Propuesta para la enseñanza de los números irracionales a través de tareas que emplean la Historia de las Matemáticas

Diana Camila Alvarado Ochoa

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología

Licenciatura en Matemáticas

Bogotá D.C.

2023

Propuesta para la enseñanza de los números irracionales a través de tareas que emplean la Historia de las Matemáticas

Diana Camila Alvarado Ochoa

Código: 2016240001

Trabajo de grado para optar al título de

Licenciada en Matemáticas

Asesor:

Mg. César Guillermo Rendón Mayorga

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología

Licenciatura en Matemáticas

Bogotá D.C.

2023

Dedicatoria

A Dios por darme la vida, la sabiduría y la fortaleza de continuar con mis sueños día a día.

A mi hija que apareció en el momento justo, para motivarme a continuar con el proceso de ser una profesional y que me diera cuenta de que puedo lograr muchas cosas al mismo tiempo, como lo hice con ella y todo mi recorrido profesional y laboral en el 2023.

A mi pareja que me dio la mano cuando lo necesité, que me inspiró y me dio fortaleza para seguir a pesar de todas las cosas que se pudieran presentar en el camino y más específicamente por el amor que me expresa día a día.

A mi madre por ser la persona que ha luchado siempre por mí, por brindarme su amor incondicionalmente, por apoyarme en cada cosa que emprendo, por siempre estar cuando la necesito, por crear en mí una mujer de sueños, aspiraciones y anhelos y por ese gran amor que diariamente me hacen sentir, a mi padre por ser la persona que me hizo tener entendimiento de todo lo que soy capaz de hacer.

A mis hermanas por su amor, por ser inspiración, por darme fortaleza y apoyo cuando lo necesito.

A los compañeros que aportaron en mi camino, más específicamente a Sofia González, la cual fue mi amiga incondicional en la universidad, compañera de sueños y metas, que me permitió estar a su lado y que me apoya en cada paso que doy en todos los aspectos de mi vida.

Agradecimientos

A Dios, por la valentía, el rigor la fortaleza y la sabiduría, que me dio para llegar a este punto, resultado de mi dedicación, esfuerzo y formación como futura licenciada en matemáticas.

Al profesor César Guillermo Rendón Mayorga, que me dio la oportunidad de trabajar junto a él, mostrándome su apoyo como asesor, su dedicación incondicional y motivándome a realizar y culminar este trabajo de grado. Por su paciencia, sentido humano y muchas más de sus cualidades como docente, me permito decir que sigo amando mi profesión.

A la Universidad Pedagógica Nacional, por abrirme sus puertas, por ser la educadora de educadores que me dio la oportunidad de crecer personal y profesionalmente a través de grandes experiencias. A los profesores que aportaron sus conocimientos y experiencias a mi formación como futura educadora y persona que soy.

Contenido

Tabla de ilustraciones

1. Preliminares

1.1. Introducción

La manera más usual de definir a los números irracionales es decir que son aquellos que no se pueden expresar como el cociente de dos números enteros, es decir, que no son racionales. Además, su expresión decimal es infinita y no periódica, lo que implica que no se repite ningún patrón en sus cifras. Algunos ejemplos de números irracionales son $\pi, \sqrt{2}$, entre otros.

Los números irracionales tienen una larga historia y han generado muchas controversias y problemas en el desarrollo de las matemáticas. Se cree que los primeros en descubrir la existencia de los números irracionales fueron los antiguos griegos, en particular los pitagóricos, que se basaban en la idea de que todo era medible y proporcional. Sin embargo, se encontraron con una contradicción al intentar hallar la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado uno, que según el teorema de Pitágoras debía ser igual a la raíz cuadrada de dos. Pero este número no podía ser escrito como una fracción, lo que los llevó, en términos generales, a cuestionar sus principios y a ocultar este descubrimiento.

Más tarde, otros matemáticos griegos como Euclides, Arquímedes y Eudoxo desarrollaron métodos para aproximar y estudiar los números irracionales (sin que estuvieran aún considerados con el estatus de *número*), usando conceptos como la proporcionalidad, la semejanza, la geometría y el método de exhaución. Sin embargo, no lograron dar una definición precisa y rigurosa de lo que era un número irracional, ni cómo se podía operar con ellos.

Fue hasta el siglo XIX, cuando los matemáticos alemanes Georg Cantor y Richard Dedekind encontraron formas de construir el conjunto de los números reales, que incluyen a los números irracionales, usando conceptos como el límite, la continuidad y las cortaduras. Estos matemáticos demostraron que los números irracionales son tan numerosos como los números reales, y que tienen propiedades muy interesantes y complejas, como la trascendencia, la irracionalidad algebraica y la normalidad[1].

Los números irracionales son muy importantes para las matemáticas y las ciencias, ya que aparecen en muchas fórmulas, funciones, ecuaciones y constantes que describen fenómenos

[1] Se considera que un número real es normal cuando sus cifras decimales en cualquier base numérica siguen una distribución de probabilidad uniforme. Es decir, que todos los dígitos tienen igual probabilidad de aparecer.

naturales y abstractos. Algunas aplicaciones de los números irracionales son: el cálculo de áreas, volúmenes y perímetros de figuras geométricas; el estudio de las funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas; la representación de números complejos y fraccionarios; el análisis de series y sucesiones infinitas; la criptografía y la teoría de la información; entre otras.

A partir de presentar un contexto histórico acerca del conjunto de los números irracionales, que es parte sustancial de este trabajo y que se muestra en el capitulo dos, este trabajo quiere presentar una propuesta no convencional de cinco tareas que muestran una herramienta relevante para el profesor de matemáticas y que muchas veces no se tiene en cuenta en el aula, y es el uso de la Historia de las matemáticas para la enseñanza de objetos matemáticos, más específicamente del conjunto de los números irracionales.

Así, en el capítulo tres se evidencia cómo fue el diseño de las tareas, su proceso, su razón de ser y, claro está, la presentación de las tareas en sí. Por su parte, en el cuarto capítulo se presentan las principales conclusiones derivadas de la realización de este trabajo; y en el quinto capítulo las referencias que aparecen a lo largo del documento. Finalmente, se muestra como Anexo una propuesta de la autora, que le pareció relevante compartir, sobre una propuesta de cómo se podría implementar en el aula una de las tareas diseñadas; entre otras, se muestra cuál sería el propósito en la clase, cómo abordarlo, qué tipo de intervenciones hacer, y como experimentar, desde su perspectiva, el desarrollo de la tarea.

1.2. Justificación

Los referentes curriculares como los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, (Ministerio de Educación Nacional [MEN], 1998); los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas [EBCM], (MEN, 2006) y los Derechos Básicos de Aprendizaje (MEN, 2016) plasman elementos necesarios que se deben tener en cuenta en cada ciclo escolar para la enseñanza de las matemáticas, entre ellos, la enseñanza de los números irracionales. En esta propuesta curricular que plantea los documentos del MEN se puede observar cómo se empiezan a desarrollar competencias en los(as) niños(as) para realizar procesos algorítmicos, analíticos y de resolución de problemas, entre otros, en relación con los sistemas numéricos usuales, estudio que finaliza en el último ciclo escolar según (MEN, 2006), con una conceptualización del sistema de los números reales y, en consecuencia, el de los números irracionales.

Así, teniendo en cuenta lo que exponen los Estándares Básicos (MEN, 2006): "Ya desde el comienzo de la Básica Secundaria cobra especial importancia el estudio de los números decimales como sistemas de representación de valores aproximados y como expresiones infinitas para números racionales e irracionales" (p. 69), se nota que en los niveles escolares de primaria y secundaria se pretende ir construyendo progresivamente una comprensión sobre el sistema de los números reales, empezando por reconocerlos, diferenciarlos y caracterizarlos, y continuando con aprender a utilizar algunas de sus propiedades. Sin embargo, comparando lo expuesto en los documentos con las experiencias de aula que ha tenido la autora del trabajo (*v. g.* prácticas en cursos como sexto, noveno, décimo y undécimo, relacionadas con la enseñanza del cálculo y los sistemas numéricos usuales) a través del transcurso del pregrado, se reconoce que en diferentes grados escolares el estudio específico del conjunto de números irracionales no ocupa un lugar importante en el currículo operativo, además gracias a las investigaciones de Bachelard y Brousseau, según Martin Socas (2010) se notan distintos obstáculos epistemológicos en la enseñanza de diversos objetos en el contexto de las ciencias en general.

Observando esta comparación, se ve relevante nombrar las dificultades que se presentan en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares en general, para analizar y tener en cuenta elementos necesarios en la elaboración del trabajo, como lo descrito Broetto y Santos-Wagner, (2017):

La posibilidad de formar un círculo vicioso en la enseñanza de los números irracionales que involucra la Educación Básica y los cursos de formación de los profesores de matemáticas. Los autores argumentan que los números irracionales no se utilizan adecuadamente en primaria y secundaria y, como resultado, el egresado de educación básica escolar ingresa a la educación superior sin desarrollar una conceptualización adecuada de los números irracionales.

De igual manera, en la literatura se han identificado errores, dificultades y obstáculos relativos, directa o indirectamente, al aprendizaje del conjunto de los números irracionales, tales como:

- "Dificultades del lenguaje: los alumnos identifican al radical como "V", y la lectura de $\sqrt{5}$ es "ve cinco"; emplean el signo igual para comparar dos elementos distintos" *(*Ruiz, s. f.).
- Al hablar de los números irracionales, no suelen detenerse en su construcción histórica, su presencia en el contexto sociocultural del estudiante y sus propiedades como conjunto numérico, quedando así aislado de otros entes matemáticos. (Cappellucci y Carballido, 2017)

Estos asuntos presentados por diferentes autores especifican algunas de las problemáticas y falencias que se presentan en relación con la enseñanza y el aprendizaje del conjunto de números irracionales. En este recorrido de autores se nota una problemática en el desarrollo de asuntos como lo son las propiedades y el reconocimiento de los subconjuntos usuales de los números reales que existen (naturales, pares, primos, racionales, etc.) y que se utilizan para llegar a la comprensión de los números irracionales. En consecuencia, se identifica una posibilidad de un cambio de metodología para la enseñanza del conjunto de los irracionales, que permita a los estudiantes escolares mejorar su comprensión sobre este objeto matemático ya que, a pesar de ser un objeto que se presenta en los EBCM (MEN, 2006) para estudiar en los últimos ciclos escolares a propósito de la conceptualización que se busca hacer de los números reales, no se encuentran gran variedad de documentos, investigaciones, etc., que hablen sobre cómo innovar en la enseñanza de los números irracionales. En este trabajo, se plantea una propuesta en esa dirección, que utiliza como elemento sustancial la Historia de las Matemáticas.

Al respecto de esto último, la enseñanza de las matemáticas empleando la Historia de las Matemáticas genera tanto al estudiante como al profesor el poder dimensionar nuevas perspectivas que permitan un proceso de aprendizaje más oportuno y diferente del que se da tradicionalmente en una clase (Boero, 1989). Con el fin de dar razones que permitan sustentar cómo el uso de la Historia de las Matemáticas provee herramientas en la enseñanza para generar aprendizajes significativos respecto a la teoría y los conceptos, cabe señalar las siguientes:

- La historia provee una oportunidad para desarrollar nuestra visión de lo que es realmente la matemática y nos permite tener una mejor comprensión de conceptos y teorías (Barbin, 2002)
- Zapico (s. f.) citado por Rodríguez y Vásquez (2012) establece que la percepción hacia la matemática cambia en la medida en que docentes y estudiantes pueden "contextualizarla y humanizarla". Es decir, la matemática se muestra como producto de la actividad humana, generada a partir de diferentes necesidades a través de muchos siglos de civilización.
- El análisis histórico ayuda al docente a comprender por qué un cierto concepto es difícil para el estudiante y puede ayudar también en el desarrollo y estrategia de la enseñanza. (Rodríguez y Vásquez, 2012)

Teniendo en cuenta lo que se ha mencionado, en este trabajo se pretende mostrar una propuesta para la enseñanza del conjunto de números irracionales a través de la historia, en la que esta permitirá a los estudiantes conocer el inicio, implicaciones, ideas de autores y construcciones que se logran del conjunto de los irracionales a través de la historia y su evolución, lo cual también permite desarrollar una mejor práctica docente y presentar una manera distinta para la enseñanza del conjunto de los números irracionales, que trascienda el discurso del profesor de que un número irracional es aquél que no se puede escribir de la forma a/b con a y b enteros y $b \neq 0$, pues es una afirmación que en muchas ocasiones no tiene significado para los escolares. En particular, se pretende hacer énfasis en las construcciones de algunos números irracionales a través de la historia (lo cual ineludiblemente implicará desarrollar una relación entre los irracionales y otros objetos matemáticos como fracciones continuas, límites, etc.) y las heurísticas desarrolladas alrededor de ellos. Serán estos los principales énfasis a los que se aboque el diseño de las tareas, las cuales se dirigirán inicialmente al último ciclo de educación secundaria.

Finalmente, en el recorrido que se ha hecho para fundamentar y reconocer la pertinencia de esta propuesta, buscando en el repositorio de la Universidad Pedagógica Nacional [UPN] y en general por diferentes documentos de la *web* que permitan sustentar lo que se quiere en el trabajo, se encontró el proyecto de maestría titulado "la Historia de la Matemática como recurso didáctico y alternativa de aprendizaje de los números irracionales" (Vallejos y Arboleda, 2017)que presenta una idea similar a la de este trabajo, pero que utiliza la historia solo para dar contexto y se enfoca sobre todo en procesos algorítmicos; mientras que lo que se pretende en este trabajo es incorporar todo lo histórico como herramienta central para el aprendizaje de los números irracionales a través del diseño de un conjunto de tareas que se alejen de propuestas convencionales que enfatizan usualmente en lo algorítmico.

Con base en todo lo anterior, es decir lo expuesto en los documentos curriculares, los errores, dificultades, obstáculos en la enseñanza de las matemáticas, las experiencias de la autora y lo reportado por otros autores, y la pertinencia de utilizar la Historia de las Matemáticas para su enseñanza, se pretende plasmar en este trabajo una alternativa para desarrollar una propuesta que permita la enseñanza del conjunto de los números irracionales a través de su historia.

1.3. Objetivos

Objetivo general:

Diseñar un conjunto de tareas que utilicen la Historia de las Matemáticas [HM] como una fuente de herramientas para la enseñanza de los números irracionales, dirigido a estudiantes de secundaria, con el fin de aportar una metodología de enseñanza alternativa de este conjunto numérico.

Objetivos específicos:

- Realizar un estudio histórico para identificar los principales hitos en el desarrollo de los números irracionales con el fin de reconocer sus usos, importancia, definición, entre otros elementos.

- Clasificar la información recolectada en el estudio histórico para identificar las posibles formas en que se puede organizar y desarrollar el conjunto de tareas.
- Diseñar un conjunto de, al menos cinco tareas, mediadas por la HM para la enseñanza de los números irracionales para estudiantes de secundaria y media.

2. Marco teórico

En este capítulo se presenta todo lo que compone el marco teórico del trabajo, el cual se divide en cuatro partes; un contexto de la historia de los números irracionales, un contexto del por qué es importante la historia en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, un contexto curricular de la enseñanza del conjunto de los irracionales y finalmente un contexto sobre la concepción que se tendrá en el trabajo sobre la idea de *tarea*.

2.1. Marco histórico:

A través del estudio de la historia se evidencia cómo distintos matemáticos han propuesto teorías e hipótesis para formalizar distintos tipos de conceptos matemáticos. A continuación, se presenta un recorrido histórico, en el que se observa, entre otras, que en civilizaciones antiguas se desarrollaban las matemáticas por la necesidad de poder realizar actividades cotidianas, por lo que se conoce en la antigüedad el hombre se interesó en tres actividades matemáticas elementales: medir, contar y ordenar, cuyo desarrollo fue el origen de lo que hoy conocemos como los números reales (Recalde, 2011). Dado que el trabajo de grado gira en torno a la historia de los números irracionales, se realizó una revisión documental de diferentes textos académicos alrededor de este tema. Específicamente se muestran a continuación, el resumen de un conjunto de más de diez documentos que hablan de la construcción del conjunto de los números reales, lo cual se diferencia del recorrido histórico de los números irracionales, el recuento de todos estos documentos se dividió en tres secciones, las cuales generan un recorrido más preciso de cómo fue la aparición de los números irracionales y que se presentan a continuación.

2.1.1. Las magnitudes inconmensurables:

Agarwal y Agarwal (2021) en su articulo *Origin of Irrational Numbers and Their Approximations*, mencionan distintos autores que inician el estudio de los números irracionales con el problema que aparece de las magnitudes inconmensurables, las cuales representan una relación de números que no pueden expresarse como razones de dos números enteros. Enseguida se presenta un resumen de los aportes que hicieron los autores mencionados en el artículo:

- Pitágoras (alrededor de 582-481 a.C., Grecia): fue uno de los matemáticos más inexplicables de la historia, ya que se convirtió en un personaje que transmitió mucho conocimiento, pero sin dejar registros, únicamente narraciones de sus aprendices o demás personas que lo llegaron a conocer. Dado que este matemático tenía como lema "todo es número”, "los números gobiernan el universo", "el número es el gobernante de las formas e ideas y la causa de dioses y demonios" intentó explicar matemáticamente todo lo que conlleva una explicación lógica en el universo, y de ahí se desprende una crisis, dado que el llamado teorema de Pitágoras presentaba un primer problema, el cual era, ¿cómo explicar que la hipotenusa de un triángulo rectángulo podía ser $\sqrt{2}$?, dado que este número no se conocía, o tal vez se veía pero no de una manera muy usual (escenario al que se podía llegar fácilmente tomando un triángulo de catetos de medida 1 cada uno).

Dada esta situación, los pitagóricos se obligan a nombrar a este nuevo descubrimiento como “lo indecible”, de tal manera que era un secreto peligroso de poseer, como pasó con Hippasus de Metapontum (alrededor del 500 a.C., Grecia) fue asesinado por un grupo de fanáticos al revelarlo. Varios historiadores afirman que este hallazgo fue clave para la evolución de los números reales, porque se podía vislumbrar como se presentaba una solución a los espacios vacíos que había en la recta numérica, llenándolos con el conjunto de los números irracionales como se conocen actualmente.

- Los Sulbasutras: En la India se obtienen las primeras ideas de las magnitudes inconmensurables y de la idea de irracionalidad a partir de planificar la construcción de templos y altares, entre los siglos XVIII y II a.C., y así se desarrollan conocimientos aritmético-geométricos, prácticos y primitivos, relacionados, entre otros, con el teorema de Pitágoras. Todo este saber adoptó la forma de un cuerpo de doctrina conocido por el nombre de "*Sulbasutras*" o "Manual de las reglas de la cuerda".

  El significado de la palabra *sulv* es medir, y la geometría en la India antigua llegó a conocerse con el nombre de *sulba* o *sulva*. Estos Sulbasutras contienen una gran cantidad de construcciones geométricas para cuadrados, rectángulos, paralelogramos y trapecios, el problema de resolver ecuaciones cuadráticas, varios ejemplos de progresiones aritméticas y geométricas, un método para dividir un segmento en siete partes iguales, soluciones de ecuaciones indeterminadas de primer grado y aproximaciones de $\sqrt{2}$ bajo la siguiente idea: "aumentar la medida en su tercio y este tercio en su propio cuarto menos la trigésima cuarta parte de ese cuarto, este es el valor con una cantidad especial en exceso", la cual, si se toma una unidad como la dimensión del lado de un cuadrado, entonces esto en términos modernos se puede escribir como:

$$\sqrt{2} \cong 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\times 4}-\frac{1}{3\times 4\times 34}=\frac{4}{3}+\frac{1}{12}-\frac{1}{408}=\frac{17}{12}-\frac{1}{408}=\frac{577}{408}$$

Y se obtiene gracias al siguiente método de representación presentado en la geometría de Sulbasutra donde:

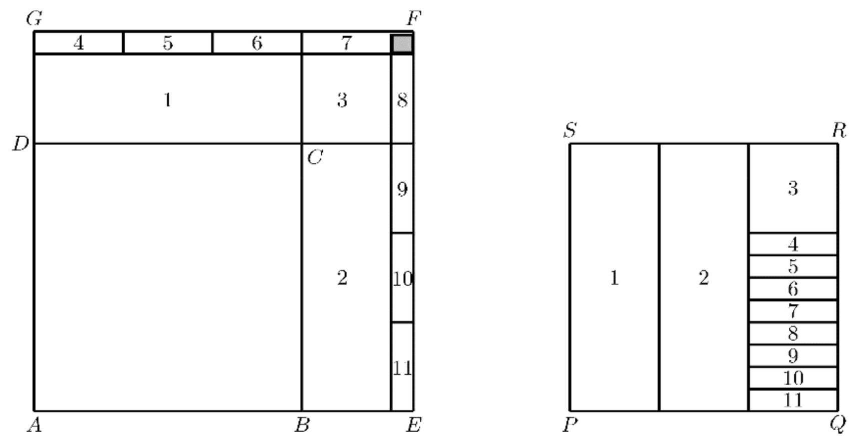


Ilustración 1: Método Sulbasutra para √2; tomado de https://www.mdpi.com/2079-3197/9/3/29

Se consideran dos cuadrados, $ABCD$ y $PQRS$, cada uno de 1 unidad de lado (Ilustración 1). Se divide $PQRS$ en tres franjas rectangulares iguales, de las cuales las dos primeras están marcadas como 1 y 2. La tercera franja se subdivide en tres cuadrados, de los cuales el primero está marcado como 3. Los dos cuadrados restantes se dividen cada uno en cuatro franjas iguales marcadas como 4 a 11. Estas once áreas se suman al área del cuadrado $ABCD$ como se muestra en Ilustración 1, para obtener un cuadrado más grande menos un cuadrado pequeño en la esquina del vértice F. El lado del cuadrado aumentado $AEFG$ es $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\times 4}$.

El área del cuadrado sombreado es $\left[\frac{1}{3\cdot 4}\right]^2$, de modo que el área del cuadrado aumentado $AEFG$ es mayor que la suma de las áreas de los cuadrados originales, $ABCD$ y $PQRS$, por $\left[\frac{1}{3\cdot 4}\right]^2$.

Ahora, para hacer el área del cuadrado $AEFG$ aproximadamente igual a la suma de las áreas de los cuadrados originales $ABCD$ y $PQRS$, hay que imaginar que cortas dos tiras muy estrechas, de anchura x, del cuadrado $AEFG$, una por el lado izquierdo y otra por el inferior, entonces

$$2x(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 4})-x^2=\left[\frac{1}{3\cdot 4}\right]^2$$

Simplificando la expresión anterior e ignorando x^2, una cantidad insignificantemente pequeña, resulta: $x\simeq\frac{1}{3\cdot 4\cdot 34}$

La diagonal de cada uno de los cuadrados originales es $\sqrt{2}$, que se puede aproximar por el lado del nuevo cuadrado como se acaba de calcular. Un comentarista de los Sulbasutras, Rama Vajapeyi, que vivió a mediados del siglo XV d.C. en la India, dio una aproximación mejorada, añadiendo dos términos más a la ecuación:

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{3\cdot 4\cdot 34}-\frac{1}{3\cdot 4\cdot 34\cdot 33}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 34\cdot 34}=\frac{647393}{457776}$$

lo que arroja 1.414213502 un valor correcto para siete cifras decimales.

- Teodoro de Cirene (alrededor de 431 a. C., Libia, Grecia): La espiral de Teodoro, es una espiral construida a partir de triángulos rectángulos contiguos, (uno encima de otro consecutivamente). Esta espiral fue desarrollada por el matemático Teodoro de Cirene, utilizando el teorema de Pitágoras y añadiendo perpendicularmente a la hipotenusa un segmento de una unidad de medida, lo que forma triángulos cuyas hipotenusas son las sucesivas raíces $\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4},\sqrt{5}$, etc. (ilustración 2).

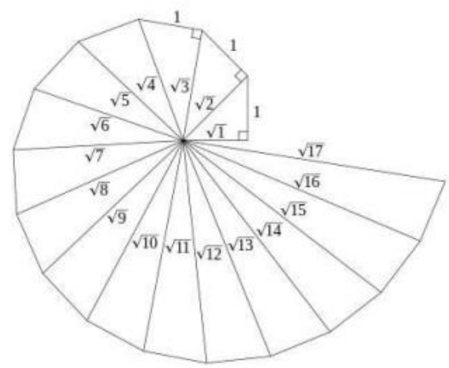


Ilustración 2: espiral de Teodoro; tomada de https://www.mdpi.com/2079-3197/9/3/29

Teodoro construyó su espiral a partir de triángulos rectángulos con un vértice en común y utilizando el teorema de Pitágoras; observó que para los números mayores que 16 la espiral comenzaba a superponerse y el dibujo se volvía "desordenado" como se puede ver en la Ilustración 3.

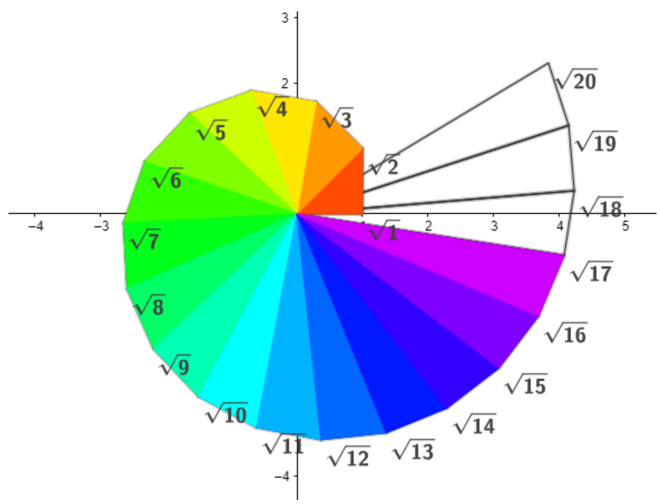


Ilustración 3: Representación de la espiral de Teodoro para más de 17 raíces; tomada de https://www.mdpi.com/2079-3197/9/3/29

- Pierre de Fermat (1601-1665, Francia): a este matemático se le atribuye una de las primeras demostraciones de la inconmensurabilidad de $\sqrt{2}$, la cual se prueba a través de su método de descendencia infinita, que para la época fue novedoso, ya que, a través de distintas divisiones de la diagonal de un cuadrado, como se ve a continuación:

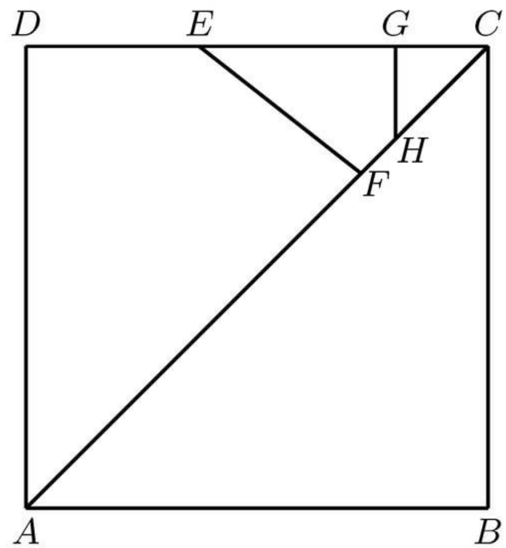


Ilustración 4: prueba geométrica de $\sqrt{2}$; tomado de https://www.mdpi.com/2079-3197/9/3/29

Se supone que hay conmensurabilidad en la magnitud $\sqrt{2}$, lo que permite visualizar las divisiones infinitas de la diagonal del cuadrado y se contradice la suposición inicial y se permite decir que $\sqrt{2}$ es inconmensurable.

Vasco y Mejía (2009) en su artículo "El descubrimiento de las magnitudes inconmensurables y las paradojas de Zenón: la crisis que generaron y su influencia en el desarrollo de los métodos infinitesimales que llevaron a la formación del concepto de límite", nombran a Hipaso de Metaponto como el descubridor de las magnitudes inconmensurables, aunque no se sabe cómo ni cuándo lo hizo, suele admitirse que tuvo lugar este nuevo conocimiento por aplicación del teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo isósceles con catetos de medida 1 y según (González, 1992), esto pudo darse al intentar en vano repetidamente, de forma empírica, encontrar una unidad común que permitiera medir, de forma exacta, la diagonal y el lado del cuadrado.

Vasco y Mejía (2009) también nombran diferentes tipos de problemas que dieron paso a la inconmensurabilidad, los cuales Recalde y Arbeláez (2011) los describen de la siguiente manera:

- **El problema de la diagonal del cuadrado:** Pitágoras, tenía como objetivo relacionar objetos geométricos con números, donde empieza por escoger una unidad de medida, la cual sería la longitud de un segmento, luego de esto hallaba la razón de las longitudes de dos segmentos. Este proceso se realizaba con magnitudes conmensurables, con el fin de encontrar un tercer segmento con longitud entera, pero con esto se empezaba a notar más la necesidad de saber el funcionamiento de los números irracionales, que en su época les asignaban el nombre de magnitudes inconmensurables.

- **El problema de la raíz de dos:** Este problema, desde una visión actual, haría referencia a lo siguiente, no existe un número racional $\frac{p}{q}$ (con $p, q \in Z;\ q \neq 0$), tal que $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$ para los pitagóricos significaba la imposibilidad de encontrar números enteros positivos p y q tales que $p^2 = 2q^2$. Se demuestra que esto es así, a través del método de reducción al absurdo.
- **La antifairesis:** Es un método que permite encontrar el máximo común divisor entre dos magnitudes. A continuación, se realiza una representación y un ejemplo, para entender cómo funciona este método:

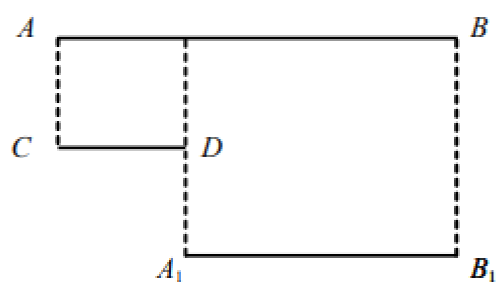


Ilustración 5: Antifairesis de dos segmentos; tomada de (Recalde & Arbeláez, Los números reales como objeto matemático: Una perspectiva histórico epistemológica, 2011)

Dadas dos magnitudes, se trata de encontrar la magnitud más grande que los mida a los dos. Para ello se recurre a sustracciones repetidas. Suponiendo que se tienen los dos segmentos $AB > CD$.

Al sustraer CD de AB, se obtiene $A_1\, B_1$. Si $CD < A_1\, B_1$, se sustrae CD de $A_1\, B_1$, obteniendo $A_2\, B_2$. Se aplica el mismo proceso repetidamente. Cuando se llega a un segmento $A_K\, B_K < CD$, se cumple que:

$$\mathrm{AB} - \mathrm{k\,CD} = A_K\, B_K$$

- Si $A_K\, B_K = 0$, entonces CD es el mayor segmento que mide a AB y a CD.
- Si $A_K\, B_K \neq 0$, se compara $A_K\, B_K$ con CD y se procede a establecer en una segunda etapa el procedimiento anterior. Se pueden presentar dos casos:

a. A través de un número finito de etapas se llega a un segmento nulo. Los dos segmentos iguales de la etapa precedente son la parte alícuota común buscada y las magnitudes serán conmensurables.

b. El proceso sigue infinitamente, y la longitud de los segmentos sucesivos tiende a cero. En este caso las magnitudes serán inconmensurables

- **El caso del pentágono:** Los pitagóricos demostraron que las longitudes de la diagonal y el lado de un pentágono regular son inconmensurables. Para ello se basaron en el procedimiento llamado antifairesis, que se explicó previamente y utilizando el proceso geométrico que se ve en la ilustración 6:

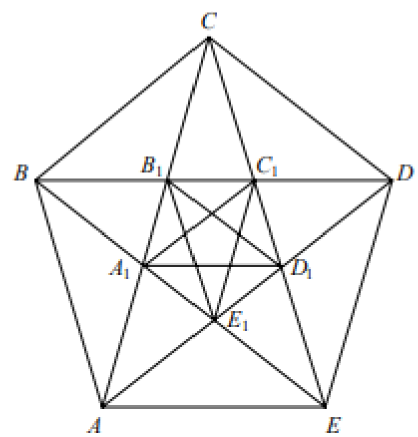


Ilustración 6: construcciones auxiliares realizadas al pentágono; tomada de (Recalde & Arbeláez, Los números reales como objeto matemático: Una perspectiva histórico epistemológica, 2011)

Dadas las construcciones auxiliares realizadas al pentágono, como se ve en la ilustración 6, se formaliza la siguiente demostración (Recalde y Arbeláez, 2011):

Se mide la diagonal AD con el lado BC tenemos:

1. Dado que $ABCD_1$ es un paralelogramo, $BC = AD_1$, por tanto, BC cabe una vez en AD, sobrando D_1D.
2. Debemos comparar ahora el sobrante D_1D. con el lado BC = AD_1.
3. Puesto que AE_1 = D_1D., entonces, D1D cabe una vez en AD_1 y sobra E_1D_1.
4. Siguiendo el proceso de medición, debemos determinar las veces que $E_1\ D_1$ cabe en AE_1, lo cual es lo mismo que determinar las veces que E_1D_1

cabe en A_1C_1, ya que $A_1C_1D_1A$ es un paralelogramo; en otras palabras, medir la diagonal A_1C_1 del pentágono regular $A_1B_1C_1D_1E_1$ con su lado E_1D_1, de tal suerte que llegamos al problema inicial de establecer la medida de una diagonal de un pentágono regular por su diagonal y el proceso sigue indefinidamente.

2.1.2. Fracciones continuas:

Las fracciones continuas empiezan a ser protagonistas en la representación de los números irracionales ya que estas capturan la naturaleza infinita de sus cifras decimales, sin necesidad de escribir textualmente cuál es la cantidad de decimales de ese número que se quiere representar. Recalde y Vargas (2013) expresan cómo inició la revolución de la búsqueda de una estructura numérica, a través de la incorporación del sistema decimal indo-arábigo, pero con esto se desprenden unos limitantes de la época, los cuales son el aceptar el uno como número y la existencia de fracciones o radicales, donde algunos autores realizaban distintas estrategias para que funcionaran las ecuaciones que requerían de las soluciones no racionales.

Dado el contexto previo y según Pérez y Valdez (2020), se presenta a continuación un recorrido histórico de autores que contribuyeron en la construcción o conceptualización de las fracciones continuas:

- Con Euclides, en su obra Los Elementos y más específicamente en los libros VII, VIII y XIX, se observa una de las primeras formalizaciones de las fracciones continuas, la cual refiera a:
  - Dados a y b dos números enteros positivos con $a > b$, existe un número entero positivo k_0 y $r_0 < b$ tal que, $a = k_0b + r_0$ (1)
  - De la misma manera, existe un número entero positivo k_1 y $r_1 < r_0$ que cumple: $b = k_1r_0 + r_1$ (2)
    - Igualmente, existe un número entero positivo k_2 y $r_2 < r_1$ tal que:
    - $r_0 = k_2r_1 + r_2$ (3)
    - Extendiendo el proceso, se puede notar: $r_n = k_{n+2}r_{n+1} + r_{n+2};\ n = 0, 1, 2, \ldots$ (4)
    - Cuando $r_i = 0$, de (1) se obtiene, $\frac{a}{b} = k_0 + \frac{1}{\left(\frac{b}{r_0}\right)}$ (5)

- Reemplazando (2) en (5): $\frac{a}{b} = k_0 + \frac{1}{k_1 + \frac{1}{\frac{r_0}{r_1}}}$ (6)
- Sustituyendo (3) en (6) $\frac{a}{b} = k_0 + \frac{1}{k_1 + \frac{1}{k_2 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}}}$ (7)
- En el proceso con $r_i = 0$; $\frac{a}{b} = k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \cfrac{1}{\ddots \over k_{n-1} + \frac{1}{k_n}}}}$
- Esto último sustenta la visualización de los racionales como fracciones continuas finitas.

- Para Diofanto y su solución de ecuaciones de la forma $ax + by = c$, donde a y b son enteros primos relativos y adicional $a < b$, se presenta el uso del siguiente tipo de fracción continua:

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{1}{q_1 l} + \frac{1}{q_2 l} + \cdots + \frac{1}{q_n} \; y \; \frac{p}{q} = q_0 + \frac{1}{q_1 l} + \frac{1}{q_2 l} + \cdots + \frac{1}{q_{n-1}}$$

- Tras estudios y formulaciones de fracciones realizados por Tartaglia, Bombelli propone un algoritmo para extraer raíces cuadradas a través de las fracciones continuas, más específicamente la $\sqrt{13}$, que representa de la siguiente manera:

$$\sqrt{13} = 3 + \frac{4l}{l6} + \frac{4l}{l6} + \cdots$$

Estos hallazgos permitieron diferenciar los números racionales de algunos irracionales teniendo en cuenta la forma de la fracción continua, lo que conlleva a las fracciones continuas en Euler, quien especifica una forma para hacerlo, la cual es: cada número racional se puede representar como una fracción continua finita. Además, todo número irracional se puede representar como una fracción continua infinita. "Euler demuestra que las fracciones continuas finitas representan números racionales y que los números racionales se escriben como fracciones continuas finitas; además muestra que los irracionales se representan como fracciones continuas infinitas. Pero no prueba que una fracción continua infinita representa un número irracional, es decir, no prueba la convergencia de la fracción continua." (Recalde y Vargas, 2013).

2.1.3. Las proporciones:

Otro momento importante de los avances en la consolidación del conjunto de los números irracionales, es el aporte que tuvieron a la teoría de las proporciones. Esta consiste en el estudio de relaciones entre magnitudes la cual busca establecer una equivalencia entre las mismas. A continuación, se presentan algunos autores y formas en las que se relaciona este conjunto numérico con la teoría sobre proporcionalidad:

- Sánchez y Valdivé (s.f.) expresan que los irracionales tienen su origen en la inconmensurabilidad de segmentos, pero después esta relación se convierte en cocientes y las proporciones en igualdades numéricas. Toda esta conversión dio paso al conjunto de los racionales expresados de la siguiente manera $\frac{a}{b}$, y de los irracionales, como los conocemos actualmente, nombre y conocimiento que se da en el siglo XIX gracias al intento de aritmetización del Análisis, estudiando la completitud del conjunto de los números reales por varios autores de la época.
- Eudoxo de Cnido (355 a.C) presentó una teoría general de proporciones y el método exhaustivo, que "permitió resolver uno de los aspectos más preocupantes de la crisis provocada por el descubrimiento de los segmentos inconmensurables". La primera fue la solución más antigua a los números irracionales, que no pueden ser expresados como cociente de dos números enteros. El método exhaustivo le permitió abordar el problema del cálculo de áreas y volúmenes, como el de la pirámide, cuyo volumen es un tercio de un prisma que tenga la misma base, además es autor de originales teorías sobre las curvas y las cónicas.
- Omar Khayyam (1050 d.C) reemplazó la teoría de proporciones geométricas de Euclides, por un planteamiento numérico. Omar se acercó al concepto del número irracional y trabajó de hecho con el concepto de número real en general.
- Nicole Oresme (1323 d.C) en su obra *Algorismus Proportionum* realizó interesantes generalizaciones en la teoría de proporcionalidad. Además, se "anticipó en cierto sentido a lo que hoy en día escribimos como $x^{\sqrt{2}}$ que no es más que el estudio de potencias irracionales". Pero la falta de terminología y de una notación adecuada, le impidió desarrollar de manera efectiva su concepción sobre estas potencias.

- Los pitagóricos con una teoría musical pitagórica “se centró en el estudio de la naturaleza de los sonidos musicales y descubrió que existía una relación entre los sonidos armónicos y los números enteros, creando con ello una teoría matemática de la música. Para dichas investigaciones utilizó un instrumento musical llamado monocordio (Ilustración 7) que estaba formado por una cuerda cuya longitud era proporcional a 12 y que podía adoptar diversas longitudes. Pitágoras dividió la cuerda en doce partes y buscó los intervalos que producían un sonido agradable y se dio cuenta que, si establecía determinadas longitudes, proporcionales a 12, los sonidos que se producían eran placenteros.” (UNAM, 2012)

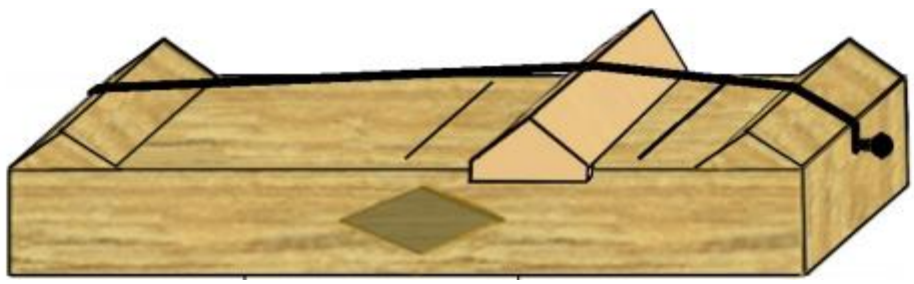


Ilustración 7Midebien. (2022, 29 julio). Pitágoras y su escala musical. Midebien. https://midebien.com/pitagoras-y-su-escala-musical/

Profundizando en el funcionamiento de la proporcionalidad los pitagóricos observaron que las cuerdas que daban el tono, la cuarta, la quinta y la octava, tenían longitudes proporcionales a 12, 9, 8 y 6, o, lo que es lo mismo, tenían longitudes proporcionales a $1, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}\ y\ \frac{1}{2}$. Tomando una frecuencia base para una cuerda de 1, cuando se tiene una cuerda de longitud 2, se obtiene un sonido una octava más alta que la nota original. Si su longitud es $\frac{3}{4}$ que la primera, la cuerda emite la cuarta de la nota base, y si su longitud es $\frac{2}{3}$ de la inicial, la nota que suena es la quinta de la nota base. Todo funciona bien con números enteros hasta que hay necesidad de dividir la octava en dos, pues lleva al problema de encontrar un número cuyo cuadrado sea dos. (Recalde y Arbeláez, 2011).

De acuerdo con todo el recorrido histórico presentado anteriormente en las secciones 2.1.1, 2.1.2 y 2.1.3, se presenta a continuación una tabla (Tabla 1), la cual contiene, a forma de resumen de la revisión documental realizada, en la primera columna el nombre o apellido de los autores involucrados en el desarrollo de los números irracionales, y en la primera fila los objetos (conceptos, nociones) sobre los cuales aportaron sustancialmente:

Tabla 1.

Autores relevantes en la consolidación de números irracionales

Objeto matemático	Autor	N. Trascendentales	Solución de ecuaciones	Fracciones continuas	Cuadratura de un círculo	√2	M. inconmensurables	antiphaireis	Formalización de los irracionales	Series infinitas
Bernoulli										X
Cauchy										X
Joseph Liouville										
Euclides				X			X	X		
Diofanto										
Wallis										
Teodoro Cirene						X				
Euler		X								
Pietro Cataldi				X						
Dedekin										
Hippasus de Metapontun							X			
Al-Khwarizmi			X							
Pacioli			X							
Pitagóricos							X	X		
Dedekin									X	
Diofanto			X							
Wallis					X					
Los Sulbasutras						X				
Eudoxo						X				

Nota. Esta tabla muestra la cantidad de veces que se encontró los distintos objetos matemáticos en los documentos y quien aportó a estos

Se realiza la Tabla 1 con el fin de presentar un resumen de los objetos matemáticos que componen la historia del conjunto de los números irracionales y también de mostrar al lector que se escogen los temas de las tareas, teniendo en cuenta que fue lo más recurrente en la historia previamente presentada, los cuales fueron los siguientes: El numero π, La antiphairesis, Las fracciones continuas, las sucesiones y series, el número √2. Se eligen cinco objetos matemáticos, ya que se realizan cinco propuestas de tareas (uno por tarea), además se escogen estos específicamente, porque son unos de los más retomados en la historia y esto permite diferentes ideas para plasmar en las tareas que se presenten a los estudiantes.

2.2. Marco curricular:

En esta sección se presentan los elementos curriculares de las matemáticas escolares colombianas considerados para la incorporación de los números irracionales en la educación secundaria y media. Esta información se extrae de los referentes de calidad: Lineamientos Curriculares de Matemáticas, (MEN, 1998); los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas, (MEN, 2006) y los Derechos Básicos de Aprendizaje (MEN, 2016), documentos que plasman elementos mínimos que se deben tener en cuenta en cada ciclo escolar para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Enseguida se presenta una revisión de cada uno de los documentos mencionados con el fin de identificar aspectos que aludan a la enseñanza o el aprendizaje de los números irracionales.

2.2.1. Lineamientos Curriculares de Matemáticas

Este documento no refiere explícitamente a los números irracionales, pero propone tener en cuenta tres aspectos para organizar la enseñanza de las matemáticas, que tenga todas las características necesarias para el quehacer matemático, los cuales se presentan en la siguiente ilustración:

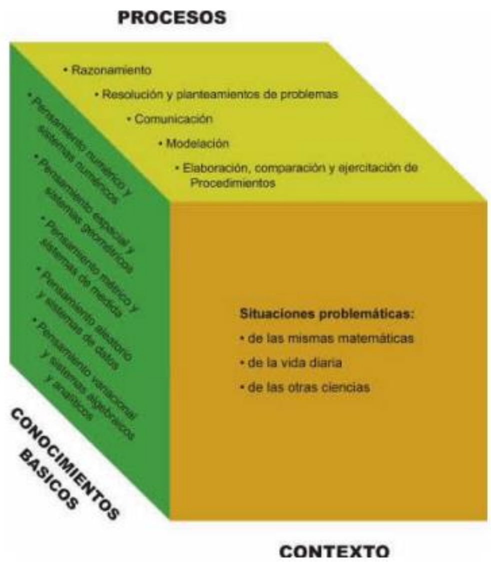


Ilustración 8: aspectos para el diseño de problemas representados en las dimensiones de un cubo; tomado de lineamientos curriculares en matemáticas (1998)

Según lo anterior, se realiza un análisis de lo qué se va a utilizar para realizar un diseño de tareas adecuado para los estudiantes, a lo cual se responde con:

- *Conocimientos básicos*: En la ilustración 8 se observan los llamados conocimientos básicos, donde se encuentran una serie de pensamientos, de entre los cuales el pensamiento numérico es el que tiene mayor coincidencia con el trabajo que se propone.
- *Procesos*: Dados los cinco procesos presentados, no se escoge específicamente uno, ya que, al realizar el diseño de cinco tareas, presentadas en diferentes situaciones y con distintos propósitos, se desarrollan en conjunto o de forma independiente todos estos. No es el objetivo del trabajo considerar de manera profunda el desarrollo excluyente o no de estos procesos en el marco de las tareas a diseñar.
- *Contextos*: Observando los tres contextos (matemáticos, cotidianos, de otras ciencias), en comparación con el objetivo de las tareas a diseñar, se analiza que todos son posibles escenarios que se pueden presentar en cada tarea.

2.2.2. Los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas

Este documento presenta una sugerencia de organización de currículo, para así estudiar, en cada ciclo escolar, conceptos matemáticos a través de un enfoque por competencias y no por contenidos. En particular, para el caso de este trabajo, se considera el estándar: "Analizo representaciones decimales de los números reales para diferenciar entre racionales e irracionales" (MEN, 2006, p. 88), se decide enfocar las tareas diseñadas sobre el conjunto de los números irracionales en el último ciclo escolar, es decir para los cursos décimo y undécimo, porque para ese momento los estudiantes ya están, en teoría, haciendo una formalización (al nivel escolar) de los números reales, por lo tanto tienen el conocimiento necesario para desarrollar a conformidad lo que se planteará en las tareas.

2.2.3. Los Derechos Básicos de Aprendizaje

Los Derechos básicos de Aprendizaje [DBA] configuran un documento que resulta del trabajo de distintos expertos para crear una herramienta que presenta lo indispensable que debe aprender un estudiante y además las acciones necesarias para garantizarlo. Dada la información tan relevante que presentan los DBA, se decide realizar una búsqueda en este documento que hable de qué debe saber un estudiante sobre los números irracionales, encontrando lo siguiente:

DBA	Acciones para realizar
▪ Reconoce que no todos los números son racionales, es decir, no todos los números se pueden escribir como una fracción de enteros $\frac{a}{b}$. Por ejemplo, conoce una demostración del hecho de que $\sqrt{2}$ no es racional. ▪ Reconoce que los números racionales tienen expansión decimal que es finita o infinita eventualmente periódica, mientras que para los irracionales es infinita y no periódica.	Expresa un número racional con expansión decimal periódica o finita como una fracción. Reconoce que todo número (racional o irracional) tiene una expansión decimal y encuentra una sucesión de racionales que lo aproxima. Por ejemplo: $2 \quad 2{,}4 \quad 2{,}43 \quad 2{,}429 \quad 2{,}4286 \quad 2{,}42857 \cdots \rightarrow \frac{17}{7}$ $1 \quad 1{,}4 \quad 1{,}41 \quad 1{,}414 \quad 1{,}4142 \quad 1{,}41421 \cdots \rightarrow \sqrt{2}$

Con lo encontrado anteriormente en los Estándares y los Derechos básicos, se ve como se aborda el conjunto de los irracionales utilizando conocimientos previos y además se nota que en este documento también presenta la enseñanza del objeto para el último ciclo escolar, lo que permite direccionar el trabajo a los estudiantes de grado décimo y once.

2.3. Tareas matemáticas escolares

En esta sección se encuentran algunas posturas que hay actualmente en Didáctica de las Matemáticas para el diseño de una tarea matemática escolar, esto con el fin de apreciar cuál será la metodología y concepción para utilizar en la planeación de una actividad relacionada con el objeto matemático a estudiar, el cual es el conjunto de los números irracionales. A continuación, se presentan diferentes conceptos que se deben tener en cuenta para el diseño de una tarea:

2.3.1. ¿Qué es una tarea matemática escolar?:

Se considerarán dos definiciones, las cuales serán adaptadas a una definición completa, que será el pilar de este trabajo:

- Según Gomez (2018), las tareas de aprendizaje que el profesor propone con la intención de brindar oportunidades para que los estudiantes logren las expectativas de aprendizaje y afectivas que ha establecido, y superen las limitaciones que ha conjeturado que ellos tendrán.
- Para Verdejo y Uclés (2016), una tarea matemática escolar es una propuesta para el alumno, que solicita su actividad en relación con las matemáticas y que el profesor planifica como oferta intencional para el aprendizaje o como instrumento para evaluación del aprendizaje. La definición presentada diferencia entre tarea y actividad matemática, es decir, la actividad está relacionada con el individuo, con el alumno y la acción que realiza, mientras que la tarea está asociada con los objetivos para los que se solicita la actividad. Puede decirse que la actividad es la participación de un alumno que acepta un reto y completa la tarea.

Finalmente, la definición de tarea a utilizar para este documento es: una tarea matemática escolar es una propuesta realizada por el profesor, que tiene una intencionalidad en los estudiantes, para realizar un proceso de enseñanza- aprendizaje con un propósito más definido, que permita observar que errores, obstáculos y dificultades se identifican, para proyectar nuevas estrategias de mejora en el aula. Además, se tendrá en cuenta la siguiente definición: “Una secuencia de tareas es una ordenación de tareas. En algunas ocasiones, una secuencia de tareas puede incluir una o más tareas transversales que los estudiantes abordan simultáneamente con otras tareas de la secuencia". (Gomez, 2018)

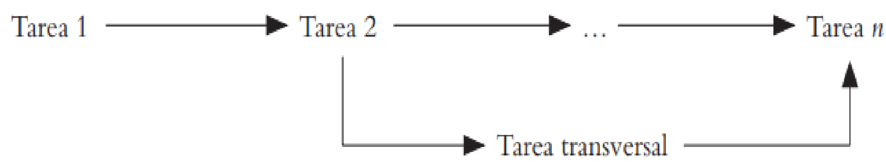


Ilustración 9: Grafo de una secuencia de tareas según Gómez (2018).

En la anterior ilustración, se presenta como es una secuencia de tareas, término importante a resaltar, ya que en esta monografía se diseñan cinco tareas, las cuales están conectadas una con la otra.

Enseguida, se considera importante mencionar, aunque sea de forma resumida, cuáles son posibles intencionalidades o propósitos que se tienen en el diseño de una tarea matemática en el contexto escolar.

2.3.2. Finalidad de diseñar una tarea matemática:

Según García (2019), la organización y planificación de las tareas tienen un propósito didáctico que lleva a cabo un aprendizaje de las matemáticas más acertado, ya que se observa con más precisión una perspectiva cognitiva, cultural y práctica, que permite plasmar una tarea con mayor sentido para el estudiante. Por otra parte, el diseño de una tarea no tiene únicamente como objetivo que el estudiante la pueda resolver y se acople a los resultados, sino que también puede tener otro tipo de finalidad, como recoger información sobre la enseñanza y aprendizaje de un tema que está en investigación, hay que tener en cuenta que estos propósitos se pueden obtener de una sola tarea o de dos independientes.

2.3.3. Tipos de tareas:

Con el fin de elegir como será el diseño de las tareas, se hace una búsqueda de qué tipos hay, para así seleccionar los elementos más relevantes de estas y realizar un diseño propio, dicho esto según (Gomez, 2018), los tipos de tareas son los siguientes:

- *Tarea matemática escolar*: Consiste en la propuesta de una tarea que implique al estudiante y a sus conocimientos sobre el objeto matemático, en una solución de ejercicios prácticos, donde sus respuestas van a notar si se cumplió el objetivo inicial del docente.
- *Tarea significativa*: Consiste en el diseño de una tarea que contenga conceptos, situaciones definiciones y demás, que puedan representar un contenido relevante. Se determina este significado con las siguientes características:
  - Se inicia desde contenidos y sentidos ya conocidos. La tarea parte de conceptos y procedimientos que los estudiantes ya poseen. De este modo aporta una estructura y una representación a la experiencia propuesta en la tarea, revisa aquellos sentidos que la contradicen y acomoda otros componentes a su conocimiento.
  - Permite que los estudiantes activen aquellos otros contenidos que se requieran para ello. Es decir, el profesor seleccionará tareas en las que se interconecten los conceptos sobre los que queremos que se reflexione y no otros.
  - Constituye un reto para los alumnos. Los estudiantes aprenderán en la medida en la que aborden con interés las tareas propuestas; por tanto, la actividad que realicen en ella constituirá un desafío de interés para ellos.
  - Los estudiantes reconocerán en qué medida se ha resuelto. Alcanzarán la responsabilidad de determinar si la respuesta a la tarea es correcta. Establecerán justificaciones para ello y decidirán cuando esa respuesta finaliza la tarea

- *Tareas en situación autentica*: Son tareas de contenido real, el cual tiene que ver con el contexto cotidiano del estudiante. Para elaborar una tarea en situación autentica, hay que tener en cuenta lo siguiente:

  - Evento: cuando presentamos una tarea matemática escolar, es esencial que el evento descrito haya tenido lugar o tenga una posibilidad real de tener lugar.
  - Pregunta: este descriptor hace referencia a si el planteamiento de la pregunta de la tarea escolar es acorde con la formulación de la pregunta en la vida real.
  - Propósito: en el contexto de la tarea la posibilidad de abordar su solución y las consideraciones para tener en cuenta para ello dependen del propósito con el que se

aborda. Este propósito debe ser tan claro en el contexto de la tarea como lo sería en su correspondiente situación de la vida real.

- Lenguaje utilizado: para valorar si planteamos una tarea en contexto auténtico debemos tener en cuenta la terminología, la estructura de las oraciones y la extensión del texto utilizado en la presentación de la tarea. Una simulación de una situación real con un grado razonable de fidelidad no debería incluir términos que dificulten su resolución a los estudiantes si esa dificultad no está presente en la situación extraescolar simulada.

Finalmente, observando todos estos tipos de tareas, se decide diseñar un tipo de híbrido, porque en cada una se presentan elementos importantes, que permiten realizar un diseño más optimo, para cumplir un objetivo; acopiando las características que más puedan servir en cada caso y que se condigan con la definición propuesta en la sección 2.3.1. A continuación, se plantean de manera más específica los elementos que tendrán las tareas matemáticas a diseñar en este trabajo.

2.3.4. Elementos de una tarea matemática escolar

Gómez (2018) presenta siete elementos para diseñar una tarea matemática escolar, los cuales se presentan en la Tabla 2 y se adoptan en su totalidad para el diseño de tareas de este trabajo.

Tabla 2. Elementos de tareas matemáticas escolares según Gómez (2018).

Elemento	Definición
Requisitos	Refiere a los conocimientos y destrezas previos, que el profesor supone por parte de los estudiantes, y que les permite a estos últimos abordar la tarea.
Objetivo	Se refieren a aquellos aspectos de las expectativas de aprendizaje y de tipo afectivo a los que la tarea pretende contribuir, y a aquellos errores y dificultades que el profesor espera que la tarea contribuya a superar.
Formulación	Se refiere al texto o instrucción que el profesor proporciona a los estudiantes y que incluye la información de partida y especifica lo que espera que ellos realicen y produzcan como respuesta.
Los materiales y recursos que incluye	Es cualquier medio que se pueda emplear en el aprendizaje de un concepto o procedimiento matemático determinado, aunque no haya sido diseñado específicamente para ello.

Los tipos de agrupamiento que prevé	Forma en la que el profesor, ubicará a los estudiantes para realizar la tarea propuesta:
Las formas de interacción que promueve	Diferentes formas de agrupamiento dan lugar a diferentes formas de interacción entre los estudiantes y a distintas formas de comunicarse durante la resolución de una tarea.
La temporalidad	El profesor decide cuánto tiempo considera que se debe dedicar a cada tarea y en qué orden.

2.4. Historia de las matemáticas y enseñanza de las matemáticas

La Historia de las Matemáticas estudia los orígenes, los descubrimientos, los métodos y los conceptos matemáticos, así como de los matemáticos que los desarrollaron a lo largo del tiempo. La historia de las matemáticas abarca desde la antigüedad hasta la actualidad, y se relaciona con otras ciencias, culturas y civilizaciones.

Las Matemáticas surgieron de la necesidad de contar, medir, calcular y representar la realidad de forma abstracta y lógica. Algunas de las primeras evidencias de actividades matemáticas se encuentran en huesos, tablillas y papiros que muestran operaciones aritméticas, sistemas de numeración, geometría y astronomía. Estos registros provienen de diversas regiones del mundo, como Mesopotamia, Egipto, India, China, Grecia y Mesoamérica.

Los griegos fueron los primeros en sistematizar las matemáticas como una ciencia basada en el razonamiento deductivo y el rigor lógico. Los griegos introdujeron conceptos como el número irracional, la proporción, la demostración, la geometría analítica, la trigonometría y el cálculo infinitesimal. Los griegos también fueron los primeros en usar letras para representar variables y constantes.

Después de la caída del Imperio Romano, las matemáticas se desarrollaron de forma independiente en diferentes regiones del mundo. Los árabes preservaron y tradujeron los textos griegos, e hicieron aportes en álgebra, aritmética, geometría, trigonometría y teoría de números. Los indios inventaron el sistema de numeración decimal, el cero y el símbolo de la raíz cuadrada. Los chinos descubrieron el teorema de Pitágoras, el triángulo de Pascal y el cálculo de áreas y volúmenes. Los mayas desarrollaron un sistema de numeración vigesimal y un calendario muy preciso.

En la Edad Moderna, las matemáticas se expandieron y se diversificaron gracias al contacto entre las distintas culturas y al avance de la ciencia y la tecnología. Se crearon nuevas ramas de las matemáticas, como el Análisis, el Álgebra Abstracta, las Geometrías no Euclidianas, la Teoría de Conjuntos, la Lógica formal, la Topología, la Teoría de la Probabilidad, la Estadística, la Teoría de Juegos, la Criptografía y la Computación. También se resolvieron problemas históricos, como la cuadratura del círculo, la trisección del ángulo, la duplicación del cubo, la conjetura de Fermat, el último teorema de Fermat y el teorema de los cuatro colores.

Observando un recorrido histórico breve de la historia de las matemáticas, se logra ver la basta información sobre distintos tipos de objetos matemáticos, que son bastante enriquecedores para una clase (Boero, 1989) la Historia de la Matemáticas es un recurso potencial para recontextualizar objetos matemáticos presentados en clase, y así darles un significado. Este autor realizo en 1976 distintos proyectos que consisitían en la investigación de diversas formas de motivación en el aula, y uno de ellos consistía en una propuesta de un curriculo doble, el cual seguía el proceso de enseñanza usual y el proceso de enseñanza con la historia de las matemáticas, a lo que se obtuvo, más especificamente un tensión cognoscitiva real en los estudiantes. Esto quiere decir que el avance que hubo no fue mucho, ya que se logró fue una confusión en los estudiantes. Luego de distintos ensayos, se observa que este tipo de enseñanza es con objetos especificos y que es necesario hacer tareas externas que contengan la Historia de las matemáticas, para usarlas como base a la enseñanza de otro tipo de conceptos. De ahí empiezan a verse los beneficios de incorporar esta contextualización al aula.

Para Bouzas (1996) en una de sus propuestas de enseñanza, habla sobre diferentes problemas históricos importantes, que contextualiza distintos objetos en el área de matemáticas y además que muestran el por qué de algunas cosas, esto con el fin de resolver de una manera novedosa un ejercicio, teniendo en cuenta: un contexto previo, el cual genera interés, un recorrido histórico que responde distintas preguntas, cómo el por qué estudiar cualquier objeto matemático o cuales fueron sus raíces.

Gracias a estos resultados obtenidos por diferentes autores en sus proyectos de investigación, se decide adoptar la Historia de las Matemáticas como una fuente de herramientas para la enseñanza; para el diseño de cinco tareas el cual tienen como fin la enseñanza de los números irracionales, porque se evidencia que es un tema con un contenido histórico amplio y además que se enseña de manera superficial en la escuela.

Finalmente, habiendo considerado una definición de tarea matemática escolar, así como los propósitos que tienen y sus componentes, es posible abordar en el siguiente capítulo la descripción del proceso de diseño de la secuencia de tareas que se realizó, a propósito del conjunto de los números irracionales, a partir de elementos históricos.

3. Diseño de las tareas

En este capítulo se presenta el diseño de las tareas mediadas por la Historia de las Matemáticas enfocadas a la enseñanza de los números irracionales en el contexto escolar. El capítulo inicia comentando brevemente aspectos metodológicos tenidos en cuenta para la construcción de la tarea y, a continuación, se presenta la secuencia de tareas enfatizando en los elementos de Gómez (2018) (ver sección 2.3.4), y en una justificación de la elaboración de cada ítem de cada tarea.

3.1. Aspectos Metodológicos

Para la elaboración de las tareas primero se procedió a través de la revisión documental descrita en la sección 2.1., a partir de esta se identificaron los objetos (nociones, conceptos, representaciones) asociados a los números irracionales que podrían ser protagonistas de las tareas a presentar. A continuación, se acopió la propuesta de tarea presentada a lo largo de toda la sección 2.3., lo cual permitió empezar a elaborar algunos esbozos de tareas, mediadas por la historia, y que irían siendo mejoradas mientras avanzaba el desarrollo del trabajo.

A continuación, se presenta cada una de las tareas compuesta por los elementos mencionados en el modelo de Gómez (2018).

3.2. Tarea 1

1. **Requisitos**: Para la Tarea 1, los conocimientos previos que deben tener los estudiantes son[2]:
    a. Conocimientos básicos de GeoGebra.
    b. Reconocimiento y uso del Teorema de Pitágoras.
    c. Propiedades de los números enteros (conmutativa, asociativa, distributiva.

2. **Objetivo**: Se espera que el estudiante que aborde esta tarea logre construir algunos números irracionales para recrear su construcción histórica con regla y compás modernos (y a través del uso de tecnologías), con el fin de tener advertir un sentido estético de las

[2] Desde luego, estos requisitos, tanto para esta Tarea como para las demás, se plantean de manera local para el presente trabajo de grado, sin particulares pretensiones ni indagaciones profundas al respecto, por cuanto esto no es el objetivo del trabajo.

matemáticas y de algunos números de este conjunto numérico, como una forma de primera aproximación a su estudio.

3. **Formulación**: se presenta el material de la tarea que se entrega a los estudiantes:

Tiempo propuesto: 90 minutos

Grado: Undécimo.

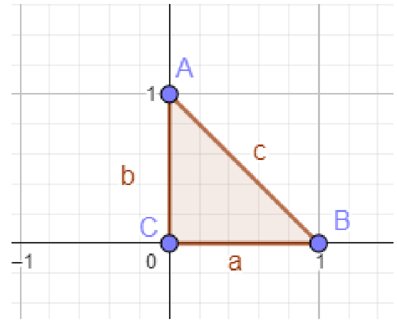
Del fanatismo a la muerte

Actualmente, Pitágoras es uno de los matemáticos más conocidos, específicamente por el teorema que lleva su nombre y que expresa lo siguiente: $a^2 = b^2 + c^2$, lo que hace referencia a que, en un triángulo rectángulo, la hipotenusa (a) de este elevada al cuadrado, es igual a la suma de los dos catetos (b y c), cada uno elevado al cuadrado. Por este y muchos más aportes este matemático tuvo varios seguidores y fanáticos de su trabajo, que también se dedicaron a divulgar todo el conocimiento de la escuela pitagórica (se le llamó así a un movimiento filosófico-religioso de mediados del siglo VI a. C. fundado por Pitágoras, siendo ésta la razón por la cual sus seguidores recibían el nombre de pitagóricos), tanto así que algunos de ellos idolatraban a este matemático, ya que creían que pertenecían a una religión radical, lo cual los hizo asesinar a Hippasus de Metapontum, porque reveló un secreto que tenían en la escuela pitagórica, el cual era que existían números, o en esa época magnitudes, "inconmensurables", las cuales no tenían explicación y era una verdad indecible. Años más tarde, los matemáticos de la época avanzaron en el estudio de este tipo de cantidades (números) al que se acercaron los pitagóricos; uno de ellos fue Teodoro (465 a. C - 398 a. C) con su espiral de triángulos rectángulos que presentamos enseguida.

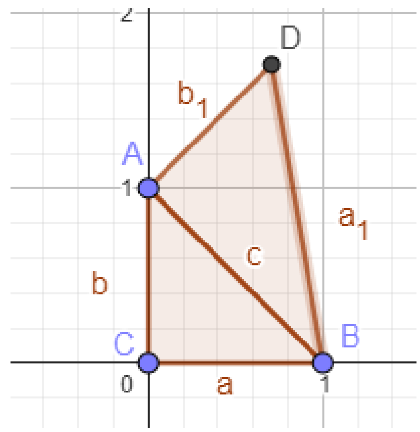
Actividad

1. A continuación, se propone la construcción de una serie de triángulos utilizando el Teorema de Pitágoras, regla y compás:

a. Construir un triángulo rectángulo, con ambos catetos de longitud 1 y calcular el valor de la hipotenusa aplicando el teorema de Pitágoras.



b. Construir un nuevo triángulo rectángulo, de tal manera que el lado c del anterior triángulo, sea un cateto del nuevo triángulo, y que el cateto restante mida 1, la construcción debe quedar de la siguiente forma:



Calcular el valor de a_1 con el teorema de Pitágoras.

c. Construir ocho triángulos más siguiendo los pasos anteriores.

2. Con base en la construcción del numeral anterior, responder a las siguientes preguntas:
   a. ¿Se puede seguir realizando esta construcción? En caso de que sí, ¿cuántas veces más se podría?, ¿por qué?
   b. ¿Qué forma tiene la figura que se está construyendo?
   c. Según lo contestado en la pregunta anterior, observar la siguiente imagen y responder si identifica esta figura en elementos/objetos/seres vivos de la naturaleza, si es así, ¿en cuáles?

3. Responder a las siguientes preguntas:
    a. Con una calculadora, determine el valor de $\sqrt{2}$ y escriba todos los decimales que le presente el dispositivo.
    b. Completar la siguiente tabla con el resultado que obtuvo en el literal anterior y con los resultados de tres compañeros más, además completar calculando para los demás números que se presentan en la siguiente tabla:

Número	**Resultado 1**	**Resultado 2**	**Resultado 3**	**Resultado 4**
$\sqrt{2}$				
$1/3$				
Número	**Resultado 1**	**Resultado 2**	**Resultado 3**	**Resultado 4**
$\sqrt{3}$				
$6/11$				

    c. Según los resultados obtenidos en la tabla anterior, responder:
        - ¿Qué diferencias hay entre los resultados propios y los de los compañeros?
        - En las cifras decimales que se presentan en cada resultado de la tabla, ¿hay alguna característica que los identifique? De ser así, ¿cuál?

Para esta Tarea 1 se identifican cuatro momentos principales que, se considera, apuntan al cumplimiento del objetivo planteado para la tarea y que se describen a continuación:

- *Momento 1*: Se refiere al texto introductorio de la tarea “Del fanatismo a la muerte”. Este texto presentado hace parte fundamental del diseño de la tarea, ya que el propósito de este trabajo es presentar una propuesta que incorpore, en diferentes niveles, la Historia de las Matemáticas, así que se decide redactar una lectura llamativa con elementos y datos curiosos de la historia con el fin de que los estudiantes empiecen a ver otra perspectiva de las matemáticas, y así generar un posible interés en lo que se vaya a realizar posteriormente; además de promover procesos de lectura en la clase de matemáticas.
- *Momento 2*: Es el primer punto de la tarea, en este se quiere que los estudiantes empiecen a tener un acercamiento visual e informal al conjunto de los números

irracionales, construyendo la espiral de Teodoro en un programa de geometría dinámica.

- *Momento 3*: Refiere al segundo punto de la tarea, el cual es una fase de análisis y relación con el texto y el trabajo realizado en el primer punto. Este tiene como fin que el estudiante responda las preguntas formuladas y empiece a generar comparaciones con lo que ya se realizó, para que obtenga conjeturas como: la espiral no puede continuarse después de cierta iteración, porque se sobrepone una figura sobre otra, o que se puede ver como se relacionan las matemáticas con elementos de la naturaleza, entre otros.
- *Momento 4*: Refiere al tercer punto de la tarea, el cual es una fase que, si bien recoge todo lo hecho previamente, también tiene como objetivo que las conjeturas e ideas presentadas se empiecen a enfocar al reconocimiento de algunos números irracionales (en particular los de la forma $\sqrt{p}, p \in N$) y que identifiquen qué tienen de diferente al resto de conjuntos numéricos estudiados anteriormente, en especial en lo que concierne a su representación decimal.

4. **Los materiales y recursos que incluye**:

Se hace un análisis previo de cuáles son los materiales más adecuados para poder llevar la tarea con más precisión, a lo cual se concluye que al trabajar con medidas que no son exactas y que algunos estudiantes puede que no tengan la habilidad del dibujo, entonces lo más apropiado es utilizar un recurso tecnológico, aunque cabe resaltar que es posible hacerlo de manera manual.

5. **Los tipos de agrupamiento que prevé**:

La tarea está direccionada de manera individual en un primero momento, pero de manera grupal, para los demás momentos, esto con el fin de que los estudiantes desarrollen sus competencias de argumentación y comunicación.

6. **Las formas de interacción que promueve:**

Al presentar dos tipos de agrupamiento, estas interacciones deben darse entre los estudiantes para discutir sus respuestas, así como con el profesor, quién estará orientando el proceso de construcción en GeoGebra; el diligenciamiento de la tabla; etc.

7. **La temporalidad:**

   Específicamente para esta tarea se tiene previsto un tiempo de 90 minutos.

3.3. Tarea 2

1. **Requisitos**: Para la Tarea 2, los conocimientos previos que deben tener los estudiantes son:
   a. Cálculo de áreas de figuras geométricas, como el cuadrado, el rectángulo, el triángulo.
   b. Operaciones entre fracciones
   c. Propiedades de los números enteros y racionales (conmutativa, distributiva, asociativa)
2. **Objetivo**: Se espera que el estudiante que aborde esta tarea logre: identificar características tales cómo, la forma de una fracción continua para cada número, que se puedan obtener a partir de la construcción de números racionales e irracionales, con el fin de que se logre generalizar cuales pertenecen a cada conjunto.
3. **Formulación**: se presenta el material de la tarea que se entrega a los estudiantes:

Gimnasio de fracciones

Todo número fraccionario siempre se puede representar como una fracción continua. Las fracciones continuas tienen la forma:

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d\ldots}}}$$

Donde $a, b, c, d, \ldots$ son números enteros positivos. A continuación, vamos a aprender un poco sobre la historia de estas fracciones y cómo se pueden construir.

Las fracciones continuas son uno de los temas más interesantes dentro de la Teoría de Números, así como también uno de los más antiguos. Su origen se remonta a la antigua Grecia; específicamente Euclides estudió por primera vez este tipo particular de fracciones en el Libro VIII de los Elementos. Euclides vivió en el siglo III a.C. y enseñó matemáticas en Alejandría. Siglos más tarde, en la Edad Moderna, la teoría de las fracciones continuas fue retomada por el matemático italiano Bombelli en su libro *L'Algebra parte maggiore dell' aritmetica*, en donde se utilizan fracciones continuas para calcular raíces cuadradas. Posteriormente, Leonhard Euler en su memoria *De fractionibus continuis*, avanzó en la teoría hasta consolidarla tal como se conoce en la actualidad. Finalmente, fue el célebre matemático francés Joseph Louis Lagrange, quien en 1768 formalizó esta teoría en su memoria *Solution d'un problème d'arithmétique*. Lagrange resolvió completamente la famosa ecuación de Fermat $x^2 \; - dy^2 \; = \; 1$ para lo cual usó de manera esencial las fracciones continuas.

¿Cómo construir fracciones continuas?

Por ejemplo, vamos a encontrar la fracción continua de $\frac{53}{20}$.

Al realizar la división de 53 entre 20 se obtiene un cociente que tiene parte entera igual a 2. Por lo tanto, el número $\frac{53}{20}$ se reescribirá como una suma entre 2 y una fracción que represente la parte decimal del cociente. En este caso específico, $\frac{53}{20} = 2 + \frac{13}{20}$. Para encontrar la fracción $\frac{13}{20}$ lo que se hace es escribir $\frac{53}{20}$ como $\frac{40+13}{20} = \frac{40}{20} + \frac{13}{20} = 2 + \frac{13}{20}$. Podemos realizar esta representación porque queremos continuar con las divisiones y obtener nuevas fracciones que tengan denominador igual a 1, como se ve a continuación:

$$\frac{53}{20} = 2 + \frac{13}{20}$$

Se sabe que un número cualquiera x (distinto de cero) se puede escribir como $\frac{1}{\frac{1}{x}}$, por tanto, se tiene que

$$\frac{53}{20} = 2 + \frac{1}{\frac{20}{13}}$$

Ahora, con la fracción $\frac{20}{13}$ se repite el mismo procedimiento. Es decir, al dividir 20 entre 13, se obtiene un cociente con parte entera igual a 1; ahora se busca una fracción que represente la parte decimal del cociente, como se observa a continuación:

$$\frac{53}{20} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{7}{13}}$$

Esto porque $\frac{20}{13} = \frac{13}{13} + \frac{7}{13}$. Ahora, se aplican los pasos anteriores a la fracción $\frac{7}{13}$, obteniendo

$$\frac{53}{20} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{6}}}}$$

Se da por terminada la fracción continúa cuando la fracción que se obtenga en el último paso tenga como numerador 1.

Proceso inverso: Para encontrar el número fraccionario que representa una fracción continúa dada, se empiezan a resolver las sumas y divisiones que están indicadas, iniciando desde la parte inferior, hasta la superior, como se ve, por ejemplo, a continuación:

$$2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \frac{1}{3}}}} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\frac{13}{3}}}} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3 + \frac{13}{3}}} = 2 + \cfrac{1}{4 + \frac{13}{42}} = \frac{404}{181}$$

Actividad

1. Completar la siguiente tabla siguiendo el ejemplo dado y al final escribir la fracción continua (**Nota**: agregue las filas que le hagan falta en cada tabla).
   a. Ejemplo: $\frac{26}{15}$

Dividendo	Divisor	Cociente entero	Residuo	Fracción continua
26	15	1	11	$\frac{26}{15} = 1 + \frac{11}{15}$ $= 1 + \cfrac{1}{\frac{15}{11}}$
15	11	1	4	$\frac{26}{15} = 1 + \cfrac{1}{1 + \frac{4}{11}}$
11	4	2	3	$\frac{26}{15}$ $= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \frac{3}{4}}}$

4	3	1	1	$\frac{26}{15} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{3}}}}$
3	1	3	0	

b. $\frac{22}{6}$:

Dividendo	Divisor	Cociente entero	Residuo	Fracción continua
22	6			

c. $\frac{7}{3}$:

Dividendo	Divisor	Cociente entero	Residuo	Fracción continua
7	3			

d. $\frac{10}{3}$:

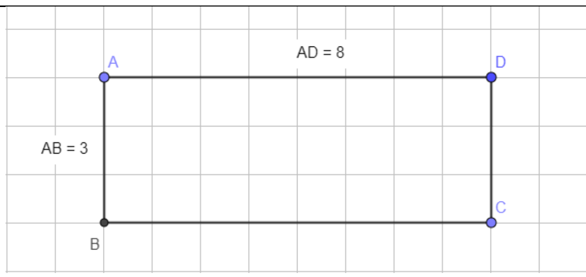
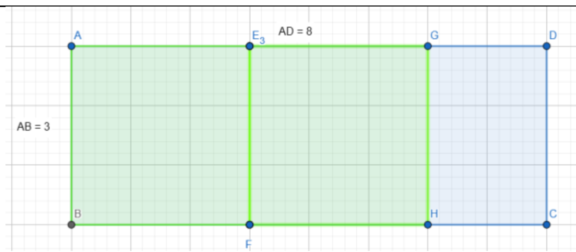
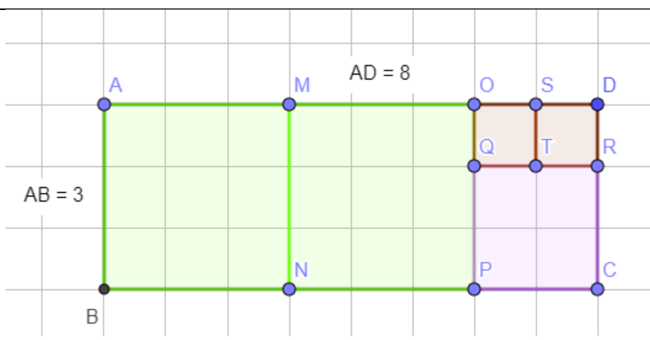
Dividendo	Divisor	Cociente entero	Residuo	Fracción continua
10	3			

e. $\frac{1}{6}$:

Dividendo	Divisor	Cociente entero	Residuo	Fracción continua
1	6			

2. ¿Qué diferencias notas entre las fracciones continúas obtenidas en los literales a y b del primer punto y las de los literales c y d?
3. A continuación, a partir de las instrucciones del literal a, construir los rectángulos que se solicitan en los literales b, c y d utilizando GeoGebra.

a. Rectángulo de lados 8 y 3.

Representación gráfica	**Representación numérica**
	$\frac{8}{3}$
	$\frac{8}{3} = 2 + \frac{2}{3}$
	$\frac{8}{3} = 2 + \frac{2}{3} = 2 + \frac{1}{\frac{3}{2}}$ $= 2 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{2}}$

b. Rectángulo de lados 12 y 5.
c. Rectángulo de lados 17 y $\sqrt{3}$
d. Rectángulo de lados 7 y $\sqrt{2}$

4. Con base en el numeral anterior responda:
   a. ¿Qué diferencia hay entre las fracciones continuas y la gráfica del ítem b y del d?
   b. ¿Qué pasa cuando la medida del lado de un rectángulo es una raíz cuadrada no entera?

Para esta Tarea 2 se identifican cuatro momentos principales que, se considera, apuntan al cumplimiento del objetivo planteado para la tarea y que se describen a continuación:

- *Momento 1*: Se refiere al texto denominado "Gimnasio de fracciones", el cual habla de las fracciones continuas. Esta lectura que realizan los estudiantes es para contextualizar algo de la historia de este objeto matemático y que visualicen cómo funciona, para así mismo continuar con la actividad.
- *Momento 2*: Es el primer punto de la tarea, que está ubicado ahí, con el propósito de que los estudiantes tengan un acercamiento a un tipo de representación, en este caso de números fraccionarios, para que vayan agilizando y conociendo el algoritmo de las fracciones continuas y con esto relacionen el título del texto que nos habla de un gimnasio, que refiere a la ejercitación de los procedimientos.
- *Momento 3*: En esta parte se presenta el segundo punto de la tarea, el cual tiene como objetivo que los estudiantes diferencien la fracción continua de un número periódico y la de uno no periódico.
- *Momento 4*: Este es el tercer punto de la tarea, el cual tiene como propósito incorporar un método antiguo de divisibilidad, el cual consiste en saber cuántas veces cabe un segmento entre otro, para que los estudiantes continúen viendo cómo funcionan los procesos finitos e infinitos en este tipo de representación, y que puedan vislumbrar que, en algunos casos de los presentados, no se va a poder llegar a rellenar todo el espacio.
- *Momento 5*: aquí ubicamos el cuarto punto de la tarea que pregunta sobre distintas situaciones que se dan en el punto anterior, esto para que el estudiante adquiera

conclusiones, de cómo cambia la representación, entre número y número, y más específicamente para acercarlos a una característica del conjunto de los números irracionales, como es su infinitud.

4. **Los materiales y recursos que incluye**:

Para esta tarea se requiere GeoGebra, lápiz y papel.

5. **Los tipos de agrupamiento que prevé**:

La tarea está direccionada de manera individual en un primer momento, para que los estudiantes realicen un análisis personal del qué y el por qué están sucediendo los procesos de infinito en ciertos números representados.

6. **Las formas de interacción que promueve:**

Debe darse entre los estudiantes para discutir sus respuestas, así como con el profesor, quién estará orientando el proceso de construcción en GeoGebra; el diligenciamiento de la tabla; etc.

7. **La temporalidad:**

Específicamente para esta tarea se tiene previsto un tiempo de 180 minutos, ya que se quiere dar el tiempo necesario para la construcción y transformación de lo que los estudiantes encuentran.

3.4. Tarea 3

1. **Requisitos**: Para la Tarea 3, los conocimientos previos que deben tener los estudiantes son:
    a. Noción de intervalos de números reales
    b. Concepción de proporcionalidad
    c. Identificación de regiones poligonales y sus áreas.
2. **Objetivo**: Se espera que el estudiante que aborde exitosamente esta tarea logre identificar regularidades que se presentan al realizar cada punto de la tarea propuesta, para que caiga en cuenta cómo se comporta el número π, su historia y además que este es un número especial, el cual pertenece al conjunto de los irracionales.
3. **Formulación**: se presenta el material de la tarea que se entrega a los estudiantes

La historia del número π

Mercedes llegó muy apurada a casa. Tenía una tarea importante que hacer y, por primera vez en su vida, no sabía cómo hacerla.

-Mamá, tengo que hacer un trabajo, pero el profesor nos ha dicho que hay que hacerlo sin consultar en Internet. ¡¿Cómo, si puede saberse, voy a hacer un trabajo sin usar Internet?! ¡Es de locos!

-En mis tiempos no había Internet y hacíamos también muchos trabajos para clases, ¿sabes? -dijo Antonia, la madre de Mercedes.

-Sí, ya lo sé, usaban enciclopedias y esas cosas -dijo Mercedes-. Pero, por si no te has dado cuenta, en casa no tenemos enciclopedia. ¿Cómo era eso que dijiste una vez? ¡Ah, sí, ya recuerdo! Decías que tener una enciclopedia es un gasto inútil, porque todo se puede encontrar en Internet.

-Seguro que encontramos a alguien que tenga enciclopedia, no te preocupes -dijo Antonia.

-Pero es lo que va a hacer todo el mundo, mami -dijo Mercedes-. El profesor dijo que también contaría para la nota la forma de recopilar la información. Y yo quiero ser más original que los demás.

-De acuerdo, pues entonces tal vez deberías empezar a pensar dónde encontrar la información que buscas, ¿no crees? -dijo Antonia-. ¿Sobre qué trata el trabajo?

-Pues ese es el primer problema -dijo Mercedes-. Hoy es 14 de marzo. El profesor de matemáticas nos ha pedido que hagamos un trabajo que tenga que ver con este día, y no tengo ni idea de a qué se refiere. Y no quiero hacer trampas.

-14 de marzo, 14 del 3… -empezó a decir Antonia-. Piensa en otras formas de decir la fecha.

-En inglés, al decir la fecha se pone primero el mes -dijo Mercedes-. Mes 3, día 14.

-Tres catorce -dijo Antonia.

- ¡Tres catorce dieciséis! -gritó Mercedes-. ¡El número Pi!

-Tengo un amigo que es profesor de matemáticas en la facultad -dijo mamá-. Puedo llamarle, a ver si puede atenderte.

Al día siguiente, Mercedes llegó toda orgullosa al colegio. Le había llevado toda la tarde, pero había hecho un trabajo excepcional.

- ¿Algún voluntario o voluntaria? -preguntó el profesor de matemáticas.

- ¡Yo! -dijo Mercedes.

-Adelante, cuéntanos algo de lo que has descubierto y cómo lo has hecho.

Mercedes se levantó y se dirigió a sus compañeros.

-El día 14 de marzo se celebra el Día del Número Pi. Mes 3, día 14…. Pues bien, el número pi es un número con mucha historia. Fui a visitar a una persona muy puesta en estos temas y me contó el número Pi ha sido un número muy estudiado a lo largo de la historia. El nombre fue propuesto por primera vez en el siglo XVIII, por el matemático galés William Jones. Pero el concepto es mucho más antiguo. Se describe por primera vez en el año 1.800 antes de Cristo, en el Antiguo Egipto. También hay referencias en la Antigua Mesopotamia, incluso en la Biblia. El matemático griego Arquímedes, en el siglo III antes de Cristo, consigue darle un valor aproximado. Desde entonces, hay referencias en toda la historia en diferentes culturas.

Pero fue matemático japonés Takebe el que empezó a calcular el número Pi en el año 1722, utilizando el mismo método expuesto por Arquímedes, y consiguió determinar hasta 41 decimales.

En 1789 el matemático esloveno Jurij Vega, usando una fórmula descubierta varias décadas antes, fue el primero en averiguar los primeros 140 decimales del número Pi. Aunque no todos era correctos, solo los primeros 126. Cinco décadas William Rutherford calculó 208 decimales, aunque solo eran correctos 152.

La obsesión por descifrar el número Pi no cesó. William Shanks, un matemático inglés aficionado, dedicó 20 años a investigar este número, y consiguió, en 1873, encontrar 707 decimales. Pero no fue hasta 1944 cuando Ferguson encontró un error, a partir del cual toda la serie era errónea, en el decimal que ocupaba el lugar 528. En 1948, con la ayuda de una calculadora electrónica., Ferguson recalculó el número Pi. Desde entonces se ha seguido investigando, y hoy se conocen 1,2 trillones de decimales.

-Se puede aprender mucho sin necesidad de consultar en Internet -dijo el profesor-. Solo hay que saber a quién preguntar. ¿A quién dices que has preguntado tú, Mercedes?

-Mi madre tiene un amigo que es catedrático de historia en la universidad -respondió Mercedes.

-Lo que yo decía. No hay nada como estar bien relacionado, no cabe duda -dijo el profesor. Y continuó con la clase, dando la palabra a todo aquel que tenía algo que añadir, que todavía era bastante, pues el número de Pi es mucho número, de eso tampoco cabe ninguna duda.

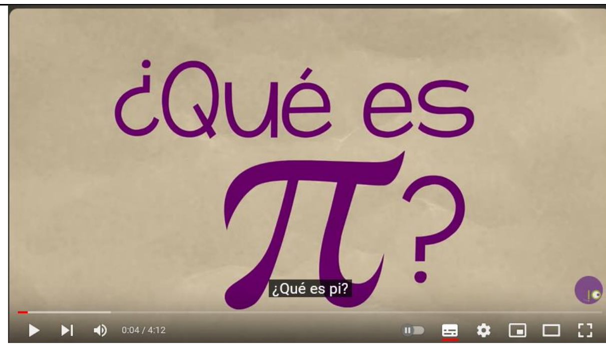
Historia tomada de La historia del número Pi (cuentoscortos.com)

1. Con los siguientes materiales:
   - Cinco objetos de base circular de distintos tamaños.
   - Metro, cuerda, regla.

   Se van a realizar los siguientes pasos para completar la tabla:
   1. Ubicar la cuerda o metro alrededor de cada objeto circular que se tenga, y observar cuántos centímetros mide la longitud del objeto (perímetro).
   2. Determinar el diámetro de la circunferencia del objeto de base circular que se utilizó en el primer paso.
   3. Realizar la división entre el resultado encontrado en el paso 1 y el paso 2. Es decir, la longitud de la circunferencia entre el diámetro respectivo.

Objeto	**Longitud**	**Medida del diámetro**	**División**
1			
2			
3			
4			
5			

2. Responder las siguientes preguntas
   a. ¿A qué número se aproximan las divisiones obtenidas?
   b. En comparación con otros resultados de distintos compañeros ¿se aproximan al mismo número?
3. Con la información obtenida previamente y la información de siguiente vídeo (https://youtu.be/NMjWyyB3mpA)



Realice una representación gráfica (infografía, poster, mapa mental) que contenga el contenido histórico y las curiosidades que más llamaron su atención.

4. Completar la siguiente tabla:

Sumas parciales	**Resultado**	**Expresión en forma decimal**
$\frac{4}{1}-\frac{4}{3}=$		
$\frac{4}{1}-\frac{4}{3}+\frac{4}{5}=$		
$\frac{4}{1}-\frac{4}{3}+\frac{4}{5}-\frac{4}{7}=$		
$\frac{4}{1}-\frac{4}{3}+\frac{4}{5}-\frac{4}{7}+\frac{4}{9}=$		

a. Indique a qué número se van aproximando los resultados de las anteriores operaciones.
b. Proponga cuáles son las siguientes sumas parciales que seguirían si se quisiera extender la tabla. ¿Podría escribir una fórmula general para estas sumas y restas que se van realizando?

Para esta Tarea 3 se identifican cinco momentos principales que, se considera, apuntan al cumplimiento del objetivo planteado para la tarea y que se describen a continuación:

- *Momento 1*: Se presenta un cuento de Eva María Rodríguez titulado "Historia de π" el cual presenta una entretenida historia, para lograr en el estudiante un interés sobre acontecimientos históricos del número π y que vayan teniendo idea de qué va a tratar la tarea.

- *Momento 2*: Es el primer punto de la tarea, el cual tiene como fin que los estudiantes encuentren aproximaciones de π, a través de la manipulación de objetos y de mediciones.
- *Momento 3*: Este es el segundo punto de la tarea, el cual tiene como objetivo el cierre y la socialización de resultados encontrados en la actividad ya realizada.
- *Momento 4:* Este es el tercer punto de la tarea, el cual refiere a un proceso de síntesis que realiza el estudiante para organizar la información recogida y además para presentar que es lo más llamativo en cuanto al número que seguramente la ha escuchado, pero no sabe cómo "funciona" desde un punto de vista matemático.
- *Momento 5:* En el último punto de la tarea se ubica una forma especial de ir aproximándose a π, este tiene el fin de mostrar al estudiante que no solo existe una posibilidad de acercarse al número, como ya se había presentado en el punto 1, si no que hay diversas formas de solución a encontrar los decimales. Se hace uso de la famosa serie de Leibniz que converge a $\frac{\pi}{4}$.

4. **Los materiales y recursos que incluye**:

Para esta tarea se necesitan diferentes objetos de base circular, metro, lápiz, papel, regla.

5. **Los tipos de agrupamiento que prevé**:

La tarea está direccionada de manera grupal, para que entre todos logren encontrar la longitud de la circunferencia que cada uno tiene.

6. **Las formas de interacción que promueve**:

Debe darse entre los estudiantes para discutir lo encontrado, así como con el profesor, quién estará orientando el proceso de enseñanza y de: conjeturas que aparecen; el diligenciamiento de la tabla; etc.

7. La temporalidad:

Para esta tarea se tiene previsto un tiempo de 180 minutos, un tiempo suficiente para la actividad propuesta, ya que es de fácil resolución, pero requiere su tiempo para analizar.

3.5. Tarea 4

1. **Requisitos**: Para la Tarea 4, los conocimientos previos que deben tener los estudiantes son:
    a. Cálculo de áreas de figuras geométricas
    b. Operaciones entre fracciones
    c. Propiedades de los números enteros y racionales (conmutatividad, asociatividad, distributiva)
2. **Objetivo**: Se espera que el estudiante que aborde esta tarea logre, inicialmente reconocer conexiones entre el arte y otras áreas, con las matemáticas y después que observe y analice cómo se hacen algunas de estas conexiones, específicamente abordando la proporción dorada y el número phi.
3. **Formulación**: se presenta el material de la tarea que se entrega a los estudiantes:

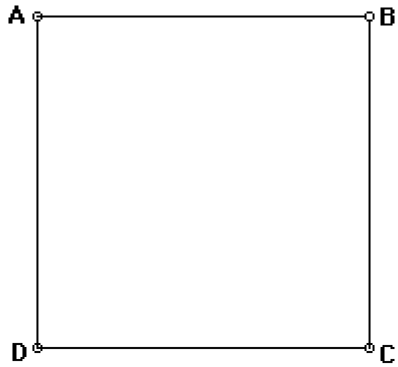
Números que tienen diseño

La proporción dorada corresponde a un número irracional que tiene la expresión $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, y fue empleado por los griegos (posiblemente sin que supieran de su naturaleza irracional) en campos como la arquitectura. La proporción dorada se puede reconocer en la construcción del Partenón, esta también la utilizó el famoso arquitecto Le Corbusier, quien lo incluyó en su diseño del edificio de las Naciones Unidas. En la pintura, Leonardo Da Vinci hizo un uso intensivo del número (está en su "Ultima Cena" y en la famosa "Gioconda"), Miguel Ángel lo usó en su "Creación de Adán" y bueno, aparece en múltiples obras… desde la Venus de Boticelli, hasta Dalí en varias de sus obras.

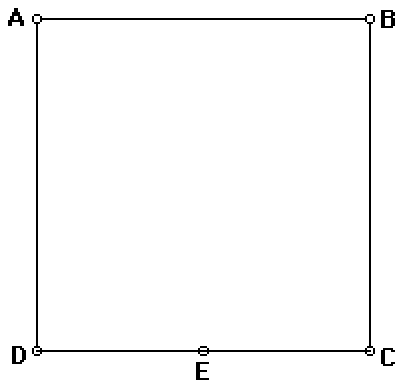
En fotografía, algo básico que se aprende al comienzo, es la famosa regla "de los tercios", que nos dice que debemos procurar "cargar" la figura principal de nuestra fotografía, a una distancia de un tercio de un lado u otro de la fotografía.

1. Realizar con regla y compas la siguiente construcción:

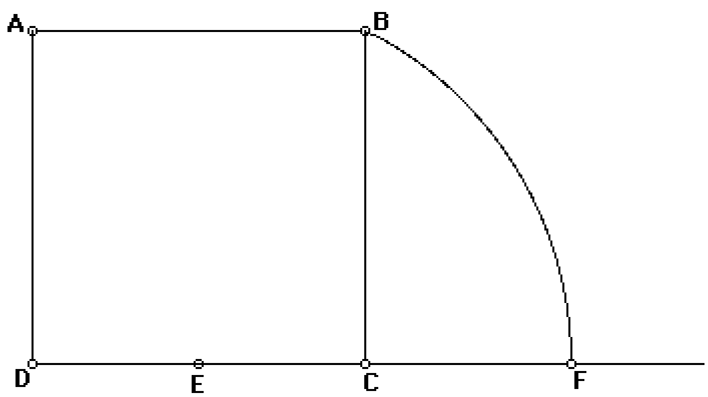
Construir un cuadrado ABCD.



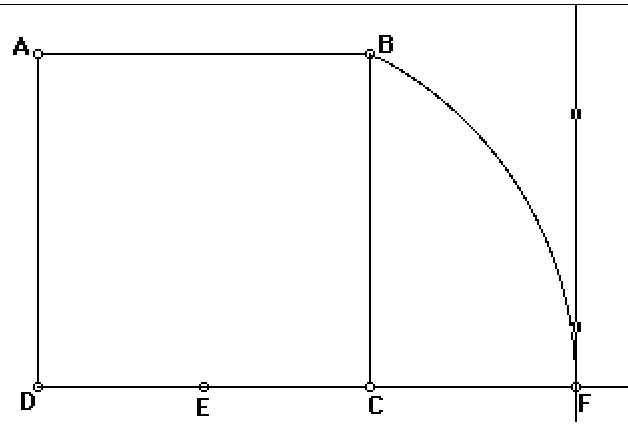
Ahora construiremos el punto medio E de DC.



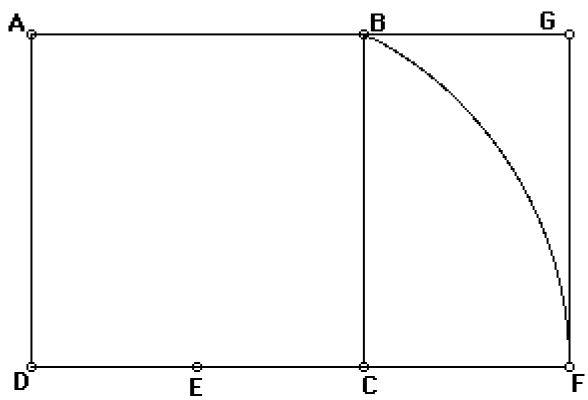
El siguiente paso será extender DC. Con el centro E y el radio EB, dibuja un arco que cruce EC extendido en C.



A continuación, construye un perpendicular a DF en F.



Extiende AB para intersecar la perpendicular en G.

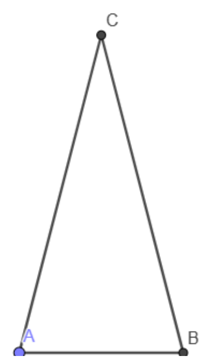


2. Replicar los pasos del primer punto para construir cuadrados con las siguientes medidas:
    a) Cuadrado con lados de 5 cm
    b) Cuadrado con lados de 10 cm
    c) Cuadrado con lados de 13 cm
    d) Cuadrado con lados de 21 cm
    e) Cuadrado con lados de ___ cm. (El estudiante elige la última medida).
3. Completar la siguiente tabla, con los valores obtenidos en el punto uno y dos, realizados previamente:

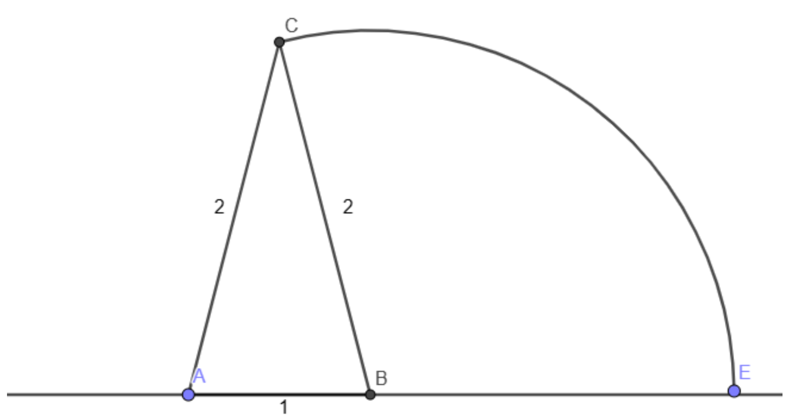
N° de rectángulo	**Medida del ancho del rectángulo**	**Medida del largo del rectángulo**	**Cociente: Ancho/largo**

4. Dados los resultados obtenidos en la tabla anterior responda:
    a) ¿Qué sucede con el resultado de la división entre ancho y largo del rectángulo?
    b) ¿Qué sucede si las medidas de los rectángulos son mayores que 1000 cm?
    c) ¿Qué sucede si las medidas de los rectángulos son menores que 1 cm?
5. Como se leía anteriormente el número áureo aparece en diversas obras de arte, para ello se va a realizar una caracola con los siguientes pasos

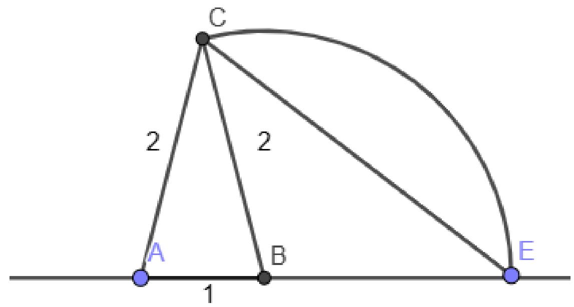
Paso 1: Realizar un triángulo con base 1 y los dos lados restantes 2.



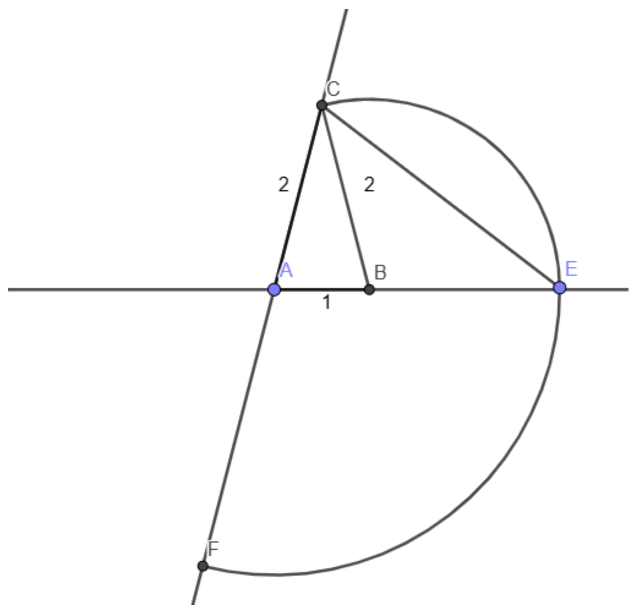
Paso 2: Realizar un arco de circunferencia que no sobre pase la recta de la base del triángulo



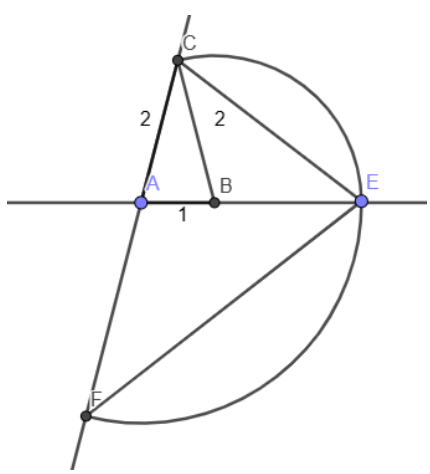
Paso 3: Realizar el segmento CE



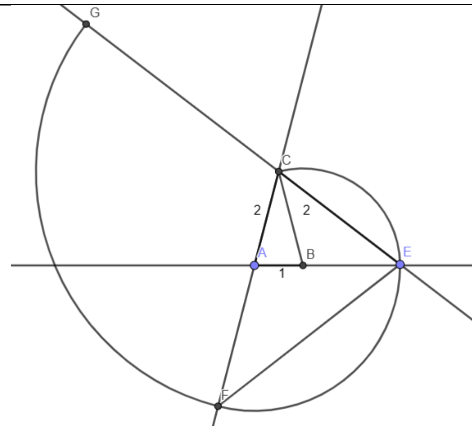
Paso 4: Se realiza los tres pasos anteriores para el ΔCAE con base CA



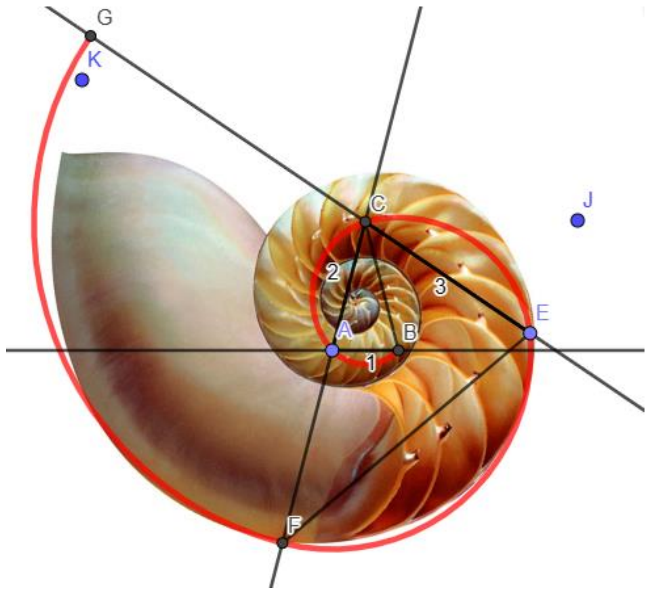
Paso 5: Realizar segmento EF



Paso 6: Se realiza los tres pasos anteriores para el ΔCEF con base CE



Paso 7: Se obtiene



6. Dada la construcción y la serie de Fibonacci $(0,1,1,2,3,5,8,13,\ldots)$, ¿Qué particularidad observa?
7. Si se realiza las divisiones del cada término de la sucesión de Fibonacci con su siguiente término, ¿qué se obtendría?, ¿qué tiene que ver las operaciones realizadas en esta construcción, con las de la construcción inicial?

Para esta Tarea 4 se identifican ocho momentos principales que, se considera, apuntan al cumplimiento del objetivo planteado para la tarea y que se describen a continuación:

- *Momento 1*: Se presenta un texto breve, el cual permite hablar de situaciones y entornos, que se aíslan de la matemática, pero que históricamente tienen mucha relación con la proporción dorada y el número irracional phi (φ).
- *Momento 2*: Es el primer punto de la tarea, a través del cual se quiere ejercitar procedimientos de construcción de elementos geométricos con el fin de que se realice un rectángulo áureo.
- *Momento 3*: Para este momento se presenta el segundo punto de la tarea, el cual tiene como propósito construir distintos tipos de rectángulos, pero con las mismas características del punto anterior y que sirva como proceso de visualización para realizar el siguiente punto.
- *Momento 4*: Se refiere al tercer punto de la tarea, donde se recoge, se sintetiza y se operan, los resultados obtenidos, previamente.
- *Momento 5*: Aquí se da el cuarto punto de la tarea, donde su propósito es concluir y socializar las conjeturas obtenidas, después de responder la pregunta planteada.
- *Momento 6*: Se ubica el quinto punto de la tarea que refiere a realizar una propia obra de arte, siguiendo el objetivo, el cual propone que el estudiante articule el arte y las matemáticas.
- *Momento 7*: Este momento indica el sexto punto de la tarea el cual tiene como propósito que el estudiante conjeture y relacione conceptos ya conocidos, para que posiblemente responda que phi (φ) es infinito.
- *Momento 8*: Aquí es el último punto de la Tarea el cual tiene como propósito mostrar cómo se obtienen aproximaciones a phi (φ).

4. Los materiales y recursos que incluye:

Para esta tarea se necesita: lápiz, compás, papel, regla

5. Los tipos de agrupamiento que prevé:

La tarea está direccionada de manera individual para que se obtengan distintas conjeturas y se pueda debatir cual es la más apropiada.

6. Las formas de interacción que promueve:

Los estudiantes interactúan de forma individual unos con otros, de forma grupal debatiendo resultados encontrados y claro está con el profesor que guía toda la actividad.

7. **La temporalidad**:

Para esta tarea se tiene previsto un tiempo de 240 minutos, ya que el uso de regla y compas puede ser complejo para algunos de los estudiantes, entonces se requiere de un poco más de tiempo.

3.6. Tarea 5

1. **Requisitos:** Para la Tarea 5, los conocimientos previos que deben tener los estudiantes son:
    a) Cálculo de áreas de figuras geométricas
    b) Operaciones entre fracciones
    c) Propiedades de los números enteros y racionales (conmutatividad, asociatividad, distributiva)
2. **Objetivo:** Se espera que el estudiante que aborde esta tarea logre desarrollar conocimientos sobre el número e, observando las regularidades que se presentan a través de dibujos simples y además que logre ver una forma de cómo aproximarse a este número irracional.
3. **Formulación:** Se presenta la Tarea 5:

Un garabato con mucha "característica"

Leonardo era un niño inteligente y soñador. Le gustaban mucho las matemáticas, el cine y los inventos. Le encantaba su nombre, pues era también el nombre de Leonardo Da Vinci, Leonardo de Pisa y de Leonhard Euler, sabios entre sabios. Aunque algunas personas le decían, - "¡Ah, Leonardo, como Leonardo Di Caprio!".

Leonardo a veces se aburría en clase, cuando el profesor hablaba y hablaba repitiendo cien veces lo mismo. En esas ocasiones su mente conectaba con otra dimensión, su mirada parecía traspasar los cristales de la ventana y la electricidad viajaba a velocidad supersónica por sus neuronas. Imaginaba trucos, inventos, películas y hasta conversaciones con los Leonardos.

En una ocasión, mientras el profesor explicaba por enésima vez la fórmula para calcular el área del triángulo, Leonardo, sin darse cuenta, comenzó a dibujar un garabato en un papel, mientras imaginaba cómo Leonhard Euler le hablaba sobre la Teoría de Grafos. Leonardo dibujó un garabato sin levantar el lápiz del papel, un garabato que ocupaba toda la hoja de su cuaderno. Un garabato enorme.

Al finalizar la clase, los cuadernos fueron entregados al profesor y por supuesto, el cuaderno de Leonardo llevaba un gran garabato realizado con bolígrafo azul. Para el director del colegio este garabato era la prueba definitiva de que Leonardo no atendía en clase, se dispersaba; además, esas no eran formas de cuidar el material ni de presentar un trabajo. Había motivos suficientes para llamar a Leonardo a su despacho, echarle un sermón y por supuesto, castigarlo. Seguramente habría que hablar con sus padres, ponerlos al día sobre su mal comportamiento y contarles lo que los profesores tenían que sufrir con alumnos así, tan descuidados y despreocupados, bla, bla, bla.

Tomado de https://cuentosymates.blogspot.com/2014/11/el-garabato-de-euler.html

Actividad

1. Según el texto, Leonardo no atendía a clase, pero lo que realmente quiere es mostrar una teoría fascinante con su garabato, a continuación, se van a realizar los siguientes pasos y saber si este estudiante debe ser castigado o no:

- Dibujar un garabato sin levantar el lápiz del papel, de forma que la línea que se obtenga se corte consigo misma. Dejar el principio y el final de la línea bien visibles.
- Contar los nodos, es decir, los puntos en los que la línea que has dibujado se corta consigo misma. Incluye también el comienzo y el final de la línea. A esta cantidad la llamaremos V.
- Contar las zonas en las que ha quedado dividido el papel, incluyendo la zona exterior. No dejar ni un hueco. A este número le vamos a llamar C.
- Contar los segmentos en los que ha quedado dividida la línea que se ha trazado. Teniendo en cuenta el inicio y el final de la línea. A este número lo llamaremos A.

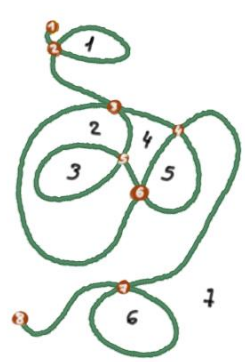


Ilustración 10: Ejemplo de garabato que puede obtener el estudiante. Tomado de: https://divermates.es/la-magica-formula-de-euler/

2. Realizar 10 tipos de garabatos diferentes y completar la tabla:

Cantidad de Nodos (V)	**Cantidad de huecos (C)**	**Cantidad de Segmentos (A)**

3. Con los datos obtenidos en la tabla anterior, reemplazar la siguiente formula: $C + V = A + 2$ y escribir que es lo que pasa con cada operación realizada.
4. Dada la siguiente sucesión de números $a = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ realice el reemplazo hasta $n = 10$ y responda lo siguiente:
   - ¿Cuántos decimales obtiene en cada operación?
   - ¿El número que se obtiene es mayor que 3?
   - ¿Cuál sería el valor si $n = 20\,000$?
   - ¿Cuál sería el valor si $n = 200\,000$?
5. Según lo respondido en el literal anterior, ¿en algún momento se mantiene los mismos decimales, verificando una especie de patrón? ¿En algún momento los decimales dejan de cambiar?

Para esta Tarea 5 se identifican seis momentos principales que, proporcionan un desarrollo del objetivo, para cumplirlo en su totalidad:

- *Momento 1*: Se presenta un cuento curioso, el cual da incorporación a la actividad dejando cómo incógnita que pasó con el sujeto del relato, esto se hace para empezar a crear un interés al estudiante y relacione el análisis de textos con la actividad matemática a realizar.

- *Momento 2*: Es el primer punto de la tarea, el cual presenta una incorporación del estudiante al relato anterior y empieza a pasar por la situación del protagonista, esto se hace para que el estudiante logre solucionar la incógnita de la historia y verifique el por qué se aburría con la clase de matemáticas, si estaba pensando en un matemático.
- *Momento 3*: Para este momento se presenta el segundo punto de la tarea, el cual tiene como propósito que el estudiante ejercite la recolección de datos con distintos tipos de ilustraciones que pueda obtener.
- *Momento 4*: Se refiere al tercer punto de la tarea, que tiene como propósito sintetizar todo lo realizado anteriormente para que así el estudiante se dé cuenta de la regularidad que se tiene en realizar de diversas formas un objeto y que siempre se obtenga lo mismo, aquí cabe resaltar que el profesor puede interferir con un breve cierre, diciendo que esta fórmula se le atribuye a Euler y es una de las tantas curiosidades que existen en las matemáticas.
- *Momento 5*: Refiere al cuarto punto de la tarea, su propósito es promover la realización de distintas operaciones algorítmicas, para que el estudiante ejercite y empiece a entender la lógica de la fórmula presentada.
- *Momento 6*: Se ubica el punto cinco de la tarea que refiere a la conclusión de todo lo realizado anteriormente, presentando una serie de preguntas que le permiten al estudiante realizar un proceso de visualización, para que genere una conjetura, para que en el momento de socializar se llegue a una conclusión en conjunto de lo que está pasando.

4. Los materiales y recursos que incluye:

Para esta tarea se necesita: lápiz, compás, papel, regla, calculadora

5. Los tipos de agrupamiento que prevé:

La tarea está direccionada de manera individual para que cada estudiante realice sus construcciones diferentes y se pueda generar una regularidad más notoria al tener tantos resultados.

6. Las formas de interacción que promueve:

Los estudiantes interactúan de forma individual y posteriormente de forma grupal para socializar y llegar a un acuerdo de que es lo que realmente pasa, además tener en cuenta la participación del profesor, que es únicamente de guía, aunque hace una intervención previa, que permite una institucionalización pequeña para relacionar conceptos.

7. **La temporalidad**:

Para esta tarea se tiene previsto un tiempo de 180 minutos.

4. Conclusiones

En este trabajo se presentó una indagación amplia que permitió el diseño de distintos tipos de tareas que presentan una idea novedosa de las tareas que pueden implementarse en una clase de matemáticas alrededor de la enseñanza y el aprendizaje de los números irracionales. Dicho esto, se observa cómo el objetivo general se cumplió. En cuanto a los objetivos específicos, se cumplen a conformidad, con algunas modificaciones, como la de clasificar la información del recorrido histórico para la organización de las tareas, pues se cambió y se utilizó toda la historia matemática recopilada para saber qué elementos incorporar en el aula a través de las tareas.

Como ya se mencionó previamente, el objetivo del trabajo se llevó a cabo, por lo que se trabajó en pro de este; pero así mismo se presentaron algunas dificultades en su elaboración y cumplimiento, principalmente: la información reducida del objeto matemático, ya que al leer diferentes fuentes se observaba casi siempre el mismo resumen histórico; el diseño de las tareas, ya que al inicio es difícil encontrar la forma de incorporar la historia, al ser conocimiento riguroso y formal, que en muchas ocasiones no es de interés del estudiante; y por último la organización y selección de los objetos matemáticos que iban a estar en el diseño de las tareas, esto debido a que la idea de esta propuesta era que se hiciera en secuencia, pero también que funcionaran de manera individual, además de que los conocimientos previos para desarrollar las tareas deberían estar en todos los estudiantes, o por lo menos que fuera algún concepto de fácil explicación.

Dado el cumplimiento del objetivo del trabajo, el recorrido en la elaboración de este y las dificultades que se presentaron, queda como experiencia formativa todo lo que uno puede realizar en el aula de clase, incorporando distintos tipos de herramientas que se tienen presente muy poco, como lo es la Historia de las Matemáticas, y que enriquece y contextualiza el conocimiento que tienen los estudiantes, además que permite analizar las distintas estrategias que se tienen como docente, para modificarlas, eliminarlas o mantenerlas, con el fin de generar un mejor proceso de enseñanza y aprendizaje.

Finalmente, para las personas que les sea de interés este trabajo, se propone un pilotaje o implementación de las tareas, para así realizar un análisis de lo planeado versus lo logrado y así proponer distintas versiones, según lo que haya faltado en cada tarea.

5. Bibliografía

Agarwal, R. P., & Agarwal, H. (2021). *Origin of Irrational Numbers and Their Approximations.* Obtenido de https://doi.org/10.3390/

Boero, P. (1989). Utilización de la historia de la matemáticas en clase con alumnos de 6 a 13 años. *Revista suma*, 17-28.

Boero, P. (1989). Utilización de la Historia de las Matemáticas en clase con alumnos de 6 a 13 años. *Suma*, 17-28.

Bouzas, P. G. (1996). Historia del álgebra en la educación secundaria: resolución de problemas históricos . *Revista Suma*, 83-90.

Broetto, G. C., & Santos-Wagner, V. M. (2017). *Números irracionais para professores (e futuros professores) de matemática.* Vitória: Edifes.

Cappellucci, E., & Carballido, A. (2017). *ESTUDIO DEL NÚMERO IRRACIONAL EN LOS LIBROS DE TEXTO ESCOLARES.* Obtenido de http://funes.uniandes.edu.co/22915/1/Cappellucci2017Estudio.pdf

D.Reina, L. (2010). *La fracción cpontinua y el número irracional puntos de encuentro y alguno aportes didácticos.* Obtenido de https://www.researchgate.net/profile/Luis-Reina/publication/299398416_LA_FRACCION_CONTINUA_Y_EL_NUMERO_IRRACIONAL_PUNTOS_DE_ENCUENTRO_Y_ALGUNOS_APORTES_DIDACTICOS/links/56f409fa08ae38d7109f6484/LA-FRACCION-CONTINUA-Y-EL-NUMERO-IRRACIONAL-PUNTOS-DE-ENCUENT

García, F. J. (2019). *Introducción a 'Diseño de tareas en educación matemática: Una diversidad de marcos teóricos'.* Obtenido de http://funes.uniandes.edu.co/14545/1/Garcia2019Introduccion.pdf

Gomez, P. (2018). *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares (1st ed.).* Obtenido de Universidad de los Andes, Colombia.: http://www.jstor.org/stable/10.7440/j.ctvt7x531

González, J. (1992). *Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII.* Obtenido de https://es.scribd.com/document/547482875/Las-Rai-ces-del-Ca-lculo-Infinitesimal-en-el-Siglo-XVII-Gonza-lez-Urbaneja

MEN. (1996). *Lineamientos Curriculares en Matemáticas.* Obtenido de https://bibliotecadigital.magisterio.co/user/login?destination=node/94124

MEN. (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas.* Obtenido de https://www.mineducacion.gov.co/1780/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

MEN. (2016). *Derechos básicos de aprendizaje en matemáticas.* Obtenido de https://www.socialhizo.com/files/dba-matematicas.pdf

Pérez, D. C., & Valdez, Y. V. (2020). Desarrollo histórico-epistemológico de los números irracionales. *Revista sigma*, 33-49.

Recalde, L. C., & Arbeláez, G. I. (2011). *Los números reales como objeto matemático: Una perspectiva histórico epistemológica.* Cali.

Recalde, L. C., & Vargas, V. L. (2013). *Las fracciones continuas en el desarrollo historico de los números reales.* Obtenido de https://scm.org.co/archivos/revista/Articulos/1102.pdf

Rodríguez, M. M., & Vásquez, J. C. (2012). *Usos de la historia en la enseñanza de la matemática.* Obtenido de https://cientec.or.cr/archivo/matematica/2012/ponenciasVIII/Margot-Martinez3.pdf

Ruiz, M. L. (s.f). *OBSTÁCULOS, DIFICULTADES Y ERRORES EN EL APRENDIZAJE DE LOS NÚMEROS IRRACIONALES.* Obtenido de FUNES UNIANDES: https://bit.ly/3dor7Vj

Sánchez, J. C., & Valdivé, C. (s.f.). *EL NÚMERO IRRACIONAL:UNA VISIÓN HISTÓRICO – DIDÁCTICA.* Obtenido de http://funes.uniandes.edu.co/22987/1/Sanchez2012El.pdf

UNAM. (2012). *Pitagoras y la música.* Obtenido de https://midebien.com/pitagoras-y-su-escala-musical/

Vallejos, E. E., & Arboleda, G. A. (2017). *la Historia de la Matemática como recurso didáctico y alternativa de aprendizaje de los números irracionales.* Obtenido de http://funes.uniandes.edu.co/11326/1/Caicedo2017La.pdf

Vasco, S. A., & Mejía, H. H. (2009). *EL DESCUBRIMIENTO DE LAS MAGNITUDES INCONMENSURABLES Y LAS PARADOJAS DE ZENÓN: LA CRISIS QUE GENERARON Y SU INFLUENCIA EN EL DESARROLLO DE LOS MÉTODOS INFINITESIMALES QUE LLEVARON A LA FORMACIÓN DEL CONCEPTO DE LÍMITE.* Obtenido de https://editorial.ucp.edu.co/omp/index.php/e-books/catalog/download/53/49/2428?inline=1

Verdejo, A. M., & Uclés, R. R. (2016). *Variables y funciones de las tareas matemáticas escolares.* Obtenido de https://www.researchgate.net/publication/344882944_Variables_y_funciones_de_las_tareas_matematicas_escolares?enrichId=rgreq-6a9e193b20e9b23fda1409d743a72cfa-XXX&enrichSource=Y292ZXJQYWdlOzM0NDg4Mjk0NDtBUzo5NTA4MTk4OTM1NDcwMTBAMTYwMzcwNDUzNjM5MQ%3D%3D&el=1

Anexo. Propuesta de implementación

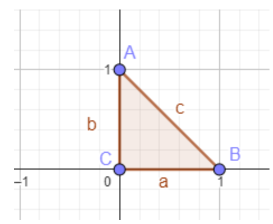
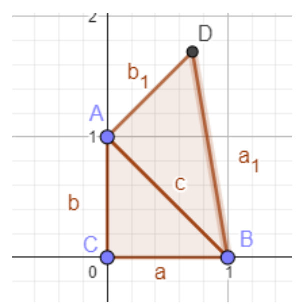
Dado el texto de Moreno (2016) en el especifica que una tarea matemática escolar es una propuesta para el alumno, que solicita su actividad en relación con las matemáticas y que el profesor planifica como oferta intencional para el aprendizaje o como instrumento para evaluación del aprendizaje se muestra una idea de cómo puede ser la implementación de la Tarea 1, claro está que el profesor anexa sus intenciones y objetivos. Para esto se tiene en cuenta el flujo de aprendizaje en OA se caracteriza por cinco fases:

- Introducción: el concepto a trabajar se introduce de manera lúdica y novedosa, se recomiendan videos introductorios, historia, juegos, problemáticas, etc., que motiven al estudiante a querer aprender.
- Objetivos: se construyen los objetivos, en conjunto con los estudiantes y guiado por el docente, que se desean alcanzar con el desarrollo del OA
- Actividades: se desarrollan de acuerdo con las habilidades que contenga el OA en la malla curricular, se organizan y se agrupan las habilidades que puedan potencializarse en una misma actividad.
- Resumen: se plantea una actividad que recoja todo lo desarrollado en clase de forma breve y puntual.
- Tarea: se explicitan las actividades que el estudiante puede realizar por sí solo al término de la clase.

Dados estos elementos se realiza una tabla de cómo sería la división de la Tarea 1, según el flujo de aprendizaje:

Etapa y quién es el responsable	Cómo se expone	Qué se expone
Para la primera etapa introductoria del proceso de OA, el	El docente va a realizar las preguntas: ▪ ¿Qué conocen de Pitágoras? ▪ ¿Cuál es su aporte más conocido?	**Del fanatismo a la muerte** Actualmente Pitágoras es uno de los matemáticos más conocidos, específicamente por su teorema, donde expresa lo siguiente $a^2 = b^2 + c^2$ lo que hace referencia que en un triángulo rectángulo la hipotenusa de este es igual a la suma de los dos catetos, cada uno al cuadrado.

docente es el que la va a dirigir	Esto con el fin de empezar a generar dudas para los que no tengan respuesta a las preguntas y curiosidad, para los que ya conozcan algo del autor. Posteriormente se hace una lectura en conjunto del texto **Del fanatismo a la muerte,** para dar un contexto histórico, que presenta datos curiosos, que permiten generar interés a los estudiantes seleccionados para el desarrollo de la actividad. Por último, se da paso a una socialización de lo que se leyó y se responde de forma grupal, las preguntas propuestas al inicio de la clase.	Por este y muchos más aportes este matemático tiene varios seguidores y fanáticos a su trabajo, que también se dedican a aprender y defender todo el conocimiento de la escuela pitagórica (fue un movimiento filosófico-religioso de mediados del siglo vi a. C. fundado por Pitágoras de Samos, siendo ésta la razón por la cual sus seguidores recibían el nombre pitagóricos), tanto así que unos pitagóricos idolatraban a este matemático, ya que creían que pertenecían a una religión radical, lo cual los hizo asesinar a Hippasus de Metapontum porque reveló un secreto que tenían, el cual era que existían números o en esa época magnitudes inconmensurables, las cuales no tenían explicación y era una verdad indecible. Pero gracias a este acontecimiento, diferentes tipos de autores siguieron esta línea, formalizando los números irracionales, como lo fue Teodoro con su espiral de triángulos rectángulos.
Fase dos de los OA, consiste en los objetivos, los cuales se presentan por el docente para que el estudiante logre cumplirlos.	En este momento se presenta el **objetivo** principal de la clase, a través de la lectura en conjunto, para que todos tengan presente qué es lo que tienen que lograr al final de la sesión. Pero la actividad tiene distintos propósitos globales, los cuales son: Realizar una actividad matemática, que contenga contenido estético para generar un interés visual en los estudiantes. Empezar a incorporar el concepto de números irracionales,	**Objetivo:** Dibujar algunos números irracionales para reconocer cómo se construyeron con regla y compás, con el fin de tener una visualización de la estética de lo matemático y de algunos números de este conjunto.

	para continuar con una secuencia de tareas. Estos objetivos son como guía para el docente, ya que él es la persona encargada de que se cumplan los logros de la clase, para próximas actividades	
Para la fase de actividades el estudiante es el encargado de completarla, con ayuda del docente.	El docente va a leer la instrucción presentada en la guía, e indicará que se realizará en un programa de geometría dinámica, para más precisión. Esta fase permite, el nivel de análisis que tiene el estudiante, ya que va a utilizar teorema de Pitágoras, lo cual se obtuvo como mayor aporte en la introducción, así mismo se verá como es el seguimiento de instrucciones paso a paso y las emociones que presenta al realizar varias iteraciones.	**Actividad** A continuación, se propone la construcción de una serie de triángulos utilizando el Teorema de Pitágoras, regla y compás y las siguientes instrucciones: Construir un triángulo rectángulo, con ambos catetos de longitud 1 y calcular el valor de la hipotenusa aplicando el teorema de Pitágoras.  Construir un triángulo rectángulo, de tal manera que uno del lado c del anterior triángulo, sea el mismo del nuevo y que el lado que no es hipotenusa mida 1, la representación debe quedar de la siguiente forma:  hallar el valor de a_1 con el teorema de Pitágoras. Construir ocho triángulos más con las características anteriores.

<table>
<tr>
<td>Fase de resumen, esta fase es una actividad guiada, la cual va a dirigir el docente, pero la van a realizar los estudiantes</td>
<td>Para este momento se hacen unas preguntas que recogen todo lo que se realizó con la construcción de la figura en el programa de geometría dinámica, estas las hará el docente, una a una, para saber la opinión de los estudiantes, e ir concluyendo cada pregunta.</td>
<td>Con base en la construcción del numeral anterior responda las siguientes preguntas:

• ¿Se puede seguir haciendo esta construcción?
• Si es posible seguir construyendo, ¿Cuántas veces más se podría?
• ¿Qué forma tiene la figura que se está construyendo?
• Según lo contestado en la pregunta anterior, se puede ver la siguiente imagen y verificar que se puede ver esta figura en elementos de la naturaleza, ¿se puede presenciar esta espiral en alguna otra parte de la naturaleza?, si es así, ¿cuál?
</td>
</tr>
<tr>
<td>Para esta fase, que consiste en la tarea final, ya el responsable el estudiante en su totalidad.</td>
<td>El docente se encargará de asignar a los estudiantes esta tarea final, la cual tiene como propósito una institucionalización y formalización, de lo que ya se vio previamente y se hará la comparación del aprendizaje adquirido, para verificar si los estudiantes tienen la capacidad de análisis, para comenzar a definir o tener una idea de irracionalidad.</td>
<td>Según lo escrito anteriormente, compare y analice con las respuestas a las siguientes preguntas:
• Con una calculadora, halle el valor de $\sqrt{2}$ y escriba todos los decimales que se le presenten en el dispositivo
• Llenar la siguiente tabla con el resultado que obtuvo y el de 3 compañeros más, y completar calculando los siguientes números:
<table>
<tr><th>Número</th><th>Resultado 1</th><th>Resultado 2</th><th>Resultado 3</th><th>Resultado 4</th></tr>
<tr><td>$\sqrt{2}$</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$1/3$</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table></td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><th>Número</th><th>Resultado 1</th><th>Resultado 2</th><th>Resultado 3</th><th>Resultado 4</th></tr>
<tr><td>$\sqrt{3}$</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$6/11$</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Según los resultados obtenidos en la tabla, escriba:
a. ¿Qué diferencias hay entre los resultados propios y los de los compañeros?
b. En los decimales que se presentan en cada resultado de la tabla, ¿hay alguna característica que los identifique?
</td>
</tr>
<tr>
<td>Fase de Tarea</td>
<td>La plantea el profesor, el cual ve cual es el recorrido que ha tenido el estudiante a lo largo de su clase.</td>
<td>Puede ser una tarea sobre consultar algún tipo de número irracional.</td>
</tr>
</table>

Tabla 3: presentación de las cinco fases del OA para la implementación de la Tarea 1

La idea de implementación presentada en la tabla 2 es una propuesta realizada, para que el lector logre ver la intencionalidad de la autora y que pueda comparar con lo que ve en el aula de clase, para poder planear de la mejor forma su implementación.