

RECURSOS EDUCATIVOS DIGITALES EN GEOGEBRA PARA LA ENSEÑANZA DEL
CÁLCULO DIFERENCIAL EN LA EDUCACIÓN MEDIA

DIANA MARCELA DUARTE ROJAS
JESSICA ALEJANDRA GUEVARA ESTUPIÑAN

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C.

2018

RECURSOS EDUCATIVOS DIGITALES EN GEOGEBRA PARA LA ENSEÑANZA DEL
CÁLCULO DIFERENCIAL EN LA EDUCACIÓN MEDIA

DIANA MARCELA DUARTE ROJAS, Cód: 2014140036
JESSICA ALEJANDRA GUEVARA ESTUPIÑAN, Cód: 2014140051

Trabajo de grado para optar al título de
Licenciado en Matemáticas,
asociado al estudio de un asunto de interés profesional del estudiante.

Director:
William Alfredo Jiménez Gómez

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C.

2018

Nota de aceptación

Jurado

Jurado

Jurado

Bogotá, D.C.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco principalmente a Dios, sin él nada de esto sería posible. A mis padres, por su amor, trabajo y sacrificio, gracias a ustedes he logrado llegar hasta aquí. A mi hermana, por su apoyo y carisma, gracias a ti nunca deje de luchar por mis sueños. A mi compañera Diana Duarte y al profesor William Jiménez, la confianza, apoyo y dedicación; por haber compartido conmigo sus conocimientos y sobre todo su amistad. Por último y no menos importante agradecer a cada una de las personas que estuvieron presentes durante mi formación como persona y como profesional.

Alejandra Guevara

Agradezco a Alejandra Guevara y a todas las personas que me acompañaron durante estos cinco años, a William Jiménez por ser mi profesor, director de tesis, compañero y amigo, con su carisma logró impulsarme a plantearme grandes metas personales y profesionales. A mis padres Alba y Nelson, por educarme de la manera como lo hicieron, pues gracias a eso soy la persona que soy, a mi hermana Milena Duarte por ser mi mejor amiga y siempre tenerme paciencia. Finalmente, a Dios porque sin él nada habría sido posible.

Diana Duarte



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA
NACIONAL

Escuela de Educación

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Presentados y **aprobados** el documento escrito y la sustentación del Trabajo de Grado, en el tipo Monografía, titulado: **"Recursos Educativos digitales en GeoGebra para la enseñanza del Cálculo Diferencial en la educación media."**, elaborado por las estudiantes:

Diana Marcela Duarte Rojas - código 2014140036 - cédula 1033794236

Jessica Alejandra Guevara Estupiñan- código 2014140051-cédula 1022429480

Como requisito parcial para optar al título de **Licenciado en Matemáticas**, el jurado evaluador asigna **37** puntos al mismo.

Sugerencia de Distinción: Ninguna Meritoria Laureada


En constancia se firma a los 04 días del mes de diciembre de 2018.


Director del Trabajo: Profesor


WILLIAM ALFREDO JIMÉNEZ GÓMEZ

Jurado:

Profesor


CAMILO SUA FLÓREZ

	FORMATO
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN- RAE
Código: FOR020GIB	Versión: 01
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 1 de 2

Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado.
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Recursos educativos digitales en GeoGebra para la enseñanza del cálculo diferencial en la educación media.
Autor (es)	Duarte Rojas, Diana Marcela Guevara Estupiñán, Jessica Alejandra
Director	Jiménez Gómez, William Alfredo
Publicación	Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional, 2018 79 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	GEOGEBRA, CÁLCULO DIFERENCIAL, RECURSO EDUCATIVO DIGITAL, ENSEÑANZA.

Descripción
<p>Esta monografía presenta los diferentes recursos educativos digitales que fueron elaborados por las maestras en formación con ayuda del docente asesor para la enseñanza de una temática específica en el área de matemáticas – cálculo diferencial -, de esta manera pretende, enriquecer los ambientes de enseñanza que los docentes emplean en el aula de clase en la Educación Media. Adicionalmente, para cada uno de los recursos educativos digitales se presenta un instructivo con una sugerencia de uso. Finalmente se muestran algunas de las opiniones de docentes que exploraron los recursos educativos digitales.</p>

Fuentes
<p>Castillo, S. (2008). Propuesta pedagógica basada en el constructivismo para el uso óptimo de las TIC en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. <i>Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa (RELIME)</i>, 11(2), 171–194. Retrieved from http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362008000200002&lng=es&nrm=iso&tlng=en</p> <p>Del Río, L. (2012). El Instituto GeoGebra de La Plata.</p> <p>Fiallo Leal, J. E., & Parada Rico, S. E. (2014). Curso de precálculo apoyado en el uso de geogebra para el desarrollo del pensamiento varacional. <i>Pre Calculus Course in Using Supported Geogebra for the Development of Variational Thinking.</i>, (20), 56–73. Retrieved from http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=a9h&AN=100271851&lang=es&site=ehost-live</p>

- Gamboa, R. (2007). Uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática.
- GeoGebra. (2017). Retrieved from <https://www.geogebra.org/>
- Instituto GeoGebra de Bogotá. (2018). Instituto GeoGebra de Bogotá.
- Lee, A. (2012). Instituto GeoGebra de Hong Kong. Retrieved from <https://www.geogebra.org/geogebra+institute+of+hong+kong>
- López, R. C. (2008). *NUEVAS TECNOLOGÍAS EN LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DEL CÁLCULO: UNA APROXIMACIÓN AL ESTADO DE LA CUESTIÓN*. Granada. Retrieved from https://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/TFM_Rubi.pdf?fbclid=IwAR2Q1B4oj5ZVKw9HN0a4w85_KtrE9Eb1aOO-hJreQLdr8aplKmkBswmZvcw
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas. *Cooperativa Editorial Magisterio*, 103.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2004). Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. *Estándares Básicos de Competencias En Lengua, Matemáticas, Ciencias y Cuidadas*, 46–95.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2015). Derechos Básicos de Aprendizaje en Matemáticas (pp. 1–54). Bogotá D.C.
- Morejon, S. (2011). El Software Educativo un medio de enseñanza eficiente. Retrieved from <http://www.eumed.net/rev/ced/29/sml.htm>
- Muñoz Orts, A. (2017). *Características del aprendizaje de la recta tangente. Identificación de trayectorias de aprendizaje en un experimento de enseñanza*. Universidad de Alicante.
- Recio, T. (2015). Instituto GeoGebra de Cantabria. Retrieved from <https://www.geogebra.org/i.geogebra.lp>
- Robayo, M., & Díaz, F. (2002). *Pensamiento Matemático 11*. (G. Díaz & H. Macías, Eds.) (Libros & L). Bogotá D.C.
- Stewart, J. (2006). *Cálculo Conceptos y Contextos* (Internatio). México, D.F.
- Stewart, J. (2012). *Cálculo de una variable* (Séptima Ed). Colombia: Cengage Learning.
- Tall, D. (1996). Functions and Calculus. En A. Bishop, K. Clements, C. K. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde, *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 289-325). Netherlands: Kluwer Academic Publishers Group.
- Tobergte, D. R., & Curtis, S. (2013). Políticas de Integración de TIC en sistemas Educativos. *Journal of Chemical Information and Modeling*, 53(9), 1689–1699. <https://doi.org/10.1017/CBO9781107415324.004>
- Trujillo R. E., Llinás, H., Obeso, V., & Rojas, C. (2004). Influencia de la tecnología en el aprendizaje de las asignaturas: cálculo diferencial y estadística descriptiva. En Primer congreso internacional de educación mediada con tecnologías (p. 13).

Contenidos

- Capítulo 1:** Este capítulo se muestra la importancia que tiene trabajar con las Tecnologías Educativas dentro del aula.
- Capítulo 2:** En este capítulo se resalta la importancia que ha tenido del software GeoGebra en la comunidad académica.
- Capítulo 3:** En este capítulo se muestran las temáticas del cálculo diferencial que desde libros de texto y directrices del Ministerio de Educación Nacional se abordan en las escuelas.
- Capítulo 4:** En este capítulo se describe la metodología a utilizar para el desarrollo del trabajo de grado.
- Capítulo 5:** En este capítulo se describe la manera como se obtuvieron las temáticas con las que se trabajarían.
- Capítulo 6:** En este capítulo se presentan los instructivos y recursos educativos digitales que se diseñaron como producto de este trabajo de grado.
- Capítulo 7:** En este capítulo se presentan las opiniones que tuvieron los docentes que exploraron los recursos educativos digitales diseñados.

Metodología

Indagar acerca del trabajo que se ha realizado con el software GeoGebra a nivel general, centrándonos en el cálculo diferencial, para continuar con la ejecución de una encuesta que depura los recursos educativos digitales a diseñar y programar con su respectivo instructivo de uso. Finalmente, realizar un cuestionario con el fin de averiguar la opinión de algunos docentes después de explorar dichos recursos educativos digitales e instructivos.

Conclusiones

- Se diseñaron nueve recursos educativos digitales abiertos con su respectivo instructivo que ya se encuentran disponibles en la plataforma de GeoGebra.
- GeoGebra merece tener más reconocimiento dentro del gremio docente, puesto que es importante que todos conozcan los beneficios que puede traer al implementarlo en el aula de clase.
- El cálculo diferencial es un núcleo temático que se aborda en las aulas de clase sin llegar a tener mayor profundidad, puesto que los procesos que se generan a partir de estos son abstractos y no se pueden comprender de manera eficaz sin la ayuda de un software.
- La tecnología dentro del aula cumple diferentes roles, puesto que puede ser un medio o un agilizador para lograr la comprensión de una temática específica.
- Los libros de texto que se utilizan en la enseñanza del cálculo diferencial en la escuela secundaria obedecen a las directrices que el Ministerio de Educación Nacional exige, superando en la mayoría de los casos los conocimientos con los que los estudiantes deben aprobar grado undécimo.
- Aprender programar en un software relacionado con matemáticas es un factor importante en la formación de docentes de matemáticas puesto que facilita el desarrollo de las intervenciones que se desee realizar en el aula.
- Los instructivos realizados tuvieron buenas puntuaciones y comentarios, lo que nos permite decir que son útiles durante el desarrollo de una sesión de clase en la que se implemente un recurso educativo digital.

Elaborado por:	Duarte Rojas, Diana Marcela Guevara Estupiñán, Jessica Alejandra
Revisado por:	Jiménez Gómez, William Alfredo

Fecha de elaborado del resumen	06	11	2018
---------------------------------------	----	----	------

TABLA DE CONTENIDO

IMPORTANCIA DEL USO DE LA TECNOLOGÍA EN EL AULA.....	17
GEOGEBRA	18
Comunidad de GeoGebra	22
Institutos de GeoGebra.....	22
Eventos.....	22
Documentos generados empleando el software GeoGebra	23
IMPORTANCIA DEL CÁLCULO DIFERENCIAL	24
METODOLOGÍA POR UTILIZAR	24
ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DE LA ENCUESTA.....	30
INSTRUCTIVOS	32
Límite de una Función: Definición formal de Límite	33
Límite de una Función: Límites Laterales	37
Límite de una Función: Límites que comprenden el infinito.....	42
Límite de una Función: Límites trigonométricos.....	48
Límite de una Función: Continuidad de una función en un punto	53
Límite de una Función: Continuidad de una función en un intervalo	58
Derivadas: Pendiente de la recta tangente	61
Derivadas: Derivada de funciones logarítmicas.....	66
Derivadas: Criterios de las derivadas	70
OPINIONES SOBRE RECURSOS EDUCATIVOS DIGITALES E INSTRUCTIVOS	74
CONCLUSIONES	76
REFERENCIAS	78

INDICE DE TABLAS

Tabla 1. Finalidad de las preguntas de la encuesta.	26
Tabla 2. Agrupación de temáticas para generar los recursos educativos digitales.	26
Tabla 3. Justificación de los sistemas de representación utilizados en cada recurso educativo digital.	27
Tabla 4. Puntuaciones obtenidas en la encuesta sobre qué temáticas necesitan un recurso educativo digital para su enseñanza.....	30
Tabla 5. Explicación del formato de los instructivos de cada recurso educativo digital.....	32
Tabla 6. Instructivo de Definición de límite.....	34
Tabla 7. Instructivo de Límites laterales	38
Tabla 8. Instructivo de límites que comprenden el infinito.	43
Tabla 9. Instructivo de límites trigonométricos	49
Tabla 10. Instructivo de continuidad de una función en un punto	54
Tabla 11. Instructivo de continuidad de una función en un intervalo abierto	59
Tabla 12. Instructivo de pendiente de la recta tangente	62
Tabla 13. Instructivo de derivada de funciones logarítmicas	67
Tabla 14. Instructivo de criterios de las derivadas.....	71
Tabla 15. Promedio de los puntajes obtenidos en el cuestionario sobre opiniones de los recursos educativos digitales diseñados.....	74

INDICE DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1. Vista Grafica 2D de GeoGebra.....	18
Ilustración 2. Vista Gráfica 3D de GeoGebra.....	19
Ilustración 3. Hoja de cálculo de GeoGebra utilizada en el diseño del recurso educativo digital límites laterales.	19
Ilustración 4. Vista algebraica de GeoGebra del recurso educativo digital definición de límite.	20
Ilustración 5. Ícono de puntos en GeoGebra	20
Ilustración 6. Ícono de raíces en GeoGebra.....	20
Ilustración 7. Ícono de segmento en GeoGebra.....	20
Ilustración 8. Ícono de recta perpendicular en GeoGebra	20
Ilustración 9. Ícono de tangentes en GeoGebra	21
Ilustración 10. Ícono de polígono en GeoGebra	21
Ilustración 11. Ícono de circunferencia (centro, radio) en GeoGebra	21
Ilustración 12. Ícono de lista en GeoGebra	21
Ilustración 13. Ícono de deslizador en GeoGebra	21
Ilustración 14. Ícono de texto en GeoGebra.....	21
Ilustración 15. Ícono de botón en GeoGebra.....	21
Ilustración 16. Ícono de casillas de control en GeoGebra	21
Ilustración 17. Ícono de casilla de entrada en GeoGebra	22
Ilustración 19. Recurso educativo digital sobre la definición de límite. Tomado de https://www.geogebra.org/m/jvmquen9#material/pe2phssr	33
Ilustración 20. Recurso educativo digital sobre Límites Laterales. Tomado de: https://www.geogebra.org/m/jvmquen9#material/nbfeb4j	38
Ilustración 21. Recurso educativo digital sobre Límites que comprenden el infinito. Tomado de: https://www.geogebra.org/m/jvmquen9#material/bwvq34wq	42
Ilustración 22. Recurso educativo digital sobre Límites trigonométricos. Tomado de: https://www.geogebra.org/m/jvmquen9#material/kg9t2knn	48
Ilustración 23. Recurso educativo digital sobre Continuidad de una función en un punto. Tomado de: https://www.geogebra.org/m/jvmquen9#material/vecsk95b	54
Ilustración 24. Recurso educativo digital sobre Continuidad de una función en un intervalo. Tomado de: https://www.geogebra.org/m/jvmquen9#material/hn92uhj2	58
Ilustración 25. Recurso educativo digital sobre Pendiente de la recta tangente. Tomado de: https://www.geogebra.org/m/jvmquen9#material/n9cbkxwa	62
Ilustración 26. Recurso educativo digital sobre Derivada de funciones logarítmicas. Tomado de: https://www.geogebra.org/m/jvmquen9#material/swzhtpaj	66
Ilustración 27 Recurso educativo digital sobre Criterios de las derivadas. Tomado de: https://www.geogebra.org/m/jvmquen9#material/whr55ybv	70
Ilustración 28. Mejora del recurso educativo digital derivada de funciones logarítmicas	76

OBJETIVOS

Objetivo General

Diseñar recursos educativos digitales abiertos en el software GeoGebra que favorezcan la enseñanza del cálculo diferencial en la educación media.

Objetivo Específico

Reconocer la importancia del uso de las tecnologías educativas dentro del aula de clase, particularmente en la enseñanza del cálculo diferencial, con el fin de articular la explicación de los conceptos con simulaciones que favorezcan su comprensión.

Mencionar los atributos que posee GeoGebra para facilitar el diseño de recursos educativos digitales, resaltando la importancia de este trabajo para la comunidad académica.

Compilar las temáticas de cálculo diferencial que se abordan en la educación media en una encuesta que tiene como fin indagar acerca de los temas que necesitan un recurso educativo digital para su enseñanza.

Reunir recursos educativos digitales propios en un libro dentro de la plataforma de GeoGebra, que permita a los docentes acceder a ellos de manera gratuita, para incentivar el uso de las tecnologías educativas.

Compilar en un documento escrito la descripción, intención y justificación de cada recurso educativo digital.

INTRODUCCIÓN

El uso de la tecnología facilita el proceso de enseñanza de las temáticas del cálculo diferencial en la escuela, puesto que el “cálculo gira en torno a gráficos en dos y tres dimensiones y contar con herramientas tecnológicas que contribuyan a una buena práctica visual en el proceso de enseñanza garantiza en parte el entendimiento de los conceptos propios de este curso” (Rojas & Esteban, 2012, p. 3)

Desde esa perspectiva se hace necesario que los docentes de Matemáticas utilicen diferentes metodologías que involucren las TIC, un medio para lograrlo es el software GeoGebra, que ofrece un entorno gráfico agradable para diseñar, programar y ejecutar Recursos Educativos Digitales, los cuales pueden ser publicados en www.geogebra.org para que la comunidad académica haga uso de estos.

En el presente trabajo de grado tipo monografía se presenta la metodología utilizada para elegir los diferentes recursos educativos digitales a diseñar, los cuales fueron elaborados por las maestras en formación con ayuda del docente asesor, para la enseñanza de una temática específica en el área de matemáticas – en este caso, de cálculo diferencial -, y así, enriquecer los ambientes de aprendizaje que los docentes planean para el aula, proporcionándoles algunas ayudas tecnológicas para abordar las temáticas que corresponden al pensamiento variacional en la Educación Media. Adicionalmente por cada uno de los recursos educativos digitales se presenta un instructivo con una sugerencia de uso de este para el desarrollo de una clase. Finalmente, se muestran algunas de las opiniones de docentes que exploraron los recursos educativos digitales.

JUSTIFICACIÓN

En el desarrollo de la profesión docente, es importante diseñar propuestas que faciliten la enseñanza y el aprendizaje de núcleos temáticos a abordar en la escuela; en este trabajo de grado se describe el proceso para diseñar recursos educativos digitales abiertos en el software GeoGebra que faciliten la enseñanza de temáticas relacionadas con cálculo diferencial en la escuela secundaria.

Partiendo de los cinco tipos de pensamiento matemático expuestos en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) y en los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (MEN, 2006), este trabajo centrará su atención en el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, pensamientos que pretenden “construir distintos caminos y acercamientos significativos para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico, algebraico, diferencial e integral” (MEN, 2006, p. 66); de manera específica los estándares proponen en los últimos grados:

- Utilizo las técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos.
- Interpreto la noción de derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente de la tangente a una curva y desarrollo métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos.
- Analizo las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales y de sus derivadas.
- Modelo situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas e interpreto y utilizo sus derivadas. (MEN, 2006, p. 66)

El uso de las tecnologías educativas ha generado cambios en cuanto a la forma como los estudiantes aprenden Matemáticas, puesto que los diferentes ambientes proporcionan condiciones que permiten identificar, examinar y comunicar ideas matemáticas. Adicionalmente Barrera y Santos (2001) citados en Gamboa (2007) dicen que el uso de la tecnología puede llegar a ser una herramienta poderosa en cuanto sirve como medio para la exploración de diferentes representaciones de un objeto específico, y como medio de formulación de preguntas o problemas propios; aspectos importantes en el aprendizaje de las Matemáticas.

Teniendo en cuenta que el uso de la tecnología es importante en la enseñanza de las temáticas escolares y que es necesario desarrollar el pensamiento variacional en los jóvenes durante la educación media, Fiallo y Parada (2014) aseguran que:

El uso de las tecnologías educativas ha sido incorporado en diferentes proyectos o programas académicos, logrando que los problemas o tareas matemáticas tengan un papel fundamental en la construcción del conocimiento matemático de los estudiantes. Se deben plantear problemas que permitan el cambio de una representación a otra haciendo énfasis en sus conexiones. En este sentido, GeoGebra se convierte en una herramienta poderosa, dado que se constituye en un laboratorio de experimentación, análisis, conjeturación, comprobación y conexión de las diferentes representaciones.

El Ministerio de Educación Nacional (2004), recomienda que los procesos que se desarrollen en cualquier intervención dentro del aula – con o sin tecnología – deben estar de acuerdo con el nivel

del desarrollo cognitivo de los estudiantes y con los logros que se pretendan alcanzar, sugiriendo así las siguientes tareas:

- Observación de la simulación del fenómeno: descripción, predicción, verificación.
- Aproximación al tipo de gráfica que se producirá al relacionar las magnitudes que varían.
- Registro de los datos en una tabla y análisis de la información suministrada.
- Visualización de la gráfica formada por el conjunto de valores registrados y análisis de esta.
- Relación entre los registros —tabular y gráfico—.
- Aproximación a la expresión algebraica que mejor relaciona las variables.
- Cálculo de regresión.
- Análisis de la función y de su relación con el fenómeno en estudio.
- Otras extensiones al estudio de la función: construcción geométrica de la derivada, análisis de la derivada, cálculo de la derivada, interpretación (Fiallo & Parada, 2014, p. 6)

Desde lo planteado anteriormente, se convierte en una necesidad que los docentes utilicen un software – en este caso – especializado en usos de las matemáticas, para poder desarrollar las clases con ayuda de esta herramienta tecnológica, la cual es facilitador para que las clases traten sobre exploraciones y simulaciones, logrando que los estudiantes puedan aprovechar los distintos sistemas de representación (Escudero, Llinas, Obeso, & Rojas, 2004); los docentes, en la gran mayoría de los casos toman como excusa la falta de tiempo para no implementar las tecnologías educativas en el aula, ya que se requiere comprender el funcionamiento del programa y/o diseñar posibles actividades a desarrollar con este.

EL USO DE LAS TECNOLOGÍAS EDUCATIVAS EN EL AULA

La Tecnología Educativa se define como “una forma sistemática de diseñar, desarrollar y evaluar el proceso total de enseñanza-aprendizaje, en términos de objetivos específicos, basada en las investigaciones sobre el mecanismo del aprendizaje y la comunicación que, aplicando una coordinación de recursos humanos, metodológicos, instrumentales y ambientales, conduzca a una educación eficaz” (Area, 2009, p. 18).

Resulta lógico afirmar que las intervenciones en el aula que se acompañen con computadoras potencian el desarrollo de procesos en los estudiantes, permitiendo que los docentes logren sus objetivos de enseñanza, esto se debe a que la visualización de representaciones y exploración en simulaciones de objetos específicos sintetiza y dosifica la información; aunque la tecnología educativa requiere de un trabajo exhaustivo y minucioso del docente, para diseñar la forma en la que abordará las temáticas. (Pellicer & Lezcano, 2009, p. 2)

Para implementar las tecnologías educativas se pueden dar dos situaciones: diseñarlas en un software que se maneje o indagar en la red acerca de material disponible; en la primera se obtiene un material que satisface en su totalidad o se acerca mucho al objetivo que el docente tenga, en el segundo, el resultado de la intervención puede variar dependiendo de la finalidad que tenga la ayuda tecnológica que se implemente.

Los estudiantes se sienten atraídos por todo lo relacionado con tecnología, lo que implica una ventaja para los docentes, puesto que es la oportunidad de utilizarla y garantizar la atención y disposición de la clase en general, siendo el docente el responsable de encaminar este proceso en una experiencia agradable y fructuosa para la enseñanza de las temáticas. (Rojas & Esteban, 2012, p. 5)

Resultando que el cálculo es una línea de la matemática abstracta que maneja distintas representaciones como la geométrica, la gráfica y la numérica, se convierte en una necesidad la implementación de tecnologías educativas lo que desemboca en el requisito de diseñar y generar material digital que permita acompañar a los docentes en la enseñanza de esta disciplina.

GEOGEBRA

Para el desarrollo de esta monografía se hace necesario conocer el software con el que se está trabajando, por lo que se describirá las herramientas que este ofrece y que se implementarán a lo largo del escrito.

GeoGebra es un software¹ de matemáticas dinámicas para todos los niveles educativos que reúne geometría, álgebra, hoja de cálculo, gráficos, estadística y cálculo en un solo programa fácil de usar. GeoGebra es también una comunidad en rápida expansión, con millones de usuarios en casi todos los países. (GeoGebra, 2017)

Partiendo de lo anterior, algunos datos de interés por los cuales se trabajará con este software son:

- Conecta geometría, álgebra y hoja de cálculo de forma completamente dinámica.
- Posee una interfaz muy fácil de usar, a pesar de contar con poderosas herramientas.
- Cuenta con una herramienta de autoría para crear materiales de aprendizaje interactivos como páginas web.
- Está disponible en varios idiomas, para los millones de usuarios en todo el mundo.
- Es un software de código abierto disponible gratuitamente para usos no comerciales.

En GeoGebra se pueden diseñar y programar recursos educativos digitales, que se definen como “todo tipo de material que tiene una intencionalidad y finalidad enmarcada en una acción educativa, cuya información es digital, y se dispone en una infraestructura de red pública, como internet, bajo un licenciamiento de acceso abierto que permite y promueve su uso, adaptación, modificación y/o personalización” (Tobergte & Curtis, 2013).

Vistas

Las herramientas que se utilizaron para programar los recursos educativos digitales se encuentran activas únicamente en la vista gráfica 2D, esta es la razón por la que visualmente en todos se observa este tipo de vista.

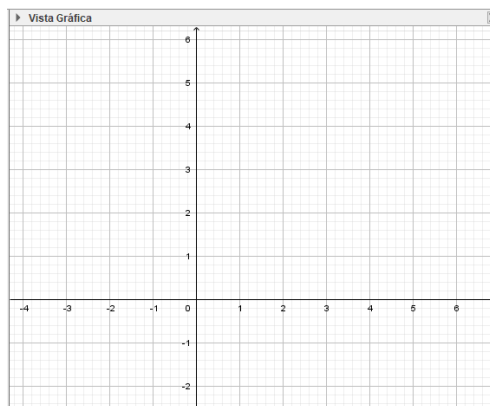


Ilustración 1. Vista Gráfica 2D de GeoGebra

¹ “Software Educativo es cualquier programa computacional cuyas características estructurales y funcionales sirvan de apoyo al proceso de enseñar, aprender y administrar.” (Morejon, 2011)

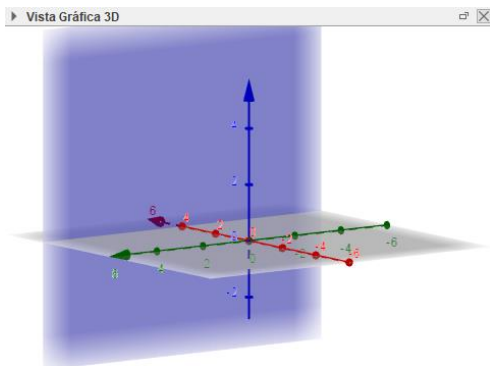


Ilustración 2. Vista Gráfica 3D de GeoGebra

Teniendo en cuenta que en el software sólo se pueden generar dos vistas gráficas, se recurrió a generar planos en la vista gráfica 3D para tener acceso a la visualización 2D de cada uno de esos planos.

En el caso de las tablas que se muestran en algunos recursos educativos digitales se recurre a la hoja de cálculo, gracias a que en esta se pueden generar bases de datos con cálculos matemáticos necesarios.

Hoja de Cálculo												
$f(x)$	N											
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	
1	x	4.6	4.7	4.8	4.9	5	5.1	5.2	5.3	5.4		
2	f(x)	?	?	?	?	?	?	?	?	?		
3												
4	x	4.6	4.7	4.8	4.9	5	5.1	5.2	5.3	5.4		
5	f(x)	?	?	?	?	?	?	?	?	?		
6												
7	x	4.6	4.7	4.8	4.9	5	5.1	5.2	5.3	5.4		
8	f(x)	44...	487...	530...	57...	?	676.52	731.16	789.05	850.31		
9												
10												
11												
12												
13												

Ilustración 3. Hoja de cálculo de GeoGebra utilizada en el diseño del recurso educativo digital límites laterales.

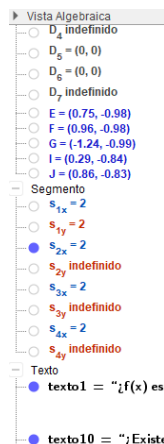


Ilustración 4. Vista algebraica de GeoGebra del recurso educativo digital definición de límite.

Finalmente, la vista algebraica se utilizó en el proceso de construcción de cada uno de los recursos educativos digitales, puesto que es en esta en la que se tiene acceso a la mayoría de objetos que intervienen en la programación.

Objetos y herramientas utilizadas

GeoGebra ofrece once menús en los que clasifica los objetos que se pueden publicar en las vistas en: mover, puntos, rectas, polígonos, circunferencias, elipses, ángulos, simetrías, herramientas y desplazamientos. En la construcción de los recursos educativos digitales se utilizaron los siguientes objetos:



Ilustración 5. Ícono de puntos en GeoGebra

Los **puntos** se utilizaron para indicar cortes con el *eje x* y para indicar la posición de las coordenadas que eran necesarias ubicar en el plano cartesiano de la vista gráfica. Adicionalmente, se les puede cambiar la forma para obtener otros usos.

Las **raíces** se utilizan para publicar en la vista gráfica los puntos de la función que se elija.



Ilustración 6. Ícono de raíces en GeoGebra



Ilustración 7. Ícono de segmento en GeoGebra

Los **segmentos** se utilizan para trazar trozos de recta que tienen como extremos dos puntos.

Las **rectas perpendiculares** se pueden generar partiendo de un segmento u otra recta.



Ilustración 8. Ícono de recta perpendicular en GeoGebra



Ilustración 9. Ícono de tangentes en GeoGebra

Las **tangentes** generan una recta tangencial en un punto localizado sobre un objeto.



Ilustración 10. Ícono de polígono en GeoGebra

Al seleccionar **polígono** basta con poner los puntos necesarios para marcar los vértices del polígono deseado.



Ilustración 11. Ícono de circunferencia (centro, radio) en GeoGebra

Para trazar una **circunferencia (centro, radio)** se debe marcar un punto que será el centro y después ingresar en la ventana emergente el valor del radio.



Ilustración 12. Ícono de lista en GeoGebra

Se debe seleccionar una serie de celdas en la hoja de cálculo y al seleccionar **lista** se guardarán los datos como una matriz.



Ilustración 13. Ícono de deslizador en GeoGebra

Un **deslizador** representa un número que pertenece al intervalo que se introduce al activar la herramienta.



Ilustración 14. Ícono de texto en GeoGebra

La herramienta **texto** permite insertar escrito en las vistas activas, ofrece la opción de publicar en código LaTeX y permite publicar los objetos que se tengan creados.



Ilustración 15. Ícono de botón en GeoGebra

Al programar los **botones** se pueden modificar los valores de los números y obedecen todos los comandos que se pueden ingresar en la barra de entrada.



Ilustración 16. Ícono de casillas de control en GeoGebra

El uso inmediato de las **casillas de control** es mostrar y ocultar los objetos que se les asignan, adicionalmente, pueden modificar valores cuando se activan.



Ilustración 17. Ícono de casilla de entrada en GeoGebra

Las **casillas de entrada** tienen como fin modificar los objetos que se les son asignados sin entrar a cambiarlos directamente en la vista algebraica o en la barra de entrada.

Comunidad GeoGebra

Desde hace un tiempo, el Software GeoGebra ha impactado en la sociedad académica, puesto que se han generado recursos educativos digitales, que han servido “como soporte al proceso de enseñanza, y ayuda a transformar el medio para crear un ambiente apropiado que beneficie el aprendizaje de las matemáticas” (Castillo, 2008).

Institutos de GeoGebra

En la actualidad se han conformado institutos GeoGebra, los cuales “reúnen a profesores, estudiantes, programadores e investigadores de instituciones educativas y organizaciones sin fines de lucro de todo el mundo, que trabajan conjuntamente en proyectos relacionados con GeoGebra” (GeoGebra, 2017) y matemáticas.

Eventos

Partiendo de la necesidad de implementar las TIC en el aula se han organizado eventos de diferentes índoles en los cuales se busca capacitar a docentes en el uso de esta herramienta para que la implementen en su labor dentro de las aulas, publicándolos así en la página principal de GeoGebra (GeoGebra, 2017).

Algunos de estos eventos tienen un público internacional, a continuación, un ejemplo con los eventos más nombrados en la comunidad académica:

GeoGebra Conference Budapest (GeoGebra, 2017) tuvo como fin “proporcionar una plataforma de reunión para los miembros y usuarios de GeoGebra, incluyendo profesores de todos los niveles, educadores, investigadores y desarrolladores de todo el mundo.” Durante el transcurso de la conferencia, se brindaron tiempos para los “oradores y su interacción con el público, - lo cual tuvo como temas de discusión – experiencias, el intercambio de buenas prácticas, pedagogías efectivas de matemáticas que incluyen GeoGebra, la mejora de las habilidades profesionales y el conocimiento”.

East West Conference on Mathematics Education EWCOME 2017(GeoGebra, 2017), desarrollado del 24 al 26 de agosto en Varsovia (Polonia), tuvo como slogan “romper barreras”, puesto que buscaban enlazar la matemática y la ciencia. Para lograr esto, se convocaron personas con “diferentes enfoques de la educación de diferentes partes del mundo”, con esto se logró crear métodos innovadores de educación matemática enlazados con otros temas, la aplicación de metodologías de la ciencia, la educación artística y los mejores métodos de enseñanza.

GeoGebra Global Gathering 2017 (GeoGebra, 2017), se llevó a cabo del 18 al 20 de julio en la Universidad Johannes Kepler (Australia), se convocaron a estudiantes, maestros, investigadores, líderes educativos y socios de todo el mundo con el fin de compartir ideas, probar las últimas tecnologías, explorar nuevas formas de enseñanza y aprendizaje.

En otros casos los eventos tienen público americano:

1^{er} Congreso Panamericano de GeoGebra (GeoGebra, 2017), tendrá lugar en la ciudad de México en la Universidad UNAM los días del 8 al 11 de noviembre, el cual tendrá como ejes temáticos resolución de problemas, modelización de la realidad, aplicaciones de GeoGebra al pensamiento matemático, entre otras. Dirigido a docentes de todos los niveles educativos y estudiantes interesados en el tema.

VIII CIBEM Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (GeoGebra, 2017), tuvo lugar en la ciudad de Madrid los días del 10 al 14 de julio del 2017, el cual convocó a profesores de matemáticas con el fin de debatir los métodos de enseñanza de las matemáticas

En los diferentes eventos descritos, se logra evidenciar que la participación de Colombia es poca en cuanto a la promoción y organización de este tipo de encuentros, pues solo se realiza el Congreso Latinoamericano de GeoGebra en la ciudad de Medellín, el cual busca contribuir con el mejoramiento de la calidad y al fortalecimiento de la inclusión social en educación mediante la construcción y consolidación de comunidad académica, alrededor de la innovación educativa mediante la integración de GeoGebra.

Documentos generados empleando el software GeoGebra

Al buscar en diferentes bases de datos como el Repositorio y la Biblioteca de la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia, Dialnet, el Repositorio de la Universidad de los Andes (Funes), Google Scholar, Redalyc, Doaj, TRD (Tesis doctorales en Red) y Bibliotecas virtuales de algunas Universidades de Colombia se encontraron varios documentos de diferente naturaleza: al utilizar el filtro GeoGebra, se localizaron 1261 documentos de los cuales 938 son artículos, 5 monografías, 4 tesis de maestría, 22 tesis doctorales, 3 tesis de especialización, 45 tesis sin clasificar y 199 como talleres, memorias, investigaciones y documentos no publicados. Al volver la búsqueda más rigurosa, con filtros como geometría, estadística, álgebra y cálculo, se encontraron 1126 documentos generados de los cuales hay 648 artículos, 40 monografías, 25 tesis de maestría, 19 tesis doctorales, 17 tesis de especialización, 33 tesis sin clasificar y 350 documentos en la categoría de otros. Para finalizar se agregó a la búsqueda el filtro: “cálculo diferencial” encontrando 50 artículos, 2 tesis sin clasificar y 22 documentos en otros.

Los datos encontrados en la búsqueda realizada dejan ver el amplio trabajo que actualmente se está efectuando alrededor de todo el mundo con el software GeoGebra, además, si se tiene en cuenta los eventos e instituciones que actualmente existen, se puede concluir que es un software confiable para ser implementado como una herramienta metodológica dentro del aula.

EL CÁLCULO DIFERENCIAL EN LA EDUCACIÓN MEDIA

Uno de los núcleos temáticos a abordar en grado undécimo es el cálculo diferencial, puesto que desde los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) y los Derechos Básicos de Aprendizaje (MEN, 2015) se destacan algunos objetivos que hacen necesario abordar temáticas específicas en esta línea de las matemáticas.

Partiendo de los cinco tipos de pensamiento matemático expuestos en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) y en los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (MEN, 2006), este trabajo centrará su atención en el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, pensamientos que pretenden “construir distintos caminos y acercamientos significativos para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico, algebraico, diferencial e integral” (MEN, 2006, p. 66); de manera específica se proponen los siguientes estándares para la educación media:

- Utilizo las técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos.
- Interpreto la noción de derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente de la tangente a una curva y desarrollo métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos.
- Analizo las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales y de sus derivadas.
- Modelo situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas e interpreto y utilizo sus derivadas. (MEN, 2006, p. 66)

Para la enseñanza del cálculo diferencial es necesario tener en cuenta las diferentes representaciones que se puedan encontrar, a continuación se enlistan las categorías con su definición que según Gómez y Pantoja (2013) se desarrollan en los ejemplos propuestos en libros de texto de grado undécimo:

- **Númérico – tabular de una función:** muestra la evaluación de la función en valores cercanos a la variable independiente.
- **Gráfico – cartesiano de una función:** se intenta describir gráficamente el acercamiento de la variable dependiente a un valor, cuando la variable independiente se acerca a otro.
- **Simbólico – específico de una función:** evalúa la comprensión de la simbología utilizada observando su correcto uso en el desarrollo de ejemplos.
- **Verbal:** en este tipo se presenta una descripción sin el uso de símbolos que caracterizan el objeto matemático pero que están implícitos.
- **Algebraico:** es el uso de procedimientos algebraicos como: factorización, racionalización, uso de conjugadas y simplificaciones para dar solución a una situación.

METODOLOGÍA

En el presente trabajo de grado se pretende crear recursos educativos digitales que faciliten la enseñanza del cálculo diferencial en la educación media, por esto el marco teórico se divide en tres secciones: tecnología, software y cálculo diferencial.

El proceso inició indagando acerca de los tipos de tecnología que existían, entre los que se encontraron la moderna, la comercial, la flexible, la fija, entre otras que no cumplían con el objetivo del trabajo de grado por no tener como prioridad el proceso de enseñanza a estudiantes; así que se tomó la decisión de restringir la búsqueda a tecnologías utilizadas dentro del aula, obteniendo la creación de ambientes e-learning, realidades virtuales y aprendizaje a través de video juegos. Finalmente, se llegó a tecnologías educativas porque abarca todas las actividades que se pueden desarrollar en la escuela sin llegar a restringir el material que se utilice, que en este caso sería en software GeoGebra.

Con el tipo de tecnología establecido se dio lugar a respaldar el uso de GeoGebra como medio para crear el material deseado, para esto se describieron las ventajas que tiene trabajar en el software GeoGebra – puesto que con este se programarían los recursos educativos digitales –, las representaciones con las que permite interactuar, los objetos y herramientas que se usaron para la construcción del material y el impacto que tiene en la comunidad académica.

Para finalizar el marco teórico, el interés se encaminó en comprender el tratamiento que se debe realizar al cálculo diferencial en grado undécimo, para esto se revisaron las directrices nacionales para clarificar el qué se espera aprendan los estudiantes en su última etapa escolar, esta información se complementó con la descripción de los sistemas de representación que se destacan en el trabajo de límites y derivadas, siendo estos los temas que se trabajarán a lo largo del trabajo de grado.

Una vez completo el marco teórico se compararon las temáticas propuestas por las directrices nacionales con las incluidas en siete textos escolares de este curso, con el fin de tener conocimiento de qué temáticas se tendrían en cuenta para la creación de los recursos educativos digitales, los cuales fueron: Pensamiento Matemático (Robayo & Díaz, 2002), Matemáticas para pensar (J. Moreno, 2011), Alfa con estándares 11(V. Moreno, n.d.), Matemática Aplicada Símbolos 11 (Mesa, 2006), Mate 11 (Larson, Edwards, Falvo, Johnson, & Kuby, 2017), Matemáticas 11 (Díaz, Chamorro, & Sagado, 2007) y Cálculo (Ron & Bruce, 2010). Al indagar por los textos que manejaban algunos colegios de práctica se tuvo conocimiento que los docentes manejaban los libros Cálculo en una Variable (Stewart, 2012) y Contextos y Conceptos (Stewart, 2006), por lo que se decidió tenerlos en cuenta para la selección de temáticas.

Al comparar los textos escolares se observaba que abordando diferentes representaciones todos manejaban los mismos temas, los cuales satisfacían y mejoraban los requisitos de las directrices nacionales; pero al compararlos con los dos libros de cálculo se encontraron temáticas que no estaban presentes en los textos escolares, así que, con el afán de no sesgar el trabajo realizado, se decidió tener en cuenta todas las temáticas para continuar con el proceso elección, estas son: límites laterales, cálculo analítico de límites, propiedades de los límites, formas indeterminadas de límites, límites trigonométricos especiales, límites infinitos, límites al infinito, continuidad de una función en un punto o un intervalo abierto, incremento de una función, incremento relativo de una función, problema de la recta tangente, concepto de derivada, propiedades y fórmulas de derivación, regla de

la cadena, derivación implícita, derivada de las funciones trigonométricas, derivada de funciones trigonométricas inversas, derivadas de funciones logarítmicas, teorema de rolle , teorema dl valor medio, concavidad y el criterio de la segunda derivada, análisis de gráficas, razones relacionadas, derivadas y formas de las curvas, formas indeterminadas y regla de l'hopital, aplicaciones a los negocios y la economía, método de newton y anti derivada

Con veintiocho temáticas identificadas, se decidió realizar una encuesta a docentes con experiencia orientando el curso de cálculo en grado undécimo para conocer qué tan importante era el uso de un recurso educativo digital en la enseñanza de cada una de estas. A continuación, se muestran las preguntas realizadas en la encuesta con la intención de cada una de ellas:

Tabla 1. Finalidad de las preguntas de la encuesta.

Pregunta	Intención
Institución en la que trabaja actualmente	Identificar la naturaleza de las instituciones y garantizar tener respuestas de colegios oficiales, privados y estatales. Adicionalmente, controlar que esta encuesta se realizara en todos los colegios con el que el Departamento de Matemáticas tenía convenio para prácticas, por ser los maestros en formación las personas más cercanas a llegar a utilizar los recursos educativos digitales después de ser publicados.
Nivel de formación académica	Conocer la población con la que se está tratando para llegar a determinar la confiabilidad de su criterio.
Años de experiencia con grado Undécimo	
¿Qué tan importante es el uso de un recurso educativo digital en GeoGebra para su enseñanza?	Organizar las temáticas en orden prioritario para la creación del recurso educativo digital correspondiente, puesto que es un trabajo que debe ayudar a solucionar las necesidades que tienen los docentes.

Después de realizadas todas las encuestas, se determinó que se tomaban como prioridad realizar los recursos educativos digitales a todas aquellas que tuvieran un promedio superior a 8, dejando trece temáticas por trabajar en nueve recursos educativos digitales, la agrupación se dio de la siguiente manera:

Tabla 2. Agrupación de temáticas para generar los recursos educativos digitales.

Nombre del recurso educativo digital	Temáticas abordadas en el recurso educativo digital
Pendiente de la recta tangente a una curva	Pendiente de la recta tangente a una curva
Criterios de las derivadas	Puntos de inflexión
	Criterio de la primera derivada
	Criterio de la segunda derivada
Límites laterales	Límites laterales
Límites que comprenden el infinito	Límites infinitos
	Límites al infinito

Continuidad de una función en un punto	Continuidad en un punto
Continuidad de una función en un intervalo abierto	Continuidad en un intervalo abierto
Definición de límite	Definición formal de límite
	Definición no formal de límite
Límite de funciones trigonométricas	Límite de funciones trigonométricas
Derivada de funciones logarítmicas	Derivada de funciones logarítmicas

Teniendo claro que se crearían nueve recursos educativos digitales se realizó un boceto de cada uno de estos sin tener restricción de herramientas y objetos por utilizar, puesto que este diseño cambiaría en la marcha. Durante este proceso surgieron inconvenientes de programación, obligando a indagar y profundizar en los usos de las herramientas, objetos y comandos del software, y en el trasfondo matemático requerido para cada una de las temáticas; es necesario resaltar que en ocasiones se optó por simular acciones que aparentan ser propias del desarrollo de los temas, pero en realidad se lograron con la manipulación de contadores. Es necesario resaltar que en el proceso de diseño se tuvo en cuenta que la presentación tuviera colores agradables que contribuyeran al desarrollo de la temática y fuera de fácil manejo, por ejemplo, cuando se requiere que el docente ingrese valores para de algún tipo siempre aparecerá un interrogante.

Los recursos educativos digitales programados cuentan con representaciones matemáticas específicas en cada caso, estas son:

Tabla 3. Justificación de los sistemas de representación utilizados en cada recurso educativo digital.

Recurso educativo digital	Vista	Intención	Representaciones
Definición no formal de límite	Vista gráfica izquierda	Mostrar la relación entre ε y δ haciendo uso de la gráfica de una función.	Gráfico – cartesiano de una función
	Vista gráfica derecha	Se presenta una simbología netamente formal para facilitar a los estudiantes la comprensión de los conceptos dentro de sí mismos, puesto que el presentarlos tal cual como se encuentran en bibliografía favorece en proceso de enseñanza.	Simbólico – específico de una función
Límites laterales	Vistas gráficas izquierda	En la parte superior se grafica la función que se ingresa, esto facilita que se localice el valor del límite de manera gráfica. En la parte inferior, se hace una ampliación de cómo se verían las imágenes de los puntos tabulados, puesto que en forma de recta numérica se hace más intuitivo el proceso de aproximar.	Gráfico – cartesiano de una función

	Vista gráfica derecha	Se utiliza simbología que permite diferenciar los procesos realizados, adicionalmente se tabula la función ingresada para que el tiempo de clase se concentre en aproximar y no en calcular.	Simbólico – específico de una función. Numérico – tabular de una función
Límites que comprenden el infinito, límites trigonométricos y continuidad de una función en un punto	Vista gráfica izquierda	Se utiliza como medio para facilitar la explicación del ejercicio planteado, puesto que desde la gráfica se pueden extraer una cantidad considerable de conclusiones que solo se logran tras un proceso algebraico.	Gráfico – cartesiano de una función
	Vista gráfica derecha	También se muestra el desarrollo del ejercicio de manera algebraica, de aquí que el recurso no sea suficientemente dinámico.	Simbólico – específico de una función. Algebraico
Continuidad de una función en un	Vista gráfica izquierda	Observar el comportamiento de un punto sobre una gracia discontinua.	Gráfico – cartesiano de una función
	Vista gráfica derecha	Al ser un recurso educativo digital que promueve la extracción de información solo se presenta lo mínimo en letras utilizando la notación estandarizada.	Simbólico – específico de una función.
Pendiente de la recta tangente a la curva, criterios de las derivadas	Vista gráfica izquierda	Observar el comportamiento de la función insertada dinamizando los objetos utilizados en cada temática.	Gráfico – cartesiano de una función
	Vista gráfica derecha	Al ser un recurso educativo digital que promueve la extracción de información solo se presenta lo mínimo en letras utilizando la notación estandarizada. Adicionalmente, se evalúa la derivada de la función en el punto insertado.	Simbólico – específico de una función. Algebraico.

Para finalizar este trabajo, se publicaría un cuestionario en Google Forms en la que profesores de diferentes entidades educativas, edades variables y nivel de formación oscilante entre pregrado y maestría, a continuación, se enlistan las preguntas realizadas contando la intencionalidad con la que se crearon:

Pregunta	Intención
¿Utilizaría el recurso educativo digital en una clase?	Medir la intención que los docentes tienen al entender el funcionamiento del recurso educativo digital.
¿Qué tan fiel es el recurso educativo digital al concepto tratado?	Conocer el nivel de cercanía que maneja el procedimiento matemático realizado con el real, puesto que no se deben aceptar errores en

	la conceptualización o ejecución de un algoritmo por parte del recurso educativo digital
¿El instructivo del recurso educativo digital es claro?	Al ser tanto texto, es necesario conocer si la redacción buena, el formato es útil y si se presenta información verás.
¿El diseño del recurso educativo digital es intuitivo?	Determinar si el recurso educativo digital por si solo servía como apoyo en una clase o si era necesario el guion para su comprender su forma de uso.
¿El diseño del recurso educativo digital es claro?	Indagar acerca de la calidad del diseño puesto que si hay errores de escritura o textos no se solapan el recurso educativo digital no sería claro
¿Qué opinión le merece el recurso educativo digital presentado?	Conocer las impresiones que cada recurso le dio a los docentes, para así saber qué aspectos del proceso se realizaron satisfactoriamente.
¿Qué mejoraría del recurso educativo digital?	Como todo trabajo, siempre se puede mejorar y este es el objeto de esta pregunta, conocer qué otras cosas le implementarían a los recursos educativos digitales programados mejorarlos.

RESULTADOS DE LA ENCUESTA²

La población de la muestra tiene entre uno y quince años de experiencia enseñando a estudiantes de grado undécimo, todos con estudios de pregrado, especialización y /o postgrado. Esto deja claro que son personas preparadas y académicamente críticas para tomar decisiones pertinentes al qué hacer de su labor, además al haber trabajado al menos un año orientando las matemáticas de grado undécimo otorga la experiencia de enseñar las temáticas y opinar con propiedad acerca de la percepción que su recorrido le dio en cuanto al uso de recursos educativos digitales para la enseñanza del cálculo diferencial.

Para elegir las puntuaciones que tendría cada temática, se promediaron las obtenidas en cada una de las encuestas realizadas, de esta manera, después de organizarlas en orden descendente, las puntuaciones obtenidas fueron:

Tabla 4. Puntuaciones obtenidas en la encuesta sobre qué temáticas necesitan un recurso educativo digital para su enseñanza.

TEMÁTICA	PUNTUACIÓN
Pendiente de la tangente a una curva	9,2
Puntos de inflexión	9,1
Límites laterales	9,1
Límites infinitos	8,9
Límites al infinito	8,9
Continuidad en un punto	8,8
Criterio de la primera derivada	8,8
Criterio de la segunda derivada	8,7
Continuidad en un intervalo abierto	8,5
Definición formal de límite	8,2
Límites de funciones trigonométricas	8,2
Definición no formal de límite	8,1
Derivadas de funciones logarítmicas	8,1

² El soporte de las encuestas se encuentra en la carpeta de URL: <https://drive.google.com/drive/folders/1-VPFI2XnjaH1re3x5pCdZhyK-EaToZBg?usp=sharing> . En esta carpeta se encuentran digitalizadas las encuestas realizadas en físico, y la hoja de cálculo que genera la encuesta en Google que se realizó.

Cálculo la derivada de una función.	7,9
Definición de derivada mediante el límite	7,9
Derivada de las funciones trigonométricas	7,9
Propiedades de los límites	7,8
Derivada de funciones trigonométricas inversas	7,7
Cálculo la derivada en un punto por definición	7,6
Propiedades de derivada	7,6
Derivación implícita	7,6
Regla de la cadena	7,5
Estrategias para solucionar límites (factorización y racionalización)	7,4

Es de resaltar que todas presentan siete o más en su puntaje, lo que deja ver que sin importar que la experiencia que los docentes tengan, todos entran en concordancia en que las temáticas de cálculo diferencial necesitan de un recurso educativo digital para facilitar su enseñanza dentro del aula en la educación media.

INSTRUCTIVOS

Se diseñaron recursos educativos digitales para aquellas temáticas que obtuvieron una puntuación superior a 8, los cuales están publicados en el portal de GeoGebra en el enlace: <https://www.geogebra.org/m/jvmquen9>. Para cada uno de los recursos educativos digitales creados, se elaboró una guía que será el instructivo para los docentes que hagan uso de este. Allí se describe de manera específica el recurso educativo digital, y se presenta una sugerencia sobre cómo podría abordarlo el docente en clase.

En dicho formato primero se escribió el tema y el subtema a trabajar a lo largo del recurso educativo digital, después una pequeña descripción de la idea principal y del objetivo de este. Después de esto, se presentó un cuadro: “Estructura de guion”, en el cual se da una sugerencia al docente de cómo estructurar la clase para que esta se base en el recurso educativo digital a utilizar; el cuadro consiste en:

Tabla 5. Explicación del formato de los instructivos de cada recurso educativo digital

	Narración del Recurso Educativo Digital, sonidos o el texto que dirá el personaje (Libreto)	Descripción pantalla (Acciones que interactúan con lo que está en pantalla)	Interactividad (elementos que permiten la interacción con el usuario)
Introducción	Escribir literalmente lo que dirá el docente al iniciar el uso el recurso educativo digital. De este modo, se inicia con la presentación del tema a tratar en la animación.	Describir las vistas de GeoGebra habilitadas para el docente, mientras se realiza la presentación del programa. Describir cómo se activan los objetos y la finalidad de cada una de las vistas.	Describir los elementos que son interactivos y cómo esta acción afecta el comportamiento de la animación.
Desarrollo de la idea.	Narrar el desarrollo y planteamiento del tema con argumentos que puedan comprender los estudiantes.	Ante cada una de las acciones narradas en el recuadro de la izquierda, debe asignarse una acción a realizar en la pantalla, describiendo la finalidad de dicho ejercicio.	Describir cuál es el impacto de modificar cada una de las entradas, según lo narrado, y cómo funciona la realimentación para reforzar los conceptos.
Conclusión o desenlace			
Describir las conclusiones a las que se pretende que el docente llegue con su clase después de utilizar el recurso educativo digital diseñado.			

Límite de una Función: Definición de Límite

Este recurso educativo digital busca facilitar la visualización de la definición del límite de una función desde su representación gráfica, a través de un tratamiento geométrico que involucra ε y δ de manera intuitiva.

¿f(x) es a trozos? Sí No

¿Cuántos trozos tiene f(x)? **Dos** **Tres** **Cuatro**

sen(x)	sii	-1	≤ x ≤	1
tg(x)	sii	-4	≤ x ≤	2
cos(x)	sii	-3	≤ x ≤	3
1/x	sii	0	≤ x ≤	7

Límite de f(x) cuando x tiende a 2

¿Existe el $\lim_{x \rightarrow 2}$ $\left[\begin{array}{l} \text{sen}(x) \quad -1 \leq x \leq 1 \\ \text{tg}(x) \quad -4 \leq x \leq 2 \\ \text{cos}(x) \quad -3 \leq x \leq 3 \\ \frac{1}{x} \quad 0 \leq x \leq 7 \end{array} \right]$?


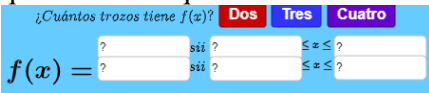
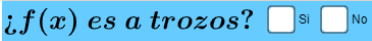




UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

Iniciar δ 0.6 **Ventana derecha**

Ventana izquierda

Ilustración 18. Recurso educativo digital sobre la definición de límite. Tomado de <https://www.geogebra.org/m/jymquen9#material/pe2phssr>

Tabla 6. Instructivo de Definición de límite

	Narración	Descripción pantalla	Interactividad
Introducción	<p>Para hacer uso del recurso el docente debe realizar un recuento de temas tales como: solución de límites, tratamiento de funciones a trozo, análisis de valores en tablas y análisis gráfico de funciones.</p>	<p>El recurso cuenta con dos pantallas:</p> <ul style="list-style-type: none"> En la pantalla de la derecha, donde se encuentran los elementos que el docente puede modificar. Primero si desea que la función sea a trozos o no.  En el caso que la respuesta a esta pregunta sea “Sí”, se mostrarán las casillas de entrada correspondientes para ingresar la función a trozos con las restricciones respectivas, al igual que el valor al que tenderá el límite.  Al terminar de ingresar la función, esta se graficará en la ventana de la izquierda. 	<p>Dentro del recurso se encuentran los siguientes elementos interactivos:</p> <ul style="list-style-type: none"> Casillas de control: para seleccionar una se debe hacer clic sobre el cuadro blanco que se encuentra a la izquierda de la palabra. La casilla seleccionada se mostrará así: <input checked="" type="checkbox"/>.  Botones: determinan la cantidad de trozos que se desea tenga la función, cada vez que el docente seleccione alguna opción deberá ingresar los trozos correspondientes de la función.  Casillas de entrada: se ingresan tanto las funciones como las restricciones necesarias/solicitadas. Esta función se graficará en ventana de la izquierda  Botones siguiente y anterior: con dichos botones permitirán aumentar o disminuir el valor de delta δ.  Botón de reiniciar: al presionar dicho botón, aparecerá la pantalla principal del recurso digital. 

<p>Al iniciar el uso del recurso el docente debe elegir la función con la que iniciará la explicación: puede ser o no a trozos.</p>	<p>Para iniciar a utilizar el recurso el docente debe elegir si la función es a trozos o no. Ejemplo: <i>¿f(x) es a trozos?</i> <input type="checkbox"/> Sí <input checked="" type="checkbox"/> No</p>	
---	---	--

Se le recomienda al docente iniciar con una función lineal o cuadrática para que los estudiantes comprendan la temática a tratar. Para este caso el docente debe seleccionar la opción “No” a la pregunta que se le hace. Posteriormente debe ingresar la función y el punto al cual tiende el límite, que se graficará en la ventana de la izquierda, marcando el punto al cual tiende el límite y las circunferencias correspondientes al ε (Circunferencia roja) y δ (Circunferencia azul) de la definición formal del límite. El docente debe aclarar que, a medida que el δ aumenta, el ε también aumenta para que el límite exista; de lo contrario el límite no existe. Para lograr esto las circunferencias son quienes indican la relación puesto que:

- El límite existe siempre y cuando:
 - Las dos circunferencias aumenten o disminuyan su tamaño al mismo tiempo.
 - Cuando el punto al que tiende el límite sea 0 y su imagen sea 0, es decir (0,0), solo se mostrará una circunferencia.
- El límite no existe cuando:
 - Una circunferencia aumente su tamaño mientras la otra lo disminuya
 - Únicamente una circunferencia aumente o disminuya su tamaño mientras la otra no se modifique.
 - Cuando en el proceso de aumentar/disminuir alguna de las circunferencias desaparezca.

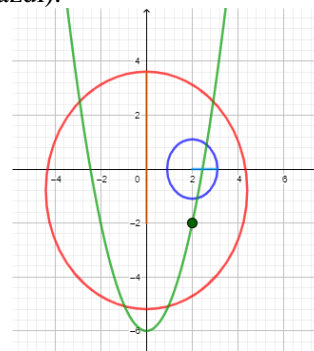
Cuando el docente desee puede hacer la misma explicación con funciones a trozos, para localizar fácilmente límites que no existan; para esto el docente puede elegir la cantidad de trozos de la función que desee que tenga (se le recomienda al docente que inicie de manera progresiva, iniciando por función de dos trozos, luego tres y finalizar con una función de cuatro trozos). Cuando el docente elija los trozos, debe ingresar las funciones, los intervalos correspondientes que desee que se grafiquen y el valor al cual tiende el límite e iniciar a aumentar y disminuir el delta para la explicación.

Cuando el docente seleccione esta opción, aparecerá la siguiente pantalla.

Posterior a esto el docente debe ingresar la función y el punto al cual tiende el límite en las siguientes casillas.

$f(x)= ?$

Con dichos valores registrados en la ventana de la izquierda se graficará la función escrita, el punto al cual tiende el límite, la circunferencia del ε (roja) y la del δ (azul).



Primero se debe responder la pregunta: “¿la función es a trozos?” marcando la casilla de control correspondiente, de responder “si” seleccionar la cantidad de trozos que desea, completar las partes de la función y el punto al cual tiende el límite. Finalmente, modificar el valor del δ con la ayuda de los botones destinados para esto. De responder “no”, ingresar la función y el valor al que tiende el límite u modificar el δ .

Conclusión o desenlace

Si se puede encontrar un número δ muy cercano al valor al cual tiende el límite, que permita verificar la existencia de un ε (relación con las circunferencias), entonces el límite existe, de lo contrario no existirá.

Límite de una Función: Límites Laterales

Este recurso educativo digital busca determinar la existencia del límite de una función aplicando límites laterales mostrando los valores que se deben tener en cuenta en este proceso y su gráfica.

Cantidad de trozos de la función :

Dos Tres Cuatro

$f(x) =$

tg(x)	sii -3	$< x \leq 3$
cos(x)	sii -5	$< x \leq 7$
e^x	sii -1	$< x \leq 1$
$1/x$	sii 0	$< x \leq 3$

Limite cuando f(x) tiende a: -1

x	-1.4	-1.3	-1.2	-1.1	-1	-0.9	-0.8	-0.7
f(x)	-5.8	-3.6	-2.57	-1.96	?	-1.26	-1.03	-0.84

$\lim_{x \rightarrow -1^-} \begin{cases} \text{tg}(x) & -3 < x \leq 3 \\ \text{cos}(x) & -5 < x \leq 7 \\ e^x & -1 < x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & 0 < x \leq 3 \end{cases}$
 $\lim_{x \rightarrow -1^+} \begin{cases} \text{tg}(x) & -3 < x \leq 3 \\ \text{cos}(x) & -5 < x \leq 7 \\ e^x & -1 < x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & 0 < x \leq 3 \end{cases}$

Ventana superior izquierda

Vista de plano a

Ventana inferior izquierda

Reiniciar

Ventana derecha

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

Ilustración 19. Recurso educativo digital sobre Límites Laterales. Tomado de: <https://www.geogebra.org/m/jvmquen9#material/nbfebj4j>

Tabla 7. Instructivo de Límites laterales

Narración	Descripción pantalla	Interactividad
-----------	----------------------	----------------

Para hacer uso del recurso el docente debe realizar un recuento de temas tales como: solución de límites, propiedades de los límites: límite de una suma $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$, límite de una resta $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$, límite de un producto $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) * g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) * \lim_{x \rightarrow a} g(x)$, límite de un cociente $\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$; funciones a trozos; análisis de valores en tablas; análisis gráfico de funciones.

El recurso cuenta con tres pantallas. En la pantalla de la derecha, se encuentran los elementos que el docente puede modificar:

Cantidad de trozos de la función :

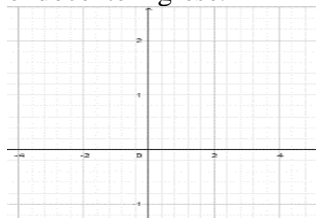
$f(x) =$

?	sii ?	< x ≤ ?
?	sii ?	< x ≤ ?
?	sii ?	< x ≤ ?
?	sii ?	< x ≤ ?

Límite cuando f(x) tiende a: ?

$\lim_{x \rightarrow ?} \left[\begin{matrix} ? & ? < x \leq ? \\ ? & ? < x \leq ? \\ ? & ? < x \leq ? \\ ? & ? < x \leq ? \end{matrix} \right]$ $\lim_{x \rightarrow ?^+} \left[\begin{matrix} ? & ? < x \leq ? \\ ? & ? < x \leq ? \\ ? & ? < x \leq ? \\ ? & ? < x \leq ? \end{matrix} \right]$

En la ventana superior izquierda se graficará la función que el docente ingrese.



En la ventana inferior izquierda se graficarán los puntos correspondientes a los límites sobre la recta.



Dentro del recurso se encuentran los siguientes elementos interactivos: Botones para indicar la cantidad de trozos de la función; cada vez que el docente seleccione alguna opción deberá ingresar la función a trozos.

En estas casillas de entrada se ingresan las funciones de los trozos al igual que las restricciones; cada vez que el docente ingrese funciones estas se irán graficando en la ventana superior izquierda.

$f(x) =$

?	sii ?	< x ≤ ?
?	sii ?	< x ≤ ?
?	sii ?	< x ≤ ?
?	sii ?	< x ≤ ?

Casilla de entrada del valor al cual tiende el límite completará los datos necesarios para iniciar la explicación del tema.

Límite cuando f(x) tiende a: ?

Botón de reiniciar: al seleccionar dicho botón, aparecerá la primera pantalla del recurso digital.

Al iniciar el uso del recurso el docente debe elegir la cantidad de trozos de la función que desee que tenga (se le recomienda al docente que inicie de manera progresiva, iniciando por función de dos trozos, luego tres y finalizar con una función de cuatro trozos). Cuando el docente elige la función de dos trozos, debe ingresar las funciones y los intervalos correspondientes que desee que se grafiquen y el valor al cual tiende el límite; después de realizar esto en la ventana de la derecha aparecerá una tabla en donde se muestran los valores de x y $f(x)$, los valores de x en la tabla son valores muy cercanos al punto ingresado por el docente; más abajo, se muestra la función aplicando el límite (en la parte derecha de esta ventana el límite tiende al número por la derecha y en la parte izquierda esta la ventana el límite tiende al número por la izquierda); con la ayuda de las vistas de la izquierda el docente puede explicar por qué existe o no el límite. Por otro lado, en la vista superior izquierda se encuentra la función graficada indicando el punto al cual tiende el límite. Por último, en la vista inferior izquierda se encuentran los puntos $f(x)$ graficados sobre una recta; aquí el docente debe realizar un análisis gráfico sobre cuál es el número al que se aproximan el límite por izquierda y derecha (se le recomienda al docente utilizar límites que tengan como resultados números enteros con el fin de facilitar la aproximación, además, se le recomienda tender el límite a

Para iniciar el docente debe elegir una opción de la función a trozos:

Ejemplo: Dos

Automáticamente en la pantalla aparecerán las siguientes casillas de entrada, las cuales el docente debe llenar con la gráfica que desee explicar la temática.

Cantidad de trozos de la función :

Dos
Tres
Cuatro

$f(x) =$

x^2	sii	0	$< x \leq$	2
sen(x)	sii	-2	$< x \leq$	2

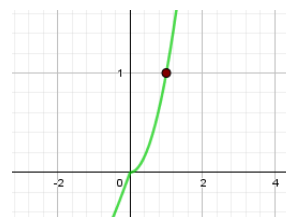
Límite cuando $f(x)$ tiende a:

Cuando el docente llene estas casillas inmediatamente en esa pantalla aparecerá la siguiente tabla.

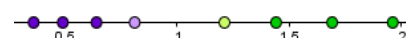
x	0.6	0.7	0.8	0.9	1	1.1	1.2	1.3	1.4
f(x)	0.36	0.49	0.64	0.81	?	1.21	1.44	1.69	1.96

De la misma manera en las vistas de la izquierda aparecerán los siguientes gráficos

Vista superior.



Vista inferior



El docente debe realizar la explicación de límites laterales partiendo de los gráficos y la tabla. Comprobando la existencia del límite.

Cada vez que docente decida cambiar la cantidad de trozos de la función el docente debe ingresar las diferentes partes de la función al igual que los intervalos y el número al cual tiende el límite, de esta manera tanto los gráficos como la tabla se modificarán. La realimentación que el docente debe realizar es recalcar que para que el límite exista debe ser el mismo tanto por la izquierda como por la derecha mostrando varios ejemplos de existencia y no existencia (para finalizar la explicación, se recomienda al docente plantear una función de cuatro trozos y solo modificar el número al que tiende el

	números en los cuales las imágenes no sean muy lejanas, pues en este caso esta vista no ayudará.		límite para trabajar el concepto: de la existencia).
Conclusión o desenlace			
Un límite existe únicamente cuando el límite por derecha es igual al límite por izquierda en el punto indicado.			

Límite de una Función: Límites que comprenden el infinito

Este recurso educativo digital busca explicar las técnicas que se utilizan para resolver ciertos tipos de límites que comprenden el infinito presentando algunos ejemplos acompañados con una animación.

The image shows a digital educational interface. On the left, a graph of a function is plotted on a coordinate system. The x-axis ranges from -20 to 25, and the y-axis ranges from -15 to 25. The function has a vertical asymptote at x=0 and a horizontal asymptote at y=0. A green dot is placed on the curve at approximately (21.8, 2.49). Below the graph, there is a purple button labeled "Animar Punto" with the coordinates "(21.8, 2.49)" below it. At the bottom left, there is a blue button labeled "Ventana izquierda".

On the right, there is a blue panel with mathematical content. At the top, the limit expression is given: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 - 8n + 2}{2n^2 - 3n}$. Below this, two steps are listed:

- Determinar el grado del polinomio del denominador
El grado de $(2n^2 - 3n)$ es 2.
- Dividir toda la expresión entre x elevado a la mayor potencia del denominador

 The solution is shown as follows:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5n^2}{n^2} - \frac{8n}{n^2} + \frac{2}{n^2}}{\frac{2n^2}{n^2} - \frac{3n}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2}{n^2} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n}{n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n^2} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{n^2}}$$

$$= \frac{\left(\lim_{n \rightarrow \infty} 5\right) - 0 + 0}{\left(\lim_{n \rightarrow \infty} 2\right) - 0}$$
 At the top right of the blue panel, there is a box labeled "Sabemos que" containing three limit properties:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n}{n^2} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{n^2} = 0$$
 At the bottom of the blue panel, there are two white buttons: "Inicio" and "Siguiete". To the right of these buttons is a circular logo with a stylized figure. At the bottom right, there is a blue button labeled "Ventana derecha".

Ilustración 20. Recurso educativo digital sobre Límites que comprenden el infinito. Tomado de: <https://www.geogebra.org/m/jvmquen9#material/bwvq34wq>

Tabla 8. Instructivo de límites que comprenden el infinito.

Narración	Descripción pantalla	Interactividad
------------------	-----------------------------	-----------------------

Para hacer uso del recurso el docente debe recordar temas como:

propiedades de los límites: límite de una suma

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x),$$

límite de una resta

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x),$$

límite de un producto

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) * g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) * \lim_{x \rightarrow a} g(x),$$

límite de un cociente

$$\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)},$$

operaciones entre polinomios, propiedades de potencias.

Al ingresar al recurso el docente se encontrará con dos pantallas: En la ventana del lado derecho el docente podrá elegir el ejemplo que desee:

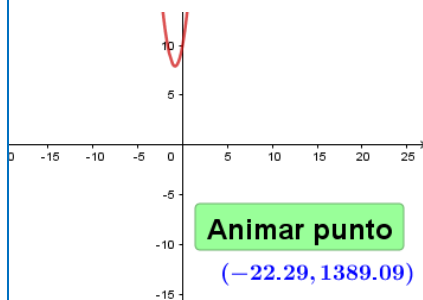
Límites que comprenden el infinito

$\lim_{x \rightarrow \infty} (3n^2 + 5n + 10)$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$
<input type="button" value="Ejemplo 1"/>	<input type="button" value="Ejemplo 2"/>
$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 - 8n + 2}{2n^2 - 3n}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{3 - x}$
<input type="button" value="Ejemplo 3"/>	<input type="button" value="Ejemplo 4"/>

En la ventana del lado izquierdo se graficará la función correspondiente al ejemplo y aparecerá un punto sobre la función el cual se podrá animar para poder ver las coordenadas del punto y hacia donde tiende el límite (infinito).



Cuando el docente seleccione el ejercicio, esta ventana quedará en azul y al oprimir el botón se mostrará la solución del ejercicio paso a paso (en cada clic aparecerá un paso nuevo).



comenzará a moverse sobre la función.

Al finalizar la explicación del ejercicio, en la ventana de la izquierda se mostrará la función, el punto al que tiende el límite, sus coordenadas y el botón “Animar punto”:

Al seleccionar este botón el punto sobre la gráfica

Los elementos interactivos que se encuentran en el recurso digital son:

- Botones con los que puede seleccionar el ejemplo que se desea ver/explicar.

- **Botón de inicio cuando se selecciona cualquiera de los ejemplos:** Al seleccionar este botón el recurso se regresa a la pantalla principal

- **Botón de siguiente:** El botón siguiente permite mostrar el paso a paso del desarrollo de los ejercicios

- **Botón animar punto:** Con este botón el docente podrá animar el punto sobre la función

- **Botón reproducir:** este botón puede aparecer en dos maneras:
 - **En la ventana de la izquierda:** animará en y detendrá el punto que se muestra, se recomienda utilizarse para parar el punto cuando se quieran analizar las coordenadas.



- **En la ventana de la izquierda:** este botón tiene diferentes efectos en esta pantalla, como reiniciar el recurso educativo digital, así que se recomienda no oprimirlo en ninguna circunstancia.

			
--	--	--	---

El docente ingresará al recurso, en la primera pantalla se encuentra con cuatro ejemplos que muestran los tipos de expresiones con los que se trabaja esta temática: polinomios, racionales en donde el grado del polinomio del numerador es mayor al del denominador y el contrario, también se presenta el caso general $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$.

En cada uno de los ejemplos primero se muestra su desarrollo y después se muestra el botón “animar punto” que pretende que de manera gráfica el docente muestre que efectivamente la componente en y de la coordenada tiende al resultado encontrado analíticamente, para esto se debe pausar en diferentes momentos la animación y resaltar que el número se acerca al resultado.

En el primer ejercicio se recurre a la propiedad del límite de una suma para explicar de manera individual porqué el resultado de cada uno de los límites es infinito.

Para el segundo ejercicio el docente debe animar el punto, al hacer esto aparecerá una tabla, donde aparecen valores que toma $f(x)$ cuando x se vuelve muy grande, deduciendo así que el límite debe ser 0 pues los valores de $f(x)$ se aproximan a este número, al hacer clic en

Al ingresar al recurso el docente se encontrará con la siguiente pantalla, donde se muestran los ejemplos propuestos, organizados de menor a mayor dificultad.

Límites que comprenden el infinito

$\lim_{x \rightarrow \infty} (3n^2 + 5n + 10)$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}$
<input type="button" value="Ejemplo 1"/>	<input type="button" value="Ejemplo 2"/>
$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5n^2 - 8n + 2}{2n^2 - 3n}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{3 - x}$
<input type="button" value="Ejemplo 3"/>	<input type="button" value="Ejemplo 4"/>

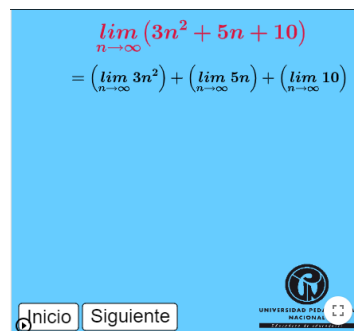
Cada vez que el docente seleccione un botón con el ejemplo que desea ver, se presentará la solución del ejercicio. **Ejemplo:**

$\lim_{n \rightarrow \infty} (3n^2 + 5n + 10)$

Dentro de la pantalla en la cual va a aparecer el desarrollo del ejemplo, se encuentra el botón el cual indica el paso siguiente del desarrollo del ejemplo, este botón se desaparecerá al encontrar el resultado, así se sabrá que el desarrollo ha terminado:

En este recurso el docente encontrará una serie de ejercicios en los cuales la interacción es limitada al uso de los botones que se explica en el desarrollo de esta tabla.

el botón siguiente se detendrá la animación y mostrará este resultado; posteriormente se analizará de la misma manera el límite cuando $x \rightarrow -\infty$. Para finalizar se generalizará esta propiedad para la función $\frac{1}{x^n}$.
 El tercer y cuarto ejercicio se solucionan de manera similar; inicialmente el docente debe recalcar que es importante determinar el grado del polinomio del denominador y dividir entre este toda la función, posteriormente realizar las operaciones algebraicas necesarias y para finalizar resolver el límite.

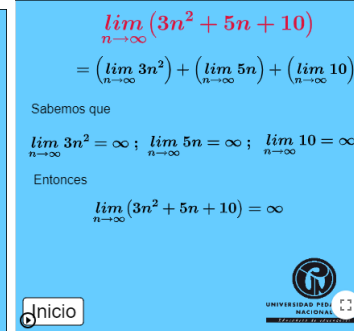
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (3n^2 + 5n + 10) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} 3n^2\right) + \left(\lim_{n \rightarrow \infty} 5n\right) + \left(\lim_{n \rightarrow \infty} 10\right)$$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} (3n^2 + 5n + 10) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} 3n^2\right) + \left(\lim_{n \rightarrow \infty} 5n\right) + \left(\lim_{n \rightarrow \infty} 10\right)$$

Sabemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 3n^2 = \infty ; \lim_{n \rightarrow \infty} 5n = \infty ; \lim_{n \rightarrow \infty} 10 = \infty$$

Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (3n^2 + 5n + 10) = \infty$$


Al finalizar cada pantalla se encuentra el botón , el cual devolverá el recurso educativo digital a la pantalla principal

Conclusión o desenlace

Mostrar que existen ciertos límites que comprenden el infinito, que se pueden resolver a través de una secuencia de pasos, con el fin que el estudiante agrupe los ejercicios según las técnicas explicadas en los ejemplos.

Analizar gráficamente el $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$, puesto que es la base teórica para el desarrollo de los siguientes ejemplos.

Límite de una Función: Límites trigonométricos

Este recurso educativo digital busca mostrar diferentes técnicas para la solución de límites trigonométricos dejando ver la gráfica.

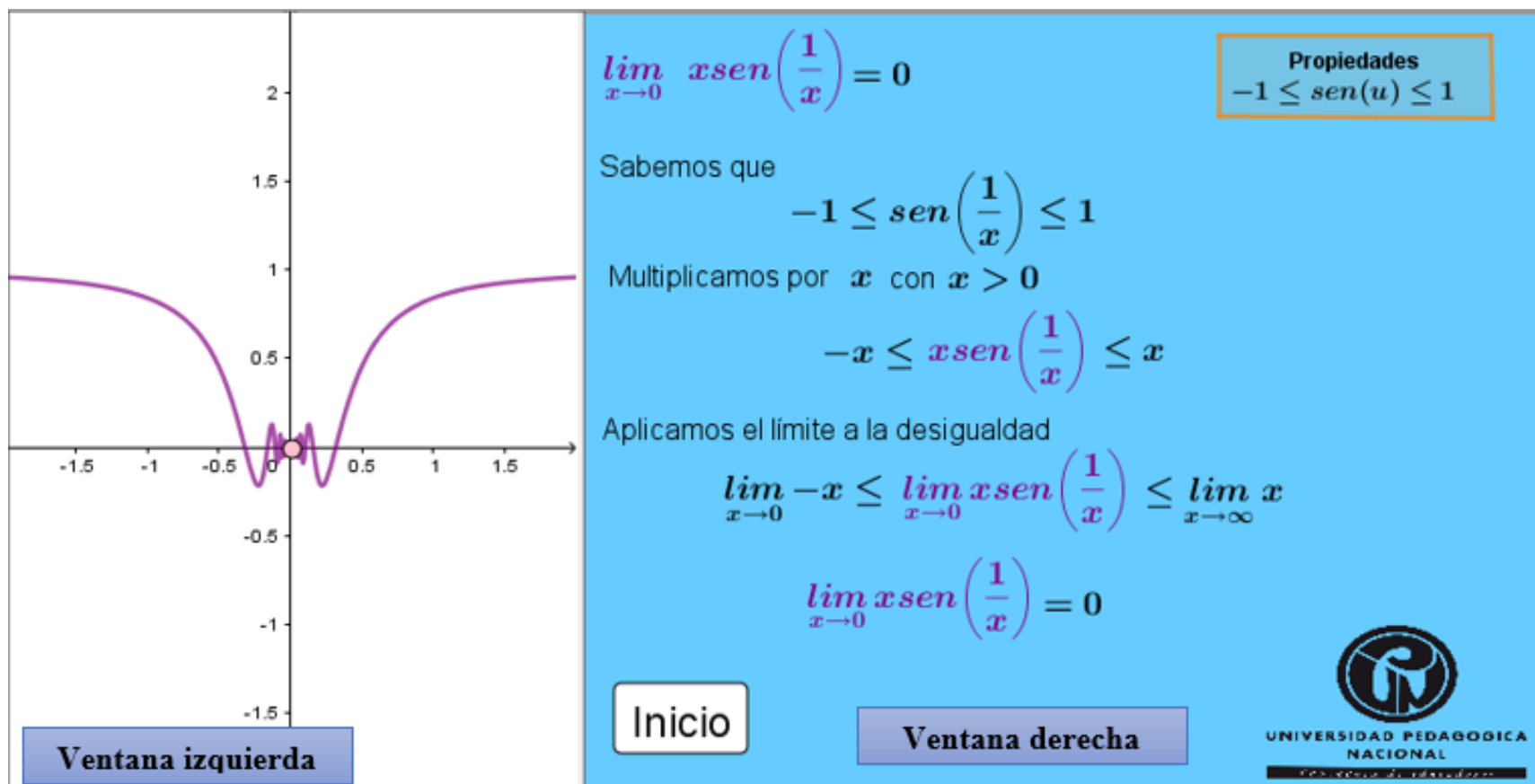


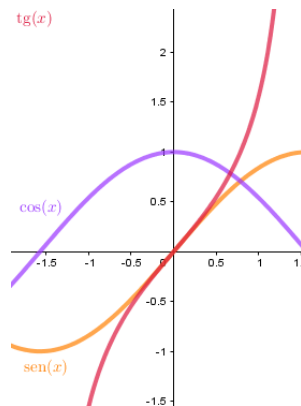
Ilustración 21. Recurso educativo digital sobre Límites trigonométricos. Tomado de: <https://www.geogebra.org/m/jvmquen9#material/kg9t2knn>

Tabla 9. Instructivo de límites trigonométricos

Narración	Descripción pantalla	Interactividad
-----------	----------------------	----------------

Para iniciar el docente debe hacer un recuento sobre algunos temas como:
 identidades trigonométricas pitagóricas,
 identidades trigonométricas de ángulo doble,
 diferencia de cuadrados y propiedades de las desigualdades.

Al ingresar al recurso el docente se encontrará con dos ventanas: en la ventana de la izquierda se graficarán las funciones de los ejercicios.



En la ventana de la derecha se encuentran los enunciados de los ejercicios propuestos, con los botones correspondientes a su solución:

Límites trigonométricos

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \text{cos}(x)}{x} = 0$
<input type="button" value="Ejemplo 1"/>	<input type="button" value="Ejemplo 2"/>
$\lim_{x \rightarrow 0} x \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \text{cos}(2x)}{x^2} = 2$
<input type="button" value="Ejemplo 3"/>	<input type="button" value="Ejemplo 4"/>

Los elementos interactivos con los que cuenta el recurso son:

- Los botones que indican el ejercicio

- El botón siguiente aparece en la pantalla del desarrollo de cada ejercicio, el cual al ser seleccionado mostrará el paso siguiente

- Al seleccionar el botón de inicio este retrocederá a la pantalla principal.

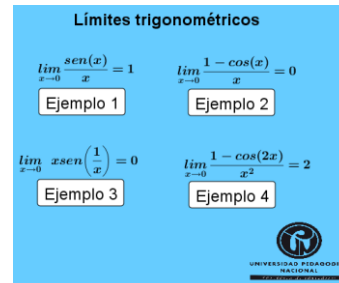
		<p>En el desarrollo de cada ejercicio se mostrará el botón</p> <p>Siguiente, con el cual se podrá visualizar el paso siguiente del desarrollo.</p>	
--	--	---	--

Cuando el docente ingrese al recurso educativo digital encontrará los ejercicios propuestos y los botones que lo llevarán a ver su solución. Es importante resaltar que al finalizar cada ejercicio (cuando se desaparezca el botón “Siguiente”) el docente debe oprimir el botón “Inicio” para volver a la página y seleccionar otro ejercicio.

En el primer ejercicio se realizará una explicación intuitiva acerca del porqué el $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$, para esto se recurre a una relación que reúne lo algebraico y lo geométrico: paso a paso se genera una relación entre las áreas de triángulos estratégicos llegando a una desigualdad, que después de un tratamiento algebraico, resulta generando la respuesta deseada.

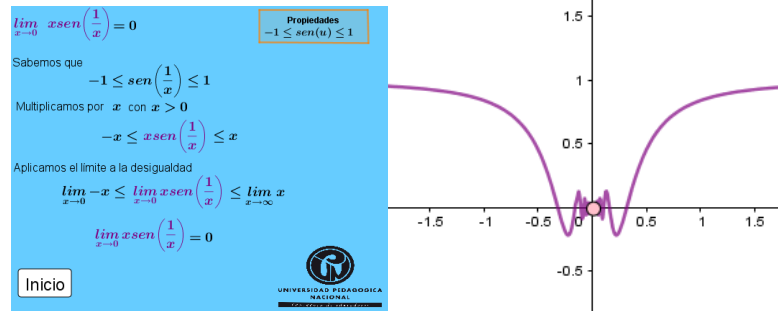
En el segundo, tercer y cuarto ejercicio el docente debe hacer uso del recuadro que se encuentra en la parte superior derecha de la ventana de la derecha, en el cual aparecerán las propiedades que son necesarias para el desarrollo del ejercicio; estas irán apareciendo a medida que sean necesarias.

Al ingresar al recurso el docente se encontrará con la siguiente pantalla



En la que se visualizan los ejercicios propuestos. Cada vez que el docente seleccione un botón el cual este etiquetado como **Ejemplo #**, se presentará la solución del ejercicio en la ventana de la derecha y en la ventana de la izquierda se graficará la función.

Ejemplo:



Dentro de la pantalla en la cual aparece el desarrollo del ejercicio, se encuentra el botón siguiente el cual indica el paso siguiente.



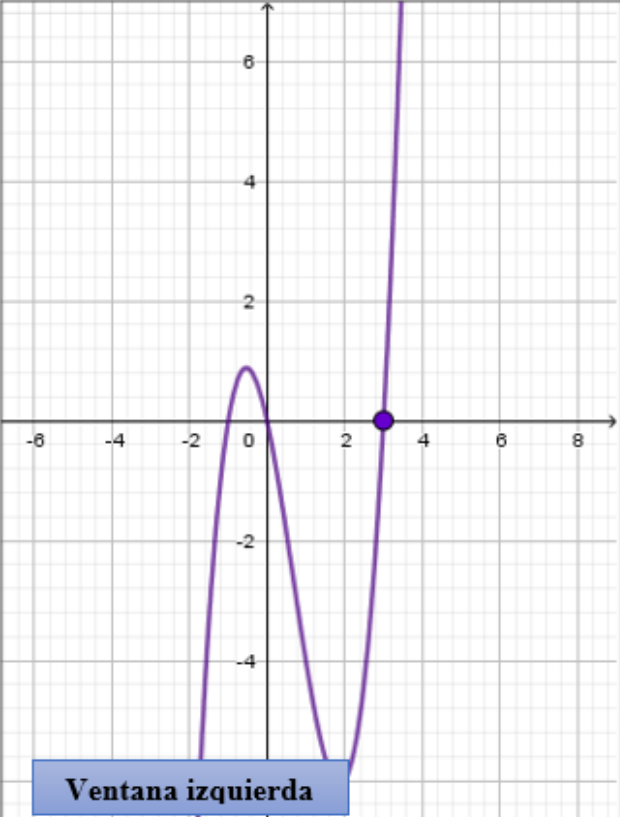
En este recurso el docente encontrará una serie de ejercicios con los cuales puede explicar los diferentes casos de límites trigonométricos.

Conclusión o desenlace

Mostrar que hay ejercicios de límites trigonométricos que se pueden resolver con pasos similares, con el fin de que el estudiante agrupe los ejercicios según las técnicas explicadas en los ejercicios.

Límite de una Función: Continuidad de una función en un punto

Este recurso educativo digital busca ilustrar el proceso que se lleva a cabo para determinar si una función es continua en un punto, para esto se muestran los requisitos y la gráfica de esta.



Ventana izquierda

$f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$

¿La función es continua en $a = 3$?

1. ¿Existe $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$?

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^3 - 2x^2 - 3x) = (3)^3 - 2(3)^2 - 3(3)$$

$$= 27 - 18 - 9$$

$$= 0$$

2. ¿Existe $f(a)$?

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$$

$$f(3) = (3)^3 - 2(3)^2 - 3(3)$$

$$= 27 - 18 - 9$$

$$= 0$$

3. ¿ $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(a)$?

$$0 = 0$$

$f(x)$ es continua en $a = 3$

Regresar

Ventana derecha

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA

Ilustración 22. Recurso educativo digital sobre Continuidad de una función en un punto. Tomado de: <https://www.geogebra.org/m/jymquen9#material/vecsk95b>

Tabla 10. Instructivo de continuidad de una función en un punto

Narración	Descripción pantalla	Interactividad
-----------	----------------------	----------------

Para comenzar a utilizar el recurso el docente debe hacer un recuento de temas como: cálculo de límites, grafica de funciones, límites laterales.

El recurso cuenta con dos ventanas: en la ventana de la derecha se encuentran los ejemplos propuestos, adicionalmente al elegir un ejemplo, en dicha pantalla aparecerá el desarrollo de este.

Continuidad de una función en un punto
 $f(x)$ es continua en un punto a si y solo si:

- 1) Existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$
- 2) Existe $f(a)$
- 3) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

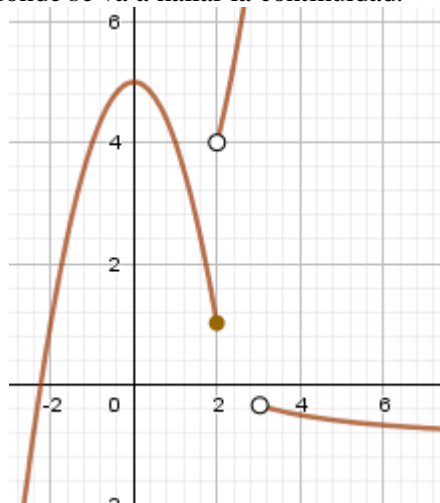
$f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$
 ¿La función es continua en $a = 3$?

1. ¿Existe $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$?
 $\lim_{x \rightarrow 3} (x^3 - 2x^2 - 3x) = (3)^3 - 2(3)^2 - 3(3)$
 $= 27 - 18 - 9$
 $= 0$ ✓✓
2. ¿Existe $f(a)$?
 $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$
 $f(3) = (3)^3 - 2(3)^2 - 3(3)$
 $= 27 - 18 - 9$
 $= 0$ ✓✓
3. ¿ $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(a)$?
 $0 = 0$ ✓✓

$f(x)$ es continua en $a = 3$

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

En la vista de la izquierda aparecerá la gráfica de la función y el punto en donde se va a hallar la continuidad.



Los elementos interactivos con los que cuenta el recurso educativo digital son los siguientes:

- **Botones de ejemplos:**

Ejemplo 1

Ejemplo 2

Ejemplo 3

Ejemplo 4

Ejemplo 5

Al seleccionar uno de los botones el docente elegirá el ejemplo del que desea ver la solución.

- **Botón siguiente:**

Siguiente

Este botón aparecerá al momento de estar visualizando un ejemplo y se mostrará el siguiente paso de la solución.

- **Botón regresar:**

Regresar

El botón regresar hará que se muestre la pantalla principal del recurso educativo digital.

El docente ingresará al recurso educativo digital, y encontrará los ejercicios propuestos y las condiciones que se deben cumplir para que la función sea continua en ese punto, como lo son:

1. $\text{Existe } \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
2. $\text{Existe } f(a)$
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Es importante resaltar que el cuándo se termine el desarrollo de un ejemplo (se desaparezca el botón “Siguiente”), el docente debe oprimir “Regresar” para volver a la página principal.

En el primer y segundo ejemplo se evidencia que la función en ese punto es continua, porque cumple cada una de las condiciones. El docente se debe encargar de explicar el procedimiento que se muestra paso a paso para probar cada una de las condiciones.

En los siguientes ejemplos no se cumple alguna de las condiciones (en el ejemplo 3: no se cumple ni 1 ni 3, ejemplo 4: no se cumple ni 2 ni 3 y en el ejemplo 5: no se cumple 3), por esto se recomienda al docente realizar la explicación del procedimiento algebraico mostrando (por qué se cumplen o no las condiciones) y finalizar con un análisis gráfico, en el cual se aclare que mientras podamos

Al ingresar al recurso educativo digital el docente se encontrará con la siguiente pantalla, donde se visualizan los ejemplos propuestos:

Continuidad de una función en un punto
 $f(x)$ es continua en un punto a si y solo si:

- 1) $\text{Existe } \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
- 2) $\text{Existe } f(a)$
- 3) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Ejemplo 1 Ejemplo 2
 Ejemplo 3 Ejemplo 4
 Ejemplo 5

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
 División de Educación

Cada vez que el docente seleccione un botón el cual este escrito **ejemplo #**, se presentara la solución de dicho ejemplo

Ejemplo:

Ejemplo 1

En este recurso el docente encontrará una serie de ejemplos con los cuales puede explicar las condiciones que debe cumplir la función para que sea continua en un punto.

dibujar la gráfica sin interrupciones entonces será continua en el punto.

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$$

¿La función es continua en $a = 3$?

1. ¿Existe $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$?

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^3 - 2x^2 - 3x) = (3)^3 - 2(3)^2 - 3(3)$$
$$= 27 - 18 - 9$$
$$= 0 \quad \checkmark \checkmark$$

2. ¿Existe $f(a)$?

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$$
$$f(3) = (3)^3 - 2(3)^2 - 3(3)$$
$$= 27 - 18 - 9$$
$$= 0 \quad \checkmark \checkmark$$

3. ¿ $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(a)$?

$$0 = 0 \quad \checkmark \checkmark$$

$f(x)$ es continua en $a = 3$

Dentro de la pantalla en la cual aparecerá el desarrollo del ejemplo, se encuentra el botón de siguiente el cual indicará que se muestra el paso siguiente.

Siguiente

Al finalizar de cada pantalla se encuentra el botón **Regresar**; el cual al seleccionarlo se devolverá a la pantalla principal.

Regresar

Conclusión o desenlace

Probar las condiciones para que una función sea continua en un punto, con el fin que el estudiante logre asimilar con mayor facilidad el procedimiento que se debe llevar a cabo para comprobar cada una de las condiciones.

Límite de una Función: Continuidad de una función en un intervalo

Este recurso educativo digital busca exponer la forma de evaluar algebraica y gráficamente si una función es continua en un intervalo abierto.

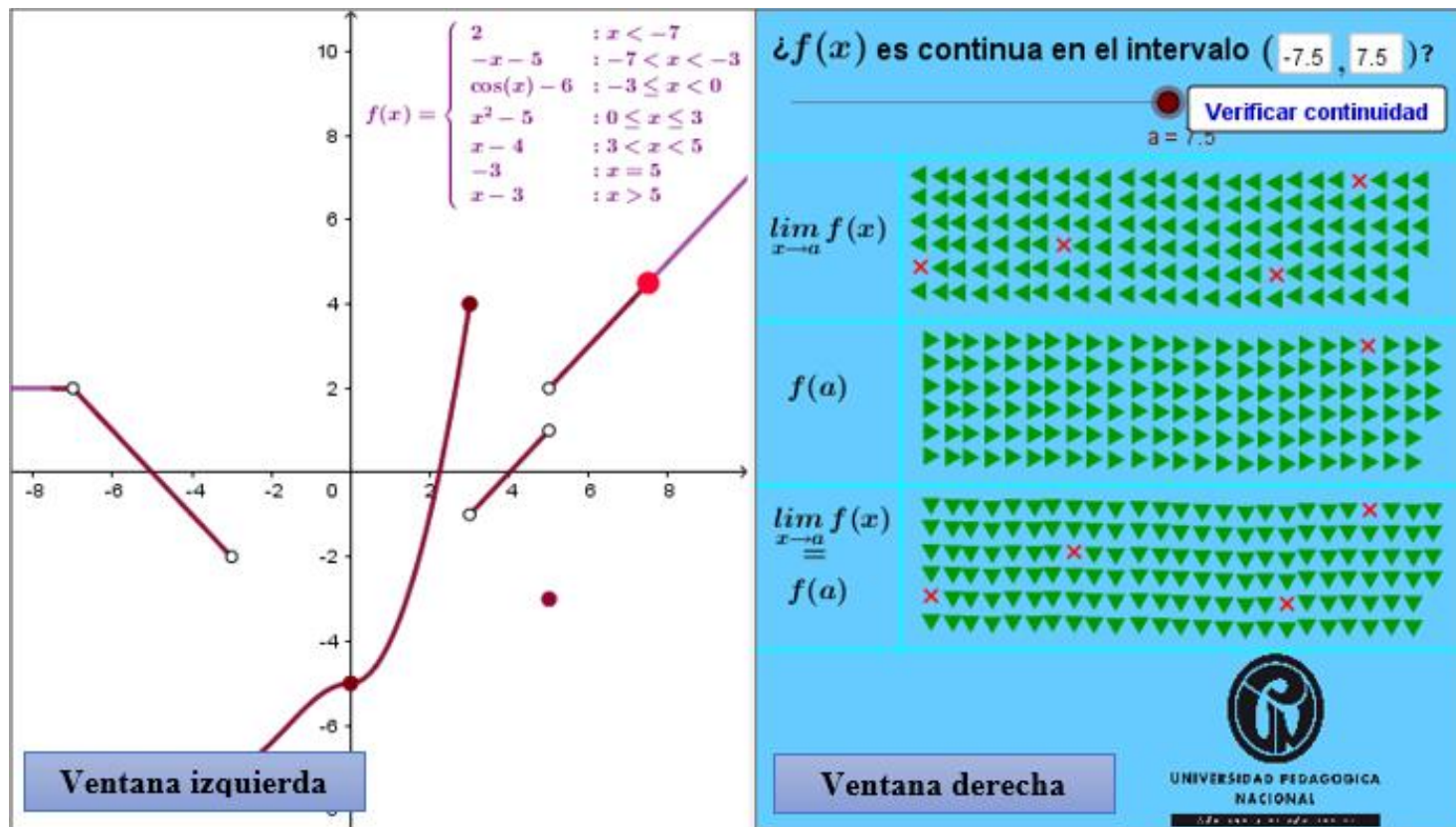
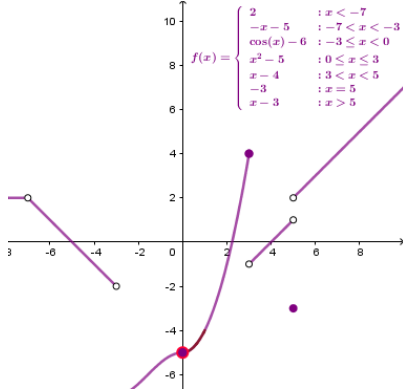
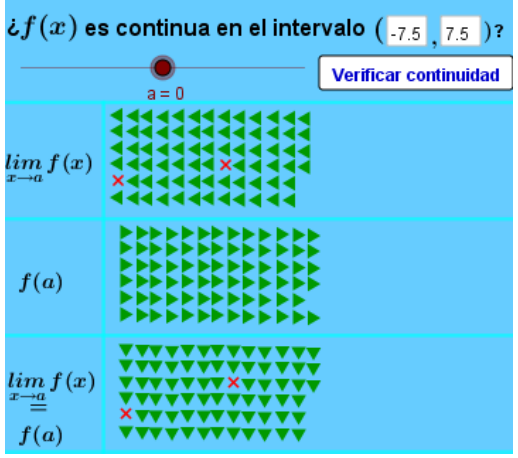
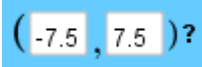






Ilustración 23. Recurso educativo digital sobre Continuidad de una función en un intervalo. Tomado de: <https://www.geogebra.org/m/jvmquen9#material/hn92uhj2>

Tabla 11. Instructivo de continuidad de una función en un intervalo abierto

	Narración	Descripción pantalla	Interactividad
Introducción	<p>Para comenzar a utilizar el recurso el docente debe hacer un recuento de temas como: propiedades de los límites, cálculo de límites por diferentes métodos, cálculo de funciones y límites laterales.</p>	<p>Al ingresar al recurso educativo digital se visualiza la gráfica a la cual se le está haciendo el análisis de continuidad.</p>  <p>En la vista de la derecha aparece el análisis de la continuidad de dicha función</p> 	<p>El recurso digital cuenta con los siguientes elementos interactivos:</p> <p>Casilla de entrada para el valor de los intervalos</p>  <p>En estas casillas de entrada el docente debe ingresar el valor del límite superior y límite inferior.</p> <p>Deslizador</p>  <p>El deslizador corresponde a los números que pertenecen al intervalo, se recomienda moverlo manualmente.</p> <p>Botón de verificar continuidad</p>  <p>Con este botón se inicia la animación del deslizador con el cual se va a verificar la continuidad de la función en ese intervalo.</p>

Para iniciar a utilizar el recurso digital el docente debe explicar la función que está graficada: que es por partes y cómo está definida.

El docente debe ingresar al lado de la pregunta “¿ $f(x)$ es continua en el intervalo?” el valor superior e inferior del intervalo; posterior a esto el docente debe seleccionar el botón “Verificar continuidad” con el cual se activará el deslizador; en la parte inferior se encuentran las tres condiciones que se deben cumplir para que la función sea continua, a medida que el deslizador va corriendo se va mostrando  cuando se cumple dicha condición en el punto que indica el deslizador y  cuando en ese punto del intervalo no se cumple la condición que se evalúa; a medida que van saliendo en la ventana de la derecha los símbolos, en la ventana de la izquierda el punto sobre la gráfica se va moviendo sobre la función en el intervalo ingresado.

Cuando el deslizador termine su animación se debe observar cada una de las condiciones por separado, y explicar que si para todos los puntos se cumplen las condiciones (solo hay triángulos verdes) entonces la función es continua, si por el contrario se hace presente una equis en rojo, la función no es continua en el intervalo ingresado.

En este proceso, se recomienda al docente ingresar un intervalo en el que sea continua [por ejemplo: $(-6, -4)$], continuar con intervalos en donde no se cumpla la primera condición [por ejemplo: $(-6, -4)$], la segunda [por ejemplo: $(-7.5, -4)$] y únicamente la tercera [por ejemplo: $4,6)$].

Para finalizar, tratar la continuidad de un intervalo de manera gráfica, dejándose guiar por la estrategia de: una

El primer paso que el docente debe realizar es ingresar los valores superiores e inferiores del intervalo



Al ingresar estos valores, determinar entre que números se va a mover el deslizador y así mismo los puntos que se van a mostrar para comprobar si la función es continua en dicho intervalo. El valor mínimo por ingresar es -7.5 y el valor máximo 7.5 .



Con el botón se activará el deslizador para observar qué pasa en los puntos del intervalo. En el caso que desee ingresar otro intervalo, se debe devolver el deslizador manualmente hasta su valor mínimo (llevarlo hasta el extremo izquierdo).

Cada vez que el docente cambie los valores del intervalo el deslizador cambia el rango en el que se mueve, así mismo se modificará la cantidad de puntos que aparecerán.

El docente debe resaltar las condiciones que se deben cumplir para que la función sea continua en el intervalo.

	función es continua en un intervalo si al dibujarla no se debe levantar el lápiz en ningún punto del intervalo.		
--	---	--	--

Conclusión o desenlace

Mostrar de manera analítica la continuidad de funciones en un intervalo para comprender que se debe ser muy riguroso en el momento de indagar la continuidad de una función en un intervalo abierto de manera analítica.

Derivadas: Pendiente de la recta tangente

Este recurso educativo digital busca ejemplificar la definición de derivada como pendiente de la recta tangente a una curva mediante la representación gráfica.

$f(x) = x^2$
 $x = 2$

Distancia entre los puntos

$h = 0$

La pendiente esta definida por :

$$m = \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

Para nuestro caso tenemos lo siguiente :

h	m
0	4

Borra Ventana derecha

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

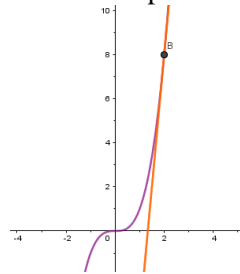
Ilustración 24. Recurso educativo digital sobre Pendiente de la recta tangente. Tomado de: <https://www.geogebra.org/m/jvmquen9#material/n9cbkxwa>

Tabla 12. Instructivo de pendiente de la recta tangente

Narración	Descripción pantalla	Interactividad
-----------	----------------------	----------------

Para hacer uso del recurso digital el docente debe hacer un recuento de temas como: pendiente de una recta, recta secante, donde debe aclarar que esta corta la función en dos puntos; recta tangente, la cual toca a la función en un único punto, graficas de funciones, cálculo de límites, continuidad de una función; Los últimos temas se pueden reforzar con recursos digitales anteriores.

El recurso digital cuenta con dos vistas:
 En la vista de la izquierda se encuentra el plano cartesiano donde se graficará la función y la recta tangente a esa función en un punto.



En la vista de la derecha se encuentran la casilla de entrada de las funciones, en la cual se ingresan los datos.

f(x)= ?
 x= ?

Distancia entre los puntos $h = 3$

La pendiente esta definida por :

$$m = \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

Para nuestro caso tenemos lo siguiente :

h	m
3	?

Borrar

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

Para ingresar la función, el docente debe ingresar en el siguiente campo:

f(x)= ?

El punto de tangencia, el cual es el punto por la cual va a pasar la recta tangente, se ingresa en el siguiente campo:

x= ?

El deslizador **h** el cual hace función de distancia y se debe mover para mostrar que cuando la distancia en mayor a cero la recta es secante

Distancia entre los puntos

h = 0

Para finalizar el docente, debe mostrar los valores que se van generando en la siguiente tabla:

h	m
0.6	?

Antes de iniciar a utilizar el recurso educativo digital, el docente debe plantearles a los estudiantes que tracen una curva conocida e intenten dibujar una recta tangente a dicha curva, continuar comparando y planteando las diferentes rectas, para que el recurso educativo institucionalice la labor que cada estudiante hizo en su cuaderno.

Para activar el recurso digital el docente debe interactuar con la vista de la izquierda, donde ingresará la función y el punto de tangencia, el docente podrá movilizar el deslizador h el cual indica la distancia entre los puntos A y B , y la pendiente se calcula con la fórmula, por otro lado, el docente debe explicar la tabla que aparece en la parte inferior de la vista, la cual consta del valor de la distancia h y la pendiente con esa distancia.

Al ingresar la función en la ventana de la izquierda; esta se graficará en la ventana gráfica de la derecha; el docente debe ubicar la vista de tal manera que se tenga una mejor vista de la gráfica, de la distancia y de la recta tangente.

Ingresar en las casillas la función que desee:

The image shows a blue rectangular interface with two white input fields. The top field contains the text $f(x) = x^2$ and the bottom field contains the text $x = 3$.

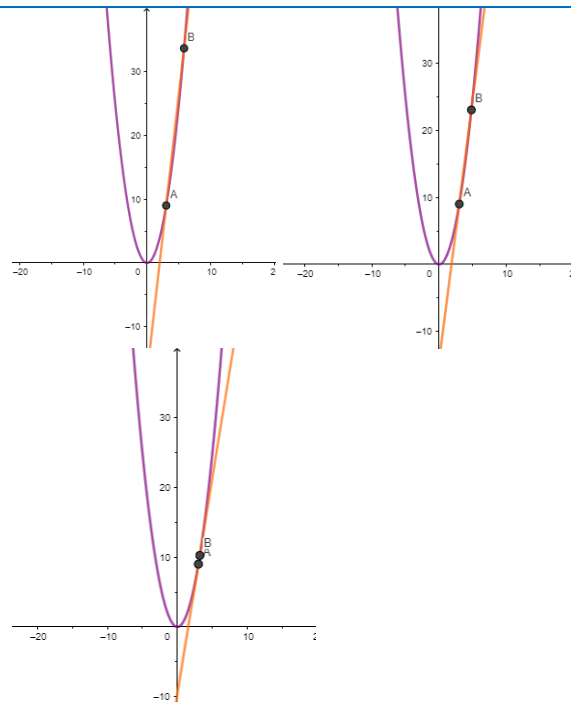
Y al activar el deslizador (manualmente)

The image shows a blue rectangular interface with a slider control. The text "Distancia entre los puntos" is centered above the slider. Below the slider, the text $h = 2.8$ is displayed.

El punto de la ventana de la izquierda se moverá hasta volver la recta secante en tangente

Cada vez que el docente ingrese una nueva función o un nuevo punto de tangencia debe mover la vista gráfica de la izquierda de tal manera que se pueda visualizar los puntos clave del recurso digital.

La retroalimentación que el docente se basa en la distancia h , cuando esta es mayor a cero la recta es secante a la función, cuando el deslizador es igual a cero la recta resulta tangente a la curva en ese punto.



Mientras se publica la pendiente de la recta naranja

h	m
0.2	6.2

Conclusión o desenlace

La pendiente de la recta tangente a una curva se establece como consecuencia de marcar un punto adicional sobre la recta $x + h$ e intentar reducir la distancia entre los puntos a 0, puesto que, con sólo un punto, no es posible aplicar la fórmula que se conoce para la pendiente de una recta.

Derivadas: Derivada de funciones logarítmicas

Este recurso educativo digital busca mostrar proceso a seguir en el momento de solucionar derivadas de funciones logarítmicas similares a las planteadas.

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

Por propiedades de los logaritmos:

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$
$$f(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = \frac{1}{2} [\ln(1+x) - \ln(1-x)]$$

Derivamos $f'(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\ln 10} * \frac{1}{1+x} - \frac{1}{\ln 10} * \frac{-1}{1-x} \right]$



Factorizamos $\frac{1}{\ln 10}$ y tenemos: $f'(x) = \frac{1}{2} * \frac{1}{\ln 10} \left[\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right]$

Entonces $f'(x) = \frac{1}{2\ln 10} \left[\frac{1-x+1+x}{(1+x)(1-x)} \right]$

Aplicamos diferencia de cuadrados y sumamos $f'(x) = \frac{1}{2\ln 10} \left[\frac{2}{(1-x)^2} \right]$

Por ultimo a derivada de f(x) es: $f'(x) = \frac{1}{\ln 10} \left[\frac{1}{(1-x)^2} \right]$

$\log_a b^c = c * \log_a b$
 $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$







UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

Ilustración 25. Recurso educativo digital sobre Derivada de funciones logarítmicas. Tomado de: <https://www.geogebra.org/m/jvmquen9#material/swzhtpaj>

Tabla 13. Instructivo de derivada de funciones logarítmicas

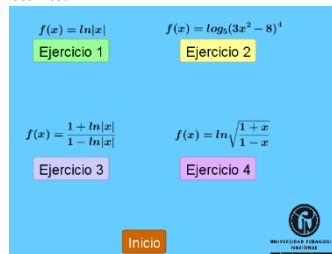
	Narración	Descripción pantalla	Interactividad
Introducción	<p>Para comenzar a utilizar el recurso el docente debe recordarle a los estudiantes algunas propiedades de los logaritmos, como: el logaritmo del producto ($\log_b(MN) = \log_b M + \log_b N$), logaritmo del cociente ($\log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$), logaritmo de una potencia ($\log_b M^n = n \log_b M$); también, propiedades de las derivadas, la regla del cociente, la regla del producto y regla de la cadena.</p>	<p>Al ingresar al recurso lo primero que observará el docente son los ejercicios que se proponen, en esa misma pantalla se encuentran los botones que llevarán a ver cada una de las soluciones:</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> $f(x) = \ln x$ $f(x) = \log_5(3x^2 - 8)^4$ Ejercicio 1 Ejercicio 2 </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> $f(x) = \frac{1 + \ln x }{1 - \ln x }$ $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ Ejercicio 3 Ejercicio 4 </div> <p>Posterior a elegir el ejercicio, este se mostrará otra pantalla en la cual se desarrollará, para esto el docente debe dar clic sobre la flecha  va a indicar que se debe mostrar el paso siguiente; de la misma manera cuando se comience a ver el paso a paso también se puede devolver.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> $f(x) = \log_5(3x^2 - 8)^4$  <p>Sabemos que: $f(x) = \log_a U$ entonces $f'(x) = \frac{u'}{u} * \frac{1}{\ln a}$</p> <p>Entonces:</p> </div>	<p>Los elementos interactivos con los que cuenta el recurso son: los botones que indican el ejercicio a elegir:</p> <div style="text-align: center; margin: 10px 0;"> Ejercicio 1 Ejercicio 2 Ejercicio 3 Ejercicio 4 </div> <p>las flechas en cada ejercicio, que indica siguiente  y anterior  y por último el botón de inicio.</p> <div style="text-align: center; margin: 10px 0;"> Inicio </div>

El docente ingresará al recurso y en la primera pantalla se encuentran los ejercicios propuestos; se le recomienda al docente que explique los ejercicios en el orden propuesto debido a que estos están organizados de menor a mayor complejidad. Al terminar de desarrollar cada uno de los ejercicios el docente debe oprimir “Inicio” para volver a la pantalla principal. En el primer ejercicio se hallará la derivada de $f(x) = \ln|x|$, el docente debe explicar que e y el $\ln|x|$ son funciones inversas y aclarar el por qué al multiplicar e por $f(x)$ queda $e^{f(x)}$, por último, explicar el paso a paso del ejercicio con ayuda del recurso educativo digital.

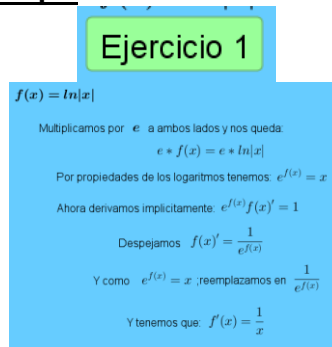
Al ingresar al segundo ejercicio, en el primer paso el docente debe recordar a los estudiantes la regla de la derivada de un logaritmo, seguido debe hacer la asignación de los valores según la regla, posteriormente debe reemplazar en la regla y por último operar. Dichas propiedades se mostrarán en el momento indicado de utilizarlas.

El tercer ejercicio tiene mayor complejidad que los anteriores. Inicialmente el docente debe aclarar que la derivada debe hacerse por la regla del cociente, se debe hallar las

Al ingresar al recurso el docente se encontrará con la siguiente pantalla:



Donde se visualizan los ejercicios propuestos, organizados de menor a mayor dificultad. Cada vez que el docente seleccione un botón el cual este escrito **ejercicio #**, se presentara la solución del ejercicio. **Ejemplo**



Dentro de la pantalla en la cual va a aparecer el desarrollo del ejercicio, se encuentran las siguientes



flechas las cuales indican paso anterior y siguiente respectivamente.

Al finalizar de cada pantalla se encuentra el botón **Inicio**



En este recurso el docente encontrará una serie de ejercicios con los cuales puede explicar los diferentes casos de derivadas. Para realizar una retroalimentación del tema, principalmente se debe recordar las reglas de derivación y las propiedades de los logaritmos. La interactividad del recurso se basa en oprimir la tecla que indica siguiente para cambiar de paso e inicio para volver a la pantalla principal.

<p>derivadas tanto del primero como del segundo término, posteriormente se reemplaza en la regla y para finalizar se organiza algebraicamente.</p> <p>Para el cuarto ejercicio, al iniciar el docente aclarar ciertas propiedades de los logaritmos como: propiedades de una potencia y la propiedad de la resta, para aplicarlas en la solución del ejercicio, por otro lado, también se debe hacer la explicación de las operaciones algebraicas que se realicen posterior a derivar la función para obtener el resultado</p>	<p>El cual al seleccionarlo se devolverá a la pantalla principal.</p> <p>Las propiedades necesarias para el desarrollo se mostrarán en un recuadro.</p> <div style="background-color: #e0f0ff; padding: 5px; border: 1px solid #00aaff;"> $f(x) = \frac{1 + \ln x }{1 - \ln x }$ <p>Hallamos las derivadas de las funciones $h(x) = 1 + \ln x$; $g(x) = 1 - \ln x$</p> $h'(x) = (1 - \ln x) * \frac{1}{x} \quad g'(x) = (1 + \ln x) * \frac{1}{x}$ </div> <div style="background-color: #e0f0ff; padding: 5px; border: 1px solid #00aaff; margin-top: 5px;"> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center; padding: 2px;">Regla del cociente</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">$f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$ entonces $f'(x) = \frac{h(x) * g'(x) - h'(x) * g(x)}{[g(x)]^2}$</td> </tr> </table> <p>Hallamos las derivadas de las funciones $h(x) = 1 + \ln x$; $g(x) = 1 - \ln x$</p> $h'(x) = (1 - \ln x) * \frac{1}{x} \quad g'(x) = (1 + \ln x) * \frac{1}{x}$ <p>Entonces $f'(x) = \frac{(1 - \ln x) * \frac{1}{x} + (1 + \ln x) * \frac{1}{x}}{(1 - \ln x)^2}$</p> </div>	Regla del cociente	$f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$ entonces $f'(x) = \frac{h(x) * g'(x) - h'(x) * g(x)}{[g(x)]^2}$	
Regla del cociente				
$f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$ entonces $f'(x) = \frac{h(x) * g'(x) - h'(x) * g(x)}{[g(x)]^2}$				
Conclusión o desenlace				
<p>Hay casos de ejercicios de derivadas de funciones logarítmicas que se pueden resolver de diferentes maneras, con el fin de que el estudiante agrupe los ejercicios según las técnicas explicadas en los ejercicios como, derivada implícita, regla de la cadena y diferentes propiedades de las derivadas.</p>				

Derivadas: Criterios de las derivadas

Este recurso educativo digital busca estructurar el procedimiento para aplicar el primer y segundo criterio de las derivadas utilizando el tratamiento algebraico y gráfico.

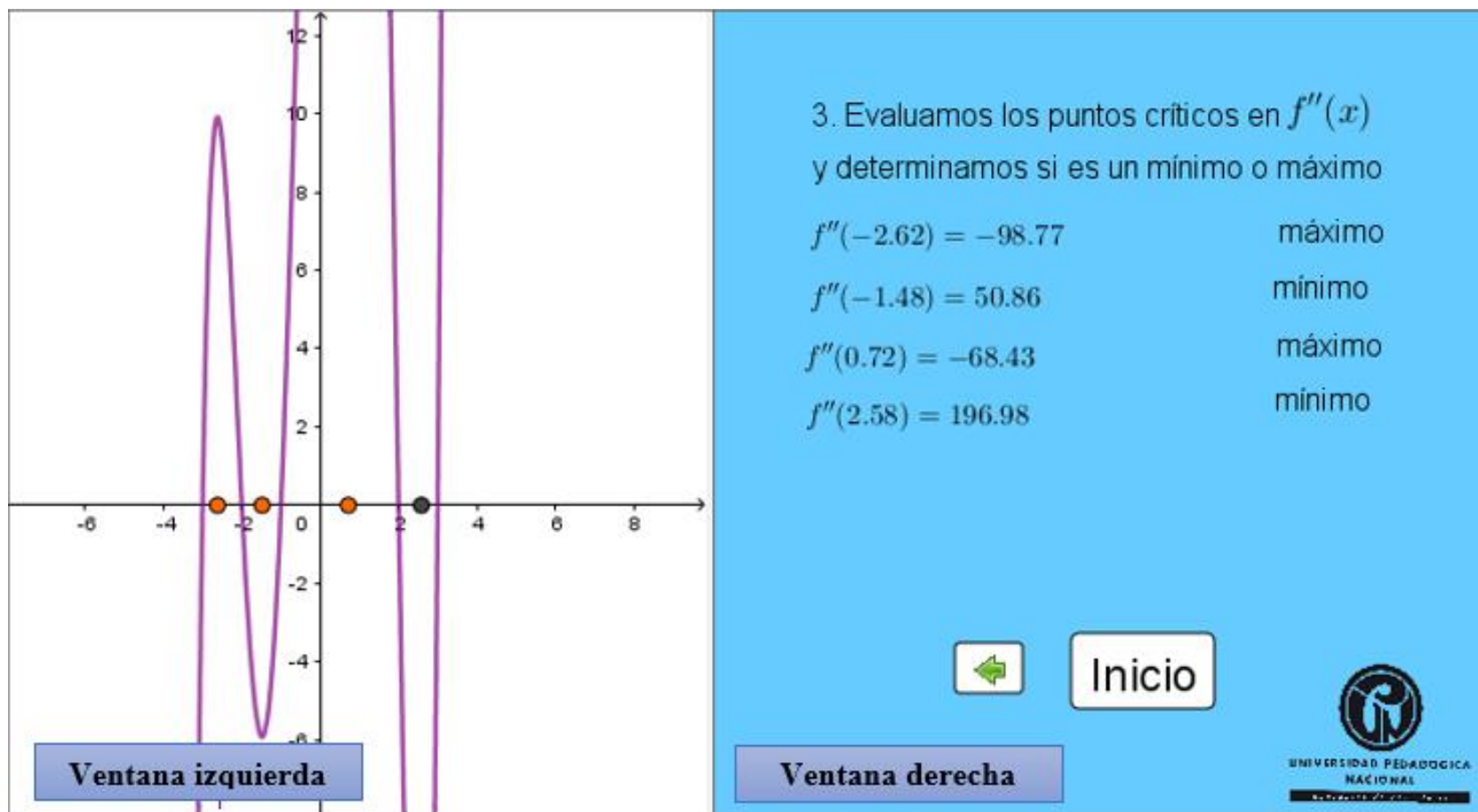





Ilustración 26 Recurso educativo digital sobre Criterios de las derivadas. Tomado de:
<https://www.geogebra.org/m/jvmquen9#material/whr55ybv>

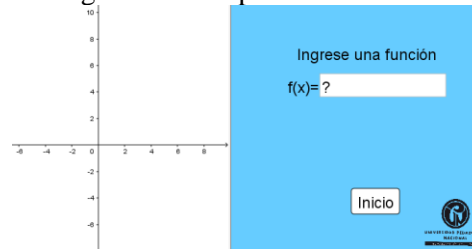
Tabla 14. Instructivo de criterios de las derivadas

Introducción	Narración	Descripción pantalla	Interactividad
	<p>Para utilizar el recurso digital el docente debe hacer un recuento a los estudiantes sobre las derivadas de orden superior, cómo hallar raíces de un polinomio y puntos de corte de una función con el <i>eje x</i>.</p> <p>El docente debe aclarar que el recurso digital enumerará los pasos específicos de uno de los métodos que existen para aplicar los criterios de la derivada a una función.</p>	<p>El recurso cuenta con dos ventanas: en la ventana de la izquierda se encuentran todos los elementos con los que el docente va a interactuar además del paso a paso de cada criterio.</p> <div data-bbox="856 537 1167 808" data-label="Image"> </div> <p>En la vista gráfica de la derecha se grafica la función y los puntos correspondientes a los criterios.</p> <div data-bbox="867 878 1157 1203" data-label="Figure"> </div>	<p>En el recurso digital se encuentran elementos interactivos como: la casilla de entrada de la función $f(x)$, el botón  que indica siguiente,  indica anterior y  el cual permite volver a la pantalla principal para volver a ingresar la función.</p>

Para iniciar el docente debe ingresar la función en la vista gráfica de la izquierda, de esta manera en la parte inferior de la pantalla aparecerá la flecha “siguiente”, al hacer clic sobre esta presentará el criterio de la primera derivada y su desarrollo (el cual se puede ver presionando la flecha que indica siguiente), en paralelo cada punto que se vaya mostrando algebraicamente en la izquierda se irá mostrando en la vista gráfica de la derecha, seguido de esto se encuentra el criterio de la segunda derivada y su desarrollo. Al final de la explicación se graficará la función que se ingresó en la primera pantalla.

Inicialmente el docente debe ingresar una función (se le recomienda al docente que esta función sea de fácil de visualizar), en el siguiente paso se muestra la primera derivada de la función, seguido de esto se hallan las raíces de $f'(x)$ y su coordenada correspondiente, después se halla la segunda derivada para aplicar el criterio de la segunda derivada y para finalizar, se establece si es mínimo o máximo; para esto el docente debe explicar con anterioridad bajo qué condiciones un punto es mínimo o máximo.


Al ingresar al recurso el docente se encuentra con lo siguiente en la pantalla




Donde podrá ingresar la función que desee, en el siguiente recuadro:

$f(x)= ?$

Para la explicación de los criterios de las derivadas el docente debe seleccionar la

flecha de siguiente  para que los pasos se vayan mostrando, en caso tal que el docente requiera devolverse a algún paso, este lo podrá hacer con la flecha de anterior



Cuando el docente termine la explicación del ejercicio y desee ingresar otra función podrá hacer seleccionando el botón de 

Al ingresar una nueva función el docente deberá hacer la explicación de cada uno de los pasos que se encuentran en el recurso. Para reforzar los conceptos de los criterios de la primera y segunda derivada, el docente debe ser muy enfático en cada paso tanto algebraica como gráficamente, con esto los estudiantes tendrán mayor claridad de cada uno de los pasos.

Conclusión o desenlace

Utilizar el criterio de primera y segunda derivada para describir el comportamiento de una función y hacer un dibujo de su grafica sin necesidad de llegar a evaluar en puntos aleatorios.

Algunas de las aplicaciones se encuentran en la economía, donde se requiere conseguir el valor máximo y mínimo de una cantidad que depende de la variable independiente. Otros campos donde se puede aplicar los criterios son: geometría, física, biología, industria, etc. Donde se presentan problemas que se resuelven aplicando conceptos de máximos y mínimos. De la misma manera se pretende que el estudiante logre generalizar los pasos que debe realizar los pasos para poder aplicar los criterios de las derivadas

OPINIONES SOBRE RECURSOS EDUCATIVOS DIGITALES E INSTRUCTIVOS

Como paso final en el proceso del presente trabajo de grado se realizó un cuestionario a través de Google Forms³ en el cual se preguntó a diez docentes que hubieran orientado la clase de cálculo en grado undécimo al menos dos años escolares, la opinión que les merecían los recursos educativos digitales e instructivos diseñados.

Al promediar los puntajes finales de cada una de las preguntas, se obtuvieron los siguientes puntajes para cada una de ellas:

Tabla 15. Promedio de los puntajes obtenidos en el cuestionario sobre opiniones de los recursos educativos digitales diseñados

Pregunta	Promedio
¿Utilizaría el recurso educativo digital en una clase?	8,8
¿Qué tan fiel es el recurso educativo digital al concepto tratado?	8,6
¿El instructivo del recurso educativo digital es claro?	8,5
¿El diseño del recurso educativo digital es intuitivo?	8,1
¿El diseño del recurso educativo digital es claro?	8,8

En cuanto a qué mejoraría de los recursos educativos digitales, se sugiere implementar audio en el desarrollo de cada uno de los materiales, cambio que no se realiza pues agregar audio es reemplazar totalmente el docente dentro del aula y el objetivo de los recursos educativos digitales diseñados es apoyar la explicación del docente, también se sugiere permitir que la vista gráfica se pueda mover, sugerencia que ya fue implementada.

Las apreciaciones que se hicieron de cada recurso educativo digital diseñado son:

- **Definición de Límite:** en todos los aspectos los puntajes obtenidos están por debajo del promedio lo que deja pensar que es necesario mejorar tanto el recurso educativo digital como el instructivo para que este en el mismo nivel que los demás, para esto los docentes propusieron generar videos explicando algunos ejercicios que evidencien el potencial del material. Es necesario resaltar que los puntajes obtenidos no son malos, puesto que oscilan entre 7,7 y 8,7 y merecen opiniones como: “es una propuesta innovadora e interesante, además tenemos dos tipos de representaciones: gráfica y algebraica que permiten tener un mejor apropiamiento de los conceptos y procesos abordados”, “es un método que puede llamar la atención del estudiante, permitiendo que se acerque a este tema sin dificultad” y “está bien presentado, claro y fácil de manejar”.
- **Límites Laterales:** los aspectos que no superan el promedio son los referentes a la fidelidad con el concepto matemático y si lo utilizarían en clase, con 8,1 y 8,7 respectivamente, los demás aspectos obtuvieron un puntaje superior al promedio de su categoría. Las opiniones recolectadas indican que es un buen recurso en el que se pueden trabajar las representaciones: gráfica, tabular y algebraica.

³ Las respuestas de la encuesta se encuentran alojadas en la carpeta de Google Drive:
<https://drive.google.com/drive/folders/1-VPFI2XnjaH1re3x5pCdZhyK-EaToZBg?usp=sharing>

- **Límites que comprenden el infinito:** las opiniones que merece este recurso se sintetizan en que es un buen material en el que se propone un método que permite abordar el tema de tal forma que estudiante comprenda dándole otra mirada a esta temática, logrando así obtener buenos resultados en lo referente a su utilización dentro del aula, fidelidad al concepto matemático y diseño, sin embargo, el instructivo se debe mejorar puesto que el puntaje es menor al promedio de esta pregunta.
- **Límites Trigonométricos:** en este caso se tienen puntajes que oscilan entre 8,1 y 8,6, un resultado favorable para un material que no goza mucha interactividad, y que cuenta con opiniones como: “un recurso que permite asociar los procedimientos y la teoría, con las gráficas, lo cual no siempre se hace”. Sin embargo, se debe continuar trabajando en su mejora ya que se sugiere ampliar los ejemplos que se muestran.
- **Continuidad de una función en un punto:** este recurso educativo digital cuenta con puntajes superiores a los promedios en todos los ámbitos preguntados, lo que nos permite pensar que tiene menos cosas por mejorar que los demás, en cuanto a la implementación dentro del aula obtuvo un 9,1, en fidelidad con el concepto matemático 8,9, en la claridad del instructivo 9, en el diseño intuitivo 8,5 y en la claridad del diseño 9,3. Las opiniones que se recibieron indican que facilita la manera de abordar el tema por estar relacionado siempre con las gráficas y mostrar ejemplos en los que todos los posibles casos se abordan.
- **Continuidad de una función en un intervalo abierto:** el diseño de este material es diferente a los demás, lo que generó que fuera poco claro y obtuviera un puntaje menor al promedio establecido, consecuentemente, el instructivo debe mejorarse puesto que la puntuación obtenida es baja en comparación con los demás recursos educativos digitales diseñados. Sin embargo, este diseño se considera intuitivo y fiel con el concepto matemático. Las opiniones que se recibieron afirman que es el resultado es entendible para los estudiantes de educación media y que es positivo para la enseñanza. Adicionalmente, las mejoras que se plantearon apuntan a proponer más ejemplos, que con el botón se reiniciara el deslizador y dar solución a si es continua la función; la última sugerencia se tomó en cuenta mejorando así el recurso educativo digital.
- **Pendiente de la recta Tangente:** en las opiniones recolectadas se obtuvo que este material permite que se estudien diferentes funciones, haciendo posible que los estudiantes exploren todo lo que se les ocurra sin llegar a perder la fidelidad con el concepto matemático, de esta manera se deja ver que si se implementaría en una sesión de clase (el puntaje fue 8,9). En cuanto a diseño, e instructivo los puntajes resultan ser satisfactorios, es decir mayores a los promedios correspondientes.
- **Derivada de funciones logarítmicas:** Los docentes están de acuerdo en que utilizarían este recurso puesto que obtuvo un puntaje de 8,6, es decir está por encima del promedio de los puntajes que se obtuvieron en esta pregunta. En los otros puntajes supera el promedio planteado, la fidelidad con el concepto matemático con 8,9, la claridad del instructivo con 8,6, y el diseño intuitivo y claro 8,2 y 8,9 respectivamente. En cuanto a este recurso una de las opiniones es que la explicación es breve, fácil de entender y monótona, ante este último comentario se decidió agregar una sección interactiva al finalizar cada uno de los ejemplos, ahora en el momento de terminar la explicación la derivada se puede verificar en cualquier punto, mostrando la recta tangente a la curva en ese punto y el valor de su pendiente.

$f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$
 $\log_a b^c = c * \log_a b$
 $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

Por propiedades de los logaritmos:

$f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$
 $f(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = \frac{1}{2} [\ln(1+x) - \ln(1-x)]$

Derivamos $f'(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\ln 10} * \frac{1}{1+x} - \frac{1}{\ln 10} * \frac{-1}{1-x} \right]$


Factorizamos $\frac{1}{\ln 10}$ y tenemos: $f'(x) = \frac{1}{2} * \frac{1}{\ln 10} \left[\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right]$

Entonces $f'(x) = \frac{1}{2 \ln 10} \left[\frac{1-x+1+x}{(1+x)(1-x)} \right]$

Aplicamos diferencia de cuadrados y sumamos $f'(x) = \frac{1}{2 \ln 10} \left[\frac{2}{(1-x)^2} \right]$

Por ultimo a derivada de f(x) es: $f'(x) = \frac{1}{\ln 10} \left[\frac{1}{(1-x)^2} \right]$

Evaluar derivada en $x = 0$ entonces $m = 1$


 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
 CALLE DE LA PAZ 100

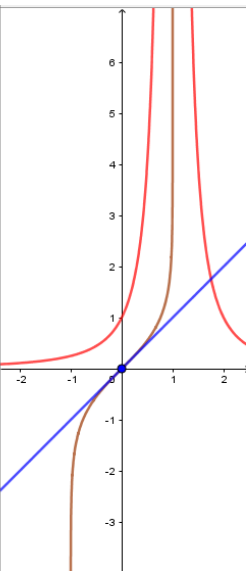


Ilustración 27. Mejora del recurso educativo digital derivada de funciones logarítmicas

- Criterios de la derivada:** se obtuvo que es un muy buen material, ya que permite explorar con diferentes funciones las derivadas, las puntuaciones superan todos los promedios planteados lo que genera la sensación de buscar posibles casos en los que no funcione y continuar mejorando el recurso educativo digital. Los puntajes obtenidos son: implementación en una sesión de clase: 9, fidelidad con el concepto matemático 8,7, claridad del instructivo 8,7, diseño intuitivo 8,3 y diseño claro 8,9.

CONCLUSIONES

Las tecnologías educativas facilitan el proceso de enseñanza de las temáticas en la escuela, particularmente, en las matemáticas favorece la comprensión de los conceptos debido a que ayuda en la visualización de representaciones y en la exploración con simulaciones, sintonizando y dosificando la información.

Las directrices nacionales potencian el desarrollo del pensamiento variacional en la educación media, promoviendo la enseñanza de temáticas específicas del cálculo numérico, algebraico, diferencial e integral. Con el fin de mejorar la enseñanza de límites y derivadas, se utilizan algunos sistemas de referencia que permiten esquematizar la información suministrada a los estudiantes y obtener mejores resultados en los procesos de aprendizaje.

El software GeoGebra permite realizar múltiples recursos educativos digitales que facilitan el proceso de enseñanza de los conceptos relacionados con el cálculo diferencial, puesto que el material que se encuentra disponible en la red satisface la exploración, conceptualización y evaluación de la mayoría de las temáticas que se encuentran dentro del currículo de Matemáticas en las escuelas colombianas.

Al programar un recurso educativo digital se hace necesario establecer un objetivo de enseñanza, las representaciones necesarias para abordar el concepto y un diseño agradable y funcional para la visualización de los estudiantes, de esta manera el producto será un material digital que no sature de información y fortalezca la explicación del docente.

Para finalizar se debe resaltar la importancia que tiene publicar los materiales que se diseñen en las plataformas que unen a la comunidad académica, en este caso GeoGebra permite tener acceso a diferentes recursos educativos digitales que ayudan a docentes que no tienen conocimiento acerca de programación en este software a implementar la tecnología educativa dentro de sus aulas de clase.

REFERENCIAS

- Area, M. (2009). *Introducción a la Tecnología Educativa. Cardiology in the Young* (España, Vol. 22). Creative Commons. <https://doi.org/http://dx.doi.org/10.1017/S1047951112000509>
- Castillo, S. (2008). Propuesta pedagógica basada en el constructivismo para el uso óptimo de las TIC en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa (RELIME)*, 11(2), 171–194. Retrieved from http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362008000200002&lng=es&nrm=iso&tlng=en
- Díaz, A., Chamorro, A., & Sagado, D. (2007). *Matemáticas 11*. (A. Perdomo, Ed.). Bogotá D.C.: Editorial Santillana.
- Escudero, R., Llinas, H., Obeso, V., & Rojas, C. (2004). Influencia de la tecnología en el aprendizaje de las asignaturas: cálculo diferencial y estadística descriptiva. En Primer congreso internacional de educación mediada con tecnologías (p. 13).
- Fiallo, J., & Parada, S. (2014). Curso de precálculo apoyado en el uso de geogebra para el desarrollo del pensamiento varacional. *Pre Calculus Course in Using Supported Geogebra for the Development of Variational Thinking.*, (20), 56–73. Retrieved from <http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=a9h&AN=100271851&lang=es&site=ehost-live>
- Gamboa, R. (2007). Uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática.
- GeoGebra, C. (2017). GeoGebra. Retrieved from www.geogebra.org
- Gómez, L. M., & Pantoja, Y. M. (2013). Límite de funciones, sistemas de representación y estándares de calidad: una metodología de análisis de textos escolares. *Revista SIGMA*, 11(1), 26–38. Retrieved from <http://revistas.udenar.edu.co/index.php/rsigma/article/view/438>
- Larson, R., Edwards, B., Falvo, D., Johnson, R., & Kubly, P. (2017). *Mate 11*. (J. REyes, Ed.). Ciudad de México: Cengage Learning Editores.
- MEN. (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas. *Cooperativa Editorial Magisterio*, 103.
- MEN. (2004). Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales.
- MEN. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. *Estándares Básicos de Competencias En Lengua, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*, 46–95.
- MEN. (2015). Derechos Básicos de Aprendizaje en Matemáticas (pp. 1–54). Bogotá D.C.
- Mesa, M. (2006). *Matemática aplicada Símbolos 11*. Bogotá D.C.: Voluntad.
- Morejon, S. (2011). El Software Educativo un medio de enseñanza eficiente. Retrieved from <http://www.eumed.net/rev/ced/29/sml.htm>
- Moreno, J. (2011). *Matemáticas para pensar 11*. (D. Roldán & I. Martínez, Eds.). Bogotá D.C.
- Moreno, V. (n.d.). *Alfa con estpandares 11*. (G. E. Norma, Ed.). Bogotá D.C.: Norma.
- Pellicer, Y. S., & Lezcano, M. G. (2009). Consideraciones sobre la tecnología educativa en el

proceso de enseñanza-aprendizaje. *Revista Iberoamericana*, 49/2, 9. Retrieved from <http://myslide.es/documents/consideraciones-de-la-tecnologia-educativa-en-el-proceso-e-a.html>

Robayo, M., & Díaz, F. (2002). *Pensamiento Matemático 11*. (G. Díaz & H. Macías, Eds.) (Libros & L). Bogotá D.C.

Rojas, L., & Esteban, P. (2012). Geogebra y applets aplicados a la enseñanza y aprendizaje del cálculo. In *Simposio Ibero-Americano de Aplicaciones y Tecnologías de Información y Comunicaciones* (p. 6). Orlando, Florida. Retrieved from http://www.iiis.org/CDs2012/CD2012ADII/ATIC_2012/PapersPdf/AT095NK.pdf

Ron, L., & Bruce, E. (2010). *Cálculo*. (L. Ortiz, Ed.). Bogotá D.C.: Mc Graw Hill.

Stewart, J. (2006). *Cálculo Conceptos y Contextos* (Internatio). México, D.F.

Stewart, J. (2012). *Cálculo de una variable* (Séptima Ed). Colombia: Cengage Learning.