

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL DE COLOMBIA, BOGOTÁ

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

**LÍNEA DE PROFUNDIZACIÓN LA ENSEÑANZA DE LA FÍSICA Y LA
RELACIÓN FÍSICA MATEMÁTICA**



**UNIVERSIDAD PEDAGOGICA
NACIONAL**
Educadora de educadores

**INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DESDE LAS FORMAS DIFERENCIALES:
ECUACIÓN DE CONTINUIDAD Y ECUACIÓN DE VORTICIDAD**

AUTOR:

EDIER ANTONIO PACHECO SARMIENTO 2009246038

BOGOTÁ DC

2016

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL DE COLOMBIA, BOGOTÁ

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

**LÍNEA DE PROFUNDIZACIÓN LA ENSEÑANZA DE LA FÍSICA Y LA
RELACIÓN FÍSICA MATEMÁTICA**

**INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DESDE LAS FORMAS DIFERENCIALES:
ECUACIÓN DE CONTINUIDAD Y ECUACIÓN DE VORTICIDAD**

**MONOGRAFÍA PRESENTADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE LICENCIADO
EN FÍSICA**


AUTOR:

EDIER ANTONIO PACHECO SARMIENTO 2009246038

DIRECTOR: JOSE FRANCISCO MALAGÓN SÁNCHEZ

BOGOTÁ DC

2016

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>UNIVERSITY OF PEDAGOGY</small>	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página - 3 - de 49	

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DESDE LAS FORMAS DIFERENCIALES : ECUACIÓN DE CONTINUIDAD Y ECUACIÓN DE VORTICIDAD
Autor(es)	Pacheco Sarmiento , Edier Antonio
Director	Malagón , José Francisco
Publicación	Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional. 2016 47 p
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	FORMAS DIFERENCIALES, MÉTODO EULERIANO, ECUACIÓN DE VORTICIDAD, ECUACIÓN DE CONTINUIDAD, GEOMETRÍA, ANÁLISIS VECTORIAL.

2. Descripción
<p>Este trabajo de grado se enmarca la interpretación geométrica que brinda las formas diferenciales en algunas ecuaciones de la mecánica de fluidos y cuyo objetivo general es: Analizar la representación geométrica de las ecuaciones de continuidad y vorticidad, a través de las formas diferenciales. Como un enfoque alternativo al estudio de la mecánica de fluidos. Para cumplir con este objetivo el presente trabajo se llevó a cabo principalmente en dos fases donde se hace un estudio detallado de las formas</p>

diferenciales para aplicarlas a las ecuaciones dichas antes.

3. Fuentes

- Ayneto Gubert, Xavier; Ferrer Balles, Miquel. (2012). *Mecanica del medio continuo en la ingeniería: teoría y problemas resueltos*. universitat politécnica de Catalunya: Iniciativa digital politécnica.
- Burke, W. L. (1985). *Applied differential geometry*. California, santa cruz : Cambridge university press .
- Cartan , É. J. (1899). Sur Certaines expresiones différentielles et le problème de Pfaf, *Annales scientifiques . l'Ecole Normale Supérieure*, 239-332.
- cazatormentas. (s.f.). Obtenido de <http://www.cazatormentas.net/vortices-toroidales-atmosfericos/>
- D.Gignoux, M. S. (2005). Magnetism Fundamentals . *Magnetism Fundamentals* .
- Departamento de física aplicada III univerisidad de sevilla . (23 de noviembre de 2007). *Laplace* . Obtenido de http://laplace.us.es/wiki/index.php/Coordenadas_cartesianas._L%C3%ADneas_y_superficies_coordenadas
- elbibliote.com. (s.f.). Obtenido de La vida de los astronautas en el espacio: <http://elbibliote.com/resources/Temas/html/1677.php>
- Engineers edge solution by desing* . (2000-2017) . Obtenido de www.Engineersedge.com
- Escuela superior de ingenieros-Universidad de navarra . (s.f.). *FAQ Mecánica de Fluidos*. Obtenido de www1.ceit.es/asignaturas/Fluidos1/WEBMF/Mecanica%20de%20Fluidos%20I/FAQMFI/FAQ2.html
- JA Wheeler; C. Misner; KS Thorne . (1973). *La gravitación* . San Francisco : WH Freeman & co.
- Jerrold E, Marsden, Tromba Antony. (1991). *Calculo vectorial* (tercera ed.). Addison-Wesley Iberoamericana s.a.
- Karl F. Warnick, R. H. (1997). *Teaching electromagnetic fiel theory usin differential forms*.

- Young University, Department of Electrical and Computer Engineering Brigham.
- Landau L, D., & Lifshitz E, M. (1985). *Mecanica de fluidos volumen 6*. URSS: reverté s.a.
- Martín Blas, T., & Serrano Fernández, A. (s.f.). *Termodinámica*. (U. P. España., Ed.)
Obtenido de
<http://acer.forestales.upm.es/basicas/udfisica/asignaturas/fisica/termo1p/variables.html>
- Miranda, D. C. (s.f.). *sobre geometria y fisica*. Obtenido de la geometría de Riema:
algunas aplicaciones a la física, UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA:
<https://imarrero.webs.ull.es/sctm04/modulo2/11/dchina.html>
- Moreno Peña, R. E. (2008). *Contextualizacion de las ecuaciones de Maxwell emplenado formas diferenciales* . Bogotá : universidad pedagógica nacional .
- O'Neill, B. (1982). *Elementos de geometría diferncial* . México : Limusa.
- Paredes, S. (29 de Marzo de 2010). *Cluster* . Obtenido de Divulgación científica :
<http://cluster-divulgacioncientifica.blogspot.com.co/2010/03/la-regla-de-la-mano-derecha.html>
- Tejeiro Sarmiento, J. M. (2005). notas de clase. *principios de la relatividad general*. bogota , colombia : universidad nacional de colombia .
- Valera, J. P. (2005). *Apuntes de fisica general* . Mexico : Universidad nacional autonoma de mexico .
- vonno. (07 de 06 de 2010). *canstockphoto*. Obtenido de
<http://www.canstockphoto.es/agua-glas-torcer-3811760.html>
- Yunus ACengel, j. M. (s.f.). *Mecanica de fluido. Fundamentos y aplicaciones* .
- Zaslow, E. (17 de junio de 2005). *Arxiv.org*. Obtenido de CORNELL UNIVERSITY LIBRARY : <https://arxiv.org/abs/physics/0506153>

4. Contenidos

El presente trabajo se desarrolla en 2 capítulos, El primer capítulo consiste en el desarrollo de la formulación matemática del cálculo exterior para formas diferenciales y su interpretación geométrica así como la introducción a la manipulación de los principales operadores vectoriales en el lenguaje de las formas diferenciales.

El segundo capítulo está estructurado por la teoría de la mecánica de fluidos y las ecuaciones más relevantes de ésta, entre las que se encuentran: La ecuación de continuidad y la ecuación de vorticidad, también se encuentra la formulación geométrica de las ecuaciones. Estas requieren una interpretación física desde el modelo geométrico planteado en el trabajo, también se presentan las conclusiones a las que se llegaron después con este trabajo y por último se presenta las referencias bibliográficas

5. Metodología

Para realizar este trabajo de grado se tomó como metodología el método de deducción, que es el razonamiento que parte de un marco general de referencia para ir a un particular, es decir, parto de una ley general o unas propiedades, donde las aplico en un caso particular.

Este trabajo es realizado y orientado a la construcción académica personal, donde busca y estudia otras alternativas o herramientas matemáticas para tener una mejor comprensión de un fenómeno físico en particular; desde el estudio de algunas ecuaciones de la mecánica de fluidos.

En este orden de ideas podemos decir:

- Se hace un estudio del cálculo de las formas diferenciales, conociendo sus propiedades, características conceptuales y matemáticas (geométrica) para emitir

un razonamiento y así obtener una conclusión de ese fundamento matemático.

- Se hace un barrido de los antecedentes donde se trabajan aplicaciones de la física utilizando formas diferenciales para una mejor comprensión de esta herramienta matemática.

6. Conclusiones

Con el desarrollo de esta monografía, sobre el estudio del mundo físico, el cual propone que el ser humano busque herramientas lógicas para llegar a una explicación; se observó que la forma de abordaje que se evidencia desde una perspectiva geométrica de las ecuaciones de vorticidad y continuidad de la mecánica de fluidos, es más cercana a la percepción o representación de los fenómenos físicos, dado a que da importancia al análisis matemático para evidenciar las diferencias de magnitudes y conceptos de la física para tener una mejor comprensión de dichas magnitudes y conceptos.

Ecuación de continuidad: Desde la perspectiva de las formas diferenciales, se pudo obtener gráficas que evidenciaron una interpretación a la ecuación, utilizando un formalismo matemático de 2-formas y 3-formas, tal que este grado de las formas diferenciales pudo dar una mejor comprensión de la dirección del flujo másico y de la densidad del fluido. La 2-forma representó la dirección del fluido saliendo del volumen de control, la 3-forma representó la densidad que se encuentra en el volumen de control. En el proceso matemático utilizando la derivada exterior para así obtener resultados de la divergencia, lo cual se comparó desde el análisis vectorial y se obtuvo lo mismo.

Ecuación de vorticidad: el uso de las formas diferenciales en la ecuación de vorticidad, ayudó a comprender mediante las gráficas, la dirección del flujo de vorticidad. En tal

manejo, se utilizó la derivada exterior para obtener una 2-forma diferencial que demostraba la dirección de la vorticidad. También se obtuvo una interpretación del teorema de Stokes, en la cual se evidenció que 1-forma que era el campo de velocidad del fluido girando sobre una curva cerrada, mostraba un aspa giratoria. Y en el abordaje de la vorticidad irrotacional, su grafica demostró que eran cilindros que giran sobre el eje, que puedo deducir que los cilindros giran más rápido cerca al eje, lo cual corresponde con la teoría, para un vorticidad irrotacional.

Esta monografía tiene la intención de motivar a estudiantes de la lic. Física. En torno a la importancia de relacionar la física con la geometría y que así se llegue a una mejor comprensión de conceptos y magnitudes por medio de las imágenes, como lo representa la propuesta de las formas diferenciales. Por lo cual se considera que este documento es una estrategia alterna en la enseñanza de la mecánica de fluido, para que el estudiante lo tenga como referente de consulta y de praxis.

Elaborado por:	Edier Antonio Pacheco Sarmiento
Revisado por:	José Francisco Malagón

Fecha de elaboración del Resumen:	20	02	2017
--	----	----	------

TABLA DE FIGURAS

Figura 1. Ley de Ampere.....	15
Figura 2. 1- formas.....	17
Figura 3. Dualidad.....	18
Figura 4. Integración de 1-forma.....	19
Figura 5. 2-forma.....	20
Figura 6. Integral de 2-forma.....	21
Figura 7. Relación de orientación de la 1-forma y 2-forma.....	22
Figura 8. 3-forma.....	22
Figura 9. Integración de una 3-forma.....	23
Figura 10. Vórtice en los vientos que rodean un tornado.....	27
Figura 11. Vórtice en un anillo de humo.....	27
Figura 12. Vórtice en un vaso de agua.....	27
Figura 13. Campo vectorial \vec{u} en 2D y 3D.....	29
Figura 14. Dirección de la vorticidad.....	30
Figura 15. Superficie coordenada cilíndrica.....	32
Figura 16. Representación tubular 2-forma de vorticidad (3D y 2D).....	32
Figura 16. Representación geométrica de la ecuación de vorticidad.....	32
Figura 17 Divergencia.....	34
Figura 18. Representación geométrica de la ecuación de continuidad.....	36

TABLA DE SÍMBOLOS

d	Operador diferencial exterior
\wedge	Producto cuña
\times	Operador producto cruz
∇	Nabla
ω	Vorticidad forma diferencial
$\omega \rightarrow$	Vorticidad vectorial
u_2	Campo de velocidad - forma diferencial
$u \rightarrow$	Campo de velocidad - vectorial
u	Campo de velocidad forma diferencial
ρ	Densidad
$j \rightarrow$	Flujo másico vectorial
j	Flujo másico - forma diferencial

CONTEXTO DE LA INVESTIGACIÓN

0.1 PROBLEMÁTICA Y JUSTIFICACIÓN

- **Pregunta Problema**

Desde la perspectiva integral y vectorial no se permite evidenciar la estructura geométrica de un fenómeno físico, porque este formalismo matemático solo resalta aspectos cuantitativos, es decir, muchos fenómenos naturales pueden ser expresados en forma de ecuaciones diferenciales, en el caso más sencillo, estas ecuaciones diferenciales se resuelven con el cálculo integral para obtener un resultado final. En el análisis vectorial, es importante el uso de los operadores como: divergencia, rotacional, gradiente, laplaciano y los teoremas clásicos como: Gauss, Green y Stokes. Este conjunto de operadores y teoremas son importantes y útiles, para describir y solucionar problemas de fenómenos físicos; por ejemplo el estudio de las ecuaciones de Maxwell, la ecuación de calor, ecuación de continuidad y vorticidad de la mecánica de fluidos. Pero estas ecuaciones no son tan claras en su sustentación geométrica y al establecer las diferencias conceptuales existentes entre magnitudes que expresen intensidad, flujo y densidades; con su enfoque convencional o usual del cálculo integral y vectorial.

En los textos introductorios de mecánica de fluidos (Ayneto Gubert, Xavier; Ferrer Balles, Miquel, 2012) tradicionalmente se hace uso de las herramientas que brindan el cálculo integral y vectorial para la descripción formal de los fenómenos físicos de la mecánica de fluidos; pero el uso de ésta hace monótona la manipulación de las ecuaciones que rigen los fenómenos que estudian la mecánica de fluidos; asimismo las nociones geométricas no son lo suficientemente evidentes.

- **Pregunta**

¿De qué manera las formas diferenciales y su análisis permiten comprender conceptos geométricos y físicos desde ecuaciones de mecánica de fluidos?

0.2 METODOLOGÍA

Para realizar este trabajo de grado se tomó como metodología el método de deducción, que es el razonamiento que parte de un marco general de referencia para ir a un particular, es decir, parto de una ley general o unas propiedades, donde las aplico en un caso particular.

Este trabajo es realizado y orientado a la construcción académica personal, donde busca y estudia otras alternativas o herramientas matemáticas para tener una mejor comprensión de un fenómeno físico en particular; desde el estudio de algunas ecuaciones de la mecánica de fluidos.

En este orden de ideas podemos decir:

- Se hace un estudio del cálculo de las formas diferenciales, conociendo sus propiedades, características conceptuales y matemáticas (geométrica) para emitir un razonamiento y así obtener una conclusión de ese fundamento matemático.

Se hace un barrido de los antecedentes donde se trabajan aplicaciones de la física utilizando formas diferenciales para una mejor comprensión de esta herramienta matemática.

0.3 ANTECEDENTES

El uso de las formas diferenciales ha despertado gran interés en los estudiantes de licenciatura en física e ingeniería, por lo cual se han hecho monografías y artículos relacionados en la mecánica clásica y electromagnética. Por esta razón resaltamos los siguientes trabajos para el desarrollo de esta monografía:

La monografía *Contextualización de las ecuaciones de Maxwell empleando formas diferenciales*, de Raul Eduardo Moreno Peña asesor: Maria Mercedes Ayala. Línea de profundización enseñanza de las ciencias desde una perspectiva cultural. Universidad Pedagógica Nacional de Colombia, 2008. Y *El uso de las formas diferenciales en la enseñanza de la teoría de campos electromagnéticos, ley e Ampere-Maxwell y ley de inducción de Faraday*. Nelson Javier Torres, Asesor: Isabel Garzón. Universidad Pedagógica Nacional .2008.” Representan un análisis de correspondencia entre la teoría electromagnética, sus leyes y sus formas geométricas de representación desde las formas diferenciales. La cual fue un gran aporte para la comprensión teórica de las formas diferenciales y también a la identificación de nuevos autores, como el artículo “Teaching electromagnetic field theory using differential forms. Karl F. Warnick, Richard H. Selfridge, Member , IEEE, and David V. Arnold. Department of Electrical and Computer

Engineering Brigham Young University.1997.”Donde se hace una comparación del uso de las formas diferenciales y calculo vectorial, la cual fue muy pertinente para demuestra que hay otro lenguaje matemático para enseñar las teorías físicas.

También encontramos la monografía “Presentación de la mecánica Hamiltoniana con formas diferenciales, estudio de caso: el péndulo esférico. John Barragan, asesor: Maria Mercedes Ayala, Jose Francisco Malagon. Universidad Pedagogica Nacional.2005. Donde demuestra la importancia de la geometría diferencial y las formas diferenciales en la descripción fenomenológica de un sistema mecánico, la cual tiene un gran valor en el estudio matemático de las formas diferenciales. También resaltamos desde la formación matemática la monografía “Tensores y formas diferenciales: Una herramienta cualitativa para el análisis geométrico del efecto Meissner. Mauricio Rodríguez, asesor:Yesid cruz . Universidad Pedagógica Nacional, 2010.”

0.4 OBJETIVOS

- **Objetivo general**

Analizar la representación geométrica de las ecuaciones de continuidad y vorticidad, de la mecánica de fluidos, a través de las formas diferenciales. Como un enfoque alterno al estudio de la mecánica de fluidos.

- **Objetivos específicos**

- Estudiar el cálculo de las formas diferenciales desde el conjunto de formas: 1 formas, 2 formas y 3 formas, y operadores diferenciales e integrales.
- Indagar sobre la teoría de mecánica de fluidos en las ecuaciones de continuidad y vorticidad.
- Averiguar las ecuaciones desde una perspectiva vectorial y su aporte geométrico de los operadores diferenciales y operadores clásicos.
- Analizar las ecuaciones desde las formas diferenciales, dando importancia al aporte geométrico y conceptual de las magnitudes físicas de la mecánica de fluidos.

INTRODUCCIÓN

Las formas diferenciales son una herramienta matemática, con la cual calculamos cantidades que pueden ser integradas. Donde encontramos objetos matemáticos como 0-formas, 1-formas, 2-formas, 3-formas, producto exterior y derivada exterior. El uso de las formas diferenciales generaliza la formulación convencional del cálculo integral y vectorial, en el que se contemplan funciones reales de variable real, funciones escalares de varias variables y campos vectoriales; que son necesario para resolver algunos fenómenos físicos, en particular en la mecánica de fluidos, como: las ecuaciones de continuidad y vorticidad representadas desde la forma diferencial ver el ejemplo. Es decir, las formas nos permite evidenciar y sustentar la estructura geométrica y conceptual: de teoremas, operadores clásicos y funciones reales de variable real.

Ecuación de continuidad	Ecuación de vorticidad
$\frac{d\rho}{dt} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$	$\vec{\omega} = 2 \cdot \vec{\Omega}$

El cálculo de las formas diferenciales, es utilizado para el estudio de la geometría diferencial, topología y diversos campos de la física como en: la termodinámica, electromagnetismo, la mecánica analítica y la teoría de la relatividad. Porque las formas tienen un comportamiento cómodo y flexible que permite sustentar la estructura geométrica del formalismo matemático de las teorías físicas.

En este caso el estudio de la teoría de la dinámica de fluidos, se encuentra matemáticamente formalizada desde una perspectiva integral y vectorial; Es decir, la descripción matemática del estado de un fluido en movimiento se efectúa con la ecuación de continuidad, ecuación de Bernoulli, ecuación fundamental de la hidrostática y vorticidad. Estas ecuaciones están fundamentadas desde el formalismo Euleriano, y a su vez este formalismo permite la descripción del movimiento de un fluido compresible no viscoso. Pero su formalismo matemático no es claro en evidenciar la estructura geométrica de estas ecuaciones para la descripción de un fenómeno físico de la mecánica de fluidos (Karl F. Warnick, 1997). Al no permitirse dar una clara noción geométrica y establecer una diferencia conceptual de magnitudes físicas que manifiesten intensidad, flujo y densidades, se hace importante el uso de otra alternativa como las formas diferenciales, que son necesarias para resaltar los componentes geométricos y aclarar las diferencias conceptuales de las magnitudes físicas.

En la búsqueda de alternativas en la enseñanza de la física encontré el trabajo de electromagnetismos realizado por K.Warnick, R.Selfr y D. Arnold del departamento de ingeniería física y computacional de la Brigham Young University, donde presentan las

ecuaciones de Maxwell de una manera distinta, en el artículo “ Teaching Electromagnetic Field Theory Using Differential Forms” planteando una diferencia conceptual de magnitudes físicas y una visión geométrica de las ecuaciones de Maxwell desde el uso de las formas diferenciales que ayuda al estudiante a una mejor comprensión de los principios de la teoría de electromagnetismo.

Apoyado o motivado en el artículo anterior, esta monografía propone hacer una interpretación de dos ecuaciones de la mecánica de fluidos: ecuaciones de continuidad y vorticidad, desde las formas diferenciales. Que permita mostrar a los estudiantes de licenciatura en física e ingeniería, una noción geométrica que revele claramente una diferencia en las magnitudes físicas; es decir, las imágenes o gráficas de las formas diferenciales ayudarán a los estudiantes a entender o reconocer los conceptos de la teoría de la dinámica de fluidos.

1. Capítulo

GEOMETRÍA Y FÍSICA: LA IMPORTANCIA DE LAS FORMAS DIFERENCIALES.

Cuando se estudia la mecánica de fluidos, se encuentran ecuaciones matemáticas que describen diversos fenómenos físicos en la naturaleza, las cuales están acompañadas de los conceptos y magnitudes que aclaran teóricamente estos fenómenos o problemas que se encuentren en el entorno. Es evidente la importancia de las matemáticas en el uso de la física, para poder demostrar veracidad o error de las hipótesis planteadas en las teorías de un fenómeno físico. Esto se observa en la utilización de la matemática, que durante mucho tiempo ha estado en la explicación del mundo físico.

“Durante miles de años las matemáticas crecieron de una manera tangible” (Zaslow, 2005) Donde físicos como Isaac Newton y Albert Einstein hicieron grandes avances en la física gracias a introducir y expandir el cálculo diferencial y la geometría diferencial de su época. Esto demuestra que las matemáticas son muy importantes en la búsqueda de respuestas en la naturaleza.

1.1 LA RELACIÓN DE LA GEOMETRÍA Y LA FÍSICA

La geometría como una disciplina organizada fue fundada alrededor de los años 600 a. C., en la Grecia Clásica. En general, los griegos orientaron las matemáticas para deducir cuestiones y problemas sobre la naturaleza, y por ello se fundamentaron en la propia naturaleza. Durante el periodo comprendido entre los años 600 y 300 a. C., los filósofos griegos dieron a las matemáticas en general el rango de ciencia, construyeron la estructura de la geometría Euclides, basada en la abstracción y la demostración deductiva, y la aplicaron a la comprensión y entendimiento de nuestro universo. (Miranda, pág. 1)

De lo anterior podría decir que la matemática (geometría), ha sido desde un principio de gran importancia para las personas, en la explicación del entorno y, que a su vez la

pretensión de explicar el entorno, hace parte del campo físico en cuanto a el estudio de teorías y los comportamientos de la naturaleza; por medio de observaciones, descripciones e hipótesis que luego deben someterse a un método científico y la matemática desde una descripción simbólica de los fenómenos físicos a partir del razonamiento lógico. Lo que quiere decir que la matemática tiene una relación muy directa con la física, demostrado en los trabajos de Albert Einstein y James maxwell. Como se puede ver en las siguientes ecuaciones de descripciones de fenómenos físicos en la cosmología y electromagnetismo de la naturaleza.

Albert Einstein: Ecuación de campo de Einstein	James Maxwell: Ley de Ampere
$G_{uv} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{uv}$	$\nabla \times B = \mu_0 J + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$

En las ecuaciones anteriores se puede evidenciar que utilizan un formalismo matemático distinto para poder describir los fenómenos físicos. En el caso de las ecuaciones de campo de Einstein requiere de la geometría diferencial donde “las ecuaciones de campo de Einstein permiten describir la geometría del espacio-tiempo, determinada por la distribución de materia en el universo.” (Tejeiro Sarmiento, 2005, pág. 79) Y en la ecuación de la ley de Ampere requiere del cálculo diferencial y vectorial (Karl F. Warnick, 1997)

Para tener una mejor comprensión de la relación e importancia de la física y la matemática, podemos retomar el ejemplo de la ecuación de la ley de Ampere, donde se muestra una representación gráfica o imagen vectorial ver *figura 1*.

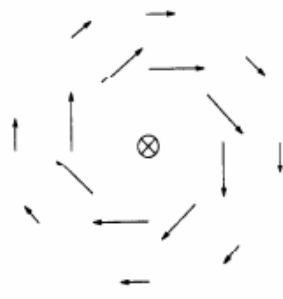


Figura 1. Ley de Ampere¹

Se observa que las flechas (vectores) son el campo magnético que gira alrededor del flujo de corriente, cuando las flechas están cerca del eje, es mayor la intensidad magnética y si están lejos del eje, es menor la intensidad magnética.

La anterior gráfica ilustra por medio de vectores, la circulación de intensidad del campo magnético en un contorno cerrado; la cual es producida por una corriente eléctrica;

¹ (Karl F. Warnick, 1997)

(D.Gignoux, 2005, pág. 22) presentando una mayor relación e importancia de las matemáticas con la física, propósito de esta monografía.

1.2 FORMAS DIFERENCIALES

Las formas diferenciales surgieron en los trabajos del francés Élie Joseph Cartan, de ello podemos decir que el trabajo de la forma *pfaffianas* es una contribución de una forma diferencial, que se puede representar en las diferenciales de las variables de estado² usadas en la termodinámica. Gracias a esta gran contribución se abrieron nuevas investigaciones en la geometría diferencial y la física en la descripción y comprensión de algunos fenómenos físicos. (Cartan , 1899).

El cálculo de las formas diferenciales lo podemos catalogar como un eficiente sistema para manipular: funciones, vectores, formas diferenciales y tener imágenes geométricas. (Burke, 1985) Personalmente considero que el uso de este cálculo, brinda la estructura geométrica e imágenes que ayudan a aclarar conceptos y magnitudes aplicadas a la física.

Por otro lado, en el uso de la formulación matemática de ecuaciones que describen un fenómeno físico, como las ecuaciones de electromagnetismo de Maxwell e incluso las ecuaciones de continuidad y vorticidad; es necesario el uso de teoremas para la interpretación de la estructura de las ecuaciones. En este sentido se conoce que estos teoremas se trabajan o son estudiados en el cálculo vectorial, pero existe otra forma de interpretar esta misma información que es desde el cálculo de las formas diferenciales, como lo menciona el libro “Cálculo Vectorial”:

La teoría de las formas diferenciales proporciona una manera conveniente y elegante de expresar los teoremas de Green, Stokes y Gauss. De hecho, el uso de formas diferenciales muestra que todos estos teoremas son manifestaciones de una sola teoría matemática subyacente y proporciona el lenguaje necesario para generalizarlos a n dimensiones. (Jerrold E, Marsden, Tromba Antony, 1991)

A continuación comenzaremos a introducir los conceptos de las formas diferenciales.

1.2.1 1- formas.

² **variable de estado:** es una magnitud física macroscópica que caracteriza el estado de un sistema en equilibrio, y que no depende de la forma en que el sistema llegó a dicho estado. (Martín Blas & Serrano Fernández)

Comúnmente vemos que un plano, es una función de tres variables, (necesitan de los tres planos de referencia para ubicarse en el espacio) para el caso cartesiano (x, y, z) hace referencia a las coordenadas de un punto, en donde se puede variar dos de ellas, manteniendo fijo la tercera; así nos movemos sobre una superficie de planos.

Para este caso observamos que si en un punto en el espacio con las coordenadas (x, y, z) , variamos dos de ellas x, y manteniendo fijo a $z = const$, notamos que la superficie $z = const$ es un plano horizontal. Lo anterior, enlaza que se pueden tener planos con valores de x , y o z constantes o una combinación lineal de las tres variables. (Departamento de física aplicada III univesidad de sevilla , 2007)

Para el anterior caso, se muestra en la (figura 2a), una representación matemática de familia de planos de coeficientes contantes, que sería la siguiente: $5dx + 8dz$ observando en ésta expresión, la independecia lineal de sus variables diferenciales que serían sus bases de coordenadas y los coeficientes constantes. Sin embargo, encontramos casos en donde los coeficientes pueden ser funciones de posición en el espacio, lo cual indicaría que las superficies no son planas y que las distancias entre ellas no serán constantes, ya que dependerán de la función (figura 2b). Entonces matemáticamente se escribiría la 1-forma de este modo: $\alpha_1(x, y, z)dx + \alpha_2(x, y, z)dy + \alpha_3(x, y, z)dz$ (Moreno Peña, 2008). (Donde α_1, α_2 y α_3 son funciones constantes).

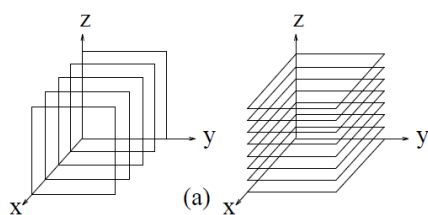


Figura2a

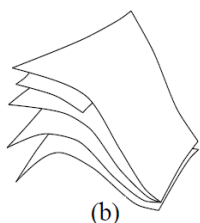


Figura 2b

Figura 2. 1- formas³

Se puede observar que las 1-formas diferenciales que tengan el coeficiente mayor, serán quienes tengan mayor número de planos por unidad de longitud. Esto lo podemos relacionar con la intensidad de campo.

Identificamos que algunas formas diferenciales no representan superficies planas si no superficies curvas, como es el caso, en la utilización en coordenadas esféricas y cilíndricas.

³ (Karl F. Warnick, 1997)

Para aclarar mejor la Figura 2.a) percibimos que se muestra la 1-forma $\alpha_{(x,y,z)}dx$, con las superficies perpendiculares al eje x, y la 1-forma $\alpha_{(x,y,z)}dz$, con superficies perpendiculares al eje z. teniendo en cuenta que las funciones que acompañan los diferenciales son constante. Pero la Figura 2.b) muestra una 1-forma más general, donde la familia de superficies son curvas por la función que acompaña el diferencial o la base coordenada.

Por otro lado notaremos la relación de la 1-formas y los vectores⁴, en cuanto a que las 1-formas tienen tres variables que especifican una familia de superficie y un vector tiene tres componentes independientes, características que hacen posible asignarle una orientación a las superficies de una 1-forma ya que los vectores se acoplan a esta función, en ese orden de ideas las 1-formas y los vectores tienen una relación dual, es decir que ambos pueden especificar la misma magnitud como se muestra en la *figura 3*. Donde las funciones lineales $\alpha_{(x,y,z)}$, $\beta_{(x,y,z)}$ y $\sigma_{(x,y,z)}$ representan una 1-forma y \vec{u} , \vec{w} y \vec{v} representa los vectores, estas dos están presentadas en 3 dimensiones.

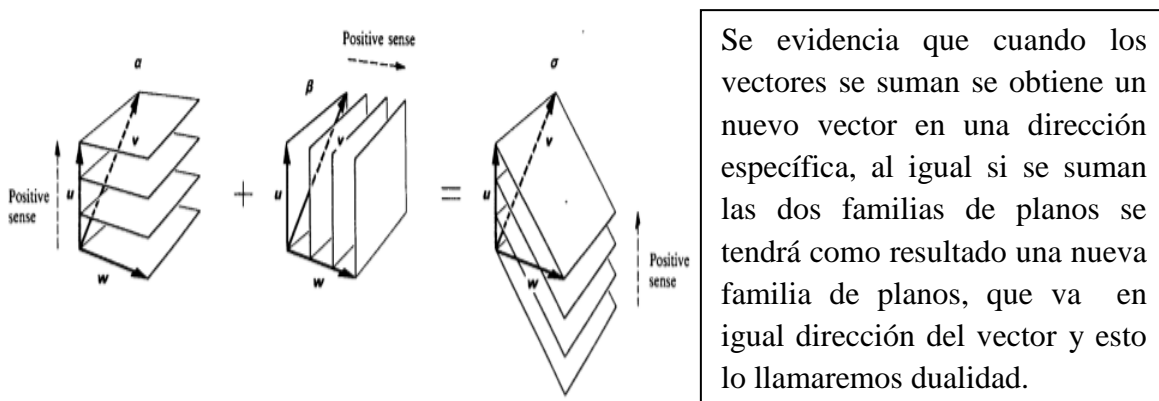
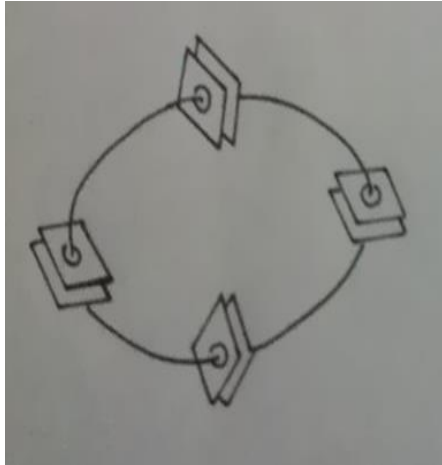


Figura 3. Dualidad⁵

Ahora para conocer el número de superficies distribuidas en una región del espacio, es necesario establecer un camino a través del cual se puede contar, es de decir, saber cuántos planos de una 1-forma hay en una región del espacio. Para ello, estos últimos deben ser atravesados por una trayectoria como se muestra en la *figura 4*. De tal forma que al contar sobre la trayectoria tengamos el número total de planos atravesados.

⁴ Cuando se habla de que las n-formas y los vectores tienen una relación, es que tienen una cualidad distinta en una misma cosa; es decir dualidad.

⁵ (JA Wheeler; C. Misner; KS Thorne, 1973, pág. 57)



Se puede observar que una curva atraviesa a esta familia de superficies (1-forma). Esto lo podemos relacionar con la circulación del campo de velocidad del fluido.

Figura 4. Integración de 1-forma

Entonces las 1-formas deben ser operadas y pensadas en relación con la trayectoria. Estas últimas deben ser integradas sobre curvas, para que de esta forma halla coherencia en el uso de las 1-formas en la caracterización de cantidades físicas que se define en relación con una trayectoria y la integración de éstas sobre líneas. (Burke, 1985)

Numero de planos atravesad

$$= \int_{\text{Trayectoria}} \alpha_1(x, y, z)dx + \alpha_2(x, y, z)dy + \alpha_3(x, y, z)dz^6$$

1.2.2 2- formas.

Hasta el momento se han explicado las 1-formas, caracterizando sus imágenes como su representación geométrica. Sin embargo las 1-formas no son suficientes para caracterizar de manera completa el estado de los fenómenos de la mecánica de fluidos del espacio, dado que, necesita de otras magnitudes físicas como los flujos y la dirección u orientación de la vorticidad en fluido; que son definidos en relación con áreas. Por tal razón es importante buscar formas alternas de representación de estas magnitudes.

Para poder obtener una familia de 2-forma, se debe cumplir con las reglas que exige el producto exterior⁷, por ejemplo al operar mediante el producto exterior las 1-formas:

$A = 2dx$ y $B = 2dy$ se obtiene.

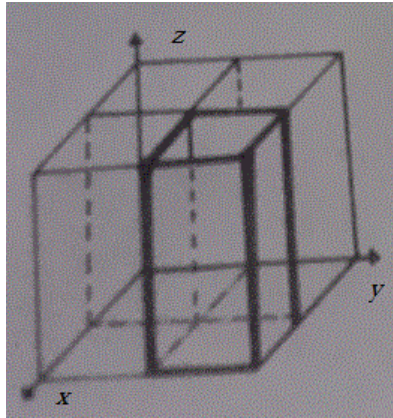
$$A \wedge B = (2dx) \wedge (2dy)$$

$$A \wedge B = 4dx \wedge dy$$

⁶ (Moreno Peña, 2008)

⁷ Demostración en anexos 1

Podemos evidenciar que esta cantidad está compuesta por dos familias de planos dx y dy , y por esta razón recibe el nombre de 2-forma, con ella se hace referencia a la orientación o dirección de los flujos y a la vorticidad. Gráficamente las 2-formas son intersecciones entre familias de superficies *ver figura 5*. Por ejemplo si intersectamos la 1-forma dx con la 1-forma dy obtendremos tubos que se orientan en la dirección de \hat{z} o $-\hat{z}$ según sea la dirección del flujo o vorticidad estudiada.



Se podrá observar que en la intercepción de planos mediante los planos del eje X y el eje Y, evidenciaran una construcción de tubos rectos. Esto está relacionado con la dirección y orientación del flujo, como en el caso de vorticidad.

Figura 5. 2-forma

Evidenciando el ejemplo anterior y su resultado $A \wedge B = 4dx \wedge dy$ el coeficiente 4 es una función constante de posición e indicara el espacio entre los tubos, el valor del coeficiente será proporcional a la densidad de tubos. En general las 2-formas no tienen forma definida, además se debe tener en cuenta que los tubos se pueden curvar, o pueden converger o divergir en un lugar específico de acuerdo a los coeficientes ya que si estos son funciones de posición en el espacio, la densidad de tubos por unidad de superficies cambia. (Karl F. Warnick, 1997)

Ahora, si integramos una 2-forma sobre una superficie debe proporcionar la cantidad de tubos que atraviesan dichas áreas y, de acuerdo a la regla de la mano derecha se encontrara la orientación del área, cuando se integra se compara la orientación del área de integración con la de dos tubos, si las orientaciones son las mismas, entonces la integración será positiva. Mientras que si las orientaciones son diferentes entonces el signo de la integración será negativo. (Burke, 1985, págs. 194,275) Para ello, en la Figura 6 podemos evidenciar el resultado de una integración de una 2-forma.

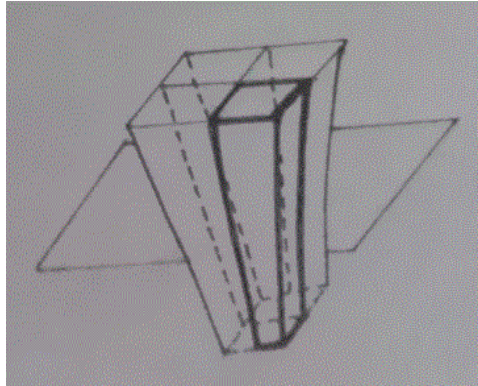


Figura 6. Integral de 2-forma

Flujo a través la superficie

$$= \oint_{\text{Superficie}} \beta_1(x, y, z) dy \wedge dz + \beta_2(x, y, z) dz \wedge dx + \beta_3(x, y, z) dx \wedge dy^8$$

1.2.3 3- formas

Hasta ahora se ha entendido el producto de exterior de una 1-forma, que arroja como resultado una 2-forma. Ahora sigue construir por medio del producto exterior la representación geométrica de una 3-forma, que se obtiene desde las formas representadas gráficamente como 1-formas dz y la 2-formas $dx \wedge dy$ ver Figura, es decir que los planos de la 1-forma dz siempre están orientados en el sentido de los tubos de flujo de la 2-forma $dx \wedge dy$, así al superponer los tubos y el conjunto de superficie de la 1-forma dz se forman cajas como se muestra en la Figuras 8, de este modo se puede tener una región del espacio confinada dentro de ella. Matemáticamente esto es equivalente a encontrar el producto exterior entre la 1-forma dz y una 2-forma $dx \wedge dy$.

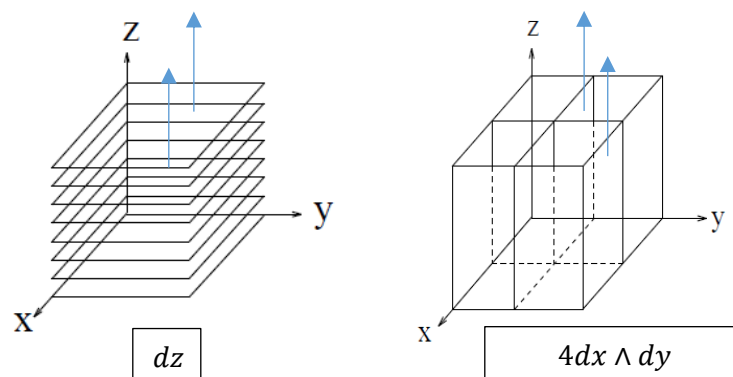
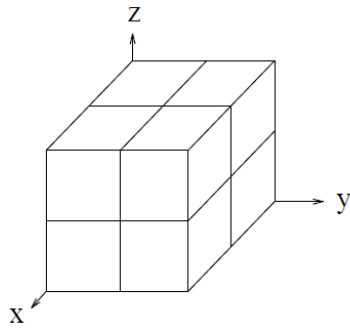


Figura 7. Orientación de la 1-forma y 2-forma⁹

⁸ (Moreno Peña, 2008)

⁹ (Karl F. Warnick, 1997)



Se puede observar que la intersección de planos en el eje **x**, eje **y** y eje **z**, construye una caja cerrada, lo cual podemos relacionar con la densidad del fluido.

$$4dx \wedge dy \wedge dz$$

Figura 8. 3-forma

Si observamos la *gráfica 8*, se nota que se tienen tres familias de superficies dx , dy y dz las cuales se intersectan formando cajas. En la cotidianidad las cajas nos sirven para contener cosas, de tal forma que dos cajas se diferencian entre sí por el volumen que encierra y por lo que hay en su interior. Esto es, las 3-formas sirven para encerrar volúmenes de cantidades distribuidas en el espacio y representan densidades.

Para poder obtener una familia de una 3-forma, se aplicará el producto exterior como se muestra en el siguiente ejemplo:

$A = dx \wedge dy$ y $B = dz$ se obtiene.

$$A \wedge B = (dx \wedge dy) \wedge (dz)$$

$$A \wedge B = dx \wedge dy \wedge dz$$

Del resultado anterior del ejemplo de una 3-forma, se puede evidenciar que los tubos de la 2-forma $A = dx \wedge dy$ orientados en la dirección de la 1-forma $B = dz$, ambos forman una caja

$A \wedge B = dx \wedge dy \wedge dz$ como se muestra en la Figura 9.

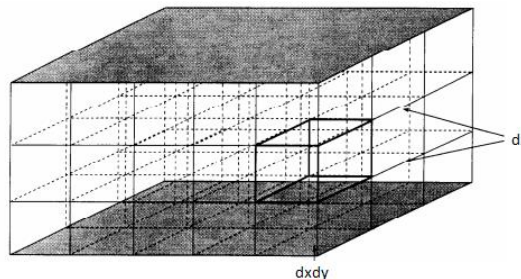


Figura 9. Integración de una 3-forma¹⁰

¹⁰ (Karl F. Warnick, 1997)

Ahora si integramos una 3-forma, podemos obtener el número de cajas, como lo vemos en este caso “la integral de una 3-forma sobre un volumen es el número de cajas dentro del volumen.” (Karl F. Warnick, 1997)

$$\text{Número de cajas en el volumen} = \oint_{\text{volumen}} \sigma dx \wedge dy \wedge dz^{11}$$

1.2.4 Derivada exterior

Con la presentación de las formas diferenciales en el capítulo anterior, encontramos un operador llamado derivada exterior. En la geometría diferencial se afirma:

Si $\sigma = \sum f_i dx_i$ es una 1-forma en E^3 , la derivada exterior de σ es la 2-forma $d\sigma = \sum f_i dx_j \wedge dx_i$, la derivada exterior general es la linealidad (O’Neill, 1982).

Para aclarar un poco el desarrollo de la derivada exterior, usaremos un ejemplo, en el cual tenemos una 1-forma que se encuentra en 3 dimensiones $\sigma = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3$ y aplicamos el operador d a 1-forma y obtenemos lo siguiente $d\sigma = \left[\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \right) dx_1 \wedge dx_3 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \right) dx_2 \wedge dx_3 \right]^{12}$, observamos que esta expresión es una 2-forma en 3 dimensiones.

Entretanto en el Artículo del profesor (Karl F. Warnick, 1997) se plantea que la “derivada exterior de una 1-forma es el análogo al operador vectorial rotacional”. De modo que la 2-forma resultante de la diferenciación de la 1-forma φ especificada en la afirmación de Barret O’Neil corresponde al rotacional del vector dual $\vec{\varphi} = \vec{V} \times \vec{v}$.

Se pone de manifiesto que la diferenciación de formas diferenciales muestra una forma de relación entre cantidades que especifican intensidades y las que expresan flujos en primera instancia; y en un segundo momento relaciona los flujos con las densidades. Es decir, al aplicar la derivada exterior a una 1-forma encontramos una representación geométrica que brinda una imagen de tubos, hechos de la intersección de planos, esto es por motivo a la coordenada base de la 2-forma. En estas dos formas se podrá relacionar la dirección existente en el flujo, dependiendo el fenómeno o el caso que se analizara; en nuestro caso la 2-forma, evidencia el rotacional de la 1-forma diferenciada del campo del fluido, donde se podrá tener una mejor aclaración en el segundo capítulo.

En una segunda instancia tenemos que al aplicar la derivada exterior a una 2-forma, se tendrá como resultado una 3-forma, en este caso, se podrá relacionar, con el operador y teorema de la divergencia; que se estudia en el cálculo vectorial. De tal manera que al

¹¹ (Moreno Peña, 2008)

¹² Demostración en anexos 2

utilizar la derivada exterior a la 2-forma, se tendrá una imagen geométrica de cajas, que pueden estar relacionadas con densidad o cantidades de escalar. Ahora desde el teorema de la divergencia se podrá evidenciar el número de cajas en el volumen, así como se menciona en la integración cuando se define una 3-forma. Gracias a este teorema de la divergencia desde la mirada de las formas diferenciales podemos interpretar que los tubos de una 2-forma pueden ser convergentes o divergentes de las cajas que son representadas en una 3-forma. Precisamente el teorema hace esta relación de superficie y volumen.

También es importante evidenciar que la derivada exterior brinda la posibilidad de establecer si un campo es conservativo o no conservativo, lo cual ayudara a la interpretación de las ecuaciones estudiadas.

Por lo tanto, en términos más generales tenemos que las operaciones básicas como: gradiente, rotacional y divergencia, planteadas en el análisis o cálculo vectorial, son los duales de la diferenciación de una 0-forma, 1-forma y 2-forma correspondientemente. Tenido en cuenta la importancia de los operadores y teoremas para el desarrollo de las ecuaciones desde un ámbito geométrico y conceptual; se podrá pasar al siguiente paso: comprender el sistema físico que se trabaja en este documento y los conceptos para una mejor comprensión en las ecuaciones de vorticidad y continuidad.

2. Capítulo

FORMULACIÓN CLÁSICA EULERIANA: ECUACIÓN DE CONTINUIDAD Y VORTICIDAD

El objetivo principal del este capítulo es exponer la importancia de la derivada exterior en el desarrollo de las ecuaciones de la mecánica de fluido, y los principios básicos del movimiento de los fluidos en la comprensión del método Euleriano y el volumen de control. De esto demostramos la importancia de desarrollar estas ecuaciones con la herramienta matemática del cálculo de las formas diferenciales, para así poder visualizar las imágenes geométricas que representa las formas diferenciales en la caracterización de las ecuaciones de vorticidad y continuidad y su fenomenología, desde la interpretación de los conceptos que tiene estas ecuaciones, teniendo en cuenta que las ecuaciones se abordan desde el ámbito vectorial para así mostrar una diferencia.

2.1 FORMULACIÓN EULERIANA

El método Euleriano, es una forma de estudiar el comportamiento de una partícula, desde su parte espacial y sus variables de estado, este método es muy acogido en la mecánica de fluidos puesto que, la utilización de dicho método o formulación de Euler, esta propuesto para facilitar el análisis del movimiento de los fluidos ideales. De esta manera se comprenderán las ecuaciones de vorticidad y continuidad, en las que se propone que no se siga cada partícula, sino que se observen al pasar por un determinado punto en el espacio. De aquí que el método selecciona una especie de volumen de control¹³ finito para encerrarlo y desde ahí estudiar el comportamiento del movimiento.

La anterior formulación Euleriana, es la que mejor que se adapta a casos prácticos ya que se manejan el tiempo y posición. Para ello se presenta una ecuación que sirve como modelo en la identificación de variables independientes (ver tabla); En este caso la variable independiente es t . Lo que apoya en la resolución de los problemas al encontrar el campo de velocidad; en el planteamiento de las ecuaciones de mecánica de fluido. Cosa que no es

¹³ “Se define el volumen de control como una zona del espacio delimitada por una superficie cerrada, o “superficial de control” (Ayneto Gubert, Xavier; Ferrer Balles, Miquel, 2012, pág. 206)

posible en la formulación Lagrangiana, ya que esta hace más compleja la problemática matemática en casos prácticos que en la descripción de movimiento de cada partícula se abordan.

Ecuación de continuidad de los fluidos
$\frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot J = 0$

De acuerdo a lo anterior, se empezarán a trabajar los casos Eulerianos y Lagrangianos, esto desde la observación del cambio de magnitudes y el cálculo de las derivadas en cada uno de ellos. En el caso Lagrangiano, vemos que la derivada es simplemente la derivada temporal y en el caso Euleriano, que la derivada no es tan inmediata, es decir, que la descripción de cómo cambia una magnitud del campo de fluido, se debe a la independencia de las variables de tiempo y posición del estudio de ese mismo campo.

Para lograr esto, veremos la relación y diferenciación conceptual que existe entre el método convencional y el método que propongo.

El uso de la formulación Euleriana, siempre ha estado representando unas características de cómo se comporta una partícula que en el instante t está ocupando una posición x de un fluido, esto con apoyo a las herramientas que brinda el análisis vectorial. Todo esto, está muy ligado al estudio de la cinemática y dinámica de los fluidos, como es en la identificación de campo de velocidad, vorticidad e intensidad de flujo de materia; también en el uso del análisis vectorial se hace posible la representación geométrica de imágenes que identifican por medio de vectores todas estas magnitudes físicas, lo cual es un gran aporte en la aclaración de conceptos que se abordan en la mecánica de fluidos; sin embargo, hay otra perspectiva para analizar la mecánica de fluidos, que se basa en la estructuración geométrica de dichas magnitudes, sin perder la información del método Euleriano.

Con ello observamos que la representación convencional (análisis vectorial) de la mecánica de fluidos siempre está geométrizada por medio de vectores, lo cual como se ha planteado en el capítulo anterior, no ha logrado evidenciar claramente las diferencias que tienen las magnitudes que se abordan en casos específicos. Pero si lo analizamos desde las formas diferenciales, veremos que la estructura geométrica ayuda a identificar diferencias de magnitudes, como lo abordaremos posteriormente desde el uso de la 1-formas, que nos servirá para identificar campos de velocidad por medio de familias de planos, las 2-formas para identificar flujos e intensidad por medio de tubos y las 3-formas para identificar densidades por medio de cajas.

Por lo anterior, se propone analizar la ecuación de continuidad, desde el ámbito matemático, resaltando el uso del análisis vectorial y la propuesta de las formas diferenciales, para apreciar las imágenes geométricas, y así tener una mejor comprensión en los conceptos y magnitudes.

2.2 ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

La ecuación de continuidad, no se abordara con ejemplos específicos de fenómenos presentes en la naturaleza, como se desarrolló en el caso de la ecuación de vorticidad. Sino que se centrara en la comparación de las dos perspectivas geométricas: análisis vectorial y formas diferenciales. Dado a que el primer análisis evidenció la relación que tienen las formas diferenciales con la mecánica de fluidos, que para esta ecuación cambiaria en cuanto al uso de operadores y teoremas, pero que no afecta de manera trascendental la proyección del trabajo.

2.3 ANÁLISIS DESDE LA PERSPECTIVA VECTORIAL Y DE LAS FORMAS DIFERENCIALES: ECUACIÓN DE CONTINUIDAD.

Ahora se realizara desde el análisis vectorial la definición de la ecuación de continuidad. Veremos entonces que en la ecuación en forma diferencial desde la perspectiva vectorial:

Ecuación de Continuidad
$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot J = 0 ,$

Se utiliza la operación binaria del producto punto, que se aplica para dos vectores o un operador diferencial con un campo vectorial, donde $J = \rho \vec{u}$ es la densidad del campo de velocidad del fluido, en otras palabras es el flujo de masa (Flujo másico). Utilizando el programa de modelación grafica mencionado anteriormente, Se representara la gráfica de un campo vectorial, que en este caso es el resultante del proceso matemático donde se presenta divergencia $\nabla \cdot J = 3\rho \frac{kg}{m^2 \cdot s}$.¹⁴

¹⁴ Demostración en anexos 5.

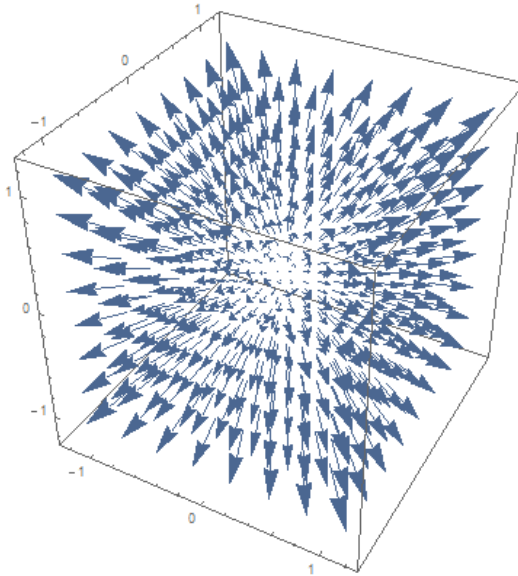


Figura 10 Divergencia¹⁵

Mediante la figura anterior, se observa que el campo sale de un cierto volumen. Esta cantidad que sale de este volumen se llamara flujo, en el caso de la ecuación de continuidad es el flujo másico.

También se podrá evidenciar que la operación de la divergía puede decirnos si el campo es conservativo o no conservativo; en el caso de los fluidos la divergencia puede comprobar si el flujo es incompresible o no. Si el flujo es incompresible entonces la densidad permanece constante durante todo el fluido cuando circula, en el otro caso no se cumpliría que la densidad fuera constante.

Además se puede evidenciar que en la ecuación se encuentra el siguiente término $\frac{\partial \rho}{\partial t}$, esto muestra como la densidad tiene una tasa variacional con el tiempo t , esto se formula en desde el método Euleriano que se explicó en el inicio de este capítulo. Ahora se verá el uso del teorema que demostrar si esta cantidad puede ser positiva o negativa.

De lo anterior podemos pasar a estudiar la ecuación de continuidad desde las integrales, utilizando el teorema de divergencia o de Gauss, con lo cual su resultado es mostrar que cantidad de materia sale o entra de un volumen específico, por medio que atraviesa una superficie cerrada. Como se evidencia en la siguiente ecuación:

$$\oint_{\text{superficie}} J \cdot ds = - \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{volumen}} \rho dv$$

¹⁵ Mathematica 10

Entendiendo la definición matemática de la ecuación de continuidad desde el análisis vectorial, ahora se definirá desde las formas diferenciales; con la cual se protagonizara la representación geométrica de las imágenes.

2.3.1 Formas diferenciales: Ecuación de continuidad.

Ya entendiendo el enfoque de la monografía pasamos a hacer el análisis y su representación gráfica de imágenes. Esta ecuación $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot J = 0$ se aborda mediante el sistema de coordenada cartesiana. Se podrá observar que $J = \rho \vec{u}$ está en términos vectoriales, donde su dual en 2-forma diferencial es $j = \rho x dy \wedge dz + \rho y dz \wedge dx + \rho z dx \wedge dy$ ¹⁶ esto establece que el flujo másico¹⁷ está representado por tubos que atraviesa una superficie cerrada. Si al flujo másico se le aplica la derivada exterior, se obtendrá como resultado una 3-forma $\rho = 3\rho dx \wedge dy \wedge dz$ ¹⁸. Esta forma diferencial representa imágenes de cajas y esta sería la densidad del fluido. **Ver figura 11.**

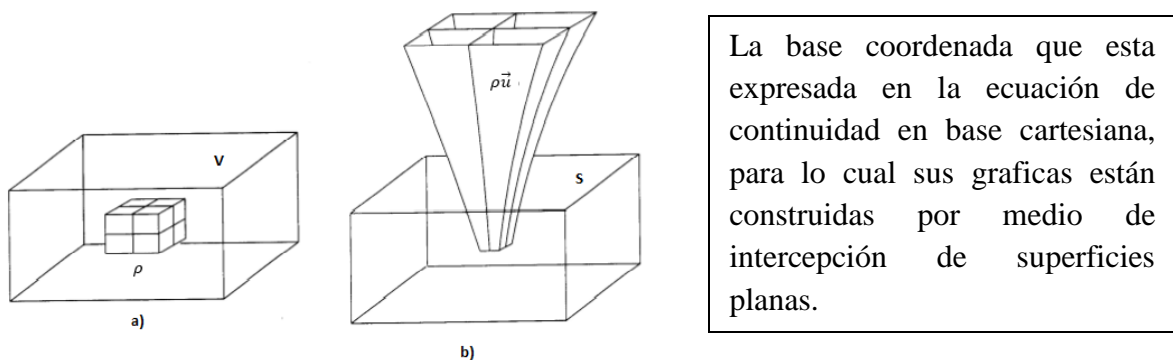


Figura 11. Representación geométrica de la ecuación de continuidad.¹⁹

Ahora se podrá ver en la figura, que la densidad se encuentra encerrada en un volumen de control. Teniendo en cuenta el teorema de la divergencia, veremos que la cantidad de cajas que se encuentra en el volumen de control es la misma cantidad de tubos de flujo másico que sale de ese volumen y se puede observar en la Figura 11 b). y en ella se evidencia que los tubos divergen al transcurrir el tiempo.

¹⁶ Demostración en anexos 6

¹⁷ Flujo másico: Es la tasa de flujo de masa de un sistema que pasa por un punto por unidad de tiempo. La tasa de flujo de masa se relaciona con la velocidad del flujo volumétrico. (Engineers edge solution by desing , 2000-2017)

¹⁸ Demostración en anexos 7

¹⁹ (Karl F. Warnick, 1997)

2.3.1.1 Interpretación Geométrica.

La **figura 11** se podrá interpretar la ecuación, pero primero se relacionara con un ejemplo: la ecuación de continuidad se puede evidenciar cuando fluye agua dentro de una manguera que es de forma cilíndrica, la manguera con su forma representaría el volumen de control, el fluido en este caso es el agua que tiene una densidad dentro de ese volumen de control, esto lo relacionamos con la **figura 11 a)**. Que la caja es la densidad ρ de materia del fluido que se encuentra en un volumen de control. Observamos que la siguiente **figura11 b)**. La relacionamos que el fluido de agua que sale sobre el área transversal de corte del cilindro de la manguera puede indicar que el flujo másico o de materia que está saliendo sobre la superficie de forma de tubos, estos tubos están formados por las cajas que son la densidad del fluido. Se puede observar que el fluido está disminuyendo porque sale entre la superficie y la densidad varia con el tiempo.

2.4 ECUACIÓN DE VORTICIDAD

Para entender el concepto matemático de vorticidad se deben evidenciar casos de fenómenos que se presenten en la naturaleza o en situaciones cotidiana, como el vórtice existente en: los vientos que rodean un tornado, un anillo de humo, un vaso de agua, y en la manipulación de un recipiente con agua que se hace girar. Ver Figuras 12,13 y 14. También hay otros casos donde se puede evidenciar la vorticidad, por ejemplo: el flujo laminar dentro de una tubería con una sección transversal constante, donde se evidencia que todas las partículas del flujo viajan muy rápido, paralelas al eje de la tubería y estacionarias junto a las paredes; podemos decir que el rotacional es cero en el eje y adquiere un valor máximo de cizallamiento o fuerza cerca de las paredes.



Figura 12. Vórtice en huracán²⁰

²⁰ (elbibliote.com)



**Figura 13. Vórtice en un anillo de humo²¹
agua²²**



Figura 14. Vórtice en un vaso de

El vórtice es considerado como un flujo turbulento²³ con un comportamiento de rotación con trayectoria cerrada. Como vórtice posee vorticidad, que se define de la siguiente manera: “la vorticidad es una medida de la rotación de una partícula de fluido (Yunus ACengel, pág. 144) específicamente en términos matemáticos la vorticidad es una medida que representa el doble de la velocidad angular o campo vectorial de velocidades; es decir, que una partícula que gira en un respectivo tiempo en una trayectoria irregular, puede medir el comportamiento de la velocidad angular de la partícula que conforma el fluido.

De lo dicho anteriormente, se pretende analizar la vorticidad, a partir de su fenómeno o también abordándolo desde un problema específico de vórtice, y así comprender el concepto desde las matemáticas, en este caso el uso convencional del cálculo vectorial y de la propuesta de esta monografía que son las formas diferenciales. Con relación a ello, he decidido tomar, un solo ejemplo aplicativo que será: la manipulación de un recipiente con agua que se hace girar. Con lo cual proyecto que se logre una mejor comprensión del tema.

²¹ (cazatormentas)

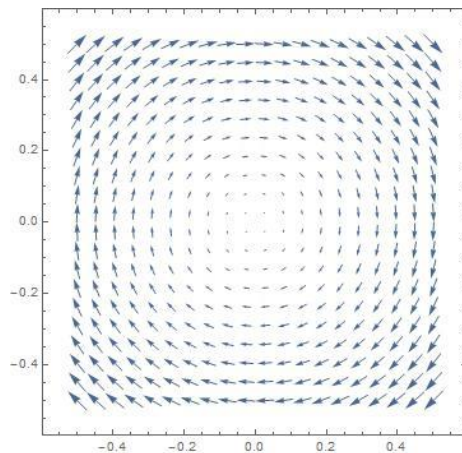
²² (vonno, 2010)

²³ Flujo turbulento : las partículas de fluido se mueve en trayectorias muy irregulares , originando un intercambio de cantidad de movimiento de una posición del fluido a otra, de manera semejante al intercambio de cantidades de movimientos moleculares (Valera, 2005)

2.5 ANÁLISIS DESDE LA PERSPECTIVA VECTORIAL Y DE LAS FORMAS DIFERENCIALES: VORTICIDAD

Previamente se definió y comprendió desde la teoría el concepto de vorticidad, por lo cual pasare a realizar la relación de lo anterior, desde el análisis vectorial.

Veremos entonces que en la ecuación de vorticidad $\vec{\omega} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{u}$, se utiliza la operación binaria del producto cruz, que se aplica para dos vectores o campos vectoriales, donde $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ es el operador y $\vec{u} = \rho u_y \hat{i} - \rho u_x \hat{j}$ es el campo de velocidades del fluido. Para lo cual usare el programa de software “Mathematica” que permite acceder a la representación gráfica del campo vectorial \vec{u} , que en este caso es el resultante del proceso matemático donde se representa el rotacional.



Se observa que el campo de velocidad del fluido en la representación de 2D y 3D gira hacia la derecha.

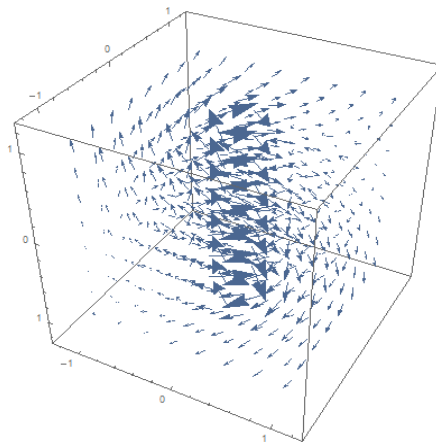
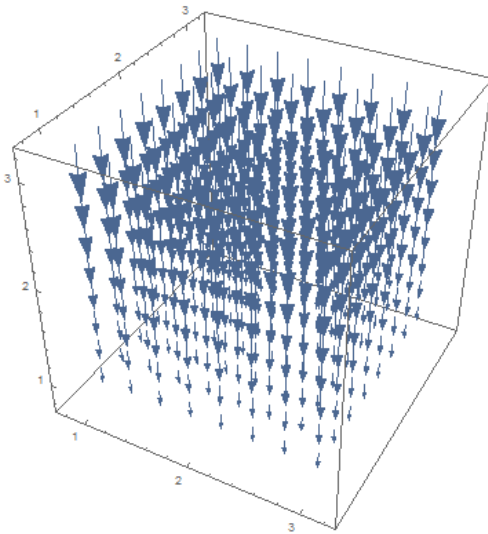


Figura 15. Campo vectorial \vec{u} en 2D y 3D²⁴

Mediante la representación visual, se observa que el campo está girando. También se puede especificar por el método de la mano derecha²⁵ que el campo puede ser positivo o negativo; en este caso la gráfica representa un vorticidad negativa de resultado $\vec{\omega} = -2\rho\hat{z}$.²⁶ Este resultado se obtuvo aplicándole el operador rotacional.



La figura especifica que la dirección del flujo es al sentido negativo, esto quiere decir que la vorticidad es negativa.

Figura 16. Dirección de la vorticidad²⁷

En el lenguaje matemático podemos identificar la vorticidad como el rotacional, esto implica que se podrá encontrar dos tipos de vórtice: El rotacional e irrotacional, es decir la velocidad de las partículas en un vórtice puede variar con la distancia del radio del eje de rotación de muchas maneras, sin embargo las ecuaciones de vorticidad son las siguientes:

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u} = -2\rho\hat{z} \{Vórtice rotacional\}$$

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u} = 0 \{Vórtice irrotacional\}$$

²⁴ Mathematica 10

²⁵ La regla de la mano derecha es una regla nemotécnica para orientar en el espacio un producto vectorial, o un sentido de giro. Nos dice que si estiramos la mano derecha con el pulgar hacia arriba, y el resto de dedos en forma de puño, el dedo índice nos indicará la dirección y sentido de la corriente eléctrica, mientras que el resto de dedos nos muestra el sentido del campo magnético. (Paredes, 2010)

²⁶ Demostración en anexos 3

²⁷ Mathematica 10

De lo anterior podemos pasar a estudiar la vorticidad desde las integrales, utilizando el teorema de Stokes, con lo cual su resultado es la circulación, es decir, la integral de línea alrededor de una curva cerrada del campo de velocidad, ayuda a caracterizar el vórtice.

$$\Gamma = \oint_{\text{Linea}} \vec{u} \cdot d\vec{l} = \oint_{\text{Superficie}} \vec{\omega} \cdot d\vec{S}$$

Es importante decir que el teorema Stokes, ayuda identificar las n-formas que se estudia en la ecuación de vorticidad, en este caso se puede identificar que hay una relación de integral de línea, con la integral de superficie. En formas diferenciales se podrá decir que \vec{u} si es integrado se podrá inferir que su dual $u = \rho u_y dx - \rho u_x dy$ lo que representa una 1-forma y $\vec{\omega}$ es una 2-forma. Ahora más adelante se aclarará esta definición que se plantea, desde el cálculo de las formas diferenciales; con lo cual se protagonizará la representación geométrica de las imágenes.

2.5.1 Formas diferenciales: Vorticidad.

El objetivo que enmarca el planteamiento de generar un enfoque alternativo a la enseñanza de la vorticidad, que podría ser aprovechado en espacios universitarios, tomara vida desde el uso de las formas diferenciales, donde graficaremos las ecuaciones de vorticidad, centrándonos en dicha representación de imágenes que nos brinda este cálculo. Teniendo en cuenta que la ecuación de vorticidad $\vec{\omega} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{u}$, representa dualidad de una 2-forma, porque se aplica la derivada exterior a la intensidad del campo de velocidad del fluido, en la cual geoméricamente está representando área, debido a las consecuencias de la operación del producto cruz al operador diferencial $\vec{\nabla}$ y el campo de velocidades \vec{u} .

Ahora para abordar la solución desde las formas diferenciales, se utilizara de forma cómoda, (en cuanto a su conveniencia simétrica); el sistema de coordenadas cilíndrica. Porque las superficies de coordenadas cartesianas pueden complicar, esa la noción de imágenes geométrica que pueden ser planas, y no evidencia esa simetría de analizar las ecuaciones en caso particular. Aclarando la utilización de las coordenadas base cilíndrica, se hace la transformación de coordenadas base cartesianas a coordenadas cilíndricas. Ya teniendo esta transformación de coordenadas base, se podrá evidenciar la superficie de coordenadas cilíndricas. Pero primero se aclara cuáles son esas coordenadas:

- *Las superficies $z = \text{const}$ son, como en cartesianas, planos horizontales.*

- Las superficies $\rho = \text{cte}$ están formadas por los puntos situados a la misma distancia del eje z . Estos puntos forman un cilindro circular con esta recta como eje. De aquí el nombre de este sistema de coordenadas.
- Si fijamos φ nos movemos sobre una superficie que forma un ángulo constante con el plano xz . Esto viene a ser como una puerta girada un cierto ángulo respecto a su eje. La superficie coordenada es un semiplano vertical con borde el eje z . (Departamento de física aplicada III univerisidad de sevilla , 2007)

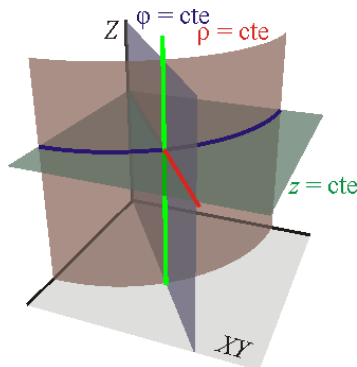
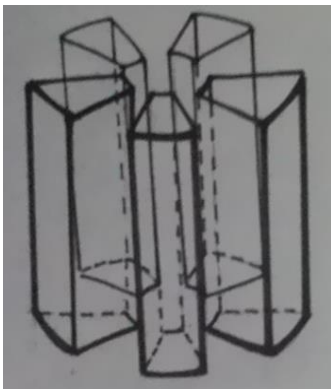


Figura 17 Superficies coordenada cilíndrica²⁸

Ahora esta transformación la podemos ver en los anexos, identificamos que el campo de velocidad de forma diferencial es $u = -\rho d\varphi$ y su dual (vectorial) $\vec{u} = -\rho \hat{\varphi}$.

De lo anterior podemos decir, que si se le aplica la derivada exterior a u , que es un campo de velocidad del fluido de una 1-forma, se tiene como resultado una 2-forma que representa la vorticidad $\omega = -2\rho d\rho \wedge d\varphi$ ²⁹, esto se ilustrara en una imagen geométrica de tubos. **Figura 18.**



Se puede observar que las bases de coordenadas de la ecuación de vorticidad son cilíndricas. Con la ayuda de estas bases se construyen los tubos; es decir, $d\rho \wedge d\varphi$ que son la base de coordenadas de 2-formas, en lo cual interceptamos cilindro y planos. Con esto se observará unos tubos.

Figura 18. Representación tubular 2-forma de vorticidad (3D y 2D)³⁰

²⁸ (Departamento de física aplicada III univerisidad de sevilla , 2007)

²⁹ Demostración en anexos 4

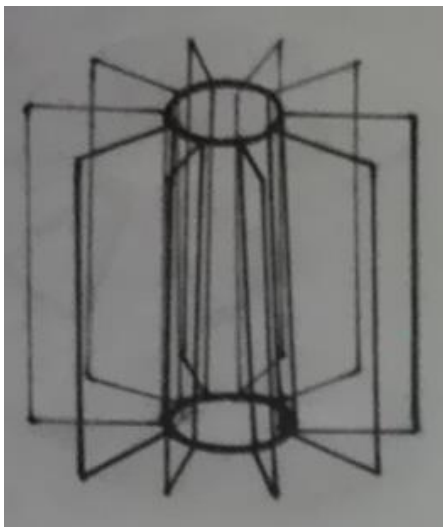
³⁰ Hecha en Paint

Se podrá observar que los tubos están hechos de la intercepción de superficies que brindan las coordenadas cilíndricas, donde $d\rho$ son cilindros rectos verticales y $d\varphi$ son semiplanos verticales, es posible evidenciar que esos tubos representan la dirección de vorticidad, es decir, si la vorticidad entra o sale.

Para saber la cantidad de tubos, en el caso de vorticidad, se acudirá al teorema de Stokes; en el cual se dice que la integración de una 2-forma, permite relacionar las superficies de una 1-forma con los tubos de 2-forma. De tal manera al relacionar la 1-forma con la 2-forma podemos afirmar que la integral de una 2-forma sobre una superficie \mathbf{S} termina siendo la integral de una 1-forma sobre una trayectoria \mathbf{l} que encierra tal superficie. Es decir que geoméricamente la cantidad de tubos que atraviesa una superficie \mathbf{S} es igual a la cantidad de planos atravesados por la trayectoria \mathbf{l} ; tal trayectoria es el contorno de la superficie, como se muestra en la siguiente ecuación:

$$= \oint_{Linea} u \cdot dl = \oint_{Linea} -\rho d\varphi = \oint_{Superficie} \omega \cdot ds$$

Para ello podemos observar la figura que representa la circulación del campo de velocidad del fluido del vórtice, con relación a la dirección de la vorticidad, que está dada mediante la ecuación $u = -\rho d\varphi$. Ver Figura 19:



En esta figura, los planos giran a la izquierda, donde se podrá interpretar que el campo de velocidad es constante en todas partes, es decir que la vorticidad es igual en todas partes.

Figura 19. Representación geométrica de la ecuación de vorticidad ³¹

³¹ (Karl F. Warnick, 1997)

De la figura anterior podemos decir, que los tubos de vorticidad ω , producen superficies de intensidad del campo de velocidad del fluido u . Si las superficies no divergen o convergen entonces obtenemos un vórtice irrotacional, esto demostraría que no habría fuente de circulación y el campo de velocidad sería conservativo.

2.5.1.1 Interpretación Geométrica.

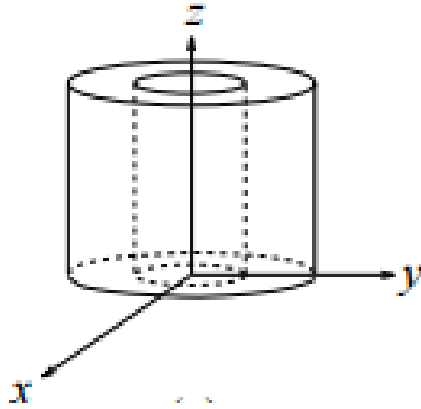
En la **figura 18** se podrá interpretar que el campo de velocidad u del fluido, fluye constante en una cierta dirección, que es negativa, como se muestra en la ecuación anterior. Los tubos que están formados por intersección de planos evidencian que el vórtice es constante en todos los lados del fluido y la dirección del flujo es específica, entonces el gráfico muestra la dirección en que se dirige el flujo completamente, y a esta cantidad la conocemos como vorticidad.

Para la **figura 19** se puede evidenciar unas aspas o hélices hechas de planos. Esta aspa se interpretaría como planos que están montados de forma concéntrica y solidaria en un eje Y , que al girar, los planos trazan un movimiento rotativo. Esto lo interpretamos como la circulación del campo de velocidad del fluido, en el ejemplo anterior. Podemos evidenciar que el campo de velocidad del fluido u , aumenta proporcionalmente a la distancia del radio desde el eje del vórtice. Esto se puede evidenciar en la misma figura, en que si los planos son constantes, la vorticidad es constante en todo el fluido. También la figura puede orientar con relación a la dirección del vórtice, es decir puede especificar si el vórtice gira hacia la derecha o hacia la izquierda, de acuerdo con el teorema de Stokes y que a su vez tiene sentido con la dirección que fluye que demuestra los tubos, en el caso del gráfico los planos giran hacia la izquierda esto demuestra que el flujo se dirige a un sentido negativo. Todo esto lo podemos relacionar con el siguiente ejemplo: si una cubeta con agua se hace girar a una velocidad angular constante alrededor de su eje vertical, se puede visualizar que las partículas que componen el campo de velocidad cerca al eje rotatorio, toman una dirección específica y un flujo constante.

Mediante la interpretación de los gráficos anterior, surgiría una pregunta, que tendrá respuesta en la determinación de vorticidad y que a su vez corresponde a un vórtice irrotacional. Si la velocidad de las partículas o el campo de velocidad que generan las partículas al moverse, es inversamente proporcional a la distancia del radio desde el eje del vórtice, ¿qué interpretación geométrica desde las formas diferenciales podría explicar la vorticidad?

Esta pregunta, después del proceso de análisis de la ecuación de vórtice rotacional, podría darnos a entender que el caso de un vórtice irrotacional, es aquel donde su derivada exterior dio como resultado cero, teniendo en cuenta que su campo de velocidad de flujo

$u_2 = \rho d\rho$ ³² y su derivada exterior es $du_2 = 0$, su representación gráfica es simplemente un cilindro como se evidencia en la siguiente figura.



Se podrá observar que el campo de velocidad del fluido, está representado por cilindros, de lo que podemos interpretar que los cilindros más cercanos al eje tienen una velocidad mayor, que el cilindro que está lejos del eje.

Figura 20. Vorticidad nula³³

³² $u_2 = \rho d\rho$ es el resultado de la transformación de coordenadas cartesianas hacia las cilíndricas, desde su dual que es la ecuación vectorial $\vec{u} = x\hat{i} + y\hat{j}$.

³³ (Karl F. Warnick, 1997)

3. CONCLUSIONES

Con el desarrollo de esta monografía, sobre el estudio del mundo físico, el cual propone que el ser humano busque herramientas lógicas para llegar a una explicación; se observó que la forma de abordaje que se evidencia desde una perspectiva geométrica de las ecuaciones de vorticidad y continuidad de la mecánica de fluidos, es más cercana a la percepción o representación de los fenómenos físicos, dado a que da importancia al análisis matemático para evidenciar las diferencias de magnitudes y conceptos de la física para tener una mejor comprensión de dichas magnitudes y conceptos.

Las ecuaciones de vorticidad y continuidad, desde la perspectiva de las formas diferenciales, fomentó la importancia en la comprensión general de operadores y teoremas. Todo esto llevó a una aclaración y diferenciación de magnitudes, como también de conceptos físicos en presentación de campos, intensidad de campo, flujo y densidad; se pudo evidenciar geoméricamente imágenes de conceptos de la mecánica de fluido. En lo primero, se estudió el conjunto de la n - formas diferenciales y, ya teniendo un poco de conocimiento del cálculo vectorial, se compararon su estructura geométrica y de imágenes que las dos evidencian, en el análisis de las ecuaciones. También, se reconoce el objeto geométrico de las formas diferenciales, que se representan por la superficies de coordenadas, de tal manera que se trabajaron superficies cartesianas y cilíndricas.

Ecuación de continuidad: Desde la perspectiva de las formas diferenciales, se pudo obtener gráficas que evidenciaron una interpretación a la ecuación, utilizando un formalismo matemático de 2-formas y 3-formas, tal que este grado de las formas diferenciales pudo dar una mejor comprensión de la dirección del flujo másico y de la densidad del fluido. La 2-forma representó la dirección del fluido saliendo del volumen de control, la 3-forma representó la densidad que se encuentra en el volumen de control. En el proceso matemático utilizando la derivada exterior para así obtener resultados de la divergencia, lo cual se comparó desde el análisis vectorial y se obtuvo lo mismo.

Ecuación de vorticidad: el uso de las formas diferenciales en la ecuación de vorticidad, ayudó a comprender mediante las gráficas, la dirección del flujo de vorticidad. En tal manejo, se utilizó la derivada exterior para obtener una 2-forma diferencial que demostraba la dirección de la vorticidad. También se obtuvo una interpretación del teorema de Stokes, en la cual se evidenció que 1-forma que era el campo de velocidad del fluido girando sobre una curva cerrada, mostraba un aspa giratoria. Y en el abordaje de la vorticidad irrotacional, su grafica demostró que eran cilindros que giran sobre el eje, que puedo deducir que los cilindros giran más rápido cerca al eje, lo cual corresponde con la teoría, para un vorticidad irrotacional.

Como resultado se evidenció también, que las formas diferenciales aclaran, las magnitudes y conceptos de las dos ecuaciones de la mecánica de fluido, lo que no significa que la

monografía este desprestigiando el uso convencional del análisis que hace el cálculo vectorial, sino que demuestra que hay otras alternativas geométricas para comprender los fenómenos físicos.

Gracias al estudio del cálculo de las formas diferenciales, avance personalmente en entender el uso de las herramientas matemáticas en la comprensión de fenómenos de la naturaleza. Aprendizaje que me lleva a pretender que este trabajo tenga continuidad en estudios más avanzados, como idea de tesis de maestría y/o producto para artículos divulgativos en diferentes ramas de la física.

Esta monografía tiene la intención de motivar a estudiantes de la lic. Física. En torno a la importancia de relacionar la física con la geometría y que así se llegue a una mejor comprensión de conceptos y magnitudes por medio de las imágenes, como lo representa la propuesta de las formas diferenciales. Por lo cual se considera que este documento es una estrategia alterna en la enseñanza de la mecánica de fluido, para que el estudiante lo tenga como referente de consulta y de praxis.

4. ANEXOS

ANEXO 1: PRODUCTO EXTERIOR

Una de las operaciones importantes en la formas diferenciales, es el producto exterior o también llamado producto cuña (\wedge).

El producto cuña es una multiplicación que cumple con la propiedad asociativa, distributiva y anti -conmutativa en las formas diferenciales, está definida de tal manera:

$$\wedge: \wedge^p \times \wedge^q \rightarrow \wedge^{p+q}$$

ANEXO 2: DERIVADA EXTERIOR

$$\sigma = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3$$

$$d\sigma = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx, \frac{\partial}{\partial y} dz, \frac{\partial}{\partial z} dz \right) \wedge (f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3)$$

$$d\sigma = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 \wedge (f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3) + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 \wedge (f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3) + \frac{\partial}{\partial x_3} dx_3 \wedge (f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3) \right)$$

$$d\sigma = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f_1 dx_1 \wedge dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_1} f_2 dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial}{\partial x_1} f_3 dx_1 \wedge dx_3 \right) + \left(\frac{\partial}{\partial x_2} f_1 dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} f_2 dx_2 \wedge dx_2 + \frac{\partial}{\partial x_2} f_3 dx_2 \wedge dx_3 \right) + \left(\frac{\partial}{\partial x_3} f_1 dx_3 \wedge dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_3} f_2 dx_3 \wedge dx_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} f_3 dx_3 \wedge dx_3 \right)$$

$$d\sigma = \frac{\partial}{\partial x_1} f_2 dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial}{\partial x_1} f_3 dx_1 \wedge dx_3 + \frac{\partial}{\partial x_2} f_1 dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} f_3 dx_2 \wedge dx_3 + \frac{\partial}{\partial x_3} f_1 dx_3 \wedge dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_3} f_2 dx_3 \wedge dx_2.$$

$$d\sigma = \left[\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \right) dx_1 dx_3 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \right) dx_2 dx_3 \right]$$

Generalidad del producto cruz $\nabla \times F$.

ANEXO 3: VORTICIDAD (VECTORIAL)

- **Solución del campo de velocidad \vec{u} del fluido utilizando el rotacional:**

En el estudio de la vorticidad se utilizó el siguiente ejemplo matemático que lo resolverá paso a paso:

Tenemos un campo vectorial que representaría la velocidad de un fluido:

$$\vec{u} = y\hat{i} - x\hat{j}$$

Se le aplicara el rotacional, para evidenciar si el campo vectorial es conservativo o no conservativo.

$$\nabla \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ y & -x \end{vmatrix} = -2\hat{z}$$

$$\text{vorticidad} = \vec{\omega} = -2\hat{z}$$

En este caso el campo no es conservativo; es decir que el fluido rota y que tiene vorticidad. $\vec{\omega} = -2\hat{z}$. De esta manera evidenciamos desde la perspectiva vectorial un vórtice rotacional. Ahora más adelante se abordara este mismo campo de fluido pero en coordenadas cilíndricas desde perspectiva de las formas diferenciales se compara los resultados.

ANEXO 4: VORTICIDAD EN FORMAS DIFERENCIALES

Solución del campo de velocidad \vec{u} del fluido en formas diferenciales en coordenadas cilíndricas.

Tenemos un campo vectorial que representaría la velocidad de un fluido:

$$\vec{u} = y\hat{i} - x\hat{j}$$

Ahora transformemos este campo vectorial en coordenadas cilíndricas

Coordenadas cilíndricas

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z$$

Remplazamos en el vector:

$$\vec{u} = \rho \sin \varphi \hat{i} - \rho \cos \varphi \hat{j}$$

$$\vec{u} = \rho(-\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j})$$

Sabiendo la base coordenada

$$\vec{\varphi} = -\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j}$$

Se remplaza esta base y se tiene el siguiente resultado:

$$\vec{u} = -\rho^2 \vec{\varphi}$$

Ahora el dual en forma diferencial donde podemos decir sencillamente que es un elemento que puede ser integrado $u = -\rho d\varphi$.

Esta representación es la forma dual del campo vectorial anterior mente en coordenadas esféricas, ahora a $u = -\rho d\varphi$ se le aplicara la derivada exterior para comprender un poco el uso de los operadores desde las formas diferenciales.

- **Derivada exterior para obtener la vorticidad.**

Tenemos que es $u = -\rho d\varphi$ y $d = (\frac{\partial}{\partial \rho} d\rho, \frac{\partial}{\partial \varphi} d\varphi, \frac{\partial}{\partial z} dz)$ en el cual es operador diferencial en forma diferencial o exterior.

$$u = -\rho^2 \varphi \quad \text{y} \quad d = (\frac{\partial}{\partial \rho} d\rho, \frac{\partial}{\partial \varphi} d\varphi, \frac{\partial}{\partial z} dz)$$

$$du = (\frac{\partial}{\partial \rho} d\rho, \frac{\partial}{\partial \varphi} d\varphi, \frac{\partial}{\partial z} dz) \wedge (-\rho^2 d\varphi)$$

$$du = \frac{\partial}{\partial \rho} - \rho^2 d\rho \wedge d\varphi + \frac{\partial}{\partial \varphi} - \rho^2 d\varphi \wedge d\varphi + \frac{\partial}{\partial z} - \rho^2 dz \wedge d\varphi$$

Por las propiedades de la derivada exterior tenemos resultado:

$$du = -2\rho d\rho \wedge d\varphi$$

$$\text{vorticidad en forma diferencial} = \omega = -2\rho d\rho \wedge d\varphi.$$

Comparando los resultados se evidencia que se obtiene la misma información, pero su estructura geométrica es distinta.

ANEXO 5: DIVERGENCIA (VECTORIAL)

- **Solución de densidad del campo de velocidad del fluido \vec{j} utilizando la divergencia: ecuación de continuidad**

Para estudiar la ecuación de continuidad se utilizó el siguiente ejemplo matemático que se resolverá paso a paso:

Tenemos un campo vectorial que representaría la relación de la densidad y la velocidad de un fluido, llamado flujo másico: $\vec{j} = \rho x\hat{i} + \rho y\hat{j} + \rho z\hat{k}$.

Ahora se aplicará la divergencia, para saber si el campo es conservativo, o no.

$$\vec{j} = \rho x\hat{i} + \rho y\hat{j} + \rho z\hat{k} \quad \text{y} \quad \vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Aplicábamós la divergencia:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\rho x\hat{i} + \rho y\hat{j} + \rho z\hat{k})$$

Se tiene como resultado un número una cantidad.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 3\rho \frac{kg}{m^2 \cdot s}$$

Ahora se abordara el mismo problema pero desde las formas diferenciales para comparar sus resultados.

ANEXO 6: FLUJO MÁSIKO EN FORMA DIFERENCIAL

- **Solución de densidad del campo de velocidad del fluido \vec{j} desde las formas diferenciales**

$$\vec{j} = \rho x\hat{i} + \rho y\hat{j} + \rho z\hat{k}$$

Su forma dual en 1-forma

$$j = \rho x dx + \rho y dy + \rho z dz$$

Pero si aplicamos el operador Hodge star obtendremos una 2-forma esto resultaría el flujo.

$$*j = \rho x dx + \rho y dy + \rho z dz$$

$$*j = \rho x * dx + \rho y * dy + \rho z * dz$$

Es decir

$$* dx = dy \wedge dz$$

$$* dy = dz \wedge dx$$

$$* dz = dx \wedge dy$$

Se obtiene una 2-forma.

$$j = \rho x dy \wedge dz + \rho y dz \wedge dx + \rho z dx \wedge dy$$

ANEXO 7: DIVERGENCIA EN FORMA DIFERENCIAL

Derivada exterior para obtener la divergencia.

$$j = \rho x dy \wedge dz + \rho y dz \wedge dx + \rho z dx \wedge dy$$

$$d = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx, \frac{\partial}{\partial y} dz, \frac{\partial}{\partial z} dz \right)$$

$$dj = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx, \frac{\partial}{\partial y} dz, \frac{\partial}{\partial z} dz \right) \wedge (\rho x dy \wedge dz + \rho y dz \wedge dx + \rho z dx \wedge dy)$$

$$\begin{aligned} dj &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \rho x dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial}{\partial y} \rho y dy \wedge dz \wedge dx + \frac{\partial}{\partial z} \rho z dz \wedge dx \wedge dy \right) \\ &= 3\rho dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

Se tiene como resultado l siguiente cantidad. Esto demuestra que los resultados son similares pero su estructura geométrica es distinta.

$$\text{Densidad del fluido} = \rho = 3\rho dx \wedge dy \wedge dz$$

5. BIBLIOGRAFÍA

- Ayneto Gubert, Xavier; Ferrer Balles, Miquel. (2012). *Mecanica del medio continuo en la ingeniería: teoría y problemas resueltos*. universitat politécnica de Catalunya: Iniciativa digital politécnica.
- Burke, W. L. (1985). *Applied differential geometry*. California, santa cruz : Cambridge university press .
- Cartan , É. J. (1899). Sur Certaines expresiones différentielles et le problème de Pfaf, Annales scientifiques . *l'Ecole Normale Supérieure*, 239-332.
- cazatormentas. (s.f.). Obtenido de <http://www.cazatormentas.net/vortices-toroidales-atmosfericos/>
- D.Gignoux, M. S. (2005). Magnetism Fundamentals . *Magnetism Fundamentals* .
- Departamento de física aplicada III univerversidad de sevilla . (23 de noviembre de 2007). *Laplace* . Obtenido de http://laplace.us.es/wiki/index.php/Coordenadas_cartesianas._L%C3%ADneas_y_superficies_coordenadas
- elbibliote.com. (s.f.). Obtenido de La vida de los astronautas en el espacio: <http://elbibliote.com/resources/Temas/html/1677.php>
- Engineers edge solution by desing* . (2000-2017). Obtenido de www.Engineersedge.com
- Escuela superior de ingenieros-Universidad de navarra . (s.f.). *FAQ Mecánica de Fluidos*. Obtenido de www1.ceit.es/asignaturas/Fluidos1/WEBMF/Mecanica%20de%20Fluidos%20I/FAQMFI/FAQ2.html
- JA Wheeler; C. Misner; KS Thorne . (1973). *La gravitación* . San Francisco : WH Freeman & co.
- Jerrold E, Marsden, Tromba Antony. (1991). *Calculo vectorial* (tercera ed.). Addison-Wesley Iberoamericana s.a.
- Karl F. Warnick, R. H. (1997). *Teaching electromagnetic fiel theory usin differential forms*. Young University, Department of Electrical and Computer Engineering Brigham.
- Landau L, D., & Lifshitz E, M. (1985). *Mecanica de fluidos volumen 6*. URSS: reverté s.a.

- Martín Blas, T., & Serrano Fernández, A. (s.f.). *Termodinámica*. (U. P. España., Ed.) Obtenido de <http://acer.forestales.upm.es/basicas/udfisica/asignaturas/fisica/termo1p/variables.html>
- Miranda, D. C. (s.f.). *sobre geometría y física*. Obtenido de la geometría de Riema: algunas aplicaciones a la física, UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA: <https://imarrero.webs.ull.es/sctm04/modulo2/11/dchina.html>
- Moreno Peña, R. E. (2008). *Contextualización de las ecuaciones de Maxwell empleando formas diferenciales*. Bogotá : universidad pedagógica nacional .
- O'Neill, B. (1982). *Elementos de geometría diferencial*. México : Limusa.
- Paredes, S. (29 de Marzo de 2010). *Cluster*. Obtenido de Divulgación científica : <http://cluster-divulgacioncientifica.blogspot.com.co/2010/03/la-regla-de-la-mano-derecha.html>
- Tejeiro Sarmiento, J. M. (2005). notas de clase. *principios de la relatividad general*. bogota , colombia : universidad nacional de colombia .
- Valera, J. P. (2005). *Apuntes de física general*. Mexico : Universidad nacional autonoma de mexico .
- vonno. (07 de 06 de 2010). *canstockphoto*. Obtenido de <http://www.canstockphoto.es/agua-glas-torcer-3811760.html>
- Yunus ACengel, j. M. (s.f.). *Mecánica de fluido. Fundamentos y aplicaciones* .
- Zaslow, E. (17 de junio de 2005). *Arxiv.org*. Obtenido de CORNELL UNIVERSITY LIBRARY : <https://arxiv.org/abs/physics/0506153>