UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

Maestría en Docencia de la Matemática
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

TAREAS DE REPRESENTACIÓN: EXAMINAR Y COMUNICAR REGULARIDADES, DE LA OPERACIÓN LOGARITMO A LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Autoras

Arminda Margarita Benítez Ibáñez

Eresmilda Delbueno Altamirano

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA

Bogotá

Diciembre, 2024

TAREAS DE REPRESENTACIÓN: EXAMINAR Y COMUNICAR REGULARIDADES, DE LA OPERACIÓN LOGARITMO A LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Autoras

Arminda Margarita Benítez Ibáñez

Eresmilda Delbueno Altamirano

Directores

Dra. Jeannette Vargas Hernández

Profesor Mauricio Bautista Ballén

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA

Bogotá

Diciembre, 2024

Agradecimientos

Primero, agradecemos a Dios por su guía y fortaleza.

A nuestros directores, la profesora Jeannette Vargas Hernández y el profesor Mauricio Bautista Ballén, por su invaluable orientación y paciencia a lo largo de todo este proceso.

A nuestras familias y amigos, por su apoyo incondicional.

Al Programa Nacional de Becas Don Carlos Antonio López – BECAL, por brindarnos la oportunidad de continuar nuestra formación académica.

Dedicatoria

A mis padres, amigos y compañeros, quienes me brindaron su apoyo incondicional en cada paso de este camino.

Arminda Benítez Ibáñez

A mi hija, Bethania Nicole, por ser mi motivación constante para superarme cada día más y seguir luchando por un futuro mejor. Espero ser siempre un ejemplo para ti.

A mi compañero de vida Carlos Xavier, por el apoyo incondicional a lo largo de mis estudios. A mis familiares por estar siempre presentes.

Eresmilda Delbueno Altamirano

Tabla de contenido

Índice de tablas

Índice De Figuras

Introducción

El presente trabajo se desarrolla en el marco del Programa Nacional de Becas Don Carlos Antonio López (BECAL- Paraguay), del cual somos beneficiarias para cursar la Maestría en Docencia de la Matemática en la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia. El trabajo tiene como propósito contribuir a la mejora de la enseñanza de las matemáticas, particularmente en lo referente a la función logarítmica. El documento está organizado en los siguientes apartados:

Para el capítulo 1 presentamos la inquietud pedagógica motivada por las dificultades observadas en nuestros estudiantes del primer año de la educación media paraguaya para interpretar y analizar las gráficas de funciones. A partir de estas dificultades, diseñamos una propuesta de tareas que busca responder a ellas. Además, presentamos el objetivo general y los objetivos específicos de este trabajo de grado, junto con los antecedentes teóricos y prácticos que sustentan el diseño de las tareas.

En correspondencia con esto, en el capítulo 2 delineamos el marco teórico, donde se definen conceptos clave en torno a la función logarítmica y su relación con las progresiones aritméticas y geométricas. Desde este marco, que se fundamentan en la Teoría APOE (acción, proceso, objeto y esquema), se presenta una propuesta de descomposición genética preliminar de la función logarítmica desde donde se establece la principal mirada hacia el diseño las tareas.

En cuanto al capítulo 3 incluimos los aspectos metodológicos relevantes para el diseño de tareas, teniendo como sustento la teoría APOE, mencionada anteriormente, la cual cuenta con su propia metodología de enseñanza: el ciclo ACE (acción, clase y ejercicios). A partir de esta metodología contemplada para su implementación en las aulas de los colegios de Paraguay, describimos el instrumento para la presentación de las tareas y una muestra de la rúbrica que se utiliza para evaluar el trabajo de los estudiantes. Este capítulo sustenta la importancia del aprendizaje cooperativo en la enseñanza de conceptos matemáticos.

Siguiendo con el capítulo 4 exponemos el diseño de las tareas que serán aplicadas a los estudiantes, utilizando recursos digitales para facilitar la representación gráfica y el análisis de las propiedades de la función logarítmica. La propuesta tiene como objetivo principal mejorar la comprensión matemática de los estudiantes, promoviendo el uso de la tecnología como una herramienta esencial. Además, buscamos hacer que las clases de matemáticas resulten interactivas de manera que los estudiantes sean protagonistas de su proceso de aprendizaje.

Finalmente, en el capítulo 5, describimos algunas consideraciones donde reflexionamos sobre los aprendizajes obtenidos tanto en la práctica docente como en el desarrollo del trabajo académico, destacando la importancia de integrar la tecnología en el proceso educativo y de fomentar un enfoque dinámico en la enseñanza de las matemáticas. A partir de esta indagación estamos comprometidas a cambiar nuestra práctica dentro del aula de matemáticas poniendo en práctica las estrategias pedagógicas que hemos aprendido para que mejoren el aprendizaje de nuestros estudiantes.

Capítulo 1. Planteamiento de la inquietud pedagógica

En este capítulo desarrollamos el problema identificado y justificamos la relevancia de abordarlo. A continuación, planteamos los objetivos del trabajo, tanto generales como específicos, y presentamos estudios previos obtenidos de la revisión de la literatura, los cuales se centran en tres aspectos principales. El primero se enfoca en la identificación de estudios y problemas relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de los estudiantes en torno al tema de estudio. El segundo aspecto analiza cómo el uso de la tecnología facilita a los estudiantes la exploración, comprensión y formulación de conceptos matemáticos, especialmente aquellos relacionados con las funciones logarítmicas. Finalmente, el tercer aspecto destaca la importancia de investigar el desarrollo histórico de la función logarítmica, estos apartados nos ayudan a construir una secuencia articulada que fundamenta nuestra propuesta didáctica para facilitar el aprendizaje de la función logarítmica.

1.1. Inquietud pedagógica

Nuestra inquietud pedagógica gira en torno al aprendizaje de varios conceptos matemáticos, como la función, de manera particular la función logarítmica, y también al interés que tenemos por conocer acerca de las estructuras mentales que deberían ocurrir en los estudiantes. En el primer semestre de la Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional, conversamos sobre nuestros intereses y las dificultades que hemos observado en nuestros estudiantes del primer año de la educación media paraguaya al hacer lectura e interpretación de gráficas de funciones en las clases de matemáticas. En particular desde nuestro ejercicio docente, hemos evidenciado que, durante la gestión en el aula, como profesores acompañamos a los estudiantes en el estudio de las características de las funciones, para que ellos puedan analizarlas desde sus distintas representaciones semióticas, como lo expone Duval (2016) quien sostiene que el aprendizaje de las matemáticas es un proceso complejo que implica la interacción con formas de representación semiótica. Hemos identificado en nuestras prácticas que, para el manejo de las funciones, con frecuencia los estudiantes se limitan a utilizar la calculadora para encontrar las imágenes$f(x)$, a partir de los valores de la variable x, en el conjunto de los números reales. Es importante agregar que tienen dificultades para interpretar las gráficas de las funciones de variables real, como confundir el dominio con el rango al ubicar los pares ordenados.

De acuerdo con la consulta de las investigaciones hemos reconocido que en el currículo no se le ha dado la suficiente relevancia a este objeto matemático, tal como lo afirman Bocanegra et al. (2013):

> Es común encontrar que no se les ha dado la suficiente relevancia dentro del currículo de matemáticas, lo cual ha generado dificultades en la comprensión de estos conceptos por parte de los estudiantes. Lo anterior, se puede deber a que se desconoce, por parte de los profesores de matemáticas, o no existen herramientas didácticas que permitan un acercamiento a estos conceptos desde los elementos constitutivos que favorezca su enseñanza. (p. 6)

Según Bocanegra et al. (2013), la función logarítmica tampoco es reconocida en algunos textos de bachillerato, donde por lo general se limitan a plantear su definición básica, su expresión analítica general y algunas aplicaciones en ciencias. En el caso de textos en Paraguay la situación es similar. Por ejemplo, en el texto Guía 1 de Matemática de la Educación Media, utilizado en el primer curso, los apartados dedicados al estudio de la función logarítmica incluyen únicamente su definición, su representación gráfica y algunas características generales.

En consonancia con lo anterior, González (2020) menciona dificultades comunes que presentan los estudiantes en cuanto a la representación gráfica:

- Dificultades presentes en los estudiantes al momentode traducir de una representación verbal a una gráfica.
- Dificultades en la interpretación de gráficas asociadas con el excesivo tratamiento algebraico.
- Dificultades con respecto a la interpretación y construcción de gráficas como la discretización de variables continuas,
- Dificultades para identificar las variables (dependiente e independiente).

Como parte de la propuesta, en relación con la representación gráfica de las funciones logarítmicas para el diseño de las tareas que constituyen el objeto del presente trabajo, emplearemos la herramienta GeoGebra. Con dicho diseño, pretendemos:

1-Propiciar construcciones mentales que les permitan a los estudiantes caracterizar la función a partir de la relación con varios elementos matemáticos como son las progresiones aritméticas, las progresiones geométricas, el dominio y el rango de la función logarítmica.

2- Fomentar estrategias para observar las representaciones gráficas de funciones logarítmicas.

3- Identificar características que impliquen el uso de las propiedades de los logaritmos, además de la relación entre las representaciones verbal, algebraica, gráfica y tabular de la función logarítmica.

1.2. Contexto

En este apartado hacemos referencia al contexto a nivel institucional y a nivel nacional en la República de Paraguay.

En el contexto nacional, la educación paraguaya, especialmente en el nivel medio, ha tenido un impacto significativo por una serie de reformas y actualizaciones curriculares que buscan mejorar la calidad educativa y fomentar la participación de los estudiantes en la sociedad. Desde el inicio de la reforma educativa en el año 2002, el Ministerio de Educación y Ciencias (MEC) ha trabajado para desarrollar un enfoque basado en competencias, integrando valores y habilidades fundamentales para la formación integral del individuo. Los pilares de la educación en Paraguay están alineados con los principios de la UNESCO (Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencias y la Cultura), en particular con lo que hace referencia a aprender a conocer, a hacer, a vivir juntos, a ser y, específicamente en el país, aprender a emprender, con el fin de preparar a los jóvenes para enfrentar los desafíos sociales, económicos y ambientales.

En el primer año de la educación media paraguaya, las orientaciones curriculares para la enseñanza de la función logarítmica buscan desarrollar la capacidad de los estudiantes para comprender y aplicar los conceptos en situaciones cotidianas. Se enfatiza el pensamiento lógico-matemático, permitiendo que los estudiantes no solo identifiquen las propiedades fundamentales de la función logarítmica, sino que también interpreten su comportamiento a través de representaciones gráficas y algebraicas (MEC, 2014).

Atendiendo al contexto institucional, el diseño de las tareas presentadas en esta propuesta está dirigido a estudiantes del primer curso de la Educación Media, con edades entre 15 y 16 años, provenientes de dos instituciones públicas de la República del Paraguay. Con esta propuesta, esperamos beneficiar a aproximadamente 60 estudiantes matriculados entre ambas instituciones. La primera, el Colegio Nacional Don Joaquín Gómez, se encuentra en la ciudad de Yatytay, en el kilómetro 14 del Departamento de Itapúa y depende del Ministerio de Educación y Ciencias (MEC). Esta institución ofrece dos énfasis: Ciencias Básicas y Técnico en Salud, y atiende a estudiantes de 15 a 19 años, en su mayoría hijos de agricultores de los distintos barrios del distrito.

La segunda institución, también pública, es el Colegio Nacional Santa Rita, ubicada en una zona rural a las afueras de la ciudad de San Ignacio, en el Departamento de Misiones. Ambas instituciones presentan necesidades en cuanto a infraestructura, como es común en el sector público; sin embargo, cuentan con ventiladores en las aulas, buena iluminación y, desde este año, disponen de diez notebooks y un proyector, aunque aún no tienen acceso a internet.

En resumen, el contexto nacional e institucional permite comprender el entorno en el que se desarrollará esta propuesta educativa. La realidad de la educación paraguaya, influenciada por reformas que promueven un enfoque basado en competencias, se refleja en las instituciones donde implementaremos nuestro trabajo, las cuales enfrentan desafíos estructurales, pero también oportunidades pedagógicas. El diseño de las tareas presentadas se ajusta a las necesidades de los estudiantes de estas escuelas públicas, promoviendo el uso de tecnologías, como GeoGebra, para mejorar la comprensión de la función logarítmica, y buscando fortalecer su capacidad para aplicar conceptos matemáticos en situaciones reales.

1.3. Justificación

En este apartado, presentamos la justificación de la importancia, viabilidad y pertinencia del estudio sobre el aprendizaje de la función logarítmica y su representación gráfica. La viabilidad de este trabajo radica en que, como docentes beneficiarios de una beca del gobierno paraguayo para cursar la Maestría en Docencia de la Matemática en la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia, contamos con la capacitación necesaria para diseñar y, en el futuro, aplicar las tareas propuestas en nuestras instituciones. Este apoyo responde al interés del gobierno paraguayo en capacitar a sus docentes, con el fin de mejorar la calidad educativa en el país. Una vez que regresemos a nuestras instituciones, será posible implementar la propuesta presentada.

La pertinencia del estudio de la función logarítmica se fundamenta en su alineación con la propuesta del currículo de la educación media paraguaya (MEC, 2014), que plantea que los estudiantes estén en capacidad de interpretar las características fundamentales de una función logarítmica a partir de su expresión analítica y su representación gráfica. Además, en el marco de los objetivos generales de la educación paraguaya, según el documento de Actualización Curricular del Bachillerato Científico, se promueve el desarrollo de habilidades analíticas y reflexivas en los estudiantes. Dado que la enseñanza de la función logarítmica facilita el desarrollo de estas habilidades mediante tareas que incluyen el análisis de representaciones, la conexión con otros conceptos y su aplicación en situaciones reales, como la interpretación de fenómenos, la inclusión de la sonoridad y el nivel de intensidad del sonido en el diseño de tareas no solo contribuye al desarrollo de dichas habilidades para la resolución de problemas, sino que también motiva a los estudiantes a evaluar cuándo y cómo aplicar los conceptos, evitando así la mera memorización de fórmulas.

Autores como Farfán y Ferrari (2002), González y Vargas (2007), y Cano y García (2016) destacan la evolución y diversidad de aplicaciones de los logaritmos, así como las dificultades que enfrentan los estudiantes en su aprendizaje. Estos autores sugieren que la enseñanza de los logaritmos debe alejarse de los métodos tradicionales que se limitan a la evaluación de fórmulas, y proponen enfoques innovadores que incorporan la historia de la matemática. Enseñar el origen y la evolución de los logaritmos ayuda a los estudiantes a comprender su propósito y relevancia, facilitando una conexión más profunda con el concepto (González y Vargas, 2007). Además, creemos que este enfoque histórico permitirá a los estudiantes entender cómo los logaritmos simplificaron cálculos complejos antes de las calculadoras, destacando su aplicabilidad en diversas áreas.

Gómez (1997, citado en Castro Díaz y Forero Toro, 2019) resalta que el uso de tecnologías dinámicas facilita la observación de objetos matemáticos en diferentes sistemas de representación, creando experiencias educativas difíciles de lograr con métodos tradicionales, y como lo expresan Vargas y González (2022), existen dificultades que surgen al enseñar la función logarítmica como inversa de la exponencial, abriendo la posibilidad de explorar otros enfoques para su enseñanza y aprendizaje. En este sentido, en cuanto a la representación gráfica, consideramos que el uso de GeoGebra es esencial para diseñar tareas que integren la tecnología en el aprendizaje de los estudiantes. Esta herramienta digital ha transformado la manera en que se interactúa con las matemáticas, permitiendo que los estudiantes exploren de manera dinámica las representaciones gráficas y algebraicas de las funciones.

Y como lo destacan Farfán y Ferrari (2002) la representación gráfica de las funciones no solo facilita la comprensión, sino que estimula el análisis reflexivo y creativo, permitiendo a los estudiantes visualizar y comprender mejor el comportamiento de las funciones logarítmicas y sus propiedades. Este tipo de herramientas digitales no solo favorece el aprendizaje de conceptos matemáticos, sino que también contribuye a un ambiente de estudio más dinámico y participativo.

Finalmente, consideramos que la propuesta de tareas que hemos diseñado es pertinente y necesaria para el estudio de las funciones logarítmicas, pues a través de ellas se espera que los estudiantes relacionen diferentes formas de representación. Con esta propuesta buscamos vincular de forma precisa las representaciones gráficas de las funciones con sus expresiones algebraicas y tabulares, facilitando así una comprensión integral del concepto y su aplicación en distintos contextos matemático.

En el marco de este trabajo, el uso de GeoGebra es fundamental para diseñar clases dinámicas y atractivas, donde los estudiantes participan activamente en las actividades propuestas. La propuesta de tareas se aleja de los enfoques tradicionales y busca evidenciar las regularidades de la función logarítmica, relacionándola con las progresiones aritméticas y geométricas, y apoyándose en el uso de GeoGebra para lograrlo.

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo general

Diseñar tareas de representación, para estudiantes de educación media, encaminadas a la comprensión de la función logarítmica, con el apoyo de la teoría APOE; propiciando desde la operación logaritmo, la identificación, descripción de características y vínculos entre la progresión geométrica y aritmética y esta función.

1.4.2. Objetivos específicos

- Utilizar la Teoría APOE en términos de acciones y procesos para proponer tareas relacionadas con la operación logaritmo y la función logarítmica.
- Plantear tareas relacionadas con las representaciones de la función logarítmica utilizando GeoGebra y otros recursos manipulativos, dirigidas a los estudiantes del primer año de la educación media.
- Plantear tareas, a partir del comportamiento de la progresión aritmética y geométrica para aproximar a los estudiantes a la interpretación de la operación logaritmo y la función logarítmica.

1.5. Antecedentes

En este apartado, presentamos una revisión de los principales referentes de investigación relacionados con el estudio de la función logarítmica. A partir de un análisis exhaustivo de 25 trabajos, seleccionamos y analizamos 11 de ellos, organizándolos en tres categorías fundamentales: el primer grupo los estudios que examinan las problemáticas en la enseñanza y aprendizaje de este objeto matemático; el segundo, incluye investigaciones que exploran el uso de GeoGebra como herramienta para la enseñanza de la función logarítmica; y el tercero, se enfoca en aquellos trabajos que profundizan en el desarrollo histórico de la función logarítmica, destacando su evolución y aplicación a lo largo del tiempo.

1.5.1. Antecedentes de investigación sobre la función logarítmica

Inicialmente describimos trabajos que abordan la problemática de la enseñanza y aprendizaje de la función logarítmica. El primero es el desarrollado por Hernández y Ferrari (2005) quienes exponen el diseño de una secuencia de actividades que aborda el tema de los logaritmos y sus propiedades. Las autoras identifican un problema común de los estudiantes de bachillerato, al tratar de comprender los logaritmos desde la enseñanza tradicional debido a la forma en que se presenta la función logarítmica, generalmente como la inversa de la función exponencial, sin un contexto que les permita desarrollar una comprensión más intuitiva.

La investigación de Hernández y Ferrari (2005) nos lleva a reflexionar sobre la conveniencia de no utilizar el concepto de función inversa, ya que la población objetivo, compuesta por estudiantes de primer semestre de bachillerato, a quienes se les propondrán las tareas en un futuro, aún no están familiarizados con el tema de logaritmos y la idea de que puedan abordar y resolver la secuencia propuesta solo con los conocimientos previos que poseen es, en realidad, un enfoque que se aleja de las posibilidades reales de aprendizaje.

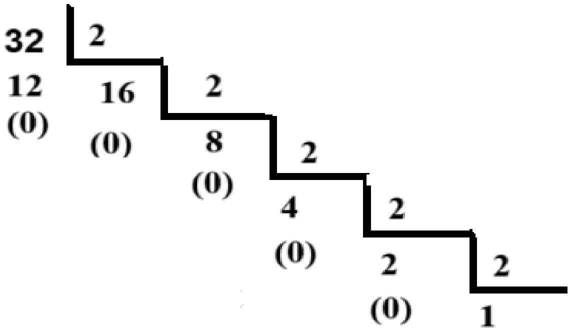
El trabajo de Vargas y González (2022) señala que la función logarítmica suele enseñarse como la inversa de la función exponencial, lo que genera diversas dificultades para los estudiantes. Entre las principales barreras se encuentran la falta de comprensión de la relación entre las funciones inversas y la dificultad para manejar correctamente los conceptos asociados, como lo relacionado con la función inyectiva. Estas dificultades han sido objeto de estudio en la comunidad educativa durante las últimas décadas, lo que nos motiva a explorar enfoques alternativos para mejorar nuestras prácticas educativas.

Vargas et al. (2022) retoman los modelos propuestos por Weber quien "propone hacer uso de contextos familiares para las interpretaciones significativas de los conceptos, integrando a ellos las nociones de operacionalidad que corresponde a los procesos" (Weber citado en Vargas et al., 2022, p.105). A partir de esta observación, en el presente trabajo optamos por un enfoque alternativo, basado en el modelo de división repetida, inicialmente para números naturales, con el que buscamos facilitar una construcción accesible y gradual del concepto de logaritmo, proporcionando a los estudiantes una mejor comprensión operativa, camino a la representación de la función logarítmica.

Atendiendo a lo anterior, en la propuesta, integramos el modelo básico de división repetida, en el cual "el logaritmo $\log_a b$ con base a de un número b indica con qué frecuencia el número b tiene que ser dividido por la base a para llegar a 1. Este modelo también se denomina Modelo básico de división repetida" (Vargas et al., 2022. p.106).

Figura 1

División repetida



Nota: Construcción propia

A partir de las divisiones presentadas en la figura 1, observamos que, comenzando con el número 32, se realizó 5 veces la división entre 2 hasta obtener como cociente el número 1. Esto implica que $log_2 32 = 5$. En otras palabras, hemos dividido 32 entre 2 un total de 5 veces para llegar a 1. El número de veces que efectuamos la división es fundamental, ya que podemos concluir que el logaritmo de 32 en base 2 es 5.

Por su parte, Sanabria (2016), desarrolló un trabajo cuyo objetivo fue resaltar la importancia de que los estudiantes comprendan la utilidad de la función logarítmica y el origen del logaritmo. Además, la autora buscó mostrar a los estudiantes las técnicas necesarias para resolver situaciones problemáticas a través de una propuesta didáctica, apoyándose en (Garcharná León citado por Sanabria, 2016). En este último trabajo se encuentra una secuencia de actividades que, en el camino propuesto para la construcción del concepto de logaritmo, también recurre a las relaciones entre las progresiones para generar un significado del concepto y con ello dar posibilidades de acceso a las diferentes aplicaciones del logaritmo.

En esta misma línea de ideas, Hernández y Ferrari (2005) y Bocanegra et al. (2013), señalan que uno de los problemas que ha surgido en la enseñanza de los logaritmos es que esta se centra en una definición algorítmica, asociada con los términos de exponente y base, esto se encuentra en textos escolares actuales, enfatizando la notación, se enuncian las propiedades como teoremas y se proponen ejercicios en los que solo se sustituyen valores para encontrar el resultado. Esto lleva a que los estudiantes enfrenten dificultades para comprender el concepto del logaritmo.

Por su parte, Cano y García (2016) en su investigación abordan la enseñanza de los logaritmos, que suele ser mecánica y descontextualizada, limitando la comprensión del concepto. Para ello, proponen una secuencia didáctica para el profesor basada en la covariación y el enfoque socio epistemológico, vinculando los logaritmos con la progresión geométrica y la aritmética. Esta investigación incluye actividades para el profesor, con recursos manipulativos y tecnológicos, que busca facilitar la comprensión de la función logarítmica.

En conclusión, la revisión de estos antecedentes revela que la enseñanza de los logaritmos enfrenta dificultades tanto desde un enfoque teórico como práctico. Las investigaciones sugieren la necesidad de integrar herramientas tecnológicas, modelos operativos y la perspectiva histórica para una comprensión más profunda y significativa de la función logarítmica. Por ello, consideramos que estos trabajos nos sirven de guía y nos ayudan a iluminar nuestro camino en la construcción de nuestro diseño de tareas, orientado a mejorar el aprendizaje de este concepto matemático.

1.5.2. Uso de GeoGebra

En relación con el uso de GeoGebra en la enseñanza, se hace referencia a dos trabajos. El primero elaborado por Portilla (2014), se propuso como objetivo explorar el uso de GeoGebra como recurso didáctico para la enseñanza de las gráficas de funciones en el bachillerato. El autor destaca que muchos estudiantes enfrentan dificultades para comprender el concepto de función y su representación gráfica. Su propuesta consistió en fomentar la visualización de las funciones a través de GeoGebra, lo que mejora la capacidad del profesor para explicar los conceptos y favorece el aprendizaje visual de los estudiantes. Este estudio resulta útil para nuestra investigación, ya que subraya las ventajas de GeoGebra como recurso didáctico en la enseñanza de las funciones y sus representaciones gráficas.

Por otro lado, Lucas y Aray (2023), realizaron un experimento en el que compararon dos grupos de estudiantes: uno que utilizaba GeoGebra como herramienta complementaria en el aprendizaje y otro que seguía el enfoque tradicional. Los resultados mostraron que el uso de GeoGebra favoreció un entendimiento más profundo de las representaciones gráficas y de los componentes analíticos en los problemas matemáticos. Además, se observó un aumento en la motivación, el compromiso y el interés de los estudiantes por la asignatura, lo que también impulsó el desarrollo de un aprendizaje más autónomo. Los autores concluyen que GeoGebra es una herramienta eficaz para mejorar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, facilitando la comprensión de conceptos complejos y promoviendo el desarrollo de habilidades matemáticas de forma más interactiva y visual.

1.5.3. Antecedentes históricos del logaritmo

Farfán y Ferrari (2002) destacan la relevancia histórica de la noción de logaritmos, señalando cómo su significado se ha diluido a lo largo del tiempo. Proponen que es necesario reintroducir los logaritmos en el aula de manera accesible tanto para estudiantes como para profesores, sugiriendo un enfoque que considere el contexto social y cultural de los estudiantes.

De acuerdo con lo anterior, Abrate y Pochulu (2007) argumentan que:

> La perspectiva histórica no sólo permite conocer cómo se crearon y construyeron los conceptos y las teorías que hoy manejamos, producto de un trabajo acumulativo, sino también, faculta para comparar técnicas y métodos actuales con otros que se utilizaron en el pasado. Así, el quehacer matemático se torna valioso al poner de manifiesto que un mismo problema se resolvió de maneras diferentes en distintas épocas. (p.112)

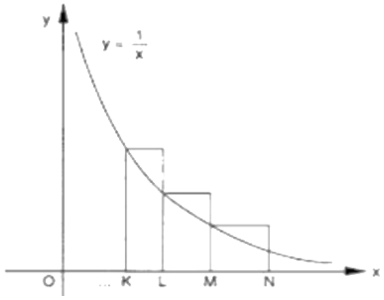
Los autores resaltan la importancia de la perspectiva histórica y su relevancia para la enseñanza de los logaritmos, porque no solo facilita la comprensión de cómo se construyeron los conceptos matemáticos, sino que también permite mostrar que un mismo problema puede resolverse de maneras diferentes en distintas épocas.

A continuación, se esbozan algunas contribuciones al desarrollo histórico de los logaritmos, construido a partir de González y Vargas (2007).

Tabla 1

Antecedente histórico del logaritmo.

Antecedente histórico del logaritmo	
Autores	**Aporte**
Arquímedes (287-212 a.C.)	En su estudio sobre grandes números, se acercó a los fundamentos de lo que más tarde se convertiría en el logaritmo.
Nicolas Chuquee (1445-1488)	En su obra Le Triparty en la science des nombres (1484), establece reglas únicamente para las potencias de 2, utilizando exponentes que van del 0 al 20.
Stifel (1487-1567)	En su obra Aritmética Integra, se establece que los términos de una progresión geométrica se relacionan con los términos de una progresión aritmética compuesta por los exponentes.
Napier (1550-1617)	Napier fue el inventor de los logaritmos. El término logaritmo que él acuñó proviene de las palabras griegas *logos* (razón) y *aritmos* (número), haciendo alusión al *número de la razón*, que mide cuántas veces se ha aplicado la *acción de la razón*. Empleó las Reglas de Prosthaphaeresis para resolver problemas en astronomía. En 1614, publicó su obra *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (Descripción de la maravillosa regla de los logaritmos), en la cual utilizó el término logaritmo por primera vez. Posteriormente, en 1619, se publicó *Mirifici logarithmorum canonis,* que incluía las tablas de logaritmos creadas por Napier.
Burgi (1552-1632)	En 1620, dio a conocer su obra *Arithmetishe und Geometrische Progress-Tabulen*, en la que expuso conceptos que guardaban mucha similitud con los planteados por Napier.
Henry Briggs (1561-1639)	Propuso el uso de potencias de diez y, junto con Napier, demostró que el logaritmo de uno fuera cero y el logaritmo de diez fuera uno. Creó la primera tabla de logaritmos, conocidos como logaritmos vulgares o de Briggs, y en 1617 publicó su obra *Logarithmorum Chilias Prima*, que contenía los logaritmos desde 1 hasta 1.000. Posteriormente, amplió estas tablas en su *Aritmética Logarítmica* hasta alcanzar los logaritmos de 1 a 100.000, manteniendo siempre catorce cifras decimales.
William Oughtred **(1574 -1660)**	Enunció de forma explícita, hacia 1650, las siguientes propiedades de los logaritmos log_a m n = log_a m + log_a n $log_a \frac{m}{n}$ = log_a m – $log_a n$ $log_a x^n$= n $log_a \chi$

Gregoire de Saint-Vincent (1584-1667)	 En su obra *Opus Geométricorum Quadrature Circuli et Sección Coni (1630),* intentó abordar los problemas relacionados con la cuadratura del círculo y la hipérbola, demostrando que las áreas bajo las hipérbolas guardan una relación con los logaritmos.
Descartes (1596-1650)	Introdujo la notación, *n, nn,* n^3 ... para las potencias y lo relacionó con propiedades de los logaritmos.
Fermat (1601-1665)	Calculó en 1629 el área bajo la curva $y = x^n$ entre dos valores $x = 0$ y $x = a$ Las áreas de estos rectángulos forman una progresión Geométrica.
Torricelli (1608-1647)	En 1646, Torricelli representó una curva cuya ecuación sería $x = log\ y$, lo que posiblemente constituye la primera representación gráfica de una función logarítmica. Calculó el área delimitada por dicha curva, su asíntota y una ordenada, además de determinar el volumen del sólido generado al girar esta área alrededor del eje OX.
John Speidell (1619)	Modificó los logaritmos de Napier, introduciendo los logaritmos naturales (o neperianos) a partir de funciones trigonométricas, los cuales publicaron en su obra *New Logarithmes* en 1619.
Huygens (1629-1695)	En 1690, expuso las propiedades de la función logarítmica en su "Discurso sobre la causa de la gravedad". Estaba interesado en la cuadratura de la hipérbola. Encontró dificultades para el desarrollo del Análisis Infinitesimal
James Gregory (1638-1675), Lord Brouncker (1620-1684), **Nicholas Mercator (1620-1687), Wallis (1616-1703),** **Newton (1642-1727) y Edmond Halley (1656-1742).**	Presentaron el cálculo de logaritmos por medio de series infinitas.
Bernoulli (1667-1748)	Propuso en 1718, que una función es una expresión analítica.
William Jones (1675-1749)	En 1742, presentó la primera exposición sistemática de la definición de logaritmos, explicándolos como los exponentes de las potencias que representan números con una base determinada.
Euler (1707-1783)	En 1728, definió los logaritmos como exponentes. Utilizó esta definición, que describe el logaritmo de un número positivo como el exponente al que se debe elevar una base fija para obtener dicho número, para resolver problemas relacionados con la variación del interés compuesto y el crecimiento de la población. Estos temas se abordan al final del capítulo VI de su obra *Introductio in analysin infinitorum* (1748), dedicado al estudio de funciones,

	su clasificación, propiedades y métodos de desarrollo en series, productos infinitos, fracciones continuas y suma de fracciones simples. Fue pionero en considerar la logaritmación como una de las dos operaciones inversas de la potenciación y promovieron que los logaritmos de números negativos no son reales.

Nota. Construcción a partir de lo expuesto en Vargas (2013), González y Vargas (2007, pp. 129-144).

Según González y Vargas (2007), el concepto de logaritmo se origina en la comparación entre progresiones aritméticas y geométricas, donde el valor de la progresión aritmética se denomina logaritmo y el de la progresión geométrica antilogaritmo. Los logaritmos simplifican operaciones complejas, como multiplicaciones, divisiones, potencias y raíces, transformándolas en sumas, restas, productos y cocientes, lo que facilitó enormemente los cálculos manuales y permitió resolver problemas antes inviables por el uso de grandes cantidades. Napier, motivado por resolver problemas astronómicos, desarrolló los logaritmos utilizando las *Reglas de Prosthaphaeresis*, método empleado en observatorios como el de Tycho Brahe (1546-1601), lo que lo llevó a publicar *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* en 1614. Es importante destacar que Napier no utilizaba una base para su sistema de logaritmos, lo que lo diferencia de los logaritmos actuales, ya que su logaritmo de un producto (o de un cociente) no correspondía, en general, a la suma (o diferencia) de los logaritmos.

El trabajo de Briggs, colaborador de Napier, dio lugar a los logaritmos de base decimal. Briggs publicó las tablas partiendo de la igualdad Log 10 = 1 aplicando propiedades logarítmicas para calcular logaritmos con precisión, estableciendo las tablas decimales que utilizamos hoy en día. González y Vargas (2007), también refieren a Joost Bürgi, quien tenía un trabajo diversificado en astronomía, triangulación, geometría, relojería, entre otros campos, lo que requería complicados y laboriosos cálculos con números de múltiples dígitos; el intento de simplificarlos pudo muy bien ser lo que le condujo hacia el concepto de logaritmo. En el año 1603 el propio Kepler, que coincidió con Bürgi en Praga, hizo públicas las técnicas de cálculo utilizadas por el matemático suizo y llegó a revisar su *Arithmetische und geometrische progress-tabulen* que estaba escrita desde el año 1588.

En conclusión, el estudio de estos antecedentes históricos y los enfoques de Napier, Briggs y Bürgi son esenciales para comprender la evolución y aplicación de los logaritmos en la matemática moderna. Estos trabajos nos guían en la construcción de un diseño de tareas que contextualice el concepto de logaritmo, facilitando su aprendizaje en el aula, camino a la caracterización de la función logarítmica en los números reales.

Capítulo 2. Marco teórico

En este capítulo consideramos pertinente estructurar el marco teórico en dos ejes principales que permitirán abordar de manera integral el estudio de la función logarítmica. El primer eje corresponde a la red conceptual, la cual tiene como propósito describir y profundizar en el conjunto de conceptos y propiedades fundamentales que definen este objeto matemático. Aquí se abordan aspectos como las propiedades de los logaritmos, su comportamiento en diferentes contextos y su relación con otros conceptos matemáticos, como las progresiones aritmética y geométrica.

El segundo eje se refiere a la red de diseño de tareas, que se enfoca en la creación y análisis de actividades centradas en la función logarítmica. Esta red no solo incluye el marco teórico en el cual se soportan las tareas, sino que también considera la visualización y la comunicación al interior del pensamiento algebraico.

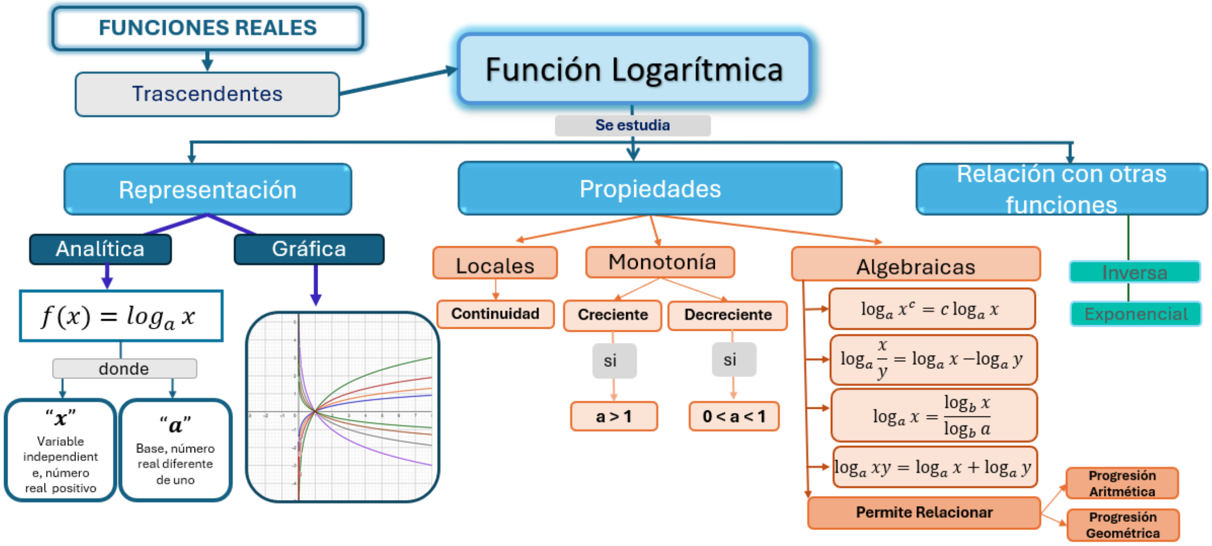
Ambas redes se complementan y proporcionan un enfoque coherente para el estudio de este objeto matemático, desde su estructura conceptual hasta su aplicación didáctica en el aula.

2.1. Red conceptual alrededor de la función logarítmica

En esta sección proponemos el mapa de la red conceptual de la función logarítmica, el cual organiza y visualiza las relaciones entre los distintos conceptos clave que conforman este objeto matemático. Este mapa incluye elementos fundamentales relacionados con el logaritmo, sus propiedades (producto, cociente, potencia, y cambio de base) y con la función logarítmica, su comportamiento (monotonía y asíntotas) conexión con la función exponencial, lo cual proporciona una visión integral de su estructura. La descripción detallada de esta red conceptual busca ofrecer un marco claro y estructurado que sirva tanto para su estudio teórico como para la aplicación en el diseño de tareas pedagógicas, facilitando el aprendizaje de la función logarítmica y su papel en distintos contextos matemáticos.

Figura 2

Objeto matemático alrededor de la función logarítmica.



Nota. Construcción propia.

A continuación, se describen los elementos de la figura 2, los cuales están relacionados con el logaritmo y la función logarítmica. Debido a la naturaleza del trabajo, la descripción se organiza por secciones. La forma en que se presentan los siguientes elementos no constituye la propuesta de cómo presentar las tareas a los estudiantes, más bien, proporciona elementos que en los textos y en el currículo oficial aparecen como aspectos a tratar.

2.1.1. Progresiones

Sucesión infinita: Una sucesión infinita es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales, el rango es el conjunto de los números reales. Spivak (2012).

De manera simbólica está representado de esta manera:

$$\begin{gathered} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ 1 \to a_1 \\ 2 \to a_2 \\ 3 \to a_3 \\ \vdots \\ n \to a_n \\ \vdots \end{gathered}$$

Los elementos del rango se llaman términos de la sucesión, a_n es el n-ésimo término.

Progresión Aritmética: Una sucesión $a_{1,}a_{2,}$ ... a_n ... es una progresión aritmética si existe una constante d (diferencia común) tal que $a_n = a_{n-1} + d$ para $n > 1$

$a_2 = a_2 + d$

$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$

$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$

$a_n = a_n + (n-1) \cdot d$ para $n > 1$

Progresión geométrica: Una sucesión $a_{1,}a_{2,}$ ... a_n ... está es una progresión geométrica si existe una constante r (diferente de 0 llamada razón) tal que $a_n = r \cdot a_{n-1}$ para $n > 1$.

$a_2 = ra_1$
$a_3 = ra_2 = r^2 a_1$
$a_4 = ra_3 = r^3 a_1$

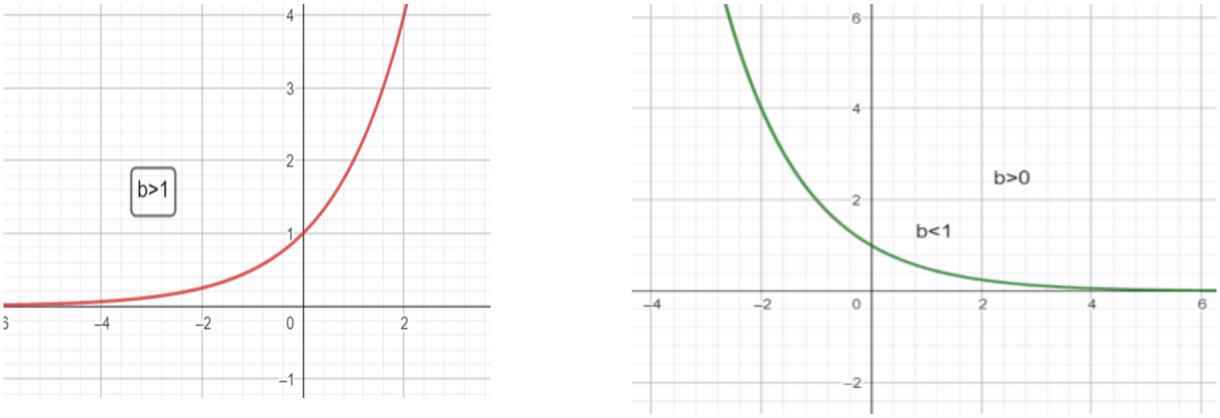
$a_n = r^{n-1}a_1$ para $n > 1$

2.1.2. Función exponencial

La función exponencial se representa mediante la expresión $f(x) = b^x$ donde $b > 0$ y $b \neq 1$, b se llama base. En la función exponencial el dominio es $\mathbb{R}$ y el rango es $\mathbb{R}^+$, (Stewart, 2012).

Figura 3

Función exponencial creciente y decreciente



Nota. Construcción propia con GeoGebra

2.1.3. Función logarítmica como inversa de la función exponencial

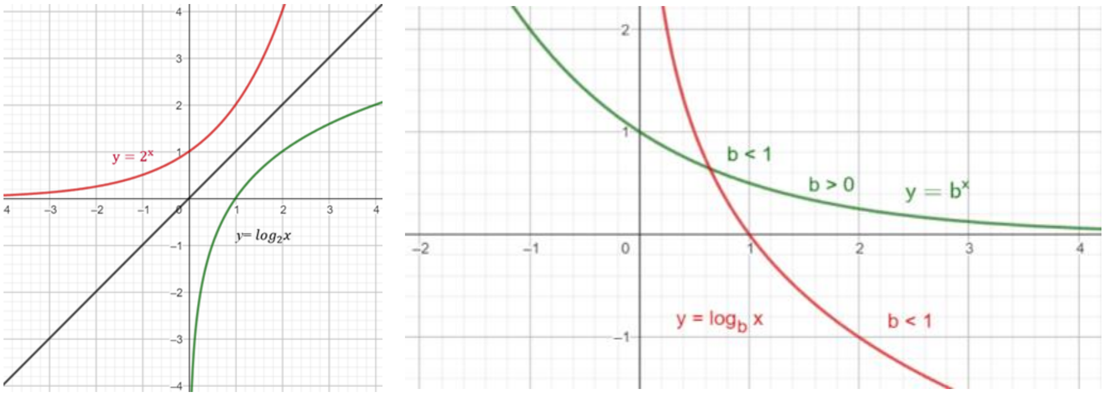
Para la función exponencial $f(x) = b^x$ es decir $f = \{(x, y): y = b^x\}$, la inversa de la función exponencial cumple $f^{-1} = \{(x, y): x = b^y\}$. A esta función inversa se le llama función logarítmica $y = \log_b x$, esta expresión que es equivalente a $x = b^y$ con $b > 0$ y $b \neq 1$. El logaritmo en base b de x es exponente y al que se debe elevar b para obtener x.

Ejemplo, y = $log_2 x$ significa que $2^y = x$, (Stewart, 2012).

A continuación, se presentan gráficas de la función exponencial con base b y de la función logarítmica con base b en las que se ilustra que son funciones inversas.

Figura 4

Función exponencial y función logarítmica.



Nota. Construcción propia con GeoGebra

Como se puede ver en la figura 5, cuando $b > 1$, la función logarítmica es creciente y cuando $b < 1, y$ $b > 0$, función logarítmica es decreciente. Es importante destacar:

- La función logarítmica es una función continua en todo su dominio.
- El dominio de la función logarítmica es el conjunto de los números reales positivos
- El rango de la función logarítmica es el conjunto de los números reales
- El eje y es asíntota.

2.1.4. Propiedades de los logaritmos

Los logaritmos de los números reales positivos cumplen las siguientes propiedades:

- Si $b \neq 1$ y $b > 0$, m y n son reales positivos.

1. Logaritmo de un producto es $\log_b m \cdot n = \log_b m + \log_b n$
2. Logaritmo de un cociente es $\log_b \frac{m}{n} = \log_b m - \log_b n$
3. Logaritmo de una potencia es $log_b x^n = n \cdot \log_b x$
4. Cambio de base: $\log_a m = \frac{\log_b m}{\log_b a}$ es $para\ a, b > 0\ y\ a, b \neq 1$

   (Stewart, 2012).

A continuación, se presenta la demostración de cada propiedad de los logaritmos como usualmente se presenta en cursos de álgebra elemental o precálculo.

Tabla 2

Propiedades del logaritmo.

Logaritmo de un producto	**Logaritmo de una división**
Si **$r = log_b m$, por tanto $b^x = m$** S = **$\log_b n$, por tanto b^s** = n **$\log_b m.n = log_b\ (b^r. b^s)$** **$\log_b m.n = log_b\ b^{(r+s)}$** **$\log_b m.n = r + s$** **$\log_b m.n = \log_b m + \log_b n$**	$r = log_b m$, por tanto, $b^r = m$ S = $\log_b n$, por tanto b^s = n $\log_b m = r; m = b^r$ S = $\log_b n = 1; n = b^s$ $Log_b \frac{m}{n} = Log_b \frac{b^r}{b^s}$ $Log_b \frac{m}{n}$ = $Log_b\ b^{(r-2)}$ $Log_b \frac{m}{n}$ = r – 2 $Log_b \frac{m}{n}$ = Log_b m - Log_b n
Logaritmo de una potencia	**Cambio de base**
$\log_b m = r; m = b^r$ **$S = \log_b n = 1; n = b^s$** **$log_b m^p = \log_b(b^r)^p$** **$log_b m^p = \log_b b^{r.p}$**	Sean $m, a, b > 0\ a, b \neq 1$. $log_b\ m = \frac{log_a \text{m}}{log_a \text{b}}$ $r = \log_b m$ $m = b^r$

$\boldsymbol{log_b\, m^p = r.p}$	$\log_a m = log_a b^r$
$\boldsymbol{log_b\, m^p = p.\log_b m}$	$\log_a m = r.\log_a b$
	Por tanto,
	$r = \frac{\log_a m}{\log_a b}$
	Es decir;
	$\log_b m = \frac{\log_a m}{\log_a b}$

Nota: Construcción propia

2.1.5 Definición de la función logarítmica

Al examinar la equivalencia entre la función logarítmica $y = \log_b x$ y $x = b^y$ con $b > 0$ y $b \neq 1$, surge la pregunta acerca del conjunto al que pertenecen los valores de *y*, es decir, cómo garantizar que el rango de la función logarítmica es el conjunto de los números reales. Para tal efecto, es posible definir la función logaritmo de la siguiente manera, como lo plantea Gacharná (2012):

A la función $log: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ se le llama función logarítmica si cumple:

i) La función log es creciente, es decir que dados $m, n \in \mathbb{R}^+$, con $a < b$, se tiene que $\log(m) < \log(n)$.

ii) Dados $a, b \in \mathbb{R}^+$ se tiene que $\log(mn) = \log(m) + \log(n)$

A partir de esta definición, a manera de ilustración, se presentan las siguientes propiedades:

i) log1=0, De acuerdo con la definición $\log(1 \cdot 1) = \log(1) \cdot \log(1) \log(1)$, es decir $\log(1) = 2\log(1)$, lo cual implica que $\log(1) = 0$

ii) Para todo $n > 0$, se cumple que $\log\left(\frac{1}{n}\right) = -\log(n)$

Puesto que $n\frac{1}{n} = 1$, se tiene que $\log\left(n\frac{1}{n}\right) = \log(n) + \log\left(\frac{1}{n}\right) = Log(1) = 0$,

por tanto, que $\log\left(\frac{1}{n}\right) = -\ \log(n)$

iii) Dados $a, b \in \mathbb{R}^{+}$ se tiene que $\log\frac{m}{n}$ = log(m) - log(n)

$\log\frac{m}{n} = \log\left(m\frac{1}{n}\right) = \log(m) +\ \log\frac{1}{m} = \log(m) - \log(n)$.

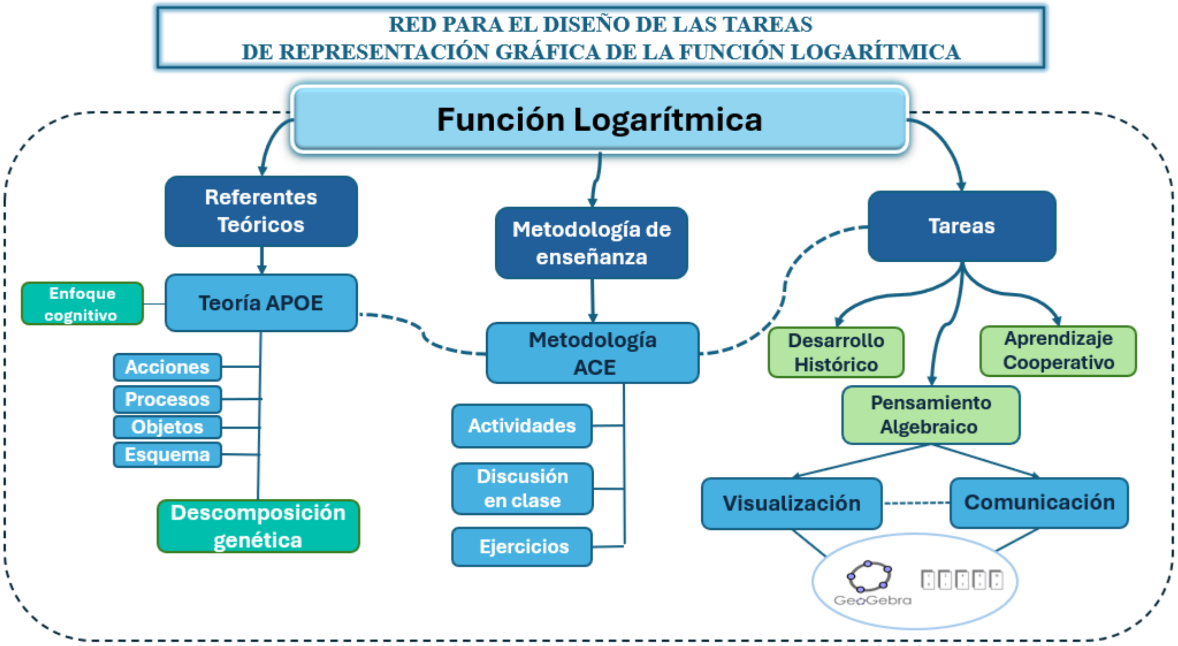
2.2. Red para el diseño de tareas de representación gráfica de la función logarítmica

En este apartado, se presenta la red concerniente a la función logarítmica, para el diseño de tareas que se desarrolla en este trabajo de grado. Las tareas diseñadas abarcan una variedad de actividades, que involucran acciones y procesos mentales desde la división repetida, para darle significado a la operación logarítmica, incluidas la representación gráfica y la manipulación algebraica, hasta la resolución de problemas contextualizados que requieren el uso de propiedades de los logaritmos.

El diseño de estas tareas toma en cuenta las estructuras mentales y se basa en una metodología que integra actividades, discusiones en clase y ejercicios para la casa, todos orientados a fomentar la visualización y la comunicación matemática. Para ello, se emplean recursos manipulativos y herramientas tecnológicas como GeoGebra, con el fin de facilitar la identificación de las propiedades de las funciones logarítmicas y enriquecer el proceso de aprendizaje.

Figura 5

Red para el diseño de tarea.



Nota. Construcción propia.

2.3. Descripción de la red de diseño de tareas de las funciones logarítmicas

A continuación, se describe la red diseño de tareas para las funciones logarítmicas, que tiene como referente teórico a Teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas), esta teoría tiene una herramienta central que es la descomposición genética del concepto.

En el diseño del ciclo de enseñanza ACE (actividades, clase, ejercicios) que se pone en juego, están propuestos momentos de actividades orientadas a que los estudiantes experimenten y exploren las propiedades del logaritmo y de la función logarítmica mediante recurso manipulativo y la herramienta como GeoGebra, tendientes a propiciar estructuras mentales y mecanismos de construcción que se establecen en la descomposición genética del concepto.

2.4. Teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema)

Para el desarrollo de las tareas de representación gráfica de la función logarítmica en este trabajo de grado se utilizará la Teoría APOE, propuesta por Dubinsky (2000), que es una teoría que se desarrolla en torno a la construcción cognitiva de conceptos a partir de los trabajos de Jean Piaget.

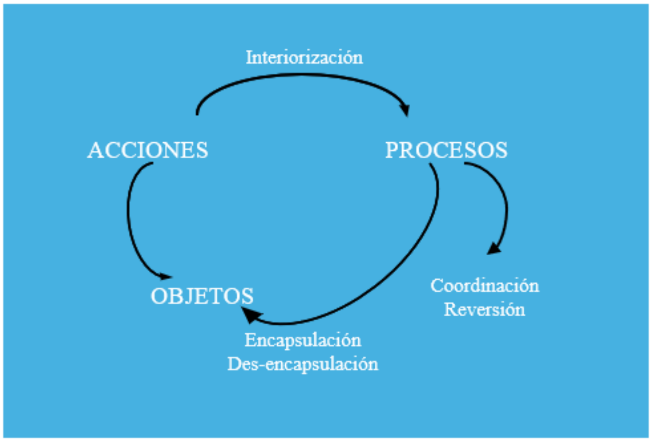
La teoría APOE describe el aprendizaje en términos de estructuras mentales como las acciones, procesos, objetos y esquemas. Esta teoría también explica la comprensión de los conceptos en el aula de matemáticas a través de mecanismos de construcción y tiene como herramienta principal lo que denomina la descomposición genética de un concepto.

Los mecanismos de construcción son retomados desde lo que Piaget denomina la abstracción reflexiva. Así, en el camino de construcción de los conceptos se puede favorecer la reflexión sobre acciones que permitirá el mecanismo de interiorización y la comprensión por medio de la estructura mental llamada proceso. Mientras que, las coordinaciones son formas de reflexionar sobre procesos y pueden llevar a nuevos procesos o también esa estructura mental dinámica denominada proceso se puede encapsular como algo estático, en este caso se está frente a la estructura llamada objeto.

El vínculo entre estos elementos de la teoría se observa en la siguiente figura que organiza cómo las acciones son interiorizadas en procesos y los procesos son coordinados en nuevos procesos, revertidos o encapsulados en objetos.

Figura 6

Acciones, procesos, objetos y esquemas en la Teoría APOE.



Nota: Construcción propia a partir de Arnon, et al. (2014, p.18).

2.4.1. Estructuras mentales y mecanismos de construcción

En esta sección referenciamos al proceso mediante el cual los estudiantes desarrollan su compresión matemática a través de la interacción activa con acciones, objetos y procesos matemáticos. En esta teoría, la interiorización es el mecanismo que permite formar procesos a partir de la manipulación de objetos mentales o físicos que han generado acciones. Mientras que, la encapsulación parte de procesos para formar objetos mentales. Por su parte, el mecanismo de coordinación entre procesos que puede generar nuevos procesos mentales. Se conoce como mecanismo de desencapsulación cuando los objetos se retornan hacia el proceso desde el cual se construyeron. (Vargas 2013).

Dubinsky (2000, citado en Vargas, 2013) menciona que:

> los objetos y esquemas son estructuras mentales que, según esta teoría, un individuo realiza para obtener significados de las situaciones y de los

> problemas matemáticos. Los mecanismos para hacer dichas construcciones se llaman abstracciones reflexivas e incluyen la repetición, la interiorización, la encapsulación, la desencapsulación, la coordinación, la inversión. (p. 41).

2.4.2. Sobre la propuesta de descomposición genética de las funciones logarítmicas

Una descomposición genética, según Trigueros y Oktaç (2019), "es un modelo epistemológico hipotético que describe las estructuras y mecanismos involucrados en la construcción de un concepto o tema matemático" (p. 45). Este modelo resulta especialmente útil para la enseñanza, ya que permite a los educadores identificar las habilidades y conocimientos previos que los estudiantes deben tener para abordar un nuevo concepto, además, orienta el camino que el estudiante debe seguir para comprender un concepto matemático de manera progresiva.

A continuación, presentamos los aspectos que se tuvieron en cuenta para elaborar una descomposición genética de las funciones logarítmicas; se tomó como punto de partida el vínculo entre las progresiones aritméticas y geométricas, una síntesis de antecedentes encontrados en la investigación sobre la comprensión de los estudiantes y los conocimientos que poseemos como profesores. Adicionalmente, esta descomposición se establece a partir de los elementos matemáticos del concepto que enumeramos a continuación y de los sistemas de representación del concepto (Vargas, 2017).

Compartimos con Vargas (2013) la comprensión de elemento matemático, como "el producto de una disociación o de una segregación del concepto vinculada al concepto y a sus propiedades" (Piaget, 1963, citado por Vargas, 2013). Dicha autora caracteriza los elementos matemáticos del concepto función logarítmica en dos grupos, atendiendo a la idea de Sánchez-Matamoros (2004, citado por Vargas, 2017), uno global y el otro puntual.

El grupo de elementos matemáticos global hace referencia a dos de los tres elementos matemáticos que son citados en Vargas (2020, p. 257)

- Funciones logarítmicas particulares, como por ejemplo las funciones con base determinada, $f(x) = \log_2 x\,; f(x) = \log_{10} x$
- La función logarítmica genérica $f(x) = log_b x$

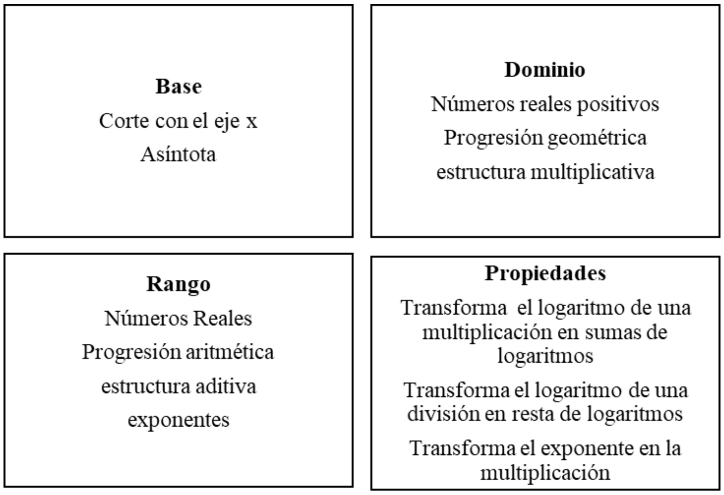
Tendremos entonces en cuenta, a partir de Vargas (2013), que el estudio de las funciones logarítmicas les permite a los estudiantes realizar inferencias hacia toda una familia de funciones que, en nuestro caso, son tratadas como una manera de potenciar un *proceso mental.* (Vargas, J., Comunicación personal, mayo, 23, 2024)

Así, el elemento matemático, funciones logarítmicas particulares, tendrá en este trabajo el papel de una función logarítmica específica en la estructura de proceso, mientras que, al hacer mención del elemento matemático, función logarítmica genérica, nos referimos a la función logarítmica general (Vargas et al, 2020).

Además de esta consideración de los elementos matemáticos globales, en Vargas (2013), "se ha disociado el concepto de función exponencial en otros elementos denominados puntuales que representamos en la figura 1. Estos elementos forman parte de todas las funciones logarítmicas y por lo tanto están presentes en todos los elementos globales" (p. 69).

Figura 7

Elementos matemáticos puntuales de la función logarítmica.



Base
Corte con el eje x
Asíntota

Dominio
Números reales positivos
Progresión geométrica
estructura multiplicativa

Rango
Números Reales
Progresión aritmética
estructura aditiva
exponentes

Propiedades
Transforma el logaritmo de una multiplicación en sumas de logaritmos
Transforma el logaritmo de una división en resta de logaritmos
Transforma el exponente en la multiplicación

Nota: Adaptado de Vargas, et. al (2020).

Los elementos matemáticos que se llaman puntuales se han obtenido, de varias fuentes. Una de ellas es el estudio realizado de las funciones logarítmicas en su desarrollo histórico epistemológico (Vargas y González, 2007). Así, el estudio de aspectos del desarrollo histórico nos permite conocer aspectos como:

> … el cambio de enfoque de la generación de esta función, que comienza en el siglo XVIII, al escindir dos funciones que hasta entonces eran la misma; las funciones exponenciales y las logarítmicas, una inversa de la otra. Por otro lado, nos centramos en recuperar algunas consideraciones de índole geométrica en cuanto a la relación entre progresiones geométricas

> y aritméticas, relación que está en la génesis de la noción de logaritmo. (Vargas, 2017, p. 69)

Consideramos de gran importancia exponer que, atendiendo a las investigaciones que concluyen o inician con las dificultades que genera en los estudiantes el aprendizaje de la función logarítmica como la inversa de la función exponencial, en esta propuesta buscamos caracterizar a esta función sin atender a su inversa. Por ello, el primer acercamiento del logaritmo se realizará atendiendo a Vargas et al. (2022), en donde se inicia con lo que denominan los autores, el modelo básico. Por lo tanto, la existencia del logaritmo se puede entender como una acción de dividir, de forma reiterada, un número natural entre una misma cantidad (base), considerando la necesidad de simplificar tanto la notación como la estructura aritmética y algebraica.

Con base a lo expuesto, siguiendo a Vargas (2013), describimos cada uno de los mecanismos de construcción en dos registros de representación: el simbólico y el gráfico. Tomamos en cuenta los componentes aritméticos, algebraicos y analíticos en el ámbito simbólico, mientras que los elementos geométricos y las representaciones en el plano cartesiano incluyendo el registro gráfico.

Establecemos unos prerrequisitos, enseguida se pasa a describir las acciones para la comprensión de operación logaritmo, para posteriormente exponer el mecanismo de interiorización en dos grupos de registros de representación: el simbólico y el gráfico. Estos prerrequisitos se concretan en:

- Representación gráfica de objetos matemáticos; puntos, rectas y curvas en un sistema de coordenadas cartesianas.
- La función como proceso mental.
- La noción de exponente no natural como una convención matemática.
- Propiedades de los exponentes.
- Identificación de dominio y rango en funciones lineales.
- Análisis de monotonía de las funciones.
- Funciones lineales crecientes y decrecientes, graficas de funciones cuadráticas.
- Continuidad de la función.

2.5. Propuesta de descomposición genética preliminar para las funciones logarítmicas

A continuación, utilizando la estructura y algunas de las expresiones de Vargas (2013), exponemos la descomposición genética preliminar propuesta en la que describimos las estructuras mentales que los estudiantes deben realizar para comprender este objeto matemático. (Vargas, J., Comunicación personal, mayo, 23, 2024).

2.5.1. El logaritmo como operación

- Acción de dividir un número natural (argumento) de manera reiterada entre una misma cantidad (base).
- Acción de representar mediante la notación de logaritmo, considerando la necesidad de simplificar la escritura y la estructura aritmética y algebraica.
- Acción de reconocer las propiedades del logaritmo por medio de progresiones aritmética y geométrica.

- Acción de examinar regularidades de sucesiones numéricas a través de la diferencia y el cociente para establecer las razones.

2.5.2. Elemento matemático funciones logarítmicas particulares

2.5.2.1. Acciones

A. Simbólico

- Acción de calcular, sustituyendo numéricamente, en la expresión de una función logarítmica con una base dada.
- Acción de comparar diferencias y cocientes de dos valores consecutivos de la variable independiente y dependiente respectivamente.
- Acción de visualizar las variaciones de la función dependiente del cambio que se establece en las bases.

B. Gráfico

- Acción de ubicar en el plano cartesiano puntos correspondientes a parejas de coordenadas donde el argumento corresponde a *x* y el logaritmo a *y*.
- Acción de visualizar las progresiones geométrica y aritmética en los valores enteros ubicados en la variable independiente y dependiente.
- Acción de examinar cuando los valores de *x* se aproximan a cero qué pasa con la gráfica de la función.
- Acción de visualizar el punto de corte de cada gráfica de la función logarítmica con el eje *x*.

2.5.2.2. Procesos

“El mecanismo de **interiorización** es la construcción mental de una forma de conocer como un proceso una serie de acciones sobre objetos cognitivos, es decir, las formas de conocer como acciones se interiorizan en procesos”. (Vargas, 2013. p . 74).

A. Simbólico

- Interiorización de comparar el comportamiento de la función de acuerdo con su cambio de base.
- Interiorización de las acciones de comparación de diferencias y cocientes de dos valores de la variable dependiente e independiente respectivamente, para buscar las relaciones entre ellas $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$.
- Interiorización de las acciones de examinar los valores de la función cuando los valores de *x* se aproximan a cero.
- Interiorización de acciones de comparar el comportamiento de las funciones de acuerdo con sus bases; crecientes y decrecientes.

B. Gráfico

- Interiorización de las acciones de ubicar diferentes puntos en la curva función logarítmica en el proceso de construcción de la gráfica de la función sin recurrir a realizar las acciones de remplazar en la fórmula diversos valores. (Vargas, 2013)

2.5.3. Del elemento matemático funciones logarítmicas particulares a la coordinación entre familias de funciones

El mecanismo de **coordinación** es la transformación mental de un proceso dinámico en nuevos procesos mentales. En este caso, se busca que, de la comparación entre diferentes funciones logarítmicas, recurriendo a los diferentes sistemas de representación, la coordinación cognitiva enriquezca la construcción del proceso mental, función logarítmica, con nuevas regularidades.

- Comparación gráfica entre diferentes funciones logarítmicas para identificar su monotonía; crecimiento o decrecimiento según su base.
- Comparación de curvas logarítmica para establecer el eje *y* como asíntota, el corte de la función con el eje *x*, el dominio y el rango de las funciones logarítmica. (Vargas, 2013)
- Comparación de la familia de funciones logarítmicas para caracterizar la rapidez de cambio de acuerdo con su base.

Así, nuestra propuesta de descomposición genética preliminar para las funciones logarítmica abarca acciones, el mecanismo de interiorización y el mecanismo de coordinación entre procesos.

2.5.4. De la coordinación entre familias de funciones a la encapsulación de la función logarítmica como un objeto

Incluso cuando no tratamos el mecanismo de encapsulación en nuestra propuesta, consideramos que los procesos de construcción descritos proporcionan un camino para el objeto función logarítmica y su representación gráfica o representación simbólica $f(x) = \log_b x$ con $b > 1$ y $b \neq 1$, estableciendo el dominio en los números reales positivos y el rango en el conjunto de los números reales, identificando como asíntota al eje y. Se caracteriza a través del mecanismo de encapsulación una función logarítmica creciente para $b > 1$ y decreciente para $0 < b < 1$, tiene una raíz para $x = 1$.

2.6. Acercamiento a algunos criterios alrededor de tareas

En este trabajo, entendemos las tareas como las propuestas del profesor (problema, investigación, ejercicio, etc.) dirigidas a los estudiantes, las cuales sirven como fundamento para la actividad del estudiante y, a su vez, dan lugar a su aprendizaje.

En los últimos años, ha crecido el interés en el campo de la Educación Matemática respecto al diseño de tareas, ya que se considera un elemento importante para lograr una enseñanza efectiva. Ejemplos de ello se encuentran en los trabajos de Johnston-Wilder y Mason (2004), así como Zaslavsky y Sullivan (2011), resaltan que las tareas deben ir más allá de simplemente resolver problema; deben desafiar a los estudiantes de manera equilibrada, proporcionando múltiples puntos de entrada para adaptarse a diferentes niveles y habilidades. Esto permite a los estudiantes descubrir y construir un significado matemático más profundo, por lo que proponemos diseñar tareas en las que los estudiantes exploren, grafiquen y analicen los resultados, para luego comunicar el proceso y sus conclusiones.

De esta manera, es importante explorar cómo el software GeoGebra puede complementar la enseñanza de las matemáticas, debido a que las herramientas educativas han ido avanzando para facilitar el aprendizaje y superar las dificultades que los estudiantes enfrentan, especialmente al abordar temas como la función logarítmica.

Lucas y Aray (2023) mencionan que el recurso de GeoGebra se puede integrar en el aula como una herramienta de enseñanza aprendizaje, mediante la creación, representación de gráficos y modelos matemáticos que ayudan al estudiante a comprender conceptos abstractos. GeoGebra se puede emplear como una herramienta de evaluación al permitir la creación de cuestionarios o exámenes interactivos, así como para evidenciar la comprensión de conceptos matemáticos a través de la manipulación de elementos gráficos o la resolución de ejercicios. Este software ofrece a los estudiantes la posibilidad de desarrollar su propio aprendizaje al explorar y descubrir por sí mismos las funciones que posee y su aplicación en diversos temas matemáticos.

Para el diseño de las tareas impulsamos la utilización del Software GeoGebra que es una tecnología digital adecuada para nuestra propuesta. Castro y Forero (2019) menciona las bondades que tiene esta herramienta y “se resaltan dado que es un programa de matemáticas para todo nivel educativo, es un software de código abierto de carácter libre y disponible para usos no comerciales, reúne gráfica y dinámicamente aspectos de geometría, álgebra, estadística y cálculo” (p. 36).

A continuación, presentamos los siguientes criterios, adaptados de Pochulu et al. (2013), para el diseño de nuestras tareas:

- El diseño de la tarea debe ser abierta y exploratoria, permitiendo múltiples caminos de construcción. Los estudiantes explorarán diversas estrategias para resolver la tarea, comparando y conectando diferentes construcciones. Deberán justificar sus elecciones y argumentar por qué un camino puede ser más efectivo o adecuado que otro.
- La tarea no debe brindar sugerencias de caminos o resultados específicos. Los estudiantes deberán formular sus propias conjeturas y diseñar estrategias para abordar la tarea sin indicaciones directas. Esto promoverá el desarrollo de habilidades de investigación y descubrimiento autónomo.
- La tarea no debe estar excesivamente pautada para fomentar la formulación de conjeturas y validación. Se espera que los estudiantes generen y prueben hipótesis a lo largo del proceso de resolución. Deberán realizar un análisis crítico de cada paso, identificando problemas intermedios y resolviéndolos como parte de un proceso más amplio.
- Evitar proporcionar información que asegure la existencia o unicidad de la solución. Los estudiantes deberán enfrentar la incertidumbre y considerar múltiples posibles soluciones, lo que les permitirá desarrollar habilidades en la evaluación de diferentes resultados y en la argumentación para respaldar una solución particular.
- El uso de nuevos recursos debe ser necesario para resolver la tarea. Los estudiantes utilizarán herramientas tecnológicas como GeoGebra para crear gráficos, figuras o cálculos que no serían posibles sin la tecnología. Deberán aplicar estas herramientas de manera creativa y reflexiva para superar los desafíos propuestos.

- La tarea debe centrarse en objetivos matemáticos, no en el uso de software. Los estudiantes deben enfocarse en el razonamiento matemático detrás de las tareas manifestando en sus construcciones y soluciones, usando el software como un medio para explorar conceptos matemáticos.

Para el alcance de nuestra propuesta, es importante tener presente que en el ciclo ACE que expondremos más adelante se hace referencia a actividades, las cuales conforman las tareas.

2.7. Pensamiento algebraico: visualización y comunicación

Dada la importancia que a la representación gráfica se le concede en este trabajo, es importante presentar qué se entiende por visualización y por comunicación.

Según Duval (1999), citado por Bonilla et al. (2002), la visualización es la representación semiótica de un objeto, es decir, una organización bidimensional de relaciones entre ciertos tipos de unidades que permite identificar secuencias que, de otro modo, podrían no ser evidentes. Sin embargo, se diferencia de la visión, ya que esta última se refiere a la percepción directa de un objeto espacial. La percepción visual requiere de exploración mediante movimientos físicos, ya sea del sujeto que observa o del objeto observado, debido a que nunca proporciona una comprensión completa del objeto.

En cuanto a la comunicación, nos basamos en Jiménez et al. (2010) quienes exponen que la comunicación es un proceso de interacción social en el que se favorecen la negociación de significados, el consenso, el diálogo y el debate. Este proceso es esencial para el desarrollo del pensamiento matemático, ya que permite a los estudiantes y al profesor intercambiar ideas, argumentar y construir significados de manera conjunta. También señalan que la comunicación en el aula de matemáticas no debe ser vista simplemente como la transmisión de un lenguaje simbólico del profesor a los estudiantes, donde estos últimos son solo receptores. En cambio, se enfatiza que la comunicación debe ser un proceso activo de interacción, donde los estudiantes participan activamente en la construcción de su conocimiento a través de la discusión y la confrontación de ideas.

La comunicación en la clase de matemáticas es importante para el proceso de enseñanza y aprendizaje, ya que muchas de las dificultades que enfrentan los estudiantes están relacionadas con problemas comunicativos. Además, como profesoras debemos dar oportunidades a los estudiantes para que expresen sus ideas oralmente, por escrito y a través de representaciones visuales, de manera que se fomente la discusión y el trabajo en equipo, donde los estudiantes puedan compartir y construir el significado de los símbolos y gráficos utilizados en las matemáticas.

Capítulo 3. Aspectos metodológicos

En este capítulo, abordamos los aspectos metodológicos relacionados con el diseño y desarrollo del ciclo de innovación educativa que implementaremos en instituciones educativas de Paraguay. Nuestro trabajo se enmarca en un enfoque cognitivo y de aprendizaje cooperativo, con el objetivo de que los estudiantes comprendan la función logarítmica y construyan estructuras mentales mediante la realización de tareas, siguiendo la teoría APOE y el ciclo ACE.

3.1. Análisis teórico

Para aplicar la teoría APOE en un diseño de actividades que permitan, en esta propuesta de innovación, potenciar las estructuras mentales de los estudiantes, se requiriere de un modelo teórico que es conocido como la descomposición genética.

Con el interés de apropiarnos de una descomposición genética, en este trabajo de grado, se estudiaron algunas propuestas de investigadores relativas al “modelo hipotético que describe las estructura y mecanismos mentales que un estudiante puede necesitar para construir un concepto matemático específico” (Arnon et al., 2014, p.27). Para el desarrollo del trabajo, se estudió la descomposición genética de la función exponencial propuesta por Vargas (2013), basada en investigaciones dirigidas a distintos niveles de escolaridad.

Para la elaboración, de la descomposición genética preliminar que se presenta se tuvo en cuenta a Vargas (2013) y a Vargas et. al. (2020) en cuanto a identificar lo que se denomina elementos matemáticos del concepto. Se retoma el análisis teórico preliminar del concepto, resaltando los aspectos del desarrollo histórico del logaritmo y la función logarítmica, junto con las descripciones matemáticas del concepto y lo que se reportan en los antecedentes del aprendizaje de este concepto. Se cierra el diseño de la primera fase del trabajo de grado con la estructura de la descomposición genética preliminar que permite avanzar al diseño de la tarea.

3.2. Diseño de la enseñanza

La teoría APOE presenta una estrategia pedagógica llamada el ciclo ACE, el cual tiene actividades que se diseñan con base en la descomposición genética preliminar del concepto, para la implementación posterior en el aula. Las tareas en este trabajo de grado buscan potenciar estructuras mentales tales como acciones y los procesos, junto con los mecanismos de interiorización de las acciones y la coordinación de procesos.

Como ya se mencionó, nuestro diseño de tareas encaminado tanto a la enseñanza como al aprendizaje se fundamenta en el ciclo ACE (activities, classroom discussion, exercises) propuesto por la teoría APOE para la organización del trabajo cooperativo en el aula. El ciclo ACE es una metodología de enseñanza basada en la descomposición genética de un concepto matemático y se considera constituido por (A) actividades, (C) discusión en clase y (E) ejercicios. Las tareas que se presentan en esta propuesta incluirán este ciclo ACE, por lo tanto, en su estructura general se encontrarán estos tres.

Actividades: es el primer componente del ciclo, en el que los estudiantes colaboran en equipos, realizando tareas diseñadas que ayudarán a potenciar las construcciones propuestas en la descomposición genética (Arnon et al., 2014). Estas tareas se centran, principalmente, en fomentar una abstracción reflexiva en lugar de enfocarse en obtener respuestas correctas.

Discusión en clase: en la propuesta de tareas este componente se centrará en la organización de pequeños grupos de trabajo, en los cuales el maestro dirige las discusiones. Estas interacciones y actividades en clase brindan a los estudiantes la oportunidad de reflexionar sobre lo que han realizado, particularmente en actividades como el uso de tablas y construcciones en GeoGebra. Esperamos que, en este espacio, se consoliden diversas coordinaciones entre procesos que den lugar a nuevos procesos mentales. En esta fase, el profesor, como facilitador de la discusión, puede ofrecer definiciones, proporcionar explicaciones o establecer conexiones entre lo que los estudiantes están pensando y lo que están trabajando (Arnon et al., 2014).

Ejercicios: esta tercera fase del ciclo de la propuesta a aplicar se compone de problemas diseñados específicamente para consolidar las actividades realizadas en la computadora y las discusiones en clase. Estos ejercicios contribuyen al desarrollo continuo de las construcciones mentales propuestas en la descomposición genética. Además, permiten a los estudiantes aplicar los conocimientos adquiridos y considerar conceptos matemáticos relacionados (Arnon et al., 2014)

Es importante tener presente que las actividades y las discusiones en clase se deben retroalimentar entre sí, de modo que las primeras sean la componente principal de las discusiones y ellas a su vez son detonantes de reflexiones de los estudiantes sobre lo hecho en las actividades. Los ejercicios son coherentes tanto con las actividades como con las discusiones.

Los estudiantes realizarán las actividades diseñadas en la propuesta de enseñanza (A), abordarán preguntas, en grupos reducidos, que pretenden generar interés y discusiones (C), la profesora las orientará con la intención de favorecer la construcción de nuevo conocimiento. Para apoyar y fortalecer las nuevas construcciones se entregarán a los estudiantes otras tareas (E), algunas para realizar fuera del tiempo de clase, las cuales se propone sean retomadas en el siguiente encuentro con el grupo (Arnon et al., 2014).

En el marco de esta propuesta de innovación educativa, la implementación se llevará a cabo en Paraguay. Este contexto particular permitirá adaptar las tareas a las necesidades y realidades del sistema educativo paraguayo, favoreciendo el desarrollo de competencias científicas y críticas en los estudiantes, en línea con los objetivos generales de la educación nacional paraguaya.

3.3. Instrumentos y su implementación

Los instrumentos usados en este trabajo incluyen tanto las tareas diseñadas para la instrucción como las rúbricas elaboradas para monitorear la participación y evaluar las respuestas escritas de los estudiantes en distintos momentos de la implementación. A continuación, presentamos el esquema general de dichas tareas.

Tabla 3

Estructura de tarea.

<table>
<tr><th colspan="5">Descripción general de las actividades</th></tr>
<tr><td colspan="3">Objetivo</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="3">Recursos</td><td></td><td>Tiempo</td></tr>
<tr><td colspan="3">Descripción de la tarea</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="4">Actividades</td><td>Respuesta esperada</td></tr>
<tr><td>M</td><td>N°</td><td colspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="5">Aspectos para considerar</td></tr>
<tr><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td colspan="5">Criterios para evaluar: Rúbrica</td></tr>
<tr><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td colspan="5">Observación</td></tr>
<tr><td colspan="5"></td></tr>
</table>

Nota. Construcción propia.

En el apartado del objetivo, definimos qué esperamos que los estudiantes construyan en la respectiva tarea, en consonancia con el tiempo establecido y con los recursos. También incluimos una descripción que permite al profesor y estudiante tener claridad acerca de lo que se busca.

En el diseño de las tareas a desarrollar, presentamos las actividades propuestas para los estudiantes, las cuales consisten en una serie de preguntas orientadas a facilitar la discusión, complementadas con ejercicios que amplían las actividades y están alineadas con los objetivos establecidos. Es fundamental considerar la variación en el nivel de dificultad para atender la diversidad de los estudiantes, respetando sus diferentes ritmos de aprendizaje. Además, se incluyen pautas para la evaluación de las tareas, así como momentos de reflexión en los que los estudiantes puedan revisar y consolidar lo aprendido.

En el apartado de aspectos a considerar, indicamos los conocimientos previos que esperamos que los estudiantes tengan, y en la sección de observaciones, ofrecemos recomendaciones para el profesor. Sugerimos que el docente observe las interacciones de los estudiantes con las tareas, prestando especial atención a las estrategias que utilizan, así como a las dificultades que puedan surgir. Esta observación permitirá ajustes en la dinámica de la clase y brindará oportunidades para intervenciones pedagógicas oportunas. Las tareas que se proponen se describen de manera general en la tabla 4.

Tabla 4

Tareas acerca del logaritmo y de la función logarítmica.

NÚMERO	TAREA	OBJETIVO	RECURSO
1	Logaritmo como división repetida	Construir el concepto de logaritmo a través de división repetida e identificar su notación.	Contexto de la división como resta repetida Lápiz y papel
2	Examinando propiedades del logaritmo	Reconocer las propiedades del logaritmo a partir del trabajo con material concreto.	Material manipulativo estructurado. Fichas tipo dominó
3	Relación de la progresión aritmética y la progresión geométrica con la función logarítmica	Relacionar la progresión aritmética y la geométrica con la función logarítmica, para comprender cómo se forman los pares ordenados de la función logarítmica.	GeoGebra
4	Regularidades de la función logarítmica	Identificar y comprender las regularidades en la función logarítmica y sus familias.	GeoGebra
5	Dos aplicaciones de la función logarítmica	Aplicar lo estudiado en tareas anteriores para caracterizar funciones logarítmicas cuya base está entre 0 y 1 y para estudiar una situación práctica.	GeoGebra Lápiz y papel

Nota. Construcción propia.

En línea con el ciclo de enseñanza ACE y el diseño propuesto, realizamos un análisis que explora la conexión entre las tareas y la descomposición genética de las funciones logarítmicas.

Como ejemplo, presentamos la estructura de la tarea 3 para ilustrar dicha conexión.

En esta tarea, conectamos la operación logaritmo con la función logarítmica para que los estudiantes puedan comprender cómo las propiedades del logaritmo se reflejan en la función y viceversa.

Tabla 5

Estructura de la tarea 3

Elemento matemático	**Sistema de representación**	**Estructuras y mecanismos mentales**	
El logaritmo como operación	Simbólico	Acción de reconocer las propiedades del logaritmo por medio de progresiones aritmética y geométrica	Reconocer las propiedades del logaritmo por medio de progresiones aritmética y geométrica tomando en cuenta la razón de la progresión geométrica y la diferencia de la progresión aritmética.
Funciones logarítmicas particulares	Simbólico	Acción de comparación de diferencias y cocientes de dos valores consecutivos de la variable independiente y dependiente respectivamente.	
Funciones logarítmicas particulares	Gráfico	Acción de ubicar en el plano cartesiano puntos correspondientes a parejas de coordenadas donde el argumento corresponde a x y el logaritmo a y	Establecer relaciones entre las coordenadas de algunos puntos del plano cartesiano que pertenecen a la gráfica de la función logaritmo con los términos de las progresiones aritmética y geométrica.
Funciones logarítmicas particulares	Gráfico	Acción de visualizar las progresiones geométrica y aritmética en los valores enteros ubicados en la variable independiente y dependiente	
Funciones logarítmicas particulares	Gráfico	Interiorización de las acciones de ubicar diferentes puntos en la curva función logarítmica en el proceso de construcción de la gráfica de la función sin recurrir a realizar las acciones de remplazar en la fórmula diversos valores	Ubicar diferentes puntos en la curva función logarítmica en el proceso de construcción de la gráfica de la función sin recurrir a realizar las acciones de reemplazar en la fórmula diversos valores.

Nota. Construcción propia

Tabla 6

Estructura de la rúbrica, ejemplo de la clase 3.

Excelente	Muy bueno	Bueno	Insuficiente
Generaliza las propiedades del logaritmo a partir de la tabla construida por medio de las progresiones y utiliza la gráfica para avanzar hacia los logaritmos de los números reales.	Generaliza las propiedades del logaritmo a partir de la tabla construida por medio de las progresiones, sin embargo, no establece relaciones de la gráfica para los números reales.	Describe las observaciones a partir de las tablas y establece que los puntos de la gráfica son los que aparecen en las tablas de las progresiones.	Sus inferencias a partir de las tablas no son completas en relación con las propiedades o no establece relación entre la gráfica y los datos obtenidos para los logaritmos.

Nota. Construcción propia.

Los análisis de datos derivados de la instrucción, tareas y rúbrica de evaluación respaldarán las estructuras y mecanismos mentales que fueron considerados en la descomposición genética preliminar. La evidencia empírica mostrará qué modificaciones se deben realizar a la descomposición genética preliminar de las funciones logarítmicas que fue propuesta y, adicionalmente, permitirá establecer qué tareas se deben modificar para potenciar las estructuras y los mecanismos mentales que se plantearon.

Esperamos, al final del ciclo metodológico, que un paso posterior a la implementación de la propuesta sea el análisis de los datos que permitan esbozar una descomposición genética refinada.

Capítulo 4. Presentación del diseño de tareas

En este capítulo, describimos el diseño de las cinco tareas destinadas a la exploración y estudio del concepto de logaritmo y función logarítmica. La primera tarea utiliza la división repetida como un camino intuitivo y familiar para comprender el significado del logaritmo en los números naturales sin recurrir a su operación inversa, la potenciación. La segunda tarea, propone la utilización de fichas como recurso didáctico para identificar y relacionar las progresiones aritméticas y geométricas con el logaritmo. En la tercera tarea, utilizando GeoGebra, se analizan las características de los pares ordenados cuyas componentes son números naturales con el fin de identificar las propiedades de los logaritmos, a su vez se explora la conexión entre la progresión aritmética, la progresión geométrica y la función logarítmica en el conjunto de los números reales, en cuya gráfica están contenidos los puntos correspondientes a las parejas en los números naturales, proporcionando una perspectiva dinámica y relacional de estos conceptos.

La cuarta tarea se centra en el análisis de la función logarítmica, permitiendo a los estudiantes reconocer las regularidades de la función. Finalmente, la última tarea favorece ampliar el estudio para bases entre 0 y 1 y el análisis de una aplicación de la función logarítmica en el contexto del sonido, lo que ofrece una perspectiva práctica y contextualizada para los estudiantes. En cada tarea, como se indicó en el capítulo anterior, se establece claramente la relación con la descomposición genética diseñada.

A continuación, detallamos los aspectos de las tareas, tales como, los objetivos específicos, los recursos, una descripción general, la secuencia propia para su desarrollo y los criterios de evaluación. El lector encontrará la nomenclatura en las tablas de la siguiente manera:

M (momentos de la metodología ACE). En columna aparte dentro de las tablas en las que se presentan y describen las tareas se hace referencia a respuesta esperada de los estudiantes.

4.1. Tarea 1: Logaritmo como división repetida

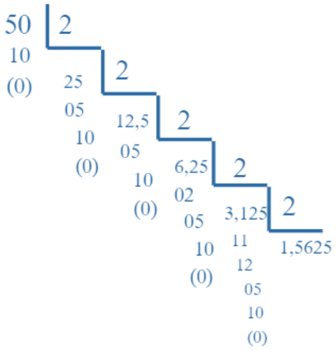
En esta tarea, se introducirá el concepto de logaritmo utilizando la división repetida como una estrategia para que los estudiantes comprendan cómo se determina el número de veces que un valor puede ser dividido por otro hasta llegar a 1.

Tabla 7. Tarea 1

<table>
<tr><th colspan="4">Descripción general de las actividades</th><th>Tarea 1</th></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivo</td><td colspan="3">Construir el concepto de logaritmo a través de división repetida e identificar su notación.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Recursos</td><td>Lápiz y Papel</td><td>Tiempo</td><td>80 minutos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Descripción de la tarea</td><td colspan="3">La actividad está orientada a establecer conjeturas que lleven a la definición de logaritmo mediante el uso de división repetida.
Se espera que los estudiantes avancen en simplificar la escritura utilizando la notación de logaritmo para expresar el número de veces que se realizó la división entre el mismo número, indicar el significado de la base y el valor del logaritmo.
La tarea presentada está diseñada para el trabajo en equipos de hasta tres integrantes. Las actividades dan lugar a la discusión, con la escucha activa y al trabajo cooperativo de los estudiantes.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Actividades</td><td colspan="2">Respuesta esperada</td></tr>
<tr><td>M</td><td>N°</td><td rowspan="2">Realizar restas sucesivas con el sustraendo 5. Se debe restar un número por un mismo sustraendo las veces que sea necesario hasta que dé 0. Los números para restar son 10, 25, 30 y 45.</td><td colspan="2" rowspan="3">a. El número 25 se restó 5 veces. Al número 30 se restó 6 veces y al número 45 se retó 9 veces.
b. La operación que permite resumir la resta sucesiva es la división.
c. Por ejemplo, $45\div 5 = 9$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">A</td><td rowspan="2">1</td></tr>
<tr><td>a. ¿Cuántas veces sucesivas hay que restar 5 al 25 para que dé 0? Y ¿al 30? y ¿al 45?
b. ¿Cuál es la operación que permite resumir estas restas sucesivas?
c. Escríbelo simbólicamente</td></tr>
<tr><td>2</td><td>A partir del número dado, realizar divisiones entre 2 las veces que sea necesario hasta que dé cociente 1. Los números para dividir sucesivamente entre 2 serán 32, 64, 128, 256</td><td colspan="2">a. El número 32 se dividió 5 veces para obtener 1, 64 se dividió 6 veces, 128 se dividió 7 veces y 256 se dividió 8 veces.</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>
a. ¿Cuántas veces dividiste el número dado entre 2 hasta obtener como cociente 1?
b. Completa la siguiente tabla con los resultados obtenidos.
<table>
<tr><th>Número</th><th>Número de divisiones (entre 2) hasta obtener como cociente 1</th></tr>
<tr><td>32</td><td></td></tr>
<tr><td>64</td><td></td></tr>
<tr><td>128</td><td></td></tr>
<tr><td>256</td><td></td></tr>
</table>
c. Construye una tabla como la anterior, de las divisiones que debes realizar a partir de 81, 243, 729, entre 3 hasta obtener como cociente 1
d. ¿Qué sucede con la cantidad de divisiones que debes realizar entre 3, cuanto mayor es el número dado?
e. ¿Cómo podrías plantear un ejercicio similar a los que has realizado en divisiones sucesivas con 2 y con 3, ahora con un número diferente, por ejemplo, con 5?
</td>
<td>
b.
<table>
<tr><th>Número</th><th>Número de divisiones (entre 2) hasta obtener como cociente 1</th></tr>
<tr><td>32</td><td>5</td></tr>
<tr><td>64</td><td>6</td></tr>
<tr><td>128</td><td>7</td></tr>
<tr><td>256</td><td>8</td></tr>
</table>
c.
<table>
<tr><th>Número</th><th>Número de divisiones (entre 3) hasta obtener como cociente 1</th></tr>
<tr><td>81</td><td>4</td></tr>
<tr><td>243</td><td>5</td></tr>
<tr><td>729</td><td>6</td></tr>
</table>
d. Cuando el número dado es mayor, se deben realizar mayor cantidad divisiones
e. Se eligen potencias de 5
</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">C</td>
<td>3</td>
<td>¿Será que, en lugar de hacer tantas divisiones, este proceso de división repetida se puede resumir de alguna manera en una nueva operación?</td>
<td>Se espera como respuesta un Si, en algunos casos habrá una representación propia.</td>
</tr>
<tr>
<td>4</td>
<td>En la tabla anterior 729 fue divido por 3 exactamente 6 veces. Si imaginamos una nueva operación para determinar el número de divisiones entre 3 que tuviste que realizar:
a. ¿Cuál es el resultado de esta nueva operación?
b. ¿Cuáles son los números diferentes al resultado, que intervienen en esa operación</td>
<td>a. 6 que corresponde a la cantidad de divisiones realizadas
b. Los números son: 729 y 3, el resultado es 6</td>
</tr>
<tr>
<td>A</td>
<td>5</td>
<td>A partir de este procedimiento de división repetida tenemos que: Para el número 32 se realizaron 5 divisiones
entre 2, lo cual escribimos como $\log_2 32 = 5$ que se lee “Logaritmo en base 2 de 32 es igual a 5”.
Para el número 729 se realizaron 6 divisiones entre 3, lo cual escribimos</td>
<td>Se debe establecer relación entre esta notación de logaritmo y las propuestas de los estudiantes a la pregunta 3.</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td></td><td>como $\log_3 729 = 6$ que se lee "Logaritmo en base 3 de 729 es igual a 6".</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>a. Completa la información de la tabla
<table>
<tr><th>Número</th><th>Logaritmo</th></tr>
<tr><td>32</td><td>$\log_2 32 =$</td></tr>
<tr><td>64</td><td>$\log_2 64 =$</td></tr>
<tr><td>128</td><td>$\log_2 128 =$</td></tr>
<tr><td>256</td><td>$\log_2 256=$</td></tr>
</table></td><td>a.
<table>
<tr><th>Número</th><th>Logaritmo</th></tr>
<tr><td>32</td><td>$\log_2 32=5$</td></tr>
<tr><td>64</td><td>$\log_2 64=6$</td></tr>
<tr><td>128</td><td>$\log_2 128=7$</td></tr>
<tr><td>256</td><td>$\log_2 256=8$</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>b. Completa la tabla mediante la división repetida.
<table>
<tr><th>Logaritmos</th></tr>
<tr><td>$\log_2 2 =$</td></tr>
<tr><td>$\log_2 4 =$</td></tr>
<tr><td>$\log_2 8 =$</td></tr>
<tr><td>$\log_2 16=$</td></tr>
<tr><td>$\text{Log}_2 512=$</td></tr>
</table></td><td>b.
<table>
<tr><th>Logaritmos</th></tr>
<tr><td>$\log_2 2 = 1$</td></tr>
<tr><td>$\log_2 4 = 2$</td></tr>
<tr><td>$\log_2 8 = 3$</td></tr>
<tr><td>$\log_2 16= 4$</td></tr>
<tr><td>$\text{Log}_2 512= 9$</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>c. Realiza ejercicios similares. Toma el número 81 y determina el número de divisiones entre 3 que debes realizar.</td><td>Se realizaron 4 divisiones.</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>d. Construye una tabla para logaritmos en base 3</td><td>
<table>
<tr><th>Logaritmo</th></tr>
<tr><td>$\log_3 9 =2$</td></tr>
<tr><td>$\log_3 81 =4$</td></tr>
<tr><td>$\log_3 2187 =7$</td></tr>
<tr><td>$\log_3 729 =6$</td></tr>
<tr><td>$\log_3 6561 =8$</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>f. Considera el número 625 y realiza divisiones entre 5 hasta obtener como cociente 1. Construye una tabla para logaritmos en base 5</td><td>
<table>
<tr><th>Logaritmo</th></tr>
<tr><td>$\log_5 25 =2$</td></tr>
<tr><td>$\log_5 15625 =6$</td></tr>
<tr><td>$\log_5 3125 =5$</td></tr>
<tr><td>$\log_5 125 =3$</td></tr>
<tr><td>$\log_5 78125 =7$</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td></td><td>6</td><td>A partir de las actividades desarrolladas, determina el valor de: $log_3 3$ y $log_2 2$</td><td>$log_3 3 = 1$ Una división para obtener como cociente 1.
$log_2 1 = 0$ No es necesario hacer divisiones pues ya está 1.</td></tr>
<tr><td></td><td>7</td><td>Determina si existe el valor de $log_2 0$. Explica tu respuesta</td><td>No hay manera de llegar a cociente 1 a partir de 0.</td></tr>
</table>

	8	¿Qué sucede si realizamos el procedimiento de la división repetida entre 2 al número 50?	No es posible obtener como cociente 1. En la quinta división se obtiene como cociente 1,5625, al hacer la sexta división se obtiene un cociente menor que 1. 
	9	¿Qué puedes decir del valor del $\log_2 50$	El valor del $\log_2 50$ se encuentra entre los valores 5 y el 6. En este caso, no hay posibilidades de que los estudiantes utilicen calculadora, sin embargo, se puede anticipar que si es un número cuya parte entera es 5 y tiene una parte decimal, en próximas tareas será posible considerar log de números cuyo valor no necesariamente es un entero.
E	10	Ejercicio para la casa Indaga, en libros e internet, ¿cómo se calculan estos logaritmos: $log_2 1, log_5 1, log_{10} 1$?	El logaritmo de log_2 1 es 0, de log_5 1 es 0 y de log_{10} 1 es 0. Por lo tanto, cuando tenemos como argumento 1 el logaritmo es 0.

Aspectos para considerar

Es importante que los estudiantes tengan como conocimientos previos sobre división para facilitar el desarrollo de esta tarea. Antes de abordar los ejercicios propuestos, se deben presentar a los estudiantes las ventajas que trae la notación y la operación logaritmo, especialmente en el manejo de grandes números.

Esto resulta útil en campos como la astronomía, la triangulación, la geometría y la relojería, entre otros, donde antes se requerían cálculos complicados y laboriosos con números de múltiples dígitos.

Criterios para evaluar: Rúbrica

Excelente	**Bueno**	**Aceptable**	**Insuficiente**
Utiliza la notación logaritmo para expresar el número de divisiones que se deben realizar y generaliza el logaritmo atendiendo a la base y al valor del logaritmo.	A partir de la división repetida, formula conjeturas básicas acerca del significado de la base y el valor del logaritmo.	Sistematiza la información obtenida en tablas y describe la relación entre la división repetida y el logaritmo para casos puntuales	Aunque realiza el procedimiento de división repetida es necesario que trabaje en la relación con los logaritmos.

Observación

En la primera pregunta, cuya intención es recordar cómo la división corresponde a resta repetida, se debe mostrar a los estudiantes que inicialmente, en su formación se estudiaron las divisiones exactas entre números naturales y que posteriormente se realizaron con números decimales, por ejemplo:

PASO 1 DE RESTAS REPETIDAS

3 RESTAS

Resultado: 26÷8=3,25

26-8=18
18-8=10

10-8=2

Puesto que no de obtuvo como resultado 0,
PASO 2 DE RESTAS REPETIDAS
2 RESTAS
Se toma
2·10=20 y mediante restas repetidas
20-8=12
12-8=4

Puesto que no de obtuvo como resultado 0
PASO 3 DE RESTAS REPETIDAS
Se toma
4·10=40 y mediante restas repetidas **5 RESTAS**
40-8=32
32-8=24
24-8=16
16-8=8
8-8=0

La intención de la pregunta 8 es mostrar que, aunque se ha realizado división repetida eligiendo las potencias del número entre el cual se hacen las divisiones, el procedimiento se podría aplicar a un número natural cualquiera, aunque no se obtenga en el primer paso de divisiones repetidas cociente 1. Por ejemplo, si realizamos el procedimiento de la división repetida entre 4 al número 32,

PASO 1 DE DIVISIÓN REPETIDA
32÷4=8
2 DIVISIONES
8÷2

Puesto que no se obtuvo como cociente 2 y dividir nuevamente entre 4 daría menos de 1
PASO 2 DE DIVISIÓN REPETIDA
Resultado $\log_4 32=2.5$
A partir del cociente obtenido, 2,

$$2^{10} = 1024$$

5 DIVISIONES
1024÷4=256
256÷4=64
64÷4=16
16÷4=4
4÷4=1

De esta manera es posible encontrar la posibilidad de calcular el logaritmo de un número natural así no sea potencia del número entre el cual se realizan las divisiones sucesivas.

Es recomendable que los estudiantes no utilicen la calculadora para realizar las divisiones.
Se deben hacer observaciones acerca de identificar el argumento, la base y el valor del logaritmo.

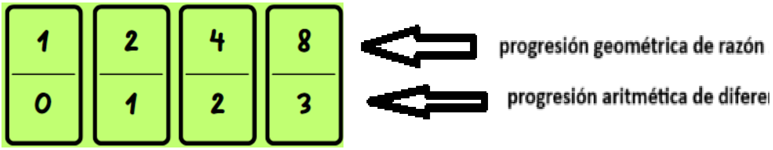
Nota. Construcción propia

4.2. Tarea 2: Examinando propiedades del logaritmo

La segunda tarea propuesta busca aproximar a los estudiantes a las propiedades del logaritmo mediante el uso de fichas adaptadas a partir de las propuestas de Hernández y Ferrari (2007). Las fichas utilizadas son similares a las del dominó, donde una de las partes (la parte superior en la figura 9) representa una progresión geométrica, mientras que la otra parte (la inferior en la figura 9) muestra una progresión aritmética. Esta disposición facilita la introducción de las propiedades logarítmicas, permitiendo relacionarlas con las progresiones. En la parte superior de las fichas se presenta una progresión geométrica con razón dos, y en la parte inferior, una progresión aritmética con diferencia de uno, con las fichas para que los estudiantes las discutan en grupo, fomentando el aprendizaje colaborativo y la comprensión de los conceptos.

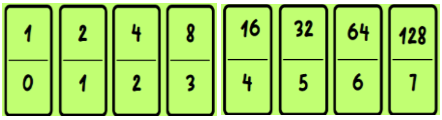
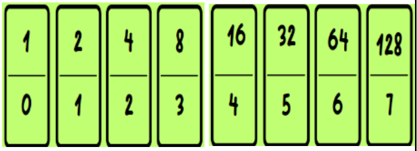
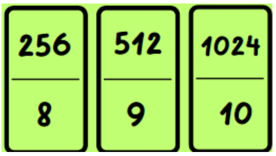
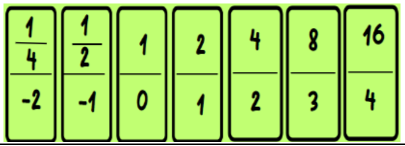
Figura 8

Fichas tipo dominó de progresión geométrica razón 2 y progresión aritmética de diferencia 1.



Nota. Adaptado de Hernández y Ferrari (2007).

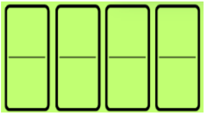
Tabla 8. Tarea 2

<table>
<tr><td colspan="3">Descripción general de las actividades</td><td colspan="2">Tarea 2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivo</td><td colspan="3">Reconoce las propiedades del logaritmo a partir del trabajo con material concreto.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Recursos</td><td>Cuaderno, Bolígrafo, Fichas: 10 y Fichas en blanco: 14</td><td>Tiempo</td><td>80 minutos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Descripción de la tarea</td><td colspan="3">Establecer la relación entre las progresiones geométricas y aritméticas, y vincular este trabajo con el concepto de logaritmo de números naturales, inicialmente de los números naturales que corresponden a los términos de la progresión geométrica.
Mediante esta tarea se espera que los estudiantes avancen en encontrar regularidades de las progresiones aritméticas y geométricas y establecer relaciones con el logaritmo indicando la base, el argumento y su valor.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Actividades</td><td>Respuesta esperada</td></tr>
<tr><td>M</td><td>N°</td><td colspan="2" rowspan="2">Utiliza estas fichas tipo dominó. Para ello trabajas en grupos de tres integrantes. Se entregan a cada grupo de estudiantes 8 fichas.
Figura 9
<i>Fichas tipo dominó de progresión geométrica razón 2 y progresión aritmética de diferencia 1</i>

<i>Nota.</i> Adaptado de Hernández y Ferrari (2007).
a. Ordena las fichas de menor a mayor de tal manera que en la parte inferior aparezcan los números de uno en uno.
b. ¿Qué regularidad observas en los números superiores de las fichas, tal como están ordenadas?
c. ¿Qué regularidad estableciste en los números inferiores de las fichas, tal como están ordenadas?
d. Dado el orden que observas en la secuencia de las fichas, si agregamos 3 fichas a la derecha, ¿cuáles serían los valores correspondientes en la parte inferior y superior esas fichas? Escribe tu respuesta.</td><td rowspan="2">a.

b. El número inicial se multiplica por 2 para obtener el siguiente o cualquier número de la secuencia se multiplica por 2 para obtener el siguiente.
c. Su valor va aumentando de uno en uno.
d. Ver figura 11.
</td></tr>
<tr><td>A</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>2</td><td colspan="2">Ordena las fichas como aparecen en la siguiente imagen.
Figura 10
<i>Progresión geométrica y progresión Aritmética de números enteros</i>
</td><td>a. En la secuencia superior se multiplica por dos cada número para obtener el siguiente. En la secuencia inferior aumenta de uno en uno.
Los valores de la izquierda arriba son, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ y $\frac{1}{32}$ los de abajo son $-3, -4, -5$.</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>Nota. Adaptado de Hernández y Ferrari (2007).

Recuerda que: La regularidad de una progresión aritmética es que existe una constante d entre cada término y el término anterior.
La regularidad de una progresión geométrica es que existe una razón r (razón común) entre cada término y el anterior.
Con tus compañeros de grupo, recuerda la regularidad que mantienen los valores superiores. También, ten presente la regularidad de los valores inferiores.
a. Procede con esas mismas regularidades y coloca 3 fichas a la izquierda que mantengan la misma secuencia, ¿cuáles serían los valores? Escribe tu respuesta.</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>C</td>
<td>3</td>
<td>Discute con tus compañeros la solución y llega a una conclusión</td>
<td>Los números superiores corresponden a una progresión geométrica de razón 2.
Números inferiores corresponden a una progresión aritmética de diferencia 1</td>
</tr>
<tr>
<td>A</td>
<td>4</td>
<td>Manteniendo el orden de las fichas, presenta la información en una tabla.</td>
<td>
<table>
<tr><th>Progresión geométrica de razón 2</th><th>Progresión aritmética de diferencia 1</th></tr>
<tr><td>$\frac{1}{32}$</td><td>-5</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{16}$</td><td>-4</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{8}$</td><td>-3</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{4}$</td><td>-2</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{2}$</td><td>-1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1</td></tr>
<tr><td>4</td><td>2</td></tr>
<tr><td>8</td><td>3</td></tr>
<tr><td>16</td><td>4</td></tr>
<tr><td>32</td><td>5</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>C</td>
<td>5</td>
<td>Discute y comunica al grupo la respuesta de esta pregunta ¿Encuentras alguna relación entre los términos de las progresiones y las potencias de 2?</td>
<td>La relación que existe es que los exponentes de las potencias de 2 siguen una progresión aritmética, mientras que los valores de las potencias de 2 forman una progresión geométrica.</td>
</tr>
<tr>
<td>A</td>
<td>6</td>
<td>Establece la relación, escribe una progresión geométrica de razón 3 que empiece en 1.</td>
<td>
<table>
<tr><th colspan="7">Progresión Geométrica de razón 3</th></tr>
<tr><td>1</td><td>3</td><td>9</td><td>27</td><td>81</td><td>243</td><td>729</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>7</td>
<td>Diseña las fichas con esta progresión geométrica de razón 3.
a. Coloca una ficha más a la derecha y una ficha más a la izquierda, que continúe con esta progresión geométrica. ¿Qué clase de progresión es la secuencia que se presenta en la parte inferior de las fichas? Escribe tu respuesta.
b. Presenta la información en una tabla.
c. ¿Encuentras alguna relación con las potencias de 3 en la progresión geométrica? Completa la tabla.</td>
<td>a. La progresión es aritmética de razón 1
b.
<table>
<tr><th>Progresión geométrica de razón 3</th><th>Progresión aritmética de diferencia 1</th></tr>
<tr><td>$\frac{1}{3}$</td><td>-1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>3</td><td>1</td></tr>
<tr><td>9</td><td>2</td></tr>
<tr><td>27</td><td>3</td></tr>
<tr><td>81</td><td>4</td></tr>
</table>
c. La relación que existe es que los exponentes de las potencias de 3 siguen una progresión aritmética, mientras que los valores de las potencias de 3 forman una progresión geométrica.
<table>
<tr><th>Potencia de 3</th><th>Progresión geométrica de razón 3</th><th>Progresión aritmética de diferencia 1</th></tr>
<tr><td>3^{-1}</td><td>$\frac{1}{3}$</td><td>-1</td></tr>
<tr><td>3^{0}</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>3^{1}</td><td>3</td><td>1</td></tr>
<tr><td>3^{2}</td><td>9</td><td>2</td></tr>
<tr><td>3^{3}</td><td>27</td><td>3</td></tr>
<tr><td>3^{4}</td><td>81</td><td>4</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>C</td>
<td>8</td>
<td>Discute y comunica tu respuesta
a. ¿Cómo podemos relacionar los resultados obtenidos con la tarea anterior de la división repetida?
b. En esas secuencias de razón 3. De 1, 3, 9 y 27 ¿qué operación puedes realizar para desde el último número volver al anterior? ¿Cuántas divisiones debes hacer para volver a la unidad?</td>
<td>a. Cuando se disminuye el exponente en 1, la potencia de 3 tiene como resultado el cociente que se obtiene a través de una división entre 3.
b. La operación es la división. 27/3=9.
Desde 27 para volver a 1 debo hacer 3 divisiones entre 3.</td>
</tr>
<tr>
<td>A</td>
<td>9</td>
<td>Responde en grupo
a.¿ A qué número se debe elevar 2 para que dé 16?
b.¿ A qué número se debe elevar 2 para que dé 64?
c. ¿Entre qué números enteros se encuentra el exponente al que se debe elevar 2 para que dé 50?
d.¿ A qué número se debe elevar 3 para que dé 81?
e. ¿ A qué número se debe elevar 3 para que dé 729?
f. ¿Entre qué números enteros se encuentra el exponente al que se debe elevar 3 para que dé 100?</td>
<td>a. Se debe de elevar 2 a la 4 para que dé 16.
b. Para obtener 64, se debe elevar 2 a la 6.
c. El exponente el que se debe elevar 2 para que dé 50 se encuentra entre mayor a 5 y menor a 6.
d. Para que dé el número 81, se debe elevar 3 a la 4.</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>e. Para que dé 729, se debe elevar 3 a la 6.
f. El exponente a que se debe elevar 3 para que dé 100 se encuentra entre 4 y 5.</td></tr>
<tr><td>A</td><td>10</td><td>En las fichas en blanco haz una secuencia geométrica de razón 7 y construye la progresión aritmética de diferencia 1 que le correspondería iniciando desde -2.
Figura 11
<i>Ficha tipo dominó en blanco</i>

<i>Nota.</i> Adaptado de Hernández y Ferrari (2007).
a. Presenta los datos en una tabla y establece relaciones con los logaritmos y con las potencias del número.
b. Completar la siguiente tabla, elige cuál va a ser la razón y cuál la diferencia. Luego procede.</td><td>a.
<table>
<tr><th>Progresión geométrica de razón 7</th><th>Progresión como potencia</th><th>Progresión aritmética de diferencia 1</th><th>Logaritmo</th></tr>
<tr><td>$\frac{1}{49}$</td><td>$7^{-2} = \frac{1}{7^2}$</td><td>-2</td><td>$\log_7 7^{-2} = -2$</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{7}$</td><td>$7^{-1} = \frac{1}{7^1}$</td><td>-1</td><td>$\log_7 7^{-1} = -1$</td></tr>
<tr><td>1</td><td>7^0</td><td>0</td><td>$\log_7 7^0 = 0$</td></tr>
<tr><td>7</td><td>7^1</td><td>1</td><td>$\log_7 7^1 = 1$</td></tr>
</table>
b.
<table>
<tr><th>Progresión geométrica de razón (5)</th><th>Progresión aritmética de diferencia (1)</th><th>Logaritmo</th></tr>
<tr><td>25</td><td>2</td><td>$\log_5 25 = 2$</td></tr>
<tr><td>125</td><td>3</td><td>$\log_5 125 = 3$</td></tr>
<tr><td>625</td><td>4</td><td>$\log_5 625 = 4$</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>C</td><td>11</td><td>Explica lo que observas en las tablas de las progresiones geométrica y aritmética con los logaritmos.</td><td>Se observa que la progresión geométrica representa el argumento y la progresión aritmética es el logaritmo.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Aspectos para considerar</td></tr>
<tr><td colspan="4">Los estudiantes no deben dejar de lado el conocimiento previamente adquirido sobre la división, ya que es esencial para comprender y relacionar el concepto de logaritmo.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Criterios para evaluar: Rúbrica</td></tr>
<tr><td>Excelente</td><td>Bueno</td><td>Aceptable</td><td>Insuficiente</td></tr>
</table>

Encuentra regularidades en las progresiones aritméticas y geométricas, establece relaciones con el logaritmo indicando la base, el argumento y su valor, a la vez que establece relaciones con la potenciación.	Encuentra regularidades en las progresiones aritméticas y geométricas, establece relaciones con el logaritmo indicando la base, el argumento y su valor.	Encuentra regularidades en las progresiones aritméticas y geométricas, establece relaciones con la notación logaritmo.	Aunque identifica algunos patrones de las fichas, no establece relaciones con el logaritmo.
Observación			
Es importante tener en cuenta que los estudiantes deben tener un acercamiento previo a la regularidad de las progresiones aritméticas y geométricas. Además, es importante que los estudiantes realicen las actividades sin el uso de calculadora.			

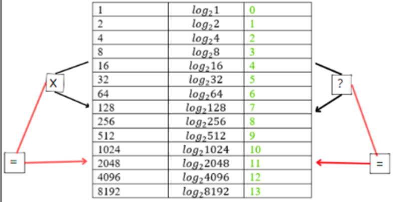
Nota. Construcción propia.

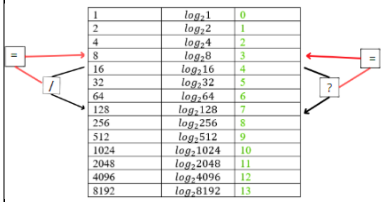
4.3. Tarea 3. Relación de la progresión aritmética y la progresión geométrica con la función logarítmica

En esta tarea, se utilizará GeoGebra para explorar la función logarítmica y su relación con las progresiones aritméticas y geométricas. A través de esta herramienta, los estudiantes podrán visualizar cómo se forman los pares ordenados en una función logarítmica y comprender la conexión entre estas progresiones y la función logarítmica. Esto permitirá la comprensión de las propiedades del logaritmo y su vínculo con las progresiones.

Tabla 9. Tarea 3

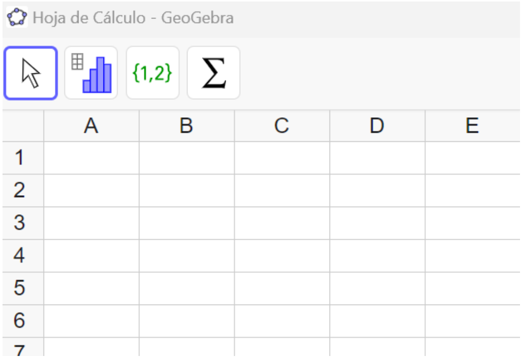
Descripción general de las actividades			Tarea 3
Objetivo	Relacionar la progresión aritmética y la geométrica con la función logarítmica, para comprender cómo se forman los pares ordenados de la función logarítmica.		
Recursos	Cuaderno, Bolígrafos y Computadora con programa de GeoGebra	**Tiempo**	120 minutos
Descripción de la tarea	Se espera que en esta tarea los estudiantes avancen en: Reconocer las propiedades del logaritmo por medio de progresiones aritmética y geométrica tomando en cuenta la razón de la progresión geométrica y la diferencia de la progresión aritmética. Establecer relaciones entre las coordenadas de algunos puntos del plano cartesiano que pertenecen a la gráfica de la función logaritmo con los términos de las progresiones aritmética y geométrica. Ubicar diferentes puntos en la curva función logarítmica en el proceso de construcción de la gráfica de la función sin recurrir a realizar las acciones de remplazar en la fórmula diversos		

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2">valores.</td></tr>
<tr><th colspan="3">Actividades</th><th>Respuesta esperada</th></tr>
<tr><td>M</td><td>N°</td><td rowspan="2">Relacionar entre los logaritmos y las operaciones de producto y división.
a. Completa la siguiente tabla.
<table>
<tr><td>1</td><td>$log_2 1$</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>$log_2 2$</td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>$log_2 4$</td><td></td></tr>
<tr><td>8</td><td>$log_2 8$</td><td></td></tr>
<tr><td>16</td><td>$log_2 16$</td><td></td></tr>
<tr><td>32</td><td>$log_2 32$</td><td></td></tr>
<tr><td>64</td><td>$log_2 64$</td><td></td></tr>
<tr><td>128</td><td>$log_2 128$</td><td></td></tr>
<tr><td>256</td><td>$log_2 256$</td><td></td></tr>
<tr><td>512</td><td>$log_2 512$</td><td></td></tr>
<tr><td>1024</td><td>$log_2 1024$</td><td></td></tr>
<tr><td>2048</td><td>$log_2 2048$</td><td></td></tr>
<tr><td>4096</td><td>$log_2 4096$</td><td></td></tr>
<tr><td>8192</td><td>$log_2 8192$</td><td></td></tr>
</table></td><td rowspan="2">a.
<table>
<tr><td>1</td><td>$log_2 1$</td><td>0</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$log_2 2$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$log_2 4$</td><td>2</td></tr>
<tr><td>8</td><td>$log_2 8$</td><td>3</td></tr>
<tr><td>16</td><td>$log_2 16$</td><td>4</td></tr>
<tr><td>32</td><td>$log_2 32$</td><td>5</td></tr>
<tr><td>64</td><td>$log_2 64$</td><td>6</td></tr>
<tr><td>128</td><td>$log_2 128$</td><td>7</td></tr>
<tr><td>256</td><td>$log_2 256$</td><td>8</td></tr>
<tr><td>512</td><td>$log_2 512$</td><td>9</td></tr>
<tr><td>1024</td><td>$log_2 1024$</td><td>10</td></tr>
<tr><td>2048</td><td>$log_2 2048$</td><td>11</td></tr>
<tr><td>4096</td><td>$log_2 4096$</td><td>12</td></tr>
<tr><td>8192</td><td>$log_2 8192$</td><td>13</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>A</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td>2</td><td>Observa la siguiente tabla y responde


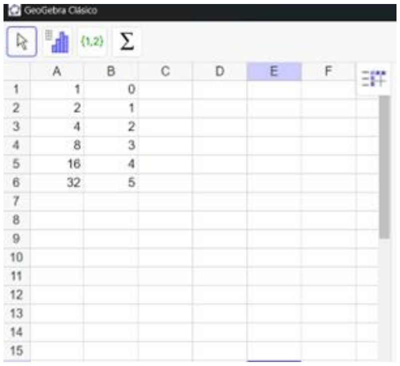
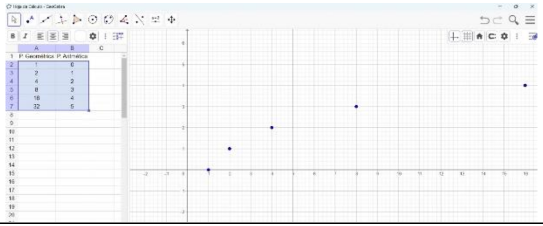
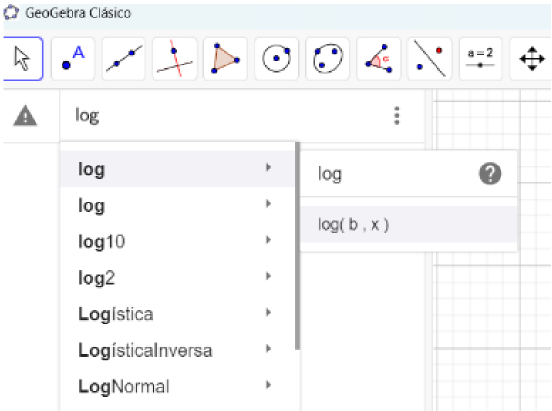
<table>
<tr><td>1</td><td>$log_2 1$</td><td>0</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$log_2 2$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$log_2 4$</td><td>2</td></tr>
<tr><td>8</td><td>$log_2 8$</td><td>3</td></tr>
<tr><td>16</td><td>$log_2 16$</td><td>4</td></tr>
<tr><td>32</td><td>$log_2 32$</td><td>5</td></tr>
<tr><td>64</td><td>$log_2 64$</td><td>6</td></tr>
<tr><td>128</td><td>$log_2 128$</td><td>7</td></tr>
<tr><td>256</td><td>$log_2 256$</td><td>8</td></tr>
<tr><td>512</td><td>$log_2 512$</td><td>9</td></tr>
<tr><td>1024</td><td>$log_2 1024$</td><td>10</td></tr>
<tr><td>2048</td><td>$log_2 2048$</td><td>11</td></tr>
<tr><td>4096</td><td>$log_2 4096$</td><td>12</td></tr>
<tr><td>8192</td><td>$log_2 8192$</td><td>13</td></tr>
</table>
a. ¿Con qué signo de operación reemplazarías el signo de la interrogación?
b. Llena la siguiente tabla.
<table>
<tr><td>$log_2 16$</td><td>$log_2 128$</td><td>$log_2(16 \times 128) = log_2 2048$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
c. Construye otros dos ejemplos y registra la información en una tabla como la anterior.
d. ¿Qué observas en relación con los valores en cada caso?</td><td>a. Se remplaza con el signo de la suma.
b.
<table>
<tr><td>$log_2 16$</td><td>$log_2 128$</td><td>$log_2(16 \times 128) = log_2 2048$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>7</td><td>11</td></tr>
</table>
c.
<table>
<tr><td>$log_2 16$</td><td>$log_2 512$</td><td>$log_2 8192$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>9</td><td>13</td></tr>
<tr><td>$log_2 2$</td><td>$log_2 64$</td><td>$log_2 128$</td></tr>
<tr><td>1</td><td>6</td><td>7</td></tr>
</table>
d. Cuando se trata del logaritmo de un producto, su valor es igual a la suma de los logaritmos de los factores.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Observa y responde


<table>
<tr><td>1</td><td>$log_2 1$</td><td>0</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$log_2 2$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$log_2 4$</td><td>2</td></tr>
<tr><td>8</td><td>$log_2 8$</td><td>3</td></tr>
<tr><td>16</td><td>$log_2 16$</td><td>4</td></tr>
<tr><td>32</td><td>$log_2 32$</td><td>5</td></tr>
<tr><td>64</td><td>$log_2 64$</td><td>6</td></tr>
<tr><td>128</td><td>$log_2 128$</td><td>7</td></tr>
<tr><td>256</td><td>$log_2 256$</td><td>8</td></tr>
<tr><td>512</td><td>$log_2 512$</td><td>9</td></tr>
<tr><td>1024</td><td>$log_2 1024$</td><td>10</td></tr>
<tr><td>2048</td><td>$log_2 2048$</td><td>11</td></tr>
<tr><td>4096</td><td>$log_2 4096$</td><td>12</td></tr>
<tr><td>8192</td><td>$log_2 8192$</td><td>13</td></tr>
</table>
a. ¿Con qué signo de operación reemplazarías el signo de la interrogación?

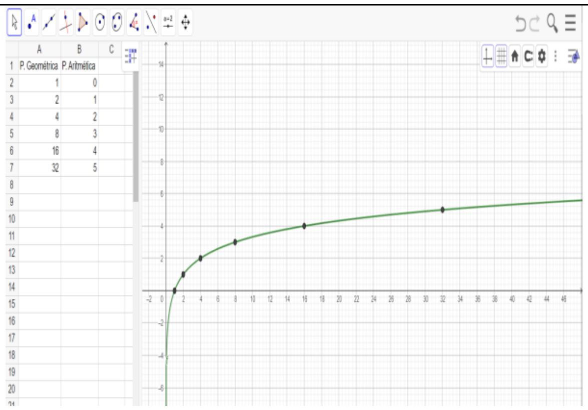
b. Escribe los valores de los logaritmos en la</td><td>a.Con el signo de $-$
b.La tabla completa
<table>
<tr><td>$log_2 128$</td><td>$log_2 16$</td><td>$log_2\left(\frac{128}{16}\right) = log_2 8$</td></tr>
<tr><td>7</td><td>4</td><td>3</td></tr>
</table>
c. Cuando se trata del logaritmo de un cociente, su valor es igual a la diferencia entre el logaritmo del dividendo y</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>siguiente tabla.
<table><tr><td>$log_2 128$</td><td>$log_2 16$</td><td>$log_2\left(\frac{128}{16}\right)$</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>c. ¿Qué observas en relación con los valores?
d. Revisa si tu observación se cumple para más cocientes, para ello construye otros dos ejemplos y registra la información en una tabla como la anterior.</td>
<td>el logaritmo del divisor.
d. La tabla completa
<table><tr><td>$log_2 256$</td><td>$log_2 8$</td><td>$log_2\left(\frac{256}{8}\right) = log_2 32$</td></tr><tr><td>8</td><td>3</td><td>5</td></tr></table><table><tr><td>$log_2 1024$</td><td>$log_2 64$</td><td>$log_2\left(\frac{1024}{64}\right) = log_2 16$</td></tr><tr><td>10</td><td>6</td><td>4</td></tr></table></td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>4</td>
<td>Revisa la tabla inicial, considera que $8^4 = 4096$
a. Escribe los valores de los logaritmos en la siguiente tabla.
<table><tr><td>$log_2 8$</td><td>$log_2 8^4$</td></tr><tr><td></td><td></td></tr></table>b. ¿Qué observas en relación con los valores?
c. Construye otros dos ejemplos y registra la información en una tabla como la anterior.
d. Explica estos resultados a partir de lo que has observado en relación con el logaritmo de un producto.</td>
<td>a.
<table><tr><td>$log_2 8$</td><td>$log_2 8^4$</td></tr><tr><td>3</td><td>4×3</td></tr></table>b. Cuando se trata del logaritmo de una potencia, su valor es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base de la potencia.
c. La tabla completa
<table><tr><td>$log_2 16$</td><td>$log_2 16^2$</td><td rowspan="2">$16^2 = 256$
$\log_2 8$</td></tr><tr><td>4</td><td>2×4</td></tr><tr><td>$log_2 4$</td><td>$log_2 4^3$</td><td rowspan="2">$4^2 = 64$
$\log_2 6$</td></tr><tr><td>2</td><td>3×2</td></tr></table>d. La potenciación es una multiplicación por el mismo factor, el número de veces que indique el exponente.</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>5</td>
<td>Para establecer una relación entre los logaritmos y lo que definiremos como función logarítmica, sigue las instrucciones:
a. Ingresa a GeoGebra clásico y abre una hoja de cálculo para construir una tabla de datos.
b. Primero, llena la primera columna, etiquetada como A. Comienza escribiendo el número 1 en la primera celda. En la celda de abajo, coloca el resultado de multiplicar 1 por 2. En la siguiente celda, multiplica el valor de la celda anterior por 2 y continúa de esta manera sucesivamente.
Luego, en la segunda columna, etiquetada como B, comienza con el número 0 en la primera celda. En la celda siguiente, suma 1 al valor anterior. Repite este proceso, sumando 1 al valor de cada celda anterior hasta completar la columna
c. En grupo, observa y analiza las columnas A y B, comparándolas con la tabla construida utilizando las fichas en la tarea anterior. Discute y establece la relación entre ambas. ¿Qué patrones o regularidades</td>
<td>a. <i>Herramienta GeoGebra</i>


<i>Nota</i>. Captura de pantalla de GeoGebra</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>puedes identificar?
d. Crea una lista de pares de la tabla como puntos en el plano cartesiano. Para ello, selecciona el ícono de Listas de Puntos. Recuerda que, al formar cada par de coordenadas, la progresión debe representarse en el eje x y la progresión aritmética en el eje y.</td>
<td>b

<table>
<tr><th></th><th>A</th><th>B</th><th>C</th><th>D</th><th>E</th><th>F</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>4</td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>8</td><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td>16</td><td>4</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td>32</td><td>5</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
c. Las tablas tienen los mismos valores de la ficha de progresión geométrica razón 2.
d.

<table>
<tr><th></th><th>A</th><th>B</th></tr>
<tr><td>1</td><td>P. Geométrica</td><td>P. Aritmética</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr>
<tr><td>4</td><td>4</td><td>2</td></tr>
<tr><td>5</td><td>8</td><td>3</td></tr>
<tr><td>6</td><td>16</td><td>4</td></tr>
<tr><td>7</td><td>32</td><td>5</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>6</td>
<td>Representa los pares de puntos en el ambiente gráfico de GeoGebra.
a. Dirígete al menú de entrada y digita log (2, x), lo cual corresponde a la función log$_2$x, la cual corresponde a una función logarítmica, a la que nos referimos como **Función logarítmica en base 2**. En esta tarea y en próximas caracterizaremos la función logarítmica.
b. ¿Qué observas en relación con la gráfica obtenida para la función y los puntos de la tabla?
c. Llena la siguiente tabla a partir de la gráfica.
<table>
<tr><th>x</th><th>log$_2$ x</th></tr>
<tr><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>8</td><td></td></tr>
<tr><td>16</td><td></td></tr>
<tr><td>32</td><td></td></tr>
<tr><td>64</td><td></td></tr>
<tr><td>128</td><td></td></tr>
<tr><td>256</td><td></td></tr>
<tr><td>512</td><td></td></tr>
</table>
</td>
<td>Vista algebraica de GeoGebra


Función logarítmica de base 2</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td>

<table>
<tr><td></td><td>A</td><td>B</td><td>C</td></tr>
<tr><td>1</td><td>P. Geométrica</td><td>P. Aritmética</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>4</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td>8</td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td>16</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>7</td><td>32</td><td>5</td><td></td></tr>
</table>

b. Los puntos pertenecen a la gráfica de la función.
c. La tabla
<table>
<tr><td>x</td><td>$\log_2 x$</td></tr>
<tr><td>1</td><td>$\log_2 1$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$\log_2 2$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$\log_2 4$</td></tr>
<tr><td>8</td><td>$\log_2 8$</td></tr>
<tr><td>16</td><td>$\log_2 16$</td></tr>
<tr><td>32</td><td>$\log_2 32$</td></tr>
<tr><td>64</td><td>$\log_2 64$</td></tr>
<tr><td>128</td><td>$\log_2 128$</td></tr>
<tr><td>256</td><td>$\log_2 256$</td></tr>
<tr><td>512</td><td>$\log_2 512$</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>C</td>
<td>7</td>
<td>Discute con tus compañeros las siguientes preguntas
a. ¿Cuál es el valor de $\log_2 50$? ¿Qué significado tiene?
b. ¿Cuál es el valor de $\log_2 1$? ¿Qué significado tiene? Explique
c. ¿Tiene sentido el $\log_2 0$? ¿Por qué? Explica
d. ¿Por qué crees que mediante la función $\log_2 x$ no hay valores para valores negativos del *x*?</td>
<td>a. El $\log_2 50$ tiene valor de 5.64. al elevar a 2 a la 2,54 se obtiene como resultado 50.
b. El logaritmo de $log_2 1$ tiene valor 0. Significa que el punto de corte con el eje x.
c. La función solo toma valores positivos y no hay ningún exponente que se pueda elevar a 2 para obtener 0.
d. Debido a que no es posible elevar 2 a ningún exponente para obtener un número negativo.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="4">Aspectos para considerar</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="4">Es importante que el docente enlace esta actividad con las realizadas anteriormente, recalcando la relación que hay entre las coordenadas de los puntos proporcionados por el software y los valores de las fichas elaboradas previamente.
Los estudiantes deben poner en práctica los conocimientos adquiridos con las fichas, utilizando GeoGebra, además debe representar gráficamente.
Es necesario que a partir de la gráfica se pueda interpolar para encontrar logaritmos en base b de números que no son potencia de b.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="4">Criterios para evaluar: Rúbrica</td>
</tr>
<tr>
<td>Excelente</td>
<td>Muy bueno</td>
<td>Bueno</td>
<td>Insuficiente</td>
</tr>
</table>

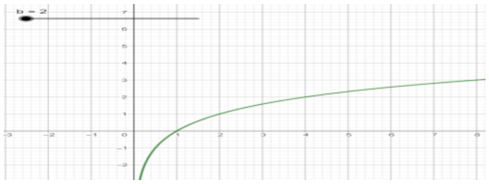
Generaliza las propiedades del logaritmo a partir de la tabla construida por medio de las progresiones y utiliza la gráfica para avanzar hacia los logaritmos de los números reales.	Generaliza las propiedades del logaritmo a partir de la tabla construida por medio de las progresiones, sin embargo, no establece relaciones de la gráfica para los números reales.	Describe las observaciones a partir de las tablas y establece que los puntos de la gráfica son los que aparecen en las tablas de las progresiones.	Sus inferencias a partir de las tablas no son completas en relación con las propiedades o no establece relación entre la gráfica y los datos obtenidos para los logaritmos.
Observación			
Los estudiantes ya han utilizado el software GeoGebra en tareas anteriores, por lo que ya saben cómo manejar esta herramienta en relación con: Tablas y ambiente gráfico.			

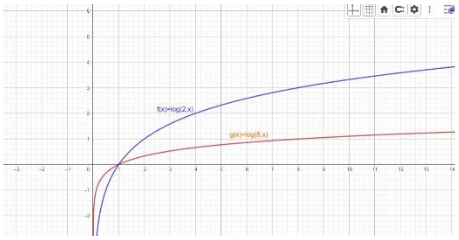
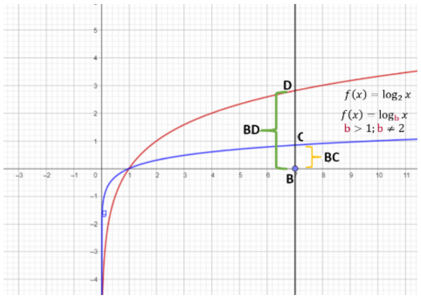
Nota. Construcción propia

4.4. Tarea 4. Regularidades de la función logarítmica

Esta tarea tiene como meta que, a través de GeoGebra, se exploren distintas funciones logarítmicas, los estudiantes descubran y analicen las características o regularidades comunes de la función logarítmica y sus familias.

Tabla 10. *Tarea 4*

<table>
<tr><th colspan="5">Descripción general de las actividades</th><th>Tarea 4</th></tr>
<tr><td colspan="3">Objetivo</td><td colspan="3">Identificar y comprender las regularidades en la función logarítmica y sus familias.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Recursos</td><td>Cuaderno y Computadora con programa de GeoGebra</td><td>Tiempo</td><td>120 minutos</td></tr>
<tr><td colspan="3">Descripción de la tarea</td><td colspan="3">Mediante esta tarea se presentan actividades para que los estudiantes.
A partir de la gráfica de la función logarítmica con base mayor que 1 establezcan el punto de corte con el eje x, el dominio y el rango.
Visualicen los cambios de la función logarítmica de base mayor que 1 cuando se varía la base.
Comparan el comportamiento de las funciones de base mayor que 1 en cuanto a si son crecientes o decrecientes y su rapidez de crecimiento.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Actividades</td><td colspan="2">Respuesta esperada</td></tr>
<tr><td>M</td><td>N°</td><td colspan="2" rowspan="2">Para analizar la función $f(x) = log_b x$ con $b > 1$:
a. Representa gráficamente en GeoGebra $log_b x$, es decir $log(b, x)$. Para el deslizador toma valores entre 2 y 10, pues inicialmente estudiaremos el caso en que $b > 1$. Indica el valor de la base b elegida.
b. Justifica por qué $f(x) = log_5 x$ para $b > 1$ es una función, indica su dominio y su rango.
c. ¿Es una función creciente o decreciente? Justifica.
d. ¿Para qué valores de *x* la función toma valores positivos?
e. ¿Para qué valores de *x* la función toma valores negativos?
f. ¿Qué pasa cuando los valores de x se acercan a cero en la $f(x) = log_{10} x$?
g. Escribe un ejemplo del logaritmo de un valor de *x* para mostrar que el $\log_b x$ sea negativo.
h. ¿Para qué valores de *x* la función corta al eje *x*?
i. ¿Qué significado tiene este corte?
j. La gráfica muestra que el valor del logaritmo cambia cuando aumenta el valor de *x*, ¿crees que los cambios del valor del logaritmo en la medida en que aumenta el valor de *x* se producen más rápido? Explica tu respuesta.</td><td colspan="2" rowspan="2">a. Vista de GeoGebra con deslizador.

b. Es una función porque para cada valor de x existe un único valor de y. Se observa en la gráfica que el dominio es todos los números reales positivos y su rango todos los números reales.
c. Es una función creciente pues a medida que aumentan los valores x, los valores de y también aumentan.
d. Para los valores mayores que 1 toman valores positivos.
e. Los valores de x la función toma valores negativos cuando los valores son menores que 1 y mayores que 0.
f. Cuando los valores de la función se acercan a 0, no corta al eje y
g. $\log_2 \frac{1}{2}$= -1
h. Para los valores x =1
$f(1) = \log_b 1 = 0.$
i. Significa que el logaritmo de 1 es $cero.$</td></tr>
<tr><td>A</td><td>1</td></tr>
</table>

			j. Cuando aumenta el valor de x, el aumento de los valores se produce cada vez más lentamente.
	2	Para establecer relaciones entre las gráficas de dos funciones logarítmicas con diferente base continúa con la misma función $log_b\,x$. Adicionalmente representa en GeoGebra la función $\log_2 x$. Para el deslizador de $log_b\,x$, toma un valor mayor que 2. a. Determina cuál de las dos gráficas corresponde a la de mayor base. b. Escribe rasgos que las diferencien y proporciona una explicación de este hecho. c. Escribe rasgos que compartan y proporciona una explicación de este hecho.	**a.** *Función logarítmica*  *Nota*. Elaboración propia en GeoGebra a. Ejemplo entre el $\log_2 x$ y $\log_8 x$ la base mayor es 8 b. Para $x > 1$, la gráfica de la función de mayor base está por debajo de la de menor base. Para $x < 1$, la de mayor base está por encima de la de menor base. c. Ninguna de las dos cortas al eje y. Las dos cortan al eje x en $x = 1$.
C	3	Concluye para dos funciones logarítmicas crecientes, para $x > 1$ ¿cuál de ellas crece más rápido?	Crece más rápido el del menor base
A	4	Elige un punto B sobre el eje x, traza una perpendicular al eje x por el punto B, determina el punto C de intersección de la gráfica de la recta con la función $\mathrm{f(x)} = \log_8 x$ determina el punto D de intersección de la gráfica de la recta con la función $\mathrm{f(x)} = \log_2 x$ y mide los segmentos BC y BD y calcula con GeoGebra la razón $\frac{BD}{BC}$ a. Mueve el punto B sobre el eje x. ¿Qué sucede con la razón $\frac{BD}{BC}$? b. Cambia el valor de b y nuevamente mueve el punto B sobre el eje x. ¿Qué sucede con la razón $\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{BC}}$? c. Toma para la base b el valor de 8 y encuentra la razón $\frac{BD}{BC}$. Mueve el punto B sobre el eje x. ¿Qué valor encuentras para la razón $\frac{BD}{BC}$? Proporciona una posible explicación del valor encontrado.	*Función logarítmica creciente*  *Nota.* Construcción propia con GeoGebra a. La razón es constante. b. Para dos bases la razón es constante. c. La razón entre las funciones $f(x) = log_2\,x$ y $f(x) = log_8\,x$ es 3 $2^3 = 8$
E	5	Ejercicio para la casa: Gráfica la función $\log_2 x$, $log_5\,x$ y $log_{10}\,x$ en GeoGebra y responde ¿Qué pasa cuando los valores de x se aproximan a 0?	Que las funciones tanto de $\log_2 x$, $\log_5 x$ y $\log_{10} x$ se acerca al eje y, pero no lo cortan. Se concluye que la función logarítmica es asíntota al eje y.
Aspecto para considerar			
Los estudiantes deben poner en práctica todos los conocimientos adquiridos en tareas anteriores, utilizando GeoGebra para representar gráficamente y comunicar sus conjeturas.			

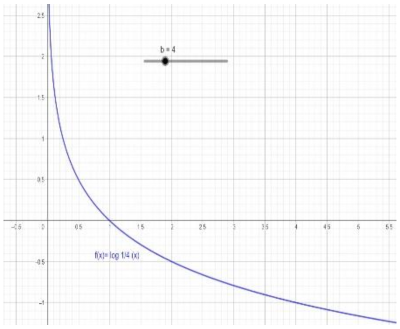
<table>
<tr><td colspan="4">Es recomendable que en ítem 4 se planteen más ejemplos para llegar a la propiedad.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Criterios para evaluar: Rúbrica</td></tr>
<tr><td>Excelente</td><td>Bueno</td><td>Aceptable</td><td>Insuficiente</td></tr>
<tr><td>Utiliza GeoGebra para caracterizar la función logarítmica con base mayor que 1, describe el punto de corte con el eje x, el dominio y el rango y describe los cambios de la representación gráfica de la función con base mayor que 1 cuando se varía la base, incluyendo observaciones en cuanto si son crecientes o decrecientes y a su rapidez de crecimiento.</td><td>Utiliza GeoGebra para caracterizar la función logarítmica con base mayor que 1, y describe el punto de corte con el eje x, el dominio y el rango y describe los cambios de la representación gráfica de la función con base mayor que 1 cuando se varía la base.</td><td>Caracteriza la función logarítmica con base mayor que 1, y describe el punto de corte con el eje x, el dominio y el rango.</td><td>Aunque reconoce la forma de la gráfica de la función logarítmica, no describe sus rasgos comunes para diferentes bases o no establece relaciones con el cambio de base.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Observación</td></tr>
<tr><td colspan="4">Los estudiantes ya han utilizado el software GeoGebra, por lo que están familiarizados con su manejo.</td></tr>
</table>

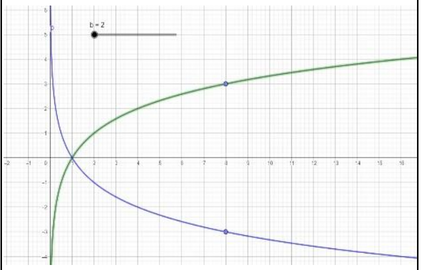
Nota. Construcción propia.

4.5. Tarea 5. Dos aplicaciones de la función logarítmica

A manera de cierre con las funciones logarítmicas, en esta tarea tiene como meta que, a través de GeoGebra, como aplicación de lo estudiado para $log_b x$ con b>1, los estudiantes descubran y analicen las características y regularidades comunes de la función logarítmica cuando la base es mayor que cero y menor que 1. Adicionalmente se propone una aplicación en la que se retoman los aspectos estudiados.

Tabla 11. *Tarea 5*

<table>
<tr><th colspan="4">Descripción general de las actividades</th><th>Tarea 5</th></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivo</td><td colspan="3">Aplicar lo estudiado en tareas anteriores para caracterizar funciones logarítmicas cuya base está entre 0 y 1 y para estudiar una situación práctica.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Recursos</td><td>Cuaderno y Computadora con programa de GeoGebra.</td><td>Tiempo</td><td>80 minutos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Descripción de la tarea</td><td colspan="3">A partir de la gráfica de la función logarítmica con base menor que 1 establezcan el punto de corte con el eje x, el dominio y el rango.
Visualicen los cambios de la función logarítmica de base menor que 1 cuando se varía la base.
Comparan el comportamiento de las funciones de menor que 1 en cuanto a si son crecientes o decrecientes y su rapidez de crecimiento.</td></tr>
<tr><th colspan="3">Actividades</th><th colspan="2">Respuesta esperada</th></tr>
<tr><td>M</td><td>Nº</td><td rowspan="2">Considera la función logarítmica con bases entre 0 y 1. Representa gráficamente en GeoGebra $log_b x$, es decir log (b, x). Para el deslizador toma valores entre 2 y 10. Puesto que $b < 1$, explica por qué $\frac{1}{b} < 1$ y $\frac{1}{b} > 0$, es decir $0 < \frac{1}{b} < 1$.
a. A partir de esta consideración, estudia la función $log_{\frac{1}{b}} x$. Oculta log (b, x) y representa gráficamente en GeoGebra $log_{\frac{1}{b}} x$, es decir $log\left(\frac{1}{b}, x\right)$. Para el deslizador puedes mantener valores entre 2 y 10.
b. Indica el valor elegido para b en el deslizador e indica el valor de $\frac{1}{b}$.
c. Justifica por qué $f(x) = log_{\frac{1}{b}} x$ para $b < 1$ ¿es una función?, indica su dominio y su rango.
d. ¿Es una función creciente o decreciente? Justifica.
e. ¿Para qué valores de x la función toma valores positivos?
f. ¿Para qué valores de x la función toma valores negativos?
g. ¿Para qué valores de x la función corta al eje x?
h. Cambia el valor de b y revisa tus respuestas anteriores.</td><td colspan="2" rowspan="2">
c. $f(x) = \log_{\frac{1}{b}} x$ es una función porque para cada valor de x existe un único valor de y. El dominio es todos los números reales positivo y su rango todos los numero reales.
d. Para esta función $f(x) = \log_{\frac{1}{b}} x$ es decreciente cuando los valores de x crecen los valores de y decrecen.</td></tr>
<tr><td>A</td><td>1</td></tr>
</table>

			e. Para los valores de la función sean positivos, el valor de x debe ser mayor que cero y menor que 1. f. Para los valores que toman la x mayores que 1. g. Para el valor de x=1. h. Las características en cuanto al dominio, rango y corte con el eje x se mantienen.
C	2	Comunica y comparte Compara la gráfica de la función $f(x) = \ log_b x$ con la función $f(x) = \ log_{\frac{1}{b}} x$. Para ello deja visibles ambas funciones en GeoGebra. a. ¿Qué observas en relación con la forma de las gráficas? b. Determina el valor de $log_2 8$ y el valor de $log_{1/2} 8$. ¿Qué relación encuentras entre estos valores? Plantea otros ejemplos para $log_b a$ y $log_{\frac{1}{b}} a, para\ algún\ valor\ de\ a$. Establece una conjetura en relación con esta situación, discútela con tus compañeros de grupo. c. Ya has estudiado la función logarítmica cuando la base es mayor que 1 y cuando la base es menor que 1. ¿Qué sucedería si la base fuera igual a 1?	a. La función $f(x) = \ log_b x$ es creciente y la función f(x)= $log_{\frac{1}{b}} x$ es decreciente, para las dos funciones el eje y es asíntota. b. La relación que se encuentra es que $\log_2 8$ es 3 y $\log_{\frac{1}{2}} 8$ es -3  Las funciones $f(x) = \ log_b x$ y f(x)= $log_{\frac{1}{b}} x$ son una la reflexión de la otra con respecto al eje x c. Para el valor de la base 1, la función logaritmo no existe.

<table>
<tr>
<td>A</td>
<td>3</td>
<td>
Segunda parte de la tarea:
Aplica algunos elementos de lo estudiado a una situación que puede ser familiar para ti.
A cada sonido que escuchamos le corresponde un nivel de intensidad medido en decibeles, el cual se relaciona con la sonoridad, es decir con la percepción que tenemos de un sonido. En la tabla se presentan el valor del nivel de intensidad de algunos sonidos que te pueden parecer familiares. Cuando un sonido tiene un nivel de intensidad 10 dB mayor que otro, al oído le parece dos veces más fuerte, entonces decimos que se duplica la sonoridad. Es decir que un sonido con 10 dB más que otro es percibido por el oído humano 2 veces más fuerte. De este modo, la intensidad de un sonido de 30 dB parece al oído humano 4 veces más fuerte que el sonido de 10 dB; un sonido de 60 dB parece al oído 16 veces más fuerte que un sonido de 10 dB. En la tabla se muestran valores, si le asignamos valor de sonoridad de 1 al umbral de audición es decir al mínimo nivel de intensidad que nuestro oído puede escuchar.
Tabla 12
<i>Nivel de intensidad del sonido y sonoridad</i>
<table>
<tr><th></th><th>Nivel De Intensidad Decibeles</th><th>Sonoridad Asignando 1 Al Umbral De Audición</th><th></th></tr>
<tr><td>Umbral de audición a 1.000 Hz</td><td>0</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>Crujido de hojas</td><td>10</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>Susurro a 1 m de distancia</td><td>20</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>Hogar tranquilo</td><td>30</td><td>8</td><td></td></tr>
<tr><td>Hogar regular</td><td>40</td><td>16</td><td></td></tr>
<tr><td>Oficina regular, música suave</td><td>50</td><td>32</td><td>Nos parece 16 veces más fuerte que</td></tr>
</table>
</td>
<td>a. Al oído humano le parece 64 veces más fuerte.</td>
</tr>
</table>

			crujido de hojas
Conversación normal	**60**	**64**	
Oficina ruidosa, tráfico congestionado	70	128	
Radio con volumen alto	80	256	
Dentro de un camión pesado	90	512	
Automóvil sin silenciador	100	1024	
Martillo neumático	110	2048	
Umbral del dolor	120	4196	

a. A partir de los datos que se presentan en la tabla, ¿cuánto más fuerte le parece al oído humano un radio con volumen alto comparado con un susurro a 1 m de distancia? Muestra cómo lo determinaste.

b. ¿Qué relación encuentras entre los valores que aparecen en la columna de la sonoridad con las potencias de 2?

c. ¿Encuentra una expresión que te permita calcular el valor del nivel de intensidad a partir de los valores asignados en la tabla a la sonoridad?

b. En la columna de la sonoridad aparecen las potencias de 2.

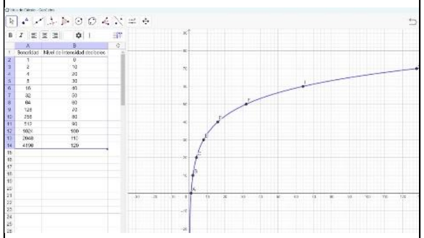
c. $Nivel\ de\ intensidad = 10\log_2 sonoridad$

d. Ingresa a GeoGebra clásico y abre hoja de cálculo para construir una tabla de datos.

e. Crea en GeoGebra la lista de pares de la tabla como puntos en el plano cartesiano.

f. Representa gráficamente en GeoGebra la expresión que propusiste para encontrar el valor del nivel de intensidad a partir de los valores asignados en la tabla a la sonoridad.

f. la gráfica en GeoGebra



Sonoridad	Nivel de intensidad decibeles
1	0
2	10
4	20
8	30
16	40
32	50
64	60
128	70
256	80
512	90
1024	100
2048	110
4196	120

		g. A partir de la gráfica y de acuerdo con la información de la tabla, ¿qué valor de la sonoridad le asignarías a un sonido que al oído humano resulte 1,5 veces más fuerte que una conversación normal? ¿Cuál sería el nivel de intensidad?	g. *La sonoridad sería de* $96 = 64 \times 1,5$ El nivel de intensidad sería 65,7 dB.
Aspecto para considerar			
Los estudiantes deben poner en práctica todos los conocimientos adquiridos en tareas anteriores, utilizando GeoGebra para representar gráficamente y comunicar sus conjeturas.			
Criterios para evaluar: Rúbrica			
Excelente	**Bueno**	**Aceptable**	**Insuficiente**
Utiliza GeoGebra para caracterizar la función logarítmica con base menor que 1, describe el punto de corte con el eje x, el dominio y el rango; la compara con la función logarítmica cuya base es el inverso multiplicativo y explica por medio de la función una situación práctica.	Utiliza GeoGebra para caracterizar la función logarítmica con base menor que 1 y describe el punto de corte con el eje x, el dominio y el rango y explica una situación práctica con los valores de la tabla, pero no de la gráfica.	Caracteriza la función logarítmica con base menor que 1 y describe el punto de corte con el eje x, el dominio y el rango y hace inferencias puntuales para explicar una situación práctica.	Aunque reconoce la forma de la gráfica de la función logarítmica, no describe sus rasgos comunes para diferentes bases o no establece relaciones con el cambio de base.
Observación			
Los estudiantes ya han utilizado el software GeoGebra, por lo que están familiarizados con su manejo. Los estudiantes tienen claro que, si un número m es mayor que 1, entonces $1/m$ es menor que 1.			

Nota. Construcción propia

Capítulo 5. Consideraciones finales

En este capítulo presentamos las consideraciones finales sobre el cumplimiento de los objetivos específicos del trabajo de grado, los cuales se fundamentan en la organización de la descomposición genética preliminar para el diseño de tareas. Con este enfoque buscamos lograr una coherencia entre el contenido matemático, el sistema de representación, las estructuras mentales y los mecanismos de construcción que facilitan el aprendizaje de los estudiantes. Además, a lo largo de esta investigación, reflexionamos sobre nuestro ser, hacer y saber, como profesores de matemáticas, lo cual tuvo un impacto positivo en el desarrollo y la calidad de nuestro trabajo de grado.

5.1. En relación con los objetivos del trabajo de grado

Mediante las tareas propuestas en el diseño se pretende superar las dificultades que los estudiantes podrían enfrentar al trabajar con representaciones gráficas, comenzando con el logaritmo como una operación aplicada a las potencias de la base, extendiendo a los números naturales y avanzando hacia la función logarítmica en los números reales. Esta propuesta plantea el acercamiento a una comprensión gradual. Las tareas contemplan posibles obstáculos relacionados con la interpretación de puntos en el plano cartesiano; el dominio, el rango y las asíntotas de la función logarítmica y la interpretación de las gráficas de dicha función. Para ello, la descomposición genética ha sido elemento que integra lo numérico, lo algebraico y lo gráfico.

A través del uso de tablas de valores y la representación de puntos en el plano cartesiano, se espera facilitar el tránsito entre el manejo operativo del logaritmo al manejo de la función logarítmica, lo cual se puede ver favorecido por el empleó de herramientas como GeoGebra, que permite a los estudiantes explorar dinámicamente cómo los cambios en las bases y los parámetros afectan las gráficas de la función.

El estudio de las regularidades de la función logarítmica es importante para el aprendizaje de su comportamiento y aplicaciones. En este trabajo, nos centramos en el diseño de tareas que permita a los estudiantes identificar y comunicar dichas regularidades, promoviendo así su aprendizaje.

Utilizando la teoría APOE (acción, proceso, objeto y esquema), proponemos una descomposición genética preliminar que estructura cada tarea, como se detalla en la tabla 12. Este análisis se vincula directamente con las tareas diseñadas, ya que cada una se fundamenta en los principios de la teoría APOE, con el objetivo de potenciar el desarrollo en los estudiantes, de las estructuras mentales necesarias para comprender la función logarítmica.

En términos de la competencia matemática de los estudiantes, el estudio de los logaritmos es de importancia de allí que, en nuestra propuesta de tareas y descomposición genética, partimos de logaritmo como operación proponemos estudiar desde las divisiones repetidas. De tal manera que se examine más adelante para en el manejo de grandes números a partir de sus propiedades fundamentales, que simplifican operaciones complejas, como multiplicaciones y divisiones, a través de sumas y restas. La función logarítmica se explora bajo diferentes bases para analizar cómo varía su comportamiento. En este sentido, se propone explorar funciones logarítmicas con bases entre 0 y 1, donde se puede observar en el gráfico un comportamiento decreciente, contrastando con bases mayores a 1, donde la función es creciente.

Un aspecto central de este estudio es la aplicación práctica de las escalas logarítmicas en situaciones reales, como la medición de la intensidad del sonido, expresada en decibeles. Aquí se puede identificar cómo los logaritmos permiten simplificar y representar valores que abarcan un rango amplio de magnitudes, facilitando así su interpretación y análisis.

En cuanto al uso de GeoGebra, este software ha sido clave para visualizar y manipular gráficamente las funciones logarítmicas, de manera que los estudiantes se involucren activamente en el proceso de aprendizaje, mejorando su comprensión analítica y gráfica, y fomentando un aprendizaje autónomo e interactivo. Además, el uso de esta tecnología sirve para dinamizar la clase y hacer que el contenido sea accesible y atractivo.

Tabla 13

Relación entre la Descomposición Genética y el Diseño de Tareas para la Comprensión de la Función Logarítmica.

	Elemento matemático	**Sistema de representación**	**Estructuras y mecanismos mentales**	
TAREA 1	El logaritmo como operación.	Simbólico	Acción de dividir un número (argumento) de manera reiterada entre una misma cantidad (base).	Simplificar la escritura utilizando la notación logaritmo para expresar el número de divisiones realizadas mediante la división repetida, indicar el significado de la base y el valor del logaritmo.
		Simbólico	Acción de representar mediante la notación de logaritmo atendiendo a los requerimientos de economía en la escritura y en la sintaxis aritmética y algebraica.	
TAREA 2	El logaritmo como operación.	Simbólico	Acción de examinar regularidades de sucesiones numéricas a través de la diferencia y el cociente para establecer las razones.	Encontrar regularidades de las progresiones aritméticas y geométricas y establecer relaciones con el logaritmo indicando la base, el argumento y su valor.
	Funciones logarítmicas particulares.	Simbólico	Interiorización de las acciones de identificar razones aritméticas y razones geométricas en las correspondientes progresiones.	
TAREA 3	El logaritmo como operación.	Simbólico	Acción de reconocer las propiedades del logaritmo por medio de progresiones aritmética y geométrica	Reconocer las propiedades del logaritmo por medio de progresiones aritmética y

		Simbólico	Acción de comparación de diferencias y cocientes de dos valores consecutivos de la variable independiente y dependiente respectivamente.	geométrica tomando en cuenta la razón de la progresión geométrica y la diferencia de la progresión aritmética.
		Gráfico	Acción de ubicar en el plano cartesiano puntos correspondientes a parejas de coordenadas donde el argumento corresponde a x y el logaritmo a y.	Establecer relaciones entre las coordenadas de algunos puntos del plano cartesiano que pertenecen a la gráfica de la función logaritmo con los términos de las progresiones aritmética y geométrica.
			Acción de visualizar las progresiones geométrica y aritmética en los valores enteros ubicados en la variable independiente y dependiente.	
			Interiorización de las acciones de ubicar diferentes puntos en la curva función logarítmica en el proceso de construcción de la gráfica de la función sin recurrir a realizar las acciones de remplazar en la fórmula diversos valores.	Ubicar diferentes puntos en la curva función logarítmica en el proceso de construcción de la gráfica de la función sin recurrir a realizar las acciones de remplazar en la fórmula diversos valores.
Tarea 4	Funciones logarítmicas particulares.	Simbólico	Acción de calcular, sustituyendo numéricamente, en la expresión de una función logarítmica con una base dada.	Acción de evaluar numéricamente la expresión de función logarítmica con una base dada.
		Gráfico	Acción de examinar cuando los valores de x se aproximan a cero que pasa con la curva de la función.	
			Acción de visualizar el punto de corte de cada gráfica de la función logarítmico con particularidad.	
		Simbólico	Acción de visualizar las variaciones de la función dependiente del cambio que se establece en las bases.	Visualizar y comparar las variaciones de la función dependiente cuando realizan cambios de base.
			Interiorización de comparar el comportamiento de la función de acuerdo con su cambio de base	
			Interiorización de las acciones de comparación de diferencias y cocientes de dos valores de la variable dependiente e independiente respectivamente, para buscar las relaciones entre ellas $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$.	

			Interiorización de las acciones de examinar los valores de la función cuando los valores de x se aproximan a cero.	
			Interiorización de acciones de comparar el comportamiento de las funciones de acuerdo con sus bases; crecientes y decrecientes.	Comparar el comportamiento de las funciones de acuerdo con sus bases; crecientes y decrecientes.
		Gráfico	Comparación gráfica de la familia de funciones logarítmica según su base para identificar la razón de cambio; crecimiento, decrecimiento.	
	De las funciones logarítmicas particulares a la coordinación entre familias de funciones.	Gráfico	Comparación entre diferentes funciones crecientes o decrecientes que permitan examinar la monotonía.	
			Comparación de curvas logarítmica para establecer el eje y como asíntota, el corte de la función con el eje x, el dominio y el rango de las funciones logarítmica.	Comparación de curvas logarítmica para establecer el eje y como asíntota, el corte de la función con el eje x, el dominio y el rango de las funciones logarítmica.
			Comparación entre diferentes funciones para caracterizar la rapidez de cambio.	
Tarea 5	Funciones logarítmicas particulares.	Simbólico	Acción de calcular, sustituyendo numéricamente, en la expresión de una función logarítmica con una base dada.	Acción de evaluar numéricamente la expresión de función logarítmica con una base dada.
		Gráfico	Acción de examinar cuando los valores de x se aproximan a cero y qué pasa con la curva de la función.	
			Acción de visualizar el punto de corte de cada gráfica de la función logarítmico con particularidad.	
		Simbólico	Acción de visualizar las variaciones de la función dependiente del cambio que se establece en las bases.	Acción de visualizar las variaciones de la función dependiente cuando re realizan cambios de base.
		Simbólico	Interiorización de comparar el comportamiento de la función de acuerdo con su cambio de base.	
		Simbólico	Interiorización de las acciones de examinar los valores de la función cuando los valores de x se aproximan a cero.	
		Simbólico	Interiorización de acciones de comparar el comportamiento de las funciones de acuerdo con sus bases; crecientes y decrecientes.	Comparar el comportamiento de las funciones de acuerdo con sus bases; crecientes y decrecientes.

		Gráfico	Comparación gráfica de la familia de funciones logarítmica según su base para identificar la razón de cambio; crecimiento, decrecimiento.	
	De las Funciones logarítmicas particulares a la coordinación entre familias de funciones.	Gráfico	Comparación entre diferentes funciones crecientes o decrecientes que permitan examinar la monotonía.	
			Comparación de curvas logarítmica para establecer el eje y como asíntota, el corte de la función con el eje x, el dominio y el rango de las funciones logarítmica.	Comparación de curvas logarítmica para establecer el eje y como asíntota, el corte de la función con el eje x, el dominio y el rango de las funciones logarítmica.

Nota. Construcción propia

5.2. Reflexión sobre cómo el desarrollo del trabajo de grado tuvo efecto en el ser, saber y hacer de los autores.

El ser del profesor de matemáticas, que abarca nuestra subjetividad como docentes incluyendo emociones, actitudes, valores y conciencia sociopolítica, ha tenido un impacto significativo en el desarrollo de nuestro trabajo de grado. Estos factores no solo han guiado nuestras decisiones pedagógicas y metodológicas, sino que también han influido en la manera en que abordaremos las interacciones con los estudiantes y los cambios que se han generado en la relación con los colegas. La empatía nos permitió diseñar actividades más inclusivas, la perseverancia nos ayudó a enfrentar los desafíos del proceso investigativo y la humildad nos permitió mantener una actitud abierta al aprendizaje, estos aspectos del ser han sido fundamentales en la construcción y orientación de nuestro diseño de tareas y experiencia de vida en Colombia.

Nuestras acciones como profesoras de matemáticas abarcan tanto lo que hacemos dentro del aula como fuera de ella. Esto incluye no solo la enseñanza de las matemáticas, sino también nuestra participación en la comunidad educativa y la interacción con colegas. La experiencia en el aula como estudiantes de la Maestría en Docencia de la Matemática y el trabajo teórico de indagación nos permitió identificar las necesidades y desafíos de nuestros estudiantes, lo que guía la selección de estrategias pedagógicas y herramientas tecnológicas más efectivos. Al concluir este trabajo de grado, nos damos cuenta de la importancia de formarnos no solo para enseñar, sino también para desempeñarnos eficazmente en la institución y en el país, contribuyendo a la creación de un entorno educativo más dinámico y enriquecedor.

Tomamos mayor conciencia respecto a que el saber del profesor de matemáticas no debe limitarse solo a sus conocimientos matemáticos, sino que también debe abarcar disciplinas como la didáctica, la reflexión sobre la práctica y otros saberes contextuales. Reconocemos que es esencial que nos actualicemos constantemente para enfrentar los nuevos desafíos sociales y educativos. Así, al cursar cada uno de los seminarios durante estos meses de estudio, un aspecto que impactó positivamente nuestra formación fue encontrarnos con el conocimiento de nuestros docentes que forman parte de la Universidad Pedagógica Nacional, en el Departamento de Matemáticas y en especial con los conocimientos y calidades de nuestro profesores directores de tesis, que fue clave en la construcción y desarrollo de nuestro trabajo de grado, ya que nos permitió diseñar una propuesta de tareas adaptada a las realidades de los estudiantes y a los avances en didáctica de la matemática.

De manera similar a lo expuesto anteriormente, la presentación de avance de trabajo de grado en posters, como se propuso en una actividad de la maestría, nos brindó la oportunidad de interactuar con matemáticos del Departamento de la Universidad Pedagógica lo que nos hizo conscientes de que aún nos faltaba mucho por aprender. Hoy en día, nos sentimos seguras de nosotras mismas para afrontar los desafíos que se nos presentan, reconociendo que al principio de los seminarios de la Maestría había muchas cosas que no sabíamos cómo abordar. Al combinar nuestro conocimiento de la matemática con enfoques de cada didáctica específica, logramos comprender procesos del pensamiento matemático que nos ha permitido estudiar y crear actividades más exigentes, dinámicas y accesibles que favorecen aprendizajes significativos y la participación de nuestros estudiantes.

Para nosotras, fue algo novedoso descubrir la cantidad de investigaciones sobre el objeto de estudio para esta innovación, lo que nos permitió aprender a seleccionar materiales con información relevante sobre las funciones logarítmica para respaldar el diseño de la tarea. Además, buscamos que los estudiantes sientan satisfacción durante su aprendizaje, por lo que utilizaremos GeoGebra en el aula para hacer el proceso más dinámico y enriquecedor.

El término de esta innovación representa un logro importante para nosotras, ya que refleja el esfuerzo y dedicación invertidos en el proceso hasta llegar a esta etapa, esperamos cumplir con éxito el trabajo una vez que apliquemos este diseño de tarea en el aula con nuestros estudiantes.

No obstante, nuestra intención es difundir no solo con los estudiantes todo lo que hemos aprendido en todo este tiempo que estuvimos aquí en Colombia. Una vez en Paraguay, aspiramos a formar una red de educadores y semilleros de matemáticas de cálculo, con el fin de seguir compartiendo los conocimientos adquiridos, generar intercambios fructíferos y promover la mejora continua en la enseñanza de esta disciplina.

Referencias

Abrate, R. S., y Pochulu, M. D. (2007). Ideas para la clase de logaritmos. UNIÓN - *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 3(10). pp. 77-94. Recuperado a partir de https://revistaunion.org/index.php/UNION/article/view/1269

Arnon, L., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M., y Weller, K. (2014). *APOS Theory a framework for research and curriculum education. Springer Netherlands*. https://doi.org.//10.1007/978-1-4614-7966-6

Bocanegra, I., Galeano, O. D. y Huérfano, H. V. (2013). *Diseño de una herramienta didáctica para la formación del profesor de matemáticas utilizando elementos históricos de lo logarítmico y lo exponencial*. [Tesis de maestría en docencia de las matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional]. Repositorio institucional UPN. Recuperado de: http://hdl.handle.net/20.500.12209/199.

Bonilla, S., Camargo U, L., Castiblanco, A., y Vanegas, Y. (2002). Pensamiento Espacial y sistemas Geométricos. En. *Estándares Curriculares - Área Matemáticas: Aportes Para El Análisis*(pp. 34 -47*).* Asociación Colombiana De Matemática Educativa, ASOCOLME https://shorturl.at/Nzl5Y

Cano Villamil, M. I., y García Caro, D. C. (2016). *Resignificando la Función Logarítmica una Mirada desde la Covariación y Enfoque Sociepistemológico: Una Propuesta Didáctica*. [Tesis de pregrado, licenciatura en matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional]. Repositorio Institucional UPN.

Castillo, L. A. B., Gutiérrez, R. E. A., y Prieto, J. L. G. (2013). Una perspectiva de análisis de las transformaciones geométricas en curvas de la función f (x)= e^ ax utilizando el GeoGebra. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, 2(2), 81-92.

Castro Díaz, L., y Forero Toro, C. A. (2019). *Razonamiento covariacional con tecnologías digitales, un cambio hacia el cálculo.* [Tesis de maestría en Docencia de la matemática. Universidad Pedagógica Nacional]. Repositorio Institucional UPN.

Duval, R. (2016). *Las condiciones cognitivas del aprendizaje de la geometría. Desarrollo de la* *visualización, diferenciaciones de los razonamientos, coordinación de sus funcionamientos*. En Duval, R., y Sáenz, A. Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Dubinsky, E. (2000). De la investigación en matemática De la investigación en matemática teórica a la investigación en matemática educativa: un viaje personal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática*, 3(1), 47-70

Farfán Márquez, R. M., y Ferrari Escolá, M. (2002). *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo*. En 62-67. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados. https://shorturl.at/g9Aws.

Gacharná, L, O. (2012). *Algunas consideraciones didácticas sobre el concepto de logaritmo y de función logarítmica y sus posibilidades en la educación básica y media.* [Tesis de maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de Colombia]. https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/21002

González, R. I., Zaldívar, R. J. D., Morelos, E. S. C. (2020) Dificultades en la construcción e interpretación de gráficas de funciones en estudiantes de nivel superior. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 33 (1), 40 - 48

González Astudillo, M. T. y Vargas Hernández, J. (2007). *Segmentos de la historia: la función logarítmica*. Matemática: Enseñanza Universitaria, 129-144.

Hernández Sánchez, M., y Ferrari Escolá, M. (2007). La Emergencia De Los Logaritmos Como Herramienta Para Facilitar Cálculos. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 20, 507-512. https://shorturl.at/21Hd4

Hernández, M. y Ferrari, M. (2005). Los logaritmos a partir de la covariación de sucesiones. (J. Lezama, M. Sánchez, y J. Molina, Edits.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 18, 531-536. https://shorturl.at/XjQYs

Jiménez Espinosa, A., Suárez Ávila, N. Y., y Galindo Mendoza, S. M. (2010). La Comunicación: Eje en la clase de Matemáticas. Praxis y Saber, 1(2), 173-202.

Johnston-Wilder, S., y Mason, J. (2004). *Fundamental constructs in mathematics education*.

Routledge.

Lucas Ávila, G. E., y Aray Andrade, A. C. (2023). GeoGebra como herramienta didáctica para el fortalecimiento del aprendizaje de secciones cónicas en bachillerato. *Revista Científica Arbitrada Multidisciplinaria PENTACIENCIAS*, 5, 386-400.

Ministerio de Educación y Ciencias. (2014). Actualización *Curricular del Bachillerato Científico de la Educación Media - Plan Común: Matemática y sus Tecnologías*. MEC

Pochulu, M., Font, V., y Rodríguez, M. (2013). Criterios de diseño de tareas para favorecer el análisis didáctico en la formación de profesores. *In Congreso Ibero-americano de Educação Matemática*. (Vol. 7).

Portilla Ciriquián, J. (2014). *Uso de GeoGebra como recurso didáctico para la enseñanza de funciones gráficas en 1° de Bachillerato de ciencias y tecnología*. [Tesis de master universitario en formación del profesorado en educación secundaria y bachillerato. Universidad internacional de la Rioja]. REUNIR.

Sanabria, M. D. (2016). *El concepto de logaritmo: una revisión histórica, bibliográfica y una propuesta didáctica en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico*. [Tesis de pregrado Licenciatura en educación matemática. Universidad Nacional de Centro de la Provincia de Buenos Aires] RIDAA.

Stewart, J. (2012). *Cálculo de una variable*: Trascendentes tempranas (7ma ed.). Cengage Learning.

Spivak, M. (2012). *Cálculo* (3ra ed., JM Oller Sala y L. Serra Camó, Trads.). Editorial Reverté.

Trigueros, M., y Oktaç, A. (29 de abril de 2019). *Diseño de tareas en la teoría APOS*. Avances de Investigación en Educación Matemática, págs. 43-55.

Valenzuela García, J., y Gutiérrez Marfileño, V. E. (2018). Desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de bachillerato a través de la generalización visual de sucesiones de figuras. *Educación matemática*, 30(2), 49-72.

Vargas Hernández, J., Vargas Hernández, N., y González Astudillo, M. T. (2020). Una

Modelación de Mecanismos de Construcción y las Propiedades de los Logaritmos. En J. A. Blanco Puentes (Ed.). Resultado del desarrollo de métodos y técnicas de investigación (pp. 251 -276). Universidad Colegio Mayor de Cundinamarca.

Vargas Hernández, J., Cano Villamil, M. I., y Rúa Vásquez, J. A. (2022). Deconstrucción de la función logarítmica: formación de profesores. *Eco Matemático*, 13(1), 102–116. https://doi.org/10.22463/17948231.3919

Vargas Hernández, J., y González Astudillo, M. T. (2022). *La enseñanza de la función logarítmica como inversa de la función exponencial: un estudio de caso*. Investigación en educación matemática: homenaje a los profesores Pablo Flores e Isidoro Segovia.

Vargas, J. (2013). *Análisis de la práctica docente universitario de precálculo: Estudio de casos en la enseñanza de la función exponencial*. [Tesis Doctoral. Universidad de Salamanca]. Repositorio documental Gredos.

Vargas, J. (2024). (Comunicación personal, mayo, 23, 2024)

Zaslavsky, O., y Sullivan, P. (Eds.). (2011). Constructing knowledge for teaching secondary mathematics: *Tasks to enhance prospective and practicing teacher learning* (Vol. 6). New York, NY: Springer.

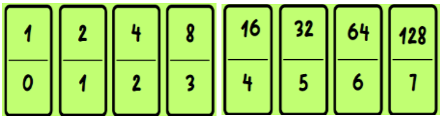
Anexos

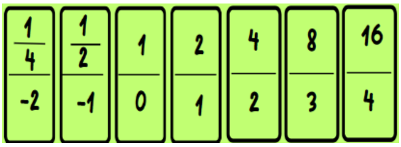
Anexo A. Logaritmo como división repetida

<table>
<tr><th colspan="3">Descripción general de las actividades</th><th>Tarea 1</th></tr>
<tr><td>Objetivo</td><td colspan="3">Construir el concepto de logaritmo a través de división repetida e identificar su notación.</td></tr>
<tr><td>Recursos</td><td>Lápiz y Papel</td><td>Tiempo</td><td>80 minutos</td></tr>
<tr><td>Descripción de la tarea</td><td colspan="3">La actividad está orientada a establecer conjeturas que lleven a la definición de logaritmo mediante el uso de división repetida.
Se espera que los estudiantes avancen en simplificar la escritura utilizando la notación de logaritmo para expresar el número de veces que se realizó la división entre el mismo número, indicar el significado de la base y el valor del logaritmo.
La tarea presentada está diseñada para el trabajo en equipos de hasta tres integrantes. Las actividades dan lugar a la discusión, con la escucha activa y al trabajo cooperativo de los estudiantes.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Actividades</td></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="3">Realizar restas sucesivas con el sustraendo 5. Se debe restar un número por un mismo sustraendo las veces que sea necesario hasta que dé 0. Los números para restar son 10, 25, 30 y 45.
a. ¿Cuántas veces sucesivas hay que restar 5 al 25 para que dé 0? Y ¿al 30? y ¿al 45?
b. ¿Cuál es la operación que permite resumir estas restas sucesivas?
Escríbelo simbólicamente</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="3">A partir del número dado, realizar divisiones entre 2 las veces que sea necesario hasta que dé cociente 1. Los números para dividir sucesivamente entre 2 serán 32, 64, 128, 256
a. ¿Cuántas veces dividiste el número dado entre 2 hasta obtener como cociente 1?
b. Completa la siguiente tabla con los resultados obtenidos.
<table>
<tr><th>Número</th><th>Número de divisiones (entre 2) hasta obtener como cociente 1</th></tr>
<tr><td>32</td><td></td></tr>
<tr><td>64</td><td></td></tr>
<tr><td>128</td><td></td></tr>
<tr><td>256</td><td></td></tr>
</table>
c. Construye una tabla como la anterior, de las divisiones que debes realizar a partir de 81, 243 y 729 entre 3 hasta obtener como cociente 1.
d. ¿Qué sucede con la cantidad de divisiones que debes realizar entre 3, cuanto mayor es el número dado?
e. ¿Cómo podrías plantear un ejercicio similar a los que has realizado en divisiones sucesivas con 2 y con 3, ahora con un número diferente, por ejemplo, con 5?</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="3">¿Será que, en lugar de hacer tantas divisiones, este proceso de división repetida se puede resumir de alguna manera en una nueva operación?</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>4</td><td>En la tabla anterior 729 fue divido por 3 exactamente 6 veces. Si imaginamos una nueva operación para determinar el número de divisiones entre 3 que tuviste que realizar:
a. ¿Cuál es el resultado de esta nueva operación?
b. ¿Cuáles son los números diferentes al resultado, que intervienen en esa operación</td></tr>
<tr><td rowspan="2">5</td><td>A partir de este procedimiento de división repetida tenemos que: Para el número 32 se realizaron 5 divisiones entre 2, lo cual escribimos como $\log_2 32 = 5$ que se lee “Logaritmo en base 2 de 32 es igual a 5”.
Para el número 729 se realizaron 6 divisiones entre 3, lo cual escribimos como $\log_3 729 = 6$ que se lee “Logaritmo en base 3 de 729 es igual a 6”.
a. Completa la información de la tabla
<table>
<tr><th>Número</th><th>Logaritmo</th></tr>
<tr><td>32</td><td>$\log_2 32 =$</td></tr>
<tr><td>64</td><td>$\log_2 64 =$</td></tr>
<tr><td>128</td><td>$\log_2 128 =$</td></tr>
<tr><td>256</td><td>$\log_2 256=$</td></tr>
</table>
b. Completa la tabla mediante la división repetida.
<table>
<tr><th>Logaritmos</th></tr>
<tr><td>$\log_2 2 =$</td></tr>
<tr><td>$\log_2 4 =$</td></tr>
<tr><td>$\log_2 8 =$</td></tr>
<tr><td>$\log_2 16=$</td></tr>
<tr><td>$\mathrm{Log}_2 512=$</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>c. Realiza ejercicios similares. Toma el número 81 y determina el número de divisiones entre 3 que debes realizar.
d. Construye una tabla para logaritmos en base 3.
e. Considera el número 625 y realiza divisiones entre 5 hasta obtener como cociente 1. Construye una tabla para logaritmos en base 5.</td></tr>
<tr><td>6</td><td>A partir de las actividades desarrolladas, determina el valor de:
$\log_3 3$ y $\log_2 1$.</td></tr>
<tr><td>7</td><td>Determina si existe el valor de $\log_2 0$. Explica tu respuesta.</td></tr>
<tr><td>8</td><td>¿Qué sucede si realizamos el procedimiento de la división repetida entre 2 al número 50?</td></tr>
<tr><td>9</td><td>¿Qué puedes decir del valor del $\log_2 50$?</td></tr>
<tr><td>10</td><td>Ejercicio para la casa
Indaga, en libros e internet, ¿cómo se calculan estos logaritmos: $\log_2 1$, $\log_5 1$, $\log_{10} 1$?</td></tr>
</table>

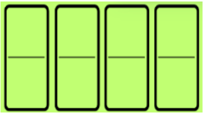
Anexo B: Examinando propiedades del logaritmo

<table>
<tr><th colspan="3">Descripción general de las actividades</th><th>Tarea 2</th></tr>
<tr><td>Objetivo</td><td colspan="3">Reconoce las propiedades del logaritmo a partir del trabajo con material concreto.</td></tr>
<tr><td>Recursos</td><td>Cuaderno, Bolígrafo, Fichas: 10 y Fichas en blanco: 14</td><td>Tiempo</td><td>80 minutos.</td></tr>
<tr><td>Descripción de la tarea</td><td colspan="3">Establecer la relación entre las progresiones geométricas y aritméticas, y vincular este trabajo con el concepto de logaritmo de números naturales, inicialmente de los números naturales que corresponden a los términos de la progresión geométrica.
Mediante esta tarea se espera que los estudiantes avancen en encontrar regularidades de las progresiones aritméticas y geométricas y establecer relaciones con el logaritmo indicando la base, el argumento y su valor.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Actividades</td></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="3">Utiliza estas fichas tipo dominó. Para ello trabajas en grupos de tres integrantes. Se entregan a cada grupo de estudiantes 8 fichas.
Figura 10
<i>Fichas tipo dominó de progresión geométrica razón 2 y progresión aritmética de diferencia 1</i>


<i>Nota.</i> Adaptado de Hernández y Ferrari (2007).
a. Ordena las fichas de menor a mayor de tal manera que en la parte inferior aparezcan los números de uno en uno.
b. ¿Qué regularidad observas en los números superiores de las fichas, tal como están ordenadas?
c. ¿Qué regularidad estableciste en los números inferiores de las fichas, tal como están ordenadas?
d. Dado el orden que observas en la secuencia de las fichas, si agregamos 3 fichas a la derecha, ¿cuáles serían los valores correspondientes en la parte inferior y superior esas fichas? Escribe tu respuesta.</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="3">Ordena las fichas como aparecen en la siguiente imagen.
Figura 11
<i>Progresión geométrica y progresión Aritmética de números enteros</i>


<i>Nota</i>. Adaptado de Hernández y Ferrari (2007).</td></tr>
</table>

	Recuerda que: La regularidad de una progresión aritmética es que existe una constante d entre cada término y el término anterior. La regularidad de una progresión geométrica es que existe una razón r (razón común) entre cada término y el anterior. Con tus compañeros de grupo, recuerda la regularidad que mantienen los valores superiores. También, ten presente la regularidad de los valores inferiores. a. Procede con esas mismas regularidades y coloca 3 fichas a la izquierda que mantengan la misma secuencia, ¿cuáles serían los valores? Escribe tu respuesta.
3	Discute con tus compañeros la solución y llega a una conclusión
4	Manteniendo el orden de las fichas, presenta la información en una tabla.
5	Discute y comunica al grupo la respuesta de esta pregunta ¿Encuentras alguna relación entre los términos de las progresiones y las potencias de 2?
6	Establece la relación, escribe una progresión geométrica de razón 3 que empiece en 1.
7	Diseña las fichas con esta progresión geométrica de razón 3. a. Coloca una ficha más a la derecha y una ficha más a la izquierda, que continúe con esta progresión geométrica. ¿Qué clase de progresión es la secuencia que se presenta en la parte inferior de las fichas? Escribe tu respuesta. b. Presenta la información en una tabla. c. ¿Encuentras alguna relación con las potencias de 3 en la progresión geométrica? Completa la tabla.
8	Discute y comunica tu respuesta a. ¿Cómo podemos relacionar los resultados obtenidos con la tarea anterior de la división repetida? b. En esas secuencias de razón 3. De: 1, 3, 9 y 27 ¿qué operación puedes realizar para desde el último número volver al anterior? ¿Cuántas divisiones debes hacer para volver a la unidad?
9	Responde en grupo a. ¿A qué número se debe elevar 2 para que dé 16? b ¿A qué número se debe elevar 2 para que dé 64? c. ¿Entre qué números enteros se encuentra el exponente al que se debe elevar 2 para que dé 50? d. ¿A qué número se debe elevar 3 para que dé 81? e. ¿A qué número se debe elevar 3 para que dé 729? f. ¿Entre qué números enteros se encuentra el exponente al que se debe elevar 3 para que dé 100?
10	En las fichas en blanco haz una secuencia geométrica de razón 7 y construye la progresión aritmética de diferencia 1 que le correspondería iniciando desde -2.

	Figura 12 *Ficha tipo dominó en blanco*  *Nota.* Adaptado de Hernández y Ferrari (2007). a. Presenta los datos en una tabla y establece relaciones con los logaritmos y con las potencias del número. b. Completar la siguiente tabla, elige cuál va a ser la razón y cuál la diferencia. Luego procede.
11	Explica lo que observas en las tablas de las progresiones geométrica y aritmética con los logaritmos.

Anexo C. Relación de la progresión aritmética y la progresión geométrica con la función logarítmica y cómo estas progresiones están conectadas con dicha función.

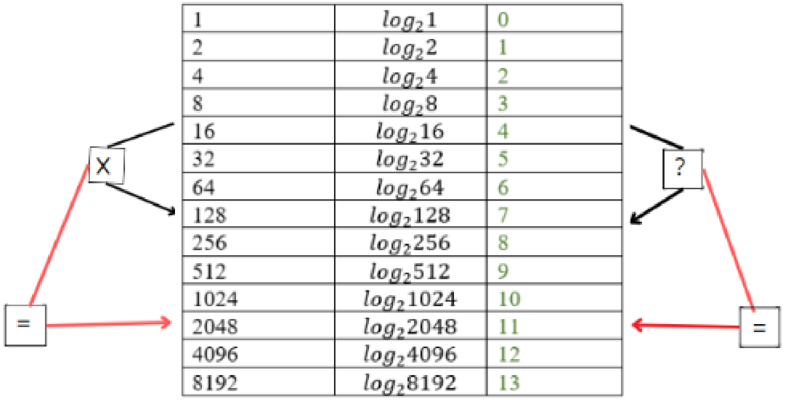
Descripción general de las actividades			Tarea 3
Objetivo	Relacionar la progresión aritmética y la geométrica con la función logarítmica, para comprender cómo se forman los pares ordenados de la función logarítmica.		
Recursos	Cuaderno, Bolígrafos y Computadora con programa de GeoGebra	**Tiempo**	120 minutos
Descripción de la tarea	Se espera que en esta tarea los estudiantes avancen en: Reconocer las propiedades del logaritmo por medio de progresiones aritmética y geométrica tomando en cuenta la razón de la progresión geométrica y la diferencia de la progresión aritmética. Establecer relaciones entre las coordenadas de algunos puntos del plano cartesiano que pertenecen a la gráfica de la función logaritmo con los términos de las progresiones aritmética y geométrica. Ubicar diferentes puntos en la curva función logarítmica en el proceso de construcción de la gráfica de la función sin recurrir a realizar las acciones de remplazar en la fórmula diversos valores.		
Actividades			
1	Relacionar entre los logaritmos y las operaciones de producto y división.		

a. Completa la siguiente tabla.

1	$log_2 1$	
2	$log_2 2$	
4	$log_2 4$	
8	$log_2 8$	
16	$log_2 16$	
32	$log_2 32$	
64	$log_2 64$	
128	$log_2 128$	
256	$log_2 256$	
512	$log_2 512$	
1024	$log_2 1024$	
2048	$log_2 2048$	
4096	$log_2 4096$	
8192	$log_2 8192$	

2

Observa la siguiente tabla y responde



1	$log_2 1$	0
2	$log_2 2$	1
4	$log_2 4$	2
8	$log_2 8$	3
16	$log_2 16$	4
32	$log_2 32$	5
64	$log_2 64$	6
128	$log_2 128$	7
256	$log_2 256$	8
512	$log_2 512$	9
1024	$log_2 1024$	10
2048	$log_2 2048$	11
4096	$log_2 4096$	12
8192	$log_2 8192$	13

a. ¿Con qué signo de operación reemplazarías el signo de la interrogación?

b. Llena la siguiente tabla.

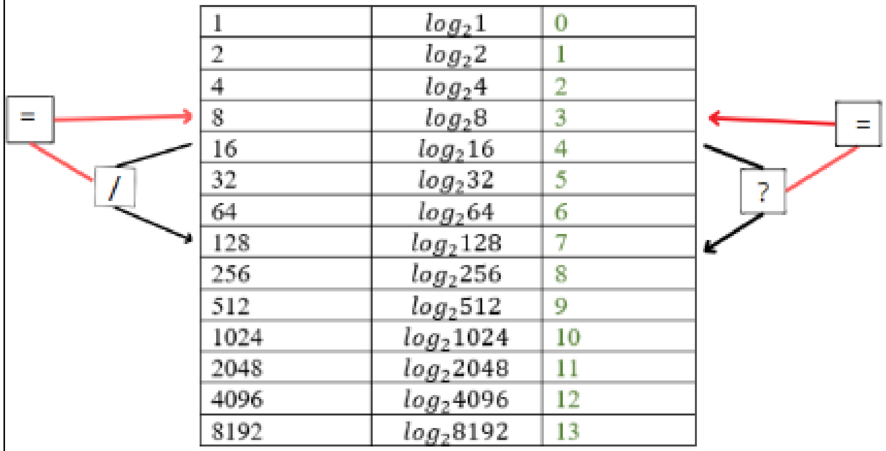
$log_2 16$	$log_2 128$	$log_2(16 \times 128) = log_2 2048$

c. Construye otros dos ejemplos y registra la información en una tabla como la anterior.

d. ¿Qué observas en relación con los valores en cada caso?

3

Observa y responde



1	$log_2 1$	0
2	$log_2 2$	1
4	$log_2 4$	2
8	$log_2 8$	3
16	$log_2 16$	4
32	$log_2 32$	5
64	$log_2 64$	6
128	$log_2 128$	7
256	$log_2 256$	8
512	$log_2 512$	9
1024	$log_2 1024$	10
2048	$log_2 2048$	11
4096	$log_2 4096$	12
8192	$log_2 8192$	13

a. ¿Con qué signo de operación reemplazarías el signo de la interrogación?

b. Escribe los valores de los logaritmos en la siguiente tabla.

$log_2 128$	$log_2 16$	$log_2 \left(\frac{128}{16}\right)$

c. ¿Qué observas en relación con los valores?

d. Revisa si tu observación se cumple para más cocientes, para ello construye otros dos ejemplos y registra la información en una tabla como la anterior.

4

Revisa la tabla inicial, considera que $8^4 = 4096$

a. Escribe los valores de los logaritmos en la siguiente tabla.

$log_2 8$	$log_2 8^4$

b. ¿Qué observas en relación con los valores?

c. Construye otros dos ejemplos y registra la información en una tabla como la anterior.

d. Explica estos resultados a partir de lo que has observado en relación con el logaritmo de un producto.

5

Para establecer una relación entre los logaritmos y lo que definiremos como función logarítmica, sigue las instrucciones:

a. Ingresa a GeoGebra clásico y abre hoja de cálculo para construir una tabla de datos.

b. Primero, llena la primera columna, etiquetada con **A**. Comienza escribiendo el 1, en la primera celda. En la celda de abajo, coloca el resultado de multiplicar 1 por 2. En la siguiente celda, multiplica el valor de la celda anterior por 2 y continua de esta manera sucesivamente.

Luego en la segunda columna, etiquetada con **B**, comienza en el número 0 en la primera celda. En la celda siguiente, suma 1 al valor anterior. Repite este proceso, sumando 1 al

<table>
<tr><td></td><td>valor de cada anterior hasta completar la columna.
c. En grupo, observa y analiza las columnas A y B, comparándolas con la tabla construida utilizando las fichas en la tarea anterior. Discute y establece la relación entre ambas. ¿Qué patrones o regularidades puede identificar?
d. Crea en GeoGebra una lista de pares de la tabla como puntos en el plano cartesiano. Para ello, selecciona el ícono de listas de puntos. Recuerda que, al formar cada par de coordenadas, la progresión geométrica debe representarse en el eje <i>x</i> y la progresión aritmética en el eje <i>y</i>.</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Representa los pares de puntos en el ambiente gráfico de GeoGebra.
a. Dirígete al menú de entrada y digita log (2, x), lo cual corresponde a la función $\log_2 x$, la cual corresponde a una función logarítmica, a la que nos referimos como Función logarítmica en base 2. En esta tarea y en próximas caracterizaremos la función logarítmica.
b. ¿Qué observas en relación con la gráfica obtenida para la función y los puntos de la tabla?
c. Llena la siguiente tabla a partir de la gráfica.
<table>
<tr><td>x</td><td>$\log_2$ x</td></tr>
<tr><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>8</td><td></td></tr>
<tr><td>16</td><td></td></tr>
<tr><td>32</td><td></td></tr>
<tr><td>64</td><td></td></tr>
<tr><td>128</td><td></td></tr>
<tr><td>256</td><td></td></tr>
<tr><td>512</td><td></td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>7</td><td>Discute en plenarias las siguientes preguntas
a. ¿Cuál es el valor de $\log_2 50$? ¿Qué significado tiene?
b. ¿Cuál es el valor de $\log_2 1$? ¿Qué significado tiene? Explique
c. ¿Tiene sentido el $\log_2 0$? ¿Por qué? Explique
d. ¿Por qué crees que mediante la función $\log_2$ x no hay valores para valores negativos del <i>x</i>?</td></tr>
</table>

Anexo D. Regularidades de la función logarítmica

Descripción general de las actividades			Tarea 4
Objetivo	Identificar y comprender las regularidades en la función logarítmica y sus familias.		
Recursos	Cuaderno y Computadora con programa de GeoGebra	**Tiempo**	120 minutos
Descripción	Mediante esta tarea se presentan actividades para que los estudiantes.		

de la tarea	A partir de la gráfica de la función logarítmica con base mayor que 1 establezcan el punto de corte con el eje x, el dominio y el rango. Visualicen los cambios de la función logarítmica de base mayor que 1 cuando se varía la base. Comparan el comportamiento de las funciones de base mayor que 1 en cuanto a si son crecientes o decrecientes y su rapidez de crecimiento.
Actividades	
1	Para analizar la función $f(x) = log_b x$ con $b > 1$: a. Representa gráficamente en GeoGebra $log_b x$, es decir log(b,x). Para el deslizador toma valores entre 2 y 10, pues inicialmente estudiaremos el caso en que $b > 1$. Indica el valor de la base *b* elegida. b. Justifica por qué $f(x) = log_5 x$ para $b > 1$ es una función, indica su dominio y su rango. c. ¿Es una función creciente o decreciente? Justifica. d. ¿Para qué valores de *x* la función toma valores positivos? e. ¿Para qué valores de *x* la función toma valores negativos? f. ¿Qué pasa cuando los valores de x se acercan a cero en la $f(x) = log_{10}\, x$? g. Escribe un ejemplo del logaritmo de un valor de *x* para mostrar que el $\log_b x$ sea negativo. h. ¿Para qué valores de *x* la función corta al eje *x*? i. ¿Qué significado tiene este corte? j. La gráfica muestra que el valor del logaritmo cambia cuando aumenta el valor de *x*, ¿crees que los cambios del valor del logaritmo en la medida en que aumenta el valor de *x* se producen más rápido? Explica tu respuesta.
2	Para establecer relaciones entre las gráficas de dos funciones logarítmicas con diferente base continúa con la misma función $log_b\, x$. Adicionalmente representa en GeoGebra la función $log_2\, x$. Para el deslizador de $log_b\, x$, toma un valor mayor que 2. a. Determina cuál de las dos gráficas corresponde a la de mayor base. b. Escribe rasgos que las diferencien y proporciona una explicación de este hecho. c. Escribe rasgos que compartan y proporciona una explicación de este hecho.
3	Concluye para dos funciones logarítmicas crecientes, para $x > 1$ ¿cuál de ellas crece más rápido?
4	Elige un punto B sobre el eje *x*, traza una perpendicular al eje *x* por el punto B, determina el punto C de intersección de la gráfica de la recta con la función $\text{f(x)} = \log_8 x$ determina el punto D de intersección de la gráfica de la recta con la función $\text{f(x)} = \log_2 x$ y mide los segmentos BC y BD y calcula con GeoGebra la razón $\frac{BD}{BC}$ a. Mueve el punto B sobre el eje *x*. ¿Qué sucede con la razón $\frac{BD}{BC}$? b. Cambia el valor de *b* y nuevamente mueve el punto B sobre el eje *x*. ¿Qué sucede con la razón $\frac{\text{BD}}{\text{BC}}$? c. Toma para la base *b* el valor de 8 y encuentra la razón $\frac{BD}{BC}$. Mueve el punto B sobre el eje *x*.

	¿Qué valor encuentras para la razón $\frac{BD}{BC}$? Proporciona una posible explicación del valor encontrado.
5	Ejercicio para la casa: Gráfica la función $log_2\, x$, $log_5\, x$ y $log_{10}\, x$ en GeoGebra y responde ¿Qué pasa cuando los valores de *x* se aproximan a 0?

Anexo E. Dos aplicaciones de la función logarítmica

<table>
<tr><th colspan="3">Descripción general de las actividades</th><th>Tarea 5</th></tr>
<tr><td>Objetivo</td><td colspan="3">Aplicar lo estudiado en tareas anteriores para caracterizar funciones logarítmicas cuya base está entre 0 y 1 y para estudiar una situación práctica.</td></tr>
<tr><td>Recursos</td><td>Cuaderno y Computadora con programa de GeoGebra.</td><td>Tiempo</td><td>80 minutos</td></tr>
<tr><td>Descripción de la tarea</td><td colspan="3">A partir de la gráfica de la función logarítmica con base menor que 1 establezcan el punto de corte con el eje x, el dominio y el rango.
Visualicen los cambios de la función logarítmica de base menor que 1 cuando se varía la base.
Comparan el comportamiento de las funciones de menor que 1 en cuanto a si son crecientes o decrecientes y su rapidez de crecimiento.</td></tr>
<tr><th colspan="4">Actividades</th></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="3">Considera la función logarítmica entre las bases de 0 y 1. Inicialmente, representa gráficamente en GeoGebra $log_b x$, es decir $log(b, x)$. Para el deslizador toma valores entre 2 y 10.
Puesto que $b < 1$, explica por qué $\frac{1}{b} < 1$ y $\frac{1}{b} > 0$, es decir $0 < \frac{1}{b} < 1$.
a. A partir de esta consideración, estudiaremos la función $log_{1/b} x$. Oculta $log(b, x)$ y representa gráficamente en GeoGebra $log_{1/b} x$, es decir $log\left(\frac{1}{b}, x\right)$. Para el deslizador puedes mantener valores entre 2 y 10.
b. Indica el valor elegido para b en el deslizador e indica el valor de $\frac{1}{b}$.
c. Justifica por qué $f(x) = log_{1/b} x$ para $b < 1$ ¿es una función?, indica su dominio y su rango.
d. ¿Es una función creciente o decreciente? Justifica.
e. ¿Para qué valores de <i>x</i> la función toma valores positivos?
f. ¿Para qué valores de <i>x</i> la función toma valores negativos?
g. ¿Para qué valores de <i>x</i> la función corta al eje <i>x</i>?
h. Cambia el valor de <i>b</i> y revisa tus respuestas anteriores.</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="3">Comunica y comparte
Compara la gráfica de la función $f(x) = log_b x$ con la función $f(x) = log_{\frac{1}{b}} x$. Para ello deja visibles ambas funciones en GeoGebra.</td></tr>
</table>

a. ¿Qué observas en relación con la forma de las gráficas?

b. Determina el valor de $log_2 8\ y$ el valor de $log_{\frac{1}{2}} 8$. ¿Qué relación encuentras entre estos valores? Plantea otros ejemplos para $log_b a$ y $log_{\frac{1}{b}}\ a, para\ algún\ valor\ de\ a.$

Establece una conjetura en relación con esta situación, discútela con tus compañeros de grupo.

c. Ya has estudiado la función logarítmica cuando la base es mayor que 1 y cuando la base es menor que 1. ¿Qué sucedería si la base fuera igual a 1?

3

Segunda parte de la tarea:

Aplica algunos elementos de lo estudiado a una situación que puede ser familiar para ti.

A cada sonido que escuchamos le corresponde un nivel de intensidad medido en decibeles, el cual se relaciona con la sonoridad, es decir con la percepción que tenemos de un sonido. En la tabla se presentan el valor del nivel de intensidad de algunos sonidos que te pueden parecer familiares. Cuando un sonido tiene un nivel de intensidad 10 dB mayor que otro, al oído le parece dos veces más fuerte, entonces decimos que se duplica la sonoridad. Es decir que un sonido con 10 dB más que otro es percibido por el oído humano 2 veces más fuerte. De este modo, la intensidad de un sonido de 30 dB parece al oído humano 4 veces más fuerte que el sonido de 10 dB; un sonido de 60 dB parece al oído 16 veces más fuerte que un sonido de 10 dB. En la tabla se muestran valores, si le asignamos valor de sonoridad de 1 al umbral de audición es decir al mínimo nivel de intensidad que nuestro oído puede escuchar.

Tabla 7

Nivel de intensidad del sonido y sonoridad

	NIVEL DE INTENSIDAD Decibeles	**SONORIDAD ASIGNANDO 1 AL UMBRAL DE AUDICIÓN**	
Umbral de audición a 1.000 Hz	0	1	
Crujido de hojas	**10**	**2**	
Susurro a 1 m de distancia	20	4	
Hogar tranquilo	30	8	
Hogar regular	40	16	
Oficina regular, música suave	50	32	Nos parece 16 veces más fuerte que crujido de hojas
Conversación normal	**60**	**64**	
Oficina ruidosa, tráfico congestionado	70	128	
Radio con volumen alto	80	256	
Dentro de un camión pesado	90	512	
Automóvil sin silenciador	100	1024	
Martillo neumático	110	2048	
Umbral del dolor	120	4196	

a. A partir de los datos que se presentan en la tabla, ¿cuánto más fuerte le parece al oído humano un radio con volumen alto comparado con un susurro a 1 m de distancia? Muestra cómo lo determinaste.

	b. ¿Qué relación encuentras entre los valores que aparecen en la columna de la sonoridad con las potencias de 2? c. ¿Encuentra una expresión que te permita calcular el valor del nivel de intensidad a partir de los valores asignados en la tabla a la sonoridad? d. Ingresa a GeoGebra clásico y abre hoja de cálculo para construir una tabla de datos. e. Crea en GeoGebra la lista de pares de la tabla como puntos en el plano cartesiano. f. Representa gráficamente en GeoGebra la expresión que propusiste para encontrar el valor del nivel de intensidad a partir de los valores asignados en la tabla a la sonoridad. g. A partir de la gráfica y de acuerdo con la información de la tabla, ¿qué valor de la sonoridad le asignarías a un sonido que al oído humano resulte 1,5 veces más fuerte que una conversación normal? ¿Cuál sería el nivel de intensidad?