para la creación de películas, juegos y series para todo público.

Schrödinger postula el experimento de la siguiente manera: se tiene un gato que está encerrado en una caja aislada, dentro de ésta se tiene dos recipientes uno con comida y el otro con veneno, esta información la sabe el observador, por lo que decide esperar. Al cabo de un tiempo si el observador abre la caja puede encontrar dos opciones, una en la que el gato haya consumido la comida y se encuentre vivo, y la otra en la que haya ingerido el veneno, por ende, estaría muerto. En ambos casos, el observador, define el estado en que se encuentra el gato, asignándole un estado vivo o muerto al momento de abrir la caja (Saavedra, 2020).

Una modificación del experimento es reemplazando los recipientes por un material que tiene la capacidad de emitir radiación, si este emite radiación un detector la "observa" y activa un mecanismo que libera un gas que tiene la capacidad de dormir permanentemente al gato de manera instantánea, pero si el material no emite radiación el gato estaría vivo. En este montaje, es posible introducir la noción de probabilidad, debido a que, si se repite el experimento n veces (con un valor de n grande), se encuentra que $n/2$ se observa al gato en un estado vivo y $n/2$ en un estado muerto cuando se abra la caja, por lo que ambos estados tienen una probabilidad del 50% de ser (Organista, Gómez, Jaimes, & Rodríguez, 2007)(Navarro Perez, 2014).

Para describir el experimento desde un lenguaje matemático, es decir desde la modelación, es pertinente analizar la información descrita en los párrafos anteriores, ya que a partir de esta se puede conocer el estado en que se encuentra el gato antes de realizar la observación. Como se sabe que al momento de observar el animal puede estar vivo (V) o muerto (M), estos dos serían los estados en los que se compone el estado (G). Desde la notación de Dirac los estados se pueden describir a partir de kets ($|\ >$). Al emplear la palabra compone, se está haciendo alusión al principio de superposición desde la MC, lo que indica una sumatoria de los estados que forman parte del estado. Hasta el momento se puede escribir de la siguiente manera:

$$|G\rangle = C_1|V\rangle + C_2|M\rangle$$

Ecuación 2

La Ecuación 2 se encuentra incompleta, porque hace falta conocer los valores de C_1 y C_2, para conocer el valor de estas incógnitas se considera un vector unitario, cuyo ángulo sea de 45°, esto para facilitar los cálculos. la Imagen 1.2, nos muestra una manera de ver la situación.

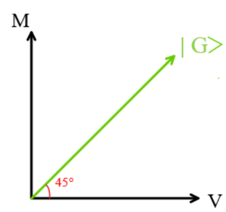


Imagen 1.2 Vector estado del gato a 45°

Como $|G\rangle$ es un vector se puede hacer la proyección de este sobre los ejes, que en este caso son V y M, de la siguiente manera:

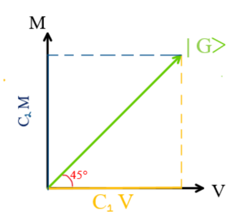


Imagen 1.3 Proyecciones del vector $|G>$

Como se conoce que V y M son vectores estado, quedan escritos como $|M\rangle$ y $|V\rangle$, con base en esto, de la Imagen 1.3 se puede decir que:

$$C_1\ |\ V\rangle = \sin(45)\ |V\rangle$$

Ecuación 3

$$C_2\ |\ M\rangle = \sin(45)\ |M\rangle$$

Ecuación 4

De las ecuaciones 3 y 4 y de la Imagen 1.3 se concluye que C_1 y C_2 son proyecciones del vector estado en un espacio vectorial. Así como se definen las componentes de $|G\rangle$, este se puede escribir como una combinación lineal, de tal manera que se puede expresar como:

$$|G\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|V\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|M\rangle$$

Ecuación 5

$$|G\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\ (|V\rangle + |M\rangle)$$

Ecuación 6

La ecuación 6 es una forma de representar matemáticamente el estado en que se encuentra el gato cuando está en el interior de la caja. Sin embargo, aún no se conoce cuál podría ser el estado más probable del gato en el momento de realizar la observación, para conocer esto se emplea el tercer postulado de la MC descrito por la Ecuación 7.

$$P_{a_k} = \left\| P_{a_k} \left| \beta > \right\|^2 = | < a_k \ \ |\beta > |^2 = |c_k\ (\beta)|^2 \geq 0$$

Ecuación 7

Donde a_k es un estado y por lo tanto revisa las condiciones del observable de proyección denominado y de este modo dar cuenta de lo que es a_k.

Desde un aspecto conceptual la probabilidad consiste en expresar $|\beta >$ como una superposición de estados normalizados del observable empleado. Si el espectro del observable es no degenerado, la probabilidad de cada uno de los estados normalizados consiste en elevar al cuadro la contribución de este. Si se encuentra que el coeficiente de uno de los estados superpuestos es igual a 0, este no haría parte de la superposición, ya que la probabilidad de encontrar el sistema en dicho estado sería nula. Pero, si la mayoría de los estados en los que se compone el sistema tienen como coeficiente 0, menos uno, este sería la superposición en sí misma, lo que indica que tiene una probabilidad del 100% de encontrar el sistema en dicho estado (Spinel, 2009).

Con respecto al termino $c_k(\beta)$, que también se puede expresar como $< a_k\ |\beta >$ define la amplitud de probabilidad que estando el sistema en el estado $|\beta >$ quede en el estado $|a_k >$. Su modulo al cuadrado es la respectiva probabilidad que es igual al peso del estado $|a_k >$ en la superposición que define el estado $|\beta >$ (Spinel Gómez, 2009). Como el estado $|a_k >$ está normalizado, su respectivo peso es igual a 1, debido a esto, ninguna probabilidad puede ser mayor al peso del estado mencionado.

Con base en lo anterior, las probabilidades de encontrar el estado $|G >$ en los estados $|V >$ o $|M >$ son:

$$P_V = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$$

Ecuación 8

$$P_M = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$$

Ecuación 9

Desde esta presentación, se ha encontrado la forma matemática de representar el estado del gato en el experimento mental; sin hacer la observación se encuentra la superposición de estados y las probabilidades de cada uno de estos. Se ha mostrado un modelo que parte del fenómeno propuesto y utiliza un lenguaje y una representación propia de la situación. Por tanto, se encuentra que el pensamiento variacional puede ser empleado en la MC para la interpretación de diferentes problemas, en el sentido en que se modele de manera matemática y/o geométrica el problema en sí, teniendo en cuenta elementos que faciliten la comprensión de las situaciones estudiadas, en el caso del experimento mental del gato de Schrödinger que se consideraron conceptos de álgebra lineal, nociones básicas de la MC, como el principio de superposición y el tercer postulado de la misma teoría.

Capítulo 2 : Indagación del pensamiento variacional de los estudiantes desde diferentes consideraciones pedagógicas

El presente capitulo aborda los fundamentos pedagógicos que se consideraron para la implementación del trabajo, además, describe las actividades que se realizaron para el diagnóstico de los estudiantes, seguido del análisis de la información recolectada del pretest y las conclusiones a las que se llegaron.

2.1 Los procesos de enseñanza-aprendizaje desde el aprendizaje activo

Como primera medida, los fundamentos pedagógicos se pensaron en pro de un proceso de enseñanza-aprendizaje no tradicional, donde los estudiantes asuman una postura crítica, objetiva, reflexiva e interrogativa en su formación, además, puedan aproximarse a situaciones experimentales que les contribuya con el fortalecimiento de su pensamiento matemático, físico y crítico.

El tipo de aprendizaje que mejor se adecua a lo anterior es el aprendizaje activo junto con algunas de las técnicas que se encuentran presentes en este tipo de aprendizaje, estas son: el trabajo en equipo, la pregunta en el aula enfocada desde la pedagogía de la pregunta y las actividades experimentales y con base en estas técnicas es que se van a construir las actividades propuestas para la secuencia de aprendizaje. Se considera que el aprendizaje activo a partir de la pedagogía de la pregunta puede generar espacios reflexivos que ayuden a cumplir el objetivo general del trabajo, además ésta hace parte de las estrategias del aprendizaje activo.

El aprendizaje activo está dentro de las metodologías del constructivismo, por lo que se considera el pensamiento y los contextos de los estudiantes como herramientas fundamentales para la construcción del conocimiento. El aprendizaje activo consiste en la implementación de técnicas de instrucción que involucran a los estudiantes en su aprendizaje, en donde la escritura, la lectura, el análisis, las discusiones, la manipulación de materiales, la síntesis de información y la socialización, cumplen el rol de enriquecer el proceso (Restrepo, 2018). Lo anterior conlleva a que el docente proponga y piense actividades o dinámicas en las que los educandos vean la necesidad de pensar y reflexionar sobre su actuar.

El diseño de este tipo de actividades conlleva a ver la educación como un proceso interdisciplinar, con el fin de que el estudiante conciba la articulación de las temáticas en el mundo vivo y es deber del maestro hacer que los educandos puedan establecer estas relaciones. Con el aprendizaje activo es posible que el estudiante pueda articular las temáticas con los diversos contextos en los que se moviliza y de esta manera se les facilite pensar desde diferentes enfoques (Restrepo, 2018).

Existen tres estilos de aprendizaje para Restrepo (2018), el primero es un pensamiento conceptual, donde el sujeto aprende a pensar desde lo conceptual y lo abstracto con el fin de crear modelaciones para describir los fenómenos que está analizando. El segundo está enfocado en ser parte de una comunidad, asumiendo un rol y cumpliendo las funciones que tenga dentro de esta. El tercero y último es pensar como ciudadano-experto, es verse como parte de una sociedad y reconocer que tiene la responsabilidad y el deber de compartir su conocimiento y contribuir en la resolución de problemas de la sociedad. Si bien Restrepo (2018), no articula los tres estilos de pensamiento de manera explícita, es posible interpretar la relación entre estos, desde su definición se evidencia que, para desarrollar el tercero, es necesaria la implementación del pensamiento conceptual.

Silberman (1998), propone los siguientes estilos de aprendizaje: 1) el aprendizaje cognoscitivo, se encarga de la búsqueda y adquisición de información y conceptos, también en la comprensión del objeto de estudio y en cómo éste se relaciona en otros escenarios. 2) El aprendizaje de conductas o habilidades se centra en la resolución de problemas, en cómo se expresa el estudiante y en la realización de tareas. 3) El aprendizaje emocional va enfocado hacia la evaluación y reflexión de los sentimientos y preferencias del estudiante hacia el objeto de estudio.

Entonces, el aprendizaje activo se genera cuando los estudiantes entran en "procesos de indagación" para asumir un rol participativo, lo que implica, que son ellos los que buscan las respuestas a las preguntas formuladas durante la indagación de un fenómeno, la resolución de problemas o la finalización de tareas. Silberman (1998) resalta, que este proceso incita al estudiante a reflexionar sobre sus valores o creencias, resaltando el aprendizaje emocional, donde los sentimientos cumplen un aspecto fundamental en los procesos de enseñanza-aprendizaje. Por tanto, podemos afirmar que el aprendizaje activo fomenta en el estudiante un pensamiento integral y ser participe dentro de su comunidad sin dejar de lado todo el aspecto emocional que implican las relaciones humanas.

2.2 Técnicas del aprendizaje activo

La primera técnica, el trabajo en equipo, es una de las más empleadas por los docentes sin considerar la metodología pedagógica usada. Para el aprendizaje activo el planteamiento de una clase a través de la realización de actividades y/o tareas en equipo es una de las estrategias que mejor contribuye al aprendizaje, porque son los mismos estudiantes quienes apoyan a sus compañeros en los procesos que llevan a cabo. Esto implica que el docente asume un rol de observador y apoyo en la formación de los educandos, ya que sus intervenciones se dan en los momentos que se considere necesario, sin embargo, es el encargo de la construcción de las actividades (Restrepo, 2018) (Silberman, 1998).

Al formar grupos en el espacio de clase los estudiantes pueden corregir a sus compañeros, analizar problemas, ejercicios y conceptos, tienen momentos comparativos entre las explicaciones que da el docente y sus concepciones, de esta manera pueden llegar a establecer mejores concepciones. El trabajo en equipo enrique la diversidad y fomenta el respeto por las opiniones, conocimientos y habilidades del otro, lo que genera un buen ambiente en el salón de clases (Silberman, 1998).

La segunda técnica consiste en actividades experimentales, para Silberman (1998) estas deben tener al menos los siguientes pasos: primero, se tiene la explicación de los objetos, lo cual ayuda a acercar a los estudiantes a los fenómenos por analizar, buscando que se interesen por saber el por qué, el cómo y qué va a pasar de lo que están observando. Segundo, se informa a los alumnos del por qué hicieron la actividad experimental, ya que esto les permite la articulación de los conceptos de estudio con las actividades realizadas. Tercero, se mantiene la actividad en movimiento que consiste en una buena manipulación del tiempo para las actividades, de esta manera evita el alargamiento de discusiones que no hacen parte de lo observado y el agotamiento o la perdida de interés por parte de los estudiantes.

Para Silberman el desafiar a los alumnos es un componente esencial para facilitar la actividad experimental, pero hay que tener cuidado con el nivel de complejidad de la actividad, ya que si esta es muy fácil los estudiantes se pueden aburrir y si es muy compleja la pueden abandonar. Por último, se analiza la actividad cuando es finalizada por los estudiantes, ya que estos pueden contar los aprendizajes que adquirieron, cómo se sintieron y las cosas que no pudieron comprender, de este modo se puede fortalecer, complementar y enriquecer la vivencia.

Otro aspecto importante, es porque ésta puede ser vista como la manera en la que el estudiante valida el conocimiento que tiene de los fenómenos naturales o de la elaboración del conocimiento de estos. Partiendo de la separación entre la práctica y la teoría, se considera que con el experimento se puede establecer una relación o un nexo entre estas, donde el experimento o la actividad experimental puede verificar o refutar las predicciones dispuestas en la teoría. Desde esta perspectiva, se concibe al experimento como una manera de construir conocimiento en las ciencias naturales (Malagón Sánchez, Ayala Manrique, & Sandoval Osorio, Construcción de fenomenologías y procesos de formalización, 2013).

Además, se contempla la experimentación mental, la cual para Mach (1948) es innata al ser humano, ya que es practicada por todas las personas, sin embargo, se centra en el análisis de cómo esta ha influido en el avance de la ciencia, teniendo en cuenta como Galileo, Thompson, Carnot y otros, hicieron experimentos mentales para proponer y deducir las explicaciones físicas que dieron a algunos fenómenos. Además, con la ayuda de la experimentación física el ser humano puede adquirir habilidades intelectuales avanzadas que le permiten la generación de experimentos mentales. También, contempla el método de las variaciones como una manera en que se amplía las limitaciones de la validez de la representación, esto permite que se pueda modificar y pulir las representaciones que se tienen sobre un modelo que explica algún fenómeno natural. A su vez, los experimentos mentales vistos como modelos científicos permiten la construcción de nuevos conocimientos y logran enriquecer la interpretación filosófica sobre otras formas del razonamiento científico (Mettini, 2020).

Por consiguiente, la experimentación mental es importante en la sociedad de físicos, porque permite el desarrollo psíquico del sujeto y fortalece de la capacidad deductiva a partir de las experiencias que se adquieren en los experimentos físicos. Sin embargo, la experimentación mental juega un valor importante en las demás ramas de la ciencia, incluyendo en las matemáticas, ya que hay saberes que requieren procesos de abstracción para lograr modelos que logren explicarlos (Mach, 1948).

Con respecto a los resultados que nos ofrecen los experimentos mentales, estos están son limitados por cómo se construye el mundo abstracto en el que son implementados, dichas limitantes son las condiciones iniciales del sistema que se pretende estudiar a partir de un experimento mental. Las condiciones iniciales, son las que permiten pensar en las conclusiones generadas antes, durante y después del experimento, haciendo que algunas sean validas y otras no (Mettini, 2020).

Por otro lado, la interpretación de los experimentos mentales como un tipo de modelos científicos permiten aclarar cómo estás prácticas se relacionan con los fenómenos y con los sistemas reales de la representación propuesta en el experimento. Esta representación no implica que los experimentos mentales estén íntimamente relacionados con aspectos físicos, ya que, los experimentos mentales permiten pensarse diferentes situaciones que en el mundo natural no son posibles de realizar, bien sea por la falta instrumentos o por las limitaciones que se presentan en el mundo físico. Sin embargo, las condiciones del sistema van a permitir que las explicaciones a los experimentos mentales sean "verdaderas" en el mundo natural (Mettini, 2020).

En resumen, los experimentos mentales, permiten a los sujetos interesados en las ciencias, establecer explicaciones de fenómenos que no se pueden llevar fácilmente al laboratorio en el mundo físico. También, logran enriquecer las habilidades cognitivas del sujeto desde la modelación e interpretación de los sucesos que se proponen en el experimento mental, a partir de una teoría científica. Por último, permiten mejorar las capacidades lingüísticas de las personas, debido a que construyen conclusiones, hipótesis y/o situaciones a lo largo del proceso de experimentación.

La tercera y última técnica del aprendizaje activo consiste en formular preguntas hacia los estudiantes, desde la perspectiva de la pedagogía de la pregunta, ya que esta fue considerada como un aspecto primordial durante su desarrollo. Para Silberman (1998), la pregunta es un eje articulador dentro de diversas estrategias pensadas dentro del aprendizaje activo, como por ejemplo la enseñanza orientada. En esta, el docente emplea la pregunta como un recurso pedagógico para conocer, clasificar, abordar y desarrollar los aprendizajes previos de los estudiantes. El docente debe tener en cuenta que los estudiantes necesitan tiempo para poder responder las preguntas que se les hace, por ende, es importante hacer pausas luego de realizar algún cuestionamiento, además, la recopilación de las preguntas elaboradas por los estudiantes es una estrategia que permite hacer que el estudiante se sienta involucrado en la clase (Restrepo, 2018).

Ahora bien, la pedagogía de la pregunta es una crítica que hace Freire & Faundez (2013) al sistema educativo, ya que éste se centraba en la pedagogía de la respuesta, la cual consistía en que el docente formulara preguntas que no estuvieran formuladas, haciendo que la enseñanza se centrara en los temas inmersos en los libros de texto. Además, para Zuleta (2005), el sistema educativo es un sistema anquilosado, que imposibilita que los actores involucrados en este no se puedan cuestionar sobre el objeto del conocimiento y mucho menos de los procesos de enseñanza-aprendizaje.

La pregunta no es solo usada en los espacios de la academia, ya que ésta para Freire & Faundez (2013) es el origen de cualquier conocimiento, Gadamer (1993) resalta que con la pregunta se abre el camino hacia el conocimiento, además menciona que la pregunta es el arte de pensar, para Zuleta (2005) es empleada en toda conversación, sin que sea concebida como un ritual académico, como un recurso pedagógico y como una manera dinámica de apertura al conocimiento, de esta manera el conversar es considerado como un don natural y como cualidad adquirida del ser humano.

De este modo Vargas & Guachetá (2012) consideran:

> Conversar, preguntar y responder, son actividades cotidianas en los distintos ambientes donde se despliega la vida; por ello en el aula, se trata de propiciar espacios para pensar(se), interrogar(se) y comunicar(se) a través del dialogo. La pregunta como dispositivo pedagógico implica formular ‘buenas y pertinentes’ inquietudes, bien sea porque provengan del asombro o porque conduzcan a él; lograr que las preguntas que se formulan sean ‘buenas y pertinentes’ no es una tarea fácil, puesto que en muchos casos ellas son imposturas, simulaciones, fingimientos, engaños o simples formalismos (p. 74).

De esta forma se resalta la pregunta como una herramienta del ser humano para la construcción del conocimiento, que sería volver a la mayéutica platónica. También, la pregunta es activadora del pensamiento, ya que preguntar y pensar son procesos intelectuales inseparables, el preguntar formaliza una búsqueda reflexiva del conocimiento, y el pensar, involucra un sujeto consiente del mundo vivo y de sí mismo desde su experiencia (Gadamer, 1993). Cuando el sujeto se plantea preguntas, este abre horizontes de posibles respuestas, haciendo que se genere un lazo entre preguntas y respuestas, y desde este se construye conocimiento (Vargas Guillén & Guachetá Gutiérrez, 2012) (Freire & Faundez, 2013). A sí mismo, las preguntas ayudan a iniciar procesos interactivos de aprendizaje y en la resolución de problemas, estimula y da solidez a la creación de procesos autónomos que se requieren en la búsqueda e indagación de información que ayudan en el proceso de aprender a aprender (Zuleta Araújo, 2005).

Por otro lado, para Vargas & Guachetá (2012) la pregunta se encarga de abrir horizontes para la comprensión, en la medida que éstas son relativamente solucionadas por los sujetos, al tener una solución, es posible hacer procesos evaluativos desde un ejercicio de validación entre las respuestas construidas y la intención de lo que se interroga o lo que se pone en discusión. La interpretación, es fundamental a la hora de responder una pregunta, ya que con esta se puede comprender las intenciones del autor; para interpretar un interrogante es necesario desplazarse al contexto en que se formula la pregunta, esto implica, tener en cuenta las experiencias, la interpretación de mundo y las intenciones del otro (Gadamer, 1993). En conclusión, "comprender, pues, es solamente tener una visión propia de las cosas, es captar desde el horizonte propio la visión propia del horizonte del otro. Y, sin embargo; el punto de vista del otro es irreductible al mío propio" (Vargas Guillén & Guachetá Gutiérrez, 2012, p. 180).

Con el uso de la pregunta se pueden generar procesos que proporcionan reflexión, deducciones, conjeturas, planteamiento de nuevas problemáticas y criterios que ayudan a resolver los enigmas. Pero también, enriquece las expresiones orales y escritas de los sujetos, la capacidad de comunicación entre personas de un mismo contexto, la atención y la creación de un ambiente favorable para la discusión y la construcción de nuevos saberes (Zuleta Araújo, 2005).

En los ambientes donde la pregunta es la principal generadora de conocimiento, se evidencia que las respuestas de los estudiantes son ricas en creatividad, argumentación y tienen una coherencia con el contexto del interrogante, permitiendo que durante su proceso de enseñanza las respuestas sean únicas de cada sujeto, ya que en estas se percibe la individualidad de cada uno (Freire & Faundez, 2013). Además, en estos ambientes se reconoce el error y el dialogo como herramientas fundamentales para la adquisición; el error va a permitir identificar las capacidades de sí mismo y resaltar que no hay preguntas tontas ni respuestas definitivas, mientras que el dialogo permite hablar de la intersubjetividad presente en el aula de clase (Freire & Faundez, 2013) (Vargas Guillén & Guachetá Gutiérrez, 2012).

Con respecto al rol desempañado por el docente cuando se aborda la pregunta como dispositivo pedagógico para Vargas & Guachetá (2012), este sirve de puente, entre el horizonte del saber y el horizonte mundano-vital que enfrenta el sujeto a quien se pretende educarlo, este horizonte mundano-vital se puede desempañar en cualquier escenario posible. Del mismo modo, argumentan que la relación entre los horizontes mencionados, esta relación puede ser vista como un horizonte compartido de lenguaje.

Por tanto, la pregunta como dispositivo pedagógico enrice el pensamiento crítico, las capacidades y la creatividad de los estudiantes, brinda un horizonte en los procesos de enseñanza- aprendizaje en el sentido de que la pregunta nutre los diferentes escenarios en los que el ser humano se desenvuelve. La pedagogía de la pregunta brinda nuevas estrategias y parámetros para una educación alejada del sistema educativo que criticaron Freire & Faundes (2013) y Zuleta (2005), además, visibiliza al estudiante como un sujeto activo y pensante en la creación de conocimiento.

2.3 Presentación, análisis y resultados de las actividades del pretest

Ya que se ha hecho alusión a la metodología de enseñanza trabajada en el proyecto de investigación, ahora, se va a describir brevemente la población con la que se trabajó. La investigación se desarrolló en la institución Escuela Normal Superior de Villavicencio (ENSV) ubicada en la ciudad de Villavicencio del departamento del Meta, ésta es una institución educativa publica que maneja el modelo de la acción y la construcción, por lo que reconocer al estudiante como un sujeto de saber y una persona activa en los procesos de aprendizaje. La institución cuenta desde el nivel de educación preescolar hasta la educación media, además de estos niveles tiene el programa de formación complementaria de educadores, el cual le permite llamarse como escuela normal, ya que en este programa forma maestros para los niveles de educación inicial hasta la básica primaria.

El grado en el que se centró el proyecto fue quinto de primaria, como la ENSV cuenta en este momento con cuatro cursos, se escogió el curso 5-4 debido a que en este se implementaba el curso de robótica que el director de grado dirigía en la institución, por lo que se consideró que los estudiantes venían de un proceso más riguroso que otros cursos, en las asignaturas de matemáticas, tecnología y las ciencias naturales, además, de ser estudiantes curiosos y participes de sus procesos de aprendizajes. El curso está compuesto por 37 estudiantes de los cuales, uno de ellos presenta problemas de aprendizaje leve, por lo que al momento de la aplicación se pensó desde un aspecto de inclusión, además, el nivel socioeconómico de los educandos oscilaba entre el estrato 2 y 3.

Con base en las diferentes consideraciones pedagógicas mencionadas en las primeras páginas del presente capitulo y en las características de la población a impactar, se construyó e implementó un pretest que permitiera reunir información sobre el nivel del pensamiento variacional de los estudiantes, con el fin de elaborar una secuencia de aprendizaje (anexo 2) que fortaleciera el pensamiento variacional de los educandos. Las actividades que se pensaron para el pretest son las siguientes:

La primera actividad consiste en observar una secuencia de figuras relacionadas entre sí, en estás estaban presentes el patrón y la recurrencia como características que posibilitaran la identificación de variaciones en figuras construidas a partir del mismo criterio y permitieran establecer una operación matemática para identificar las características de futuras imágenes. En esta actividad los estudiantes debían interpretar, analizar y describir las variaciones presentes entre cada figura a partir de preguntas orientadoras formuladas por el docente, empleando las matemáticas que hasta el momento han estudiado. A esta actividad se le denomino observando cuadros (Anexo 3) (Obando, Posada, & autores, Interpretación e implementación de los estándares básicos de matemáticas, 2005).

La segunda y última actividad tiene como nombre jugando a los bolos (anexo 4), esta tiene como propósito generar espacios en donde los estudiantes puedan identificar, analizar y describir las situaciones de variación presentes en diferentes escenarios, además, a partir de la implementación de conteos simples y múltiples, los educandos establezcan las correlaciones entre cada situación propuesta (Obando & Botero, 2006). En esta actividad, hay dos momentos, en el momento 2 los valores de los bolos son el doble que en el momento 1, esto para permitir que haya una relación directa entre cada uno de estos. A su vez, dentro de la actividad los estudiantes deberán responder algunas preguntas de manera individual y otras de manera grupal.

Teniendo en cuenta los objetivos de cada una de las actividades, se proponen los siguientes criterios que ayudaran a identificar el nivel del pensamiento variacional de los estudiantes:

1. Describe el comportamiento variacional presente en diferentes situaciones vivenciadas o a partir de imágenes que se les presente a los educandos.
2. Representa mediante el uso de las matemáticas (bien sea de manera grafica o bajo el uso de ecuaciones) las situaciones problema presentes en cada actividad a desarrollar.
3. Comunica de manera clara y asertiva las respuestas dadas durante el desarrollo del pretest.

A continuación, se hace un análisis sobre que tanto los y las estudiantes se aproximan a cada uno de los criterios anteriormente propuestos, para ello, se va a tener en cuenta la respuesta de las preguntas que aparecen en los anexos 2, 3 y 4.

El anexo 5 muestra las preguntas y repuestas que brindan información desde el anexo 1 y el anexo 6 evidencia también los cuestionarios y respuestas del anexo 4, ambas corresponden para el análisis del primer criterio y se encuentra lo siguiente:

- Un porcentaje de 55% estudiantes se aproximan en describir las relaciones existentes entre cada una de las imágenes observadas, mencionando que hay un aumento de cuadros, no solo pintados de color negro, sino en general. También, lo hacen con la descripción de cómo se podrían generar nuevas figuras, respondiendo que la sumatoria de dos imágenes previamente establecidas pueden generar una nueva, y el número correspondiente de ésta es la cantidad de cuadros coloreados de color negro que tiene.
- En el caso de los bolos el 35% de los estudiantes, logran describir que existe una relación entre los dos momentos existentes en la actividad, ya que solo mencionan que al ser

diferentes el valor de los bolos, no es posible que exista una relación directa entre dichos momentos. Es pertinente mencionar que en el momento 2 el valor de los puntos de los bolos es del doble que en el momento 1. Pero ningún estudiante logra describir dicha relación, los que más se acercan en identificarla dicen que los puntos son mayores en el segundo momento, en este caso solo un 15% logra dicha aproximación.

- Cuando se les pregunta a los estudiantes sobre si existe relación entre las respuestas a las preguntas, el 40% de los niños y niñas dicen que no, que no encuentran algo con lo que las puedan relacionar. Sin embargo, seguido de esta negación, resaltan elementos que, si son comunes entre las respuestas, como se puede evidenciar en el anexo 5.
- En los anexos 5 y 6, se puede evidenciar que los estudiantes son capaces de establecer diferencias y semejanzas entre las imágenes y las situaciones vivenciadas.
- Por último, el 68% de los estudiantes se lanzan a hacer hipótesis, como se evidencian en las respuestas escritas en los anexos 5 y 6, bien sea para decir la cantidad de cuadros coloreados o no coloreados presentes en imágenes desconocidas, o en la cantidad de bolos de cada color que un jugador puede derribar para obtener una puntuación especifica. Lo que se evidencia en estas hipótesis es que, los educandos que las establecen no hacen un proceso descriptivo desde un modelo matemático, sino que lo hacen de forma intuitiva, argumentando que la pregunta es sencilla de responder y por ende no es necesario hacer una modelación que pueda fortalecer la hipótesis planteada.

Para el segundo criterio el anexo 7 muestra las respuestas a las preguntas del anexo 3 que al responderlas dan información sobre la construcción de la modelación de los estudiantes. Por otro lado, es poca la información que se extrae del anexo 4, debido a que los estudiantes para esta actividad poco emplearon el lenguaje matemático, entendido en este caso como la generación de gráficas y ecuaciones necesarias para la resolución de problemas presentes en la actividad. Al ser pocos, estarán presentes durante la descripción del diagnóstico.

De la información suministrada en el anexo 7 y el anexo 8 se llega a los siguientes análisis:

- En lo general (80%) los estudiantes identifican las operaciones que les sirven para realizar los procesos de análisis desde un aspecto matemático, sin embargo, esta identificación la hacen únicamente desde un énfasis descriptivo, en donde mencionan el nombre de la operación.

- Hay muy pocos niños (20%) que se atreven a escribir las operaciones empleadas desde un lenguaje matemático y/o gráfico de las situaciones o imágenes que observan, no obstante, quienes lo hacen no usan criterios que ayuden a entender el porqué de dicha operación, como se evidencia en las respuestas de la primera pregunta del anexo 7.

- El uso de las gráficas para dar a conocer el procedimiento que hacen los niños y jóvenes a la hora de dar respuestas es mínimo, ya que para algunos no es necesario hacer un esquema que les permita corroborar las hipótesis que tienen al respecto de un cuestionamiento en particular, para otros, el dejar la gráfica como evidencia para saber de dónde sale la respuesta es innecesario, por lo que deciden borrar el esquema, como se muestra en el anexo 5. Además, a algunos jóvenes se les dificulta la realización de esquemas, esto puede ser una dificultad en su motricidad o en el empleo de herramientas que les ayuden a la construcción de estas.

- Siguiendo con el uso de las gráficas y de ecuaciones como herramientas para la descripción de imágenes o situaciones, los pocos (10%) estudiantes que deciden usar las dos en la misma respuesta, no hacen un proceso de articulación entre estas, se remiten en hacer la gráfica y al lado poner la ecuación que consideran correcta, como se muestra en el anexo 7.

- La imagen 2.1 del anexo 8, extraída del anexo 7, muestra la respuesta de una estudiante que construye y argumenta el por qué una sumatoria podría dar solución a la pregunta planteada. Es pertinente mencionar, que la respuesta de la estudiante no da la respuesta correcta, debido a que en la sumatoria da un número erróneo, sin embargo, es interesante que una niña de quinto de primera realice una aproximación a lo que se denomina serie, sin tener un conocimiento base para la construcción de dicho enunciado.

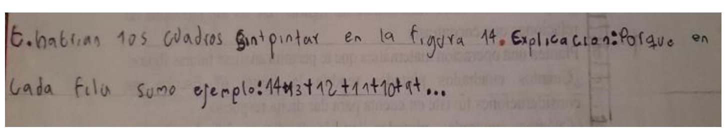

6. habrian 105 cuadros sin pintar en la figura 14. Explicacion: Porque en
cada fila sumo ejemplo: 14+13+12+11+10+9+...

Imagen 2.1 Respuesta de estudiante

- De la imagen 2, Imagen 3 e Imagen 5 del anexo 8, se puede decir que los estudiantes no emplean procesos aritméticos escriturales para el llenado de las tablas. Además, son pocos los que hicieron el llenado adecuado de estas, ya que algunos pusieron la cantidad de bolos derribados y al momento de hacer la sumatoria de puntos solo sumaron el total de bolos derribados, más no la cantidad de puntos que significaban, como se evidencia en la Imagen 2.2, quizás lo hicieron así porque no entendieron las explicaciones que se dieron en un inicio y/o no leyeron las instrucciones que aparecían al inicio de la actividad.

Tabla de registro grupal

Número del turno	Bolos derribados por color				Puntajes parciales
	Rojos	Verdes	[illegible]	Azules	
Primer turno	1	3	2	5	11
Segundo turno	3	3	2	2	10
Tercer turno	1	1	1	2	5
Puntaje total					

Imagen 2.2 Registro de tabla

- Por último, la Imagen 2 (anexo 8) y la Imagen 2.3, pueden dar explicaciones de los lugares en donde los estudiantes hacían los cálculos matemáticos para dar algunas respuestas, ya que como se mencionó anteriormente, no hay reporte del uso de las ecuaciones matemáticas para identificar la procedencia de las respuestas.

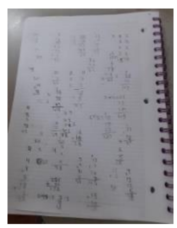


Imagen 2.3 Lugar donde se hacen operaciones

Para el tercer y último criterio se va a tener en cuenta los anexos 5, 6, 7 y 8, al igual que las imágenes de la 2.1, 2.2 y 2.3, por lo que los aspectos a mencionar no se van a centrar en solo uno de estos, sino que surgieron de un análisis de la información previamente mencionada, además, hay aspectos que ya se han mencionado, como la falta de justificación de los estudiantes cuando emplean gráficas o ecuaciones, pero se van a volver a resaltar dando un mayor énfasis del por qué se considera que no son del todo claros.

- Como se ha argumentado con anterioridad, la gran mayoría de estudiantes no justifican de manera clara las respuestas que dan, esto en términos de porcentajes representa un 77%, esto se menciona porque muchos niños solo dan la una respuesta concreta, por ejemplo cuando se les pregunta por la cantidad de cuadros coloreados de negro que puedan tener futuras imágenes, en vez de dibujar o decir que es posible conocer dicha cantidad con base en una ecuación que previamente mencionaron, lo hacen desde otros aspectos como el número correspondiente de la figura, esto induce que para ellos, las preguntas no se encuentran relacionadas, lo que significa que cada solución a dar, corresponde a un proceso diferente.

- Sin embargo, el análisis que hacen los niños y jóvenes es el mismo en cada pregunta que responden, esto se evidencia en la forma de escritura de cada respuesta, además, los elementos que emplean suelen ser los mismos a lo largo de las actividades. En lo general, estos elementos, son más escriturales que matemáticos, en el sentido que, al usar poco lenguaje matemático, los niños se apoyan más en los nombres de las ecuaciones que usaron para dar repuestas cortas, pero, no describen el por qué usan esa operación matemática en particular y no otra, quizás esto puede ser a que aún no tienen las herramientas suficientes para dar una mejor argumentación de las respuestas que dan.
- Para finalizar, los estudiantes que se apoyan en gráficas para dar solución a las preguntas, ellos no describen los criterios que emplearon para la construcción de estas, tampoco agregan información que permita entender la intención de la gráfica, esto produce que quien pretenda conocer el análisis empleado para dar respuesta al interrogante no tenga los suficientes datos y por ende se les dificulte la comprensión del proceso.

Con base en los aspectos mencionados para cada uno de los criterios, se llega a los siguientes análisis:

1. Los estudiantes son capaces de describir de manera escrita algunos procesos en los que se involucran patrones y recurrencias, sin embargo, cuando vivencian situaciones en las que la variación es un aspecto primordial, pero sutil, se les dificulta identificar las relaciones que pueden existir entre cada uno de los escenarios vivenciados, esto puede ser que al no tener un esquema que les permita recordar con frecuencia aquellos aspectos en los que se asemejan, asimilen que no existe relación entre cada situación.
2. Los estudiantes emplean poco la modelación para dar respuesta a las preguntas que se les proponen, ya que en muchas ocasiones no hacen ecuaciones o graficas que les permitan comprender y modelar las situaciones que están estudiando.
3. La argumentación y justificación no son elementos empleados de manera constante por los estudiantes, porque cuando estos dan respuesta a las preguntas, lo hacen desde

respuesta concretas, que no brindan información suficiente para identificar el análisis que emplean a lo largo de la construcción de las respuestas, es por esto que se recomienda dar algunas herramientas argumentativas como las que se describen desde la pedagogía de la pregunta para que sean capaces de argumentar mejor sus respuestas.

4. Los estudiantes en general construyen hipótesis que les permiten responder preguntas de manera rápida, sin embargo, son pocos los momentos en los que se detienen a comprobar si la hipótesis construida es la adecuada y en efecto da la solución correspondiente.

5. Hay pocos estudiantes que se atreven a proponer ecuaciones y gráficas que les permiten responder de manera objetiva muchas de las preguntas que les hacen, pero al igual que en la construcción de hipótesis, los niños no se detienen a analizar si la ecuación o grafica es la adecuada, razón por la cual se considera implementar diversas estrategias como el uso de la experimentación para enriquecer la modelación que realizan los educandos.

6. Por todo lo anterior, es necesario fortalecer la modelación, argumentación, interpretación y la comprobación de hipótesis en los estudiantes, esto desde un aspecto experimental que les permita vivenciar y observar diferentes formas en las que se generan modelos.

Capítulo 3 : El fortalecimiento del pensamiento variacional en los estudiantes

El presente capitulo, tiene como contenido las actividades experimentales que podrían enriquecer el pensamiento variacional desde el uso de la modelación, en diferentes situaciones encaminadas hacia nociones de la mecánica cuántica, estás fueron construidas con base en los resultados descritos en el anterior capitulo, además, se abordará la presentación, análisis y resultados obtenidos del postest.

3.1 Presentación, análisis y resultados de las actividades experimentales que contribuyen con el fortalecimiento del pensamiento variacional

Las actividades que se construyeron desde la información encontrada durante el desarrollo del pretest son las siguientes:

La primera actividad, consistió en abordar el experimento mental del gato de Schrödinger con los estudiantes, para esta se tuvo en cuenta la modelación presentada en el capítulo I, sin embargo, se le hizo ajustes para posibilitar el entendimiento de la actividad, uno de estos fue la notación empleada, del mismo modo, al presentar el experimento mental se empleó un cuento y una caja que contenía una ruleta que pudiera evidenciar los diferentes estados del animal. Luego, los educandos debían responder unas preguntas orientadoras que contribuyeran con la construcción de su propio modelo del experimento. Esta actividad se encuentra en el anexo 9 y tiene como objetivos: 1) Presentar a los estudiantes el concepto de principio de superposición desde la teoría cuántica mediante el experimento mental del gato de Schrödinger, 2) modelar con ellos el fenómeno presentado, a través de una aproximación a la notación de Dirac.

La segunda y última actividad se llamó estudiando el comportamiento de la luz (anexo 10), está dividida en dos momentos experimentales, uno consistía en hacer incidir una luz monocromática de longitud de onda entre 630 nm – 650 nm en la parte izquierda de un cristal transparente de calcita, cómo se muestra en la imagen 3.1, la fuente de luz fue un láser. Al pasar el haz incidente por el cristal de calcita este se refleja en dos haces con polarización perpendicular entre sí (horizontal $|H\rangle$ y vertical$|V\rangle$), debido a las propiedades de birrefringencia o doble refracción del mineral. Sin embargo, para el montaje se asume que la fuente solo envía un fotón a la vez, esto con el fin de ver el sistema no como uno clásico, sino como uno cuántico, de esta manera se podría describir la polarización de un fotón al pasar por el cristal de calcita.

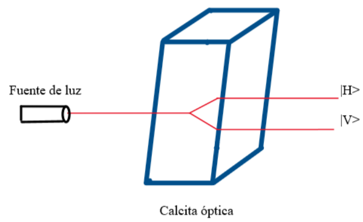


Imagen 3.1

Para el segundo, se tenía otro láser que emanaba la misma longitud de onda que el anterior, haciendo que su haz pasara por un espejo semirreflectante y a partir de las propiedades de reflexión de la luz y del espejo, se observara un rayo transmitido y uno reflejado, cada uno incide en un espejo convencional permitiendo que ambos haces llegaran a un detector (Imagen 3.2). Al igual que con el montaje de la calcita, se considera que el láser solo envía un fotón a la vez, esto con el fin de evidenciar las bases probabilísticas del principio de superposición desde la teoría cuántica, ya que algunos fotones se transmiten y otros se reflejan (Espinosa).

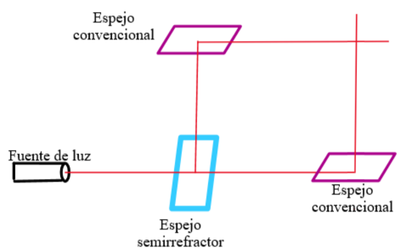


Imagen 3.2

El objetivo de estos momentos fue: Proponer dos actividades empleando la polarización y la reflexión de la luz, para la construcción de modelos y análisis descriptivos enfocados en la explicación del principio de superposición desde la mecánica cuántica, cabe resaltar que la construcción de los modelos y análisis de las situaciones la asumieron los estudiantes.

La información recolectada de estas actividades será analizada desde los siguientes parámetros: 1) el tiempo que se invirtió para cada una de las actividades experimentales, 2) los alcances de cada uno de los momentos experimentales y 3) el nivel de apropiación que tuvieron los estudiantes frente a los conceptos abordados, principalmente al principio de superposición desde la mecánica cuántica. Estos parámetros, permitirán conocer que tanto se cumplieron los objetivos de las actividades.

El primer parámetro, que es el tiempo invertido para cada una de las actividades, este en magnitud no fue mayor a cuatro horas para la actividad del experimento mental del gato de Schrödinger y para la actividad del anexo 10 fue de aproximadamente seis horas, cabe resaltar que no fueron horas consecutivas, sino que se intentó trabajar en bloques de 2 a 3 horas, esto con el fin de no aburrir ni cansar a los estudiantes. Con base en esta información se va a analizar los datos desde los otros dos criterios, esto con el fin de revisar si el tiempo invertido fue significativo y óptimo para lograr las metas planteadas. Como cada actividad tiene objetivos distintos, la información de cada uno de estos se va a interpretar de manera independiente.

Inicialmente, se analizarán los datos de la actividad experimental del gato de Schrödinger, teniendo en cuenta los parámetros 2 y 3 y el anexo 11 y posteriormente la información de la actividad "estudiando el comportamiento de la luz" a partir de los criterios mencionados con anterioridad y de los anexos 12 y 13.

Para la actividad del experimento mental del gato de Schrödinger se encontraron los siguientes resultados:

- Un primer alcance es el fortalecimiento de la capacidad argumentativa que tienen los jóvenes y niños, ya que sus respuestas son más estructuradas y descriptivas que al momento de responder el pretest, lo que implica que al leerlas sea posible entender los análisis que realizan, sin embargo, aún falta un 23% de los estudiantes que se les dificulta construir este tipo de respuestas.
- Se evidencia que algunos estudiantes emplean gráficas o esquemas que les permiten comprender la actividad y construir sus propias interpretaciones, no obstante, la mayoría (64%) de los estudiantes solo describen las situaciones desde la escritura.

- En un 44% de las respuestas de la primera pregunta, se evidencia que se les dificulta entender y comprender lo que significa el principio de superposición desde la mecánica cuántica, ya que asimilan que no es posible encontrar gatos que estuvieran inconscientes y vivos a la vez, resaltado que lo que sí es viable es encontrarlos en un estado moribundo. Mientras que, en otras soluciones, se puede interpretar que intentan relacionar los estados del animal desde el uso de la probabilidad, esto permite pensar que es posible explicar este tipo de conceptos en esta población siempre y cuando se tenga cuidado con las palabras empleadas.
- La pregunta dos tiene algunas respuestas en las que se puede identificar que para los estudiantes es necesario ciertas herramientas para el entendimiento y construcción de modelos que permitan estudiar algunas situaciones. Sin embargo, vuelve y juega que son pocos los estudiantes (38%) quienes las emplean, por lo que se debe seguir implementado este tipo de estrategias para incrementar el porcentaje de estudiantes que construya modelos.
- El 33% de los estudiantes son conscientes que para conocer el estado más probable en que se puede encontrar al gato es abriendo la caja, y una vez abierta, repetir el experimento las veces que sean necesarias, esto con el fin de llevar un conteo que les permita la construcción de modelos y de esta manera entender mejor las implicaciones que traen las actividades experimentales y los conceptos abordados durante dichas actividades.
- La construcción de hipótesis por parte de los estudiantes es algo que se infiere de las respuestas analizadas, ya que algunos intentan dar diferentes situaciones en las que sea posible encontrar otros experimentos similares al que se les propuso. Es importante resaltar, que en las construcciones de hipótesis la creatividad de los estudiantes jugó un papel fundamental, resaltando que los niños de estas edades son capaces de interpretar situaciones abstractas a partir de modelos que permitan un entendimiento de los fenómenos abordados.

Con respecto a la actividad titulada estudiando el comportamiento de la luz se encontró lo siguiente:

- Se evidencia que el 65% de los estudiantes construyen respuesta más argumentadas y en pro a responder lo que se les pregunta, además, en estas respuestas se muestra la construcción de hipótesis al momento de estudiar las diferentes situaciones que se les presenta. Llama la atención cómo los niños a lo largo de cada pregunta son capaces de construir hipótesis y en relacionarlas entre cada situación problema que se les presenta, incluso llegan al punto de relacionarlas con situaciones de su vida cotidiana.

- Se incrementa el uso de gráficas y/o imágenes al momento de responder y describir las situaciones que están observando a un 70%, sin embargo, son pocas las ecuaciones construidas para analizar los fenómenos estudiados, pero, esto es entendible en el sentido en que los estudiantes apenas están iniciando en estos aspectos, razón por la cuál se recomienda seguir con este tipo de actividades para que ellos sigan fortaleciendo este tipo de interpretaciones hasta el punto de relacionar las gráficas y/o esquemas con un lenguaje matemático.
- Se observa que los estudiantes parecen lograr una mayor comprensión cuando manipulan e interactúan con los objetos requeridos para las actividades experimentales, ya que en estas situaciones tienden a emplear la pregunta como herramienta para la recolección de información, y desde ésta establecen hipótesis sobre el comportamiento de la luz, además, la manipulación les da la ventaje de versen como sujetos activos de su propio proceso de aprendizaje, es por esto que el aprendizaje activo puede ser una metodología clave para incentivar el estudio de la física moderna en estos niveles de escolaridad (primaria).
- Los estudiantes prefieren responder las preguntas desde la oralidad, ya que es una actividad con la que se sienten más cómodos debido a que poseen más herramientas para expresar sus ideas. Pero al momento de escribir sus respuestas son más concretos y menos explicativos, esto impide que se tenga más información de los análisis que hacen los educandos, ya que no se contempló la necesidad de grabar las clases al inicio.
- Con respecto a la comprensión del principio de superposición desde la mecánica cuántica que hacen los estudiantes, el tiempo sigue siendo un factor negativo para que se establezcan más actividades que permitan la comprensión de este, ya que hay respuestas que indican que con más trabajo es posible que los estudiantes entiendan los conceptos abordados, pero no solo para realizar otras actividades, sino también para volver a realizar las actividades propuestas con el fin de ir subiendo la complejidad hasta el punto en el que logren comprender los principios básicos de la mecánica cuántica.
- Algunos logran relacionar las dos actividades implementadas, resaltando que, en el caso de la calcita y el espejo, estos funcionan como si fuera una caja que “codifica” y “ajusta” el haz para que este tome uno de los caminos que se visualiza, con esto se intuye que los

estudiantes ya hacen procesos de relación entre diversas situaciones que vivencian, sin embargo, este proceso al ser nuevo para ellos necesita de más herramientas y elementos que les permitan la seguir desarrollando y fortaleciendo su pensamiento variacional.

- Hay respuestas que incitan a pensar sobre cómo los estudiantes interpretan las situaciones que están analizando, una de estas es cuando mencionan que dentro de la calcita hay sustancias que permiten la fragmentación o división del haz y por esto se evidencia que salen dos haces. Esta respuesta es muy interesante porque implica que ellos son capaces de realizar abstracciones para dar explicación el fenómeno observado, y si son capaces de realizar abstracciones implica que los conceptos de la mecánica cuántica tienen un alto porcentaje de ser entendidos por los educandos, de esta manera se estaría abriendo la posibilidad de implementar no solo la mecánica cuántica, sino gran parte de la física moderna en niveles iniciales de educación.

Los resultados de ambas actividades experimentales demuestran que el tiempo si es un factor para tener en cuenta al momento de explicar y orientar este tipo de temas en estudiantes de quinto de primaria, además, resalta la importancia que tiene la actividad experimental en estos niveles de educación y la relación que tiene para la construcción de modelos explicativos y lo más importante es que es posible enseñar el principio de superposición desde la MC en esta población. Cabe resaltar que esta no es una tarea fácil, ya que demanda tiempo, recursos interactivos, una amplia bibliografía de actividades experimentales y un amplio conocimiento sobre el tema.

3.2 Presentación, análisis y resultados del postest

En esta sección se describirá, analizará y se mencionaran los resultados del postest que se construyó con la finalidad de evaluar el trabajo realizado en los momentos anteriores, es decir, si las actividades de implementación contribuyeron con el fortalecimiento del pensamiento variacional de los estudiantes, más puntualmente si estas les brindaron herramientas y técnicas que les facilitaran la construcción de modelaciones. Las actividades construidas para el postest están basadas en las del pretest, esto con el fin de tener un parámetro que permitiera identificar, analizar y describir el mejoramiento que tuvieron los estudiantes.

El Anexo 14 es el postest implementado, en este se construyeron dos actividades, la primera tiene como nombre jugando parqués y su finalidad es identificar las relaciones entre las diferentes operaciones matemáticas y el empleo de estas para resolver problemas, la actividad cuenta con dos momentos, en el primero el valor de las casillas valen dos puntos, mientras que en el segundo estas valen tres puntos, con el fin de generar espacios en los que los estudiantes intenten establecer modelos que les permitan describir y anticipar situaciones durante el juego (Obando & Botero, 2006). La segunda, es denominada como el momento 3 dentro del taller, sin embargo, esta está relacionado con la primera actividad del pretest que tenía como nombre observando cuadros, por ende, la finalidad sigue siendo la interpretación, el análisis y la descripción de las variaciones presentes entre cada figura, dentro del ejercicio interpretativo y descriptivo los estudiantes deberán emplear las matemáticas que conocen. Estas dos actividades, están orientas a partir de preguntas que permitan fortalecer la capacidad argumentativa y la creación de modelos en los educandos.

Debido a que con la implementación del pretest se busca realizar un ejercicio evaluativo sobre las diferentes acciones que se desarrollaron, se van a seguir trabajando los mismos criterios empleados para el análisis del pretest.

De la misma manera, se busca analizar e interpretar sobre la aproximación que tienen los estudiantes con los criterios resaltados con anterioridad:

Para el primer criterio se va a tener en cuenta únicamente el anexo 15 donde se encuentra las preguntas con sus respuestas que logran dar información sobre que tanto los estudiantes describen los comportamientos variacionales en diferentes situaciones, dicho esto, lo que se encontró fue lo siguiente:

- El 75% de los estudiantes son conscientes de las relaciones que puede haber entre los diferentes momentos que vivencian, como se evidencian en las respuestas de la segunda pregunta, en estas, ellos resaltan que se practica el mismo procedimiento en los dos momentos que tiene la actividad, por lo que la expresión o el método de solución que emplean en el momento 1 les servía para el segundo momento, siempre y cuando se hiciera una modificación a la expresión, la cual consistía en cambiar el divisor empleado.
- El 85% de las respuestas de la pregunta tres, dan a entender que los estudiantes se sienten más cómodos trabajando en grupo, ya que en estos pueden enriquecer sus respuestas,

sin embargo, al centrarse solamente en el trabajo colaborativo dejan de lado lo que implica la pregunta, aunque no hay estudiantes que intentan describir las semejanzas y diferencias que existen entre los dos momentos, dando a entender que son capaces de analizar e identificar las características variacionales de los dos momentos.

- Un 55% de los estudiantes logran dar un análisis descriptivo sobre lo que deben realizar para identificar el comportamiento de imágenes, resaltando las operaciones que les podrían servir al momento de construir un modelo más detallado de las situaciones, sin embargo, siguen sin intentar comprobar si sus hipótesis son correctas o no.
- El 78% de estudiantes ya intenten dar aproximaciones sobre las diferentes relaciones y diferencias de las imágenes que están analizando, sin embargo, se encuentra una dificultad para reconocer las principales diferencias y semejanzas entre las figuras que se les propone, ya que en este caso, el 60% logran identificar que en las figuras pares, siempre hay el doble de cuadros coloreados correspondientes con la imagen observada, mientras que en las impares, no logran identificar con claridad el patrón a seguir, pese a esto, intentan relacionar la imagen impar anterior con la que se pretende interpretar y describir.

Para describir los hallazgos del segundo criterio se va a considerar el anexo 16 que contiene las respuestas a las preguntas que brindan información al respecto, adicional a este, también se considera el anexo 17 que describe el llenado de las tablas que los educandos hicieron. Los hallazgos son los siguientes:

- El 80% de estudiantes siguen describiendo las operaciones que realizaron desde la escritura, sin emplear como tal el lenguaje matemático que les permite sintetizar las ideas que emplearon. Mientras que un 41% hay otros que intentan realizar las descripciones de las operaciones y colocan un ejemplo para que el lector identifique como sería dicha operación.
- Del 41% un 30% de los estudiantes que dan el ejemplo sobre la expresión empleada, lo hacen de manera clara cosa que se pueda entender de donde salen los criterios, números o herramientas empleadas para la construcción de las expresiones, esto significa que en verdad un existe una mejoría en la construcción de modelos.
- Con respecto al uso de gráficas y/o imágenes para esta ocasión son el 70% de los estudiantes se atreven a emplearlas, al parecer ya empiezan a ver la importancia de la

implementación de gráficas a la hora de responder y/o interpretar algunas situaciones que se les presenta.

- Para esta ocasión son más pocos los niños (25%) que se les dificulta representar gráficamente las imágenes de manera correcta, es decir que las puedan dibujar tal cuál como se muestran en los ejemplos, lo que implica que no solo han mejorado la manipulación de herramientas que les permitan construir imágenes, sino también se presenta una mejora en cuento a la construcción de figuras geométricas.
- Son pocos los estudiantes (34%) que intentan establecer relaciones entre las gráficas y/o imágenes que usan con las expresiones matemáticas que construyen, sin embargo, es notorio que ya se empieza a identificar por de los estudiantes que al momento de describir y comprender diferentes situaciones lo más pertinente es la construcción de modelos a partir de gráficas y/o imágenes con expresiones matemáticas.
- En la cuarta pregunta hay repuestas en las que se evidencia la notación empleada en las actividades experimentales, los estudiantes en un 15% las consideran pertinentes para comprender el comportamiento del desplazamiento de las fichas a la hora de jugar parqués, de esto se intuye que durante la realización del postest ellos estaban intentando relacionar las actividades experimentales realizadas.
- Sigue habiendo estudiantes (30%) que escriben expresiones matemáticas que no son claras o comprensibles, sin embargo, estos estudiantes son pocos, para ellos quizás sea pertinente una mayor compañía por parte del docente y/o compañeros que les permita potencializar estas habilidades adquiridas durante la propuesta.
- En el anexo 17 se muestran las tablas que los estudiantes registraron a lo largo de la actividad, en estas aún se evidencia que hay estudiantes que se les dificulta un poco registrarlas, pese a esto, se demuestra un interés por llenarla como lo entienden, y lo sorprendente es que en este caso este registro en la mayoría de las veces es asertivo, lo que indica que, aunque haya estudiantes (35%) que aún no entiendan el registro de tablas, hay otros (65%) que han mejorado en este aspecto.
- Continuando con el registro de tablas, se evidencia que hay diferentes maneras en la que los estudiantes pueden registrar o diligenciarlas, de esta manera se intenta privilegiar el procedimiento antes del resultado, del mismo modo el estilo de pensamiento que hacen los

educandos, de esta manera se generan espacios en donde los estudiantes se interesen por las matemáticas, ciencias y en especial la física.

- Por último, en los anexos mencionados con anterioridad (anexo 16 y 17) se puede observar que son más los estudiantes (80%) que en este punto emplean las matemáticas (expresiones y/o gráficas) para la descripción de diferentes situaciones de su entorno.

Para el último criterio, se va a emplear el anexo 18 junto con los anexos 15 y 16, puesto que en este criterio lo que importa es hacer un análisis de las respuestas de los estudiantes y ver si estás son más elaboradas y claras que al inicio del proyecto, es decir, cuando se desarrolló el pretest. Dicho esto, los resultados son:

- Con el desarrollo del postest se puede observar que un 77% de los estudiantes construyen sus respuestas de manera clara y comprensible para los demás, en especial cuando se les pregunta por las acciones que han desarrollado, como por ejemplo en las respuestas de las preguntas de la actividad jugando parqués, los educandos se interesan un poco más para hacer resaltar las dificultadas y debilidades que encontraron en su proceso, del mismo modo, para informar lo que hicieron para dar solución a estas. Sin embargo, aún el 23% de los estudiantes se les dificulta dar respuestas claras, como en el caso de las respuestas del momento 3, en especial cuando se les pregunta la cantidad de cuadros coloreados de X figura, ellos simplemente dicen el número que creen que corresponde y no justifican el porqué de dicho número.
- Un 25% de los estudiantes que en sus respuestas dan expresiones matemáticas y/o imágenes en ocasiones intentar argumentar el origen de estas, sin embargo, el resto (75%) no lo hace, dejando que su modelación no sea del todo clara y comprensible, como se evidencia en gran parte de las respuestas del momento 3 del taller.

A continuación, se describirán los resultados obtenidos del postest teniendo en cuenta los hallazgos encontrados en el pretest, los cuales se encuentran al finalizar el capítulo II:

1. Se evidencia una mejoría en la mayoría de los estudiantes con respecto a la identificación de variaciones sutiles presentes en las situaciones que vivencian, sin embargo, sigue siendo una dificultad cuando intentan establecer relaciones entre los diferentes momentos que tienen las actividades, esta dificultad se podría mejorar si se continúa

trabajando con los educandos talleres en donde las semejanzas y diferencias entre cada momento sean fundamental.

2. Con respecto a la modelación que realizan los estudiantes, se muestra una gran mejoría, ya que la mayoría reconoce la importancia de las expresiones matemáticas y/o gráficas para la descripción y análisis de situaciones en los que se encuentran inmersos. Por otro lado, siguen sin verificar si estos modelos propuestos son los pertinentes para comprender los fenómenos estudiados, en este caso se presente una congruencia, debido a que durante la implementación de las actividades experimentales los educandos fueron conscientes de que sus modelos no respondían del todo a las necesidades explicativas de las actividades. Por esto, se recomienda implementar actividades experimentales en donde ellos puedan manipular los objetos con el fin de evaluar sus representaciones.

3. Los estudiantes se preocupan más por hacer que sus respuestas sean más argumentadas y justificas, no obstante, algunos siguen dando respuestas concretas sin emplear herramientas que les permita mejorar sus interpretaciones, para esto, es conveniente que se construyan actividades en donde ellos entiendan que es importante argumentar algunas respuestas.

4. Con respecto a la construcción de hipótesis los estudiantes han presentado mejorías, ya que en ocasiones le dan prioridad a las ideas previas que tienen de las situaciones estudiadas. Sin embargo, siguen siendo pocos los que intentan comprobar si sus ideas son pertinentes para dar explicaciones a los fenómenos estudiados.

5. Por último, se sigue recomendando fortalecer la modelación, argumentación, interpretación y la comprobación de hipótesis y modelos en los estudiantes, esto desde un aspecto experimental que les permita vivenciar y observar diferentes formas en las que se generan modelos, ya que en estas actividades ellos pueden manipular los instrumentos empleados con el fin de evaluar sus representaciones.

Conclusiones

- El pensamiento variacional siempre ha estado presente en diferentes escenarios del ser humano, en especial cuando este intenta realizar procesos de modelación de fenómenos que están en su quehacer cotidiano. Sin embargo, son pocos los trabajos que se centran en describir cómo es la relación del pensamiento variacional con las diferentes áreas del conocimiento, en especial con la ciencia. Además, existe poca documentación que se centre en fortalecer y conceptualizar el pensamiento variacional en la educación.
- Pensar variacionalmente consiste en la creación, organización y confrontación de diversas situaciones involucradas en procesos de cambio y de variación, además de construirle significados a los fenómenos que se estén estudiando, para ello es importante que el sujeto construya modelos representativos de los fenómenos que está estudiando. Con base en esta definición, se considera importante fortalecer el pensamiento variacional en los estudiantes de quinto de primaria desde actividades experimentales donde logren percibir las interacciones de los fenómenos con el medio que interactúan, estas actividades experimentales pueden ser nutridas con experimentos mentales que ayuden a mejorar la comprensión de los conceptos, sin embargo, la actividad experimental no solo contribuye al fortalecimiento del pensamiento variacional, sino también enriquece la capacidad argumentativa e interpretativa de los estudiantes a la hora de realizar un análisis de situaciones problemas.
- A partir de un ejercicio histórico centrado en cómo se han desarrollado diferentes conceptos a lo largo de la construcción de las ciencias y las matemáticas, pero que se han dejado de lado en la educación primaria y secundaria debido a la "complejidad" que tienen, se concluye que estos conceptos pueden ser abordados desde un carácter histórico en el que se evidencie que las ciencias y las matemáticas al ser construcciones sociales y culturales son inacabados, además, de los diferentes contextos que se originaron al momento de su desarrollo. Esto permite que al estudiar la historia de la física y las matemáticas, sea posible ver su relación de manera sencilla, que cuando es abordada de manera tradicional, como, por ejemplo, con el

desarrollo del concepto de función fue posible ver que este se desarrolló a partir de los estudios de las relaciones de proporcionalidad, la cinemática, la termodinámica, entre otros. Resaltando así que tanto la física como la matemática son construcciones sociales, más no individuales.

- El principio de superposición desde la mecánica cuántica, aunque sea una de las bases de la teoría cuántica, son pocos los investigadores que intentan describirlo desde su interpretación y no desde su aspecto matemático, quien mejor lo ha interpretado desde su significado ha sido Dirac. A su vez, realizar un análisis comparativo entre el principio de superposición de la mecánica clásica y la mecánica cuántica sirve para establecer y comprender las semejanzas y diferentes que tiene cuando se emplea en alguna de estas dos teorías, para ello es importante tener en cuenta sus interpretaciones que la forma en la que los describimos, ya que desde el lenguaje matemático no se evidencian de manera clara sus semejanzas y diferencias.
- Las actividades experimentales que se lleven a estudiantes de quinto de primaria deben contemplar las habilidades que tienen los educandos, ya que esto permite enriquecer los procesos de aprendizaje desde sus intereses. Además, estas actividades deben permitir que los estudiantes puedan manipular los objetos, porque a partir de esta manipulación es que ellos pueden comprobar si sus modelos son pertinentes para la descripción y comprensión de las situaciones que vivencian. A partir de esto, se recomiendan actividades en las que los estudiantes asuman un rol activo durante el desarrollo de estas, ya que éste les permite generar hipótesis y modificar lo que en un inicio se les propone, ya que a partir de esto se les facilita la construcción de modelos que representan lo que están estudiando.
- Es posible enseñar el principio de superposición desde la mecánica cuántica en estudiantes de quinto de primera, ya que se evidencia que no es necesario enseñar la física desde la linealidad que propone el MEN, sino lo importante es la manera en la que se orientan estos conceptos, en este caso, las actividades experimentales implementadas sirvieron para que los estudiantes se interesaran en estudiar estos temas, debido a que ellos mismos mencionaban que en algunas series de televisión o de plataformas digitales han visto o escuchado estos conceptos. De esta manera el presente proyecto puede dar fundamentos para que otros docentes se interesen por

enseñar la física moderna desde la actividad experimental en niveles de escolaridad temprana.

Bibliografía

Azcárate, C., & Deulofeu, J. (1996). *FUNCIONES Y GRÁFICAS.* Madrid: Editorial Síntesis.

Bauman, Z. (2004). *Modernidad Líquida* (Tercera edición ed.). Argentina: Fonde de Cultura Economica (FCE).

Boyer, C. B. (1996). *Historia de la matemática.* Madrid: Alianza Editorial S.A.

Cabezas, C., & Mendoza, M. R. (2016). Manifestaciones emergentes del pensamiento variacional en estudiantes de cálculo inicial. *Formaicón Universitaria, 9*(6), 13-26.

Cabezas, C., & Mendoza, M. R. (2016). Manifestaciones emergentes del pensamiento variacional en estudiantes de cálculo inicial. *Formación Universitaria, 9*(6), 23-26.

Cantoral Uriza, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *17*, págs. 1-9.

Cárcamo Barriosnuevo, S. J., Maury Mancilla, E. A., & Palmezano Sarmiento, G. J. (2012). Sistemas de tareas para el desarrollo del pensamiento variacional en 5° grado de educación básica primaria. *Escenarios*, *10*(1), 7-16.

Collete, J.-P. (1986). *Historia de las matemáticas I.* México: Siglo XXI Editores.

Dass, N. D. (2013). The Superposition Principle in Quantum Mechanics - did the rock enter the foundation surreptitiously? 1-6. Obtenido de arXiv:1311.4275v1 [physics.hist-ph] 18 Nov 2013

Díaz Barriga, Á. (2013). Guía para la elaboración de una secuencia didactica. *Universidad Nacional Autonoma de México* , 1-15.

Dirac, P. (1968). El principio de superposición. En P. Dirac, *Los principios de la mecánica cuántica* (págs. 15-34). Barcelona: Ediciones Ariel, S. A.

Espinosa, A. C. (Productor). (s.f.). *Belleza inescrutable: la superposición cuántica* [Película]. Obtenido de https://www.youtube.com/watch?v=gismCjO_zBg&t=379s

Fraassen, B. C. (1980). *La imagen científica.* Mexico: Paidós.

Freire, P., & Faundez, A. (2013). La pedagogía de hacer preguntas. En P. Freire, & A. Faundez, *Por una pedagogía de la pregunta: crítica a unda educación basada en respuestas a preguntas inexistentes* (págs. 69 - 80). Buenos Aires: Grupo editorial Siglo Veintiuno.

Gadamer, H.-G. (1993). *Verdad y método.* Salamanca: Ediciones Sigueme.

Grozdev, S., & Terzieva, T. (2010). Development of variational thinking skills in Programming teaching. *Proceedings of the anniversary international conference, research and education in mathematics, informatics and their applications.* Plovdiv- Bulgaria.

Jara, S. (2005). Investigación en la enseñanza de la física. *Revista Electrónica Sinéctica*, 3-12.

Mach, E. (1948). La experimentación mental. En E. Mach, *Conocimiento y error* (págs. 159-170). Buenos Aires: Espasa-Calpe Argentina, S. A.

Malagón Sánchez, J. F., Ayala Manrique, M. M., & Sandoval Osorio, S. (2013). *Construcción de fenomenologías y procesos de formalización.* (M. R. Ramos, Ed.) Bogotá D.C, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Malagón Sánchez, J. F., Ayala Manrique, M. M., & Sandoval Osorio, S. (2013). *Construcción de fenomenologías y procesos de formalización.* (M. R. Ramos, Ed.) Bogotá D.C, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional .

MEN. (2006). *Estándares básicos de competencias en matemátcias.* Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Mendoza Cely, D. M., & Rozo Clavijo, M. (2011). El principio de superposición de estados, a partir de los estados de polarización de una onda monocromática. *Revista científica , Extra*.

Mettini, G. (2020). Los experimentos mentales como modelos cientifícos. *Revista Colombiana De Filosofía De La Ciencia, 20*(40), 199 - 223. Obtenido de https://doi.org/10.18270/rcfc.v20i40.3237

Ministerio de Educación Nacional. (2004). *Pensamiento variacional y tecnologías computacionales.* Bogotá - Colombia: Enlace Editores LTDA.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias.* Colombia: MEN.

Monroy Pérez, F. (2016). Perspectiva histórica del principio del máximo de Pontryagin. *Lecturas matemáticas, 37*(2), 117 - 169.

Moreno Fernández, P. J., & Herrera Beltrán, C. X. (2016). *Práctica profesional docente: reflexiones y problematizaciones desde las historias de maestros y maestras.* Bogotá D.C: Kimpres Universidad de la Salle.

Nacional, M. d. (2016). *Derechos básicos de aprendizaje.* Bogotá D.C.

Obando, G., & Botero, O. (2006). La proporcionalidad directa e inversa a partir de la modelación de situaciones de variación. En Gobernación de Antioquia, & Universidad de Antioquia, *Módulo 2. Pensamiento variacional y razonamiento algebraico* (págs. 77-126). Medellin.

Obando, G., Posada, M. E., & autores, O. (2005). *Interpretación e implementación de los estándares básicos de matemáticas.* Medellin, Antioquia, Colombia: Gobernación de Antioquia y secretaría de Educación para la Cultura.

Organista, O., Gómez, V., Jaimes, D., & Rodríguez, J. (2007). Una idea profunda en la comprensión del mundo físico: el principio de superposición de estados. *Latin-American Journal Of Physics Education, I*(1), 83-88.

Perez Mora, J. H. (2016). *El átomo en la escuela: criterios didácticos para su enseñanza [Trabajo de grado, pregrado].* Bogotá D.C, Colombia: Repositorio Universidad Pedagógica Nacional.

Ramírez Casallas, J. F. (2013). Estrategia de enseñanza en física: desde los problemas de siempre hasta la construcción de artículos con los estudiantes de física ... exigencias y posibilidades para el profesor. *Revista Educación e ingeniería*, 62-69.

Restrepo, R. (2018). *Arpendizaje activo para el aula: una síntesis de fundamentos y técnicas.* Observatorio UNAE.

Saavedra, A. B. (2020). *Análisis del postulado cuántico del colapso de la función de onda a partir de una recontextualización histórico-epistemológica.* Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Silberman, M. (1998). *Aprendizaje activo: 101 estrategias para enseñar cualquier tema.* (A. Oklander, Trad.) Buenos Aires, Argentina: Editorial Troquel.

Sinarcas, V., & Solbes, J. (2013). Dificultades en el aprendizaje y la enseñanza de la física cuántica en el bachillerato. *Enseñanza de las ciencias, 31*(3), 9-25.

Spinel Gómez, M. C. (2009). Capitulo 0. En M. C. Spinel Gómez, *Introducción al formalismo de la mecánica cúantica no relativista* (págs. 1- 21). Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Spinel, M. C. (2009). Capitulo 0. En M. C. Spinel, *Introducción al formalismo de la mecánica cúantica no relativista* (págs. 1- 21). Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Vargas Guillén, G., & Guachetá Gutiérrez, E. (2012). La pregunta como dispositivo pedagógico. *Itinerario Educativo*(60), 173 - 191.

Vasco, C. E. (2002). El pensamiento varaicional, la modelación y las nuevas tecnologías. *Congreso internacional: Tecnologías computacionales en el currículo de matemáticas*, (págs. 61-70). Bogotá, Colombia.

Zuleta Araújo, O. (enero - marzo de 2005). La pedagogía de la pregunta: Una contribución para el aprendizaje. *Educare, 9*(28), 115 - 119.

Anexos

ANEXO 1. Breve contexto histórico desde la construcción de número hasta la definición de función

La idea número es importante debido que permite pensarse como los procesos de variación han estado inmersos en la cotidianidad de las personas, además de ser un concepto básico para la humanidad, genera la posibilidad de pensar en un cimiento de la construcción de grandes conceptos, es decir, si se considera que el número es un término construido desde un análisis variacional, la verdadera base es un pensamiento variacional.

Para comprender el concepto de número, inicialmente se considera una situación puntual: un comerciante que vivió durante la época de las primeras civilizaciones, para él era importante tener un sistema de conteo que pudiera usar en sus negociaciones con diferentes tribus, para lo cual debía considerar el lenguaje de cada tribu, ya que, los significados (como por ejemplo el 1) podrían cambiar según la tribu con la que estuviera negociando, otro aspecto que el comerciante debía considerar para la elaboración de su sistema era que los miembros de las tribus pudieran asociar las cantidades como cosas independientes de la naturaleza, es decir, que el conteo sea universal para cualquier objeto, sin importar un orden especifico, puesto que lo importante sería el resultado (Collete, 1986). Con el ejemplo anterior, no se sabría puntualmente en qué momento se da el origen de los números, porque no se cuenta con la documentación adecuada, pero si se puede decir que la concepción más antigua empleada por la especie humana es el número (Boyer, 1996).

Este tipo de situaciones de las primeras civilizaciones, le permitieron a los humanos pensarse los números y posteriormente las matemáticas, no solo para el comercio, la agricultura o el conteo de animales, sino que ésta sería usada para pensarse las variaciones que se presentaban cuando veían al cielo. Los antiguos babilónicos y los egipcios iban a dar pasos agigantados sobre el estudio de la astronomía, altamente permeadas por componentes astrológicos, puesto que la intención era predecir determinados acontecimientos. Con ayuda de mediciones y procesos numéricos pudieron "predecir" algunos eventos, como eclipses o posiciones de algunos cuerpos celestes en determinadas épocas del año. Sin embargo, las mediciones tenían un alto grado de complejidad porque la matemática apenas se estaba formulando, imposibilitando la confrontación de los datos obtenidos de manera experimental con valores teóricos y estas civilizaciones no habían considerado las variaciones que podrían estar implícitas en las mediciones (Azcárate & Deulofeu, 1996).

En este punto es relevante hablar de cómo surgió la relación de la música con las matemáticas. En dicha relación hay presentes detalles respecto a la proporcionalidad que pueden ser importantes para el entendimiento del “concepto” de variación en algunos escenarios de la cotidianidad, debido a que en muchas ocasiones se perciben las matemáticas como un área del conocimiento alejada de los espacios cotidianos. Pitágoras fue uno de los primeros en interesarse respecto a las relaciones físicas que podrían estar presentes en la música, estudiando cómo las longitudes de las cuerdas generaban vibraciones específicas, que definían tonos específicos de manera cuantitativa: por ejemplo la nota quinta en términos matemáticos se escribía como 2:3 y la separación entera se escribía como 8:9. Pitágoras logra concluir que las notas más armónicas eran aquellas que tenían razones más sencillas, es decir, los números representativos eran pequeños (Azcárate & Deulofeu, 1996) (Collete, 1986).

Sin embargo, autores como Azcárate & Deulofeu (1986) señalan que la noción de proporcionalidad en cierta medida retraso la concepción de función y con esta la profundización del estudio del movimiento de los cuerpos. Si bien, los griegos se interesaron en este aspecto, ellos solo lo abordaron desde un carácter cualitativo. Los autores resaltan que el problema fundamental de la proporcionalidad se puede describir desde la comparación del área de dos círculos con el cuadrado de sus diámetros, en la cual no se puede evidenciar la dependencia que existe entre el diámetro y el área, la cual podría servir como una aproximación a la idea de función. Por tanto, la idea de proporcionalidad de los griegos pudo haber imposibilitado hacer relaciones entre magnitudes que no tuvieran una correspondencia aparente, lo cual hizo que en sus construcciones matemáticas no se llegara al concepto de función rápidamente.

En la edad media, los árabes divulgaron los trabajos matemáticos de los griegos en el oriente, esto les permitió abordar algunas funciones, como las funciones trigonométricas y los métodos de su estudio, de esta manera tomaron un papel fundamental para el avance de las matemáticas en ese periodo (Ministerio de Educación Nacional, 2004). Fue con base en los trabajos de Ptolomeo que los árabes pudieron avanzar con el estudio de las funciones trigonométricas, ya que, Ptolomeo con su tabla de cuerdas introduce la función seno. Sin embargo, la concepción de función seguía sin tener una interpretación cualitativa y cuantitativa y, por ende, conceptos como variable, dependencia y función seguían siendo irrelevantes para el estudio del movimiento y otros fenómenos implicados en la idea de cambio (Azcárate & Deulofeu, 1996).

También en la edad media, uno de los exponentes matemáticos de la escuela francesa, Nicolás Oresme (1323-1382), se interesó por los problemas de cambio que se venían planteando desde los griegos, en especial en el estudio de la cinemática, no solo desde un aspecto cualitativo, con la intención de introducir procesos aritméticos a la descripción del movimiento de los cuerpos. Para ello, propone el uso de segmentos rectilíneos para representar variaciones. Él pensaba que todo lo medible podría ser representado por cantidades continuas.

Oresme consideró un cuerpo en movimiento (Imagen 0.1), para representar su velocidad a través del tiempo, trazó una línea horizontal, los puntos que conforman la línea son conocidos como instantes de tiempo (longitudes), y para cada intervalo dibujaba un segmento perpendicular (latitud) cuya magnitud representa la velocidad del cuerpo en ese momento, aquí los extremos de las latitudes determinan una curva, pero en la Imagen 0.1 se trata de una línea recta como un caso particular y se considera que el objeto inició en estado de reposo, lo que implica que se genera un triángulo rectángulo.

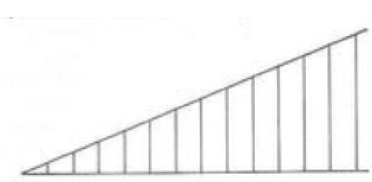


Imagen 0.1 Representación de la teoría de latitudes de Oresme, tomada de (Azcárate & Deulofeu, 1996, p. 45)

Oresme en su teoría de latitudes restringe las configuraciones de cambio a tres posibles: la primera recibe el nombre de *uniformemente uniformes*, en donde las latitudes son constantes, lo que implicaría que la línea de unión entre las diferentes latitudes es paralela con la horizontal, la segunda es denominada como *uniformemente diformes*, para este caso, la línea de unión entre las longitudes es una línea recta, como se muestra en la Imagen 0.1, por último, las *diformemente diformes* cuya representación de la línea de unión entre las longitudes no es recta. Como se puede ver, estas representaciones son similares a la manera como se grafican funciones a partir de tablas de datos en un plano cartesiano. Por otro lado, Oresme pretendía que con su teoría o representación fuese más sencillo y rápido entender la naturaleza de los cambios, sin importar si son analizados desde un enfoque cualitativo o cuantitativo, lo importante era hacer una representación de cualquier tipo de cambio.

Sin embrago, las aproximaciones que hizo Oresme no se consideran como una expresión de dependencia en el sentido actual, porque para la fecha aún no había términos que permitieran entender las variaciones de fenómenos naturales. Además, para Oresme las relaciones de cambio en su teoría no presentaban experimentos debido a que no los tuvo en cuenta en el momento de construir su formulación. Pero, si es seguro mencionar que los aportes que hizo Oresme iban a representar un rol fundamental en la formación del pensamiento de Galileo, Descartes, Newton, Leibniz, entre otros, los cuales trabajarían fuertemente por la formulación de un nuevo enfoque para entender las situaciones de variación (Azcárate & Deulofeu, 1996).

Por su parte, Galileo Galilei (1564- 1642) conocía los trabajos sobre la latitud de las formas de Oresme, pero a diferencia de éste, Galileo no se centró en el estudio de los problemas de cambio, sino en la descripción cuantitativa del movimiento y para ello recoge la representación propuesta por Oresme, lo que implicaría unas graficas similares, cuya diferencia es el rol que juega la experimentación en su construcción. Los métodos matemáticos usados por Galileo estaban fundamentados en la concepción de proporcionalidad homogénea. Él expresó $e\colon e' = t\colon t'$ para caracterizar los movimientos uniformes, en vez de usar $e\colon t = e'\colon t'$, donde e es el espacio y t el tiempo, en la actualidad se sabe que ambas expresiones son equivalentes, debido que con estas se evidencia la idea de velocidades constantes que caracterizan el movimiento. Sin embargo, a diferencia de los griegos, la intención de Galileo era estudiar el movimiento desde un enfoque cuantitativo y usa la experimentación como justificación de las leyes establecidas; con ayuda de instrumentos que le posibilitaron tomar medidas para establecer las relaciones entre magnitudes, pudo relacionar dos magnitudes que no tuvieran una relación aparente, dando auténticas relaciones funcionales (Azcárate & Deulofeu, 1996).

Después de Galileo, 1637 Descartes publica "la géométrie" y con esta enmarcaría el inicio de la geometría analítica, que permitía describir e interpretar curvas y superficies a partir de ecuaciones (MEN, 2004) (Azcárate & Deulofeu, 1996). El lenguaje matemático permitiría que el significado de función no solo fuese introducido desde lo verbal, cuando se hablara de cinemática, sino desde un carácter matemático. Si bien los trabajos realizados por Oresme y Galileo manejaban la idea de función desde un carácter geométrico o de proporcionalidades, no era suficiente para manejar el concepto desde su forma matemática. Con el estudio que hace Descartes sobre la geometría, era posible hablar de función desde ecuaciones, a esto el MEN complementa diciendo que:

> Esta idea fundamental, afectó de forma decisiva a las funciones, ya que en este mismo trabajo aparece por vez primera el hecho de que una ecuación en x e y es una forma para expresar una dependencia entre dos cantidades variables, de manera que, a partir de ella, es posible calcular los valores de una variable que corresponden a determinados valores de otra. (Ministerio de Educación Nacional, 2004, p. 5)

Complementando la idea anterior, la introducción de las variables x e y, permitirían hacer más visible y de fácil comprensión la relación entre las magnitudes relacionadas.

Además, los aportes de Descartes establecieron una nueva representación de la cinemática, en la que las matemáticas tomaban un gran valor en su estudio, lo que no implicaba que el lenguaje verbal y la geometría fueran aspectos irrelevantes al momento de estudiar o explicar los fenómenos de la cinemática, sino que era más fácil explicar los fenómenos de esta nueva manera.

Hacia 1679, se publican los trabajos de Fermat los cuales había escrito en 1637, en estos hace la relación entre variables de manera similar que Descartes, pero poniendo un punto fijo que denominó el origen, que salía a partir de la intersección de dos líneas perpendiculares, en la mayoría de los casos, de forma tal que se pudiera dibujar una curva para observar la relación de dependencia entre las variables. Este método era más "didacta" que el de Descartes, sin embargo, Descartes consideró solo las funciones algebraicas y descartó las funciones trigonométricas y/o curvas mecánicas que no podían ser representadas a partir de su método. Cuando Newton introduce el estudio de funciones en series infinitas, el método desarrollado por Descartes y Fermat se habré para cualquier tipo de funciones.

Con los aportes dados por Descartes y Fermat se podría pensar que la geometría pasaría a ser un factor secundario para el análisis del movimiento de los cuerpos, pero no fue así, la geometría continúo siendo importante para la comprensión de estos fenómenos. Un ejemplo son las leyes de Kepler empleadas para el análisis de las orbitas de los planetas y el análisis propuesto por Newton en su teoría de la fuerza gravitacional. Además, en 1696 Johann Bernoulli introduce el problema de encontrar la trayectoria más rápida que recorre un cuerpo con masa M cuando pasa de un punto A, a un punto B (Imagen 0.2), dados por un plano vertical.

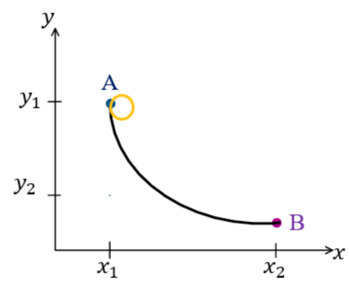


Imagen 0.2 Representación de la caída de un objeto desde un punto A a un punto B

La solución al problema fue dada por diferentes pensadores de la época, entre estos se tiene la de Johann Bernoulli, amparada por los principios ópticos de la época y por la discretización de la trayectoria. Sin embargo, la solución para describir es la dada por Jacob Bernoulli, porque está bajo el concepto de infinitesimales, la generalización del concepto de punto estacionario y tiene muy en cuenta los análisis geométricos del problema. Con estos conceptos se considera a Jacob como el pensador que da las bases preliminares sobre la fundación del cálculo de variaciones. La idea fundamental de Jacob era mantener constante las propiedades extrémales de la braquistócrona en cada proporción de esta, al igualar las longitudes infinitesimales de la curva y de una variación de ella, de esta manera pudo resolver la ecuación diferencial que satisfacía la cicloide (Monroy Pérez, 2016).

Pero Jacob no fue el único que pensó en solucionar el problema desde las variaciones, otro de los matemáticos de la época, dedicado a estudiar el concepto de infinitesimales fue Newton, quien estudió las series infinitas y el método de fluxiones escrito en 1671 y publicado en 1736. Pero también analizó las variaciones y el cambio desde una perspectiva geométrica-cinemática al considerar las ideas de Barrow, quién tomaba el tiempo como argumento al analizar las variables dependientes como cantidades continuas, las cuales tienen una velocidad de cambio determinada. Newton al determinar un movimiento como $x = f(t)$ sobre el eje x en un tiempo t, caracteriza al movimiento mediante la velocidad de cambio. Este valor es el límite del cociente de las diferencias $\Delta x/\Delta t$, que representa el valor de la velocidad, y para él es “fluxión de x”, que también la escribía como $\dot{x}$, lo que hoy en día se escribe como dx/dt (Azcárate & Deulofeu, 1996).

Contemporáneo a Newton, Leibniz introduce el termino de función en 1673, como un problema de coordenadas cuando se estudiaban ciertas propiedades de las tangentes, pero hacia el año 1694 usa la palabra de manera más general y referido como cuestiones de la geometría diferencial. Sin embargo, la palabra *función* salía como el deseo de expresar con una palabra cantidades que dependieran de una variable. En ese momento había una restricción con respecto a las expresiones analíticas, ya que al definir una función arbitraria de x, debía estar construida desde un criterio cualquiera que podía ser desde la misma x y de constantes, este “criterio cualquiera” era una expresión algebraica (MEN, 2004).

Como se evidencia en las ideas anteriores, la gran diferencia entre el estudio de variables en términos de funciones entre Newton y Leibniz es que para Newton el análisis de las funciones se debía hacer desde “fluxiones” que dieran razón de la velocidad de variación de la función, en donde el tiempo era un factor fundamental para dicho análisis. Pero, para Leibniz esta idea no se podía encasillar solo a conceptos geométricos-cinemáticos, sino que la variación como tal debía ser un elemento genérico de una expresión algebraica cualquiera.

Cabe resaltar que la importancia del concepto de función no solo radica en el estudio del movimiento, como se ha mencionado hasta el momento, sino que también en otros fenómenos físicos estudiados a partir del siglo XVIII. Desde el MEN (2004) se resalta que los fenómenos como el calor, la luz, densidad, los cuales pueden “poseer” varios grados de “intensidad” que cambian con relación a dos estados (puntos) establecidos; la denominada intensidad está relacionada a qué tanto pueden perdurar con el tiempo y en algunos casos con la cantidad de materia que puedan poseer. En el transcurso del estudio de estos fenómenos, se hace más evidente los conceptos fundamentales como cantidad variable, entendida como el grado de cualidad, y con estos conceptos la relevancia de las funciones en los estudios de calor, luz y densidad.

Respecto a la notación empleada en el momento de usar funciones para estudios o trabajos específicos, se usa es la notación de Euler ($f(x)$), si bien ésta se usó para describir el análisis que dio Newton, fue Euler quien la emplea por primera vez. Euler a lo largo de su vida académica, en especial en su análisis al concepto de función, da dos definiciones en momentos diferentes de su vida. La primera se centra en las ideas de Jean Bernoulli al definirla como *"una función de una cantidad variable es una expresión analítica formada de cualquier manera a partir de esta cantidad variable y números o cantidades constantes"* (Ministerio de Educación Nacional, 2004, p. 8), esta definición en comparación con la de Leibniz, está desarrollada y enfocada a un carácter analítico, pero esta no perduró, debido a los trabajos sobre el problema de la cuerda vibrante desarrollados por el mismos Euler.

La segunda definición de función para Euler, la da luego de su solución sobre el problema de la cuerda vibrante, que consistía en aceptar funciones arbitrarias, es decir, no ligadas necesariamente a una ley analítica, y que lo obligaría a explicar por primera vez la correspondencia entre pares de elementos, cada elemento perteneciente a un conjunto en el que las variables toman determinados valores. Con esto, la definición de función no podía estar relacionada con una expresión analítica, por ende, Euler redefine el concepto de función como: *"si x es una cantidad variable, entonces toda cantidad que dependa de x de cualquier manera o que esté determinada por aquél se llama función de dicha variable"* (Ministerio de Educación Nacional, 2004, p. 8).

Aunque la última definición de Euler no está tan alejada al discurso que en ocasiones se emplea cuando se hablan de funciones, le hacen falta un par de matices que se podrían considerar al momento de hablar del concepto de función. En 1837 Lejeune Dirichlet propone la siguiente definición

> Sí una variable y está relacionada con otra variable x de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a x hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y, entonces se dice que y es una función de la variable independiente x (Boyer, 1996, p. 687).

Con la definición anterior, obtienen más matices sobre la concepción de función, como, por ejemplo, se hace alusión a las variables independientes, pero no se establece la relación biyectiva entre dos conjuntos y no se habla de lo que son los números reales, conceptos que en la época de Dirichlet aún no estaban contemplados.

En el siglo XIX, posterior a la construcción de la teoría de conjuntos, se generaliza aún más la definición de función, desde el establecimiento de dos conjuntos arbitrarios A y B, donde A es ampliación de B si a cada elemento de A le pertenece uno y solo un elemento de B; también se puede considerar una función de A en B como un subconjunto F del producto cartesiano entre los conjuntos, cosa que $A(x,y)$ y $B(x,z)$ pertenecen a F entonces se puede considerar que las variables $y = z$ (Ministerio de Educación Nacional, 2004).

Como conclusión, la función entendida como la relación biyectiva entre dos conjuntos, pese a que en su concepción es más amplia que la idea clásica de función, como la pensaban Euler y Dirichlet, presenta un alto grado de dificultad que ver la función en términos de variación o cambio entre dos cantidades, además pierde un poco ese carácter variacional que podría presentarse en algunos fenómenos físicos como en el caso del calor, en donde las variaciones de la temperatura son fundamentales para el entendimiento de conceptos como la entropía o la energía interna de las sustancias.

ANEXO 2: Secuencia de aprendizaje[1]

Asignatura:	Física y matemáticas
Unidad temática:	Transversal
Tema general:	Principio de superposición desde la mecánica cuántica
Contenidos:	Estado
	Estado cuántico
	Pensamiento variacional
	Experimentos con espejos y calcita óptica
	Experimento mental del gato de Schrödinger
	Modelación
	Notación de Dirac (modificado)
	Probabilidad
Duración de la secuencia:	3 semanas
Número de sesiones previstas:	8 sesiones
Objetivos:	Identificar el estado del pensamiento variacional en los estudiantes de quinto de primaria mediante un pretest a partir de diferentes situaciones en donde la variación se presente desde patrones de recurrencia o desde relaciones entre diferentes contextos.
	Evaluar los resultados del diagnóstico inicial con los resultados obtenidos luego de la aplicación de las actividades alrededor del pensamiento variacional.
	Interpretar, analizar y describir las variaciones presentes entre cada figura a partir de preguntas orientadoras formuladas por el docente, empleando las matemáticas que hasta el momento han estudiado.

[1] Tomado y ajustado de: Díaz Barriga, Á. (2013). Guía para la elaboración de una secuencia didactica. *Universidad Nacional Autonoma de México* , 1-15.

	Generar espacios en donde los estudiantes puedan identificar, analizar y describir las situaciones de variación presentes en diferentes escenarios
	Presentar a los estudiantes el concepto de principio de superposición desde la teoría cuántica mediante el experimento mental del gato de Schrödinger
	Modelar con ellos el fenómeno presentado, a través de una aproximación a la notación de Dirac
	Evidenciar las bases probabilísticas del principio de superposición desde la teoría cuántica
	Identificar las relaciones entre las diferentes operaciones matemáticas y el empleo de estas para resolver problemas
Orientaciones generales para la evaluación	Demuestra interés por fortalecer su pensamiento variacional.
	Establece relaciones entre diferentes situaciones que describen semejanzas y variaciones entre sí.
	Participa de manera actividad en los diferentes momentos de la actividad.
	Analiza las diferentes actividades experimentales que se le presenta.
	Se esfuerza por modelar las diferentes actividades que el maestro le propone.
	Implementa lo aprendido en diferentes contextos de su vida.
Actividades de apertura	Observando cuadros (anexo 3)
	Jugando a los bolos (anexo 4)

Actividades de desarrollo:	Estudiando el comportamiento de la luz (anexo 10)
	El gato que puede estar vivo y dormido a la vez (anexo 9)
Actividades de cierre:	Taller final (anexo 14)
Recursos:	Calcita óptica
	Laser
	Espejos convencionales
	Caja de Schrödinger
	Botellas de colores
	Pelota
	Parques (fichas y dados)
	Espinosa, A. C. (Productor). (s.f.). Belleza inescrutable: la superposición cuántica [Película]. Obtenido de https://www.youtube.com/watch?v=gismCjO_zBg&t=379s
	Obando Zapata, G., Posada, M. E., & Otros autores. (2005). *Interpretación e implementación de los estándares básicos de matemáticas.* Medellin, Antioquia, Colombia: Gobernación de Antioquia y secretaría de Educación para la Cultura.

ANEXO 3. Observando cuadrados[2]

Observa la siguiente figura:

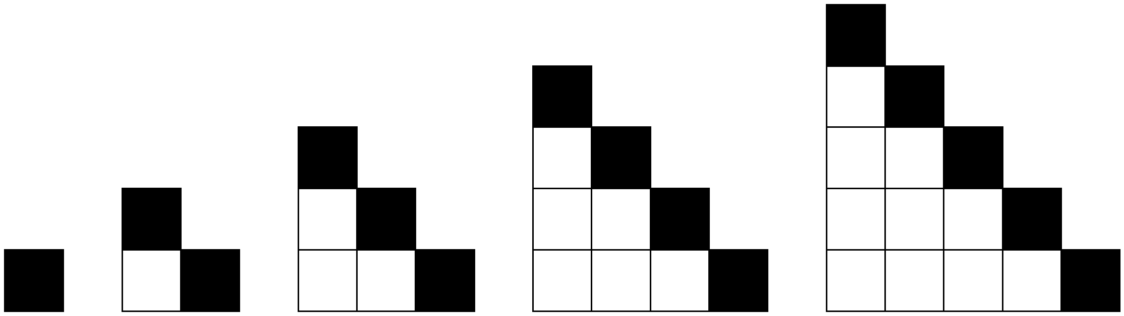


Fig. 1 Fig. 2 Fig.3 Fig. 4 Fig. 5

a. ¿Hay relaciones entre cada una de las figuras? De ser así, menciona las relaciones que encontraste.
b. Plantea una operación matemática que te permita analizar futuras figuras.
c. ¿Cuántos cuadrados pintados tendría la figura 6? Escriba que consideraciones tuviste en cuenta para dar dicha respuesta.
d. ¿Cuántos cuadrados pintados tendría la figura 30? Escriba que consideraciones tuviste en cuenta para dar dicha respuesta.
e. ¿Cuántos cuadrados no pintados tendría la figura 14? Si prefieres la puedes dibujar.
f. Haz una evaluación de la actividad mencionado los aspectos que te gustaron, los que no te gustaron y las conclusiones que hiciste.

[2] Tomado y modificado de: Obando Zapata, G., Posada, M. E., & Otros autores. (2005). *Interpretación e implementación de los estándares básicos de matemáticas.* Medellin, Antioquia, Colombia: Gobernación de Antioquia y secretaría de Educación para la Cultura

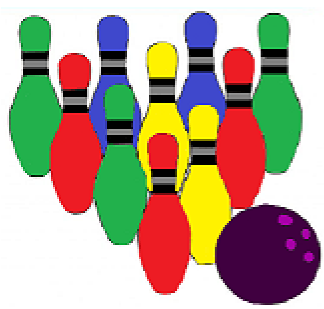
ANEXO 4: Actividad: jugando a los bolos[3]

Materiales:

- 10 bolos (3 rojos, 3 verdes, 2 amarillos, 2 azules)
- 1 pelota de goma
- Hoja de registro

Cómo jugar:

1. Reúnete con otros cuatro compañeros o compañeras para formar el mejor equipo de bolos del salón.
2. Con ayuda del otro equipo organicen los 10 bolos de la siguiente manera:



3. Organízate con tus compañeros o compañeras de equipo para decidir el orden de lanzamiento del grupo.
4. Luego de que cada estudiante realice su lanzamiento debe dejar los bolos como estaban al inicio de la ronda. Además, cada miembro del grupo debe registrar el número de puntos que hizo su compañero durante la ronda (para ello ten en cuenta la hoja de registro).
5. Cuando todos los mientras de cada equipo hayan terminado de hacer su lanzamiento se dará por terminada la ronda.
6. El juego llegará a su fin cuando se culmine la tercera ronda y ganará el equipo que tenga más puntos anotados.

Notas:

1. Tengan en cuenta que al terminar cada ronda se debe hacer un registro en la tabla.
2. No olvides siempre tener puesto bien tu tapabocas en todo momento.

Momento 1

[3] Tomada con algunas modificaciones de: Obando Zapata, G., & Botero Hernández, O. E. (2006). La proporcionalidad directa e inversa a partir de la modelación de situaciones de variación. En Gobernacion de Antioquia, & Universidad de Antioquia, *Módulo 2. Pensamiento variacional y razonamiento algebraico* (p. 77-126). Medellin, Colombia.

Los puntos que dan cada bolo al ser derribado dependen de su color, que están dados por la siguiente información:

Bolos de color rojos conceden 1 punto

Bolos verdes conceden 2 puntos

Bolos amarillos conceden 3 puntos

Bolos azules conceden 5 puntos

Tabla de registro grupal

Número del turno	Bolos derribados por color				Puntajes parciales
	Rojos	Verdes	Amarillos	Azules	
Primer turno					
Segundo turno					
Tercer turno					
Puntaje total					

Actividades para reflexionar en grupo

1) ¿Qué elementos consideras que son importantes para conocer la puntuación total que el equipo obtuvo a lo largo del juego? Justifica tu respuesta.

2) Andrés en su primer turno derribo 2 bolos rojos, 1 verde y 2 azules, ¿cuántos puntos hizo Andrés para su equipo?

3) Si un miembro del equipo durante su segundo turno hizo una puntuación de 21, ¿cuál fue la cantidad de bolos de cada color que derribo? Expliquen el análisis que hicieron para considerar una respuesta y si fue necesario la realización de una tabla.

4) ¿Cómo fue el proceso que hicieron para el conteo de los puntos parciales y totales? ¿Tuvieron que usar alguna operación(es) en particular para dicho conteo?

Actividades para reflexionar de manera individual

1) Los equipos de Oscar y Ana en la ronda final del campeonato no alcanzaron a llenar toda la información en la tabla, ayúdales a completar el registro para saber cuál fue el equipo que gano el torneo.

Tabla del equipo de Oscar:

Número del turno	Bolos derribados por color				Puntajes parciales
	Rojos	Verdes	Amarillos	Azules	
Primer turno	5				23
Segundo turno		6		2	35
Tercer turno			0		43
Puntaje total					

Tabla del equipo de Ana:

Número del turno	Bolos derribados por color				Puntajes parciales
	Rojos	Verdes	Amarillos	Azules	
Primer turno			2		38
Segundo turno	9	2	5	1	
Tercer turno		3			43
Puntaje total					

a. ¿Cuál fue el equipo ganador? Pon el procedimiento que usaste para conocer al equipo victorioso.

b. ¿Si el equipo que perdió hubiese obtenido 20 puntos más, les hubiese alcanzado para ganar? Justifica tu respuesta y que cantidad de bolos tendrían que haber derribado (ojo, no se pueden todos del mismo color).

c. Justifica el proceso que empleaste para diligenciar cada una de las tablas.

Momento 2

Los puntos que dan cada bolo al ser derribado dependen de su color, que están dados por la siguiente información:

Bolos de color rojos conceden 2 punto

Bolos verdes conceden 4 puntos

Bolos amarillos conceden 6 puntos

Bolos azules conceden 10 puntos

Tabla de registro grupal

Número del turno	Bolos derribados por color				Puntajes parciales
	Rojos	Verdes	Amarillos	Azules	
Primer turno					
Segundo turno					
Tercer turno					
Puntaje total					

Actividades para reflexionar en grupo

1) María en sus tres turnos derribo 6 bolos rojos, 2 verde, 3 amarillos y 1 azul, ¿cuántos puntos hizo María para su equipo?

2) Si un miembro del equipo durante su tercer turno hizo una puntuación de 45, ¿cuál fue la cantidad de bolos de cada color que derribo? Mencionen las consideraciones para llegar a una respuesta.

3) ¿Podemos establecer una comparación entre el momento 1 y el momento 2? Si es así por favor mencionar las diferencias y parecidos entre los dos momentos (tener solo en cuenta las actividades en equipo)

____

____

____

____

____

Actividades para reflexionar de manera individual

1. Ayuda al equipo de José a terminar de llenar su tabla. Luego de hacer describe cuales fueron los pasos que tuviste en cuenta.

Número del turno	Bolos derribados por color				Puntajes parciales
	Rojos	Verdes	Amarillos	Azules	
Primer turno				2	46
Segundo turno	6	0			54
Tercer turno	8	3	5	1	
Puntaje total					

2. ¿Cuál de los dos momentos de la actividad fue más sencilla de resolver y por qué consideras que fue así?

3. Haz una evaluación de la actividad mencionado los aspectos que te gustaron, los que no te gustaron y las conclusiones que pudiste sacar, si es posible justificar cada uno de los aspectos que menciones.

ANEXO 5: Tabla de preguntas y respuestas para el primer criterio del pretest

Preguntas	Algunas respuestas de los y las estudiantes
¿Hay relaciones entre cada una de las figuras? De ser así, menciona las relaciones que encontraste.	La relacion en la figura uno es que hiso aumentar las otras figuras la figura 3 si la sumo me da la figura 6 y si sumo 5 + 5 de la figura sinco me da la figura 10
	La relación entre las imagenes es que cada imagen aumentan los cuadrados negros en orden es decir 1, 2, 3, …
	1. Todos son cuadrados y 2. Los cuadrados de adelante son todos negros.
	Si hay relaciones entre las figuras por que cada figura demuestra cuantos cuadrados estan pintados.
	Si hay relaciones entre las figuras, la primera figura solo tiene un cuadrado y en la 2 figura hay 3 cuadros pero 2 pintados de negro
	La relación entre la figura uno y las demás es que van avanzando las cantidades de cuadros pintados.
	No, pero si se suma podrian llegar hacer iguales
	No encuentro ninguna relacion ya que comensando desde la Figura 1 van aumentado el color negro de los otros cuadros.
¿Cuántos cuadrados pintados tendrá la figura 6? Escriba que consideraciones tuviste en cuenta para dar dicha respuesta.	Sume 3+3= 6 y me resolvió la figura 6.
	Por ejemplo: es que la figura 1 tiene un cuadrado negro la 2 tiene 2 y asi sucesibamente entonces la 6 tendria 6
	Son seis por que van en orden
	En la figura 6 habrian 6 cuadros porque en cada figura se suma un cuadro pintado
	en la figura 6 se aumento un cuadro negro y en se aumento los cuadros blancos
¿Cuántos cuadrados pintados tendría la figura 30? Escriba que consideraciones tuviste en cuenta para dar dicha respuesta.	30 cuadrados. No divujo porque lo sume en un cuaderno de avajo del que esta coloreado con negro coloque el total de los cuadros de color blanco y luego lo sume todo
	30 cuadrados no hago el dibujo porque solo con ver las anteriores figuras se ve el resultado.
	La figura 30 tendrian pintados 30 cuadros porque si la figura 5 tiene pintados 5 cuadrados la 30 tendria 30 pintados
	Tiene 30 figuras pintadas lo conte con mis manos
	En la figura 30 habrian 30 cuadros pintados por la misma explicacion de la respuesta C.

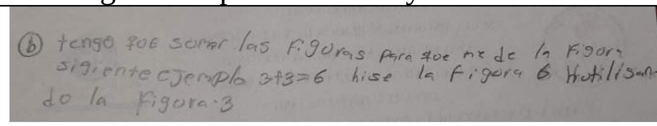
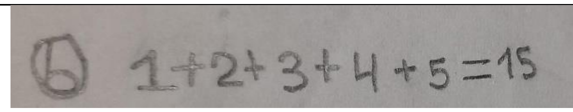
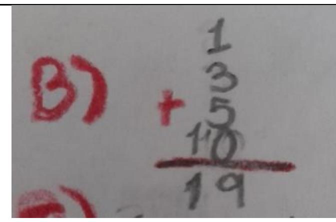
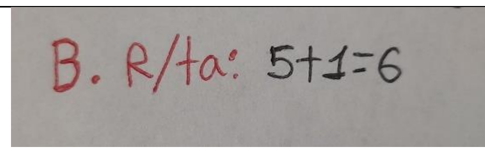
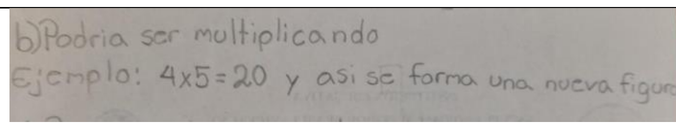
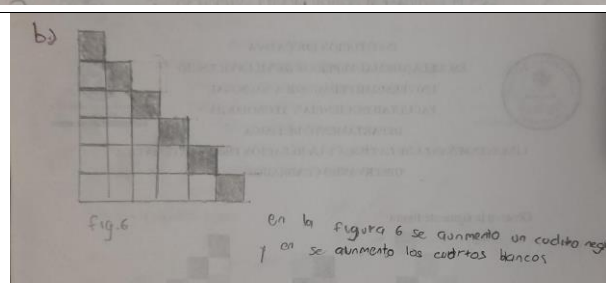
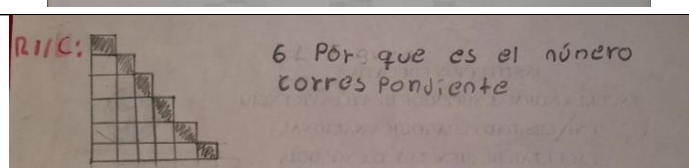
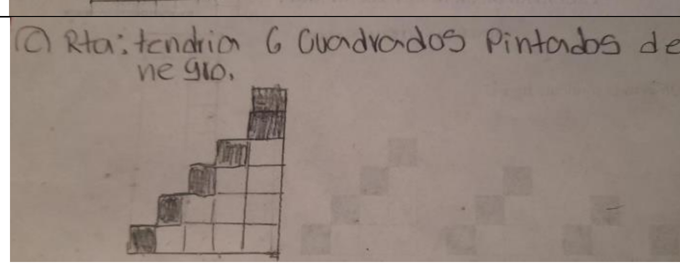
¿Cuántos cuadrados no pintados tendría la figura 14? Si prefieres la puedes dibujar	Podria tener solamente diez. Solamente no se como dibujarla
	La figura 14, tiene 101 cuadros no pintados porque conte las figuras de antes y de hay saque la respuesta
	17 cuadrados porque va aumentando la cifra de cuadrados
	90 cuadritos no pintados de negro
	92 no estarian pintados. Hice el dibujo pero lo borre

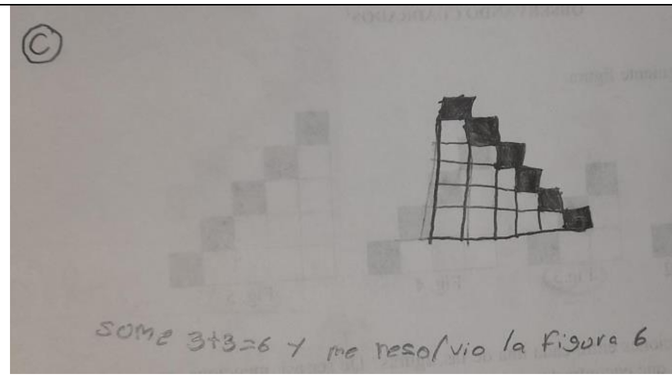
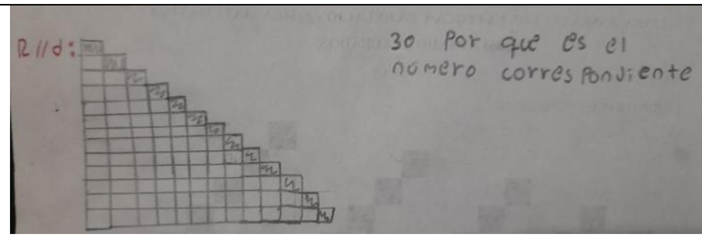
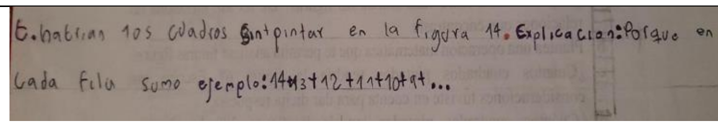
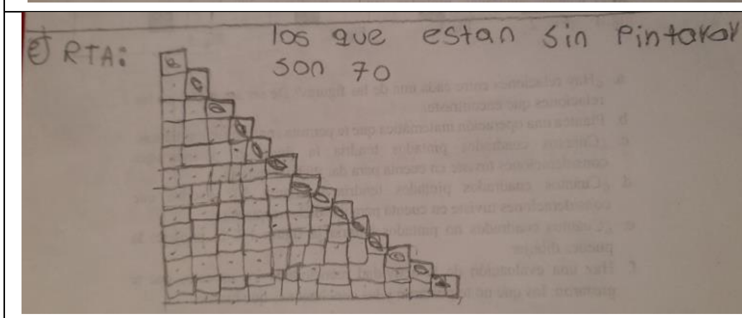
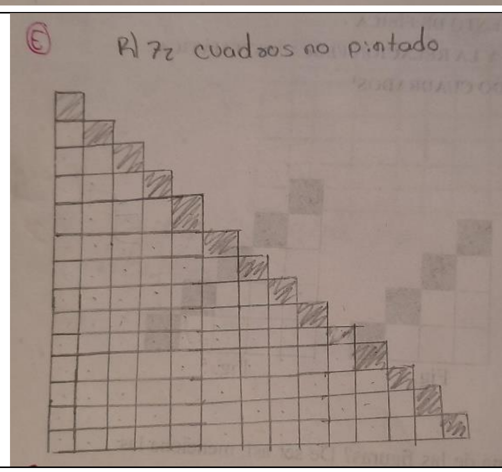
ANEXO 6: Preguntas y respuestas para el primer criterio del pretest

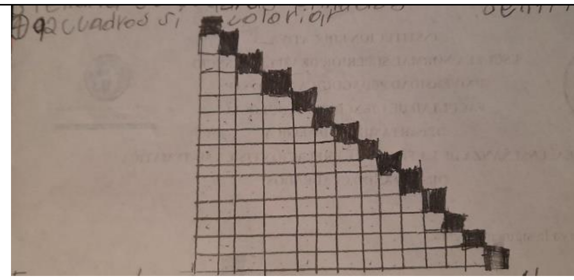
Preguntas del anexo 2	Algunas respuestas de los y las estudiantes
Si un miembro del equipo durante su segundo turno hizo una puntuación de 21, ¿cuál fue la cantidad de bolos de cada color que derribo? Explique el análisis que hicieron para considerar una respuesta y si fue necesario la realización de una tabla.	El miembro del equipo tendria que aber tirado todo en un tiro y en el proccimo tiro tirarlo todo menos uno para tener 21 puntos
	Hicieron 5 puntos rojos 6 puntos amarillo 10 puntos azules y si sumamos todo en total daria 21
	Fueron 6 amarillos 1 verde 1 rojo 1 azul
	2 azules, 2 amarillos, 1 verde, 3 rojos
	El miembro del equipo tubo deribar 4 bolos azules y 1 bolo rojo
	1 berivaro 3 azules 2 amarilla … vi cada valor y sume
¿Cómo fue el proceso que hicieron para el conteo de los puntos parciales y totales? ¿Tuvieron que usar alguna operación(es) en particular para dicho conteo?	Cada bolo se conto con su perspectivo numero. Para contar los números de los equipos sumamos.
	Utilizamos la operación de la multiplicación, y multiplicamos 5*4=20+1=21
	Hicimos el conteo sumando
	La matemáticas
	Nuestro conteo fue sumar todos los puntos
	sumar y saber los puntos de cada papel
¿Si el equipo que perdió hubiese obtenido 20 puntos más les hubiese alcanzado para ganar? Justifica tu respuesta y que cantidad de bolos tendría que haber derribado (ojo, no se pueden todos del mismo color)	Si porque le ganaria por varios puntos 2 azules 2 amarillos 2 verdes
	Con los 20 puntos si hubiese ganado el equipo de Oscar con 3 bolos rojos 2 verdes 1 amarillo 2 azules
	Si el grupo de Ana hubiera ganado con 118 puntos y los 20 puntos más son de color 11 rojos, 5 azules y 4 amarillos
	Si le hubiese alcanzado, 2 bolos azules, 3 amarillos.
	No, porque tuvo que tumbar 25 bolos para alcanzar al equipo ganador
	Si tendría que haber derribado 4 azules más
	Si por que tenia 98 mas 20 serian 118, y el equipo de oscar tiene 101
Si un miembro del equipo durante su	8 azules y 5 rojos

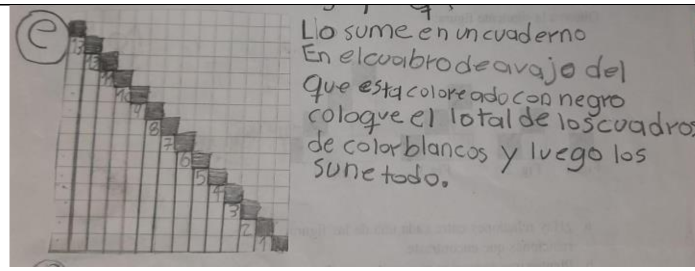
tercer turno hizo una puntuación de 46 ¿Cuál fue la cantidad de bolos de cada color que derribo? Menciona las consideraciones para llegar a una respuesta.	4 azules, 1 verde, 1 rojo por que todos son pares
	tunvo 15 rojos, 4 verdes, 6 amarillos, 20 azules
	3 rojos, 10 amarillos, 11 verdes, 34 azules
¿Podemos establecer una comparación entre el momento 1 y el momento 2? Si es así por favor mencionar las diferencias y parecidos entre los dos momentos (tener en cuenta solamente las actividades en equipo.	Si que aumenta los puntos de cada papel
	Que las puntaciones son diferentes
	En el momento 1 se dieron distintos respuestas que en el momento 2
	Las diferentes entre el momento 1 y el 2 son los marcadores, los puntajes de cada color
	Si son diferentes por que los dos dicen cosas diferentes

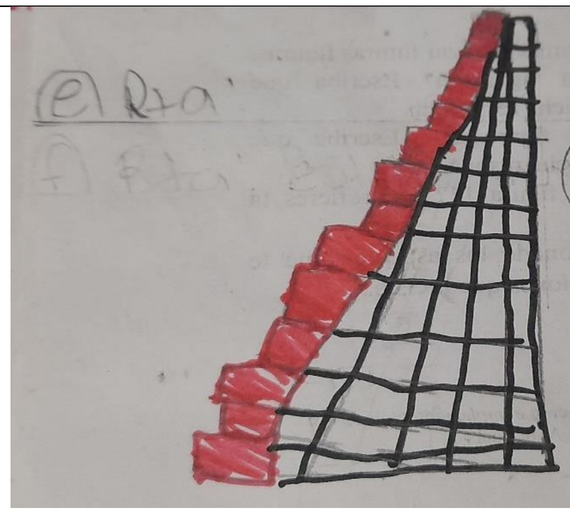
ANEXO 7: Preguntas y respuestas para el segundo criterio del pretest

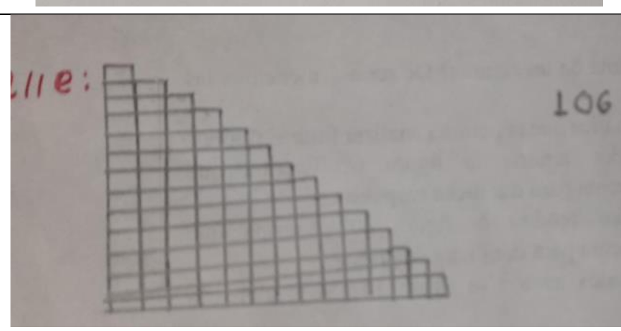
<table>
<tr><th>Preguntas del anexo 1</th><th>Algunas respuestas de los y las estudiantes</th></tr>
<tr><td rowspan="6">Plantea una operación matemática que te permita analizar futuras figuras.</td><td>
(b) tengo que somar las figuras para que me de la figura sigiente ejemplo 3+3=6 hise la figura 6 utilisando la figura 3</td></tr>
<tr><td>
(b) 1+2+3+4+5=15</td></tr>
<tr><td>
B) + 1 3 5 10 = 19</td></tr>
<tr><td>
B. R/ta: 5+1=6</td></tr>
<tr><td>
b) Podria ser multiplicando
Ejemplo: 4x5=20 y asi se forma una nueva figura</td></tr>
<tr><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">¿Cuántos cuadrados pintados tendría la figura 6? Escriba que consideraciones tuviste en cuenta para dar dicha respuesta.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td>¿Cuántos cuadrados pintados tendría la figura 30? Escriba que consideraciones tuviste en cuenta para dar dicha respuesta.</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="3">¿Cuántos cuadrados no pintados tendría la figura 14? Si prefieres la puedes dibujar</td><td>
</td></tr>
<tr><td>
</td></tr>
<tr><td>
</td></tr>
</table>

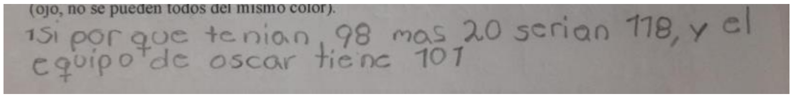



Llo sume en un cuaderno
En el cuabro de avajo del
que esta coloreado con negro
cologue el lotal de los cuadros
de color blancos y luego los
sune todo.





ANEXO 8: Respuestas que contribuyen al análisis del segundo criterio del pretest


(ojo, no se pueden todos del mismo color).

1.Si porque tenian 98 mas 20 serian 118, y el equipo de oscar tiene 101

Imagen 1

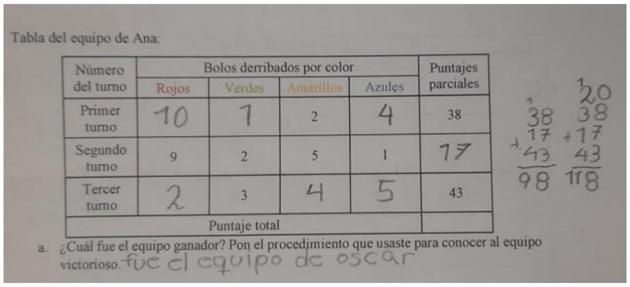


Tabla del equipo de Ana:

Número del turno	Bolos derribados por color				Puntajes parciales
	Rojos	Verdes	Amarillos	Azules	
Primer turno	10	7	2	4	38
Segundo turno	9	2	5	1	17
Tercer turno	2	3	4	5	43
Puntaje total					

38 + 17 + 43 = 98

20 38 + 17 43 = 118

a. ¿Cuál fue el equipo ganador? Pon el procedimiento que usaste para conocer al equipo victorioso. fue el equipo de oscar

Imagen 2

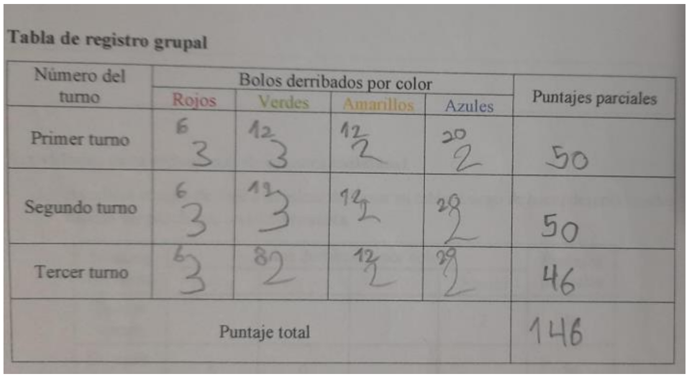


Tabla de registro grupal

Número del turno	Bolos derribados por color				Puntajes parciales
	Rojos	Verdes	Amarillos	Azules	
Primer turno	6 3	12 3	12 2	20 2	50
Segundo turno	6 3	12 3	12 2	20 2	50
Tercer turno	6 3	8 2	12 2	20 2	46
Puntaje total					146

Imagen 3

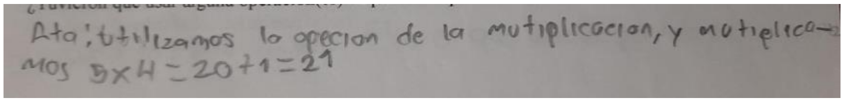

Ata: utilizamos la opecion de la mutiplicacion, y mutiplicamos 5x4=20+1=21

Imagen 4

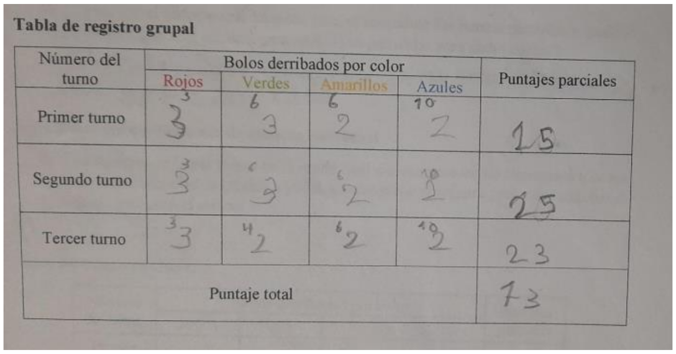


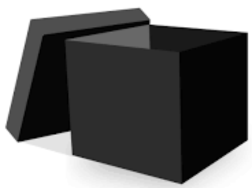
Tabla de registro grupal

Número del turno	Bolos derribados por color				Puntajes parciales
	Rojos	Verdes	Amarillos	Azules	
Primer turno	3 3	6 3	6 2	10 2	15
Segundo turno	3 3	6 3	6 2	10 2	25
Tercer turno	3 3	4 2	6 2	10 2	23
Puntaje total					73

Imagen 5

ANEXO 9: El gato que puede estar vivo y dormido a la vez

Zeus es un gato un poco dormilón, le gusta buscar los lugares más frescos para dormir todo el día, cierto día de verano al no encontrar un sitio fresco en su casa, prefirió salir a tomar algo de viento, durante su viaje observó en la distancia una caja oscura y como un buen gato chismosito prefirió ir a investigar, al entrar en la caja, ésta se cerró de manera repentina, esto provoco que Zeus pudiera investigar un poco más el interior de la caja, ésta tenía un fragmento de Radio, un material que cada determinado tiempo es capaz de emitir radiación; la radiación son partículas (como los electrones, protones y neutrones) que salen de algunos materiales, en este caso el material seria el Radio, además del Radio había un mecanismo que al detectar la radiación liberaba un gas capaz de dormir instantemente a cualquier ser vivo.



Matías un niño que está haciendo quinto de primeria en la escuela del barrio, miro la misma caja que Zeus momentos antes había investigado, como la caja se encontraba cerrada y al ser oscura Matías no podía saber que había en su interior, por lo que decide abrirla para saber si quizás estaba llena de dulces o de cosas riquísimas que alguien había perdido, pero cuando miro al interior de la caja se llevo una gran sorpresa, porque no encontró dulces o cosas riquísimas como chocolatinas, en lugar de estas cosas encontró un gato que se estaba lambiendo su manita derecha, es decir Zeus, Matías al ver que el gato estaba feliz prefirió cerrar la caja y dejar al animal en su interior.

Tiempo después, Matías vuelve a pasar cerca de la caja y decide abrirla para saber si el gatico seguía en su interior, pero en esta nueva situación observa que el gato se encuentra dormido, lo que llamó la atención de Matías, por lo que decide investigar por qué en esta ocasión encontró a Zeus dormido y en la primera despierto, Matías piensa que si cierra la caja y espera un minuto al abrirla puede encontrar a Zeus despierto, pero cuando lo hace, se da cuenta que el animal sigue dormido, así que se pregunta si la primera vez había sido una casualidad y por ende siempre al abrir el recipiente va a encontrar dormido al gato, así que cierra la caja y vuelve a esperar un minuto, pero para su sorpresa, en esta ocasión encuentra vivo a Zeus, Matías repite el experimento varias veces y se da cuenta que independiente del tiempo puede encontrar vivo o dormido al animal, así que se pregunta por el estado en el que se encuentra Zeus cuando la caja está cerrada.

La última observación que realiza Matías encuentra despierto a Zeus, Zeus se da cuenta que ya es hora de comer por lo que decide volver a su casa, esto hace que Matías no pueda pensar una manera en la que pueda observar que sucede al interior de la caja, pero si puede decir que cada vez que encontraba dormido a Zeus era porque el Radio emitía radiación y esta activaba el mecanismo.

Cómo Matías no pudo saber que sucede en el interior de la caja si pensó algunas preguntas que considera que nosotros podemos resolver, estas son las siguientes:

- ¿Es realmente posible encontrar un gato que esté vivo y muerto a la vez?
- ¿Qué aspectos nos podrían ayudar a explicar el experimento mental del gato de Schrödinger?
- ¿Cómo describe el estado en el que se encuentra el gato antes de realizar la observación?
- ¿Existe alguna manera de saber el porcentaje en el que se puede encontrar cada uno de los estados posibles del experimento mental, de ser así constrúyala?
- Además de este experimento, ¿Conocen algún ejemplo similar? ¿Cómo se puede explicar dicho ejemplo de forma similar a como se abordó el de gato?

ANEXO 10: Estudiando el comportamiento de la luz

Momento 1

Se inicia poniendo la fuente de luz monocromática de longitud de onda entre 630 nm – 650 nm en la parte izquierda de un cristal transparente de calcita, tal como muestra la Imagen 1. al pasar el haz incidente por el cristal de calcita este se refleja en dos haces polarizados perpendiculares entre sí, debido a las propiedades de birrefringencia o doble refracción del mineral.

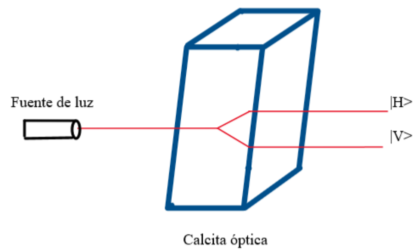


Imagen 1.

A su vez, con otro láser que emana la misma longitud de onda que el anterior, se hace que su haz pase por un espejo semirrefractor y a partir de las propiedades de reflexión de la luz y del espejo, se produce un rayo transmitido y uno reflejado, cada uno incide en un espejo convencional para desviar su camino como lo muestra a Imagen 2.

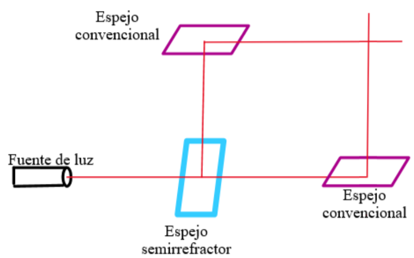


Imagen 2.

Este momento es más de análisis a los montajes anteriormente mencionados, por lo cuál esta dirigido desde las siguientes preguntas orientadoras:

- ✓ ¿Qué sucede si hacemos pasar un haz de luz por un cristal?
- ✓ ¿Qué sucedería si cambiamos el ángulo de incidencia?
- ✓ ¿Cómo podemos describir lo que sucede en el interior del cristal de calcita para que salgan dos haces en lugar de uno?
- ✓ ¿Qué camino o caminos consideras que toma la luz cuando pasa a través del espejo semirrefrector? Justifica tu respuesta.

- ✓ ¿Cómo crees que se relaciona con el experimento mental del gato de Schrödinger y el montaje de los espejos?
- ✓ ¿Existe alguna relación entre el experimento mental del gato de Schrödinger y lo que se observa cuando se hace incidir un haz de luz roja en una calcita?

- ✓ ¿En qué aspectos se asemejan y se diferencian los dos montajes, uno en el que se empela la calcita y el otro el espejo semirrefrector?
- ✓ ¿Qué pasaría si solo enviamos un fotón en lugar de un haz? Es decir ¿Qué camino tomaría el fotón cuando pase por la calcita?
- ✓ ¿Qué estados describen los sistemas que estamos observando?

Cabe resaltar que las preguntas en primera instancia se van a responder desde la oralidad, luego de esto se establecerá un segundo momento.

Momento 2

Luego de lo conversado durante el momento 1 se les pide a los estudiantes que realicen una descripción escrita y una modelación matemática de las actividades experimentales que contemplaron, en este momento los estudiantes van a responder las preguntas en un diario de campo.

Momento 3

Se organiza a los estudiantes en pares o tríos para que discutan las interpretaciones que cada uno escribió durante el momento 2 con base en las siguientes preguntas:

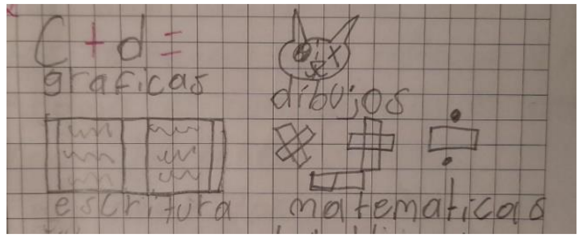
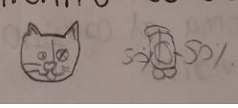
- ✓ ¿Qué aspectos le cambiarias a las interpretaciones (respuesta) de tu compañero o compañera y por qué?
- ✓ ¿Qué elementos de las respuestas de tu compañera o compañero podrían contribuir en tu interpretación de la actividad?
- ✓ Comparen la parte matemática y/o geométrica que hizo cada uno y mencionen las fortalezas y debilidades que le ven a esta.
- ✓ De ser necesario propongan entre los dos una descripción matemática y/o geométrico que describa de manera más clara lo que le hace el cristal de calcita al fotón.

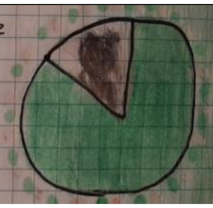
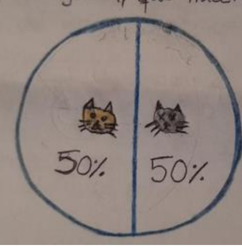
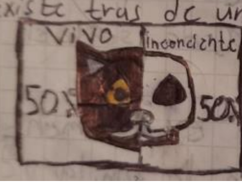
Momento 4

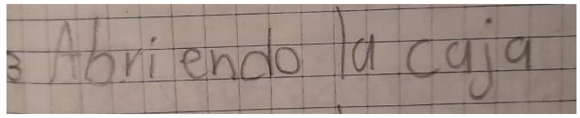
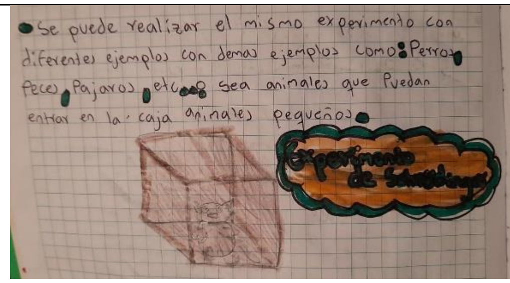
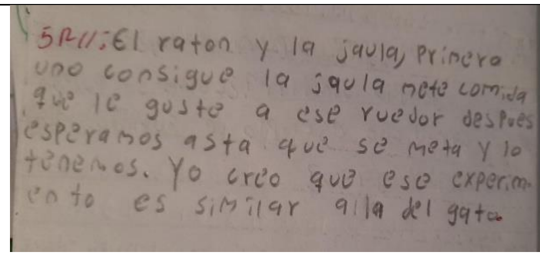
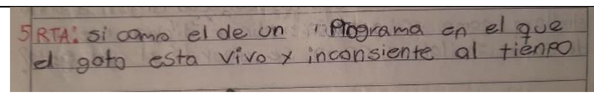
Por último, el docente prosigue a dar una explicación de las actividades experimentales teniendo en cuenta la matemática y la geometría como un eje fundamental para la descripción.

ANEXO 11: Organización de las preguntas y respuesta del taller “el gato que puede estar vivo y dormido a la vez”

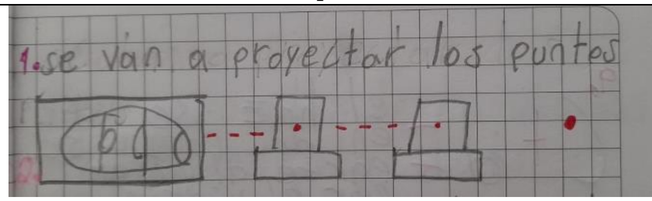
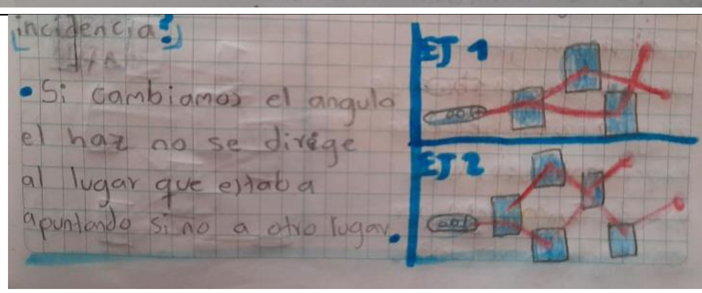
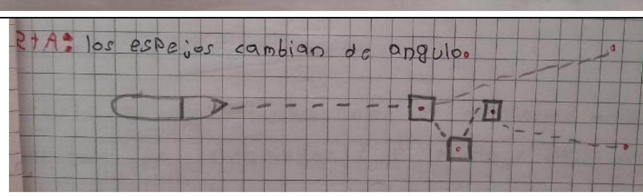
Pregunta	Respuesta
¿Es realmente posible encontrar un gato que esté vivo y muerto a la vez?	1RTA: Si seria como si se estubiera durmiendo con un ojo adierto
	Rta: si y no, si por que yo lo evisto un gato que no tenia una pata y gotiando sangre, y no porque yo no evisto mas
	1 si porque hay unas probabilidades de un 50% de que este vivo y un 50% de que quede inconciente.
	R) No es posible encontrar un gato vivo y muerto a la vez quizás sólo sería vivo o dur-miendo.
	No, no hay forma
¿Qué aspectos nos podrían ayudar a explicar el experimento mental del gato de Schrödinger?	Rta: pues con el pasar del tiempo para saver si esta vivo o muerto
	Nos ayuda a explicar el porcentaje de vivo o inconsiente
	2RTA: que el gato al meterlo en la caja estaba consiente y hay el 50% de prodobilidades de que songa inconsiente
	2. las hipotesis me pueden ayudar y hacer y realizar el experimento mental.
	R) Todo es asunto de percepción, observación y lógica
	RTA: con la investigacion y analizacion
	2: no se.

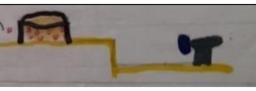
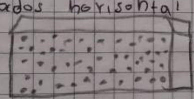
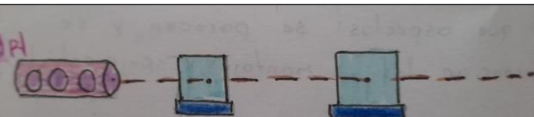
	
	2.) Para el experimento mental de Schrodinger podemos utilizar Calculos, porcentajes de como podra estar el gato, fracciones de que si esta vivo o inconsciente, etc.
	la grafica y la posibilidad etc
	2. Los simbolos, Los letras, Los numeros entre otros.
	2 R//: Mediante graficos, la matematica, ejemplos, imajenes y numeros
¿Cómo describe el estado en el que se encuentra el gato antes de realizar la observación?	3. puede ser que se encuentre inconciente, o vivo todavia.
	• Se puede estar bien o que el este malo no se sabe pero si hay un porcentaje para resolver el caso. 
	Rta: pues cuando comiense el experimento ver el estado del gato
	RTA: Esta vivo e inconciente
	RTA: 50% vivo 50% inconciente vivo porque recibia comida y agua e inconciente porque le faltaba la libertad y el oxijeno.
	3 El gato Michifú estaba feliz 
	R) El gato se encontraria en buen estado para la observación o experimento.

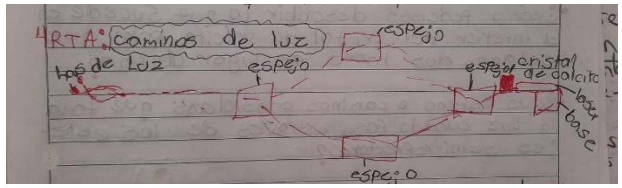
	3.) El gato e ta bien, porque esta en una caja alejado y en la caja puede traer comida o agua (tranquulizante) y puede sobrevivir
	3RTA: se descride al escuchar la caja y si empiesa a mauyar esta vivo y si esta en silencio esta inconsiente.
	3. puede se que se encuentre inconciente, o vivo todavia.
	3RTA: vivo
¿Existe alguna manera de saber el porcentaje en el que se puede encontrar cada uno de los estados posibles del experimento mental, de ser así constrúyala?	Si, se puede saber al azar puede ser que si como puede ser que no o empate es al azar se comprueba haciendo el experimento. 
	4. Si puede haber una manera, realizando el experimento se puede saber el porcentaje de los estados del experimento, haciendo graficas, dibujos...
	R) Posiblemente se podria realizar por medio de sumas y esquemas
	4) Para saber el porcentaje hay que hacer una fraccion haci: 
	RTA: jugando con una ruleta y sola al lanzar la ruleta el gato aparecia inconciente se sumava punto y si aparecia en vivo se sumava punto
	4R= Si existe tras de un escrito o dibujo 
	4. si existe puedo hacer una fraccion

	 3 Abriendo la caja
Además de este experimento, ¿Conocen algún ejemplo similar? ¿Cómo se puede explicar dicho ejemplo de forma similar a como se abordó el de gato?	 Se puede realizar el mismo experimento con diferentes ejemplos con demas ejemplos como: Perros, Peces, Pajaros, etc. sea animales que Puedan entrar en la caja animales pequeños.
	 5RU: El raton y la jaula, Primero uno consigue la jaula mete comida que le guste a ese ruedor despues esperamos asta que se meta y lo tenemos. Yo creo que ese experimento es similar a la del gato.
	 5 RTA: si como el de un Programa en el que el gato esta vivo y inconsiente al tiempo

ANEXO 12: Organización de las respuesta y preguntas del momento 1 y 2 del taller "estudiando el comportamiento de la luz"

Preguntas	Respuestas
¿Qué sucede si hacemos pasar un haz de luz por un cristal?	 1. se van a proyectar los puntos
	Rt: observo dos pontos que transpasa por un cristal.
	1) Rta: pues sale 2 puntos puntos en los dos montaje
	1 sucede que los espejos le cambian el angulo al haz
	1) la luz se ve mas intensa
	RTA: el haz de luz se combierte en dos.
	LM1: Proboca que dos puntos traspasa la calcita.
	1: sige la linea y contínua recta.
¿Qué sucedería si cambiamos el ángulo de incidencia?	 incidencia: • Si cambiamos el angulo el haz no se dirige al lugar que estaba apuntando si no a otro lugar. EJ 1 EJ 2
	 RTA: los espejos cambian de angulo.
	2. cambia el ordende los puntos

	2) Rta: pues cabia el agulo de donde estava y cambia de direcchion
	R) Puede tomar diferentes direcciones dependiendo de la úbicación del espejo y la luz.
	2 RTA: el haz de Luz pasaria por el crista de calcita y seguiria siendo uno
	2: no va a dar lo mismo.
¿Cómo podemos describir lo que sucede en el interior del cristal de calcita para que salgan dos haces en lugar de uno?	Cuando el haz Pasa la calcita la calcita hace su trabajo separa las moleculas del haz Por eso hay dos puntos en lugar de uno.
	3. Los puntitos se dividen. 
	3) Rta: pues que uno rebota la luz y el otros lo transmite a un agulo
	3 RTA: yo creo que el haz de Luz coje dos caminos y quedan dos puntos
	A: hay sustancias que multiplican o dividen un untito en 2 lados horisontal o vertical. 
¿Qué camino o caminos consideras que toma la luz cuando pasa a través del espejo semirrefrector? Justifica tu respuesta.	4. Toma el camino hacia el centro y hacia la derecha
	4. Mas o menos parece un tipo zicZac.
	5A 
	4) Rta: que el camino que toma es linia reta y nunca se hace en curva

		
	R) Varia dependiendo la ubicación d ambas cosas.	
	•La luz cuando entra al cristal toma un camino de cambio de angulo porque en el experimento el haz va de un espejo por eso doy esta respuesta. EJ: 	
¿Cómo crees que se relaciona con el experimento mental del gato de Schrödinger y el montaje de los espejos?	5 Porque uno tiene que adivinar para que dirección va el punto y uno tambien tiene que adivinar como y en que estado esta el gato	
	5 Si porque si uno coloca la mano en una dirección de uno de los punticos, el puntic no se refle gara y otro si, entonces pasa ue el montaje tendra la explicasi on por desir viva y a la ves mueta.	
	5. al tapar los laceres es como si cerrara la caja	
	5. Porque uno tiene que adivi-nar para que dirección va el pun-to y uno tambien tiene que adi-vinar.	
	5) que el del gato es de si estara vivo o n conciente y los espejos tienen c camino:	

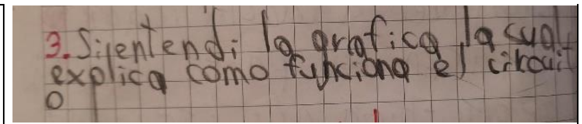
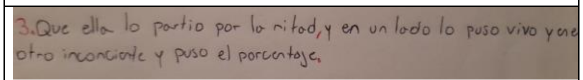
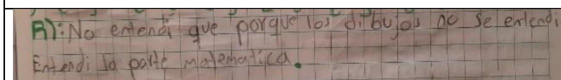
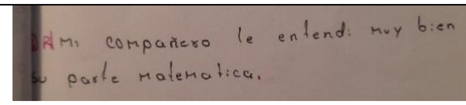
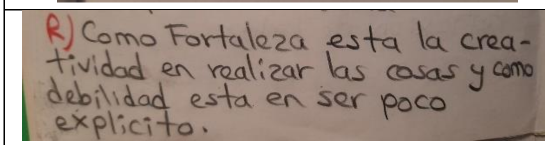
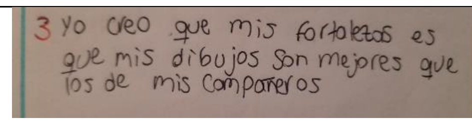
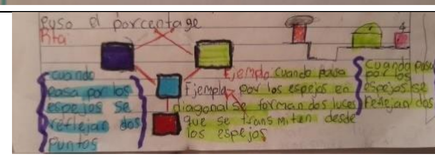
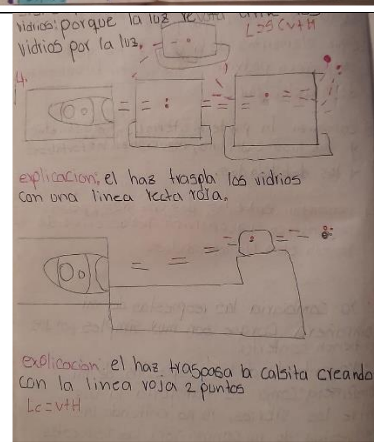
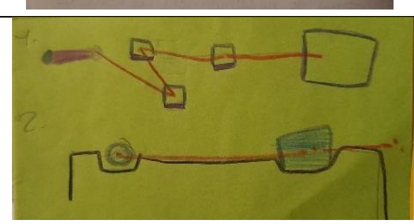
	A: Creería que no hay una relación, pero tienen casi los mismos materiales y fueron creados por un humano.
	5RTA: Se relacionan de tal manera que los dos son experimentos
	R) Ambos experimentos se relacionan en que ambos dependen de la influencia de diversos factores en el transcurso de su proceso.
	RTA: se relacionan cuando antes de tocar los espejos no se sabe que va a salir como con el gato.
¿Existe alguna relación entre el experimento mental del gato de Schrödinger y lo que se observa cuando se hace incidir un haz de luz roja en una calcita?	6.Rta: si existe porque el schrödinger no podía saber si el gato murio o estaba vivo si no abría la caja en el experimento de clase uno no sabe muy bien donde va el camino del lacer.
	• Es que el haz antes de que entre a la calcita nadie sabe que va a salir como el experimento de la caja aislada.
	6R=Si existe, que cada una tiene un nombre y una representacion desde algo estable.
	6. no entiendo
	R) Nuevamente ambos experimentos se podrían relacionar en que en ambos influyen diferentes factores o elementos.
	6R//: Si se relaciona por que la calsita es como la caja abierta para ver el gato.
	RTA: es que cuando antes de que pasa la calcita no se sabe que va a salir como la caja aislada.

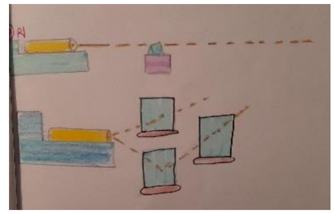
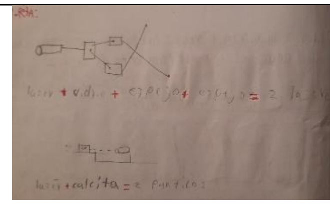
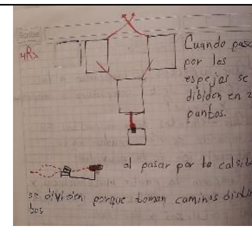
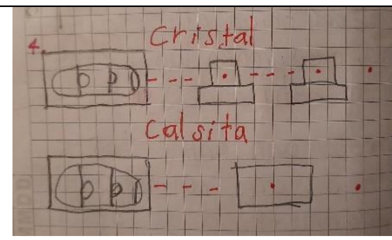
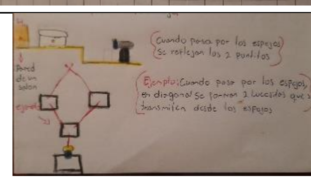
¿En qué aspectos se asemejan y se diferencian los dos montajes, uno en el que se empela la calcita y el otro el espejo semirrefrector?	R) Se asemejan en que en ambos se refleja las Fuentes de luz y se diferencian en que ambas pueden reflejarsen por medio de diferentes objetos y toman diferentes direcciones.
	7. parecen: los dos proyectan luz diferencias: uno es con bibrio y el otro con calcita
	7 en el de los espejos se transportan el haz y el de la calcita se multiplica y se parece que los dos pasan por un vidrio
	7R: En diferencia, es que la calsita es un bidrio grueso y el otro montaje sus bidrios son delgados y ademas usan 3 bidrios, y en lo parecido, es que cada una tiene bidrio y tambien un laser y por ultimo un soporte de madera,
	Diferencia • La calcita separa las moleculas y el cristal cambia el angulo del haz. **Parecido** • Es que los dos experimentos son extraordinarios y muy creativos uno cambia angulo mientras el otro experimento separa las moleculas del haz es muy divertido.
	R/: Que los dos son un cristal pero uno rebota la luz y el otro no.
	7R//: Los dos experimentos se parecen en: los dos tienen un disparador lacer y tienen objetos que reflejan los dos laser lansados.
	7.-Rta: Se diferencian que el espejo refleje los puntos para que estan en diferentes angulos
¿Qué pasaría si solo enviamos un fotón en lugar de un	8. Tomaria un camino que se multiplica por dos.
	R) Posiblemente no habria ningún reflejo de nada.

haz? Es decir ¿Qué camino tomaría el fotón cuando pase por la calcita?	•Toma un camino en que cuando pasa el haz por la calcita separa las moleculas del haz.
	R=Toma un camino en que cuando pasa el haz por la calsita se para las moleculas alas
	8R11: si enviamos una baja intensidad de luz no podriamo verla, ?
	8.Rta: La calzita divide los puntos en 2
	8. no es como con el bidrio que se refleja si no que pasa derecho
	8 Tomaria un camino que se multiplica por dos
¿Qué estados describen los sistemas que estamos observando?	R=El estado es solido.
	9 Describe el haz traspaza un tipo de vidrio.
	9R11: No entiendo ¡¡?
	•Yo digo que la descripcion de los sistemas o montajes es que entre los dos hay un haz que cambia angulo o separa las moleculas del propio haz• El Laser esta en cada uno de los experimentos
	R) Describe la transmisión o reflexión de la luz.

ANEXO 13: Organización de las respuesta y preguntas del momento 3 del taller "estudiando el comportamiento de la luz"

Pregunta	Respuesta
¿Qué aspectos le cambiarias a las interpretaciones (respuesta) de tu compañero o compañera y por qué?	1.Ninguna porque tenemos la misma respuesta. R):Ninguno por que todas estan Perfect R) Nada, cada interpretación pued aceptarse. 1: Yo cambiaria las respuestas de mi Compañera porque son muy simples. porque No tienen contexto. 1 Le cambiaria los graficos porque no le entiendo sus dibujos. 1R//:No por que todo esta muy bien y esta muy bien organisado.
¿Qué elementos de las respuestas de tu compañera o compañero podrían contribuir en tu interpretación de la actividad?	R) Podrian ayudar la respuesta de Mi ompañero a interpretar mejor la ctividad. 2.RtA:con las graficas y las ecuaciones. 2 Los dibujos que me parezcan bien me pueden ayudar en mi activi-dad R):Que las dos en la Segunda mi compañera me ayudo con sus expectativas. 2R//: que uno tiene que saber matematica y saber todas las medidas para uno saber bien el comportamiento de la luz, lo que yo entendi del experimento del gato fue que el Fisico quiso dar a entender si un animal pue estar vivo y muerto a la vez. R) Hay diferentes elementos que pueden contribuir pero aún así todas las respuestas pueden estar muy relacionadas.
Comparen la parte matemática y/o geométrica que hizo cada uno y mencionen las fortalezas y debilidades que le ven a esta.	3 Rta: las debilidades no hizo nada matematico y fortalesas fue claro.

	
	
	
	
	
	
De ser necesario propongan entre los dos una descripción matemática y/o geométrico que describa de manera más clara lo que le hace el cristal de calcita al fotón.	
	
	

	
	
	Cuando pasa por los espejos se dibiden en 2 puntos.
	Cristal Calsita
	
	

ANEXO 14: Taller Final

Momento 1 (Grupal)

Jugando parqués[4]

El juego consiste en jugar parqués, los estudiantes se organizan en grupos de 4 personas para enfrentarse en un mismo tablero. A diferencia del parqués normal, aquí cada estudiante jugará con una sola ficha y cada casilla tiene un valor de 2 unidades, como el jugador puede obtener un número impar, serán los miembros del grupo quienes decidirán qué hacer con los puntos sobrantes, para facilitar el conteo de los puntos cada estudiante tendrá una tabla de registro (Imagen 1).

Turnos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
Puntaje obtenido										
Casillas recorridas										
Puntos sobrantes										

Imagen 1.

La Imagen 2 muestra también un ejemplo de cómo es el registro de la tabla.

Turnos	1	2	3
Puntaje obtenido	6	3	9
Casillas recorridas	3	1	4
Puntos sobrantes	0	1	1

Imagen 1.

- ¿Qué decidieron hacer con los puntos sobrantes?

____

____

[4] Tomada con algunas modificaciones de: Obando Zapata, G., & Botero Hernández, O. E. (2006). La proporcionalidad directa e inversa a partir de la modelación de situaciones de variación. En Gobernacion de Antioquia, & Universidad de Antioquia, *Módulo 2. Pensamiento variacional y razonamiento algebraico* (p. 77-126). Medellin, Colombia.

- Completar la siguiente tabla de registro y mencionar los aspectos que tuvieron en cuenta para llenar la tabla:

Turnos	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Puntaje obtenido		11	7		12		9
Casillas recorridas	2			5		0	
Puntos sobrantes	1		1				

- Propongan una manera en la que podamos saber la cantidad de casillas a recorrer en cada posible lanzamiento de los dados y los puntos que sobran. Si ven la necesidad de hacer dos expresiones las pueden hacer.

Momento 2 (Individual)

Para este momento, consideren que cada casilla vale 3 puntos, en lugar de 2.

- Ayuda a Juan a completar su tabla y menciona que criterios empleaste para hacerlo:

Turnos	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**

Puntaje obtenido	9		1	7	11	3	8
Casillas recorridas		1					
Puntos sobrantes		2		1		0	

- ¿Considera que la expresión construida en el momento anterior sirve para representan las casillas recorridas y los puntos sobrantes para esta nueva situación? Si no es así, proponga una nueva expresión o gráfico.

- ¿Cuáles son las similitudes y diferencias entre le momento grupal y el momento individual?

- Menciona qué momento fue más sencillo de comprender y por qué

Momento 3 (Individual)

Observa la imagen 3 y responde las preguntas:

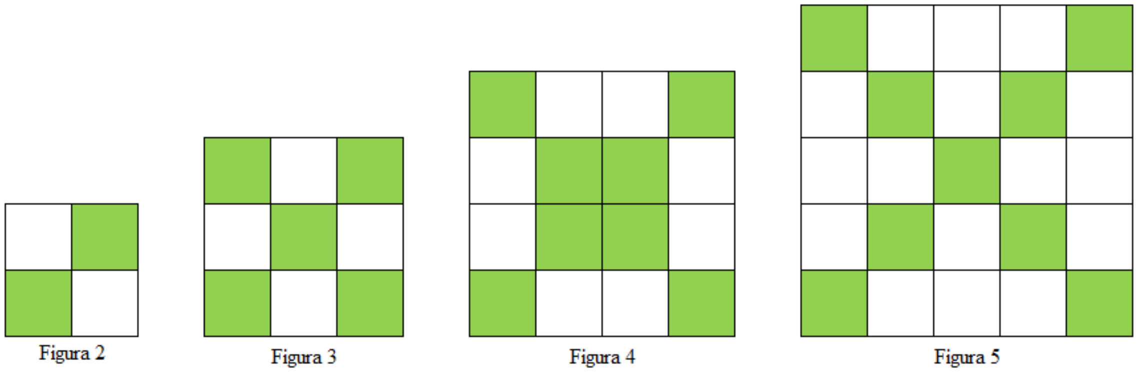


Imagen 3

- Proponga una o varias expresiones matemáticas que le ayuden a identificar los cuadros coloreados de figuras presentadas en la imagen 3, tenga en cuenta cómo se comportan las figuras pares e impares.

- ¿Cuántos cuadros coloreados tendrá la figura 6?

- ¿Cuántos cuadros coloreados tendrá la figura 11?

- ¿Cuántos cuadros no coloreados tendría la figura 14?

- ¿Cuántos cuadros no coloreados tendría la figura 17?

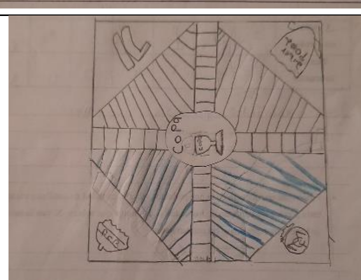
- ¿Qué diferencias y semejanzas puedes hacer entre las figuras pares y las impares?

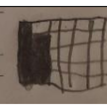
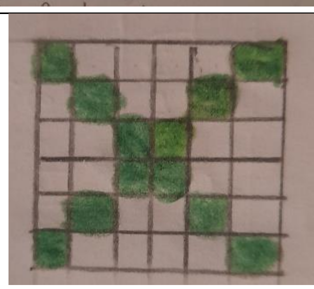
ANEXO 15: Organización de las respuesta y preguntas del taller final con base al primer criterio de análisis

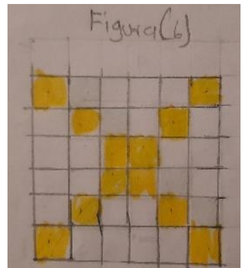
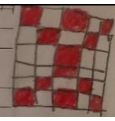
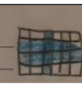
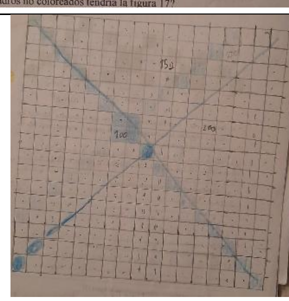
Pregunta	Respuesta
Propongan una manera en la que podamos saber la cantidad de casillas a recorrer en cada posible lanzamiento de los dados y los puntos que sobran. Si ven la necesidad de hacer dos expresiones las pueden hacer.	analisando las cituacines que encontra-bamos.
	como cada un dado da dos puntos si en uno de eyos dá numero par por ejeplo 2 y 2 pues abansaria 4 casillas
¿Considera que la expresión construida en el momento anterior sirve para representan las casillas recorridas y los puntos sobrantes para esta nueva situación? Si no es así, proponga una nueva expresión o gráfico.	No porque en el anterior solo se acia de dos puntos pero ahora lo ago de 3 puntos para cada
	si me sirve pero metoca dividir con un numero diferente
	si me servir porque es el mismo proceso. Para sacar el puntaje toca multiplicar y para sacar las casillas corridas toca dividir lo mismo toca hacer con los puntos sobrantes
	proponga una nueva expresión o gráfico. dividiendo los puntos pero lla no dividido en 2 sino en 3
	•Si concidero que la expresion construida anterior me sirve lo unico es que en la anterior son de 2 puntos y en esta 3.
	si porqe aveces uno pueda sacar ese resultado
	No me sirve porque no es la misma tabla
	no, porque puede estar entre 3, 1 y 2 y en sobrantes mas 2
¿Cuáles son las similitudes y diferencias entre le momento grupal y el momento individual?	que la otra la teniamos que hacer de 2 puntos cada casilla y la otra vale 3 puntos cada casilla
	cuando estaba con grupo me senti bien y cuando estaba individual me senti mal por que no tenia a alguien que me ayudara
	que la otra la teniamos que hacer de 2 puntos cada casilla y la otra vale 3 puntos cada casilla
	no se parecen en nada ni se diferencian

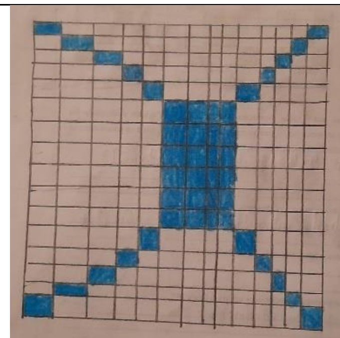
	la similitudes son que nos toca hacer casi las mismas tablas q el momento 1 y en la diferencia es que no hay diferentes ideas para mejorar nuestras respuestas
Proponga una o varias expresiones matemáticas que le ayuden a identificar los cuadros coloreados de figuras presentadas en la imagen 3, tenga en cuenta cómo se comportan las figuras pares e impares.	la figura 6 y la 5 se van multiplicando por dos cada figura 2, 4, 8, 16, 32, 64, etc...
	tengo que dibujar un cuadro depende de lo que me pidan de números y en cada lado el número que me dicen para poder saber cuantos cuadros hay en esa cantidad. • ¿Cuántos cuadros coloreados tendrá la figura 6?
	comportan las figuras pares e impares. tengo que contar todos los cuadritos hasta los coloreados para saber cuntos cuadritos necesita cada figura
	comportan las figuras pares e impares. que en la figura 3 hay 5 coloreados y en la figura 5 le suman 4
¿Qué diferencias y semejanzas puedes hacer entre las figuras pares y las impares?	que en pares es siempre 1 numero más que los impares
	• ¿Qué diferencias y semejanzas puedes hacer entre las figuras pares y las impares? semejanzas: los dos estan clacificadas diferencias: barian en el coloriadas
	• ¿Qué diferencias y semejanzas puedes hacer entre las figuras pares y las impares? en que tienen cuadros diferen e pares porejemplo la figura 3 y la figura 5 la figura 3 tiene 5 pero si le hovieran sumado 4 hoviera quedado como el numero 5
	• ¿Qué diferencias y semejanzas puedes hacer entre las figuras pares y las impares? que el numero par es diferente al impar
	que tienen numeros diferentes
	• ¿Qué diferencias y semejanzas puedes hacer entre las figuras pares y las impares? que alos cuadros se le van sumando dos numeros de a 2 cuadros

ANEXO 16: Organización de las respuesta y preguntas del taller final con base al segundo criterio de análisis

Pregunta	Respuesta
Completar la siguiente tabla de registro y mencionar los aspectos que tuvieron en cuenta para llenar la tabla:	tuve que sumar los pustos que me salían en el dado y restar
	tuvimos encuenta la suma y la division y la compresion que tuvimos mientras estavamos jugando en el parques
	dividi los numeros y luego corria la mitad.
	Lo hicimos sumando, restando y dividiendo.
	yo tuve y utilize las tablas de multiplicar, la divición y la multiplicación
Propongan una manera en la que podamos saber la cantidad de casillas a recorrer en cada posible lanzamiento de los dados y los puntos que sobran. Si ven la necesidad de hacer dos expresiones las pueden hacer.	si sacan, ejemplo: saco un 6 en dados debo correr 3 casillas porque 2 x 3 = 6
	de hacer dos expresiones las pueden hacer. Ejemplo: si saco un 12 debo correr 6 casillas porque 6 x 2 = 12
	de hacer dos expresiones las pueden hacer. por ejemplo me salio 5 y 4 lo sumo y me daria 9 y boy sumando de 2 en 2 hasta que me lleve a 8 porque en el numero mas cerquita a 9 osea que correria 4 casillas
Ayuda a Juan a completar su tabla y menciona que criterios empleaste para hacerlo:	no por que es de a 3 puntos P.a $\frac{12}{3}$ = (4+4+4)
	me alludo a completar la tabla la + y la x
	Aca tuve que dividir, sumar y multiplicar.
	empleamos las tablas del 3 (tres).
	 P.a = $\frac{12}{2}$ (6+6)
¿Considera que la expresión construida en el momento anterior	dividimos los mismos resultados pero en vez de 2 en 3

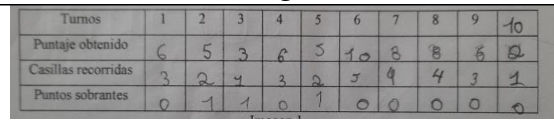
sirve para representan las casillas recorridas y los puntos sobrantes para esta nueva situación? Si no es así, proponga una nueva expresión o gráfico.	no por que es de tres puntos $P,L = \frac{12}{3}(4+4+4)$
Proponga una o varias expresiones matemáticas que le ayuden a identificar los cuadros coloreados de figuras presentadas en la imagen 3, tenga en cuenta cómo se comportan las figuras pares e impares.	tengo que contar todos los Cuadritos hasta los coloreados para saber cuntos cuadritos necesita cada figura
	tengo que dibujar un cuadro depende de lo que me pidan de números y en cada lado el número que me dican para poder saber cuantos cuadros hay en esa cantidad.
	comportan las figuras pares e impares. 4=2 9=5 . 16=8 25=9
	InPares= 5 + 9 =14C Pares= 2 + 8 =10C
	impars - △+O=#C pares - △+O=#C
	3+4=9C. 9+4=13C. la figura 7 tiene 13C. 2+6=8C. 8+6=14C. la fira 6 tiene 14C.
	la figura 6 y la 5 se van multiplicando por dos cada figura 2, 4, 8, 16, 32, 64, etc...
¿Cuántos cuadros coloreados tendrá la figura 6?	Tiene 12 Cuadritos pintados
	• ¿Cuántos cuadros coloreados tendrá la figura 6? la figura 6 tiene pintados de cuadros de 8 cuadros.  • ¿Cuántos cuadros coloreados tendrá la figura 11?
	
	• ¿Cuántos cuadros coloreados tendrá la figura 6? La Figura tienen 12 cuadros pintados y 24 no pintados

<table>
<tr><td rowspan="5"></td><td>
</td></tr>
<tr><td>12. Puede tener 12 cuadros si saltamos de tres en tres</td></tr>
<tr><td>• ¿Cuántos cuadros coloreados tendrá la figura 6?
2+6=8 8+6=14 la figura 6 tiene 14</td></tr>
<tr><td>Figura 5 le suman 4
• ¿Cuántos cuadros coloreados tendrá la figura 6?
la figura 6 tiene 13 coloreados </td></tr>
<tr><td>• ¿Cuántos cuadros coloreados tendrá la figura 6?
la Figura 6 tiene pintados de cuadros.
18 cuadros pintados 
• ¿Cuántos cuadros coloreados tendrá la figura 11?</td></tr>
<tr><td rowspan="5">¿Cuántos cuadros coloreados tendrá la figura 11?</td><td>• ¿Cuántos cuadros coloreados tendrá la figura 11?
Tendria 16 cuadros coloreados</td></tr>
<tr><td>Tiene 22 cuadritos pintados</td></tr>
<tr><td>25 cuadrados</td></tr>
<tr><td>• ¿Cuántos cuadros coloreados tendrá la figura 11?
la figura 11 hay 14 coloriados</td></tr>
<tr><td>• ¿Cuántos cuadros coloreados tendrá la figura 11?
14 coloreados en el cuadro </td></tr>
<tr><td rowspan="5">¿Cuántos cuadros no coloreados tendría la figura 14?</td><td>7 cuadros no coloriados 
• ¿Cuántos cuadros no coloreados tendría la figura 17?</td></tr>
<tr><td>
</td></tr>
<tr><td>¿Cuántos cuadros no coloreados tendría la figura 1
170 cuadrador no coloreador</td></tr>
<tr><td>110 tiene no coleados tendria la figura 14</td></tr>
<tr><td>98 cuadros</td></tr>
</table>

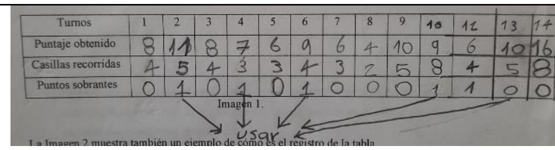
<table>
<tr><td rowspan="3"></td><td>• ¿Cuántos cuadros no coloreados tendría
ten dria 36</td></tr>
<tr><td>R/ La figura 14 tiene 7 cuadros no coloreados.</td></tr>
<tr><td>tendria 14 cuadros coloreados</td></tr>
<tr><td rowspan="6">¿Cuántos cuadros no coloreados tendría la figura 17?</td><td>
tiene no colorados tendria la figura 17 271</td></tr>
<tr><td>244 sin coloriar</td></tr>
<tr><td>R/ hay 8 casillas no coloreadas en la figura 17.</td></tr>
<tr><td>Serran 244 sin colores</td></tr>
<tr><td>no coloreados serian 87 cuadrados</td></tr>
</table>

ANEXO 17: Organización de las tablas del taller final con base al segundo criterio de análisis

Tablas	Imágenes
Tablas de registro de puntos obtenidos durante el momento 1	Imágenes 1–5 (abajo)
Tablas para completar cuyo valor de cada casilla es de 2 puntos	Imágenes 6–9 (abajo)



Turnos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Puntaje obtenido	6	5	3	6	5	10	8	8	6	2
Casillas recorridas	3	2	1	3	2	5	4	4	3	1
Puntos sobrantes	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0

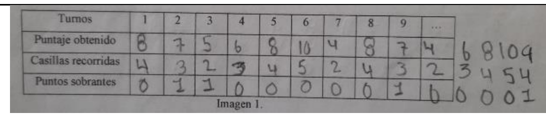


Turnos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	13	14
Puntaje obtenido	8	11	8	7	6	9	6	4	10	9	6	10	16
Casillas recorridas	4	5	4	3	3	4	3	2	5	8	4	5	8
Puntos sobrantes	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0

Imagen 1.

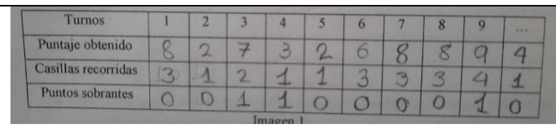
usar

La Imagen 2 muestra también un ejemplo de cómo es el registro de la tabla



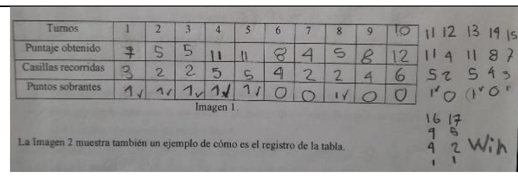
Turnos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…				
Puntaje obtenido	8	7	5	6	8	10	4	8	7	4	6	8	10	4
Casillas recorridas	4	3	2	3	4	5	2	4	3	2	3	4	5	4
Puntos sobrantes	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1

Imagen 1.



Turnos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
Puntaje obtenido	8	2	7	3	2	6	8	8	9	4
Casillas recorridas	3	1	2	1	1	3	3	3	4	1
Puntos sobrantes	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0

Imagen 1



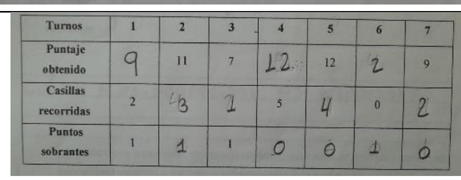
Turnos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Puntaje obtenido	7	5	5	11	11	8	4	5	8	12	11	4	11	8	7
Casillas recorridas	3	2	2	5	5	4	2	2	4	6	5	2	5	4	3
Puntos sobrantes	1✓	1✓	1✓	1✓	1✓	0	0	1✓	0	0	1✓	0	1✓	0	1

Imagen 1.

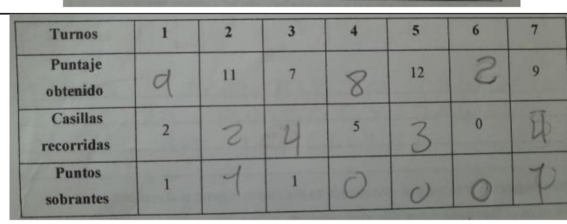
16 17
9 8
4 2
1 1

Win

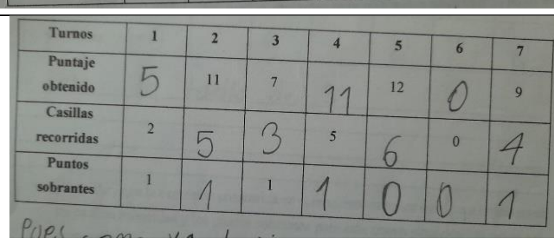
La Imagen 2 muestra también un ejemplo de cómo es el registro de la tabla.



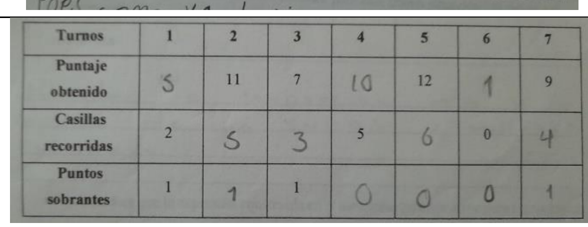
Turnos	1	2	3	4	5	6	7
Puntaje obtenido	9	11	7	12	12	2	9
Casillas recorridas	2	3	1	5	4	0	2
Puntos sobrantes	1	1	1	0	0	1	0



Turnos	1	2	3	4	5	6	7
Puntaje obtenido	9	11	7	8	12	2	9
Casillas recorridas	2	2	4	5	3	0	4
Puntos sobrantes	1	1	1	0	0	0	1



Turnos	1	2	3	4	5	6	7
Puntaje obtenido	5	11	7	11	12	0	9
Casillas recorridas	2	5	3	5	6	0	4
Puntos sobrantes	1	1	1	1	0	0	1



Turnos	1	2	3	4	5	6	7
Puntaje obtenido	5	11	7	10	12	1	9
Casillas recorridas	2	5	3	5	6	0	4
Puntos sobrantes	1	1	1	0	0	0	1

Turnos	1	2	3	4	5	6	7
Puntaje obtenido	5	11	7	11	12	1	9
Casillas recorridas	2	5	3	5	6	0	4
Puntos sobrantes	1	1	1	1	0	0	1

Turnos	1	2	3	4	5	6	7
Puntaje obtenido	5	11	7	10	12		9
Casillas recorridas	2	10	6	5	11	0	8
Puntos sobrantes	1	1	1	6	1		1

Turnos	1	2	3	4	5	6	7
Puntaje obtenido	5	11	7	11	12	1	9
Casillas recorridas	2	5	3	5	6	0	4
Puntos sobrantes	1	1	1	1	0	1	1

Turnos	1	2	3	4	5	6	7
Puntaje obtenido	5	11	7	10	12	1	9
Casillas recorridas	2	4	6	5	6	0	6
Puntos sobrantes	1	1	1	0	2	0	3

Turnos	1	2	3	4	5	6	7
Puntaje obtenido	5	11	7	10	12	1	9
Casillas recorridas	2	5	3	5	6	0	4
Puntos sobrantes	1	1	1	0	0	1	1

Tablas para completar cuyo valor de cada casilla es de 3 puntos

Turnos	1	2	3	4	5	6	7
Puntaje obtenido	9	3	1	7	11	3	8
Casillas recorridas	3	1	0	2	3	1	2
Puntos sobrantes	0	2	1	1	1	0	1

... tabla y menciona que criterios empleaste para hacerlo:

Turnos	1	2	3	4	5	6	7
Puntaje obtenido	9	5	1	7	11	3	8
Casillas recorridas	3	1	0	2	3	1	2
Puntos sobrantes	0	2	1	1	2	0	2

Turnos	1	2	3	4	5	6	7
Puntaje obtenido	9	11	1	7	11	3	8
Casillas recorridas	2	1	4	5	3	0	4
Puntos sobrantes	1	2	1	1	0	0	1

Turnos	1	2	3	4	5	6	7
Puntaje obtenido	9	5	1	7	11	3	8
Casillas recorridas	6	1	0	2	4	1	4
Puntos sobrantes	3	2	0	1	1	0	0

Turnos	1	2	3	4	5	6	7
Puntaje obtenido	9	4	1	7	11	3	8
Casillas recorridas	2	1	1	1	2	1	2
Puntos sobrantes	0	2	2	1	2	0	2

Turnos	1	2	3	4	5	6	7
Puntaje obtenido	9	5	1	7	11	3	8
Casillas recorridas	4	1	0	3	5	1	2
Puntos sobrantes	1	2	1	1	1	0	2

Turnos	1	2	3	4	5	6	7
Puntaje obtenido	9	6	1	7	11	3	8
Casillas recorridas	6	1	3	4	6	3	5
Puntos sobrantes	2	2	1	1	2	0	9

Turnos	1	2	3	4	5	6	7
Puntaje obtenido	9	5	1	7	11	3	8
Casillas recorridas	3	1	0	2	3	1	2
Puntos sobrantes	0	2	0	1	2	0	2

Turnos	1	2	3	4	5	6	7
Puntaje obtenido	9	3	1	7	11	3	8
Casillas recorridas	3	1	0	2	3	1	2
Puntos sobrantes	0	2	2	1	1	0	1

Turnos	1	2	3	4	5	6	7
Puntaje obtenido	9	3	1	7	11	3	8
Casillas recorridas	4	1	1	3	6	1	4
Puntos sobrantes	1	2	0	1	1	0	0

Turnos	1	2	3	4	5	6	7
Puntaje obtenido	9	5	1	7	11	3	8
Casillas recorridas	3	1	0	3	6	1	2
Puntos sobrantes	0	2	1	1	0	0	1

Turnos	1	2	3	4	5	6	7
Puntaje obtenido	9	3	1	7	11	3	8
Casillas recorridas	3	1	0	2	3	7	2
Puntos sobrantes	0	2	7	1	7	0	7

ANEXO 18: Organización de las respuesta y preguntas del taller final con base al tercer criterio de análisis

Pregunta	Respuesta
Completar la siguiente tabla de registro y mencionar los aspectos que tuvieron en cuenta para llenar la tabla:	Desarrollamos la tabla segun los puntos que nos dijeron como lo hicimos en el tablero de parques.
Propongan una manera en la que podamos saber la cantidad de casillas a recorrer en cada posible lanzamiento de los dados y los puntos que sobran. Si ven la necesidad de hacer dos expresiones las pueden hacer.	Para saber cuantas casillas tocaba recorer dividimos los puntos obtenidos por los puntos que se corre por cada casilla y para los puntos sobrantes tengo que multiplicar
Ayuda a Juan a completar su tabla y menciona que criterios empleaste para hacerlo:	Para terminar la tabla use la anterior tabla.
	Vi mi tabla y los q tenían los mismos numeros en puntuase obtenido, casillas y puntos sobrantes y les sume 1 numero mas a todos los numeros
Menciona qué momento fue más sencillo de comprender y por qué	Cuando haciamos la tabla por que solo era multiplicar y dividir
	El más sencillo de entender fue el momento 1 por que es grupal y solo tiene uno que poner los puntos que saco.