DOS ESTRATEGIAS DE VISUALIZACIÓN PARA EL DESARROLLO DEL RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO EN ESTUDIANTES DE GRADO TERCERO APOYADOS EN UN AMBIENTE COMPUTACIONAL GEOGEBRA

Deyanira Beltrán López

Sandra Martínez Salamanca

Universidad Pedagógica Nacional

Notas de los Autores: Deyanira Beltrán López & Sandra Martínez Salamanca

Facultad de Ciencia y tecnología, Maestría en Tecnología de la Información Aplicadas a la Educación. La correspondencia relacionada con esta investigación debe ser dirigida a Deyanira Beltrán López –Sandra Martínez Salamanca,

Maestría en Tecnología de la Información Aplicadas a la Educación, Universidad Pedagógica Nacional, AC 72 # 11 86, Bogotá, Colombia.

Contacto: deyanirabeltran75@gmail.com – daninatacha@gmail.com

DOS ESTRATEGIAS DE VISUALIZACIÓN PARA EL DESARROLLO DEL RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO EN ESTUDIANTES DE GRADO TERCERO APOYADOS EN UN AMBIENTE COMPUTACIONAL GEOGEBRA

Deyanira Beltrán López código: 2014181005

Sandra Martínez Salamanca código: 2014181041.

Universidad Pedagógica Nacional

Tutor

David Macías Mora

FACULTAD DE TECNOLOGÍA

MAESTRÍA EN TECNOLOGÍA DE LA INFORMACIÓN Y LA COMUNICACIÓN APLICADAS A LA EDUCACIÓN

BOGOTÁ D.C. , 2017

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL	FORMATO
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE
Código: FOR020GIB	Versión: 01
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página iii de 197

1. Información General	
Tipo de documento	Tesis de Maestría en Investigación
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Dos estrategias de visualización para el desarrollo del razonamiento geométrico en estudiantes de grado tercero apoyados en un ambiente computacional Geogebra
Autor(es)	Beltrán López, Deyanira; Martínez Salamanca, Sandra
Director	David Macías Mora
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2017. 187 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	VISUALIZACIÓN, RAZONAMIENTOGEOMÉTRICO, PROTOCOLOS VERBALES, ESTRATEGIA, ORIENTACIÓN GEOMÉTRICA, SUJETO, OBJETO, PERSPECTIVA TRIDIMENSIONAL, TIC.

2. Descripción

La presente investigación indagó y analizó los procesos cognitivos relacionados con el razonamiento geométrico en la aplicación de dos estrategias de visualización (orientación estática del sujeto y de los objetos e interpretación de perspectivas de objetos tridimensionales) mediadas por TIC en niños de grado tercero. Se recurrió a los lineamientos pedagógicos y curriculares establecidos para grado tercero a nivel nacional; al igual que a los niveles y habilidades de razonamiento geométrico propuestos por los Van Hiele (1984) y Hoffer (1981).

Metodológicamente el proyecto de investigación se fundamentó en los análisis de protocolos verbales, con 6 fases en la investigación de reportes verbales: calentamiento, reporte de interés y grabación, transcripción, segmentación, clasificación y codificación (Requena, 2003), sustentado con los reportes de diario de campo en cuanto a lo cualitativo, y un aporte a los resultados apoyado con un pre test y post test que permita establecer los niveles de razonamiento geométrico en cuanto a la visualización al inicio y al final de la investigación. Las estrategias se enfocaron, mediadas por las TIC, desde las subcategorías visual, verbal, dibujo, lógica y aplicada basados en las habilidades plateadas por Hoffer (1981), haciendo uso de los sólidos geométricos y las figuras isométricas.

3. Fuentes

Al-ebous, T. (2016). Effect of the Van Hiele Model in Geometric Concepts Acquisition: The Attitudes towards Geometry and Learning Transfer Effect of the First Three Grades Students in Jordan. International Education Studies. 9 (4), 87-98.

Alsina, C., Fortuny, J., & Pérez, R. (1997). ¿Por qué Geometría? Propuestas didácticas para la

ESO. Madrid: Editorial Síntesis .

Arboleda, G. (2015). Propuesta de enseñanza aprendizaje de la geometría de las figuras planas en básica primaria. Bogotá, D.C.: Universidad Nacional de Colombia.

Argudo, M. (2013). Las TIC'S y el aprendizaje de la geometría. Valencia: Universidad CEU Cardenal Herrera.

Battista, M. (2007). The development of geometric and spatial thinking. En F. Lester, Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning Charlotte, NC (págs. 843-908). Nueva York: Information Age Publising.

Bello, J. (2013). Mediación del software Geogebra en el aprendizaje de programación lineal en alumnos del quinto grado de educación secundaria. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.

Benavides, O., & Restrepo, K. (2005). Métodos en investigación cualitativa: triangulación. Revista Colombiana de Psiquiatría , 118-124.

Berssan, A., & Bogisic, B. (2000). Razones para enseñar geometría en la educación Básica. Buenos Aires: Ediciones Noveduc.

Berthelot, R., & Salin, M. (1992). l'enseignement de l'espace et de la g´eom´etrie dans la scolarit´e obligatoire. Burdeos: Université Sciences et Technologies.

Briseño, C., & Guzmán, J. (2015). Construcción de conceptos matemáticos mediante la visualización. XIV CIAEM-IACME, (págs. 1-12). Chiapas.

Brito, D. (2006). La verbalización como registro para análisis en la investigación sobre lectura. Anales de Documentación. (9), 43-51.

Cabello, A. (2013). La modelización de Van Hiele en el aprendizaje constructivo de la geometría en primero de la educación secundaria obligatoria a partir de Cabri. Salamanca:

Universidad de Salamanca.

Carmona, J. (2011). La Circunferencia, Una Propuesta Didáctica utilizando la geometría dinámica y la teoría de Van Hiele. Bogotá, D.C.: Universidad Nacional de Colombia .

Castellanos, I. (2010). Visualización y razonamiento en las construcciones geométricas utilizando el software Geogebra con alumnos de II de magisterio de la . Tegucigalpa: Universidad Pedagógica Nacional.

Castiblanco, A., Urquina, H., Camargo, L., & Acosta, M. (2004). Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales. Proyecto: Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo. Bogotá, D.C.: Ministerio de Educación Nacional.

Castro, R., & Guevara, M. (s.f.). Procesamiento de lectura: una mirada al lector de telesecundaria. XI Congreso Nacional de Investigación Educativa, (págs. 1-11). Guanajuato.

Coello, J. (2011). Lateralidad como directriz de la orientación espacial. Milagro: Universida Estatal de Milagro.

Corredor, L. F. (2010). Geomatría dínamica y lugares geométricos. . Bogotá: Universidad Konrad Lorenz.

Costes, C., Osio, E., Bernardi, C., Facello, T., & Ferraris, A. (2010). Conclusiones y propuestas después de una investigación sobre las clases de geometría. Santa Rosa: III REPEM – Memorias.

Díaz, E. (2014). El uso de las TIC's como medio didáctico para la enseñanza de la geometría. Manizales: Universidad Nacional de Colombia.

Doncel, N. (2013). Protocolo verbal en la identificación de habilidades de auto-regulación. Revista Educación y Desarrollo Social. 7 (1), 79-94.

Duval, R. (2001). La Geometría desde un Punto de Vista Cognitivo. Obtenido de PMME-UNISON: http://fractus.uson.mx/Papers/ICMI/LaGeometria.htm

Ericsson, K., & Simon, H. (1993). Protocol Analysis. Cambridge: The MIT Press.

Fernández, J., Mercado, F., & Sánchez, M. (2003). Teoría y práctica psicomotora de la orientación y localización espacial. Revista ef deportes. 9 (59), Revista Digital.

Fernández, T. (2013). La investigación en visualización y razonamiento espacial. pasado, presente y futuro. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa, & N. Climent, Investigación en Educación Matemática XVII (págs. 19-42). Bilbao: SEIEM.

Flores, J. (2010). Exploración del impacto de un software dinámico en el aprendizaje de la geometría. Tegucigalpa: Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán.

Fouz, F. (2006). Test geométrico aplicando el modelo de Van Hiele. Sigma. (28), 33-60.

García, J. (2009). Estimular la orientación espacial, Nivel 1-2-3-4. Madrid: Grupo Gesfomedia.

García, M. (2011). La geometría dinámica como herramienta para el dibujo. Cantabria : Universidad de Cantabria.

García, S., & López, O. (2008). La enseñanza de la Geometría. México, D.F.: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

Gómez, I. (2012). Visualización matemática: intuición y razonamiento. En I. Gómez, Contribuciones matemáticas en honor a Juan Tarrés (págs. 201-219). Madrid: UCM.

Gómez, M. (2012). Didáctica de la Matemática basada en el diseño curricular de educación inicial-nivel preescolar . León: Universidad de León.

González, M. (s.f.). Diseño de un proyecto para la mejora de la práctica educativa en la enseñanza de la Geometría mediante la aplicación de Google Maps en el tercer ciclo de Primaria. Madrid: UAM.

González, O., & Arévalo, C. (2011). Desarrollo del pensamiento geométrico espacial en niños de segundo de primaria desde la situación “viaje alrededor del mundo geométrico en ocho días”.

Quindío: Uniandes.

Gonzato, M. (2013). Evaluación de conocimientos de futuros profesores de educación primaria para la enseñanza de la visualización espacial. Granada: Universidad de Granada.

Gonzato, M., Fernández, T., & Díaz, J. (2011). Tareas para el desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial. Revista de didáctica de las matemáticas. 77 , 99–117 .

Guibert, A., Ebeaume, J., & Roland, M. (1993). Actividades Geométricas para la Educación] Infantil y primaria. Madrid: Narcea.

Guillén, G. (2004). El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos: describir, clasificar, definir y demostrar como componentes de la actividad matemática. Educación matemática. 16 (3), 103-125.

Gutiérrez, A. (1991). Procesos y habilidades en visualización espacial. 3er congreso internacional sobre investigación en educación matemática, (págs. 44-59). Valencia.

Gutiérrez, S. (s.f.). El pensamiento geométrico en los estudiantes de primer grado de secundaria. Chihuahua: Universidad Autónoma de Chihuahua.

Herrera, M. D. (2003). Teoría y práctica psicomotora de la orientación y localización espacial. . Lecturas: Educación física y deportes, 59.

Hoffer, A. (1981). Geometry is more than proof. The mathematics teacher. 74 (1), 1-18.

Isaza, M., & López, A. (2012). Propuesta didáctica según Van Hiele para el desarrollo de la noción de espacio en los niños y niñas de primero de primaria del liceo cuba de la ciudad de Pereira Risaralda. Pereira: Universidad Tecnológica de Pereira.

Ixcaquic, I. (2015). Modelo De Van Hiele y Geometría Plana: (Estudio realizado en primero básico del Instituto Nacional de Telesecundaria, del municipio de San Francisco El Alto, departamento de Totonicapán). Quetzaltenango: Universidad Rafael Landívar.

Jaramillo, C., & Esteban, P. (2006). Enseñanza y aprendizaje de las estructuras matemáticas a partir del modelo de Van Hiele. Revista Educación y Pedagogía. 18 (45), 111-118.

Kerlegand, C. (2013). Desarrollo de dos propiedades de la circunferencia usando el modelo de Van Hiele y la visualización. México, D.F.: Instituto Politécnico Nacional .

Kosslyn, S. (1988). Aspects of a cognitive neuroscience of mental imagery. Science. 240 (4859), 1621-1626.

Kosslyn, S. (1994). Image and brain. Cambridge: The MIT Press.

Lastra, S. (2005). Propuesta metodológica de enseñanza y aprendizaje de la geometría, aplicada en escuelas críticas. Santiago d Chile: Universidad de Chile.

Lastra, S. (2005). Propuesta metodológica de enseñanza y aprendizaje de la geometría, aplicada en escuelas críticas. Santiago de Chile: Universidad de Chile .

Lázaro, A., & Berruezo, P. (2009). La pirámide del desarrollo humano. Revista Iberoamericana de Psicomotricidad y Técnicas Corporales. 9 (34), 15-42.

Lin, J., & Lin, S. (2014). Tracking eye movements when solving geometry problems with handwriting devices. Journal of Eye Movement Research. 7 (1), 1-15.

Londoño, G. (2017). Razonamiento asociado a la proporcionalidad entre áreas en correspondencia con el modelo educativo de Van Hiele en estudiantes de grado séptimo. Medellín: Universidad de Medellín.

Majadas, F. (2012). Geogebra: panorama actual y futuro. Obtenido de Observatorio Tecnológico: http://recursostic.educacion.es/observatorio/web/gl/software/software-educativo/1082-geogebra-panorama-actual-y-futuro

Malara, N. (1999). Acerca de las dificultades que tienen los profesores de secundaria para visualizar y representar objetos tridimensionales. Educación Matemática. 11 (3), 54-68.

Marmolejo, G., & Vega, M. (2012). La visualización en las figuras geométricas. Importancia y complejidad de su aprendizaje. Educación Matemática. 24 (3), 7-32.

Martínez, L. (2007). La Observación y el Diario de Campo en la Definición de un Tema de Investigación. Bogotá, D.C.: Institución Universitaria Los Libertadores.

Mayor, J., Suengas, A., & González, J. (1993). Estrategias Metacognitivas. Aprender a aprender y aprender a pensar. Madrid: Síntesis Psicología.

Mendoza, J. (2015). Utilización del software Geogebra, como herramienta cognitiva y su incidencia en el aprendizaje de la matemática en el Primer Semestre de la Carrera de Ingeniería en Industrias Pecuarias, FCP, ESPOCH . Riobamba: Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

Ministerio de Educación Nacional. (18 de 04 de 2004). Pensamiento Geométrico y Tegnologias Computacionales . Obtenido de Colombia Aprende : http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articles-113753_archivo.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas: Guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden. Bogotá, D.C.: Ministerio de Educación Nacional.

Ministerio, E. (2010). Linieamientos curriculares para matematica. Bogota: Editorial Magisterio.

Newell, A., & Simon, H. (1972). Human Problem Solving. Englewood Cliffs: Prentice Hall.

Valencia, L. B. (2008). Lla solución de problemas en la comprensión de conceptos de geometría dinámica a través de ambientes computacionales. Bogotá: ecné, Episteme y Didaxis: TED.

Novo, M. (2013). Recursos didácticos para la enseñanza-aprendizaje de la Geometría en la Escuela Primaria. Valladolid.

Ochaíta, E. (1993). Ceguera y desarrollo psicológico. En A. Rosa, & E. Ochaíta, Psicología de la ceguera (págs. 140-161). Madrid: Alianza Editorial.

Pachano, L., & Terán, M. (2008). Estrategia para la enseñanza y aprendizaje en la educación básica: experiencia constructivista. San Cristóbal: Universidad de los Andes.

Peña, A. (2012). Las TIC en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría en la ESO. Suma. (69), 37-48.

Peña, C. (2009). Solución de problemas. Obtenido de Blog : http://gerenciacarlos.zoomblog.com/archivo/2009/11/28/solucion-De-Problemas.html

Pérez, Y., & Ramírez, R. (2011). Estrategias de enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Fundamentos teóricos y metodológicos. Revista de Investigación. 35 (73), 169-193.

Piaget, J. (1981). Seis estudios de Psicología. Barcelona: Barral.

PISA. (2016). Pruebas Saber 2014-2016. París: OCDE .

Pradas, D. (2009). El esquema corporal en niños y en niñas. Granada: CSIF.

Proenza, Y., & Leyva, M. (2007). Aprendizaje desarrollador en matemática. Obtenido de Matemáticas: http://www.monografias.com/trabajos52/pensamiento-geometrico/pensamiento-geometrico2.shtml

Quaranta, M., & Ressia, B. (2009). La Enseñanza de la Geometría en el Jardín de Infantes. La Plata: Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires.

Ramírez, N. (2014). Estrategia didáctica para la clasificación de triángulos y cuadriláteros orientada por el modelo Van Hiele y Geogebra. Medellín: Universidad Nacional de Colombia.

Requena, M. (2000). Resolución de problemas algebraicos de las olimpiadas venezolanas de matemáticas. Enseñanza de la Matemática. 9 (1), 3-9.

Requena, M. (2003). El análisis de protocolos verbales como técnica para la comprension de

los procesos de razonamiento. Laurus. 9 (16), 79-96.

Ruiz, N. (2012). Análisis del desarrollo de competencias geométricas y didácticas mediante el software de geometría dinámica GeoGebra en la formación inicial del profesorado de Primaria. Madrid: Universidad Autónoma de Madrid.

Sainz, O. (2014). La visualización en geometría: un estudio en 3° ESO. . Santander: Universidad de Cantabria.

Sordo, J. (2005). Estudio de una estrategia didáctica basada en las nuevas tecnologías para la enseñanza de la geometría. Madrid : Universidad Complutense de Madrid .

Souto, B. (2009). Visualización en Matemáticas un Estudio Exploratorio con Estudiantes de Primer Curso de Matemáticas. Madrid: Universidad Complutense de Madrid.

Torregrosa, G. (2002). Visualización y aprendizaje de la geometría. San Vicente del Raspeig: Universidad de Alicante.

Torres, C., & Racedo, D. (2014). Estrategia Didáctica Mediada por el Software Geogebra para fortalecer la enseñanza-aprendizaje de la geometría en estudiantes de 9° de básica secundaria. Barranquilla: Universidad de la Costa “CUC”.

UNESCO. (2009). Aportes para la enseñanza de la Matemática. Santiago de Chile: SERCE/LLECE.

Valencia, D. (2014). GeoGebra es un software interactivo de matemática . Obtenido de https://prezi.com/nas2au27kx58/geogebra-es-un-software-interactivo-de-matematica-que-reu/

Valencia, N., & Leiva, A. (2005). Reportes automatizados y verbales: incidencia en el aprendizaje de la solución de problemas. Bogotá, D.C.: Universidad Pedagógica Nacional.

Valencia, N., & Sanabria, L. (2008). La solución de problemas en la comprensión de conceptos de geometría dinámica a través de ambientes computacionales. Bogotá, D.C.: Universidad

Pedagógica Nacional.

Valencia, N., Sanabria, L., & Ibáñez, J. (2012). Proceso cognitivos y metacognitivos en la solución de problemas de movimientos de figuras en el plano a través de ambientes computacionales. Tecné, Episteme y Didaxis. (31), 45-65.

Vargas, G., & Gamboa, R. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. Uniciencia. 27 (1), 74-94.

Vygotsky, L. (1978). Interaction Between. Learning and Development. Nueva York : Harvard University Press.

Watkins, K. (2006). Informe sobre Desarrollo Humano 2006. Barcelona: Editorial Aedos, s.a.

4. Contenidos

La presente tesis de grado muestra al lector nueve capítulos así: inicialmente se encuentra la introducción, en la que se expone la problemática observada y los parámetros que se tuvieron en cuanta para el desarrollo de la investigación; en el capítulo uno se encuentra la descripción del problema abordando el tema de razonamiento geométrico y la visualización, con niños de tercer grado de primaria, desde dos estrategias " orientación estática de los sujetos con respecto al objeto" y "tareas de interpretación de perspectivas tridimensionales" con el uso de una ambiente computacional "Geogebra". El capítulo dos cuenta con el estado del arte, el cual comprende una revisión de las investigaciones que aportan al objeto de estudio, el capítulo tres del marco teórico, abordado desde el razonamiento geométrico según Van Hiele, Hoffer y Duval, bajo dos estrategias de visualización apoyas en un ambiente computacional.

El en el capítulo cuatro, se encuentran los objetivos planteados en la investigación. El Capitulo

cinco, metodología, da cuenta del proceso que se llevó a cabo para realizar la presente investigación, incluye la selección de variables, el enfoque metodológico, delimitación de la muestra, una descripción de los elementos utilizados y la aplicación de las dos estrategias. Además del análisis de protocolos verbales, diarios de campo y a nivel estadístico el análisis de pre test y pos test.

El capítulo seis, el análisis e interpretación de resultados donde se cuenta de los resultados obtenidos, En el capítulo siete de interpretación de los resultados, la cual muestra la relación de los instrumentos de recolección de los datos, contrastándolos con la teoría encontrada.

El capítulo ocho de conclusiones dando cuenta a los objetivos y la relación al marco teórico, como parte finalmente el capítulo nueve recomendaciones donde se consideran la implicaciones para investigaciones futuras

5. Metodología

La investigación tuvo un enfoque cualitativo, el cual permitió partir del estudio de métodos de recolección de datos de tipo descriptivo (protocolos verbales) y de observaciones (diario de campo) para expresar de manera discursiva categorías conceptuales en el proceso de desarrollo del razonamiento geométrico de estudiantes de grado tercero, al aplicar dos estrategias de visualización: Orientación estática del sujeto con respecto a los objetos y tareas de Interpretación de perspectivas de objetos tridimensionales, apoyados con un pre-test y en post test que permitieron evidenciar el avance de los participantes en el razonamiento geométrico en un nivel de visualización.

La población con la cual se realizó la investigación corresponde a 10 estudiantes del grado tercero, con los cuales se tomaron los videos, evaluando los seis (6) de mayores verbalizaciones para ser analizadas tres (3) de cada estrategia. Para el pre test y post test se tomó el total del grupo (36), incluidos los 10 estudiantes participantes del estudio de protocolos, que realizaron las diferentes sesiones.

Los estudiantes pertenecen al colegio IED Gran Colombiano de Bosa Laureles, institución pública ubicada en el barrio Bosa Laureles localidad (7) al sur de la ciudad de Bogotá, que cuenta con dos jornadas atendiendo a estudiantes pertenecientes a los estratos 1 y 2.

La recolección de la información se hizo a través de dos instrumentos de corte cualitativo (protocolos verbales y diario de campo) para compensar las posibles falencias de cada uno de ellos, apoyados en un pre test y post test, orientados en esta idea, se realizó la aplicación de 12 talleres, 6 para cada sesión, diarios de campo para cada sesión, un pre- test y post- test que respalden la información obtenida como fuente estadística.

6. Conclusiones

Partiendo de la aplicación de dos estrategias de visualización "orientación estática del sujeto y de los objetos "y "tareas de interpretación de perspectivas tridimensionales" en un ambiente computacional, cuyos datos son analizados con protocolos verbales apoyados en diarios de campo, análisis de pre test y post test, y lo desarrollado en el marco teórico, se concluye lo siguiente:

La estrategia dos resulto más compleja en cuanto a la construcción de figuras isométricas, las cuales implicaban tener un claro lenguaje gráfico para poder interpretar las representaciones

planas desde las proyecciones que ellas tenían de sus vistas y tener presente la forma, tamaño, y la posición de las figuras, para así mismo ser proyectadas.

Ahora de acuerdo a estándares básicos de competencias matemáticas del Ministerio de Educación Nacional (2006), para grado tercero se logra evidenciar manejo de la figura tridimensional en las dos estrategias y esto les permite hacer rotaciones mentales que los lleva a caracterizar los sólidos y figuras isométricas propuestas, especificando propiedades básicas de los mismos.

Al lograr construcciones tridimensionales su campo visual se amplía, y esto les permite reconocer con mayor exactitud los componentes y atributos que contienen las figuras, los sujetos de la estrategia uno muestran mayores posibilidades de hacer estas relaciones desde la primera y hasta la última sesión contrario a los sujetos de la estrategia dos, quienes en las últimas sesiones mostraron dificultad para lograr la construcción y su respectiva caracterización.

Las dos estrategias les permiten desarrollar habilidades de horizontalidad, poción espacial con diferentes puntos de referencia y esto a su vez les brinda la posibilidad de realizar construcciones en el espacio computacional con una similitud muy aproximada conservando las características propias de la figura.

De acuerdo con los objetivos de esta investigación donde se pretendió establecer una caracterización del razonamiento geométrico, se establece que en cuanto a la estrategia uno "orientación estática del sujeto con respecto al objeto" y la estrategia dos "tareas de interpretación de perspectivas tridimensionales" el razonamiento se da de acuerdo a los siguientes componentes basados en el nivel de visualización de Van Hiele, donde logran reconocer las figuras geométricas como un todo identificando sus atributos principales, al producir una copia similar al modelo en el ambiente computacional con mayor facilidad en la ventana vista gráfica bidimensional (2D); para

realizar las caracterizaciones hacen uso de sus pre saberes y comparaciones con el entorno, tal como lo establece Van Hiele y Hoffer, pero con mayor precisión en la estrategia uno, puesto que en la estrategia dos se evidenció gran dificultad para iniciar su construcción a partir de las vistas, sin embargo, es de resaltar que en la estrategia dos, cuando los sujetos lograron usar la vista gráfica tridimensional (3D), fue más asertivo y ágil la descripción de los atributos por la facilidad de rotar en el ambiente computacional la figura desde diferentes posiciones, además de lo anterior se evidencia un enriquecimiento de vocabulario geométrico usado por los participantes en la investigación, esto nos permite establecer de acuerdo a los resultados, que es la estrategia uno "orientación estática de los sujetos y relación a los objetos" fue la estrategia más adecuada para desarrollar procesos de visualización en los sujetos de estudio.

Ahora bien, teniendo en cuenta los aportes encontrados por los estudios realizados anteriores a esta investigación, se puede concluir en cuanto al uso de protocolos verbales como método de investigación, que estos contribuyen al análisis del razonamiento geométrico en la medida que permiten evidenciar los procesos de razonamiento geométrico de los sujetos estudiados al usar el ambiente computacional, logrando registros completos por medio de ayudas como a tube Catcher y la video grabadora, esto contrastado con las investigaciones hechas por Valencia et al. (2012).

La investigación además coincide con la hecha por Marmolejo y Vega (2012); en cuanto a lo que mencionan no basta con pocas sesiones para desarrollar la visualización, es necesario un proceso juicioso y constante para lograr resultados positivos y no solo en tercero de primaria, sino a lo largo de su educación primaria y secundaria; además en la investigación hecha por Briceño y Guzmán (2015) también se coincide, al evidenciar que las herramientas tecnológicas permiten que el estuante reduzca la distancia entre la imagen, figura y la representación que hace de la misma mejorando los procesos de visualización en los estudiantes

Al igual que otros investigaciones trabajadas en el marco teórico se concluye que es necesario e indispensable concientizar a los docentes sobre la incidencia positiva que tienen las nuevas tecnologías en el proceso de aprendizaje no solo en matemáticas (geometría), sino en las otras áreas del conocimiento, debido a que el mundo globalizado está permeado de esta nuevas tecnologías y es la responsabilidad de los docentes hacer uso asertivo de las mismas.

Finalmente es importante resaltar que el software Geogebra; como un ambiente computacional, según Rechinot (2007) como se citó en Castellanos (2010) dice "la utilización de GeoGebra no solo es motivadora a la hora de trabajar si no también es un apoyo de procesos de resolución de problemas, elaboración de conjeturas y validación" (p. 45), permite establecer que el uso de la tecnología contribuye de manera eficiente al desarrollo del razonamiento geométrico tanto que permite manipular de forma real las figuras y de una manera práctica caracterizar los sólidos y mejorar sus procesos de visualización que fue evidente en el desarrollo de la investigación. El ambiente computacional que se seleccionó para esta investigación contribuyó para que los sujetos se acercaran y familiarizaran con un vocabulario geométrico nuevo que aunque básico, le permitió al participante identificar conceptos como segmento, línea, polígono, punto, etc. Además permitió enriquecer experiencias a nivel exitosas con el uso del PC.

Elaborado por:	Deyanira Beltrán López Sandra Martínez Salamanca		
Revisado por:	David Macías Mora		
Fecha de elaboración del Resumen:	04	12	2017

Resumen

La presente investigación indagó y analizó los procesos cognitivos relacionados con el razonamiento geométrico en la aplicación de dos estrategias de visualización (orientación estática del sujeto y de los objetos e interpretación de perspectivas de objetos tridimensionales) mediadas por TIC en niños de grado tercero. Se recurrió a los lineamientos pedagógicos y curriculares establecidos para grado tercero a nivel nacional; al igual que a los niveles y habilidades de razonamiento geométrico propuestos por los Van Hiele (1984) y Hoffer (1981). Metodológicamente el proyecto de investigación se fundamentó en los análisis de protocolos verbales, con 6 fases en la investigación de reportes verbales: calentamiento, reporte de interés y grabación, transcripción, segmentación, clasificación y codificación (Requena, 2003), sustentado con los reportes de diario de campo en cuanto a lo cualitativo, y un aporte a los resultados apoyado con un pre test y post test que permita establecer los niveles de razonamiento geométrico en cuanto a la visualización al inicio y al final de la investigación. Las estrategias se enfocaron, mediadas por las TIC, desde las subcategorías visual, verbal, dibujo, lógica y aplicada basados en las habilidades plateadas por Hoffer (1981), haciendo uso de los sólidos geométricos y las figuras isométricas.

Palabras clave: visualización, razonamiento geométrico, protocolos verbales, estrategia, orientación geométrica, sujeto, objeto, perspectiva tridimensional, TIC.

Abstract

The present investigation investigates and analyzes the cognitive processes related to geometric reasoning in the application of two visualization strategies (Static orientation of the subject and of the objects and Interpretation of perspectives of three-dimensional objects) mediated by TIC's in children of third grade. The pedagogical and curricular guidelines established for third grade at the national level are used; as well as the levels and abilities of geometric reasoning proposed by the Van Hiele (1984) and Hoffer (1981). Methodologically, the research project is based on the analysis of verbal protocols, with 6 phases in the investigation of verbal reports: Warm-up, Report of interest and recording, Transcription, Segmentation, Classification and Coding (Requena, 2003), supporting the reports of field diary in terms of qualitative and a contribution to the results supported by a pre-test and post-test that allows establishing the levels of geometric reasoning in terms of visualization at the beginning and end of the investigation. The strategies will be focused, mediated by TIC'S from the visual, verbal, drawing, logic and applied subcategories based on silver skills by Hoffer (1981) making use of geometric solids and isometric figures.

Tabla de contenido

Introducción 30

1. Planteamiento del problema 33

2. Estado del arte de la investigación 37

2.1 Protocolos verbales e investigación 37

2.2. Visualización 42

2.3. Van Hiele y la geometría 50

2.4. TIC y Geometría 52

3. Marco teórico 58

3.1. Creación y representación mental del pensamiento geométrico y espacial 58

3.2. Lineamientos curriculares y pedagógicos de la estrategia 62

3.3. Teoría de Van Hiele 63

3.3.1. Niveles de Van Hiele 64

3.3.1.1 Nivel 1. (Básico, reconocimiento o visualización) de acuerdo a Hoffer (1983).. 64

3.3.1.2. Nivel 2: (de análisis) 65

3.3.1.3 Nivel 3 (Deducción informal, orden y clasificación) 66

3.3.1.4. Nivel 4 (Deducción informal) 66

3.3.1.5. Nivel 5: (de rigor) 67

3.3.2. Las fases del Modelo de Van Hiele 68

3.4. Visualización 69

3.5. Estrategias de visualización “orientación estática del sujeto y de los objetos e interpretación de perspectivas de objetos tridimensionales” 73

3.5.1. Orientación estática del sujeto y de los objetos 74

3.5.2. La segunda estrategia “Tareas de interpretación de perspectivas de objetos tridimensionales” 77

3.6. Dominio de conocimiento 80

3.6.1. El sólido 80

3.6.2 Vista 81

3.6.3. El punto 82

3.6.4. Segmento 82

3.7. Protocolos verbales 82

3.7.1. Cómo elaborar un protocolo verbal 84

3.12. Ambiente computacional Geogebra 86

4. Objetivos 90

4.1. Objetivo general 90

4.2 Objetivos específicos 91

5. Método 91

5.1 Tipo de investigación y enfoque 91

5.2. Participantes 92

5.3. Validez 92

5.4. Variables de la investigación 92

5.4.1. Variables independientes 92

5.4.2. Variables dependientes 93

5.5. Trayectoria y fases de investigación desde Análisis de Protocolos de Reportes verbales 93

5.6. Diario de campo 94

5.7. Pre - test y Post - test 95

5.8. Categorización 95

5.9. Categorías conceptuales disciplinares 96

5.10. Instrumentos de recolección 98

5.10.1. Protocolos verbales 98

5.10.2. Diario de campo 99

5.10.3. Pretest y post test 100

5.10.3.1. Pre test de razonamiento 100

5.10.3.2. Post test de razonamiento 100

5.11. Propuesta Pedagógica desde dos estrategias de visualización 100

6. Análisis e interpretación de resultados 101

6.1. Análisis de protocolos verbales de las sesiones con la aplicación de dos estrategias de visualización “orientación estática del sujeto y los objetos” y “tareas de interpretación de perspectivas de objetos tridimensionales” 102

6.1.1 Protocolos verbales estrategia uno “orientación estática del sujeto y los objetos” ... 103

6.1.1.1 Muestra de protocolos verbales, primera y sexta sesión de un sujeto estudio 107

6.1.1.2. Análisis de las diferentes sesiones de la estrategia uno de visualización “Orientación estática del sujeto y los objetos” 113

6.1.2 protocolos verbales estrategia dos “tareas de interpretación de perspectivas de objetos tridimensionales” 114

6.1.2.1. Muestra de protocolos verbales primera y sexta sesión de un sujeto estudio 119

6.1.2.2 Análisis de las diferentes sesiones de la estrategia dos de visualización “tareas de interpretación de perspectivas tridimensionales”..... 125

6.2. Análisis razonamiento geométrico estrategias de visualización 127

6.2.1. Análisis razonamiento geométrico estrategia uno “orientación estática del sujeto con respecto al objeto 128

6.2.2. Análisis razonamiento geométrico estrategia dos “tareas de interpretación de perspectivas tridimensionales” 130

6.3. Comparación del razonamiento geométrico en las estrategias uno y dos 132

6.3.1. Estrategia uno “Orientación estáticas del sujetos y de los objetos” 133

6.3.2. Estrategia dos “tareas de interpretación de perspectivas tridimensionales”..... 134

6.3.3. Conclusiones..... 136

6.4. Análisis de la asignación de atributos realiza por los sujetos 137

6.4.1. Resultados para la primera estrategia “orientación estática del sujeto con respecto al objeto” 138

6.5. Interpretación teórica de los resultados a través de las diferentes sesiones realizada..... 150

6.5.1. Conclusión estrategia 1..... 150

6.5.2. Conclusión estrategia 2..... 151

6.6. Diferencias y similitudes entre la estrategia 1 y 2..... 153

6.7. Diario de Campo 155

6.7.1. Estrategia uno “Orientación estática del sujeto y de los objetos” 156

7.7.2 Estrategia dos “tareas de interpretación de perspectivas tridimensionales”..... 162

6.8. Análisis del pre test 169

6.9. Análisis del pos- test 173

6.10. Contraste pre- test y pos- test 178

7. Interpretación de los resultados 178

8. Conclusiones 182

9. Recomendaciones 185

10. Referencias 188

11. Anexos 197

Lista de tablas

Tabla 1. Modelo Van Hiele (1984) con aportes de Hoffer (1981) para la enseñanza de geometría *96*

Tabla 2. Categorías conceptuales disciplinares. Categorías Metodológicas de Análisis de Protocolos Verbales *96*

Tabla 3.Cuadro de análisis de protocolos *98*

Tabla 4. Análisis razonamiento geométrico *99*

Tabla 5. Tabla de análisis de diario de campo *99*

Tabla 6. Análisis de protocolos verbales, estrategia uno - sesión uno *107*

Tabla 7. Análisis de protocolos verbales estrategia uno sesión 6 ..... *110*

Tabla 8. Muestra la conclusión de las seis sesiones realizadas para ver el desarrollo del razonamiento geométrico en los diferentes momentos en la estrategia uno de visualización "orientación estática del sujeto y los objetos *113*

Tabla 9. Análisis de protocolos verbales estrategia dos - sesión uno *119*

Tabla 10. Análisis de protocolos verbales estrategia dos -sesión seis *121*

Tabla 11. Muestra las conclusiones de las seis sesiones realizadas para ver el desarrollo del razonamiento geométrico en los diferentes momentos en la estrategia dos de visualización "Tareas de interpretación de perspectivas tridimensionales" *125*

Tabla 12. Análisis razonamiento geométrico estrategia uno "orientación estática del sujeto con respecto al objeto *128*

Tabla 13. Análisis razonamiento geométrico estrategia dos "tareas de interpretación de perspectivas tridimensionales *130*

Tabla 14. Diferencias y similitudes en las estrategias *153*

Tabla 15. Análisis diario de campo sesión uno *156*

Tabla 16. Análisis diario de campo sesión dos *157*

Tabla 17. Análisis diario de campo sesión tres *158*

Tabla 18. Análisis diario de campo sesión 4 ..... *159*

Tabla 19. Análisis diario de campo sesión cinco *160*

Tabla 20. Análisis diario de campo sesión seis *161*

Tabla 21. Análisis diario de campo sesión uno *162*

Tabla 22. Análisis diario de campo sesión dos *163*

Tabla 23. Análisis diario de campo sesión tres *164*

Tabla 24. Análisis diario de campo sesión cuatro *165*

Tabla 25. Análisis diario de campo sesión cinco *166*

Tabla 26. Análisis diario de campo sesión seis *168*

Lista de figuras

Figura 1. Interacciones cognitivas en la actividad geométrica 71

*Figura 2. Vista bidimensional.....**¡Error! Marcador no definido.***

Figura 3. Vista tridimensional..... 87

Figura 4. Geogebra 88

Figura 5. 88

Figura 6. 90

Figura 7. Descripción dada por los sujetos en la Sesión 1 138

Figura 8. Descripción dada por los sujetos en la Sesión 2 139

Figura 9. Descripción dada por los sujetos en la Sesión 3 estrategia 1, a partir de sus atributos 140

Figura 10. Descripción dada por los sujetos en la Sesión 4 estrategia 1, a partir de sus atributos 141

Figura 11. Descripción dada por los sujetos en la Sesión 4 estrategia 1, a partir de sus atributos 142

Figura 12. Descripción dada por los sujetos en la Sesión 6 estrategia 1, a partir de sus atributos 143

Figura 13. Descripción dada por los sujetos en la Sesión 1 estrategia 2, a partir de sus atributos 144

Figura 14. Descripción dada por el sujetos Sesión 2 estrategia 2, a partir de sus atributos ... 145

Figura 15. Descripción dada por los sujetos Sesión 3 estrategia 2, a partir de sus atributos .. 146

Figura 16. Descripción dada por los sujetos en sesión 4 estrategia 2, a partir de sus atributos 147

Figura 17. Descripción dada por los sujetos en la Sesión 5 estrategia 2, a partir de sus atributo 148

Figura 18. Descripción dada por los sujetos Sesión 6 estrategia 2, a partir de sus atributos . 149

Figura 19. Visualización de los tipos de línea e identificación del segmento 170

Figura 20. Verbaliza 171

Figura 21. Lógica 172

Figura 22. Análisis de resultados del pre- test 173

Figura 23. Visualización de los tipos de línea e identificación del segmento 174

Figura 24. Verbaliza 175

Figura 25. Lógica 176

Figura 26. Resumen post test 177

Figura 27. Relación de los instrumentos de recolección de los datos 180

Introducción

La presente investigación ubica la geometría en el papel fundamental que cumple en la matemática, teniendo presente que en los últimos años ha sido relegada a un área de poco significado, a la que la mayoría de docentes de primaria dejan como actividades de último periodo y de poca relevancia, no solamente en Colombia, como lo muestra el estudio hecho por la UNESCO (2009) y publicado en su informe "Aportes para la enseñanza de la matemática", donde hacen una mención a la enseñanza de la geometría a nivel mundial, especificando:

> Cabe destacar que si bien se busca que la evaluación responda a todos los ejes de contenidos, la enseñanza de la geometría ha perdido significatividad en muchas escuelas y no es habitual que los docentes desarrollen propuestas que resulten verdaderos desafíos para los niños. (UNESCO, 2009, p. 21)

Ahora, si se tiene presente que en el área de matemáticas no solo se trabaja la parte numérica y algebraica, sino que un componente importante es la geometría, la cual según Costes, Osio, Bernardi, Facello y Ferraris (2010):

> Forma parte de nuestro lenguaje cotidiano, tiene importantes aplicaciones en problemas de la vida diaria, se usa en todas las ramas de la matemática, es un medio para desarrollar la percepción espacial y visualización, es además una disciplina organizada lógicamente. (p. 509)

Asimismo ayuda a estimular, ejercitar habilidades de pensamiento y estrategias de resolución de problemas dando oportunidad para observar, comparar, medir, conjeturar, imaginar, crear, generalizar y deducir.

Partiendo de esta premisa es importante pensar cuál es la mejor estrategia para el desarrollo del razonamiento geométrico, esta preocupación no es de ahora, investigadores como Van Hiele (1984) han profundizado en el tema, llegando a plantear niveles de razonamiento; sobre el tema, Hoffer (1981) además propuso algunas habilidades para estos niveles, ambos investigadores especifican que no es necesaria una edad determinada para lograr avanzar en el proceso de razonamiento geométrico, lo que es importante son los estímulos.

El primer nivel propuesto por los investigadores es el de visualización, que aparentemente es el más básico, sin embargo autores como Castañeda (2004) como se citó en Castellanos (2010) dan mayor importancia a este primer nivel cuando menciona que "la visualización permite resolver, y a veces de forma sencilla, problemas que en algunas ocasiones pueden resultar complicados" (p. 8).

Además, Gutiérrez (1991) como se citó en Castellanos (2010) en su artículo "Procesos en Visualización Espacial" acotó que "la percepción visual es un elemento importante en infinidad de actividades de la vida, no solo en las relacionadas con el aprendizaje escolar o con la geometría" (p. 8).

Siendo la visualización, como los dicen los autores, la base de razonamiento geométrico, se hace necesario profundizar sobre el tema indagando en el cómo desarrollar procesos más pertinentes y estrategias que permitan fortalecer las habilidades en este nivel, y que estas contribuyan de manera significativa en los niveles posteriores de análisis, deducción y rigor.

Fernández (2013) considera dos de las razones fundamentales por las que hace décadas varios autores como Arcavi (2003); Battista (2007); Gutiérrez (1998); Hershkowitz, Parzysz y van Dormolen (1996); Phillips, Norris y Macnab (2010); Presmeg (2006: 2008); Rivera (2011); Zimmerman y Cunningham (1991) como se citó en Fernández (2013) han trabajado la

visualización en relación al pensamiento geométrico y espacial. La primera se relaciona con el cambio de los entornos educativos por las mediaciones de las tecnologías de la información. La segunda se establece en consecuencia a la posición teórica que afirma que la matemática es una búsqueda de patrones y la visualización sería la clave para reconocerlos. Por lo anterior, algunos autores han trabajado esta relación entre tecnologías de la información y su incidencia en los procesos de razonamiento geométrico (Torregrosa, 2012; Briseño & Guzmán, 2015; Marmolejo & Vega, 2012).

Estos procesos de visualización apoyados en ambientes computacionales pueden ser dirigidos bajo un enfoque de resolución de problemas; García y López (2008) en su libro "Enseñanza de la Geometría" señalaron este aspecto enfoque de resolución de problemas en la enseñanza de la Geometría; resolver problemas constituye no solo la finalidad de enseñar matemáticas sino también un medio a través del cual los alumnos construyen conocimientos matemáticos, lo que abre un camino a metodologías exitosas para la enseñanza de la geometría basada en este aspecto; y a su vez esto permitan al estudiante construir su conocimiento.

Esta investigación pretendió establecer la incidencia de dos estrategias de visualización "orientación estática del sujeto y de los objetos" y "tareas de interpretación de perspectivas tridimensionales" en el desarrollo del razonamiento geométrico, haciendo uso de un ambiente computacional que en este caso fue "Geogebra". Para determinarlo se aplicó el método de protocolos verbales, donde se analizaron los saltos cualitativos que tuvieran los estudiantes durante el desarrollo de seis sesiones que manejaron temas como sólidos e isométricos; estableciendo las categorías que el estudiante usa para el desarrollo del razonamiento geométrico estos se complementaron con diarios de campo en cuanto a lo cualitativo, y para sustentar estos

resultados se usó un pre test y un post test que permitieran medir el nivel de inicio y final en cuanto al razonamiento geométrico.

1. Planteamiento del problema

Actualmente la educación se encuentra en una transición hacia una nueva forma de mirar y percibir el entorno educativo. Cada día aparecen nuevas maneras de comunicación y de enseñanza que permiten obtener aprendizajes más significativos, pues el colegio ya no se concibe como el único espacio para adquirir nuevos conocimientos.

Las últimas evaluaciones realizadas por PISA (2016) han evidenciado cómo en el área de matemáticas existe debilidades en el análisis de las competencia y componentes como el razonamiento, la resolución de problemas, y los aspectos geométricos; estos ítems están ubicados en desempeños bajos con resultados desfavorables en estas pruebas, obteniendo calificaciones por debajo de las esperadas.

Por otro lado, de acuerdo a los resultados institucionales de la Prueba Saber es posible inferir que los estudiantes de grado tercero de Básica Primaria en las competencias matemáticas (geometría) evidencian un rendimiento por debajo de los componentes expuestos con respecto al promedio nacional.

Con base en lo anterior, específicamente desde la presente investigación se buscó fortalecer la comprensión del dominio geométrico – espacial de las matemáticas mediante el uso de estrategias que requieren de los medios computacionales con estudiantes de grado tercero de primaria.

Debido a que se hace necesario que los maestros y maestras creen condiciones para que los niños y niñas amplíen y usen sus conocimientos y formas de operar desde las diversas situaciones que se presentan en su entorno, que provoquen un desafío cognitivo.

Específicamente en el área de geometría Castiblanco, Urquina, Camargo y Acosta (2004) afirmaron que esta se encuentra ligada a las actividades diarias de tipo social, cultural, científico y tecnológico, siendo parte de la ciencia que moldea nuestra realidad espacial, la cual contribuye a la comprensión de otras áreas del conocimiento, desarrollando diversas habilidades cognitivas para obtener mejor provecho a las aplicaciones que esta puede ofrecer en las diferentes asignaturas propias del área, las cuales se irán fortaleciendo en cada uno de los grados posteriores de la primaria y secundaria.

> [En cuanto a] los sistemas geométricos, se hace énfasis en el desarrollo del razonamiento geométrico, el cual es considerado como el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones a representaciones materiales. (Ministerio de Educación Nacional, s.f., p. 1)

Son diferentes los autores que han investigado sobre la geometría y sus habilidades (Proenza & Leyva, 2007; Piaget, 1981; Vigotsky, 1978; Van Hile, 1980; Rivera, 2011 y Zimmerman & Cunningham, 1991 como se citó en Fernández, 2013) quienes en sus estudios han evidenciado la importancia de fortalecer el desarrollo del razonamiento geométrico desde el currículo, puesto que como se ha dicho anteriormente es la geometría un aspecto poco trabajado en las aulas, desconociendo el gran aporte que el estudio de la geometría da al área de matemáticas, para ello es necesario encontrar y desarrollar estrategias que mejoren los procesos, la cual es la razón de esta investigación.

La teoría de Van Hile, marco predominante al hablar de didáctica de la geometría y su visualización (Torregrosa, 2012), es un aspecto que cabe resaltar en sus planteamientos teóricos y didácticos; haciendo referencia a un proceso progresivo de visualización del objeto a nivel cognitivo que conlleva a desarrollar habilidades básicas de abstracción geométrica. Retomando las ideas de Arcavi (2003) como se citó en Gómez (2012), la visualización es una potencialidad, una acción y un resultado de diferentes procesos que toman la cognición como representaciones, imágenes o figuras a nivel del raciocinio; en este proceso de visualización el sujeto hace uso de tecnologías con el fin de asimilar, transmitir o desarrollar información que permita aumentar la comprensión sobre el objeto analizado.

De acuerdo a los planteamientos de Torregrosa (2012); Briseño y Guzmán(2015); Marmolejo y Vega (2012); estos convergen en la necesidad de continuar con investigaciones alrededor del pensamiento geométrico con distintas poblaciones y utilizar de manera favorable la geometría dinámica, entendiéndose esta en la investigación como la que permite que el estudiante construya, explore e indague con respecto a las figuras, que tiene la posibilidad de crear y que logra su materialización mediante la herramienta Geogebra.

De esta forma se abordan dos debates principales. El primero, de orden disciplinar; Batista (2008) ha propuesto la ampliación de las fases de la teoría de Van Hiele en cuanto a categorías, argumentando que existen más objetos en el proceso cognitivo. Este autor propone el objeto físico (ej. Pelota), el objeto perceptivo (lo que permite reconocer el proceso de sensopercepción básico), el conceptual (entendido como modelo mental que se activa por invocación) y finalmente, el geométrico (entendiéndose como la expresión verbal que explícita y demuestra la relación espacial).

El segundo debate se relaciona con la necesidad de reconocer más relaciones entre las tecnologías de la información, la geometría dinámica y la capacidad de aprehensión de contenidos de pensamiento geométrico desde las diferentes estrategias de visualización, en este caso la orientación estática del sujeto y de los objetos e interpretación de perspectivas de objetos tridimensionales (Berthelot & Salín, 1992 como se citó en Gonzato, Fernández, & Díaz, 2011). Es por ello que se decidió optar por utilizar estas dos estrategias de visualización.

La primera estrategia utilizada fue la orientación estática del sujeto y de los objetos; esta se orienta a trabajar las tareas que "tratan el problema de la orientación del cuerpo del sujeto con relación a otros objetos, y la eventual orientación de objetos (orientaciones que involucran el conocimiento del esquema corporal y la posible proyección de este esquema en el objeto)" (Gonzato *et al.,* 2011, p. 101). Reconocer la derecha e izquierda de un cuerpo que se encuentra de costado, de frente o atrás bajo la referencia de la propia ubicación corporal son tareas comunes, que se realizan de forma física, no obstante en esta investigación se realizaron con ayuda de un software mediante la rotación mental de los objetos con respecto al cuerpo del sujeto.

La segunda estrategia usada fue la interpretación de perspectivas de objetos tridimensionales; la cual hace referencia a las actividades orientadas a cambiar puntos de vista sobre un objeto, interpretar perspectivas y reconocer representaciones planas para construir objetos tridimensionales cognitivamente (Gonzato *et al.,* 2011). Varios autores (García, 2011; Gonzato *et al.,* 2011; Castiblanco *et al.*, 2004) han trabajado esta estrategia desde el desarrollo de actividades que buscan fortalecer el pensamiento geométrico con recursos virtuales como Geogebra, Geoespacio y Multicubos.

Más allá de la geometría dinámica, la tecnología misma forma parte de un medio de representación, por tanto "servirá como herramienta fructífera para la construcción de conceptos matemáticos más profundos que se reflejan en procesos exitosos por parte de los estudiantes en la resolución de problemas" (Hitt, 2002 como se citó en Castellanos, 2010, p. 39).

De esta forma se tomó la teoría de Van Hiele para abordar el proceso de Visualización, desde el Análisis de Protocolos Verbales como metodología (Eric y Simón, 1994) para describir y caracterizar en la aplicación de las dos estrategias "orientación estática del sujeto y de los objetos e interpretación de perspectivas de objetos tridimensionales" (Gonzato *et al.,* 2011, p. 101) mediadas por el uso de Geogebra, los procesos cognitivos involucrados en el razonamiento geométrico en estudiantes de tercer grado bajo la propuesta pedagógica.

De acuerdo a estos postulados, esta investigación pretendió explorar los procesos de razonamiento geométrico en cuanto a las habilidades de visualización, por medio de dos estrategias de visualización y un componente computacional dando respuesta a la siguiente pregunta.

¿Cuáles son las características del razonamiento geométrico en los estudiantes que trabajan bajo dos estrategias de visualización: orientación estática del sujeto y de los objetos e Interpretación de perspectivas de objetos tridimensionales?

2. Estado del arte de la investigación

2.1 Protocolos verbales e investigación

Valencia y Sanabria (2008) realizaron una investigación titulada "la solución de problemas en la comprensión de conceptos de geometría dinámica a través de ambientes computacionales" por medio de una metodología de tipo mixto (cuantitativo y cualitativo) a una población de

estudiantes del Colegio Distrital Rodrigo Lara Bonilla ubicado en la localidad de Ciudad Bolívar.

Para la fase cualitativa la población fue de 2 sujetos únicamente y en la fase cuantitativa 40 estudiantes. El procedimiento realizado tomó la técnica de protocolos verbales para 1) "Determinar las estrategias seguidas para la solución de un problema grafico […]" y 2) "El manejo y cambio conceptual del sujeto a medida que avanza en la solución" (Valencia & Sanabria, 2008, p. 5). Esto por medio de la grabación de la verbalización de los estudiantes para posteriormente codificarla y modelarla a través de un esquema denominada "árbol de decisiones".

Los resultados encontrados, que son de utilidad para la presente investigación, indicaron que es insuficiente el ambiente computacional para que el estudiante comprenda el concepto a enseñar, dado que es necesaria la mediación del docente y otros medios. Se concluyó también que la utilización de protocolos verbales fue útil en esta investigación para apreciar las características de los sujetos que les permiten "inferir modelos de razonamiento, adaptados al a elaboración de modelos gráficos en el análisis de procesos espaciales" (Valencia & Sanabria, 2008, p. 6).

A su vez, Requena (2000) llevó a cabo una investigación denominada "resolución de problemas algebraicos de las olimpiadas venezolanas de matemáticas". En principio se tomó por población a 3 estudiantes de educación de la U.C.A.B utilizando una metodología de investigación de campo que utilizó la técnica de protocolos verbales. El estudio fue divido en 2 fases a lo largo de todo el procedimiento; el procedimiento puntual comprende: 1) calentamiento 2) el reporte de interés y grabación 3) Transcripción 4) Segmentación 5) Clasificación y segmentación.

En la primera fase se realizó el análisis de los problemas algebraicos (PALAS) sistematizando los mismos, de forma que se evidenciaran como categorías de análisis, luego se les presentaron los problemas y se les pidió a los participantes que verbalizaran su pensamiento; a las verbalizaciones se les realizó un análisis para identificar los procesos cognitivos alrededor de la solución de los problemas algebraicos. Para esto se determinaron las categorías de análisis, se realizó en la primera fase la grabación del audio de las verbalizaciones de los sujetos a partir de una indagación general del problema a resolver, luego se segmentó las verbalizaciones en unidades significativas y codificación de cada segmento.

Los resultados relevantes para la presente investigación comprenden que según este autor el protocolo verbal presenta como producto de su utilización la identificación de procesos cognitivos alrededor de tareas específicas. También indicó que la utilización de la técnica de protocolos verbales al dar a conocer los procesos empleados en la resolución de problemas permite que los educadores sean capacitados para ofrecer mejores resultados pedagógicos. Esta investigación presentó además un antecedente en el que se aplicaron algunas de las teorías sobre las que esta investigación se sustenta, el autor recomienda el uso de apoyo audiovisual puesto que identifica como una limitante la información netamente verbal, omitiendo la información no verbal, lo cual indica podría dar "un registro más completo".

Por su lado, Valencia, Sanabria e Ibáñez (2012) en su investigación "procesos cognitivos y metacognitivos en la solución de problemas de movimientos de figuras en el plano a través de ambientes computacionales", cuyo propósito fue comparar los efectos de las versiones de tangram en manera concreta y en la computadora, evaluando el razonamiento y las estrategias cognitivas o metacognitivos en el proceso de aprendizaje de formas geométricas bidimensionales y sus variantes, teniendo en cuenta 1) si existen diferencias significativas en la comprensión de

conceptos sobre movimiento de figuras geométricas entre un grupo de estudiantes que resuelve problemas que van de lo simple a lo complejo, y otro que lo hace de lo complejo a lo simple; y 2) si las estrategias cognitivas se identifican en la interacción de un grupo de estudiantes que resuelve problemas de movimiento de figuras geométricas en el espacio, apoyados en escenarios computacionales.

"La investigación se realizó bajo un enfoque metodológico cuasi-experimental que utiliza un método cuantitativo para determinar la recolección y análisis de datos, complementado con un estudio cualitativo exploratorio a través del análisis de protocolos" (Valencia *et al.*, 2012, p. 51). A partir del análisis estadístico se logró la integración de los resultados y la generación de las inferencias, para este estudio se tomó a seis estudiantes, el objetivo del estudio cualitativo fue analizar los procesos de solución de problemas, identificando las estrategias cognitivas de los estudiantes que intervienen en el juego de ambientes computacionales

El uso de protocolos verbales permitió establecer los procesos cognitivos y metacognitivos que los aprendices manejaron, mientras realizaban los ejercicios por medio de un árbol de decisiones se pudo observar cómo el sujeto es obligado a razonar en la resolución de problemas, utilizando dos estrategias, una en cuanto a la localización de la figura y ajuste del tamaño de acuerdo al límite y la otra el ajuste del tamaño del objeto en comparación con el estado final. Las actividades con figuras geométricas dinámicas llevan a la utilización de tres tipos de acciones principalmente, una relacionada con la transformación de las figuras, otro con la translación de esta y una última a las transiciones con el fin de localizarlas con mayor precisión.

Adicionalmente, en la investigación realizada por Valencia y Leiva (2005) "reportes automatizados y verbales: incidencia en el aprendizaje de la solución de problemas", se contextualiza en la resolución de problemas y pretende validar la implementación de dos tipos de

intervención de feedback adaptativo, reportes automatizados y verbales, teniendo en cuenta el número de eventos realizados y tiempo empleado en la solución de problemas de palancas en un ambiente computacional "micro mundos".

Por lo tanto se partió de la siguiente pregunta: ¿Existen diferencias significativas en términos del número de eventos realizados y el tiempo empleado, en la solución de problemas de palancas de primer género, en un ambiente computarizado "Micromundo", entre un grupo de estudiantes que observa el reporte automatizado de su proceso con otro grupo que escucha el reporte verbal del proceso?

Para la ejecución de la investigación se trabajó bajo el marco de la pedagogía para la tecnología, con una temática de máquinas simples con un ambiente computarizado con características particulares de micromundos, orientado a la solución de problemas, donde se contrastaron reportes automatizados y reportes verbales. A través de la conformación de tres grupos experimentales.

Grupo 1: sujetos que solucionaron problemas y observaron el reporte automatizado de su proceso.

Grupo 2: sujetos que solucionaron problemas y escucharon reportes verbales de su proceso.

Grupo 3: sujetos que solucionaron problemas sin retroalimentación.

La variable independiente planteada fue según las condiciones experimentales, es decir tipo Feedback al que se sometían los sujetos e la solución de problemas; la dependiente se definió a partir del desempeño alcanzado por los estudiantes en la solución de problemas, que fue evaluado en términos del número de eventos realizados y tiempo empleado.

La población de muestra fue de 90 estudiantes de grado noveno, del colegio Institución Educativa Distrital Rodrigo Lara Bonilla. Donde se hizo una distribución aleatoriamente en tres grupos conformados por 30 estudiantes.

Los resultados de la investigación lograron evidenciar estadísticamente la incidencia en la utilización de la visualización de los reportes automatizados propios y la audición de los reportes verbales propios planteados como tipos de feedback adaptativo, sobre el aprendizaje en términos del número de eventos realizados y el tiempo empleado en la solución de problemas de palancas de primer género.

A nivel cualitativo se encontró una incidencia positiva en la intervención que utilizó como tipo de feedback la audición de los reportes verbales propios, sobre la construcción de estrategias fuertes de solución y autorregulación de procesos.

Los aprendizajes previos influyeron positivamente en el número de eventos realizados y el tiempo empleado en la solución de problemas, y la cantidad de variables o relaciones establecidas en este proceso influyeron negativamente, aumentando el esfuerzo cognitivo de los estudiantes.

2.2. Visualización

Marmolejo y Vega (2012) realizaron una investigación cualitativa de naturaleza comparativa, descriptiva e interpretativa, utilizando como metodología el Análisis Funcional de Duval (1999) como se citó en Marmolejo y Vega (2012), el cual hace referencia a un método cualitativo que busca comprender los procesos cognitivos que estudia desde la teoría de las representaciones semióticas, el cual plantea que la matemática es otro sistema de representación al no tener objetos concretos como las otras disciplinas. Los datos se obtuvieron de pruebas escritas y

entrevistas semiestructuradas aplicadas a 150 estudiantes de tercero de primaria, ancladas en paradigmas del lenguaje y la lingüística, lo que define procesos de análisis claramente diferentes.

La investigación pretende identificar:

> Las diferencias y similitudes existentes entre las maneras de ver privilegiadas por parte de estudiantes que previamente han tenido la oportunidad de reflexionar de manera explícita sobre las posibilidades heurísticas y operatorias que brindan las figuras, y las formas de ver implementadas por estudiantes que no han tenido esa oportunidad. (Marmolejo & Vega, 2012, p. 16)

Para ello se tomaron cuatro categorías:

El nivel 1 de operaciones visuales hace referencia a que la figura no es suficiente para dar respuesta a la pregunta planteada, además los estudiantes se centran en las partes y no en su totalidad, por lo que se quedan con la percepción y no realizan operaciones que los lleve a dar cuenta del resultado. El nivel 2 de focalización donde los estudiantes están en la capacidad de ver subcategorías de manera parcial y esto les permite realizar algunas operaciones aritméticas para resolver el problema. El nivel 3 referente al rol heurístico implica una transformación de la figura, realizando modificaciones en la misma ya sea por representaciones mentales o físicas. El nivel 4 de transformación también implica una transformación de la figura, pero esta vez desde sub-categorías.

En este estudio se evidenció que la mayoría de estudiantes se encuentra en un nivel 1 y 2 de visualización, lo cual implica que hasta ahora se ha desarrollado una competencia perceptual pero no de abstracción teórica. Por el contrario, los estudiantes que lograron niveles 3 y 4 de visualización están directamente correlacionados con las clases extras que recibieron ante esta

temática como parte del diseño investigativo. Esto permite destacar la enorme complejidad de la visualización alejándola de un concepto obvio y espontáneo, evidenciando su función cognitiva.

En este sentido es importante resaltar que si bien la implementación de una cuantas sesiones de enseñanza de la visualización suscita una variedad de procedimientos, algunos de ellos de considerable potencia en el desarrollo de tareas matemáticas, no bastan unas pocas sesiones para asegurar una adecuada movilización de los tratamientos figúrales que permitan a la visualización ser una herramienta heurística ante las exigencias que las matemáticas escolares requieren. Por el contrario, ha de constituirse en objeto constante de enseñanza durante los primeros ciclos de la educación básica. El área de regiones poligonales, por su parte, se constituye en la ocasión propicia para promover la enseñanza de la visualización asociada a las figuras geométricas. Pues como se ha puesto en evidencia en este documento la comparación de figuras a partir de sus cantidades de área es un lugar idóneo para el desarrollo de habilidades visuales en los primeros grados de la educación primaria, máxime si se considera que este objeto métrico tiende a ser un elemento de reflexión a lo largo de toda la educación básica. En este sentido se afirma que el área de regiones poligonales se constituye en una entrada a la enseñanza de la geometría.

De esta experiencia investigativa y coincidiendo con Torregrosa (2012), se considera que el alumno cuenta con saberes desligados de su cotidiano que son asimilables como fuentes de conocimiento para el aprendizaje de geometría. Es importante generar conexiones con la realidad para transmitir su sentido.

Asimismo, Carmona (2011) en su tesis doctoral: “La Circunferencia, Una Propuesta Didáctica utilizando la geometría dinámica y la teoría de Van Hiele”, estableció cómo utilizar la geometría dinámica y la teoría de Van Hiele para generar el concepto de circunferencia, para ello desarrolló una estrategia pedagógica que utilizaba la circunferencia como punto central para que por medio

de programas de geometría dinámica (Software Regla y Compas), en esta se desarrollaran conceptos como triángulos y ángulos generando el proceso de visualización de Van Hiele.

En sus conclusiones el autor afirmó:

> Utilizando la Geometría Dinámica y activa se puede acercar el conocimiento geométrico a los estudiantes, desarrollando los contenidos curriculares, resolviendo situaciones-problema e inclusive profundizando conocimientos que permitan el desarrollo de habilidades y competencias no solo argumentativas sino propositivas. (Carmona, 2011, p. 49)

Igualmente muestra que el uso de un software dinámico no contribuye de manera eficiente al desarrollo del nivel de análisis de acuerdo a la propuesta de Van Hiele, evidencia que se requiere instrucciones coherentes y ordenadas que permitan una inferencia positiva en el desarrollo del pensamiento

Los hallazgos encontrados en esta investigación invitan a profundizar en los factores psicológicos de las estructuras de razonamiento matemáticas, especialmente en lo que se refiere a geometría, enfatizando en el proceso de visualización, el cual no está libre de dificultad en cuanto a que es necesaria la captación de la estructura compleja del fenómeno en su mayor plenitud y esto podría ser estudiar a través del análisis protocolos verbales.

Briseño y Guzmán (2015) realizaron una investigación sobre la construcción de conceptos matemáticos mediante la visualización geométrica con programas informáticos dinámicos, donde se pretendió establecer de qué forma el uso de herramientas computacionales contribuían en la construcción de conceptos matemáticos, el estudio fue de corte cualitativo basado en la teoría de Duval con 15 estudiantes de grado quinto, con quienes se implementaron actividades de visualización que requerían análisis, formulación y resolución de problemas geométricos con

ayuda de herramientas tecnológicas; la investigación permitió concluir que las herramientas tecnológicas permiten que el estudiante reduzca la distancia que hay entre la imagen o figura, la representación mental que se hace de la misma y el objeto matemático como tal. Además de esto, concluyeron que la visualización a diferencia de la percepción permite que la persona no solo identifique el objeto desde dimensiones bidimensional; por el contrario, esta habilidad cognitiva posibilita la representación mental y desde una posición tridimensional.

El uso de programas tecnológicos fomenta la visualización en los estudiantes, pues estos programas construyen las figuras, pero así mismo involucra una interacción o manipulación con la misma donde se puede ver desde diferentes perspectivas visuales y aplicando los conceptos teóricos a esa "visualización" (Briseño & Guzmán, 2015).

Por su parte, Marmolejo y Vega (2012) realizaron una investigación sobre "La visualización en las figuras geométricas. Importancia y complejidad de su aprendizaje", en la cual se pretendió evidenciar estrategias de enseñanza para transformar figuras geométricas y hacer comparaciones sobre las mismas, lo que permitió reconocer que el registro semiótico es un soporte intuitivo que ayuda a dotar de sentido y significado el aprendizaje de las matemáticas, además muestra la visualización como una función cognitiva que debería ser incluida en los procesos de enseñanza de forma más juiciosa dado que no se adquiere de forma inmediata y obvia, para ello se requiere un tratamiento de la información en un aprendizaje específico. Esta investigación fue de tipo cualitativo, participaron 150 estudiantes de tercer grado, el propósito era comparar, describir y explicar el proceso cognitivo en cuanto a la visualización en figuras geométricas, los datos se recolectaron usando producciones escrita al resolver tareas y entrevistas semiestructuradas. Entre las conclusiones a las que llegaron los investigadores se destaca precisamente la importancia de trabajar la geometría desde el fortalecimiento de la visualización, llegando a

establecer que el individuo discrimina de diferentes maneras haciendo verdaderos soportes intuitivos en el desarrollo de las actividades matemáticas, las regiones poligonales constituyen una ocasión propicia para promover la enseñanza de la visualización asociada a las figuras geométricas en especial en la educación básica.

Castellanos (2010) en su tesis: "Visualización y razonamiento en las construcciones Geométricas con alumnos de II de magisterio de la e.n.m.p.n utilizando el software Geogebra", se propuso distinguir las percepciones de los estudiantes entre propiedades y relaciones, y si estas diferencias indican niveles de compresión de las construcciones; además establecer cómo se puede contribuir al aprendizaje y comprensión de la geometría haciendo uso de la visualización apoyada en herramientas tecnológicas, integrando aspectos como cuerpos físicos, representaciones planas estáticas en papel y dinámicas en el ordenador. Para ello se diseñaron actividades que llevaran a utilizar la percepción, la discriminación visual y otras habilidades de la visualización; la investigación fue de tipo cualitativo de corte exploratorio, con 45 estudiantes de segundo grado, pero la muestra fueron 12 quienes trabajaron en 14 sesiones en dos grupos, los investigadores concluyeron que el uso de software contribuye en el rasgo cognitivo fundamental para realizar una demostración logrando otro nivel de abstracción, sin embargo, se evidencia que aun así los estudiantes tienen cierta dificultad para hacer razonamientos. La investigación evidenció que el uso de la herramienta tecnológica contribuyó al mejoramiento de visualización en cuanto a la coordinación viso motora, logrando reproducir una figura en movimiento con la computadora, igualmente mejorar su discriminación visual y su percepción.

La investigación convoca a profundizar sobre las ventajas de usar las nuevas tecnologías en el desarrollo del pensamiento, invita a que estos procesos no solo se realicen en grados de

educación secundaria, sino que debería iniciarse desde educación inicial sin perder de vista que el uso del lápiz y el papel es necesario e importante en los procesos de pensamiento.

Seguidamente, Briseño y Guzmán (2015) realizaron una investigación con el fin de identificar de que forma el uso de la tecnología contribuye en la construcción de conceptos matemáticos mediante el estudio de figuras geométricas, para ello se tomó conceptos relacionados con la visualización de tipo estático y dinámico. La investigación fue de corte cualitativo aplicada a 12 estudiantes de decimo, los registros se realizaron de forma escrita y por video grabadora, el propósito fue diseñar tareas significativas accesibles e interesantes con el uso de herramientas tecnológicas. Se concluyó que las herramientas tecnológicas permiten que el estudiante reduzca la distancia que hay entre la imagen o figura, la representación mental que se hace de la misma y el objeto matemático como tal. Además de esto, la visualización a diferencia de la percepción, permite que la persona no sólo identifique el objeto desde dimensiones bidimensional; por el contrario, esta habilidad cognitiva posibilita la representación mental y desde una posición tridimensional.

El uso de programas tecnológicos fomenta la visualización en los estudiantes, pues en estos programas construyen las figuras, pero así mismo involucra una interacción o manipulación con la misma donde se puede ver desde diferentes perspectivas visuales y aplicando los conceptos teóricos a esa "visualización" (Briseño & Guzmán, 2015).

Por la misma línea, Arboleda (2015) en su tesis doctoral: "Propuesta de enseñanza aprendizaje de la geometría de las figuras planas en básica primaria", partió de los conceptos de visualización de Van Hiele para hacer la propuesta de una unidad didáctica que permitiera fortalecer procesos de pensamiento geométrico.

Su objetivo general se orientó:

> [A] diseñar una unidad Didáctica para el quinto grado de primaria del colegio Corazonista que permita a los estudiantes reconocer, clasificar, describir, e interpretar propiedades de las figuras planas a través de actividades de manipulación de materiales y construcción de figuras. (Arboleda, 2015, p. 68)

La investigación concluyó al igual que la de Castellanos (2010) y Carmona (2011) que la utilización del marco teórico de Van Hiele, así como las estrategias de visualización tecnológica de la geometría dinámica (Geogebra, Regla y Compas) permiten estudiar los procesos de pensamiento geométrico; resaltó la importancia de aplicar el modelo Van Hiele en la medida que permite al estudiante explorar, decidir e inferir cada una de las propiedades de la geometría, lo que hará realmente significativo su aprendizaje.

Del mismo modo Ramírez (2014) en su tesis de maestría "Estrategia didáctica para la clasificación de triángulos y cuadriláteros orientada por el modelo Van Hiele y Geogebra" se propuso caracterizar el proceso cognitivo en la visualización de estudiantes de grado séptimo, con el uso de Geogebra como una herramienta didáctica fundamentada por el modelo Van Hiele para la clasificación de triángulos y cuadrilátero; el estudio es de corte cualitativo "estudio de caso" y pretendió encontrar avances en el proceso cognitivo de visualización, identificando en los estudiantes de grado séptimo de la I E Pedro Luis Villa, cómo realizan la clasificación de triángulos y cuadriláteros , utilizando una estrategia didáctica orientada por el modelo Van Hiele y el software Geogebra. Durante la investigación se evidencia que los procesos de visualización se favorecen mediante el uso de la geometría dinámica, gracias a la posibilidad de arrastre y animación de las figuras. El software Geogebra, gracias a su carácter dinámico permitió la representación de objetos estableciendo relaciones entre las figuras en la fase de explicación, por ser una herramienta dinámica posibilitó los procesos cognitivos de visualización y es un medio

adecuado para problematización, la experimentación; los estudiantes tienen mayor motivación hacia el aprendizaje de la geometría al hacer uso de la herramienta TIC.

2.3. Van Hiele y la geometría

Al-ebous (2016) en su investigación "Effect of the Van Hiele Model in Geometric Concepto Acquisition: The Attitudes towards Geometry and Learning Transfer Effect of the First Three Grades Students in Jordan"; hizo un estudio de los efectos y potencialidades del modelo Van Hiele para la enseñanza de la geometría en jóvenes adolescentes aplicando un estudio clínico llevado a cabo en varias fases, con la validación de tres módulos basados en el modelo Van Hiele como herramientas en la investigación, con entrevistas clínicas y análisis de las mismas. La investigación buscó encontrar si existe potencial progreso dentro de un nivel en particular o un nivel más alto de acuerdo al modelo Van Hiele, y si existen inconvenientes en su aplicación. Fue una investigación experimental; para el análisis de los datos se tuvieron en cuenta el uso de protocolos mediante el análisis los videos donde analizó dificultades, lengua, estilo de aprendizaje, y misceláneos. Al concluir el estudio se confirmó que la aplicación del modelo Van Hiele mejora notablemente los procesos de enseñanza en la geometría, observando mejor vocabulario manejo de términos geométricos.

También, Ixcaquic (2015) en su tesis de Van Hiele y Geometría Plana, estudió la aplicación del modelo Van Hiele frente al aprendizaje de geometría plana, cuyo objetivo fue determinar la incidencia del modelo verificando el rendimiento, sus dificultades frente al aprendizaje de la geometría; para ello hizo uso un modelo de investigación cuasi-experimental aplicado a 29 estudiantes de primero (11 a 16 años) de educación básica del Instituto Nacional de Educación Básica de Telesecundaria, del paraje Tzanjuyub, aldea Paxixil, municipio de San Francisco El

Alto departamento de Totonicapán. Las muestras fueron tomadas en un test de entrada donde se evaluaron sus conocimientos previos y una de salida que se aplicó luego de una serie de talleres propuestos bajo el teoría de Van Hiele, entre las conclusiones a las que llegó la investigadora la más relevante frente a esta investigación es la incidencia positiva que tiene el modelo en el aprendizaje de la geometría, logrando mayor participación y deducción en los estudiantes lo que mejora su razonamiento geométrico. Un punto importante encontrado en esta investigación es el papel del docente quien debe ser minucioso en el uso de la estrategia que utiliza para la enseñanza llevando a los estudiantes a ser más dinámicos y participes de su conocimiento de la imágenes conceptuales de los estudiantes, sus conocimientos y errores, utilizando un ambiente computacional "cabri" para determinar si contribuye significativamente en el aprendizaje de geometría, para ello construyó un instrumento metodológico basado en el modelo Van Hiele y aplicado en el ambiente computacional "cabri" analizando sus errores y aciertos lo que permitirá identificar el nivel de razonamiento.

Sobre el tema, otros investigadores como Cabello (2013) en sus tesis doctoral investigó sobre la implementación del modelo Van Hiele y la comprobación experimental de su eficacia, partiendo de conocimientos que los estudiantes de ESO poseen; la investigación surge por la necesidad de mejorar los deficientes resultados que obtuvieron en las pruebas internas de matemáticas en Madrid y las Pisa en el año 2013, para ello se desarrolló una unidad didáctica vinculada al currículo de matemática (geometría) bajo un modelo cognitivo sobre formación de conceptos teniendo una herramienta tecnológica "Cabri" de geometría dinámica; se tomó un modelo metodológico cuasi-experimental con un pre test y pos test evaluando los errores y aciertos obtenidos aplicada a 177 alumnos de dos instituciones una IES Joaquín Araujo. Fuenlabrada con 81 y la otra IES Dolores Ibárruri. Fuenlabrada con 96, entre las conclusiones a

las que llegó la investigación se nombra se requieren mayor número de actividades de este tipo para mejorar los procesos de reconocimiento geométrico, pues el grupo que sigue la unidad didáctica presenta menores errores en el cuestionario de análisis que quienes no lo trabajaron. Esto propone que un punto de partida para otras investigaciones es la implementación de los niveles de Van Hiele para el aprendizaje de la geometría en otros niveles.

Lastra (2005) en su tesis de maestría: "Propuesta metodológica de enseñanza y aprendizaje de la geometría, aplicada en escuelas críticas", buscó comparar y analizar la incidencia del uso de programas computacionales versus el método de Van Hiele frente al aprendizaje geométrico, para ello empleó un diseño metodológico cuasi-experimental con una prueba de pre-test al inicio y otra post-test, evaluando los datos por medio de una prueba T y ANOVA; los datos obtenidos llevaron a concluir que el método Van Hiele acompañado de programas computacionales (Cabri) mejoraban notablemente el razonamiento geométrico, que esto también dependía de la disposición del docente en el manejo de la TIC, la prueba también dejó ver que hay un desempeño similar de los estudiantes que solo tuvieron acceso a programa y que el desempeño más bajo fue de los que solo trabajaron el modelo sin ninguna ayuda tecnológica, concluyeron que el hecho motivacional que ofrece las TIC es muy relevante.

Esta investigación llama la atención a profundizar sobre el uso pedagógico de ambientes computaciones con el objetivo de fortalecer el aprendizaje en este caso de la geometría

2.4. TIC y Geometría

Peña (2012) en su tesis doctoral "enseñanza de la geometría con TIC en educación secundaria obligatoria", buscó resolver el interrogante: ¿Por qué utilizar las TIC en la enseñanza de la geometría y cuál es su incidencia en el aprendizaje de la misma?; se propuso analizar las

posibilidades de las TIC en el desarrollo de actividades para apoyar y mejorar la enseñanza de la geometría, aportando una propuesta pedagógica en la que se identifican diversos recursos TIC para la enseñanza de la geometría, tales como ordenadores con acceso a internet para poder acceder a páginas web dedicadas a la enseñanza de esta área, el cañón de proyección y la pizarra digital interactiva, programas de geometría dinámica, como pueden ser el Geogebra (software libre), de esta manera mostrar algunas posibilidades TIC en el mejoramiento del aprendizaje.

La investigación se realizó a través de un enfoque mixto que analizó datos tanto cualitativos como cuantitativos, para el análisis de los datos usaron la prueba estadística Chi-cuadrado y la tabla de ANOVA, tras la aplicación de los programas en clases se logró concluir que el profesorado de matemáticas debía recibir suficiente capacitación específica en TIC, con el fin de reconocer los recursos online existentes para la formación en este conocimiento y que los estudiantes aprenden más con este nuevo método de trabajo, dado que las clases son más estimulantes, interesantes y divertidas, y deja un camino que recorrer para aplicarlo en otros espacios como lo es la educación inicial y primaria, teniendo en cuenta que en estas etapas las herramientas tecnológicas no han sido profundizadas, pues como lo afirman Peña (2012) no se puede enseñar geometría en el siglo XXI del mismo modo como se enseñaba en el siglo pasado.

Por su parte, Sordo (2005) en su tesis doctoral “estudio de una estrategia didáctica basada en las nuevas tecnologías para la enseñanza de la geometría”, indagó sobre la pertinencia de “Geometer´s Sketchpad” para construir un sistema de notación intermedio entre los sistemas de notación de la geometría métrica y los sistemas de notación más familiares e intuitivos. Para ello se aplicó una estrategia didáctica basada en el programa Geometer´s Sketchpad en estudiantes de tercer grado de primaria de la Facultad de Educación de la Universidad Complutense de Madrid, los grupos oscilaban entre 10 y 30 estudiantes, analizó el comportamiento de estos frente a la

estrategia didáctica e implementó una estrategia que intentó incorporar varios paradigmas educativos tales como resolución de problemas, aprendizaje colaborativo, la adquisición de aprendizajes significativos por medio de la investigación y la experimentación con ayuda del programa y el uso de Internet y el correo electrónico.

Es un estudio de corte cualitativo y cuantitativo centrado en un grupo de estudiantes divididos en dos grupos el investigador es participante y observador. Los instrumentos para obtener los datos fueron pruebas escritas, entrevistas y notas de campo. Los datos se validaron mediante la triangulación de datos y la triangulación de investigadores.

Entre los resultados obtenidos se puede resaltar la inclinación de los estudiantes por las metodologías digitales en contraste con las metodologías clásicas de lápiz, regla y compas, sin embargo, se hace necesario un guion que oriente las actividades. La participación de los estudiantes es mayor en los ambientes digitales que en la clase convencional, en la primera se evidencia un arduo trabajo colaborativo, se encontró mejor rendimiento académico de algunos estudiantes más no de su totalidad.

El aprendizaje suscitado por diferentes tareas de enseñanza que se han realizado en clase ha sido un aprendizaje por descubrimiento, con la experimentación y construcción por parte de los alumnos, lo que ha facilitado la comprensión. El uso del ordenador provoca un aprendizaje activo, dado que el estudiante debe participar de forma activa en el desarrollo de las actividades, y las relaciones dialécticas entre alumnos y entre alumnos y profesor se favorecieron enormemente, dado que la retroalimentación es directa y más rápida.

Igualmente, Argudo (2013) en su tesis de maestría “las TIC y el aprendizaje de la geometría” llevó a cabo un trabajo investigativo en el que a partir de identificar la necesidad de una correcta alfabetización tecnológica de los estudiantes desde la asignatura de matemáticas, en concreto

desde el bloque de geometría a través de los programas de geometría dinámica, desarrolló una estrategia de intervención basada en el programa GeoGebra para una clase de secundaria.

A nivel metodológico, las sesiones estuvieron organizadas en talleres, durante los cuales se empleó un método demostrativo mediante el del Apple de GeoGebra que implicaba a los alumnos directamente en el proceso de enseñanza-aprendizaje, con el que se buscaba motivarlos para que participaran activamente en la clase y dieran respuesta a las preguntas propuestas sin necesidad de pedir ayuda. Esta intervención permitió concluir que al utilizar el ordenador los alumnos deben abandonar el rol pasivo que tienen en clase, aprenden a trabajar en grupo, son protagonistas de su propio aprendizaje, dado que al poder manipular los objetos o crearlos ellos mismos están aumentando su autonomía e iniciativa personal.

También, Díaz (2014) en su tesis doctoral "El uso de las TIC como medio didáctico para la enseñanza de la geometría", hace uso de un método exploratorio basado en un estudio de caso con grado segundo de básica primaria de la Institución Educativa Seminario, con el fin de comprobar que las TIC son útiles como medio didáctico en la enseñanza de la geometría, para ello compara los procesos de aprendizaje de acuerdo a la teoría Van Hiele con los niveles de aprendizaje que el alumno maneja en el grado.

Se utilizó Geogebra como herramienta TIC para desglosar temáticas y estándares diferenciando atributos y propiedades de objetos tridimensionales, la investigación tuvo un grupo de control y uno de muestra en un pre y post test con un trabajo realizado en ocho sesiones, el pre test, entre otros resultados, arrojó la poca relación que los estudiantes encuentran entre matemática y geometría, la confusión que se tiene de los diferentes triángulos, el poco manejo de la herramienta Geogebra, entre otras dificultades. En contraste con esto, los resultados obtenidos en el pos test donde se evidencia mayor dominio de actividades geométricas. El grupo

intervenido mejoró en cuanto a la relación de la matemática y la geometría, mostró dominio en la relación de elementos geométricos con el entorno, mejoraron sus habilidades en el uso del TIC, estimuló su conocimiento buscando estrategias de la creación de las figuras geométricas.

En la investigación se recomienda que el uso de estas herramientas TIC sea supervisado por los docentes para orientar de forma adecuada el conocimiento, y tener bases para el manejo asertivo de las diferentes herramientas tecnológicas esto puede darse a través de actividades extra clase.

Simultáneamente, Torres y Racedo (2014) en su tesis de maestría: "Estrategia Didáctica Mediada por el Software Geogebra para fortalecer la enseñanza-aprendizaje de la geometría en estudiantes de 9° de básica secundaria", se propusieron buscar la manera de mejorar las prácticas pedagógicas en la asignatura de geometría por parte de los docentes de la institución educativa y el medir el impacto de Geogebra (TIC), en la enseñanza aprendizaje de la geometría en los estudiantes de 9° de educación Básica Secundaria, para lo cual se utilizó un diseño cuasi-experimental, tomando como muestra 64 estudiantes, aplicándose un pre-test y un pos-test. Los resultados obtenidos fueron comparados entre el grupo de 9 A (grupo experimental), donde se realizaron clases con el programa Geogebra (TIC) y con 9 B con métodos tradicionales. Al aplicar el pos-test, en ambos grupos se observó un mejor desempeño en la adquisición de los conocimientos en geometría, y el mejoramiento de su rendimiento académico por parte de los estudiantes que trabajaron con el programa de Geogebra. Demostrándose como una estrategia didáctica mediada por las TIC, no solo para fortalecer la enseñanza –aprendizaje del área de geometría, sino que contribuye al mejoramiento de las competencias lógico matemáticas.

En esta investigación se pudo demostrar que el software Geogebra facilita al docente interactuar dinámicamente con contenidos temáticos en el área de geometría, matemáticas,

estáticas y calcula entre otras, además queda demostrado que es pertinente para la producción del conocimiento a partir de la visualización y manipulación de las herramientas que brinda el software en el uso diverso contextos y representaciones de su diario vivir. Permitiendo así a los educadores mejorar de manera significativa sus prácticas pedagógicas en el aula de clase.

Finalmente, la investigación realiza una recomendación al grupo de docentes con respecto a la utilización de las herramientas tecnológicas, y es el aprovechar los recursos que brinda la institución para la auto-formación con respecto a las TIC, en tanto que se está en una era de conocimiento y modernización, por lo tanto, es importante analizar las prácticas de enseñanza que se emplean en las clases de matemáticas, pues el rendimiento de los estudiantes depende de ellas.

Por último, Flores (2010) en su tesis de maestría "Exploración del impacto de un software dinámico en el aprendizaje de la geometría", cuyo objetivo fue explorar el potencial didáctico del software (Cabri) en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría elemental, documentando estos procesos y evaluando su potencial, y responder a preguntas como ¿se enseña y se aprende igual que con instrumentos tradicionales que con ambientes computacionales? Si no es así ¿qué cambia?, su investigación cita a Laborde (1993) quien afirma que el recurrir a la computadora posibilita enormemente la visualización particularmente a través de los aspectos de movimiento.

La naturaleza exploratoria refleja el diseño de investigación adoptado, donde no se pretende validar ninguna hipótesis, sino que propone partir de un marco de referencia y describir los procesos de actividades desarrolladas, el estudio fue realizado a un grupo de 22 estudiantes del curso de geometría y trigonometría del centro universitario regional del centro durante el segundo periodo académico el año 2009.

Se realizaron ocho sesiones con actividades relacionadas con el uso del ambiente computacional y el manejo de temáticas geométricas tesis 18

3. Marco teórico

En este capítulo se hace una construcción conceptual sobre la importancia y relevancia que tiene la geometría en el primer ciclo de enseñanza, los procesos cognitivos que se desarrollan en los niveles de razonamiento geométrico desde la teoría de Van Hiele por medio de las operaciones de visualización que más adelante serán pertinentes para los estudiantes en sus procesos de enseñanza y aprendizaje con respecto al área de matemáticas; además, el uso asertivo de las nuevas tecnologías de la comunicación, que día a día están permeando infiriendo en el campo educativo para lograr desempeños óptimos en los educandos y así llegar a las competencias relacionadas con las TIC.

3.1. Creación y representación mental del pensamiento geométrico y espacial

"El pensamiento geométrico, es una forma de pensamiento matemático, pero no exclusivo de ella y se basa en el conocimiento de un modelo del espacio físico tridimensional" (Proenza & Leyva, 2007, p. 2). Conforme a este postulado la base sensoperceptual es uno de los aspectos más relevantes en la relación del niño con el medio y los contenidos geométricos en la escuela, desarrollando en él tres capacidades importantes: vista espacial, representación espacial e imaginación espacial, relacionadas ellas entre sí y potencializadas desde los primeros años escolares y a lo largo de su vida estudiantil, enfatizando en aprendizajes significativos no memorísticos.

> Se considera que el conocimiento geométrico no presupone solamente reconocer visualmente una determinada forma y saber el nombre correcto; sino que implica también, explorar conscientemente el espacio, comparar los elementos observados, establecer relaciones entre ellos y expresar verbalmente tanto las acciones realizadas como las propiedades observadas, para de ese modo interiorizar el conocimiento; así como, descubrir propiedades de las figuras y de las transformaciones, construir modelos, elaborar conclusiones para llegar a formular leyes generales y resolver problemas. (Proenza & Leyva, 2007, p. 2)

Los autores hacen referencia en este aspecto a tener en cuenta el espacio, reconocerlo, descubrirlo, compararlo y relacionarlo con el entorno que lo rodea para descubrir cada uno de los elementos que lo conforman y de las trasformaciones que se pueden dar en un tiempo futuro, por ello es de vital importancia incluirlos a la hora de planificar las actividades relacionadas con el pensamiento geométrico.

Según Battista (2007) “para interpretar procesos cognitivos que sirven de fundamento para el pensamiento geométrico, y el paso de un nivel de pensamiento al siguiente, se debe entender la forma que las personas crean y representan mentalmente el pensamiento geométrico y espacial” (p. 856), de esta manera es necesario comprender que a través de la visualización se da un inicio adecuado al conocimiento geométrico donde los pre-saberes son un punto de partida que permite un acercamiento real a las propiedades de las figuras y este sería el primer paso a un razonamiento geométrico; si el individuo es consiente que las figuras tienen unos atributos y características propias, iniciará un proceso que le asegura mayor dominio de las actividades matemáticas.

Cabe mencionar que profundizar el desarrollo del pensamiento a partir de la visualización, la percepción y los pre-saberes contribuye a comprender de manera significativa las diferentes propiedades y características de las figuras, logrando una adecuada orientación que le permita pasar de un nivel a otro sin importar la edad e identificando no solamente los principales atributos, sino las diferencias y similitudes que en ellas encuentra.

Según el modelo de Kosslyn (1994) los procesos cerebrales implicados en la percepción están conformados por varios subsistemas. Uno de ellos es el subsistema de pre procesamiento, quien produce una imagen y extrae sus propiedades; el segundo se trata del subsistema de activación del modelo de la categoría, en donde se clasifica un estímulo como un elemento de una categoría1 específica y finalmente el subsistema de activación del modelo de donde se registran ejemplos específicos de aquello que se percibe. De esta forma, las tareas geométricas elementales de percibir ejemplos y percibir categorías son diferenciadas. Esta abstracción perceptual es activa y no pasiva, es decir, los individuos forman caminos de exploración que les permiten reconocer objetos perceptuales similares.

Los investigadores mencionados ratifican y coinciden que existe un camino, unas categorías que permiten realizar un desarrollo adecuado del razonamiento geométrico, no obstante, para que este proceso sea significativo y tenga resultados asertivos depende en gran parte de las herramientas y metodologías que se brinden para su mejor aprovechamiento.

Kosslyn (1988) señaló:

> En el procesamiento perceptual, la mente procesa primero la forma global de un objeto y después las partes y las características. Esta secuencia permite que la mente relacione el

[1] Categoría específica en torno a la geometría.

> objeto con un modelo general y si eso no funciona, intenta establecer relaciones con representaciones de partes individualizadas. (p. 1623)

Según lo anterior, aunque inicialmente las partes de una forma no están accesibles explícitamente, cuando dicha forma es procesada globalmente el sistema perceptual identifica las características de la forma y calcula relaciones espaciales relativamente abstractas entre ellas.

Existen varios factores que pueden generar este movimiento, uno de ellos es que la capacidad de introducirse en los procesos perceptuales puede verse afectada por el desarrollo y la experiencia. Otro factor que incide es el uso de las imágenes y la información verbal que tiene sobre ella, estableciendo relaciones de las figuras con objetos de su entorno.

Por otro lado, se debe considerar para el pensamiento geométrico la visualización que constituye como uno de los procesos asociados más potentes desde el punto de vista didáctico. Cantoral (2008) como se citó en Gutiérrez (s.f.) la concibe como "[…] la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual y reconoce que su amplio uso no sólo en la geometría, sino en las demás ramas de las matemáticas y aún en la ciencia en general" (p. 85). A su vez, Proenza y Leyva (2007) afirmaron que en el desarrollo del pensamiento geométrico se debe contar con la capacidad de imaginación espacial, ya que este proceso permite analizar el plano, las relaciones en el espacio y viceversa; es decir, es la capacidad de estudiar el plano y el espacio a través de sus conceptos, leyes y derivar razonamientos de esto; por lo que va más allá de la geometría para construir un pensamiento dialéctico por excelencia.

Marmolejo y Vega (2012) mencionaron que la visualización "no se adquiere de forma inmediata ni simple; más bien es una cuestión de tratamiento de información susceptible de un aprendizaje específico" (p. 29); esto implica que la visualización trabajada solamente en la

geometría debería ser incluida dentro de las mallas curriculares, pues no solo fomenta el aprendizaje y resolución efectiva de los problemas matemáticos, sino que permiten la potenciación de un proceso cognitivo útil.

> Al definirse el desarrollo del pensamiento geométrico como un proceso complejo, algunos autores como el educador matemático Pierre Van Hiele, citado por Musser y Burguer (en SEP, 1996) han propuesto describirlo a través de niveles de madurez que se van alcanzando de manera graduada, de acuerdo al avance en la estructuración del conocimiento. Para ello propone cinco niveles, los cuales son: nivel 1, denominado de visualización o reconocimiento; nivel 2, llamado descripción o análisis; nivel 3, al que llama de clasificación o relaciones; nivel 4, de deducción o lógica formal; y, finalmente, nivel 5 de rigor. Estos niveles se van dando paulatinamente en el estudiante y requieren de un escenario didáctico que los favorezca. (Gutiérrez, s.f. p. 85)

Para la presente investigación se profundiza en el nivel 1 de visualización o reconocimiento, no obstante, es importante el conocimiento de todos los postulados trabajados por esposos Van Hiele y sus características, dado que esto permitirá establecer en qué nivel de razonamiento se puede ubicar el estudiante.

3.2. Lineamientos curriculares y pedagógicos de la estrategia

Ahora bien, teniendo en cuenta que el razonamiento geométrico es un proceso gradual, se hace importante y necesario tener presente los estándares de matemáticas (Ministerio de Educación Nacional, 2006) establecidos para Colombia por MEN, donde se proponen unos mínimos de aprendizaje de acuerdo al grado; en esta investigación se tomaron los propuestos para el grado tercero en cuanto a geometría se refiere a saber:

- Diferencia atributos y propiedades de objetos tridimensionales.
- Dibuja y describe cuerpos o figuras tridimensionales en distintas posiciones y tamaños.
- Reconozco nociones de horizontalidad, verticalidad, paralelismo y perpendicularidad en distintos contextos y su condición relativa con respecto a diferentes sistemas de referencia.
- Representa el espacio circundante para establecer relaciones espaciales.
- Reconoce y aplico traslaciones y giros sobre una figura.
- Reconoce y valoro simetrías en distintos aspectos del arte y el diseño.
- Reconoce congruencia y semejanza entre figuras (ampliar, reducir).
- Realiza construcciones y diseños utilizando cuerpos y figuras geométricas tridimensionales y dibujos o figuras geométricas bidimensionales. (Ministerio de Educación Nacional, 2006, p. 80)

3.3. Teoría de Van Hiele

La investigación tiene como referente la teoría de los esposos Van Hiele (1957) con sus cinco niveles, haciendo énfasis en el nivel uno (visualización o reconocimiento). Estos niveles fueron retomados en diferentes investigaciones, unas dirigidas a la comprensión de la geometría como las realizadas por Usiskin (1982); Hoffer (1981); Marberry (1981:1983); Burger y Shaughnessy (1986); Fuys, Geddes y Tischeler (1998); Jaime y Gutiérrez (1990), Jaime (1993) como se citó en Cabello (2013) y otras encaminadas a los procesos cognitivos como Duval (1998); Jones (1998); Torregosa y Quesada (2007) como se citó en Cabello (2013).

Esta investigación de la evolución del razonamiento propuesto por Van Hiele es la más acertada tanto a nivel nacional como internacional y tomada como un referente importante en los lineamientos curriculares establecidos por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia

Para efectos de esta investigación se ahondó en el Modelo Van Hiele, cuya idea estudia el proceso de razonamiento geométrico definido en cinco niveles, para algunos autores los niveles inician de 0 a 4 y para otros de 1 a 5, siendo los mismos niveles, los cuales se caracterizan de la siguiente manera.

3.3.1. Niveles de Van Hiele

3.3.1.1 Nivel 1. (Básico, reconocimiento o visualización) de acuerdo a Hoffer (1983)

El individuo reconoce las figuras geométricas por su forma como un todo, no diferencia partes ni componentes de la figura. Produce una copia de cada figura particular y la reconoce. No es capaz de reconocer o explicar las propiedades determinantes de las figuras, las descripciones son principalmente visuales y las compara con elementos familiares de su entorno.

Existen algunos indicadores para el nivel propuesto por Burger y Shausghnessy (1986) como se citó en Cabello (2013) tales como los siguientes:

"Usar propiedades para comparar dibujos e identificar, caracterizar y clasificar figuras" (Cabello, 2013, p. 46).

Hacer referencia a modelos visuales para caracterizar las figuras de acuerdo a sus preconceptos.

Incluir atributos irrelevantes al identificar y describir figuras, tales como la orientación de la figura en el entorno físico o computacional.

"Clasificar las figuras de manera inconsciente, es decir, mediante propiedades que no poseen todas las figuras seleccionadas" (Cabello, 2013, p. 46).

“No ser capaz de usar propiedades como condiciones necesarias para determinar una figura” (Cabello, 2013, p. 46).

No hay lenguaje geométrico básico para llamar a las figuras por su nombre correcto. (Parece una rueda, es como una ventana, etc.)

Este nivel es el más básico, se da en estudiantes de primera infancia y de los primeros cursos de primaria, no solo se da en el nivel de visualización, sino también al comenzar un nuevo tema de acuerdo a sus conceptos básicos, es importante tener claro que se requiere obtener ciertas habilidades para avanzar de un nivel a otro, siendo base uno del otro.

3.3.1.2. Nivel 2: (de análisis)

“Los alumnos analizan las propiedades de las figuras” “los rectángulos tienen diagonales iguales”, “un rombo tiene todos los lados iguales”, pero no interrelacionan explícitamente las figuras o las propiedades” (Hoffer, 1983, p. 207 como se citó en Cabello, 2013, p. 47).

El individuo puede ya reconocer y analizar las partes y propiedades particulares de las figuras geométricas y las reconoce a través de ellas, pero no le es posible establecer relaciones o clasificaciones entre propiedades de distintas familias de figuras. Establece las propiedades de las figuras de forma empírica, a través de la experimentación y manipulación, sin tener en cuenta ángulos, simetrías, etc. Como muchas de las definiciones de la geometría se establecen a partir de propiedades, no puede elaborar definiciones. Los alumnos reconocen los elementos de las figuras y son conscientes de que tienen propiedades; Fouz (2006) consideró con estos indicadores que además de una manera informal pueden describir las figuras por sus propiedades pero no de relacionarlas

3.3.1.3 Nivel 3 (Deducción informal, orden y clasificación)

El individuo determina las figuras por sus propiedades y reconoce cómo unas propiedades se derivan de otras, construye interrelaciones en las figuras y entre familias de ellas. Establece las condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir las figuras geométricas, por lo que las definiciones adquieren significado. Sin embargo, su razonamiento lógico sigue basado en la manipulación. Sigue demostraciones pero no es capaz de entenderlas en su globalidad, por lo que no le es posible organizar una secuencia de razonamientos lógicos que justifique sus observaciones. Al no poder realizar razonamientos lógicos formales ni sentir su necesidad, el individuo no comprende el sistema axiomático de las matemáticas. El individuo ubicado en el nivel 2 no era capaz de entender que unas propiedades se deducían de otras, lo cual sí es posible al alcanzar el nivel 3. Ahora puede entender, por ejemplo, que en un cuadrilátero la congruencia entre ángulos opuestos implica el paralelismo de los lados opuestos. Indicadores propuestos por Burger y Shausghnessy (1986) como se citó en Cabello (2013).

3.3.1.4. Nivel 4 (Deducción informal)

En este nivel ya el individuo realiza deducciones y demostraciones lógicas y formales, al reconocer su necesidad para justificar las proposiciones planteadas. Comprende y maneja las relaciones entre propiedades y formaliza en sistemas axiomáticos, por lo que ya entiende la naturaleza axiomática de las matemáticas. Comprende cómo se puede llegar a los mismos resultados partiendo de proposiciones o premisas distintas, lo que le permite entender que se puedan realizar distintas demostraciones para obtener un mismo resultado. Es claro que una vez adquirido este nivel, al tener un alto grado de razonamiento lógico, obtiene una visión globalizadora de las matemáticas. El individuo puede desarrollar secuencias de proposiciones para deducir una propiedad de otra, percibe la posibilidad de una prueba, sin embargo, no

reconoce la necesidad del rigor en los razonamientos. Indicadores propuestos por Burger y Shausghnessy (1986) como se citó en Cabello (2013).

3.3.1.5. Nivel 5: (de rigor)

Los indicadores propuestos para este nivel de acuerdo a Burger y Shausghnessy (1986) como se citó en Cabello (2013) son:

> El individuo está capacitado para analizar el grado de rigor de varios sistemas deductivos y compararlos entre sí. Puede apreciar la consistencia, independencia y completitud de los axiomas de los fundamentos de la geometría. Capta la geometría en forma abstracta. Este último nivel, por su alto grado de abstracción, debe ser considerado en una categoría aparte, tal como lo sugieren estudios sobre el tema. Alsina, Fortuny y Pérez (1997) y Gutiérrez y Jaime (1991) afirman que solo se desarrolla en estudiantes de la Universidad, con una buena capacidad y preparación en geometría. (Como se citó en Vargas & Gamboa, 2013, p. 83)

Estos niveles dan un acercamiento al desarrollo del pensamiento geométrico, pero las investigaciones han demostrado que a nivel primaria solo se alcanzan los dos primeros niveles, secundaria difícilmente al tercero y es solo a nivel universitario se lograrían los dos últimos niveles; igualmente se establece que estos resultados solo se pueden alcanzar con una preparación adecuada donde se de relevancia al aprendizaje de la geometría, pues a mayor profundización en el tema mayor serán los logros. Por ello se hace necesario profundizar sobre nuevas estrategias que permitan realizar un proceso asertivo mejorando el aprendizaje significativo de los estudiantes y por ende su rendimiento en el área de matemáticas (geometría).

Partiendo de estos niveles, Jaime (1993) como se citó en Vargas y Gamboa (2013) menciona que este modelo de Van Hiele tiene dos aspectos básicos.

> Descriptivo: Mediante este se identifica diferentes formas de razonamiento geométrico de los individuos y se puede valorar su progreso.
>
> Preinscriptivo: Marca pautas a seguir por los profesores para favorecer el avance de los estudiantes en el nivel de razonamiento geométrico en que se encuentran. (Como se citó en Londoño, 2017, p. 28)

Estos deben ser tenidos en cuenta de manera conjunta para fortalecer el progreso en cada nivel, siendo de vital importancia en las diferentes etapas del razonamiento geométrico, para Van Hiele en la fase de aprendizaje el protagonista es el docente quien construye el camino para lograr un progreso significativo en la comprensión de la geometría.

A continuación se describen las faces propuestas por Van Hiele (1986); Hoffer (1983) y de la Torre (2003) como se citó en Cabello (2013).

3.3.2. Las fases del Modelo de Van Hiele

Dentro del modelo las fases no son exclusivas de un nivel, sino que en cada nivel el estudiante comienza con actividades de la primera fase y continúa así, de tal forma que al terminar la fase 5 debe haber alcanzado el nivel de razonamiento siguiente (Jaime, 1993). Las fases de aprendizaje correspondientes al Modelo de Van Hiele son las siguientes:

"Fase 1: Información.

Fase 2: Orientación dirigida.

Fase 3: Explicitación.

Fase 4: Orientación libre.

Fase 5: Integración" (Cabello, 2013, p. 55).

Cabe anotar que los autores que han trabajado esta teoría coinciden en que el razonamiento geométrico debe partir de conocimientos precios los cuales serán de gran importancia a ahondar en el aprendizaje significativo y especificar con mayor facilidad las propiedades de un elemento geométrico

Basado en los postulados de Van Hiele, Hoffer (1981) planteó que la geometría forma parte del entorno social y tiene aplicaciones a la vida real, es una rama de la matemática que desarrolla la percepción espacial y la visualización como una disciplina en forma lógica organizada, de acuerdo a esto plantea las siguientes habilidades

1. Visuales
2. De dibujo y construcción
3. Comunicación
4. De pensamiento
5. De aplicación y transferencia

Tales habilidades se desarrollan en los diferentes niveles del modelo Van Hiele.

3.4. Visualización

El aprendizaje de la geometría es un proceso complejo que está relacionado con múltiples métodos cognitivos, que al desarrollarse o entrenarse de manera aislada pero no independiente facilitan su enseñanza y apropiación por parte de los estudiantes (Torregrosa, 2002).

Torregrosa (2002) menciona los procesos que promueven el aprendizaje de la geometría: visualización, razonamiento y construcción. Donde el proceso de visualización interviene en relación con la representación del espacio, y también para la ilustración de un resultado, la exploración, para tener una visión sinóptica de la misma o como forma de obtener una

verificación subjetiva. Con respecto al razonamiento hace referencia al conocimiento y la explicación. Y la construcción planeada por medio de la herramienta tecnológica requerida (Geogebra).

De acuerdo a lo expuesto por Torregrosa (2002) se resalta la importancia de la visualización, el razonamiento y la construcción en el proceso del aprendizaje de la geometría, siendo estos correlacionados entre sí, sin ser uno más importante que el otro, pero igualmente necesario para el proceso de aprendizaje; sin embargo, de acuerdo a lo propuesto por Van Hiele es la visualización el primer paso para llegar al aprendizaje significativo de la geometría el cual permite pasar al siguiente nivel.

Al respecto Torregrosa (2002) expuso:

> Los procesos mencionados pueden actuar de manera individual, en el proceso de visualización y se puede acceder a los objetos independientemente con lo que se hayan elaborado en relación con la visualización, puesto que necesitamos "ver", lo que estamos construyendo, ya que los procesos de construcción de figuras dependen solo de las conexiones entre las propiedades matemáticas y las técnicas de las herramientas utilizadas en una construcción. (p. 6)

En el siguiente diagrama se representa la relación entre los procesos ya mencionados.

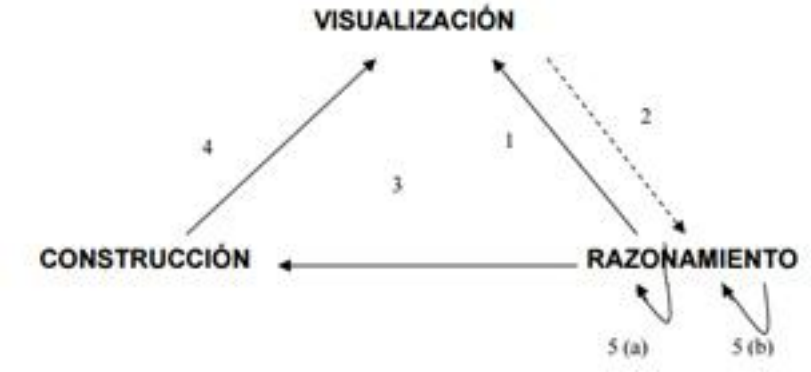


Figura 1. Interacciones cognitivas en la actividad geométrica

Fuente: elaboración propia con base en (Duval, 1998, p.38 como se citó en Torregrosa, 2002, p. 9)

Duval (1998) como se citó en Torregrosa (2002) "el problema de la enseñanza de la geometría de primaria hasta la secundaria es ¿cómo conseguimos que los alumnos vean las relaciones entre estos tres tipos de procesos?" (p. 9).

Es preciso mencionar que la presente investigación pretendió indagar si los estudiantes de tercero de primaria logran esta relación al aplicar una u otro estrategia de visualización, al interactuar con una herramienta computacional que le permita visualizar, razonar y construir de manera significativa, haciendo posible el aprendizaje geométrico.

Más aun teniendo en cuenta que se han evidenciado dificultades desde el currículo de los colegios, lo cual lleva a buscar una estrategia que fortalezca los procesos del pensamiento geométrico desde los grados de primaria hasta los grados superiores en secundaria, para fortalecer e ir mejorando los saberes que adquieren los estudiantes en cada nivel, en cuanto a la relación que existe entre la visualización, razonamiento y construcción. Es importante establecer

actividades que permitan a los estudiantes optimizar su proceso desde la visualización al razonamiento, teniendo en cuenta que todo tiene una razón de ser, la cual se debe saber argumentar y explicar en un momento indicado.

Por dicha razón es importante retomar las principales características del modelo Van Hiele que son:

La "estructura jerárquica y secuencial del modelo" donde especifica que no se puede avanzar a un nivel superior sin haber superado el nivel inferior, en pocas excepciones esta característica cambia.

"A cada nivel de razonamiento corresponde un tipo de lenguaje" cada nivel tiene un nivel de razonamiento propio y un lenguaje acorde a él, aquí el docente debe partir de los pre- saberes de los estudiantes para poder guiar y orientar el nivel de razonamiento que requiere el nivel.

Es así como Alcinas *et al.*, (1997) como se citó en Torregrosa (2002) resaltaron la importancia de tener en cuenta los términos en el lenguaje geométrico para no llegar a tener confusiones, especialmente cuando se va a realizar un planteamiento de un problema geométrico, sin que estos tengan alguna equivocación en el momento de hacer su interpretación. Por lo tanto, es importante tomar en cuenta que al mirar un dibujo la parte visual se basa en la organización perceptiva, y estas figuras se pueden usar para representar objetos reales u objetos matemáticos. "Las figuras se ven más fácilmente cuando se construyen sus dibujos ya sea con regla y compas o software geométricos" (Torregrosa, 2002, p. 12).

"Localidad de los niveles de razonamiento", esta se refiera a que el estudiante razona en los diferentes niveles según los distintos contenidos

"El progreso de los niveles se produce como resultado de la instrucción". Para ello se hace necesario tener claro un programa de enseñanza- aprendizaje para garantizar el desarrollo del aprendizaje.

Berthelot y Salin (1992) como se citó en Gonzato *et al. (*2011) mencionaron que existen tres (3) categorías de acción de visualización y orientación espacial, para que el sujeto controle su posición frente al espacio, estas son:

1. "Orientación estática del sujeto y de los objetos
2. Interpretación de perspectivas de objetos tridimensionales
3. Orientación del sujeto en espacios reales" (p. 101).

Estas categorías se anclan con el modelo Van Hiele en sus dos primeros niveles (visualización y análisis), a partir de ello y para efectos de la investigación se toman las dos primeras categorías: orientación estática del sujeto y de los objetos e interpretación de perspectivas de objetos tridimensionales como estrategias de visualización para el desarrollo del pensamiento geométrico.

3.5. Estrategias de visualización "orientación estática del sujeto y de los objetos e interpretación de perspectivas de objetos tridimensionales"

Berthelot y Salín (1992) como se citó en Gonzato *et al. (*2011) indicaron que es importante que el sujeto sea capaz de "identificar, describir, crear o transformar objetos; - Mover, encontrar, comunicar la posición de los objetos; - Identificar, describir, construir o transformar un espacio de la vida cotidiana o en movimiento" (p. 101); para que el sujeto genere apropiación del espacio sensible. Siendo algunas de estas acciones ejecutables por medio de la capacidad del software a utilizar en esta investigación, en conjunto a lo visto en el papel, para ello es posible usar

diferentes estrategias; no obstante, en esta investigación como se ha dicho anteriormente se hizo énfasis en dos; orientación estática del sujeto y de los objetos, y la interpretación de perspectivas de objetos tridimensionales.

3.5.1. Orientación estática del sujeto y de los objetos

Teniendo en cuenta que una de las tareas de visualización es la orientación del sujeto con respecto al objeto, la estrategia planteada en esta investigación refiera a este aspecto donde se incluyen actividades como comprender el esquema corporal, identificar y utilizar sus polaridades: arriba-abajo, izquierda-derecha, delante-detrás con relación al cuerpo del sujeto, se presupone que el sujeto esta inmóvil, evalúa la capacidad del sujeto para visualizar objetos en su mente realizando rotación en diferentes posiciones encontrando semejanzas, percibiendo correctamente el espacio.

Alberti (2004) como se citó en Gonzato *et al. (*2011) afirmó:

> [Que] las relaciones con las cuales se estructura el espacio están relacionadas con las propiedades de nuestro cuerpo que le dan un significado preciso, […] por lo tanto la orientación de la forma es una condición necesaria para poder usar un objeto como referencia para identificar la condición de las nociones espaciales que son denominadas relaciones topológicas existentes entre el sujeto y los objetos necesarias para el aprendizaje de la orientación espacial. (p. 104)

Siendo la orientación espacial la que refiere a la ubicación del sujeto con relación a la posición del objeto, Alomar (1994) como se citó en Coello (2011):

> Concluyó que una mala orientación en el espacio supondrá la difícil localización del propio cuerpo, y por tanto, se apreciará una irregular organización. Para que el sujeto no

> presente esta dificultad, es necesario trabajar en la localización de su cuerpo frente a los objetos ubicados en un espacio. (p. 23)

Con respecto al desarrollo del esquema corporal, Piaget en su teoría clarifica algunos aspectos que se deben tener en cuenta a la hora de desarrollar las relaciones espaciales geométricas, incluye los tipos de relación espacial, los estadios de construcción del espacio, las etapas en el desarrollo de la perspectiva y la noción de horizontalidad; además, el conocimiento ambiental, la competencia pre operacional y la estructura espacial con una clasificación de los aprendizaje básicos como son la orientación espacial, organización espacial, estructuración espacial y la memoria espacial.

Ochaíta (1993) hace una aproximación a algunos principios de la teoría de Piaget con relación a las nociones espaciales donde se definen tres tipos: las topológicas "que tienen en cuenta el espacio dentro de un objeto concreto " y las proyectivas y euclidianas "que consideran los objetos según su perspectiva y de los ejes de coordenadas" también nos habla de los estadios en la construcción del espacio entre los que se cuenta el periodo sensoriomotor que abarca de los 0 a 2 años, donde el individuo capta distancias y relaciones en cuanto a su cuerpo a través de sensaciones cinéticas, visuales o táctiles. De operaciones concretas, donde se consolida el esquema corporal, elabora e interpreta representaciones espaciales a nivel práctico y operaciones formales, donde el individuo es capaz de considerar un universo de posibilidades espaciales.

Con relación a las perspectivas mencionadas, hacia los 4 años el sujeto entiende el concepto, entre los 4 y 7 tiene en cuenta distintas perspectivas y dan la suya como única, establece que no se ve igual desde diferentes puntos de vista. A los 7 años las relaciones espaciales varían según el punto de vista del observador.

Según Lázaro y Berruezo (2009), durante el primer año de vida “lo constituyen lo que denominamos las estimulaciones básicas del desarrollo: táctiles, vestibulares y propioceptivas” (p. 17).

El cuarto nivel de 1 a 3 años de vida “concentra el Esquema corporal; la Conciencia lateral; […] y la Capacidad de integración sensorial. […] De los 3 a 6 años […] acoge la imagen corporal; la coordinación visomotriz; la percepción del propio cuerpo” (Lázaro & Berruezo, 2009, p. 17); y el ajuste y control de postura; y aproximadamente hacia los 8 años (grado tercero) disponen de las capacidades cognitivas para efectuar el procedimiento objetivos de orientación estática del sujeto y de los objetos.

Del mismo modo, dentro de la estructuración espacial Baunn como se citó en Condemarín (2010) se resaltan tres aspectos:

Orientación espacial; que permite al sujeto orientarse en el espacio con relación a las referencias normativas tempo espaciales (arriba/abajo, izquierda/derecha, antes/después, etc.) en esta etapa se realizan aprendizajes tales como los conceptos básicos dimensionales, y posicionales y el reconocimiento de las relaciones topológicas

Discriminación espacial: que se refiere a la capacidad de ubicar los elementos en el tiempo y el espacio, en los aprendizajes aquí trabajados está la ubicación de los objetos, su localización y diferenciación espacial.

Estructuración espacial: donde el sujeto reconoce las relaciones temporo espaciales con referencia a un todo, aquí los aprendizajes están relacionados y el reconocimiento con las relaciones espaciales, su discriminación, la relación objeto y sujeto

En conclusión, considerando los aportes de cada uno de los autores, se evidencia cómo a medida que el desarrollo fisiológico se da, igualmente van desarrollándose las capacidades

espaciales, pero como lo afirma Van Hiele, Hoffer y Alcina, la visualización y más aún el razonamiento geométrico, si bien requiere de madures fisiológica depende en gran parte de los estímulos y herramientas proporcionados para tal efecto.

Alomar (1994) como se citó en Fernández, Mercado y Sánchez (2003) acotó:

> Para reforzar los parámetros de espacialidad, el niño debe reconocer su propio espacio, que es el que envuelve su cuerpo en cualquier acción que realice, el espacio próximo, propio del área o zona por la que el niño se mueve y el espacio lejano que es el entorno o paisaje en que se encuentra y alcanza su vista. (párr. 23)

En el caso del uso de herramientas computacionales se lleva al sujeto a realizar una rotación mental donde ubica su cuerpo en la pantalla.

3.5.2. La segunda estrategia "Tareas de interpretación de perspectivas de objetos tridimensionales"

La estrategia incluye actividades tales como reconocer e identificar la vista desde diferentes perspectivas e interpretarlas, también hace relación a la construcción de técnicas para representar un objeto al construir sólidos a partir de representaciones planas, identificar el cuerpo geométrico a partir de un desarrollo plano, rotar objetos, plegar y desplegar sólidos, composición y descomposición de las partes.

Algunos autores han trabajado sobre ello, entre estos Gutiérrez (1996, p. 36) como se citó en Gonzato *et al*. (2011):

> [Quien en su investigación de] Multicubos distingue tres tipos de actividades relacionadas con el tema estas son:
>
> - Construir un módulo físico a partir de representaciones planas haciendo uso del ordenador.

- Girar la figura en diferentes posiciones y dibujar las figuras planas que encuentra en ella.
- Partir de dos tipos de representaciones planas construyendo mentalmente un módulo. (p. 104)

Esta última actividad refiere más al uso de la rotación mental, Gutiérrez enfatiza en su investigación el uso de la perspectiva (vista) para la construcción de proyecciones isométricas.

Pittalis, Mousoulides y Christoy (2009) como se citó en Gonzato *et al*. (2011) al respecto de la estrategia "Tareas de interpretación de perspectivas de objetos tridimensionales" hace referencia igualmente a la construcción de objetos tridimensionales a partir de sus vistas en representación planas y el estudio de las propiedades de un objeto.

Es de resaltar que las investigaciones relacionadas con este tema van dirigidas a las rotaciones mentales de objetos tridimensionales y el uso de las representaciones planas para la construcción de objetos.

Fischbein (1993) como se citó en Gonzato *et al*. (2011) estudiando el desarrollo del cubo a través de actividades mentales tales como dibujar la imagen de un cuerpo geométrico, identificar su desarrollo plano e indicar sus aristas al construir el objeto tridimensional.

Al considerar estas investigaciones y otras como la de Malara (1998); Gaulin (1995); Bishop, (1980:1983); Gaulin (1985); Parzysz (1991); Presmeg (1986) como se citó en Gonzato *et al*. (2011), se observa la importancia de promover la enseñanza de la geometría en el desarrollo de la habilidad de visualizar y transformar representaciones.

Malara (1999) en su estudio realizó una propuesta que cubre los siguientes aspectos:

- "La observación y descripción de sólidos

- La descomposición y recomposición de los sólidos, la representación y clasificación de los desarrollos
- La visualización de los sólidos desde diferentes punto de vista y sus representaciones planas" (p. 55).

Estas investigaciones concuerdan en que el objeto geométrico puede ser representado en el espacio, con modelos, artefactos o en plano con diferentes técnicas de dibujo permitiendo representar algunas propiedades del dibujo interpretando acertadamente la información básica y esto puede ocurrir en diferentes procedimientos como rotar, desplazar, desarmar, componer y descomponer, etc.

La estrategia lleva al estudiante a diferentes actividades como la construcción de objetos tridimensionales, las representaciones planas de un objeto tridimensional, la relación de una respuesta correcta con las vistas correspondientes y la rotación de figuras. Al respecto Gorgorio (1996) como se citó en Gonzato *et al.* (2011) distingue también dos tipos de actividades, una relacionada a la construcción que como su nombre lo indica requiere que el estudiante construya o dibuje el objeto, y otra a la interpretación donde se requiere mayor identificación y análisis.

En actividades como discernir figuras se pretende que el estudiante conozca un determinado lenguaje gráfico e interprete las representaciones planas llamadas vistas. El conocimiento de las propiedades de estas representaciones y su coordinación constituye una gran dificultad en los estudiantes, por ello requiere de un estímulo inicial asertivo.

Todas las actividades incluyendo la composición y descomposición, el conteo de pares y el plegar o desplegar, requieren de la aplicación de los procesos de visualización para un éxito en su desarrollo.

A nivel de educación primaria los conceptos geométricos se basan en la concepción del espacio o el estudio del espacio real, en consecuencia, los objetos involucran (líneas, planos, puntos) tomados directamente de la experiencia sensorial.

3.6. Dominio de conocimiento

En relación a esto se hace necesario especificar algunos términos, entre estos se encuentran los siguientes.

3.6.1. El sólido

"Sólido" para esta investigación se refiere a aquello que tiene longitud, anchura y profundidad en muchos textos, son llamados "cuerpos geométricos" determinando figuras como pirámides, prismas, conos, cilindros.

En el diccionario de la Real Academia Española (2001) la palabra sólido se asocia a la palabra cuerpo, el cual tendrá una longitud, anchura y altura, estos compuestos por entidades como planos, segmentos, puntos etc., ahora autores como Bartolini Bussi (1996); Cuisinier y cols, (2007); Parzysz (1988:1991) como se citó en Gonzato (2013) consideran que es necesario hacer explícitas las reglas para dibujar las figuras tridimensionales teniendo en cuenta sus propiedades geométricas, y es un trabajo del docente dar cuenta que las dificultades que los estudiantes presenten al respecto para que esto no genere un bloqueo en el aprendizaje, más cuando se usan herramientas computacionales, pues Parzysz (1991) como se citó en Gonzato (2013) mencionó que su uso debe ser correcto y preciso, de manera adecuada, donde debe hacerse uso del sistema de signos y símbolos del ordenador para poder comprenderse, el dibujo o figura a realizar. Por otro lado es importante tener en cuenta los diferentes softwares que brindan estas herramientas,

para que los estudiantes logren desarrollar los objetos tridimensionales, realizando una discriminación de sus componentes o características.

De esta manera se trabaja con las perspectivas de las figuras, partiendo de la imagen donde el cerebro la reconstruye con la ayuda de la parte visual, dando paso a lo expuesto por Piaget y Inhelder (1971) como se citó en Gonzato (2013), con respecto a las representaciones mentales que están relacionadas para realizar el dibujo o figura. Sin embargo, es importante establecer que lo expuesto anteriormente no se refiere únicamente a ver las figuras sino a reflexionar sobre ellas y las posibles transformaciones que se puedan dar, dando paso a realizar en los estudiantes un razonamiento espacial que lo llevará a descubrir las propiedades espaciales del entorno que lo rodea.

3.6.2 Vista

El término vista es una actividad de vital importancia en la estrategia; la vista puede asumirse como una acción (el ver) una representación visual o un panorama (lo que ve desde un punto de vista) que en término técnico seria “proyección ortogonal” ver un objeto desde determinada perspectiva entendiendo esta como un lugar espacial, un punto de vista desde determinada posición.

Con relación a las vistas en un objeto tridimensional este se puede definir como un procedimiento de construcción de un único objeto geométrico, y requiere esencialmente de tener en cuenta el dibujo en perspectiva y la reconstrucción del sólido al coordinar e integrar mentalmente las vistas.

Para efectos de esta investigación se dan algunas definiciones que es necesario tener en cuenta pues hacen parte de los aspectos que trabajarán los estudiantes.

3.6.3. El punto

El punto es el elemento base de la geometría, ente fundamental, porque con él se determinan las rectas y los planos. Se puede definir también como la intercesión de dos líneas. Sirve para indicar una posición y no tiene dimensión.

3.6.4. Segmento

Segmento es una línea recta que tiene principio y fin, un segmento se puede medir.

3.7. Protocolos verbales

La metodología de análisis de protocolos verbales muestra sus primeros estudios con Newell y Simón (1972), quienes realizan una investigación sobre solución de problemas e inteligencia artificial y desde entonces se vienen aplicando en la construcción de modelos sobre conocimiento con un enfoque computacional (Maldonado, 2001)

Ericsson y Simon (1993) mencionaron que los protocolos son un método para estudiar el contenido de la memoria a corto plazo en el momento de resolver problemas, siendo apropiados para determinar el proceso cognitivo que se utiliza a la hora de resolver problemas con el objetivo de determinar el modelo, la estrategia o los ajustes que se usan en esta acción; los enfoques del fenómeno psicológico consideran que ninguna acción es gratuita, que siempre existe un por qué de la conducta manifiesta.

"Protocolo verbal es un método que posibilita la obtención de relatos individuales de la propia cognición durante la ejecución de una tarea o a medida que este siendo recordada" (Brito, 2006, p. 44).

Estas definiciones hechas por investigadores dedicados al estudio de protocolos verbales permiten resaltar la importancia de este método para establecer los procesos cognitivos, y valida

el uso del mismo en esta investigación; es importante tener en cuenta que la actividad cognitiva es realizada por la mente y que esta actividad puede ser manifestada en forma verbal, gestual y en el procesamiento de una actividades.

Ante esto, los procesos cognitivos son vistos como un todo organizado y dinámico los cuales pueden incluir elementos básicos correspondientes a tres niveles que deben ser considerados a la hora de analizar protocolos verbales:

Nivel representacional: los elementos básicos de la estructuras de la mente están representados en su naturaleza simbólica, con formatos proposicionales y/o analógicos, los cuales son construidos por el sujeto, así como la formación y alcance de la representación.

Nivel procesual: la mente procesa, transforma y opera con las representaciones, para ello utiliza un modelo que puede ser inconsciente o consiente, controlado y/o automático, secuencial y /o simultaneo facilitando y/o infiriendo en dicho procesamiento.

Funcional: las funciones y el funcionamiento de la mente están condicionadas por agentes internos como las causas, condiciones y razones de la actividad mental, pero también las condiciones socioculturales, la personalidad o los objetivos de esta actividad (Mayor, Suengas, & González, 1993).

Ahora, además de esto existen rasgos característicos que posee la mente, de acuerdo a los tres niveles esto son:

Organización sistemática; la mente es un sistema organizado que articula la estructura, el proceso y su función.

Flexibilidad; la mente ha de ser flexible a manejar la diversidad, las alternativas diferentes y las interacciones que hay entre ellas, al tratar con una estructura y con un orden, regulando un proceso mental.

El auto control; la característica más radical de la mente es la reflexividad, que es la capacidad que tiene la mente de auto regularse adaptándose a nuevos medios, evaluando sus procesos (Mayor *et al.*, 1993).

Este modelo de procesamiento humano de la información permite concebir el pensamiento como el conjunto de los procesos a los que en un momento determinado es sometida la información por el Procesador Central (PC). Dada la forma paralela en la que puede trabajar el PC, se concibe que el pensamiento –siempre que esté activada la MCP- pueda ser manifestado mediante la verbalización sin que el mismo sea interrumpido (Requena, 2003).

Ahora, en cuanto a las verbalizaciones existen diferentes tipos o niveles; dependiendo del tipo de información que se verbalice, el reporte puede ser: una copia literal, si la información que se expresa de forma literal; una copia de contenido semántico, si utiliza parafraseo de la información recibida; y una producción, si es generada a partir del procesamiento de la recibida.

De acuerdo a la fuente de información pude ser simultaneo si el sujeto lo realiza paralelamente al proceso de resolución del problema o retrospectivo si lo realiza al terminar la tarea.

3.7.1. Cómo elaborar un protocolo verbal

En esta dirección, Maldonado (2001) mencionó que los protocolos pueden ser el resultado de observar el comportamiento de un sujeto que resuelve un problema.

Para elaborar los protocolos verbales se establecen dos momentos importantes:

- El registro: el cual se puede realizar con un dispositivo de grabación (video y audio).
- Codificación: en el cual se hace un registro de la secuencia elaborada en el proceso de verbalizaciones que pueden ser tomados de las grabaciones y de los apuntes tomados por el observador durante el proceso de grabación, por más tecnología de punta siempre se

tomará un tipo de decisión primaria y la información será una representación abstracta del proceso, pues se tiende a omitir detalles que no pueden ser registrados por los dispositivo.

En el registro se tomará primero la información más relevante, para luego hacer una cadena de decisiones muy finas, evidenciando las variables relevantes del entorno y las dimensiones básicas del comportamiento.

Para realizar estos registros verbales es fundamental tener en cuenta algunos aspectos que condicionan los mismos, entre estos podemos contar; el registro observacional por escrito, donde el observador se coloca directamente en contacto visual del proceso y trata de escribir lo más completo posible lo observado; la atención del observador, muchos factores pueden afectar y generar distracción a la hora de realizar los registros en este aspecto. Paralelamente, Maldonado (2001) refiere que "la confiabilidad de una observación tiende a disminuir en proporción inversa a su duración" (p. 23), la habilidad de verter observaciones en lenguaje, donde el individuo estudiado debe considerar los eventos importantes y tenerlos presentes en sus verbalizaciones evitando la pérdida de información, el observador debe realizar observaciones de tipo descriptivo evitando hacer juicios valorativos, puesto que la información obtenida será de vital importancia para conocer los procesos cognitivos.

Las verbalizaciones reflejarán estados del pensamiento que se traducirán en procesos y estructuras, de la fiabilidad de estos dependerá la codificación y en gran parte el análisis de la misma, siendo las verbalizaciones evidencia del pensamiento. Las articulaciones fonéticas corresponden a unidades de conocimiento y las dudas a cambios de dirección en el mismo. (Maldonado, 2001).

La fiabilidad del análisis lo determinará dos fuentes en especial, la fundación teórica de la investigación lo cual permite prever los procedimientos usados por el sujeto y la segunda el análisis de la experiencia la cual se discute a la luz de las teorías.

3.12. Ambiente computacional Geogebra

Es un software libre de geometría dinámica, tiene licencia GNU GPL (de código abierto a y gratuito), que permite modificar sus elementos, dibujar de manera sencilla figuras geométricas, visualizar sus características, sus herramientas permiten identificar el área, la distancia entre otros aspectos dando un gran campo de exploración.

En el año 2001 salió la primera versión, su creador fue Marqués Hohenwarter, trabajo que realizó como parte del proyecto de grado de maestría en educación matemática y ciencias de la computación. Actualmente trabaja en la Universidad Linz Johannes Kepler en Austria. El Geogebra "es un software interactivo de matemática que reúne dinámicamente geometría, álgebra y cálculo" (Hohenwarter, 2001 como se citó en Valencia, 2014, párr. 2). Cuenta con una comunidad multidisciplinar que da apoyo con foros, wikis, etc. Su interfaz es muy fácil de usar y muy completa como herramienta matemática.

Los datos pueden ser ingresados con el uso del teclado o el mouse, permite hacer cálculos, tiene un sistema de doble ventana "geométrica y algebraica", incorpora su propia Hoja de Cálculo con un sistema de distribución por capas y la posibilidad de animar manualmente. Permite actividades de enseñanza de cualquier conocimiento que implique el uso de ecuaciones, gráficas y análisis de datos, también puede calcular la derivada de las funciones, posee su propia hoja de cálculo y además ya tiene implementadas muchas funciones de manera interna.

Ofrece opciones como las vista gráficas, algebraicas, estadística y de organización de tablas y planillas, lo que lo hace un software destacable para el desarrollo del razonamiento geométrico al permitir una doble percepción de los objetos, una en la vista gráfica y otra en la vista algebraica, pero además el poder usar vista bidimensional y tridimensional como lo muestra la siguiente imagen.

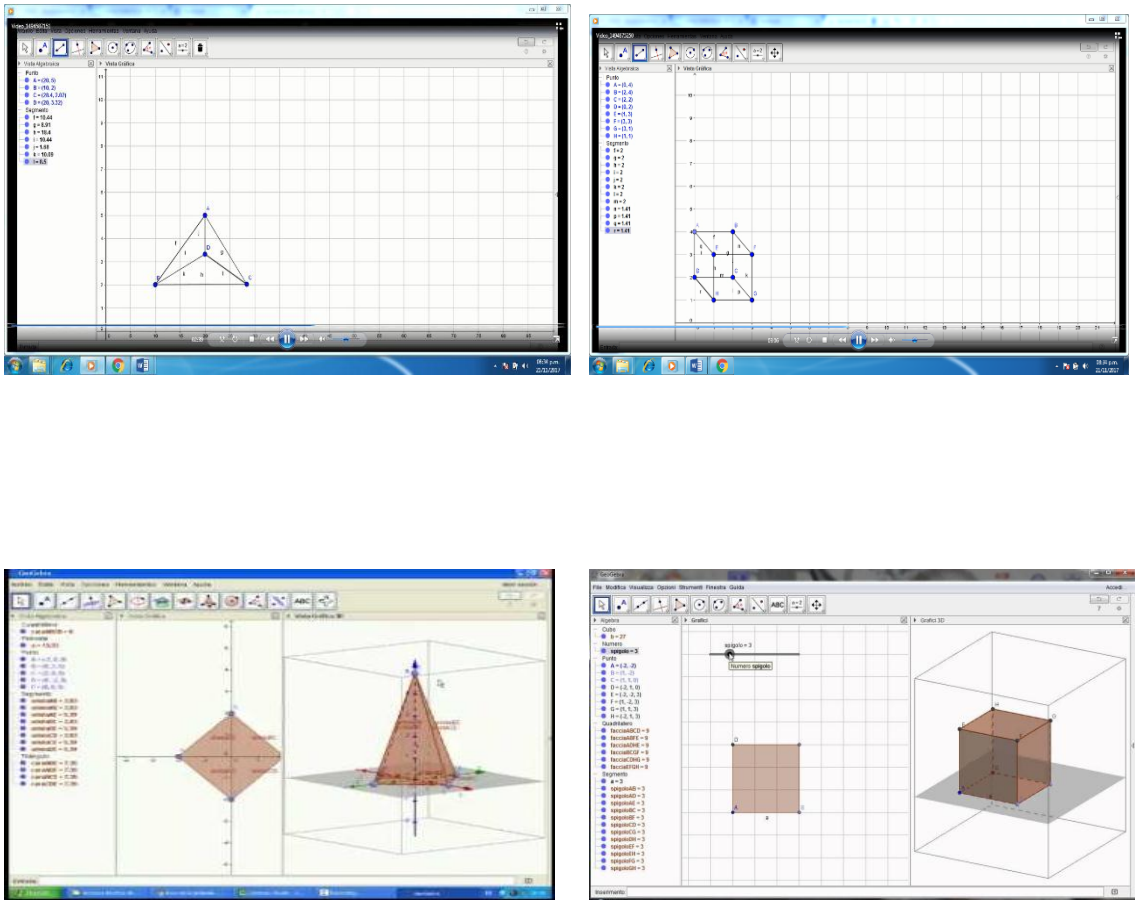


Figura 2. Vista tridimensional

Fuente: elaboración propia

Figura 3. Geogebra

Fuente: (Majadas, 2012)

Geogebra usa un ícono de identificación que permite el ingreso al programa, además, cuenta con un menú donde se ubican las herramientas del programa las cuales despliegan diferentes botones, los botones se agrupan según herramientas comunes, permite interpretación de imágenes 3d, utilizando figuras geométricas y sus dimensiones visibles.

Figura 4.

Fuente: elaboración propia

Ha sido premiada en muchas ocasiones, en las más recientes se puede contar:

NTLC Award 2010: National Technology Leadership Award (Washington D.C, USA)

MERLON Classics Award 2013: Multimedia Educatinal Resource for Learning and Online Teaching (Las Vegas, Nevada, USA)

Microsoft Partner of the Year Award 2015: Fianlist, Public Sector: Education (Redmond WA, USA)

Archimedes 2016: MNU Award in category Mathematics (Hamburg, Germany) a pesar de que en Colombia es reconocido como uno de los tres mejores portales de América Latina y el Caribe, los recursos tecnológicos a los que los estudiantes tienen acceso terminan siendo usos más para el ocio y la recreación; lo que hace que en la actualidad siga vigente el reto de mostrar a docentes y estudiantes los beneficios, usos asertivos y efectividad de las herramientas TIC en los procesos de aprendizaje, incorporándolas de manera natural en el desarrollo de capacidades de los actores involucrados, esto como un aporte a las nuevas políticas educativas a nivel nacional e internacional que pretenden propiciar la inclusión social, limitar la dependencia espacio-tiempo entre el profesor y el estudiante, acceso a la información, construcción de ambientes más interactivos, experiencia de aprendizaje más dinamos, investigación, buenas prácticas entre otras.

Teniendo en cuenta que la mayor parte de las instituciones distritales cuentan con equipos y una conectividad, aunque no muy eficiente, en esta investigación se ha tomado la herramienta TIC "GEOGEBRA" como instrumento de aplicación de las estrategias de visualización, haciendo uso de sus beneficios en cuanto a su uso significativo en el aprendizaje geométrico, será usada como eje que guiará la construcción de actividades orientadas a fortalecer el proceso de visualización:

> Que es la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre figuras, imágenes, diagramas, en nuestra mente, sobre el papel o con herramientas tecnológicas con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas y avanzar la comprensión. (Arcavi, 2003 como se citó en Briseño & Guzmán, 2015, p. 2)

En la investigación los estudiantes tendrán un proceso de apropiación del instrumento donde conocerán las principales herramientas y usos del programa y cómo aplicarlas en actividades que redunden en un verdadero desarrollo del razonamiento geométrico.

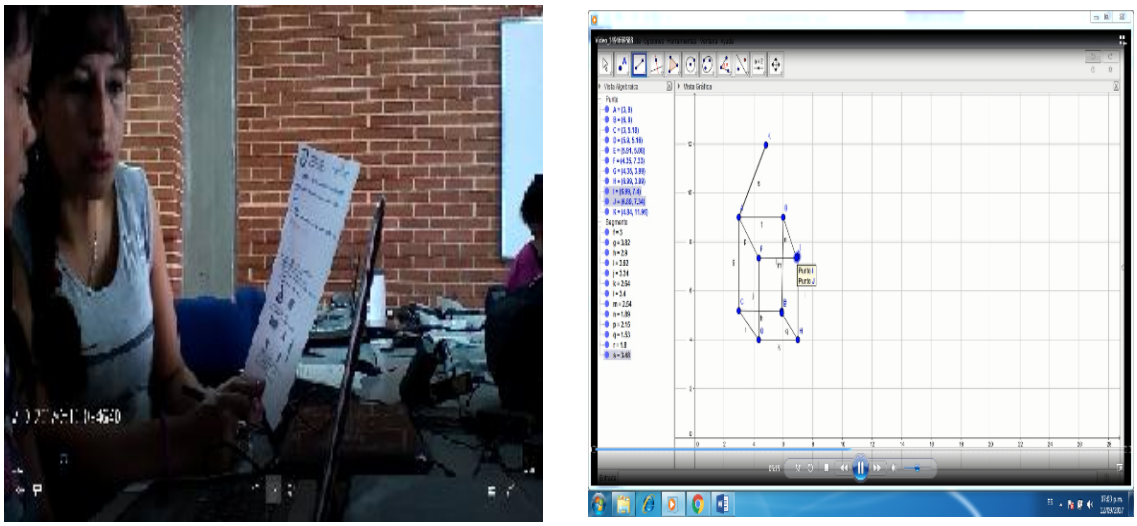


Figura 5.

Fuente: elaboración propia

4. Objetivos

4.1. Objetivo general

Caracterizar el proceso de razonamiento geométrico en estudiantes de grado tercero al aplicar dos estrategias de visualización: Orientación estática del sujeto y de los objetos e Interpretación de perspectivas de objetos tridimensionales.

4.2 Objetivos específicos

- Caracterizar el proceso de razonamiento geométrico en estudiantes de grado tercero al interactuar con un ambiente computacional que incorpora la estrategia de visualización "orientación estática del sujeto y de los objetos" en la solución de problemas.
- Caracterizar el proceso de razonamiento geométrico en estudiantes de grado tercero al interactuar con un ambiente computacional que incorpora la estrategia visualización "interpretación de perspectivas de objetos tridimensionales" en la solución de problemas.
- Determinar características similares y diferentes en el desarrollo del razonamiento entre estudiante que interactúan con ambientes que incorporan dos estrategias diferentes de visualización.

5. Método

5.1 Tipo de investigación y enfoque

La investigación tuvo un enfoque cualitativo, el cual permitió partir del estudio de métodos de recolección de datos de tipo descriptivo (protocolos verbales) y de observaciones (diario de campo) para expresar de manera discursiva categorías conceptuales en el proceso de desarrollo del razonamiento geométrico de estudiantes de grado tercero, al aplicar dos estrategias de visualización: Orientación estática del sujeto y de los objetos e Interpretación de perspectivas de objetos tridimensionales, apoyados con un pre-test y en post test que permitieron evidenciar el avance de los participantes en el razonamiento geométrico en un nivel de visualización.

5.2. Participantes

La población con la cual se realizó la investigación corresponde a 10 estudiantes del grado tercero, con los cuales se tomaron los videos, evaluando los seis (6) de mayores verbalizaciones para ser analizadas tres (3) de cada estrategia. Para el pre test y post test se tomó el total del grupo (36), incluidos los 10 estudiantes participantes del estudio de protocolos, que realizaron las diferentes sesiones.

Los estudiantes pertenecen al colegio IED Gran Colombiano de Bosa Laureles, institución pública ubicada en el barrio Bosa Laureles localidad (7) al sur de la ciudad de Bogotá, que cuenta con dos jornadas atendiendo a estudiantes pertenecientes a los estratos 1 y 2.

5.3. Validez

La recolección de la información se hizo a través de dos instrumentos de corte cualitativo (protocolos verbales y diario de campo) para compensar las posibles falencias de cada uno de ellos, apoyados en un pre test y post test, orientados en esta idea, se realizó la aplicación de 12 talleres, 6 para cada sesión, diarios de campo para cada sesión, un pre- test y post- test que respalden la información obtenida como fuente estadística.

5.4. Variables de la investigación

5.4.1. Variables independientes

Estrategias de Visualización

Estrategia 1: orientación estática del sujeto y los objetos.

Estrategia 2: interpretación de perspectivas tridimensionales.

5.4.2. Variables dependientes

Razonamiento geométrico por medio del proceso, interpretación, reflexión y representación de figuras e imágenes planas con ambiente computacional “Geogebra”.

5.5. Trayectoria y fases de investigación desde Análisis de Protocolos de Reportes verbales

Según Requena (2003) existen 6 fases en la investigación de reportes verbales:

Calentamiento: en esta fase se socializó la intención y naturaleza de la investigación, así como un paneo de los temas relacionados con la tarea. En este primer momento, se trabajó con los estudiantes el objetivo de la investigación y los tiempos en que se realizó la investigación, así como el objetivo pedagógico; fortalecer el razonamiento geométrico en estudiantes de tercer grado. En la investigación esta fase se visualizó en las sesiones de reconocimiento del ambiente computacional Geogebra.

Reporte de interés y grabación: toma de reporte verbal por medio audio visual desde instrumentos de recolección de la información (en este caso videograbadora y programa aTube Cátcher). Se utilizaron Diarios de Campo para reconocimiento de factores motivacionales y reportes no verbales que se puedan analizar como puntuaciones.

Transcripción: los audios se trascribieron en texto para su posterior organización y clasificación.

Segmentación: el texto transcrito se segmentó de manera que existieron unidades de sentido para cada frase y permitieran generar una interpretación desde las categorías preexistentes.

Clasificación: dichos segmentos anteriormente puntuados, se organizaron por categorías específicas según correspondiera, las categorías de esta investigación estuvieran basadas en las habilidades propuestas por Hoffer (1981).

Codificación: de esta forma, los segmentos puntuados organizados en las categorías pertinentes permiten una interpretación a la luz de las teorías que se utilizaron.

5.6. Diario de campo

Teniendo en cuenta que el diario de campo tiene su eje fundamental en la observación de una experiencia, permitiendo registrar las prácticas investigativas, logrando un monitoreo permanente de la actividad, y una relación de la teoría con la práctica, Martínez (2007) lo menciona como un instrumento básico para producir descripciones de calidad de una realidad, en palabras de Elssy Bonilla y Penélope Rodríguez como se citó en Martínez (2007) se dice:

> [Que] observar, con sentido de indagación científica, implica focalizar la atención de manera intencional, sobre algunos segmentos de la realidad que se estudia, tratando de capturar sus elementos constitutivos y la manera cómo interactúan entre sí, con el fin de reconstruir inductivamente la dinámica de la situación. (p. 74)

En esta investigación la observación permitió evidenciar aspectos del ambiente, gestos e interpretaciones que las verbalizaciones no permiten registrar.

"Martín y Porlán advierten que es posible que al empezar el diario pueda darse una visión simplificada y poco diferenciada de la realidad" (como se citó en Ospina, s.f., párr. 21), pero permite registrar el punto de vista del investigador acerca de un tema a tratar.

Para realizar la observación del diario de campo fue necesario establecer qué tipo de observación se realizaría ya sea de tipo exploratoria, descriptiva, focalizada o selectiva. En esta investigación se optó por la selectiva; gracias a que se observaron momentos clave de acuerdo a los indicadores propuestos.

5.7. Pre - test y Post - test

Esta información se apoya en el análisis cualitativo obtenido por medio de protocolos verbales y diario de campo, se tomó mediante la aplicación de un pre- test y un post- test. Best (1981: 134) como se citó en Gómez (2012) sostiene que "los cuestionarios administrados personalmente a grupos de individuos poseen un cierto número de ventajas" (p. 289). El sujeto que desarrolla el instrumento puede explicar el propósito del estudio establecer su importancia y aclarar dudas, en las preguntas abiertas permite una respuesta libre y espontánea, logrando respuestas profundas que pueden explicar sus respuestas más específicas.

5.8. Categorización

A continuación, se organizan disciplinar y metodológicamente, las categorías y significados asumidos por las investigadoras para el actual proceso de investigación, busca resolver cada término (indicador, abreviatura), cómo se obtendría la información (técnicas e instrumentos) y pertinencia (talleres propuestos). Las categorías fueron basadas en las ideas básicas del modelo Van Hiele (1984) y Hoffer (1981) como se citó en González y Arévalo (2011) quienes parten de una afirmación: "No hay un método panacea para alcanzar un nivel nuevo pero, mediante unas actividades y enseñanza adecuadas se puede predisponer a los estudiantes a su adquisición" (p. 434). Según este modelo se podría ubicar a los estudiantes de grado tercero en un nivel de reconocimiento o visualización si estos cumplen con cierto tipo de habilidades planteadas por Hoffer (1981) como se citó en González y Arévalo (2011).

Tabla 1. *Modelo Van Hiele (1984) con aportes de Hoffer (1981) para la enseñanza de geometría*

VAN HIELE	HOFFER	DESCRIPCION
Visualización o Reconocimiento	Visual	Reconoce diferentes figuras de un dibujo. Reconoce información contenida en una figura
	Verbal	Asociar el nombre correcto con una figura dada Interpretar frases que describen la figura
	Dibujo	Hacer dibujo de figuras interpretando las partes
	Lógica	Darse cuenta que hay diferencias y similitudes entre figuras. Comprender la conservación de las figuras en diferentes situaciones
	Aplicada	Identificar formas geométricas en objetos físicos

Fuente: elaboración propia

Estas habilidades en la investigación fueron tomadas como base fundamental de los indicadores que medirán el proceso en el razonamiento geométrico al aplicar las dos estrategias.

5.9. Categorías conceptuales disciplinares

Como se especificó en el apartado anterior, el estudio se basó en las habilidades propuestas por Van Hiele (1984) y Hoffer (1981) como se citó en González y Arévalo (2011), para establecer los procesos de visualización en los estudiantes de grado tercero mediante el uso de un ambiente computacional (Geogebra).

Tabla 2. *Categorías conceptuales disciplinares. Categorías Metodológicas de Análisis de Protocolos Verbales*

CATEGORÍAS		CONCEPTO	INDICADOR	ABREVIATURA	TÉCNICAS E INSTRUMENTOS	ACTIVIDAD
Visualización	Visual	Reconocer diferentes formas de un dibujo, y su posición con referencia del sujeto al objeto y del objeto al sujeto	Reconoce formas geométricas correctamente al construir una figura. Identifica Figuras	VS 01 VS O2	Video grabación. Protocolos verbales Diario de campo	Talleres de apropiación de conceptos geométricos seis sesiones para

		relacionadas con objetos de su entorno en forma correcta.		cada una de las estrategias "orientación estática de los sujetos y los objetos" y "tareas de interpretación de perspectivas tridimensionales "
Verbal	Asociar el nombre correcto con una figura y caracterizarla. Usar un Vocabulario geométrico en las diferentes preguntas al realizar las verbalizaciones	Asocia las características de la figura con los nombres correctos de los atributos de la misma. Utiliza términos geométricos los cuales menciona en las verbalizaciones	VB 01 VB O2	
Dibujo	Hacer dibujo de figuras interpretando las partes haciendo uso del software Geogebra	Uso correcto de las opciones del programa Geogebra, para la elaboración de los dibujos.	D 01 D 02	
Lógica	Reconocer diferencias y similitudes en las figuras y Argumenta su caracterización. (verbalizaciones), En los talleres utiliza la visualización, percepción, comparación y deducción para activar los procesos cognitivos como atención, habilidad y clasificación	Reconoce atributos o características de las figuras planas básicas. Razona al construir la figura por medio de los conceptos de punto, línea, recta, segmento, ángulo, paralelismo, traslación rotación y vistas o caras. Realiza interacciones cognitivas donde razona, construye y visualiza.	L 01 L 02 L 03 L04	
Aplicada	Hacer uso pertinente de las herramientas del software Geogebra. El ambiente computacional permite afianzar los conceptos	Construir geométricamente una figura definida manteniendo las propiedades iniciales y el concepto original.	AP 01 AP 02 AP03	

	iniciales adquiridos en clase por medio de una trasformación de las formas y figuras de manera más ágil y precisa.	Planificación: Tomando sus conceptos propios busca construir la figura al relacionarla con los conceptos adquiridos en clase. Regulación: Por medio de direccionamiento y la supervisión de su trabajo modifica y busca nuevas estrategias para obtener el resultado Evolución: Por medio de pasos organizados deduce la calidad de la construcción hecha, para optimizar el resultado obtenido.	AP04

Fuente: elaboración propia

5.10. Instrumentos de recolección

A continuación, se describen los formatos con los que se tomaron los datos que posteriormente serán analizados.

5.10.1. Protocolos verbales

Tabla 3.*Cuadro de análisis de protocolos*

SESIÓN	CONCLUSIÓN
VISUAL	
VERBAL	
DIBUJO	
LÓGICA	
APLICADA	
CONCLUSIÓN	

Fuente: elaboración propia

Tabla 4. *Análisis razonamiento geométrico*

PROBLEMA:

CATEGORÍA	DESCRIPCIÓN DEL RAZONAMIENTO	EVIDENCIA	ANÁLISIS
Representación del problema			
Procesos			
Revisión del Proceso			
Relación de Figuras			

Fuente: elaboración propia

5.10.2. Diario de campo

En este apartado se muestra el formato de análisis de los diarios de campo, donde se condensa la información obtenida durante las diferentes estrategias y sesione.

Tabla 5. *Tabla de análisis de diario de campo*

Categoría	Observaciones

Visualización	Visual
	Verbal
	Dibujo
	Lógica
	Aplicada
Nota interpretativa	

Fuente: elaboración propia

5.10.3. Pretest y post test

5.10.3.1. Pre test de razonamiento

El objetivo es evidenciar el nivel de razonamiento geométrico que poseen los estudiantes de grado tercero (diagnóstico) al iniciar la investigación. (Ver Anexo A)

5.10.3.2. Post test de razonamiento

El objetivo es evidenciar el nivel de razonamiento geométrico de los estudiantes de grado tercero al finalizar la investigación, teniendo en cuenta la aplicación de dos estrategias de visualización: "Orientación estática del sujeto y de los objetos" y "Tareas de interpretación de perspectivas de objetos tridimensionales". (Ver Anexo B)

5.11. Propuesta Pedagógica desde dos estrategias de visualización

Retomando la propuesta de Gonzalo, Blanco y Godino (2011) se utilizaron dos de las tres estrategias más utilizadas en procesos de visualización y orientación espacial: la primera estrategia "orientación estática del sujeto y de los objetos" y la segunda "interpretación de perspectivas de objetos tridimensionales"

Desde allí, se construyeron actividades orientadas a fortalecer el razonamiento geométrico, ancladas en contenidos específicos del grado tercero, para posteriormente generar el análisis con los instrumentos de recolección ya mencionados.

Además, se tomó lo propuesto por Polya (1957) quien establece una serie de pasos a seguir en la resolución de problemas estos son:

- Comprender el problema.
- Concebir un plan para descubrir la solución.
- Ejecutar el plan y verificar el procedimiento.
- Comprobar el resultado.

Es importante tener en cuenta que cada uno de estos pasos requirió del cumplimiento de actividades tales como responder a algunas preguntas o realizar actividades específicas.

6. Análisis e interpretación de resultados

En este apartado se muestran los resultados de la investigación obtenidos en la aplicación de 6 sesiones por cada estrategia de visualización (orientación estática del sujeto y los objetos y tareas de interpretación de perspectivas de objetos tridimensionales) para el análisis del razonamiento geométrico en estudiantes de grado tercero de primaria. Los datos fueron obtenidos en tres etapas. Una primera etapa, la aplicación del pre test a 36 estudiantes de grado tercero, incluidos los diez de estudio; la segunda etapa la aplicación de las seis sesiones a modo taller a los mismos estudiantes, de estos se seleccionaron 10 de forma aleatoria para la aplicación de protocolos verbales, de estos 10 se seleccionaron 3 de cada estrategia, con las mayores verbalizaciones; y finalmente la etapa de post test aplicada a los mismos 36 estudiantes.

Las categorías trabajadas fueron: visualización, verbalización, dibujo, lógica y aplicada, basadas en las habilidades de Hoffer (1981), dentro de cada una de ellas se recolectó la información a través de protocolos verbales, diario de campo, formulario en línea y video.

Los análisis de cada sesión están basados en las verbalizaciones hechas a cada sujeto seleccionado en las diferentes sesiones (ver Anexo D).

6.1. Análisis de protocolos verbales de las sesiones con la aplicación de dos estrategias de visualización "orientación estática del sujeto y los objetos" y "tareas de interpretación de perspectivas de objetos tridimensionales"

En este apartado se analizan las verbalizaciones hechas por los sujetos participantes tres (3) por cada estrategia, basados en los indicadores propuestos y aplicando el método de análisis cualitativo "protocolos verbales".

Para realizar el análisis se parte de la aplicación de seis (6) sesiones a los dos grupos, cada uno con una estrategia (ver Anexo C); estos talleres fueron analizados en un formato que permite visualizar las diferentes verbalizaciones hechas por los sujetos que intervienen en la investigación (ver anexo D) lo cual permitió por medio de la siguiente tabla establecer el nivel de desarrollo en el razonamiento geométrico logrado por los individuos durante la aplicación de las 6 sesiones, teniendo en cuenta las categorías de análisis propuestas por las investigadoras basadas en las habilidades planteadas por Hoffer (1981).

En este apartado se evidencian los componentes que utilizan los sujetos al visualizar una figura (sólido geométrico-figura isométrico) lo que le permite caracterizarla estableciendo sus atributos en las diferentes estrategias y sesiones.

A continuación se muestran los resultados y análisis de los protocolos verbales en la primera y última sesión de uno de los sujetos objeto de estudio, en cada estrategia "orientación estática del sujeto con respecto al objeto" y "tareas de interpretación de perspectivas tridimensionales" y el análisis de todas las verbalizaciones de los sujetos de estudio en las diferentes estrategias.

6.1.1 Protocolos verbales estrategia uno "orientación estática del sujeto y los objetos"

Con el fin de realizar una mayor comprensión de la información de los resultados obtenidos en los protocolos verbales, se muestra los talleres de la sesión uno y dos estrategia de visualización, los demás talleres se encontraran en el apartado de Anexo C.

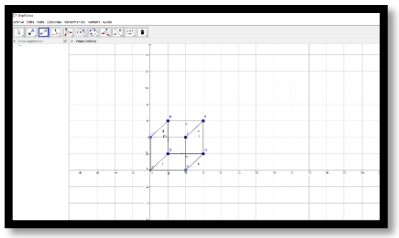
SESIÓN 1- ESTRATEGIA 1 "ORIENTACIÓN ESTÁTICA DEL SUJETO CON RESPECTO AL OBJETO"

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

¿Cómo construir el sólido a partir de la observación de la imagen y reproducirlo en el software Geogebra?

OBJETIVO: construir e identificar las partes del sólido.

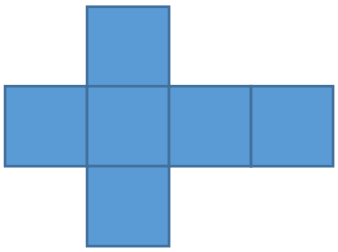
INSTRUCCIONES: observe la imagen y realice en el software Geogebra, verbalice todos sus movimientos, luego resuelve las preguntas

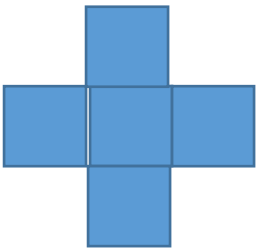


Ahora conteste por escrito y verbalmente las siguientes preguntas:

1. ¿A qué sólido corresponde la figura? ¿Cómo sabes que es esta figura?

2. Puede relacionar este sólido con alguna figura planas, ¿cuál? ¿Por qué?
3. ¿Si se ubicara a la izquierda, derecha, arriba, abajo del sólido qué figura puedes observar, qué características tiene esa figura que observas?
4. ¿Cuántos puntos y cuántos segmentos puede identificar en total del sólido?
5. ¿Qué tipos de líneas encuentras? Justifica tu respuesta
6. ¿Cuántas caras observa?
7. ¿Qué características encuentra en la base del sólido?
8. ¿Alguna de estas vistas corresponde a la figura? Justifique su respuesta

a. 

b. 

9. ¿De las siguientes figuras planas, cual está relacionada con el sólido que estás viendo?

a.

b .

c.

d .

e.

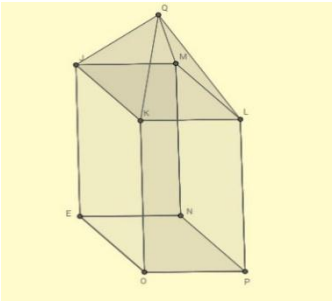
SESIÓN 2 .ESTRATEGIA 1 "ORIENTACIÓN ESTÁTICA DEL SUJETO CON RESPECTO AL OBJETO"

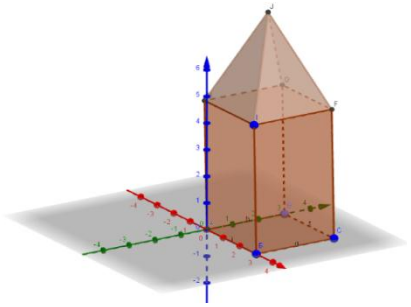
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Construir figuras isométricas partiendo de sólidos ya construidos, teniendo en cuenta la posición del sujeto con respecto al objeto.

OBJETIVO: establecer las características de las figuras, teniendo en cuenta la posición del sujeto con respecto al objeto.

Instrucciones: observa la imagen y realízala en el software Geogebra, verbaliza todos tus movimientos, luego resuelve las preguntas.



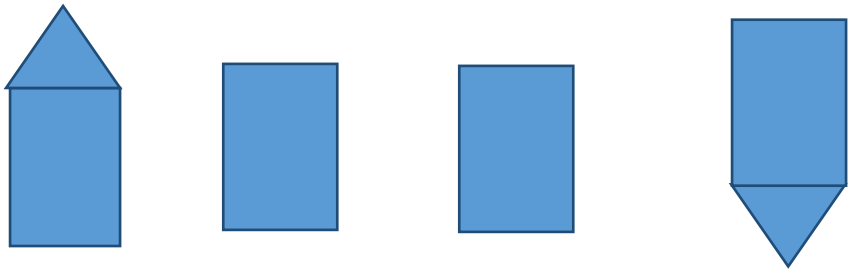


Ahora conteste por escrito y verbalmente las siguientes preguntas:

1. ¿Identifica algún sólido en esta figura? ¿Justifique su respuesta?
2. Puede relacionar este sólido con alguna figura plana ¿Cuál? ¿Por qué?
3. Si se ubicara a la izquierda del sólido que figura puedes observar, qué características tiene esa figura.
4. Si se ubica debajo del sólido que figura puedes observar.
5. Si te paras arriba del sólido qué figura puedes observar, qué características tiene esa figura.

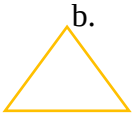
6. Si te ubicaras a la derecha del sólido qué figura puedes observar, qué características tiene esa figura.
7. De las siguientes vistas ¿cuál corresponde a la figura? Justifica su respuesta

a. b. c. d.



1. ¿Cuántos puntos puedes encontrar en la figura?
2. De las siguientes figuras ¿cuál corresponde al sólido que está viendo?

a

b. 

c

d.

e.

3. ¿Cuántos segmentos reconoces en la figura?
4. ¿Cuántos puntos y cuántos segmentos puedes identificar en total en la figura?
5. ¿Qué tipos de líneas encuentras? Justifica tu respuesta
6. ¿Cuántas caras observas?
7. ¿Qué características encuentras en la base de la figura?

6.1.1.1 Muestra de protocolos verbales, primera y sexta sesión de un sujeto estudio

Tabla 6. *Análisis de protocolos verbales, estrategia uno - sesión uno*

SESIÓN 1 (S1), ESTRATEGIA 1

Nombre: Ana Sofía Bolívar (Sujeto 1)

PROTOCOLO VERBAL	CATEGORÍAS	ANÁLISIS
INV-Sofía buenos días vas a leer atentamente la guía, vas a resolver y nos vas contando todo lo que haces	INV	Teniendo en cuenta las categorías de la investigación se podría concluir: Visual: identifica la figura a realizar SJ1-S1 "*L1-voy hacer un cubo*", mencionando en donde hacer la figura, "*SJ1-S1 L2 lo voy a hacer en la aplicación Geogebra*", para ello organiza el plano cartesiano donde la va a elaborarla " SJ1-S1 *L3-voy a desplazar la vista gráca para poder acomodar la figura"* , identifica los atributos y los relaciona con objetos de su entorno como se evidencia en las siguientes verbalizaciones *"L5S1 lados tienen que ser iguales" "L11S1- sé que es un cubo porque está hecho de cuadrados" "L23S1- con un dado que tengo"* Verbal: hace uso del vocabulario geométrico en sus verbalizaciones, asociando de forma adecuada los atributos del sólido, SJ1-S1 "*L4 voy a segmento*", menciona una de los componentes del cuadrado sin profundizar en sus caracterizaciones, "*L5 voy a hacer un cuadrado, los lados tienen que ser iguales".* Dibujo: Inicia su dibujo, con el uso de los íconos del ambiente computacional, que le permiten dar la forma al sólido solicitado respetando sus características basicas.SJ1-S1 "*L4 voy a segmento", "L9 tomo los puntos de*
INV-¿Qué vas hacer?	INV	
L1S1- voy hacer un cubo	INV	
L2 S1- lo voy a hacer en la aplicación Geogebra	VS01	
INV-¿Dime qué es lo primero que haces?	INV	
L3S1-voy a desplazar la vista gráfica para poder acomodar la figura	VS01	
L4S1-voy a segmento	VS01	
L5S1-voy a hacer un cuadrado, los lados tienen que ser iguales	VS01	
INV-¿Por qué tienen que ser iguales?	VS01,VB01	
L6S1- porque si no son iguales seria como un rectángulo	INV	
INV-¿Qué estás pensando?	VS01,VB01	
L7S1-voy hacer otro cuadrado adentro, pero otra parte va afuera	INV	

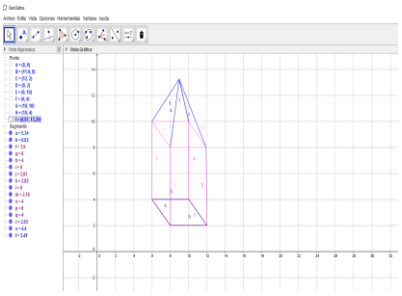
L8S1-termino el segundo cuadrado	VS01,VB01	*las esquinas y los uno", "L7S1-voy hacer otro cuadrado adentro, pero otra parte va afuera"*
INV-¿Ahora qué piensas hacer con estas figuras?	VS01,VB01	Lógica: Reconoce los atributos de la figura evidenciado en las siguientes verbalizaciones, "*SJ1-S1 "L11 sé que es un cubo porque está hecho de cuadrados" SJ1-S1 "L12-tiene segmentos y tiene líneas rectas"* SJ1-S1*"L13 a la izquierda veo cuadrados, arriba cuadrados, derecha cuadrado, abajo cuadrado*" SJ1-S1 "*L14 son cuadrados porque si fuera un triángulo no sería cubo porque el cubo está hecho de cuadrados*" SJ1-S1 "*L15los cuadrados tiene cuatro lados y son iguales*", argumentando sus planteamientos de cómo llegar a la figura tridimensional, evidenciando la relación del sujeto con respecto al objeto. Hace interacciones cognitivas al identificar los componentes que le permiten construir la figura y así mismo visualizar algunos atributos. Aplicada: maneja los íconos básicos del software Geogebra, lo que le permite realizar la construcción del sólido requerido, esto le ayuda conceptualizar y a realizar más ágilmente la figura y al tiempo de evaluar y corregir sus errores durante la elaboración de la misma. *"L2 S1- lo voy a hacer en la aplicación Geogebra" "L5S1-voy a hacer un cuadrado, los lados tienen que ser iguales" "L9S1- tomo los puntos de las esquinas y los uno" "SJ1-S1 "L3 voy a desplazar la vista gráfica para poder acomodar la figura". Relaciona la figura con objetos del entorno. El cubo es como un dado.*
L9S1- tomo los puntos de las esquinas y los uno	INV	
L10S1- y después de esto ya está el cubo	VS01,VB01	
INV-¿Cómo sabes que es un cubo?	VS01,VB01	
L11S1- sé que es un cubo porque está hecho de cuadrados	INV	
INV-¿Qué características tiene el cubo?	VS01,VB01	
L12S1-tiene segmentos y tiene líneas rectas	INV	
INV-¿Muy bien Sofía, ahora dime que observas a la derecha, izquierda, arriba, abajo?	VS01,VB01	
L13S1-a la izquierda veo cuadrados, arriba cuadrados, derecha cuadrado, abajo cuadrado	INV	
L14S1-son cuadrados porque si fuera un triángulo no sería cubo porque el cubo está hecho de cuadrados	VS01,VB01	
L15S1- los cuadrados tiene cuatro lados y son iguales	VS01,VB01	
INV-¿Qué puntos y segmentos observas en el cubo?	VS01,VB01	
L16S1-en total puedo ver 8 puntos y 12 segmentos.	INV	
INV-¿Qué clases de líneas ves?	VS01,VB01	
L17S1-veo líneas verticales, horizontales y rectas, oblicuas	INV	

que unen el otro cuadrado		
INV-¿Cuántas caras observas en el sólido?	VS01,VB01	
L18S1- observo seis caras	INV	
INV-¿Cuál es la base del sólido?	VS01,VB01	
L19S1 la base del sólido es un cuadrado, tiene líneas rectas, tiene cuatro líneas y todas son iguales	INV	
INV-¿Qué vistas hacen parte de esta figura?	VS01,VB01	
L20S1. Las vista que corresponde es la b, porque tiene la a, tiene una parte más larga	INV	
L21S1. (después de cuestionar su respuesta) no entonces le falta la a, porque para cerrarla queda como un cuadrado y con la cosita salida se puede formar el cuadrado	VS01,VB01	
INV-¿Qué figura plana corresponde a esta figura?		
L22S1. La figura plana que corresponde al cubo es el cuadrado.	INV	
INV- Con qué objeto de tu entorno la relacionas		
L23S1- con un dado que tengo		

Fuente: elaboración propia

Tabla 7. *Análisis de protocolos verbales estrategia uno sesión 6*

SESION 6, SUJETO 1 ESTRATEGIA 1Ana Sofía Bolívar.		
PROTOCOLO VERBAL	**CATEGORÍAS**	**ANÁLISIS**
INV-Buen día Sofía, hoy vamos a realizar nuestra última sesión	INV	Teniendo en cuenta las categorías de la investigación se concluye : Visual: muestra mayor dominio al observar, identificar y deducir los diferentes atributos de cada uno de los sólidos que componen la figura isométrica a construir. *SJ1-S6 "L3.Miro varios triángulos arriba" "L4- Espera, esos triángulos, forman una pirámide" "L5-Pero primero hay un prisma" "-L10- Ahora pongo puntos, para armar el prisma" "Voy a segmento y uno las esquinas de los puntos y ya.",* ubicándose espacialmente desde diferentes posiciones logra reconocer las figuras planas que conforman la figura isométrica y la relaciona con objetos de su entorno. *"S1-L16-Arriba veo una pirámide. Al lado derecho un prisma, al izquierdo veo un cubo",* Verbal: su verbalización la hace desde los conocimiento adquiridos en las diferentes sesiones, lo que le permite nombrar y usar acertadamente los íconos adecuados para la construcción de la figura isométrica, su vocabulario geométrico se ha enriquecido utiliza términos más técnicos para describir los atributos de la figura y así mismo ubicarlos espacialmente en el plano cartesiano. Evidenciado en las siguientes verbalizaciones "*L1-Voy a Geogebra, para hacer la figura. Está difícil" "S1-L2-Voy arreglar, vista*
INV-Lee la guía.	INV	
S1-L1-Voy a Geogebra, para hacer la figura. Está difícil.	VS01,VB01	
INV-¿Qué estás pensando?	VS01,VB01	
S1-L2-Voy arreglar, vista gráfica, para hacer el prisma.	INV	
INV-¿Observas algo más en la figura?	VS01,VB01	
S1-L3.Miro varios triángulos arriba.	INV	
INV-¿Qué figura se forma con esos triángulos?	VS01,VB01	
S1-L4- Espera, esos triángulos forman una pirámide.	INV	
S1-L5-Pero primero hay un prisma.	VS01,VB01	
INV-¿Qué es un prisma, cuáles son sus características?	INV	
S1-L6-Es un sólido, tiene rectángulos segmentos,	VS01,VB01	
S1-L10- Ahora pongo puntos, para armar el prisma.	INV	
S1-L10-Voy a segmento y uno las esquinas de los puntos y ya.	VS01,VB01	
INV-¿Te falta hacer algo más, en la figura?	INV	
S1-L11-sí, la parte de arriba.	INV	

S1-L12. Saco líneas diagonales arriba, y las uno con un punto. acomodo con "elige y mueve"	VS01,VB01	*gráfica, para hacer el prisma", "S1-L3.Miro varios triángulos arriba." "S1-L4- Espera, esos triángulos, forman una pirámide" "S1-L10-Voy a segmento y uno las esquinas de los puntos y ya"."S1-L12. Saco líneas diagonales arriba, y las uno con un punto, acomodo con "elige y mueve" " S1-L15-tiene triángulos iguales. Cuadrados y rectángulos"*
S1-L13.Y ya quedó la figura, fácil.	VS01,VB01	
INV-¿Qué sólidos observas en la figura hecha?	VS01,VB01	
S1-L14-Un prisma y pirámide.	VS01,VB01	
INV-¿Puedes relacionar este sólido con alguna figura plana?	INV	Dibujo: hace uso de la herramienta elige y mueve para ir dando la forma a la figura, que está construyendo con habilidad, usa adecuadamente el espacio grafico respetando las características de la figura solicitada. "SJ1-S6 "L12. Saco líneas diagonales arriba, y las uno con un punto. acomodo con "elige y mueve"
S1-L15-tiene triángulos iguales. Cuadrados y rectángulos	VS01,VB01	
INV-Si te ubicaras a la derecha, izquierda, arriba, abajo. ¿Qué observas?	INV	
S1-L16-Arriba veo una pirámide. Al lado derecho un prisma, al izquierdo veo un cubo.	INV	
INV-¿Por qué un cubo?	VS01,VB01	
S1-L17-Es un cubo, porque es real, y está en 3D.Y abajo miro un prisma.	INV	
INV-De las siguientes vistas, ¿Cuál corresponde a la figura hecha?	VS01,VB01	
S1-L18-La A, por la forma similar a la figura, que la hice con rectángulos y triángulos.	VS01,VB01	Lógica: logra combinar en dos y tres dimensiones, dos figuras planas diferentes y dos sólidos de distinta forma, por medio de la herramienta que le permite súper poner de manera precisa las figuras tridimensionales
INV- Con qué figura de tu entorno la podrías comparar		
S1 –L19- con la parte de una iglesia.	VS01,VB01	

INV-Gracias Sofía, por tu colaboración en cada taller	INV	*.SJ1-S6 "L16-Arriba veo una pirámide. Al lado derecho un prisma, al izquierdo veo un cubo" "-L17-Es un cubo, porque es real, y está en 3D.Y abajo miro un prisma" "L18-La A, por la forma similar a la figura, que la hice con rectángulos y triángulos"* Reconoce los atributos que conforman la figura isométrica, haciendo interacciones cognitivas de forma más precisa, relacionando acertadamente términos con sus conceptos, realiza rotaciones mentales que le permiten identificar las características de la figura desde diferentes posiciones como la figura plana que la conforma, el tipo de líneas o los sólidos que la componen. Aplicada: en esta sesión tuvo un manejo adecuado de las diferentes posibilidades que los íconos le brindaban en el ambiente computacional, y así mismo identifico los atributos de figura, evaluando su proceso lo que le permitió reconocer sus aciertos y equivocaciones haciendo interaccione cognitivas. *.SJ1-S6- L6-Es un sólido, tiene rectángulos segment"L15-tiene triángulos iguales. Cuadrados y rectángulos"* "*L1-Voy a Geogebra, para hacer la figura. Está difícil" "S1-L2-Voy arreglar, vista gráfica, para hacer el prisma", "S1-L3.Miro varios triángulos arriba." "S1-L4- Espera, esos triángulos, forman una pirámide" "S1-L10-Voy a segmento y uno las esquinas de los puntos y ya"."S1-L12. Saco líneas diagonales arriba, y las uno con un punto, acomodo con "elige y mueve" " S1-L15-tiene triángulos iguales. Cuadrados y rectángulos"*

Fuente: elaboración propia

6.1.1.2. Análisis de las diferentes sesiones de la estrategia uno de visualización "Orientación estática del sujeto y los objetos"

La tabla permite observar de manera detallada cómo fue el proceso de los sujetos de acuerdo a las categorías, basados en los análisis de protocolos verbales (ver Anexo D)" en las diferentes sesiones, además se concluye cual es el resultado final por cada categoría (visual, verbal, dibujo, lógica y aplicada) con el análisis que contrasta los resultados obtenidos por los individuos versus marco teórico.

Tabla 8. *Muestra la conclusión de las seis sesiones realizadas para ver el desarrollo del razonamiento geométrico en los diferentes momentos en la estrategia uno de visualización "orientación estática del sujeto y los objetos*

Categoría	Conclusión
Visual	Reconocen nombres de sólidos, visualizan los elementos geométricos más sencillos como son: punto, línea, recta, semirrecta, segmento y polígonos básicos, Muestran mayor dominio al observa, identificar y deducir las diferentes atributos de cada uno de los sólidos y figuras isométricas a construir. (*SJ1-S6 "L3- l4- L5-16, SJ3-S6-L2-16)*
Verbal	El lenguaje mejora, usando términos técnicos geométricos de acuerdo a la edad, describen las figuras haciendo uso de composición cuando parte de los segmentos para componer la figura plana y con ella construyen el sólido geométrico.
Dibujo	Inicialmente hicieron uso de algunas opciones que le brindaba el ambiente computacional para realizar la construcción de sólidos, a medida que avanzaban en las sesiones su habilidad en el ambiente mejoro notablemente usando más opciones y logrando construcciones más precisas en el plano cartesiano evidenciando dominio de la vista gráfica
Lógica	Los sujetos relacionan su posición con respecto al objeto (izquierda- derecha- arriba – abajo) logrando una ubicación espacial adecuada, cuando identifican las diferentes vistas tanto del sólido como de las figuras isométricas. Identifican componentes básicos de las figuras como los segmentos, las líneas, los puntos, entre otros, relacionando las figuras trabajadas en las diferentes sesiones en la ventana vista gráfica bidimensional (2D).
Aplicada	Al finalizar las sesiones se observa una mayor habilidad en el manejo de las opciones del ambiente computacional, logrando construcciones detalladas que conservan las características y atributos de las figuras solicitadas en los diferentes talleres, en su elaboración evalúan sus errores y aciertos, haciendo uso del ícono elige y mueve que les da la opción de manejar de manera hábil y rápida los diferentes segmentos o puntos ubicados en las coordenadas del plano cartesiano. Estas construcciones les permiten realizar a partir de sus preconceptos caracterizaciones precisas de las figuras.

CONCLUSIÓN GENERAL DE LA ESTRATEGIA UNO "ORIENTACIÓN ESTÁTICA DE SUJETO Y DE LOS OBJETOS"	En la utilización del ambiente computacional los sujetos hacen uso de la opción vistas gráfica bidimensional (2D), para hacer sus construcciones, lo cual permite que los sujetos se ubiquen espacialmente, identificando las vistas que poseen las figuras desde diferentes posiciones. De acuerdo a los conceptos logrados en las seis sesiones los sujetos visualizan elementos geométricos como punto, línea, recta, semirrecta, segmento y polígonos básicos (cuadrado, triángulo y rectángulo), describen las figuras, caracterizándolas de forma precisa, relacionándolas con objetos de su entorno y mostrando de esta manera un avance en su razonamiento geométrico. A la luz de la aplicación de la seis sesiones y contrastándolas con los indicadores propuestos por Van Hiele y Hoffer (1983) como se citó en Cabello (2013) en cuanto a desarrollo del razonamiento geométrico, se concluye que la estrategia permitió desarrollar proceso de visualización, al elaborar sus construcción a partir la imagen, lo cual facilitaba identificar atributos y componentes propios de cada sólido o figura isométrica, haciendo uso de la rotación mental de las figuras ya que la ventana vista gráfica bidimensional (2D) no les permitía rotarla, además el hecho de contar con opciones para supervisar su trabajo, les daba la posibilidad de buscar nuevas alternativas para concluir la construcción acertadamente, afianzando su razonamiento geométrico. Es importante resaltar que a través de la aplicación de las sesiones el vocabulario técnico geométrico fue mejorando usando términos más amplios. Ahora retomando los requerimientos que establecen los estándares básicos de competencias matemática del Ministerio de Educación Nacional (2006) para grado tercero, la estrategia permitió que los estudiante lograran diferenciar atributos y propiedades de objetos tridimensionales e igualmente sus dibujos permitieron ubicar a los sujetos con respecto el objeto, obteniendo un punto de referencia espacial (al frente- atrás- arriba- abajo- izquierda- derecha) que los lleva a identificar componentes de la figura.

Fuente: elaboración propia

6.1.2 protocolos verbales estrategia dos "tareas de interpretación de perspectivas de objetos tridimensionales"

Con el fin de realizar una mayor comprensión de la información de los resultados obtenidos en los protocolos verbales se muestran los talleres de la sesión uno y dos estrategias de visualización, los demás talleres se encontraran en el Anexo C.

ANÁLILIS DE PROTOCOLOS VERBALES PARA ESTRATEGIA DOS "TAREAS DE INTERPRETACIÓN DE PERSPECTIVAS DE OBJETOS TRIDIMENSIONALES"

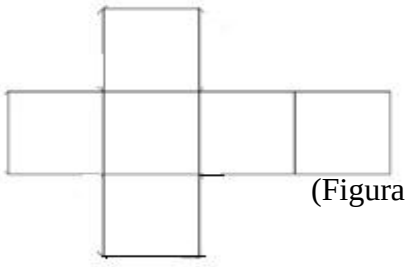
SESIÓN UNO (1) ESTRATEGIA DOS "Tareas de interpretación de perspectivas de objetos tridimensionales"

OBJETIVO: establecer las características de las figuras, teniendo en cuenta las perspectivas tridimensionales.

PROBLEMA: encontrar la figura tridimensional (sólido) que corresponde con la figura desplegada y las vistas dadas.

Instrucciones:

Observe las vistas y construya en el software Geogebra, el sólido que corresponde a ellas, verbalice todos sus movimientos, luego resuelva las preguntas.



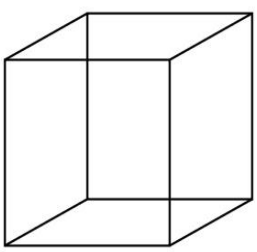
(Figura desplegada)

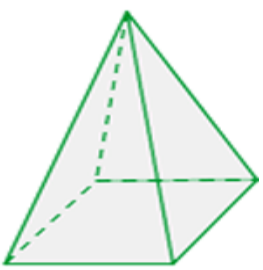
Vista superior vista inferior vista izquierda vista derecha

Ahora conteste por escrito y verbalmente las siguientes preguntas:

1. ¿A qué sólido corresponde las vistas? ¿Cómo sabe que es esta figura?
2. Qué figuras geométricas planas puedes ver en las vistas
3. Qué figura plana corresponde a la vista izquierda, qué características tiene esa figura
4. La vista inferior a que figura corresponde, qué características tiene esa figura
5. De los siguientes sólidos ¿cuál corresponde a las vistas? Justifica su respuesta

a.

b. 

c. 

6. ¿Cuántos puntos puedes encontrar en el sólido?

7. De las siguientes figuras planas ¿cuál está relacionada con el sólido que estás viendo?

a.

.

c.

d.

e.

8. ¿Cuántos segmentos reconoces en la vista izquierda del sólido?

9. ¿Cuántos puntos y cuántos segmentos puedes identificar en total en el sólido?

10. ¿Qué tipos de líneas encuentras? Justifica tu respuesta

11. ¿Cuántas caras observa?

12. ¿Qué tipos de líneas encuentras? Justifica tu respuesta

13. ¿Cuántas caras observas?

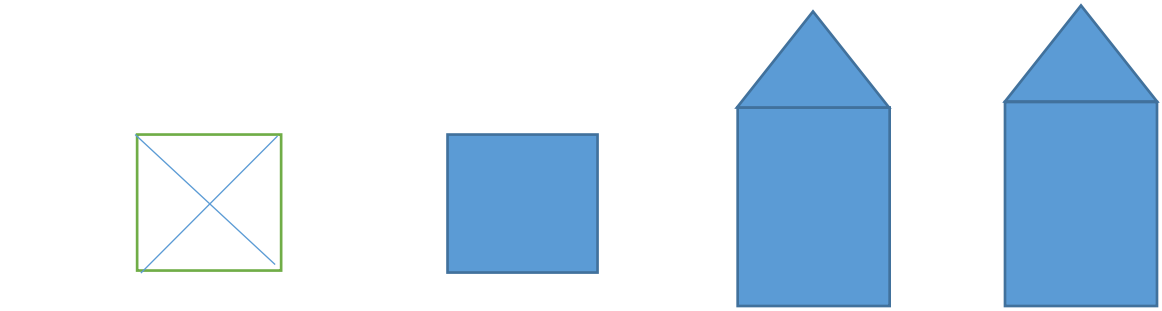
SESIÓN 6 ESTRATEGIA DOS "TAREAS DE INTERPRETACIÓN DE PERSPECTIVAS DE OBJETOS TRIDIMENSIONALES"

TALLER 6

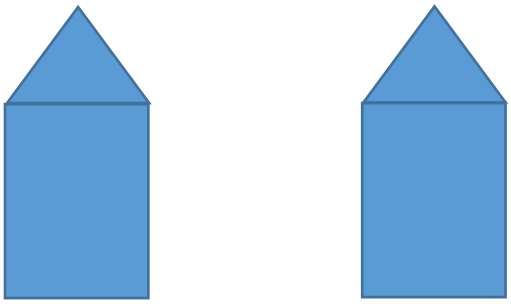
OBJETIVO: establecer las características de las figuras, teniendo en cuenta la posición del sujeto con respecto al objeto.

PROBLEMA: ¿Cómo utilizar los procesos de visualización geométrica para relacionar características de una figura isométrica, teniendo como inicio las vistas del objeto para lograr su construcción reproduciéndola en el software Geogebra?

INSTRUCCIONES: observe las vistas y construya en el software Geómetra, el sólido que corresponde a ellas, verbalice todos sus movimientos, luego resuelve las preguntas.



Vista superior vista inferior vista izquierda vista derecha

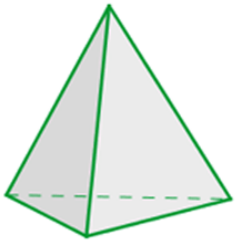


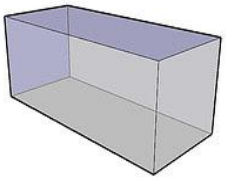
Vista frente Vista atrás

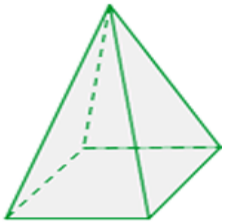
Ahora conteste por escrito y verbalmente las siguientes preguntas:

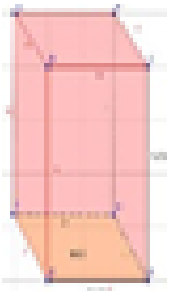
1. ¿A qué sólido corresponde las vistas? ¿Por qué cree que es esta figura?
2. ¿Qué figuras geométricas plana, reconoce la vista inferior? ¿Cómo sabe que es la figura?
3. ¿Qué figura observa en la vista izquierda del sólido?

4. Si te paras a la ubicas debajo del sólido que figura puedes observar, qué características tiene esa figura.
5. ¿Cuál de estos sólidos corresponde a las vistas observadas? Justifica su respuesta

a. 

b. 

c. 

d. 

6. ¿Cuántos puntos puedes encontrar en la figuro que forma la vista superior?
7. De las siguientes figuras planas ¿cuál está relacionada con el sólido que estás viendo?

a.

b.

c.

d.

e.

8. ¿Cuántos segmentos reconoces en la figura?
9. ¿Cuántos puntos y cuántos segmentos puedes identificar en total en del sólido?
10. ¿Qué tipos de líneas encuentras? Justifica tu respuesta
11. ¿Cuántas caras observas?
12. ¿Qué características encuentras en la base de la figura?

6.1.2.1. Muestra de protocolos verbales primera y sexta sesión de un sujeto estudio

Tabla 9. *Análisis de protocolos verbales estrategia dos - sesión uno*

SESIÓN 1, ESTRATEGIA 2

Juan David Rodríguez SUJETO 3 (SJ3)

PROTOCOLO VERBAL	CATEGORÍAS	ANÁLISIS
S1-INT-A que sólido pertenecen las vistas.		De acuerdo a las categorías de la investigación se podría concluir:
S1-L1- No me acuerdo de los sólidos (se le solicita hacer un recuerdo)	AP01/LO1	Visual: construye la figura a partir de las vistas del objeto, lo logra al hacer una relación mental de estas con las figuras que conoce (*SJ3-S1-L2- si ya se, se parece a un cubo, porque tiene cuatro cuadrados)*, identifica algunas características de la misma *(SJ3-S1- L13- porque tiene cuatro lados, tiene cuatro segmentos y ya no se más - L17-En el sólido encuentro 16 puntos, porque cada vista tiene cuatro-).* Identifica las figuras planas que componen el sólido y lo relaciona con objetos de su entorno
S1-INT- Piensa bien, no conoces ningún sólido que corresponda a las vistas.		
S1-L2- si ya se , se parece a un cubo, porque tiene cuatro cuadrados	AP01/L01/VS01	
S1-INT- Puedes construirla. Como lo harías		
S1-L3-aquí entro a Geogebra	AP01	
S1-L4-ahora a desplazar la gráfica	AP01	Verbal: relaciona el forma correcta las características y atributos del objeto sin embargo presenta confusión algunos términos *(SJ3-S1- L11- un figura plana es un ángulo de cuatro lados)* .Tiene claro y verbaliza algunas características propias del objeto usando un lenguaje básico propio de su edad *(SJ3-S1 L17-En el sólido encuentro 16 puntos, porque cada vista tiene cuatro (aunque esto es un error ya que cubo tiene 8 vértices) ; L19- encuentro líneas rectas)*
S1-L5-voy a hacer un cuadrado con segmento	AP01-04/L01-04/VB01	
S1-L6-en segmento de a a b, de b a c, de c a d,	AP01-04/L01-04/VB01/D02	
S1-L7-ahora voy a vista gráfica 3D	AP01	
S1- L8-voy a escoger el cubo	AP01-04/L01-04/VB01	
S1-L9- paso por los puntos y paso por el cubo	AP01-04/L01-04/VB017D01	
S1-L10- y le doy desarrollo y le doy al cubo	AP01-04/L01-04/VB01/D01	Dibujo: hace uso del ambiente computacional, logrando construir la figura, utilizando las opciones de la vista gráfica tridimensional (3D) y a partir de las vistas
S1-INT- Sabes qué es una figura plana		
S1-L11- un figura plana es un	AP01/L01/	

ángulo de cuatro lados		dadas, lo que le permite girar la figura según la indicación, ampliando su campo visual. Realiza la figura respetando las características básicas de la misma. Lógica: describe el proceso de elaboración de la figura partiendo de sus conceptos previos, utilizando las opciones del ambiente computacional, tiene capacidad de interpretación, relación y deducción lógica en el momento en que construye la figura partiendo solo de las vistas y hacerlo reconoce los atributos de la figura. *(SJ3-S1 - L13"porque tiene cuatro lados, tiene cuatro segmentos" , "S1-L5-voy a hacer un cuadrado con segmento", " S1-L10- y le doy desarrollo y le doy al cubo", "S1-L11- un figura plana es un ángulo de cuatro lados ", "S1-L13-porque tiene cuatro lados, tiene cuatro segmentos y ya no se más")* Aplicada: maneja opciones del ambiente computacional, y las usa de forma adecuada en la construcción de sólidos geométricos, entiende que la opciones vista gráfica tridimensional (3D) le permite visualizar la figura de forma más práctica, elabora una planificación de sus movimientos evaluando sus equivocaciones y haciendo las correcciones pertinente observado en verbalizaciones como (*SJ3-S1 - L5-voy a hacer un cuadrado con segmento; L6-en segmento de a a b, de b a c, de c a d; L7-ahora voy a vista gráfica 3D L8-voy a escoger el cubo* ; *L10- y le doy desarrollo y le doy al cubo),* se evidencia en sus verbalizaciones confusión en el *concepto de los términos que usa (SJ3-S1 - L11).* Toma
S1-INT- Qué figura plana observar a la izquierda de tu figura		
S1-L12-veo un cuadrado	VB01/VS 01/L01	
S1-L13-porque tiene cuatro lados, tiene cuatro segmentos y ya no se más	VB01/VS 01/L01-03/AP04	
S1-INT- Que figura plana observas en la vista inferior		
S1-L14-la vista inferior (señala la de abajo) veo un cuadrado	VB01/VS 01/L01	
S1-INT-Estas vistas a qué sólido corresponden		
S1-L15- las vistas corresponden al cubo.	VB01/VS 01/L01-03/AP04	
S1-INT- Cómo sabes esto		
S1-L16-porque el cubo está formado por cuadrados	VB01/VS 01/L01-03/AP04	
S1-INT- Cuántos puntos tiene la figura		
L17-En el sólido encuentro 16 puntos, porque cada vista tiene cuatro.	VB01/VS 01/L01-03/AP04	
S1-INT-Qué figuras planas puedes ver en el sólido		
S1-L18- la figura plana que corresponde al cubo es el cuadrado	VB01/VS 01/L01	
S1-INT-Qué tipo de líneas encuentras		
S1-L19-encuentro líneas rectas	VB01/VS 01/L01-03/AP04	
S1-INT- Con qué objeto de tu entorno puede relacionar esta figura		

S1-L20- con los parlantes, las sillitas de mi casa, el dado	VS02/L02-04	decisiones para establecer las propiedades del cubo (*SJ3-S1 - L16)*, emplea términos geométricos específicos como segmento, líneas rectas, el punto entre otros, evidenciado en verbalizaciones como (*SJ3-S1 - L5- L6-, L7- L8*

Fuente: elaboración propia

Tabla 10. *Análisis de protocolos verbales estrategia dos -sesión seis*

SESION 6, ESTRATEGIA 2

Juan David Rodríguez SUJETO TRES (SJ3)

PROTOCOLO VERBAL	CATEGORÍAS	ANÁLISIS
S5- INT-Las vistas que estás viendo a qué sólido los relacionas		Teniendo en cuenta las categorías de la investigación se podría concluir: Visual: en su construcción busca la figura completa y no parte su construcción de la vista; no usa las opciones de vista gráfica tridimensional (3D) manifiesta no poder usarla pues no maneja la súper posición de dos sólidos, por tanto prefiere usar la ventana bidimensional (2D), *(SJ3-S5-INT-Las vistas que estás viendo a qué sólido los relacionas L1-A un triángulo, rectángulo y cuadrado (revisa las vistas y la guía completa. Piensa) INT-Qué sólido L2-una pirámide con base cuadrada y un rectángulo…).* Describe los atributos de la figura, haciendo relaciones básicas y clasificando algunas propiedades, reconociendo las figuras planas que la componen y sus principales características*(SJ3-S5-L40- un cuadrado L41-porque tiene cuatro segmentos, tiene dos paralelas y cuatro puntos L45- tres, perdón 6 caras L46-el ortoedro, tiene 8*
S5- L1-A un triángulo, rectángulo y cuadrado (revisa las vistas y la guía completa. Piensa)	AP01/D02	
S5- INT-Qué sólido		
S5- L2-una pirámide con base cuadrada y un rectángulo…	AP01/D02	
S5- L3-lo voy a hacerlo en geogebra	AP01	
S5- L4-abro cuadricula	AP01	
S5- INT-Que harás primero		
S5- L5-la figura que tiene el rectángulo	AP02/VB01/L01/D02	
S5- L6- utilizo segmento	AP02/VB01/L01/D02	
S5- L7-voy a construir el cuadrado	AP02/VB01/L01/D02	
S5- L8-voy a borrar estos puntos	AP03	
S5- L9-vuelvo a empezar	AP01/D02	
S5- L10- segmento	AP02/VB01/L01/D02	

S5- L11.- ha el cuadrado	AP02/VB01/L01/D02	*segmentos, 8 líneas y 8 puntos)* Verbal: *en su descripción utiliza términos técnicos, aunque en su percepción evidencia errores.* y describes más características identificado en las verbalizaciones *(SJ3-S5-L40 a L46)* Dibujo: el dibujo logrado es igual a solicitado, muestra agilidad en el uso del ambiente computacional para la elaboración del mismo, contrario a la sesión anterior relaciona fácilmente sus movimientos para hacer la figura acudiendo a conceptos trabajados anteriormente (elaboración de ortoedro y pirámide) Lógica: hace uso de su memoria visual para reproducir la figura isométrica, discrimina visualmente de las similitudes y diferencias que la figura contiene frente a las que ya había construido en las sesiones anteriores, se observa avance en el uso de elementos geométricos como paralelas, punto, recta lo que se puede evidenciar en las siguientes verbalizaciones *(SJ3-S5-L40- un cuadrado L41-porque tiene cuatro segmentos, tiene dos paralelas y cuatro puntos L45- tres, perdón 6 caras L46-el ortoedro, tiene 8 segmentos, 8 líneas y 8 puntos)* Aplicada: en el ambiente computacional software Geogebra, no logra hacer uso de la opciones tridimensional (3D), hace su construcción en la ventana bidimensional (2D) conservando las características básicas de la figura. Regula de su trabajo lo que lo permite razonar y evaluar sus equivocaciones y posibles soluciones para hacer su construcción, logrando lo que le
S5- L12-voy a borrar el cuadrado	AP03	
S5- L13-Otra vez a segmento	AP02/VB01/L01/D02	
S5- L14- voy a flecha y lo cuadro acá	AP02/VB01/L01/D02	
S5- INT- Y ahora qué haces		
S5- L15-(piensa)...ahora voy a hacer una línea atrás con segmento	AP02/VB01/L01/D02	
S5- L16- hago otra	AP02/VB01/L01/D02	
S5- L17-y la uno	AP02/VB01/L01/D02	
S5- L18-voya a flecha y la acomodo	AP02/VB01/L01/D02	
S5- L19-voy a segmento	AP02/VB01/L01/D02	
S5- L20-hago otra línea	AP02/VB01/L01/D02	
S5- L21-aquí otra y la uno	AP02/VB01/L01/D02	
S5- L22-voy a flecha y lo acomodo	AP02/VB01/L01/D02	
S5- L23-este aquí	AP02/VB01/L01/D02	
S5- L24-de acá a acá	AP02/VB01/L01/D02	
S5- INT- y ahora que harás		
S5- L25-voy a flecha y organizo	AP02/VB01/L01/D02	
S5- INT- Por qué hiciste eso		
S5- L26-para que quedara más mejor	AP04	
S5- INT- y ahora que vas a hacer		
S5- L27- voy a hacer lo de arriba, una pirámide con base cuadrada	AP02/VB01/L01/D02	
S5- L28- voy a segmento, acá y acá	AP02/VB01/L01/D02	
S5- L29-hago aquí	AP02/VB01/L01/D02	

S5- INT-que estás haciendo, cuántos puntos tiene la pirámide		solita la guía como lo evidencia las verbalizaciones *(SJ3-S5- L5 a la L33).*
S5- L30-segmento y otra línea	AP02/VB01/L01/D02	
S5- INT- Qué estás haciendo aquí		
S5- L31- voy a borrar un punto	AP03	
S5- L32-y hora segmento	AP02/VB01/L01/D02	
S5- INT-pensé que te sería más difícil		
S5- L33-segmento y esta línea y ya	AP02/VB01/L01/D02	
S5- INT-esta figura se parece a las vistas que tienes		
S5- L34- si ya está igual	AP02/VB01/L01/D02	
S5- INT- Es verdad, te felicito, ahora te hare un pregunta, me recuerdas los sólidos que tiene tu figura		
S5- L35-la pirámide y el ortoedro	AP02/VB01/L01/D02	
S5- INT-Qué figuras planas se verían en la figura que construiste		
S5- L36-triángulo, rectángulo y cuadrado	AP02/VB01/L01/D02	
S5- INT- Donde verías el cuadrado		
S5- L36- arriba y abajo	AP02/VB01/L01/D02	
S5- INT-donde verías los rectángulos		
S5- L37- a los lados	AP02/VB01/L01/D02	
S5- INT-Donde verías el triángulo		
S5- L38-arriba en la pirámide	AP02/VB01/L01/D02	
S5- INT-Si te paras a la izquierda que figura geométrica		

plana verías	
S5- L39-un rectángulo y un triángulo	AP02/VB01/L01/D02
S5- INT- Si te paras debajo que verías y como lo sabrías	
S5- L40- un cuadrado	AP02/VB01/L01/D02
S5- L41-porque tiene cuatro segmentos, tiene dos paralelas y cuatro puntos	AP02/VB01/L01/D02
S5- INT-En el total de la figura cuantos puntos hay	
S5- L42-nueve puntos	AP02/VB01/L01/D02
S5- INT-Si tú te paras a la derecha de tu figura cuantos puntos ves	
S5- L43-cuatro	AP02/VB01/L01/D02
S5- INT- Qué figuras planas ves en la figura	
S5- L44- triángulo, rectángulo y cuadrado	AP02/VB01/L01/D02
S5- INT-Cuántos segmentos ves en la figura	
S5- L45- 15 segmentos	AP02/VB01/L01/D02
S5- INT-Qué tipos de líneas observas	
S5- L46- rectas	AP02/VB01/L01/D02
S5- INT- Cuántas caras ves	
S5- L45- tres, perdón 6 caras	AP02/VB01/L01/D02
S5- INT- Qué características encuentras en la base de la figura	
S5- L46-el ortoedro, tiene 8 segmentos, 8 líneas y 8 puntos	AP02/VB01/L01/D02
INV- Con qué figura de tu entorno relacionas la figura isométrica	

S5-L47-con una iglesia	AP02/VB01/L01/D02	

Fuente: elaboración propia

6.1.2.2 Análisis de las diferentes sesiones de la estrategia dos de visualización "tareas de interpretación de perspectivas tridimensionales"

La Tabla 11 permite observar de manera detallada cómo fue el proceso de los sujetos de acuerdo a las categorías, basados en los análisis de protocolos verbales (ver Anexo D) en las diferentes sesiones, además se concluye cuál es el resultado final por cada categoría (visual, verbal, dibujo, lógica y aplicada) con el análisis que contrasta los resultados obtenidos por los individuos versus marco teórico.

Tabla 11. *Muestra las conclusiones de las seis sesiones realizadas para ver el desarrollo del razonamiento geométrico en los diferentes momentos en la estrategia dos de visualización "Tareas de interpretación de perspectivas tridimensionales"*

Categoría	Conclusión
Visual	En las primeras tres sesiones los sujetos logran construir el sólido a partir de las vistas, en las tres últimas sesiones se les dificulta hacer la relación de vista-sólido, lo que los lleva a hacer una relación de los conceptos obtenidos previamente (cuadrado, rectángulo, triángulo), buscando imágenes que posean las vistas o caras solicitadas, a partir de estas inician la construcción, esto como un elemento de la primera estrategia. De igual manera, describen los atributos de la figura de forma acertada, haciendo relaciones básicas y clasificando algunas propiedades, reconociendo figuras planas que componen los sólidos y figuras isométricas, sus principales características y la base que conforma la figura. (*SJ3-S1-L2-13-17 / SJ3-S5-L1-2-40 A 46)*
Verbal	Se observa en los estudiantes enriquecimiento de su vocabulario técnico geométrico, mejorando sus descripciones, clasificando aspectos de acuerdo a los atributos y caracterizando los sólidos e isométricos de forma particular. (*SJ3/ S1/ L11/ 17/19 - SJ3-S5-L40/46)*
Dibujo	A medida que se realizaron las sesiones aumento el dominio en el ambiente computacional y esto permitió realizar figuras más aproximadas al modelo, sin

	embargo se observó un retroceso en las tres últimas sesiones donde, no lograron hacer uso de la vista gráfica tridimensional (3D) y sus construcciones se limitaron a la vista gráfica bidimensional (2D), sin perder los atributos correspondientes a figuras tridimensionales. (*SJ3-S1-L7-10 / SJ3-S5-L6-8-14-16-18-22)*
Lógica	En las seis sesiones se observó el aumento en la habilidad para determinar las características de las figuras solicitadas, al realizar las actividades mejoraron su argumentación, sin embargo, a la luz de habilidades que tenían como objetivo la estrategia, se observa que en las últimas sesiones necesito hacer más uso del objeto para lograr describir sus atributos, no lo puedo hacer por medio de las vistas. *(SJ3-S1-L-5-10-11 / SJ3-S5-L40 a LA 46)*
Aplicada	Mejoraron sus habilidades en el ambiente computacional a pesar no lograr a 100% en el manejo de la vista gráfica tridimensional (3D), sin embargo logra construir la mayoría de las figuras en la vista gráfica bidimensional (2D), identificando allí los diferentes atributos de las figura. Manejan una estructura cognitiva que contribuye a el razonamiento geométrico donde identifican, construyen, regulan sus procesos y caracterizan. *(SJ3-S1-L5-7-10-11-16 / SJ3-S5-L5 a 33)*
CONCLUSIÓN GENERAL DE LA ESTRATEGIA DOS "TAREAS DE INTERPRETACIÓN DE PRESPECTIVAS TRIDIMENSIONALES"	Teniendo en cuenta la aplicación de las seis sesiones y contrastándolas con los indicadores propuestos por Van Hiele y Hoffer (1983) como se citó en Cabello (2013) en cuanto al razonamiento geométrico, se concluye que la estrategia si bien al comenzar las actividades permitía que los estudiantes desarrollaran sus procesos de visualización a partir de construir sólidos basados en la observación de sus vistas, en las tres últimas sesiones se observa gran complejidad en sus elaboración, los individuos requieren observar la imagen para poder describir sus atributos y analizar sus características más básicas haciendo uso de la rotación mental, sin embargo, es de resaltar que en las figuras donde lograron realizar el sólido con ayuda de la vista gráfica tridimensional (3D), mejoran su nivel de descripción , también es necesario rescatar el hecho que a mayor avance de las sesiones donde se le solicitaba al estudiante caracterizar lo observado, el vocabulario técnico aumento siendo cada vez más minucioso. En cuanto al uso del ambiente computacional se observa gran motivación de los estudiantes por el manejo más acertado del ambiente, mejorando el razonamiento geométrico; el hecho de poder supervisar constantemente sus movimientos les permitían reestructurar sus acciones y determinar un plan adecuado de trabajo, manejaron adecuadamente las opciones del ambiente pertinentes para la construcción del sólido o figura isométrica.

	Ahora, retomando los requerimientos que establecen los estándares básicos de competencias matemáticas del Ministerio de Educación Nacional (2006) para grado tercero, la estrategia permitió que los estudiantes diferenciaran atributos en objetos tridimensionales, al realizar los dibujos la estrategia se hace más pertinente ya que lleva al estudiante a realizarlos en la vista gráfica tridimensional (3D), pero en la últimas sesiones esta no fue pertinente aunque se mantuvieron características tridimensionales en sus dibujos, logran también el desarrollo de la rotación mental que lleva al estudiante a desarrollar sus habilidades orientación, lateralidad , lo que nos lleva a afirmar que la estrategia aunque no desarrolle 100% la visualización en los estudiantes si les permite adquirir la gran parte de las habilidades que los estándares sugieren
	Identifican globalmente la figura geométrica (sólido o isométrico), relacionándola con sus conceptos básicos y objetos de su entorno Reconocen los atributos básicos de las figuras, identificando las figuras planas que lo componen y sus características (segmentos, puntos, vértices, líneas) Realiza sus construcciones evaluando supervisando sus progresos, dificultades y logros finales. Hace rotación mental y cuando usa la herramienta vista gráfica tridimensional (3D) la hace en el ambiente computacional, para establecer los atributos de la figura observada.

Fuente: elaboración propia

6.2. Análisis razonamiento geométrico estrategias de visualización

Los protocolos verbales obtenidos en las diferentes sesiones a partir de la aplicación de las dos estrategias de visualización permitieron evidenciar un proceso de razonamiento geométrico de los estudiantes objeto de estudio, el cual se presenta en las siguientes tablas teniendo en cuenta cuatro momentos: representación del problema, procesos, revisión del proceso y relación de figuras

6.2.1. Análisis razonamiento geométrico estrategia uno "orientación estática del sujeto con respecto al objeto

Tabla 12. *Análisis razonamiento geométrico estrategia uno "orientación estática del sujeto con respecto al objeto*

Categoría	Descripción del Razonamiento	Evidencia	Análisis
Representación del problema	Reconoce las figuras tridimensionales por la cantidad de caras que la forman, ya que parten de allí para la construcción de la mismas	(SJ1, L18, SJ2, L6, SJ3, L19) S1SJ1, L7, SJ2, L5, L19L11, SJ3, L12, L19)) (S2SJ1, L13, L16, L17), (S2SJ2, L5, l12), (S2SJ3, L5, L7) (S3, SJ1, L20, L57), (S3, SJ2, L10), (S3 ,SJ3 L28 (L34), (L9)), (S5, SJ3, L17,)	Realizan razonamiento geométrico en dos momentos, el primero cuando identifican en el sólido las caras como base de las figuras tridimensionales y en las figuras isométricas las vistas, lo que permite realizar la construcción en el ambiente computacional haciendo un proceso de composición. Además mencionan sus atributos de manera concreta y acertada, reconociendo las figuras planas que lo componen y usando un lenguaje más geométrico.
Procesos	Analizan y visualizan la forma como puede construir los sólidos de las sesiones partiendo de un punto de referencia que es la base, obteniendo los respectivos lados de cada uno de las figuras tridimensionales (cubo, pirámide, ortoedro, figuras isométricas),así mismo construye las figuras a partir de la	SJ1L1,l6,l4 SJ2L2, l3, l4, l5. SJ3L3,L4,L6	Al iniciar el proceso tienen claro el planteamiento del problema y la meta requerida. Hacen uso de sus conceptos básicos, para elaborar un plan de trabajo de una forma concreta y definida acertando a la construcción de cada una de las figuras tridimensionales (sólidos) e isométricas. Es importante resaltar un avance en sus conocimientos

	ubicación de puntos en el plano cartesiano para unirlos con segmentos. Y así armar las caras para luego superponerlas y unirlas desde sus vértices.		evidenciado en la planificación del trabajo de cada una de las sesiones, ya que parten de una visualización profunda de las características de las figuras planas que conforman cada sólido geométrico, un razonamiento ágil disminuyendo el tiempo de realización de la misma, a medida que iban avanzando en las sesiones y haciendo una construcción bien aproximada al requerimiento.
Revisión del Proceso	Durante la elaboración de las figuras tridimensionales hacen revisiones continuas del proceso o paso a paso que deben hacer para la ejecución del problema planteado. Y así mismo se da la posibilidad de realizar razonamiento geométrico, con el fin de obtener verdaderamente cada una de ellas. Además en la construcción de las figuras, manejo el ícono elige y mueve de manera continua, Y así mismo realiza razonamiento geométrico, con el fin de obtener de manera adecuada cada una de las figuras tridimensionales planteadas.	S1L11,L13,15,16 SJ2,L14,L15,L17 SJ3, L15, l16, l18.	Emplea de manera ágil cada uno de los íconos que le brinda Geogebra, para hacer la construcción de la figura isométrica, demostrando seguridad, basada en sus preconceptos que contribuyeron a una mejor expresión gráfica del sólido, los isométricos logrados conservan las características de la muestra y esto permite mejorar sus descripciones.

	Finalmente revisan algorítmicamente la construcción y superposición que realizan en la última sesión con la figura isométrica.		
Relación de Figuras	Relaciona el cuadrado con el cubo. Establece relación del triángulo con pirámide. Cuadrado-rectángulo. Relación con cuadrado, con rectángulo y prisma cuadrangular para la composición de la letra L Relación de cuadrado, rectángulo, triángulo. Y superposición pirámide sobre prisma.	SJ1L21, L22, L26. SJ2, L23, 25, L26. SJ3, L25, L26, L27.	Durante la ejecución de la sesión las estudiantes hacen relaciones de las figuras planas con los sólidos que conforman la figura isométrica. Dándoles la posibilidad de ir caracterizando los sólidos realizados en las otras sesiones y así mismo tener una identificación más clara de lo que es un sólido con sus características.

Fuente: elaboración propia

6.2.2. Análisis razonamiento geométrico estrategia dos "tareas de interpretación de perspectivas tridimensionales"

Tabla 13. *Análisis razonamiento geométrico estrategia dos "tareas de interpretación de perspectivas tridimensionales*

Categoría	Descripción del Razonamiento	Evidencia	Análisis
Representación del problema.	- Identifican las vistas como un componente esencial del enunciado del problema. - En las tres sesiones iniciales relacionan las vistas con el estado objeto del problema (hacer la	S1-SJ1-L1-3 S1-SJ2-L1-7 S2-SJ2-L1-2 S3-SJ3 L1-3 S4-SJ1-L1-2 S5-SJ1-L1 S6-SJ2-L2-4	Los sujetos muestran domino de la ambiente computacional Geogebra, mostrado precisión de sus movimientos, el proceso de razonamiento se mantiene a lo largo de las sesiones en dos momentos importantes:

	construcción a de las vistas), sin embargo en las últimas sesiones esto no se logra y buscan en la guía una imagen para hacer la relación e iniciar la construcción.		En las tres primeras sesiones parten de las vistas y la figura desplegada para realizar la construcción en un proceso de descomposición, pero luego en las últimas tres sesiones se les dificulta hacer la relación, lo que les implica buscar en la guía una imagen con la cual relacionan la vista iniciando la construcción a partir de la imagen haciendo un proceso de composición. Reconocen las características básicas de los sólidos y figuras isométricas.
Procesos	-Al iniciar las sesiones inician la construcción a partir de las vistas. Pero luego no logran partir de estas para realizarla, buscan imagen que le permite relacionar la vista y construye la figura isométrica en el ambiente Geogebra.	S2-SJ2-L3 a l34 S3-SJ1-L1-L12 S4-SJ2-L1-45 S5-SJ3 L1-22 S6-SJ2-L1.23	Realizan la construcción en el ambiente Geogebra evidenciando un proceso de elaboración de la figura isométrica a partir de la imagen, realizando un proceso de composición. -En todas las sesiones tienen claro el objetivo desde el inicio del proceso. Es decir tiene clara la meta. - Durante todas las sesiones el programa Geogebra les permite observar un nivel de evolución en la construcción de los sólidos y figura isométrica, definir algunas características, en el programa buscando opciones que les permitan concluir el dibujo de forma muy aproximada al requerido. -Al inicio de las sesiones muestran dominio en las opciones de la vista gráfica tridimensional (3D) del

			programa, pero luego se les dificulta y deciden usar las opciones de la vista gráfica bidimensional (2D), conservando un dibujo con características tridimensionales.
Revisión del Proceso	Hacen evaluación del proceso de elaboración y los resultados obtenidos.	S1-SJ1-L9-19 S2-SJ3-L9-21 S3-SJ3-L7-24 S4-SJ2-L7-39 S5-SJ3-L5-9-15-25. S6-SJ1-L30-43	-En el transcurso de las sesiones los sujetos hacen lectura y evaluación de cada movimiento estableciendo sus errores y aciertos, lo que le permite terminar algunas veces con éxito la construcción de sólidos y /o figura isométrica.
Relación de Figuras	Relacionan inicialmente las vistas con el sólido pero en las tres últimas la relacionan la hacen imagen-vista. -Relacionan figuras planas con las vistas. -Relacionan las posiciones espaciales con las figuras observadas en los sólidos y figuras isometrías. - Relacionan sólidos y figuras isométricas con imágenes de su entorno.	S2-SJ3-L1-3/L20-31 S3-SJ1-L36-48 S3-SJ2-L4-42 S4-SJ4-L5-L49 S5-SJ3-L1-2-36-41 S6-SJ2-L5-10-33-35-36	En el proceso razonamiento los sujetos hacen análisis de lo observado, lo que les permite llegar a unas relaciones, a saber: -Relacionan la forma plana del sólido o figura isométrica e indica su relación con el segmento o polígono -Indican cuando una figura no se relaciona con otra. -Indican relaciones y clasificación de los atributos de los sólidos y figuras isométricas

Fuente: elaboración propia

6.3. Comparación del razonamiento geométrico en las estrategias uno y dos

Con los resultados mostrados en cuanto al proceso de razonamiento geométrico se realiza una comparación que evidencia la caracterización del proceso en cuanto a la aplicación de las estrategias de visualización “orientación estáticas del sujetos y de los objetos” y “tareas de

interpretación de perspectivas tridimensionales", teniendo en cuenta los diferentes momentos en cuanto al razonamiento geométrico.

6.3.1. Estrategia uno "Orientación estáticas del sujetos y de los objetos"

Representación del problema

Realizan razonamiento geométrico en dos momentos; el primero cuando identifican en el sólido las caras como base de las figuras tridimensionales y en las figuras isométricas las vistas, lo que permite realizar la construcción en el ambiente computacional haciendo un proceso de descomposición. Además mencionan sus atributos de manera concreta y acertada, reconociendo las figuras planas que lo componen y usando un lenguaje más geométrico.

Procesos

Al iniciar el proceso tienen claro el planteamiento del problema y la meta requerida. Hacen uso de sus preconceptos y conceptos previos para elaborar un plan de trabajo de una forma concreta y definida, acertando a la construcción de cada una de las figuras tridimensionales (sólidos) e isométricas.

Es importante resaltar un avance en sus conocimientos evidenciado en la planificación del trabajo de cada una de las sesiones, dado que parten de una visualización profunda de las características de las figuras planas que conforman cada sólido geométrico, un razonamiento ágil disminuyendo el tiempo de realización de la misma, a medida que iban avanzando en las sesiones y haciendo una construcción bien aproximada al requerimiento.

En sus construcciones hacen uso de la vista gráfica bidimensional (2D) del ambiente computacional Geogebra, dando aspecto tridimensional a sus construcciones.

Las preguntas orientadoras le permiten a los sujetos desde diferentes pociones espaciales caracterizar la figura e identificar los diferentes atributos.

Revisión del proceso

Emplea de manear ágil cada uno de los íconos que le brinda Geogebra para hacer la construcción de la figura isométrica, demostrando seguridad, basada en sus preconceptos que contribuyeron a una mejor expresión gráfica del sólido; los isométricos logrados conservan las características de la muestra y esto permite mejorar sus descripciones.

Relación de figuras

Durante la ejecución de la sesión las estudiantes hacen relaciones de las figuras planas con los sólidos que conforman la figura isométrica; dándoles la posibilidad de ir caracterizando los sólidos realizados en las otras sesiones y así mismo tener una identificación más clara de lo que es un sólido con sus características

6.3.2. Estrategia dos "tareas de interpretación de perspectivas tridimensionales"

Representación del problema

El proceso de razonamiento se mantiene durante las sesiones en dos momentos importantes:

Parten de las vistas y la figura desplegada para realizar la construcción en un proceso de composición para las tres primeras sesiones, pero luego en las últimas se les dificulta hacer la relación lo que les implica buscar en la guía una imagen con la cual relacionan la vista iniciando la construcción a partir de la imagen haciendo un proceso de descomposición. Reconocen las características básicas de los sólidos y figuras isométricas.

Procesos

Realizan la construcción en el ambiente Geogebra evidenciando un proceso de elaboración de la figura isométrica a partir de la imagen, realizando un proceso de descomposición.

En todas las sesiones tienen claro el objetivo desde el inicio del proceso. Es decir tiene clara la meta. Durante todas las sesiones el programa Geogebra les permite observar un nivel de evolución en la construcción de los sólidos y figura isométrica, definir algunas características, en el programa buscando opciones que les permitan concluir el dibujo de forma muy aproximada al requerido

Al inicio de las sesiones muestran dominio en las opciones de vista gráfica tridimensional (3D) del programa, pero luego se les dificulta y deciden usar las opciones vista gráfica (2D), conservando un dibujo con características tridimensionales. Complementan su trabajo con base en las preguntas orientadoras, determinando las características tanto de los sólidos como de las figuras isométricas con relación a una posición espacial.

Revisión del proceso

En el transcurso de las sesiones los sujetos hacen lectura y evaluación de cada movimiento estableciendo sus errores y aciertos, lo que le permite terminar algunas veces con éxito la construcción de sólidos y /o figura isométrica.

Relación de figuras

En el proceso razonamiento de los sujetos se hacen las siguientes relaciones:

- Relacionan la forma plana del sólido o figura isométrica e indica su relación con el segmento o polígono
- Indican cuando una figura no se relaciona con otra.
- Reconoce características especiales de los sólidos o figuras isométricas.
- Relaciona inicialmente las vistas con la figura; en las tres últimas sesiones no lo logra, sin embargo acuden a hacer una relación imagen-vista acudiendo a sus preconceptos.
- Indican relaciones y clasificación de los atributos de los sólidos y figuras isométricas

6.3.3. Conclusiones

Representación del problema

Las dos estrategias permiten establecer dos momentos en el proceso de razonamiento geométrico:

El primero donde establecen el componente principal de problema, ya sea la figura total o las vistas; al contrastar las estrategias se evidencia que a los sujetos en su mayoría se les facilita partir de la imagen para la construcción y no de las vistas haciendo procesos de descomposición.

En las dos estrategias luego de lograr la construcción del sólido en el ambiente computacional caracterizan las figuras mencionando sus atributos de manera concreta y acertada.

Procesos de ambas estrategias

Las dos estrategias le permiten al sujeto establecer la meta en cuanto hacen la lectura del problema.

Se evidencia que a los sujetos de la estrategia dos se les dificultó partir de las vistas para elaborar un plan de trabajo de construcción del sólido o la figura isométrica, tanto en la estrategia uno como en la dos se evidencia que se les facilita más partir de imagen para realizar la construcción en el ambiente computacional Geogebra que hacerlo a partir de las vistas.

El uso del ambiente computacional Geogebra en ambas estrategias contribuyó a la observación del nivel de evolución en cuanto a sus construcciones, haciendo uso de las diferentes opciones que el programa les ofrece tanto en la vista gráfica bidimensional (2D) como en la vista gráfica tridimensional (3D).

Se evidencia mayor dominio de las opciones de la vista gráfica bidimensional (2D) para realizar las construcciones, lo que lleva a establecer que se necesita trabajar más con los sujetos este aspecto que le abriría mayores posibilidades de visualización

Complementan su trabajo con base en las preguntas orientadoras, determinando las características tanto de los sólidos como de las figuras isométricas con relación a una posición espacial en las dos estrategias.

Revisión del proceso

Haciendo uso de sus conceptos básicos, construyen de forma gráfica la figura solicitada, (sólidos y figuras isométricas) en el ambiente Geogebra, conservando sus características, esto les permite hacer una lectura del proceso evaluando sus aciertos y errores.

Relación de figuras

Razonamiento geométrico en las dos estrategias se observa que los sujetos hacen diferentes relaciones a saber:

- Las dos estrategias le permiten visualizar las figuras planas que componen los sólidos y figuras isométricas.
- En las dos estrategias hacen relación de conceptos como segmentos, puntos, líneas, polígonos con los sólidos y figuras isométricas propuestas, en ocasiones no de mantera acertada.
- Hacen relación de la imagen- vistas, acudiendo a conceptos previos. Esto se le facilita más que hacer la relación vista-imagen
- Hacen relación y clasificación de atributos en los sólidos y figuras geométricas dadas.

6.4. Análisis de la asignación de atributos realiza por los sujetos

En este apartado al igual que en el anterior se toma como referente las verbalizaciones realizadas por los sujetos donde se evidencia los componentes que utilizan los sujetos, al

visualizar una figura (sólido geométrico-figura isométrico) lo que le permite caracterizarla estableciendo sus atributos en las diferentes estrategias y sesiones.

6.4.1. Resultados para la primera estrategia "orientación estática del sujeto con respecto al objeto"

SESIÓN UNO

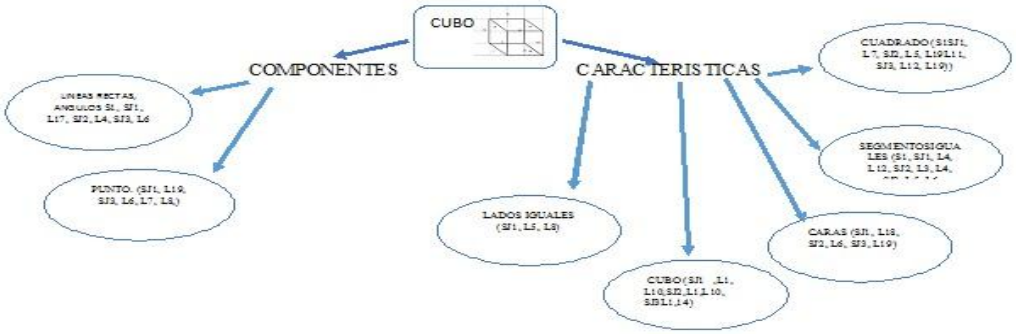


Figura 6. Descripción dada por los sujetos en la Sesión 1

Fuente: elaboración propia

Esta es la descripción dada por los sujetos en la Sesión 1 estrategia 1, a partir de sus atributos, muestra la descripción que hacen los sujetos a partir de la asignación de atributos. Se observa que hace la descripción de la figura a partir de dos categorías: componentes y características. A la categoría Componentes le asigna los valores de líneas rectas, ángulos y puntos. Características le asigna los valores cuadrado, segmentos, caras, cubo, lados.

SESIÓN 2

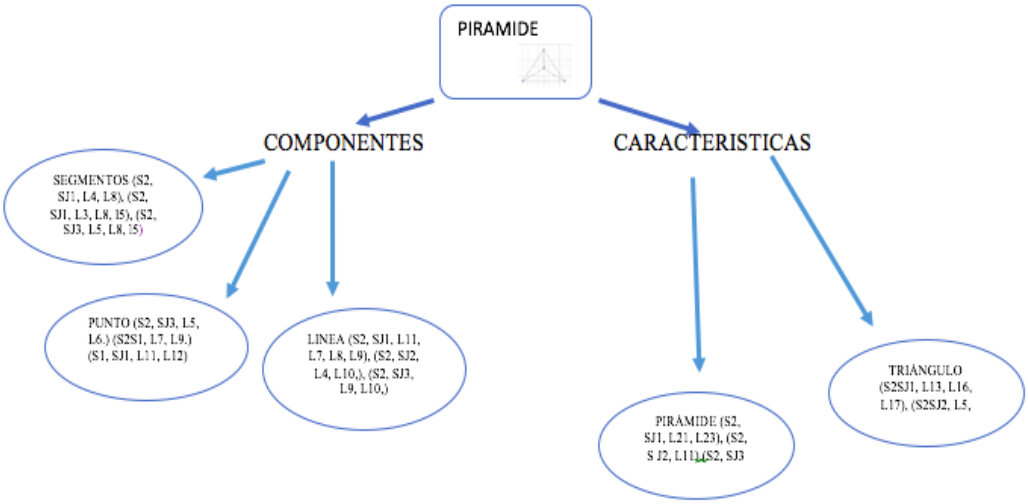


Figura 7. Descripción dada por los sujetos en la Sesión 2

Fuente: elaboración propia

La Figura 8 muestra la descripción que hacen los sujetos a partir de la asignación de atributos. Se observa que hace la descripción de la figura a partir de dos categorías: componentes y características. A la categoría Componentes le asigna los valores de segmentos, línea y puntos. Características le asigna los valores triángulo y pirámide.

SESIÓN 3

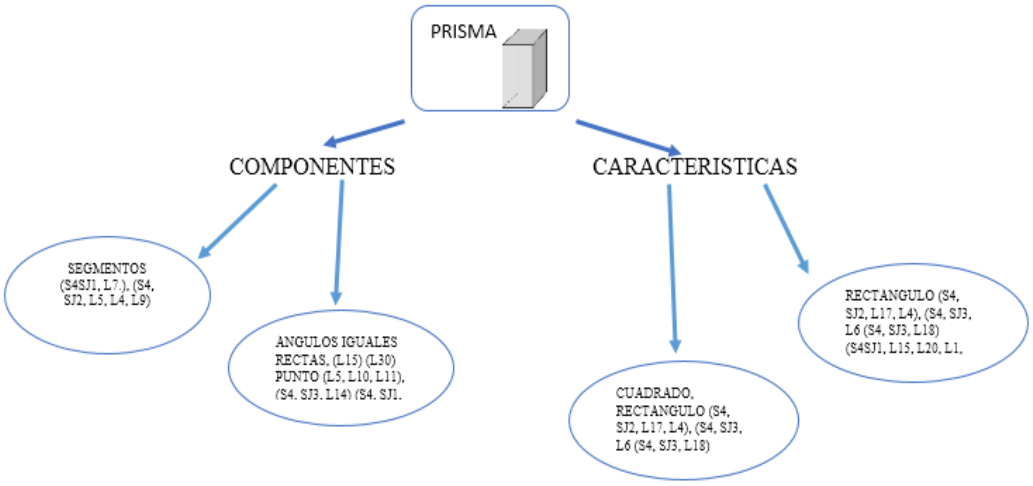


Figura 8. Descripción dada por los sujetos en la Sesión 3 estrategia 1, a partir de sus atributos

Fuente: elaboración propia

La Figura 9 muestra la descripción que hacen los sujetos a partir de la asignación de atributos. Se observa que hace la descripción de la figura a partir de dos categorías: Componentes y Características. A la categoría Componentes le asigna los valores de segmentos, línea y puntos. Características le asigna los valores triángulo y cuadrado.

SESION 4

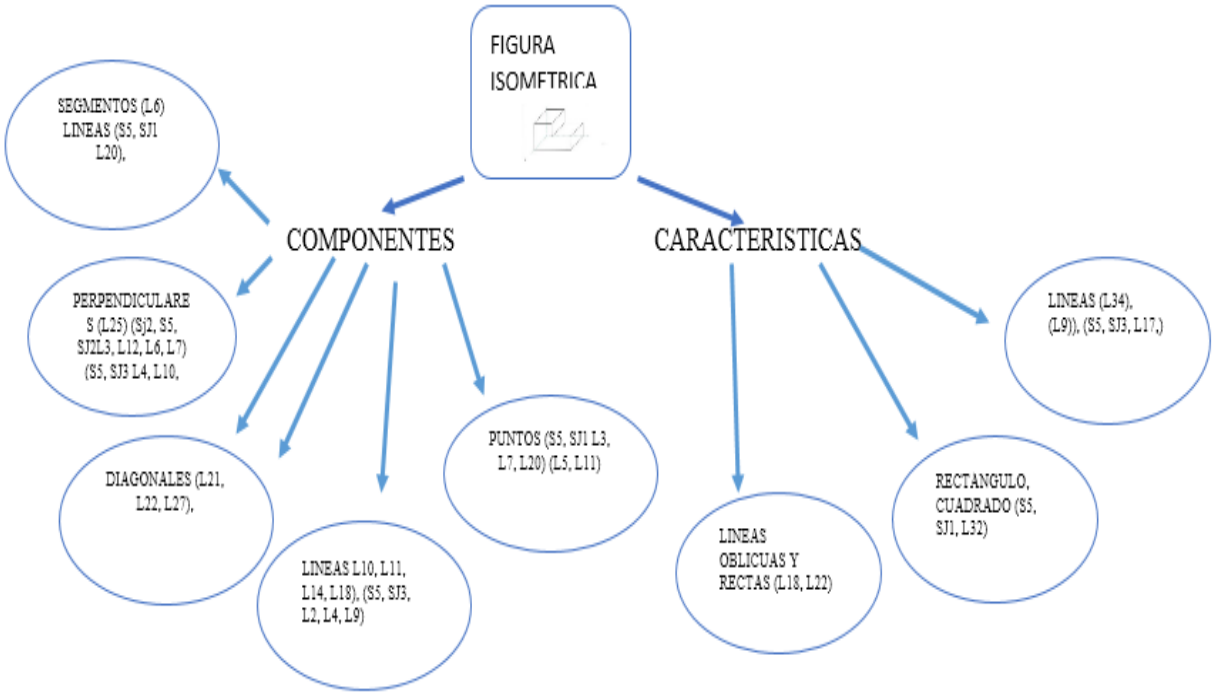


Figura 9. *Descripción dada por los sujetos en la Sesión 4 estrategia 1, a partir de sus atributos*

Fuente: elaboración propia

La Figura 10 muestra la descripción que hacen los sujetos a partir de la asignación de atributos. Se observa que hace la descripción de la figura a partir de dos categorías: Componentes y Características. A la categoría Componentes le asigna los valores de segmentos, ángulos iguales, rectas, punto y triángulo equilátero y a Características le asigna los valores cuadrado, rectángulo

SESIÓN 5

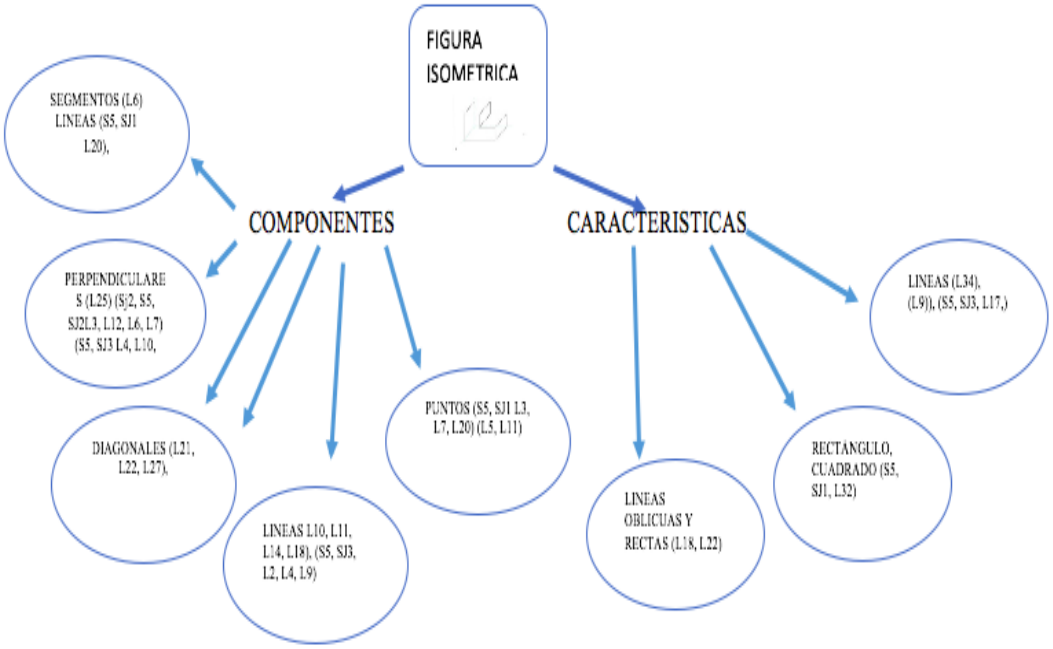


Figura 10. Descripción dada por los sujetos en la Sesión 4 estrategia 1, a partir de sus atributos

Fuente: elaboración propia

La Figura 11 muestra la descripción que hacen los sujetos a partir de la asignación de atributos. Se observa que hace la descripción de la figura a partir de dos categorías: Componentes y Características. A la categoría Componentes le asigna los valores de segmentos, líneas perpendiculares, puntos diagonales a Características le asigna los valores cuadrado, rectángulo, líneas oblicuas y rectas.

SESIÓN 6

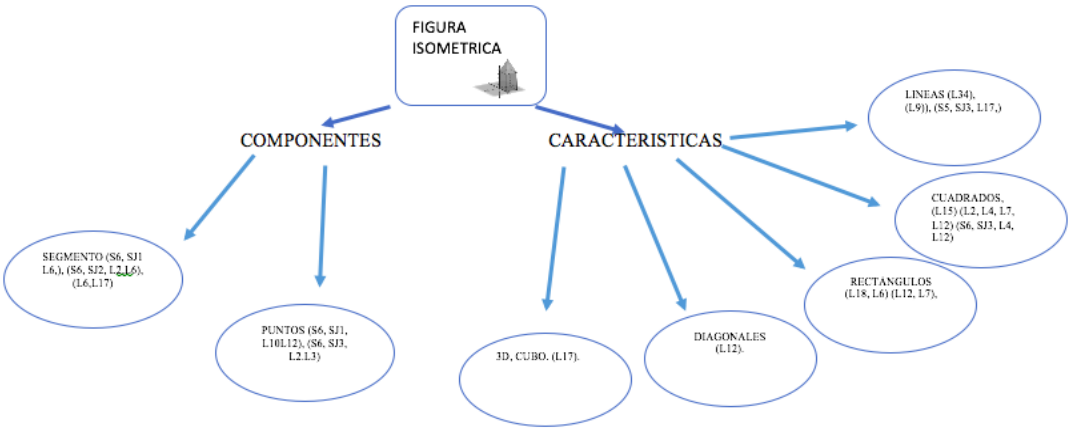


Figura 11. Descripción dada por los sujetos en la Sesión 6 estrategia 1, a partir de sus atributos

Fuente: elaboración propia

La Figura 12 muestra la descripción que hacen los sujetos a partir de la asignación de atributos. Se observa que hace la descripción de la figura a partir de dos categorías: Componentes y Características. A la categoría Componentes le asigna los valores de segmentos, líneas perpendiculares, puntos diagonales a Características le asigna los valores cuadrado, rectángulo, líneas oblicuas y rectas.

Los siguientes son los resultados para la segunda estrategia "Tareas de interpretación de perspectivas tridimensionales" basados en las verbalizaciones ellas por los sujetos en las seis sesiones propuestas.

SESIÓN UNO

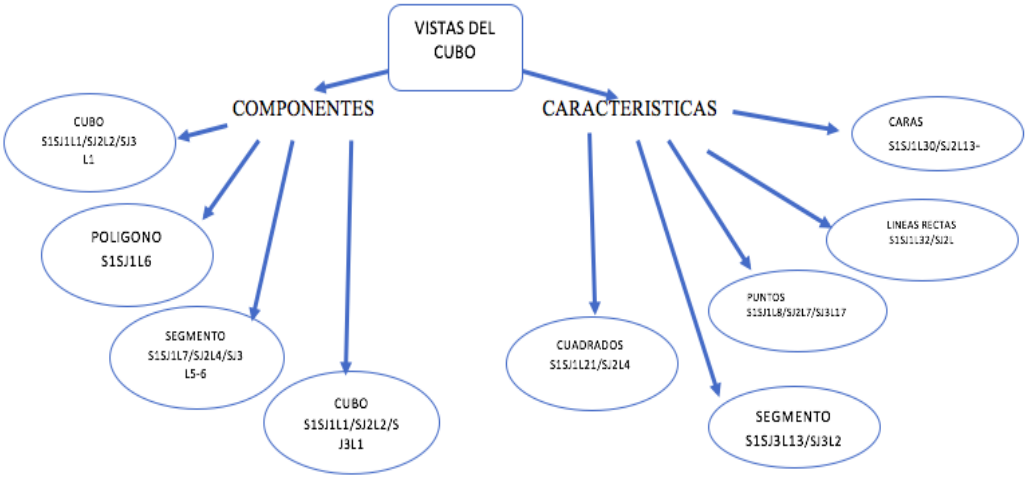


Figura 12. Descripción dada por los sujetos en la Sesión 1 estrategia 2, a partir de sus atributos

Fuente: elaboración propia

La Figura 13 muestra la descripción que hacen los sujetos a partir de la asignación de atributos. Se observa que hace la descripción de la figura a partir de dos categorías: Composición y Características. A la categoría composición le asigna los valores de cubo, segmento y cuadrado siendo similar en los tres sujetos y polígono solo por él sujeto 1, mientras que a la categoría características le asigna dos valores puntos, caras y cuadrados igual en los tres sujetos líneas perpendiculares, lados y segmentos

SESIÓN 2

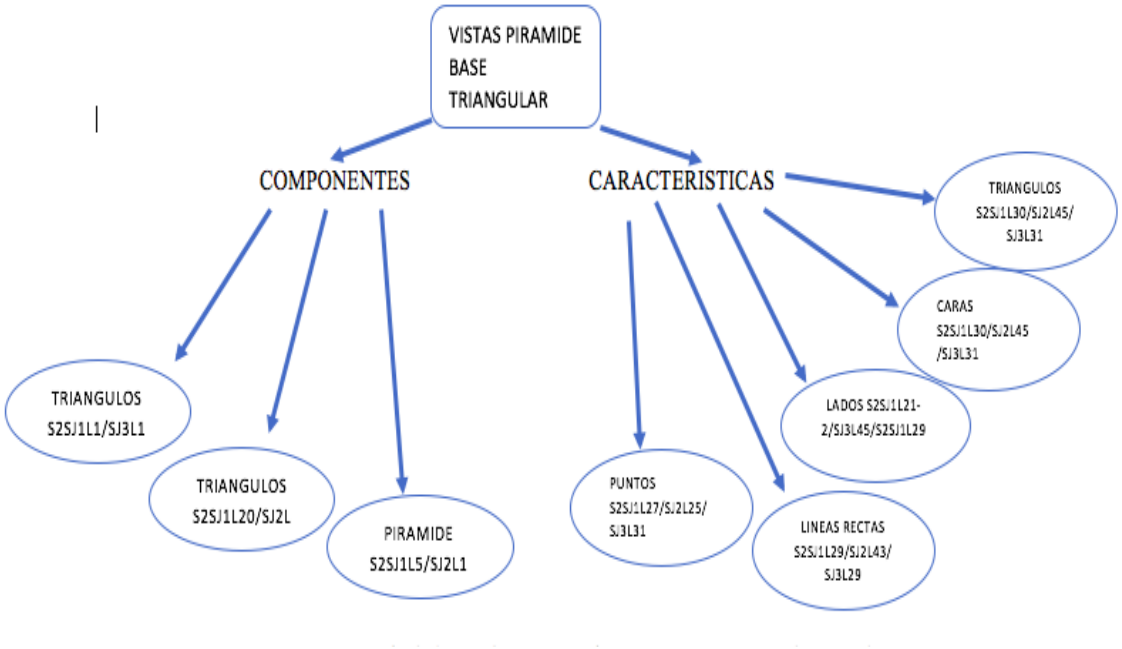


Figura 13. Descripción dada por el sujetos Sesión 2 estrategia 2, a partir de sus atributos

Fuente: elaboración propia

La Figura 14 muestra la descripción que hacen los sujetos a partir de la asignación de atributos. Se observa que hacen la descripción de la figura a partir de dos categorías composición y características. A la categoría composición los tres sujetos coinciden en asignar tres valores segmentos, pirámide y triángulo y en la categoría características coinciden los tres en asignar valores a puntos, líneas rectas, caras y triángulos; solo dos sujetos asigna valores a los lados.

SESIÓN 3

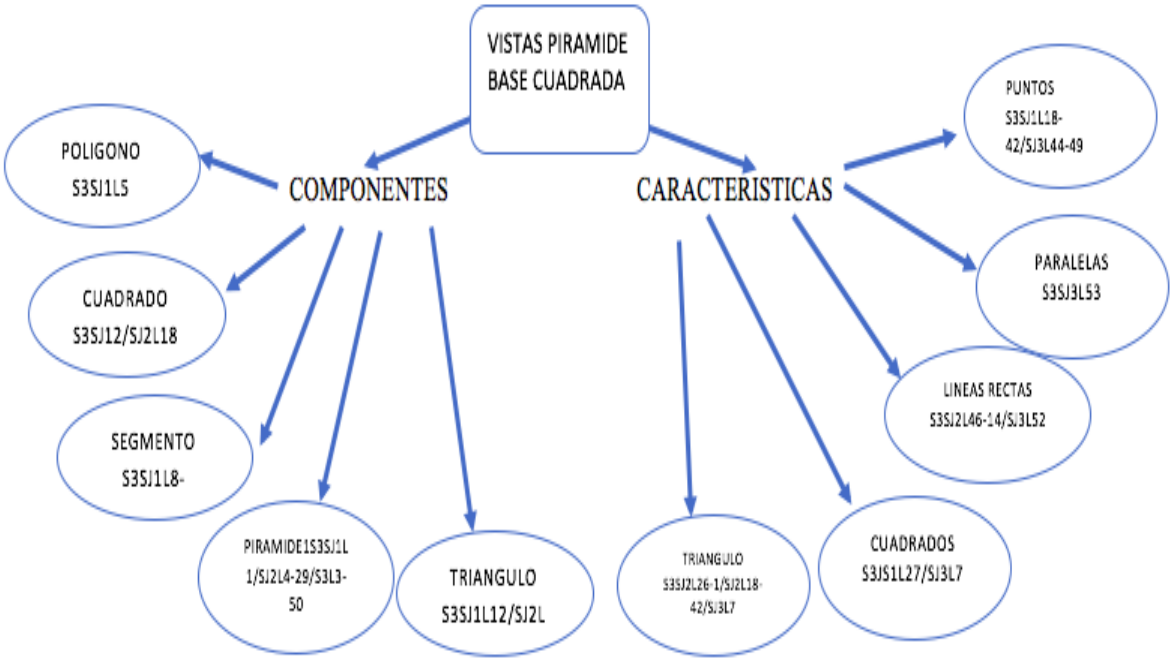


Figura 14. Descripción dada por los sujetos Sesión 3 estrategia 2, a partir de sus atributos

Fuente: elaboración propia

La Figura 15 muestra la descripción que hacen los sujetos a partir de la asignación de atributos. Se observa que hace la descripción de la figura a partir de dos categorías: Composición y Características. A la categoría composición le asigna dos valores, pirámide, cuadrados, segmentos y triángulo y de características le asigna dos valores puntos, líneas rectas, paralelas, cuadrados y triángulos.

SESIÓN 4

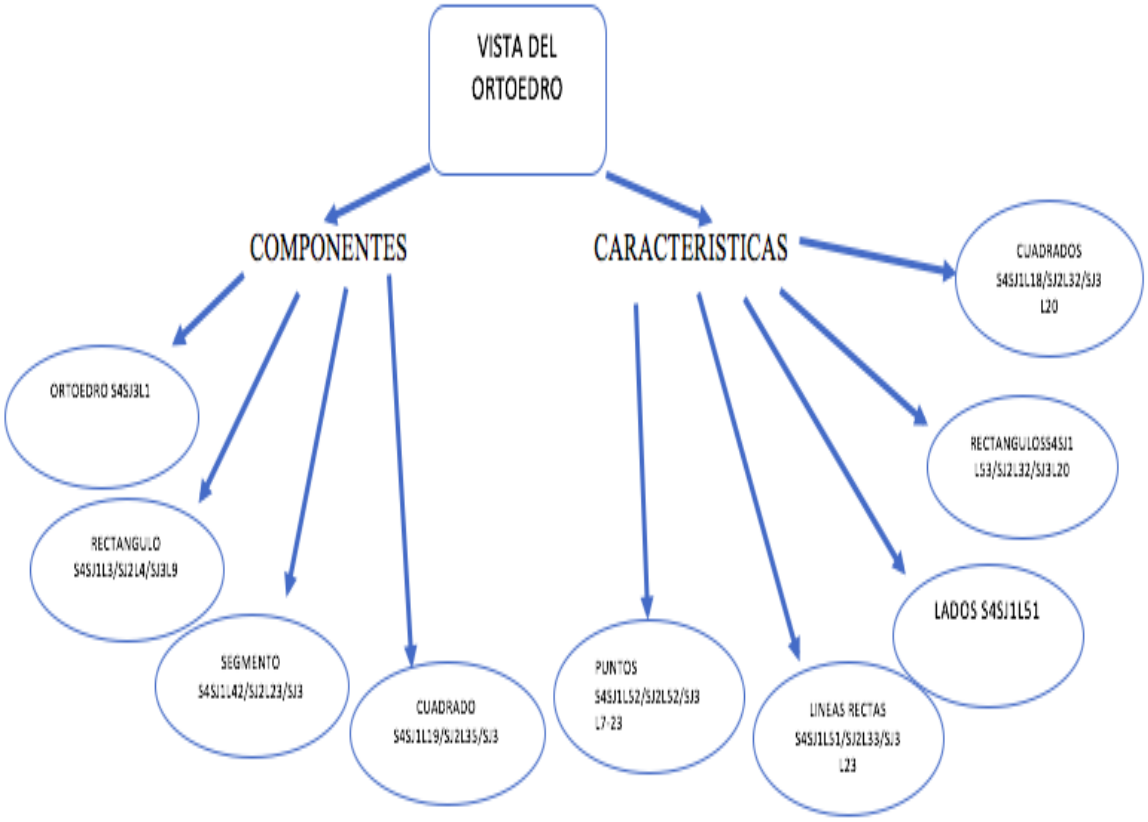


Figura 15. Descripción dada por los sujetos en sesión 4 estrategia 2, a partir de sus atributos

Fuente: elaboración propia

La Figura 16 evidencia la descripción que hacen los sujetos en la sesión 4 a partir de la asignación de atributos. Se observa que hace la descripción de la figura a partir de dos categorías: Composición y Características. A la categoría Composición los tres sujetos del estudio le asignan dos valores de rectángulo, cuadrado, segmento y uno solo logra asigna el valor de ortoedro y en la categoría de Características le asigna valores de puntos, líneas rectas, cuadrados y rectángulos los tres sujetos, uno solo asigna el valor lados.

SESIÓN 5

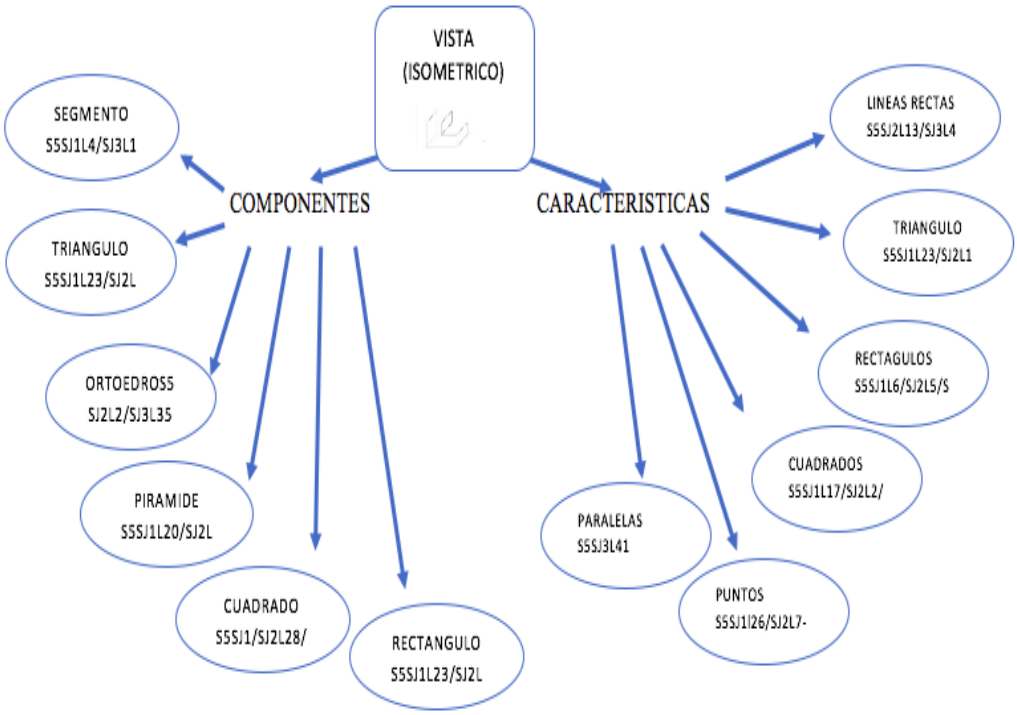


Figura 16. Descripción dada por los sujetos en la Sesión 5 estrategia 2, a partir de sus atributo

La Figura 17 presenta la descripción que hacen los sujetos a partir de la asignación de atributos. Se observa que hace la descripción de la figura a partir de dos categorías: Composición y Características. En la categoría de Composición coinciden los tres sujetos en asignar valores de rectángulo, ortoedro, pirámide y cuadrado, el sujeto 1 y 3 asigna además el valor de segmentos. En la categoría Característica coinciden en los valores puntos, rectángulos, triángulos y cuadrados, el sujeto 2 y 3 asignan además el valor líneas rectas y el 3 paralelas.

SESION 6

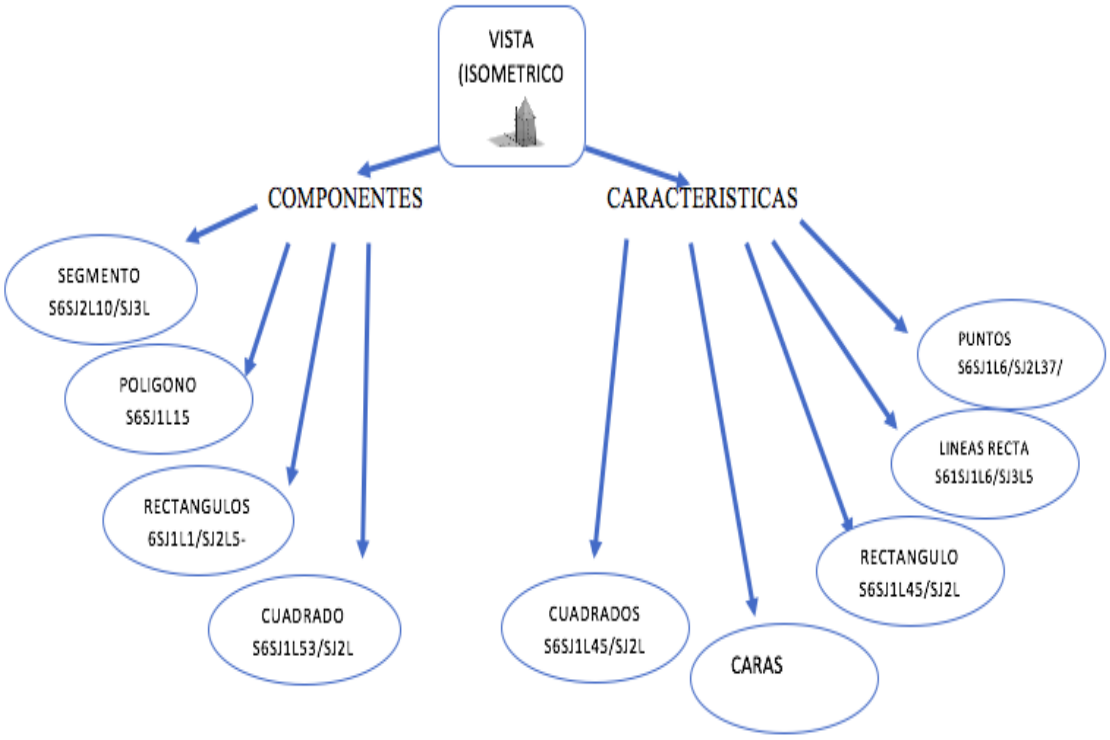


Figura 17. Descripción dada por los sujetos Sesión 6 estrategia 2, a partir de sus atributos

Fuente: elaboración propia

La Figura 18 evidencia la descripción que hacen los sujetos a partir de la asignación de atributos. Se observa que hace la descripción de la figura a partir de dos categorías: Composición y Características. En la categoría Características asignan valores de rectángulo, cuadrado, segmento y polígono. En la categoría Composición asignan valores de puntos, rectángulos y cuadrados; cara y líneas rectas y segmento

A manera de conclusión, con base a las competencias matemática del MEN (2006) para grado tercero, los estándares y los indicadores de la investigación, se puede evidenciar que las estrategias permitieron que los estudiantes reconocieran atributos en objetos tridimensionales; al realizar los dibujos los estudiante logran reconocen la vista gráfica tridimensional (3D), logran también el desarrollo de la rotación mental, que los lleva a desarrollar sus habilidades de

orientación y lateralidad, lo que conlleva a afirmar que las estrategias, aunque no desarrolle 100% la visualización en los estudiantes, sí les permite adquirir la gran parte de las habilidades que los estándares sugieren.

Reconocen los atributos básicos de las figuras, identificando las figuras planas que lo componen y sus características (segmentos, puntos, vértices, líneas). Hace rotación mental y cuando usa la herramienta vista gráfica tridimensional (3D) la hace en el ambiente computacional, para establecer los atributos de la figura observada. La apropiación conceptual dada por los diagramas anteriores, permite observar que a medida que pasan las sesiones los estudiantes aumentan el manejo de conceptos relacionados con los objetos geométricos que se trabajaron y este es uno de los indicadores del desarrollo del razonamiento geométrico.

6.5. Interpretación teórica de los resultados a través de las diferentes sesiones realizada

Concluyendo el análisis de cada sesión, a continuación se hace una comparación de las sesiones por estrategia que permitirá evidenciar los logros y dificultades en cuanto a la visualización observados en cada sesión, teniendo en cuenta el marco teórico de esta investigación; en especial lo relacionado con las habilidades propuestas por Hoffer (1983) y Van Hiele (1981) como se citó en Cabello (2013).

6.5.1. Conclusión estrategia 1

En la utilización del ambiente computacional los sujetos hacen uso de la opción vistas gráfica bidimensional (2D), para hacer sus construcciones, lo cual permite que los sujetos se ubiquen espacialmente, identificando las vistas que poseen las figuras desde diferentes posiciones.

De acuerdo a los conceptos logrados en las seis sesiones y visualizando los elementos geométricos más sencillos como son: punto, línea, recta, semirrecta, segmento y polígonos

básicos (cuadrado, triángulo y rectángulo), describen las figuras, caracterizándolas de forma precisa, relacionándolas con objetos de su entorno y mostrando de esta manera un avance en su razonamiento geométrico.

A la luz de la aplicación de la seis sesiones y contrastándolas con los indicadores propuestos por Van Hiele y Hoffer (1983) como se citó en Cabello (2013) en cuanto a desarrollo del razonamiento geométrico, se concluye que la estrategia permitió desarrollar proceso de visualización, al elaborar sus construcción a partir de la imagen, lo cual facilitaba identificar atributos y componentes propios de cada sólido o figura isométrica, haciendo uso de la rotación mental de las figuras, puesto que la ventana vista gráfica bidimensional (2D) no les permitía rotarla, además el hecho de contar con opciones para supervisar su trabajo, les daba la posibilidad de buscar nuevas alternativas para concluir la construcción acertadamente, afianzando su razonamiento geométrico. Es importante resaltar que a través de la aplicación de las sesiones el vocabulario técnico geométrico fue mejorado usando términos más amplios.

Ahora retomando los requerimientos que establecen los estándares básicos de competencias matemática del Ministerio de Educación Nacional (2006) para grado tercero, la estrategia permitió que los estudiante lograran diferenciar atributos y propiedades de objetos tridimensionales e igualmente sus dibujos permitieron ubicar a los sujetos con respecto al objeto, obteniendo un punto de referencia espacial (al frente- atrás- arriba- abajo- izquierda- derecha) que los lleva a identificar componentes de la figura.

6.5.2. Conclusión estrategia 2

Teniendo en cuenta la aplicación de las seis sesiones y contrastándolas con los indicadores propuestos por Van Hiele y Hoffer (1983) como se citó en Cabello (2013) en cuanto al razonamiento geométrico, se concluye que la estrategia si bien al comenzar las actividades

permitía que los estudiantes desarrollaran sus procesos de visualización a partir de construir sólidos basados en la observación de sus vistas, en las tres últimas sesiones se observa gran complejidad en su elaboración, los individuos requieren observar la imagen para poder describir sus atributos y analizar sus características más básicas haciendo uso de la rotación mental, sin embargo es de resaltar que en las figuras donde lograron realizar el sólido con ayuda de la vista gráfica tridimensional (3D), su nivel de descripción fue mayor, también es necesario rescatar el hecho que a mayor avance de las sesiones donde se le solicitaba al estudiante caracterizar lo observado, su vocabulario técnico aumentó notablemente haciéndose cada vez más minucioso.

En cuanto al uso del ambiente computacional se observa gran motivación de los estudiantes por el manejo más acertado del ambiente, lo que permitió desarrollar su imaginación y su razonamiento geométrico, el hecho de poder supervisar constantemente sus movimientos les permitía reestructurar sus acciones y determinar un plan adecuado de trabajo, manejaron adecuadamente las opciones del ambiente pertinentes para la construcción del sólido o figura isométrica.

Ahora, retomando los requerimientos que establecen los estándares básicos de competencias matemáticas del Ministerio de Educación Nacional (2006) para grado tercero, la estrategia dos permitió que los estudiantes diferenciaran atributos en objetos tridimensionales.

Al realizar los dibujos en el ambiente computacional, en las tres primeras sesiones lo hicieron de manera acertada, elaborándolos en la vista gráfica tridimensional (3D), empero en las últimas sesiones a los estudiantes se les dificultó realizar los dibujos en esta ventana del programa y usaron la vista gráfica bidimensional (2D), con características tridimensionales en sus dibujos.

De igual manera, identifican globalmente la figura geométrica (sólido o isométrico), relacionándola con sus conceptos básicos y objetos de su entorno, reconocen los atributos

básicos de las figuras, identificando las figuras planas que lo componen y sus características (segmentos, puntos, vértices, líneas).

6.6. Diferencias y similitudes entre la estrategia 1 y 2

En este apartado se hace un contraste entre las dos estrategias teniendo en cuenta las categorías propuestas en la investigación.

Tabla 14. *Diferencias y similitudes en las estrategias*

CATEGORÍA	DIFERENCIAS	SIMILITUDES
VERBAL	En las verbalizaciones realizadas por los estudiantes de la estrategia dos se evidencia confusión en los conceptos y términos utilizados en sus construcciones como (Polígono, segmento).	Las verbalizaciones se hicieron desde el reconocimiento y análisis, partiendo de los puntos para poder realizar con ayuda de los segmentos la figura, lo que les permite identificar y verbalizar el nombre de las figuras planas, sólidos geométricos y figuras isométricas, reconociendo en ellos sus atributos. En el transcurso de las sesiones se observa un aumento del vocabulario y términos geométrico básico.
VISUAL	Los estudiantes al comprender el problema en la estrategia uno, lograron interpretar y resolver, siguiendo las indicaciones, es decir partir de la imagen, para realizar la construcción, más en la estrategia dos aunque tenían clara la meta no les fue fácil partir de las visitas que visualizaban para realizar la construcción y necesitaron buscar al final una imagen para resolver el problema.	La capacidad de observación, discriminación y relación con respecto a las figuras planteadas (sólidos geométricos), se realizaron haciendo un reconocimiento de algunos atributos del sólido a partir de las figuras planas que los conforman. En el ambiente computacional, hacen uso de la vista gráfica bidimensional (2D) y vista gráfica tridimensional (3D), a través del

		plano cartesiano a partir de las coordenadas, lo cual les da la posibilidad de construir la figura, desde lo que observan, analizan, para su construcción.
DIBUJO	Se evidenció en la estrategia dos, que hubo dificultad en la realización de sólidos más complejos, por las superposiciones que se trabajaban en ellos.	Se identifica que por medio de la ventana 2D y 3D, se inicia un proceso de razonamiento geométrico cuando el estudiante afianza su concepto previo original de manera rápida percibiendo que su lógica lo lleve a optimizar el dibujo, ya que le es más inmediato poder corregir algún desfase en el momento de la construcción de la figura plana o el sólido requerido.
LOGICA	Es imprescindible destacar, el razonamiento que se efectuó, en la estrategia 1, cuando observaron las isométricas de las últimas sesiones (5y 6) no hace relación de la figura compuesta debido a la diferencia de forma y medida de la base con respecto a las vistas o caras laterales, exigiendo que compararan la relación del sujeto con respecto al objeto entre un triángulo y un rectángulo.	Relaciona el sujeto con respecto al objeto se inicie la construcción primero de los polígonos básicos llamados figuras geométricas planas, tomando como referencia las categorías y estrategias de las experiencias obtenidas por Van Hiele y Hoffer, donde el orden, ubicación y orientación de cada uno de los segmentos logra el componer la figura plana con sus atributos respectivos. Para posteriormente y con una observación específica se obtenga la construcción de cada uno de los sólidos caracterizados por las vistas o caras conseguidas por medio de la figura o superficie plana ya dibujada En la utilización de la ventana en 2D, permite en primer lugar que el estudiante, se ubique de acuerdo a los conceptos

		previos que trae.
APLICADA	La ventana utilizada en las estrategias1 bidimensional (2D) fue la usada por los estudiantes contrario a los estudiantes de la segunda estrategia; quienes usaron la tridimensional y la bidimensional (2D y 3D) las cuales poseen características específicas, lo cual se evidencio en la aplicación de cada sesión, donde los estudiantes aun no manejan con seguridad la tridimensional (3D), en la construcción de figuras más compleja (isométricos). A diferencia de bidimensional (2D), que les brinda la posibilidad de elaborar sus figuras con mayor confianza, al darle la posibilidad de tener un aprendizaje intuitivo a través de la zona de dibujo en la que crea, manipula los objetos geométricos. (Punto, recta, polígono) y así mismo aparecen las coordenadas de los puntos y ecuaciones de las rectas trazadas que utiliza simultáneamente con los cambios en la región gráfica.	Al realizar construcción en el ambiente computacional, tanto en la ventana bidimensional (2D) como en la tridimensional (3D), dibujaron en el ambiente computacional conservando las características básicas de la figura y verbalizando las mismas, lo que les permitió razonar y evaluar sus equivocaciones y posibles soluciones para hacer su construcción, el uso de raciocinios frente a sus conceptos básicos, les permiten evaluar sus avances y dificultades para finalizar su construcción

Fuente: elaboración propia

6.7. Diario de Campo

Aquí se encuentra el análisis logrado en cada sesión y consignado en los diarios de campo teniendo en cuenta las categorías de la investigación y las acciones no percibidas durante la

verbalización de los sujetos y en cada estrategia. Se toman para complementar los resultados de la información obtenida en los protocolos verbales y en las pruebas pre- test y pos test.

6.7.1. Estrategia uno "Orientación estática del sujeto y de los objetos"

SESIÓN UNO

Tabla 15. *Análisis diario de campo sesión uno*

	Categoría	Observaciones sección: 1
Visualización	**Visual**	En la parte visual los sujetos inician su construcción mostrando seguridad al reconocer la imagen (cubo), identificando la figura plana que conforma (cuadrado), para iniciarla a partir del uso que hacen con los puntos o segmentos para armarlas y así mismo unir las caras, desde sus esquinas superponiendo los cuadrados.
	Verbal	Durante sus verbalizaciones los sujetos, usaron un lenguaje sencillo con términos básicos geométricos, para ir explicando lo que realizaban y el por qué lo hacían, siendo espontáneos en sus verbalizaciones, fueron acertados en la relación del sólido, con las figuras que la conformaban, y se lograba evidenciar en sus rostros inseguridad en el uso de las opciones del programa.
	Dibujo	Los sujetos observaron la figura, identificando sus caras y la relacionándolas con las figuras planas que conoce, esto les permitió iniciar el dibujo, utilizando opciones para su construcción como puntos y segmentos, componiendo la figura y al mismo tiempo evaluando sus errores para ser corregidos, hasta obtener en este caso el cubo. Los dibujos logrados conservan las características del modelo inicial.
	Lógica	En la elaboración del sólido los sujetos, muestran habilidades básicas como el reconocer la figura de manera general y mencionar algunos de sus atributos. (Línea, segmento, lados, esquinas), realiza comparaciones con conceptos previos que le permiten identificar elementos básicos como las figuras planas que los componen. Hace una planificación de sus movimientos ejecutándolos, pero su rostro refleja inseguridad.
	Aplicada	Maneja las opciones de ambiente computacional, lo que les da la posibilidad a los sujetos de ir organizando y buscar la opción adecuada en el ambiente para realizar la construcción, regulan y evalúan el proceso de elaboración partiendo de lo que visualizan inicialmente es decir la imagen del sólido (cubo) permitiéndoles relacionar las características correspondientes del mismo. Hacen uso adecuado del mouse usando acertadamente el espacio gráfico; la figura lograda mantiene las

	características del modelo inicial (cubo).
Nota interpretativa	En la sesión 1, los sujetos, hacen uso de la ambiente computacional, logrando el objetivo, donde elaboran la figura partiendo de la imagen, conservando las características y plasmándolas en el espacio gráfico del ambiente computacional, evidenciándose un reconocimiento de las atributos que posee la figura realizada.

Fuente: elaboración propia

SESION 2

Tabla 16. *Análisis diario de campo sesión dos*

Categoría		**Observaciones**
		Sesión: 2
Visualización	Visual	Se observa mayor seguridad al recocer una figura familiar para ellos (pirámide), nuevamente identificaron la figura plana (triángulo) que conforma en la base, para su elaboración parten de los segmentos que la conforman, con los que se puede construirla y así mismo proyectan el resto de la figura. Son más precisos en la construcción.
	Verbal	Durante sus verbalizaciones los sujetos continuaron describiendo de forma acertada las características del sólido, su vocabulario geométrico sigue siendo básico aunque aumentan algunos términos. Al igual que en la sesión anterior hacen una relación correcta en sus caracterizaciones. Se observa más seguridad al verbalizar el uso de las opciones del ambiente computacional.
	Dibujo	Los sujetos en la elaboración del dibujo hicieron uso de los íconos del ambiente computacional, para la construcción del dibujo, manejando con habilidad el mouse, lo que les permite realizar el dibujo conservando las características básicas del mismo y ubicándolos de manera adecuada en el espacio gráfico del programa.
	Lógica	En la elaboración del sólido los sujetos, mejorarán habilidades reconociendo con mayor agilidad las figuras que componen el sólido, mencionando algunos de sus atributos. (Línea, segmento), argumentan con precisión un plan a seguir para su construcción y lo ejecutan de forma precisa. Se observan concentrados en el trabajo.
	Aplicada	Se muestran más seguros en el uso del ambiente computacional, usan de manera ágil las diferentes opciones para la elaboración del sólido, continúan evaluando el proceso de construcción, lo que les permite reconocer sus errores y aciertos. Al realizar la construcción relacionan sus conocimientos anteriores con la figura solicitada y esto les facilita describir los atributos. Continúan con un adecuado manejo del espacio gráfico.

Nota interpretativa	En la sesión 2. al evidenciar los avances que los sujetos tuvieron , se puede observar más seguridad reflejada en sus rostros, un aumento del vocabulario aunque de forma básica, mejoran en el manejo del ambiente computacional,. Lo cual los motiva para la ejecución y resolución del problema planteado (pirámide). Logran hacer en su mente rotación de la figura reconociendo las características de las diferentes caras, identificando las figuras planas que componen el sólido. Merando sus procesos de razonamiento.

Fuente: elaboración propia

SESIÓN 3

Tabla 17. *Análisis diario de campo sesión tres*

Categoría		**Observaciones**
		Sesión: 3
Visualización	Visual	Sus rostros reflejan tranquilidad, manejan asertivamente el ambiente computacional, identificando las características de esta nueva figura; como en las sesiones anteriores parten de la base para realizar su construcción en este caso identifican que no es igual al resto de las figura pero igualmente tienen claro cómo construirla, mantienen la seguridad en los pasos a seguir.
	Verbal	Durante sus verbalizaciones los sujetos, mostraron mayor seguridad reflejada en las explicaciones que realizaron, ejecutando las opciones del programa; su lenguaje geométrico mejora, usan más términos de forma acertada debido a la complejidad del sólido.
	Dibujo	Los sujetos en la elaboración del dibujo continúan usando de forma acertada los íconos que ambiente computacional, pero al cambiar la base del dibujo muestran dificultad para organizar un plan de elaboración, dibujan y evalúan sus acciones para lograr el dibujo correcto.
	Lógica	En la elaboración del sólido los sujetos realizan comparaciones del sólido que les permite establecer el tipo de figura a construir, se muestran inseguros al identificar la base de la figura, continúan mejorando sus habilidades visuales que les permiten establecer un plan de elaboración que parte de los conceptos ya trabajados, sus argumentaciones son más reflexivas, al comprar las dos construcciones ellas anteriormente y estableciendo las similitudes en las mismas.
	Aplicada	En el ambiente computacional organizan de manera adecuada la vista gráfica, para elaborar la figura partiendo de la base, dándoles la posibilidad de proyectar los

	segmentos para la construcción de sus caras. En el ambiente computacional hacen uso adecuado de la vista gráfica para elaborar la figura, partiendo de la base, dándoles la posibilidad de proyectar los segmentos para la construcción de sus caras
Nota interpretativa	En esta sesión los estudiantes logran desarrollar la figura, visualizando las características de su base, para luego ir caracterizando las caras elaborando la construcción, con la ayuda de los segmentos y el punto de encuentro en la parte superior de la figura (cúspide), se logra evidenciar avances en el aumento del vocabulario, el uso más seguro y ágil del ambiente, al lograr mayor presión en sus caracterizaciones, las cuales parten de una adecuada visualización, puede decir que han mejorado en su razonamiento geométrico, siendo más precisos.

Fuente: elaboración propia

SESIÓN 4

Tabla 18. *Análisis diario de campo sesión 4*

Categoría		**Observaciones**
		Sesión: 4
Visualización	Visual	En esta sesión se muestran pensativos, les cuesta más relacionar la figura con conceptos básicos, toman más tiempo para iniciar la construcción, pero al identificar sus atributos principales, logran realizarla sin dificultad conservando las características principales.
	Verbal	Durante sus verbalizaciones los sujetos mostraron seguridad y mayor agilidad y habilidad para componer la figura, dando razones del porqué iban ejecutando los movimientos con los íconos que ofrece el ambiente computacional. Su lenguaje geométrico aumenta significativamente en cada sesión.
	Dibujo	Los sujetos en esta sesión, a diferencia de las anteriores donde habían ganado seguridad en la elaboración, en esta, se muestran inseguros al seleccionar los íconos para su construcción, se hacen necesarias mayores correcciones, esta figura en especial fue más compleja en su elaboración y el resultado final no conservó exactamente todas la características, se les dificultó organizarlo en el espacio gráfico.
	Lógica	En la construcción del sólido los sujetos, se les dificulta la elaboración de la figura, pues inicialmente hacen una relación de la imagen con un cubo, pero al analizar los componentes de la misma evidencia la diferencia principal, y reconocen el rectángulo como parte de la figura, esto les permite realizar un planteamiento similar, se evidencia un progreso en las habilidades de

		visualización, pues son ellos mismos al caracterizar la figura quienes reconocen las diferencias y similitudes que la misma tiene frente a otras ya construidas, sus argumentaciones continúan mejorando.
	Aplicada	En esta sesión los estudiantes relacionan características de la primera figura realizada (cubo), relacionándolas con un cubo alargado, lo que les permitió dibujar la figura con segmentos y puntos de manera ágil y adecuada. Igual que en las sesiones anteriores realizan evaluación del proceso realizado en la construcción, corrigiendo sus equivocaciones, usan también sus conceptos anteriores para reconocer los componentes de la figura. Tiene un adecuado manejo del ambiente computacional.
Nota interpretativa		En la sesión cuatro, los sujetos realizan relaciones entre lo que han hecho y lo que piensan ejecutar de la figura planteada, permitiendo desarrollar preconceptos durante la construcción del sólido (prisma u ortoedro). No se evidencian avances entre esta y la sesión anterior, su vocabulario se mantiene en el mismo nivel, y el manejo del ambiente computacional sigue siento adecuado.

Fuente: elaboración propia

SESIÓN 5

Tabla 19. *Análisis diario de campo sesión cinco*

Categoría		**Observaciones** **Sesión: 5**
Visualización	Visual	En esta sesión se observan un poco inseguros para empezar la construcción, relacionan la figura con un objeto de su entorno (escalera) y parten de este concepto para su elaboración, usando segmentos, sin embargo al ir avanzando en la construcción, logran identificar algunos componentes, como las figuras planas, esto les permitió identificar las vistas.
	Verbal	Verbalizan sus descripciones a partir de lo que ya han efectuado, usando los conceptos de puntos y segmentos, cuadrado y rectángulo, manejando un lenguaje geométrico más enriquecido a lo largo de las sesiones, su seguridad aumenta al realizar la figura.
	Dibujo	El dibujo logrado es lo más parecido al solicitado, se observa buen uso de las opciones del ambiente computacional para la elaboración del mismo, relacionan fácilmente sus movimientos para hacer la figura, acudiendo a conceptos trabajados

		anteriormente. Usan adecuadamente el espacio gráfico.
	Lógica	En esta sesión se observa dificultad para inferir los componentes de la figura isométrica, establecen relaciones al comparar con conceptos trabajados anteriormente lo que les permite establecer los pasos a seguir, es decir la construcción, las relaciones las hacen más objetos de su entorno que con las mimas figuras geométricas. Argumentan de forma insegura el plan a seguir.
	Aplicada	Todos los sujetos tuvieron dificultades, al elaborar esta figura isométrica, ya que solo visualizaron la parte frontal de ella, una ele, que después querían proyectar para armar la escalera, pero tuvieron dificultades porque no sabían cómo acomodarlas de manera que usaron mucho tiempo, evaluando constantemente los pasos dados, haciendo correcciones, hasta que lograron hacer una figura similar a la planteada en el problema. Hacen uso adecuado del ambiente computacional y esto les permite reconocer fácilmente los atributos de la figura.
Nota interpretativa		Es importante destacar que aun los sujetos no logran establecer relaciones de las figuras ya construidas con un isométrico más complejo como es el de la escalera, donde ellos no alcanzaron a visualizar que estaba conformado por ortoedros. Esto da pie a continuar fortaleciendo las características de los sólidos geométricos, sin embargo es de destacar que lograron plantear soluciones acertadas al problema.

Fuente: elaboración propia

SESIÓN 6

Tabla 20. *Análisis diario de campo sesión seis*

Categoría		**Observaciones**
		Sesión: 6
Visualización	Visual	En esta sesión los sujetos muestran seguridad al realizar la figura isométrica, hacen dos tipos de relación, una con objetos de su entorno (casa) y otra al relacionar con los sólidos ya construidos, inician desde la base conservando el procedimiento hecho en otras sesiones, logrando con rapidez y asertividad la construcción de la figura isométrica.
	Verbal	Las descripciones realizadas en esta última sesión son más cortas, pero igualmente concretas, se muestran seguros en el manejo de las opciones del ambiente computacional, al construir la figura. Se observa ampliación en el vocabulario en comparación con las sesiones iniciales.
	Dibujo	Los dibujos logrados conservan las características de la figura isométrica solicitada, se observa buen uso de las opciones del ambiente computacional para la

		elaboración del mismo, relacionan fácilmente sus movimientos para hacer la figura, acudiendo a conceptos trabajados anteriormente, manejan con seguridad el programa trazando con agilidad los diferentes componentes de la figura.
	Lógica	Mejoran sus habilidades de razonamiento, donde analizan, relacionan y reproducen la figura isométrica a partir de conceptos ya trabajados como (pirámide y ortoedro). Argumentan con seguridad el plan de trabajo a realizar caracterizando adecuadamente las figuras que lo componen y reconocen similitudes y diferencias con otras figuras. Su rostro refleja seguridad.
	Aplicada	Los sujetos logran establecer de manera ágil y adecuada los elementos a utilizar para la construcción de la figura isométrica, puesto que es más familiar para ellos la pirámide y el prisma, por lo tanto fue mucho más fácil su construcción, con la ayuda delos íconos del ambiente computacional.
Nota interpretativa		Es importante destacar que en esta sesión, los sujetos se mostraron más seguros y hábiles para la construcción del isométrico, ya que al observarlo en la guía lo relacionaron rápidamente con una casa, lo cual les permitió hacer su techo con la pirámide y sus paredes con el prisma. Por lo tanto el objetivo planteado se cumplió, ya que los sujetos manejaron de manera adecuada sus preconceptos para la construcción de la figura solicitada en esta sesión.

Fuente: elaboración propia

7.7.2 Estrategia dos "tareas de interpretación de perspectivas tridimensionales"

SESIÓN UNO

Tabla 21. *Análisis diario de campo sesión uno*

Categoría		**Observaciones sesión: 1**
Visualización	Visual	Se puede observar que aunque los estudiantes relacionan las vistas con el sólido correspondiente, se muestran pensativos al iniciar la construcción del sólido, describen la figura haciendo uso de la vista gráfica tridimensional (3D), la cual les permite girar la figura, eso facilita la identificación de los diferentes atributos del sólido.
	Verbal	Expresa sus movimientos de forma espontánea, muestran actitudes donde evidencian seguridad al verbalizar sus movimientos, se concentran en la actividad verbalizando conceptos relacionados con el tema apropiado a su edad.
	Dibujo	Aunque necesitan hacer una revisión de la guía buscando el total de la imagen para construir (cubo) mediante la composición; logran terminarla adecuadamente, manejando el espacio de la pantalla en el elemento computacional y conservando las características del sólido que propone la guía.

	Lógica	Al realizar cada movimiento se observa que tienen claro que deben hacer, planificando sus movimientos, sus actitudes muestran seguridad en el proceso y concentración en el desarrollo de la actividad. Reconocen las características de la figura lo que les facilita su elaboración.
	Aplicada	Muestran dominio sobre las opciones, haciendo uso adecuado del elemento computacional Software Geogebra, a través del ensayo-error evalúan sus movimientos y logran concluir su construcción, responden con rapidez la relación del sólido con objetos de su entorno con gran seguridad.
Nota interpretativa		Se considera que el trabajo realizado cumplió con su objetivo de la sesión, puesto que los sujetos hicieron uso de sus conocimiento previos para hacer la descripción de la figura solicitada, aún tienen un vocabulario muy básico, inician un proceso de visualización,

Fuente: elaboración propia

SESIÓN 2

Tabla 22. *Análisis diario de campo sesión dos*

Categoría		**Observaciones sesión: 2**
Visualización	Visual	En esta sesión no se ven cambios significativos con relación a la anterior, logran identificar las vistas con el sólido correspondiente, reconocen características básicas geométricas propias del objeto, describiendo los atributos del mismo. Se observa más seguridad a la hora de hacer la relación de las vistas, toman menos tiempo en hacer el reconocimiento; nuevamente hacen uso de la rotación que permite hacer el programa en la ventana 3D, para identificar atributos desde diferentes posiciones espaciales (arriba-abajo-derecha-izquierda), se observa mucho más seguro en cada movimiento que da.
	Verbal	Son más espontáneos, sus verberaciones son exactas, aunque han mejorado la relación del concepto y el significado, aun presenta confusiones en esta relación, su concentración en la actividad continua siendo apropiada utilizan en sus verbalizaciones un vocabulario básico geométrico apropiado para su edad y conocimiento.
	Dibujo	Utiliza con mayor agilidad el componente computacional usando espacio grafico de forma adecuada, logran mejorar sus tiempos en la realización del dibujo usando la ventana 3D con sus diferentes opciones, lo que le permite realizar una rotación virtual y facilitar la identificación de atributos desde diferentes posiciones espaciales. El dibujo guarda la mayor similitud con el modelo requerido, inicia su construcción a partir de las vistas las cuales relaciona ágilmente con el sólido (pirámide base triangular).

	Lógica	Con ayuda de sus preconceptos parte adecuadamente su construcción a partir de la las vistas, muestra mayor habilidad para identificar correctamente los atributos de la figura haciendo uso de la opción 3D, la cual le permite rotar la figura de forma virtual logrando desplazarse en diferente posición espacial de forma virtual. Muestra mayor habilidad para deducir los pasos a seguir en la construcción, muestra independencia y su rostro refleja seguridad en cada movimiento, evalúa cuando se equivoca en el proceso y hace las correcciones pertinentes que le permitan llegar a la meta.
	Aplicada	Manejan adecuadamente el ambiente computacional Geogebra, no dudan al decidir qué opciones usarán para realizar la construcción, en el proceso de elaboración identifican atributos característicos del sólido requerido (pirámide base triangular), relaciona algunos preconceptos con estos atributos, se ubican adecuadamente de forma espacial (derecha.-izquierda-arriba-abajo). Continúan evaluando constantemente el proceso de elaboración del sólido hasta solucionar el problema propuesto.
Nota interpretativa		Al evaluar los avances que tuvieron los sujetos en esta sesión se puede determinar que han aumentado su vocabulario, no de forma significativa, pero sí notoria. Se observó mayor dominio del ambiente computacional, evidencian gusto por su manejo, sobre todo en lo referente a las opciones de 3D, lo cual llama mucho la atención de los participantes y facilita la rotación e identificación de atributos, se considera que si se le lleva al sujeto a realizar más ejercicios de este tipo puede enriquecer su conceptos lo que contribuirá a mejorar el proceso de razonamiento geométrico en cuanto a la visualización.

Fuente: elaboración propia

SESIÓN 3

Tabla 23. *Análisis diario de campo sesión tres*

Categoría		**Observaciones sesión: 3**
Visualización	Visual	Reconocen más ágilmente las vistas, mejora su habilidad para hacer la relación vista-figura, toman menos tiempo en hacerla. Continúan haciendo uso de sus preconceptos para caracterizar los atributos del sólido (pirámide base cuadrada), desde diferentes posiciones espaciales, el uso de la rotación que les permite la ventana 3D contribuye a realizar este proceso de forma ágil, logran identificar diferencia y similitudes con la sesión anterior.
	Verbal	Son más precisos en la descripción de atributos, siendo específicos, detallando los componentes encontrados, sin embargo en la descripción del proceso de

		construcción utiliza menos palabras, pero mayor vocabulario en la caracterización de la figura isométrica hace clasificaciones de forma o tamaño, su lenguaje geométrico es acorde a la edad y conocimientos.
	Dibujo	Aumenta sus habilidades en el ambiente computacional, usando el espacio gráfico de forma adecuada, construye la figura en la ventana gráfica tridimensional (3D) con sus diferentes opciones, lo que le permite realizar una rotación y facilitar la identificación de atributos desde diferentes posiciones espaciales. Al comparar el dibujo que de la guía con el logrado, identifica gran similitud, inicia su construcción a partir de las vistas las cuales relaciona ágilmente con el sólido (pirámide base cuadrada).
	Lógica	Cumplen con el objetivo, relacionando vista-imagen, inician su construcción a partir de esta relación en la ventana vista gráfica tridimensional 3D del ambiente computacional, desarrollan un plan de trabajo para realizar la construcción, evidenciado cuando evalúa su trabajo y hace las correcciones necesarias, desde el inicio hasta el final del mismo, el usar la ventana 3D puede rotar el sólido desde diferentes posiciones espaciales. Sus rostros muestran seguridad en la labor a realizar llegando con confianza a la meta deseada.
	Aplicada	Su dominio en el ambiente computacional Geogebra es más evidente, requieren menos tiempo para elaborar la construcción del sólido, son precisos en las opciones del programa que usan para lograr el objetivo, a lo largo del proceso identifican con agilidad los atributos que componen el sólido (pirámide base cuadrada). Se evidencia el uso de preconceptos para realizar la construcción.
Nota interpretativa		Con las acciones realizadas por los sujetos se objetivo" partir de las vistas para la construcción del sólido" dando solución al problema planteado, el uso de la ventana 3D les permite realizar una rotación que favorece la identificación de atributos desde diferentes posiciones espaciales. Los sujetos en sus rostros y movimientos se observan más seguros en el proceso de elaboración y la caracterización de los atributos.

Fuente: elaboración propia

SESIÓN 4

Tabla 24. *Análisis diario de campo sesión cuatro*

Categoría		**Observaciones sesión: 4**
Visualización	Visual	En esta sesión se observa que los sujetos no logran relacionar la vista con el sólido correspondiente, buscan una imagen del sólido que les permita hacer la relación, reconocen las figuras planas que componen el sólido, para realizar la identificación de los atributos desde diferentes posiciones espaciales hacen rotaciones mentales

		pues no logran hacer uso de la ventana 3D que el programa ofrece, utilizan la ventana 2D donde la figura es estática, sin embargo logran darle a la figura un componente 3D que les permite hacer el reconocimiento de los atributos.
	Verbal	Han mejorado su vocabulario técnico geométrico, aumentan sus habilidades en la descripción de los atributos siendo más precisos y detallados. La relación concepto-significado no tiene avances.
	Dibujo	En esta sesión se observó gran dificultad en la representación gráfica del sólido, no partieron de las vistas se mostraban muy inseguros, sus rostros mostraban duda, un sujeto incluso no logró dar solución al problema, los otros dos tuvieron una aproximación adecuada a la solución pero no precisa, acudieron en su mayoría a buscar en la guía una imagen que les permitiera hacer la relación imagen-vistas. La construcción la realizaron en la ventana 2D, pues no lograron hacerlo en la 3D, lo que ocasionó que la figura fuera estática pero cumpliendo con las características de una figura 3D.
	Lógica	Para solucionar el problema y construir el sólido no parten de las vistas, buscan en sus preconceptos y en la experiencia adquirida en las otras sesiones al hacer una relación imagen-vistas, esto les permite hacer comparaciones buscando similitudes con otros sólidos, cuando logran la construcción describen los atributos de forma clara identificando componentes básicos del sólido.
	Aplicada	Aunque manejan las opciones del ambiente computacional, muestran dificultad en el uso de las ventana 3D, y toman la decisión de realizar la construcción en 2D, hacen interacciones cognitivas que le permiten reconocer que no logran relacionar las vistas con un sólido, pero dan solución haciendo relación imagen-vistas basado en su observación, hacen raciocinios que le permiten concluir la construcción de forma muy aproximada. Identifican los atributos del sólido haciendo rotaciones mentales desde diferentes pociones espaciales.
Nota interpretativa		Se considera que el trabajo realizado cumplió con su objetivo de la sesión, ya que los sujetos hicieron uso de sus conocimiento previos para hacer la descripción de la figura solicitada, aún tienen un vocabulario básico, inician un proceso de visualización, se considera que si se continúan trabajando en esta línea se lograr mayor provecho sobre el tema mejorando su vocabulario e incluyendo un número mayor de conceptos relacionados.

Fuente: elaboración propia

SESIÓN 5

Tabla 25. *Análisis diario de campo sesión cinco*

Categoría		**Observaciones sesión: 5**
Visualización	Visual	Al igual que en la sesión anterior no logran hacer la relación, se toman mayor tiempo en dar una solución al problema, nuevamente de acuerdo a la sesión anterior hacen una revisión visual a la guía para relacionar las vistas con una figura que las contiene, hacen uso de sus preconceptos para realizar dicha relación. En esta sesión se evidencia que su experiencia es aplicada para determinar el plan a seguir es decir, tiene claro una solución para el problema al no poder partir de la vista, relaciona una imagen y da solución aunque no totalmente acertada al problema. La construcción es hecha en la ventana 2D lo que hace que la figura estática y lleva al sujeto a realizar rotaciones mentales de la figura para determinar sus atributos desde diferentes posiciones

		espaciales.
	Verbal	Son más concretos al describir los atributos de la figura, su vocabulario geométrico es más específico, utilizan otros conceptos pero aún mantienen la dificultad de las otras sesiones en cuanto a la relación del concepto con el significado. Sus verbalizaciones al momento de realizar la construcción son más escasas, aunque el observador lo lleva a estar describiendo no son muy específicos en esta descripción, contrario a lo sucedido al terminar la construcción y por medio de preguntas orientadoras logran especificar más atributos.
	Dibujo	Al igual que en la sesión anterior no realizan el dibujo a partir de las vistas, buscan una imagen que relacionan con sus preconceptos y esto permite que logren una construcción que guarda las características solicitadas, utilizan bien el espacio gráfico. Su experiencia en las otras sesiones les ayuda a emplear menos tiempo en su realización. El dibujo es realizado en 2D pues no logran hacer uso de la ventana 3D.
	Lógica	Persiste la dificultad en la construcción a partir de las vistas, nuevamente realizan una relación imagen-vistas; asocian las figuras anteriormente construidas con la figura isométrica solicitada, reconocen características básicas, identificando aspectos como "¿cuál es la base?" , elaboran rápidamente un plan de trabajo, reconociendo sus errores, dando solución inmediata, sus rostros muestran seguridad al realizar el proceso.
	Aplicada	Nuevamente realizan la construcción en la ventana 2D, sus interacciones cognitivas parten de la observación que al igual que en la anterior sesión realizan relación imagen-vistas, hacen raciocinios que le permiten concluir la construcción de forma muy aproximada. Identifican los atributos del sólido haciendo rotaciones mentales desde diferentes pociones espaciales con una figura estática, ya no logran usar la ventana 3D que les permite hacer rotación virtual
Nota interpretativa		El objetivo de la estrategia "tareas de interpretación de perspectivas tridimensionales" es realizar la construcción de la figura a partir de las vistas, lo cual no se logra, por el contrario usan una relación imagen-vistas que lo lleva a usar habilidades de la estrategia uno, logran hacer la construcción y esto les permite hacer la descripción de los atributos de la figura isométrica, permitiéndoles mejorar sus habilidades en cuanto a la visualización, el proceso de razonamiento geométrico parte de la observación, la identificación de características con las que construye la figura y la descripción de atributos desde diferentes posiciones.

Fuente: elaboración propia

SESIÓN 6

Tabla 26. *Análisis diario de campo sesión seis*

Categoría		Observaciones Sesión: 6
Visualización	Visual	Como en las tres anteriores sesiones presentan dificultad en la relación de la vista con la figura, buscan en la guía una figura para hacer la relación imagen-vistas, reconocen las características principales de la figura isométrica y parten de estas para realizar la construcción, al terminarla identifican con gran facilidad sus atributos acudiendo a sus preconceptos y a los conocimientos adquiridos en sesiones anteriores.
	Verbal	En esta última sesión se observa gran progreso en sus verbalizaciones su vocabulario técnico geométrico es más específico, describen mayor número de atributos, necesitan reforzar más sus habilidades con respecto a la relación concepto-significado aun presentan confusiones.
	Dibujo	Han mejorado notablemente sus habilidades al realizar el dibujo, estos mantienen gran similitud con el requerido, sin embargo en esta sesión no logran una exactitud total, tiene manejo del espacio grafico en el ambiente computacional, se muestran seguridad en la realización del dibujo y en el uso de las opciones del programa requeridas para lograr la construcción.
	Lógica	Aunque no logran el objetivo de la estrategia " partir de las vistas para realizar la construcción del isométrico", con rapidez y teniendo en cuenta la experiencia en las otras sesiones, dan una solución rápida, elaborando la figura con una relación imagen-sólido, constantemente están observando su construcción, evaluando sus aciertos y errores, remitiéndose a las sesiones anteriores, al inicio del trabajo sus rostros relejan inseguridad por no poder resolver el problema, sin embargo al encontrar una imagen que cumpla las de las vistas, se muestran más seguros determinan un camino para dar solución al problema planteado.
	Aplicada	Todos los sujetos optan por realizar la construcción en la ventana 2D, parten de la relación imagen-vistas basado en su observación, luego realizan raciocinios que le permiten identificar figuras de su entorno que se asemejan a la construcción solicitada y realizarla en el ambiente computacional haciendo uso de las diferentes opciones del ambiente. Para dar solucionar el problema, nuevamente hacen rotaciones mentales que le permiten identificar los atributos del sólido desde diferentes pociones espaciales.
Nota interpretativa		En esta última sesión se evidencia que si bien en las primeras sesiones se cumplía con el objetivo de relacionar las vistas con una imagen , en las cuatro últimas sesiones se observa gran dificultad para cumplir el requisito, lo que no significa que desistan en el

	proceso, cambian de estrategia y buscan una figura en la guía de trabajo que les permita relacionar las vistas, el resultado es una relación imagen-vistas, con esta inician la construcción haciendo uso de sus preconceptos, y habilidades en el manejo del ambiente computacional. El vocabulario geométrico mejoró notablemente, siendo mucho más específicos al nombrar los diferentes atributos y características básicas tanto del isométrico como de sus componentes (figuras planas), aun no usan en sus descripciones aspectos como los ángulos, las aristas entre otros conceptos más técnicos, su vocabulario es básico pero acorde a su edad y grado de escolaridad. Su trabajo está enmarcado en un proceso de visualización, donde identifican las características de la figura, para ello hacen rotaciones mentales que le permiten establecer los atributos desde diferentes posiciones espaciales.

Fuente: elaboración propia

6.8. Análisis del pre test

En la etapa diagnóstica que se realiza por medio del pre test, se hace un análisis cuantitativo de acuerdo a los propósitos de esta etapa, determinando el estado inicial del razonamiento geométrico mostrado por el total estudiantes del grado tercero (36) del colegio Gran colombiano, incluyendo los 10 estudiantes objeto de la investigación, identificando el punto de partida en cuanto al razonamiento geométrico, observando las fortalezas y dificultades que los sujetos puedan tener al reconocer conceptos geométricos, características, identificación de figuras planas, y el reconocimiento de atributos con relación a la posición espacial de sujeto frente al objeto y del objeto frente al sujeto (vistas).

Categoría Visual:

En esta categoría se tuvo en cuenta las siguientes preguntas del pre- test (Anexo A):

1. Identifique en estas líneas el segmento de recta y defínalo.
2. ¿Qué clase de líneas identificas en la imagen?
3. En los siguientes pares de líneas identifique su relación. Justifique su respuesta

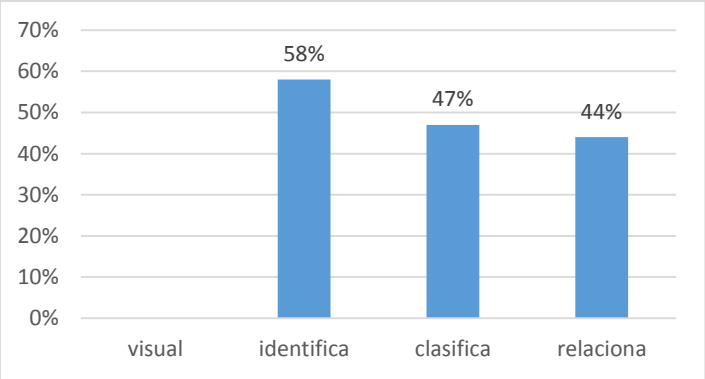


Figura 18. Visualización de los tipos de línea e identificación del segmento

Fuente: elaboración propia

Relaciona las líneas entre rectas y curvas

La Figura 19 muestra un porcentaje importante de estudiantes que presentan dificultad en este aspecto, ya que presentan confusión al clasificar y relacionar componentes de las figuras geométricas, como el tipo de líneas, la relación entre ellas, la identificación de conceptos tales como segmento, punto y clasificación de las figuras de acuerdo a su forma.

Categoría Verbal

En esta categoría se tuvo en cuenta las siguientes preguntas del pre- test (Anexo A)

Observa la imagen cuál es el ángulo que muestra la figura.

¿Qué tipo de polígonos se muestran en la imagen?

¿Qué nombre tiene la figura que observa en la imagen?

¿En la derecha del anterior sólido que figura observas? Justifica tu respuesta

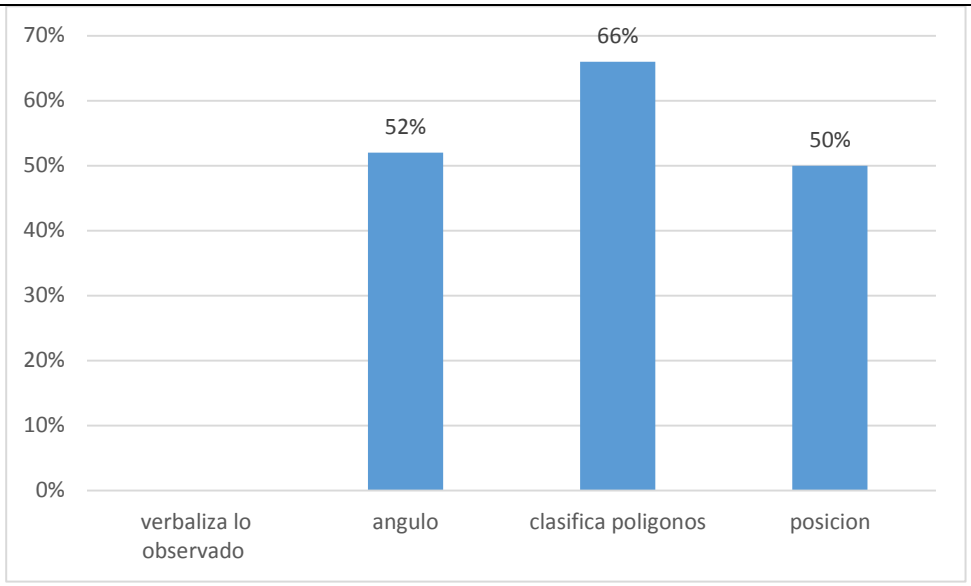


Figura 19. Verbaliza

Fuente: elaboración propia

En la Figura 20 se observa que los estudiantes verbalizan y reconocen algunos ángulos y polígonos encontrados en las figuras y presentan dificultad en establecer la posición de la imagen frente al sujeto, teniendo en cuenta sus justificaciones. (Ver Anexo B), sus verbalizaciones son limitadas y poco precisas.

Categoría Lógica

En esta categoría se tuvieron en cuenta las siguientes preguntas del pre- test, (Anexo A)

1. ¿Qué nombre tiene la figura que observas en la imagen?
2. ¿En la derecha del anterior sólido qué figura observas?

   Justifica tu respuesta
3. ¿El nombre de esta figura es?

4. ¿Si está ubicado en la parte superior de la figura anterior qué figura observa? Justifique su respuesta.
5. ¿Con cuántos cuadrados puede armar la figura?
6. ¿La siguiente figura a que corresponde?

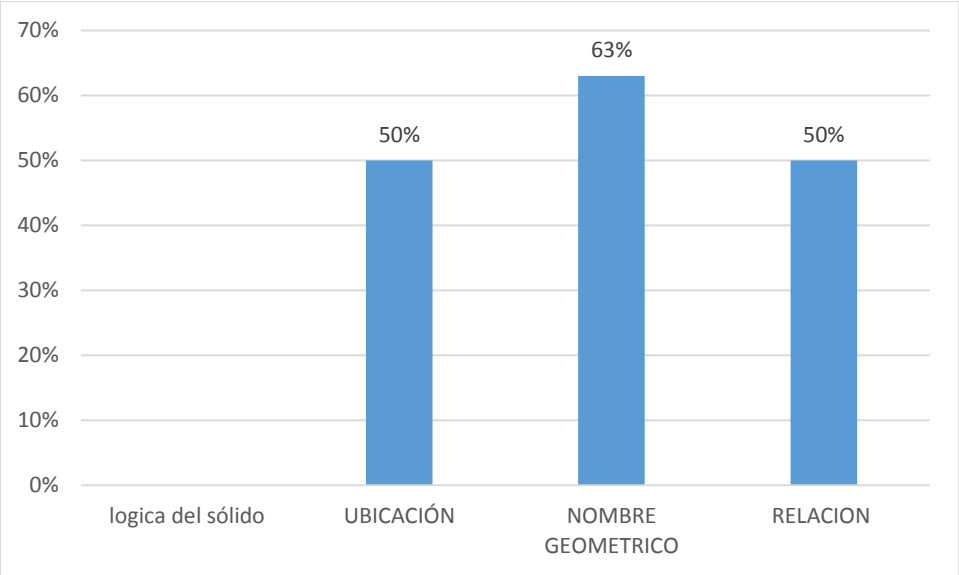


Figura 20. Lógica

Fuente: elaboración propia

En la Figura 21 se observa una dificultad significativa al describir y relacionar la figura con su nombre geométrico, caracterizar sus atributos y reconocer sus diferencias y similitudes entre las figuras.

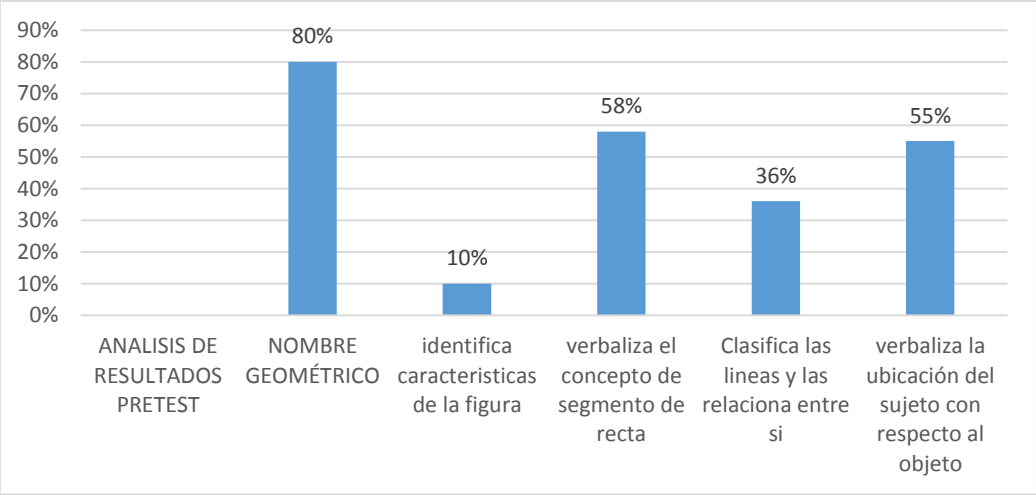


Figura 21. Análisis de resultados del pre- test

Fuente: elaboración propia

La Figura 22 permite visualizar las dificultades existentes en cuanto a los indicadores de visualización propuestos en las categorías existentes en la investigación (visual, verbal y lógica), donde el menor porcentaje se observa en la identificación de características (atributos), además en los ítems de verbalización los porcentajes también son bajos. Es de resaltar que aunque reconocen el nombre de algunas figuras no las caracterizan. (Ver Anexo B, Justificación de las preguntas)

Es importante mencionar que las categorías Dibujo y Aplicada no se evaluaron en el pre- test y Post Test, son evaluadas en el uso y aplicación del ambiente computacional.

6.9. Análisis del pos- test

En este apartado se realiza un análisis cuantitativo de acuerdo a los propósitos de esta etapa, la cual pretende establecer el estado final de los estudiantes en cuanto al razonamiento geométrico, después de haber interactuado con las dos estrategias de visualización, en un ambiente

computacional al resolver problemas geométricos. Se toma en cuenta el mismo grupo y número de estudiantes a los cuales se les aplicó el pre- test, bajo las mismas categorías.

Categoría visual

En esta categoría se tuvieron en cuenta las siguientes preguntas del pre- test, (Anexo A)

1. ¿Identifique en estas líneas el segmento de recta?
2. Observe la siguiente imagen. ¿Qué tipo de líneas puedes observar?
3. Observe la siguiente figura ¿Con qué sólidos la construiría?
4. ¿Cuál es el nombre de este sólido?

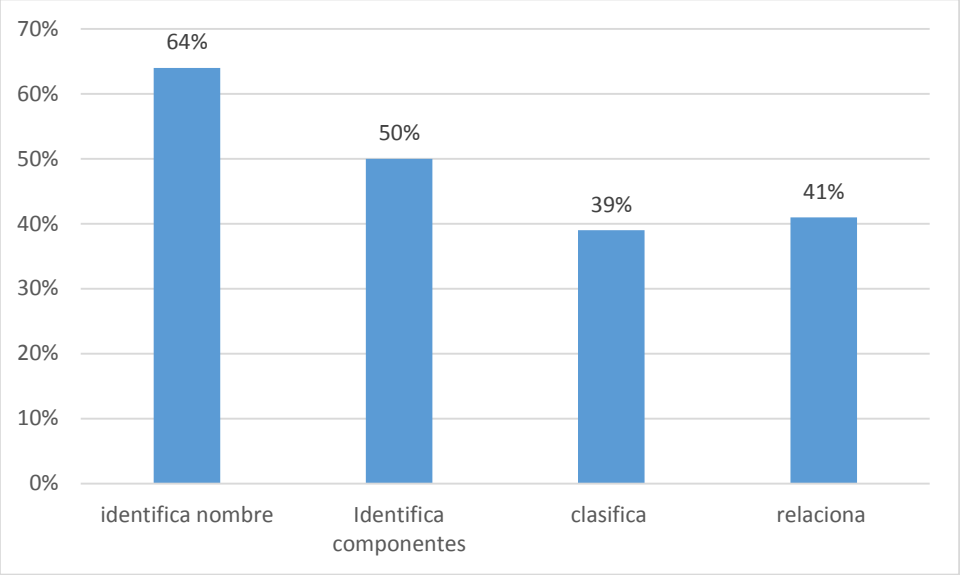


Figura 22. Visualización de los tipos de línea e identificación del segmento

Fuente: elaboración propia

En la Figura 23 se observa el porcentaje (64%) de estudiantes que lograron la identificación de componentes de la figura, sin embargo en el ítem de relación, al aumentar el nivel de complejidad, donde pasaron de relacionar conceptos básicos como las figuras planas, a relacionar por medio de la descomposición figuras tridimensionales, hay un bajo porcentaje (41%), igualmente los datos muestran dificultad en la clasificación del tipo de líneas.

Categoría Verbal

En esta categoría se tuvieron en cuenta siguientes preguntas del pre- test. (Anexo A)

1. Observe la imagen anterior y responda. ¿Cuántas caras ve?
2. Observe el siguiente sólido y responda ¿si se ubica debajo del sólido qué figura observa?
3. Las siguientes figuras corresponde a las caras de un sólido ¿Qué sólido es?
4. Observe la figura ¿Qué sólido es?

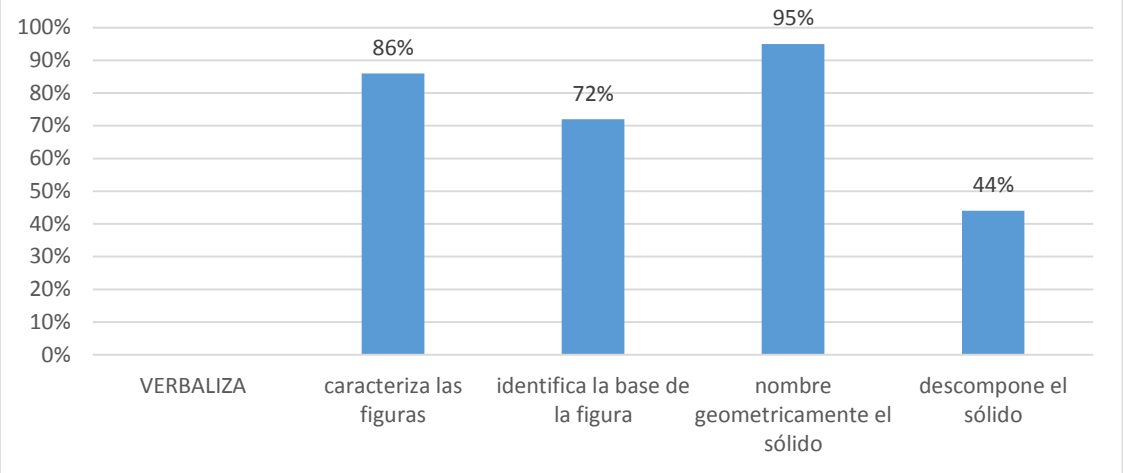


Figura 23. Verbaliza

En la Figura 24 se observa que los estudiantes realizan la caracterización de los sólidos geométricos, identificando los componentes de los mismos. Además reconocen la base de la figura como punto de referencia del sólido.

Categoría Lógica

En esta categoría se tuvo en cuenta siguientes preguntas del pre- test, (Anexo A)

1. Si observa la figura anterior ¿Cuántas caras puede contar?
2. Observa el siguiente sólido, ¿si se ubica a la debajo del este qué figura observa?
3. La siguiente figura corresponde a un sólido ¿qué sólido es?
4. Observe la figura ¿qué sólido es?
5. Observa el siguiente sólido, ¿si se ubica a la derecha de este qué figura observa?
6. Ubicado en la parte de arriba de este mismo sólido ¿cuántos puntos encontrarías en esta vista?
7. De la figura que acabas de observar ¿la vista derecha está compuesta de?

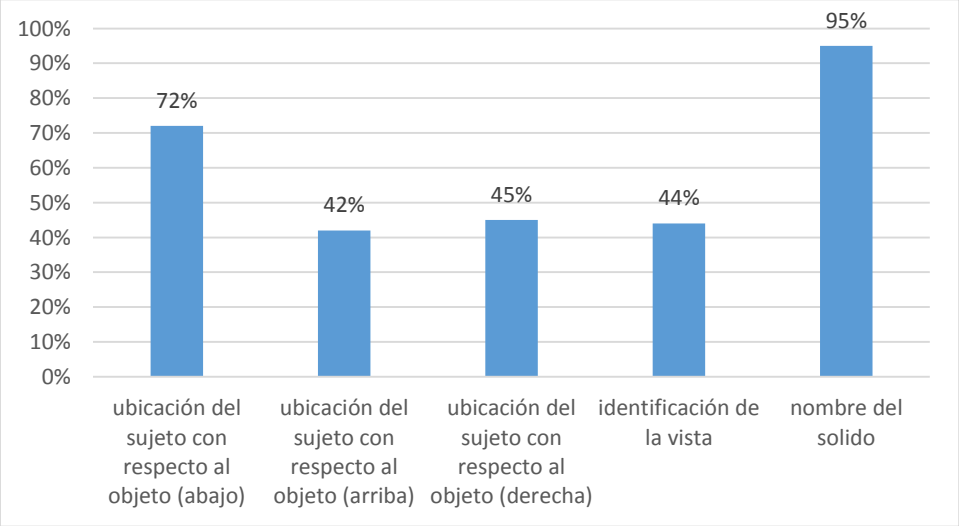


Figura 24. Lógica

Fuente: elaboración propia

En la Figura 25 se observa que los sujetos con respecto al objeto logran ubicarse espacialmente teniendo en cuenta un punto de referencia (arriba-abajo-izquierda-derecha). Refuerza su razonamiento geométrico al tomar las figuras planas como superficies para identificar atributos de las figuras tridimensionales, reconoce ampliamente el nombre de los sólidos geométricos.

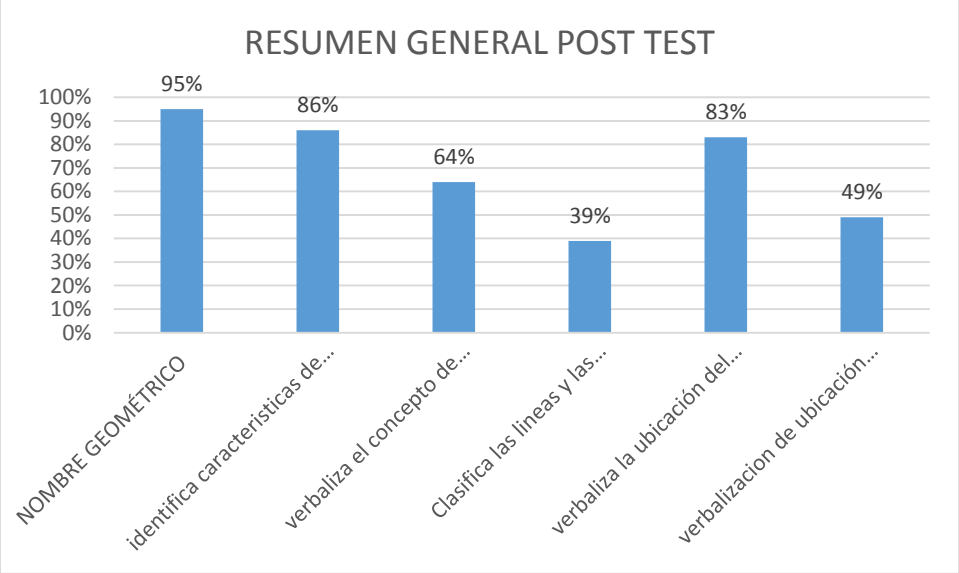


Figura 25. Resumen post test

Fuente: elaboración propia

La Figura 26 permite visualizar las avances existentes al final de la investigación, en cuanto a los indicadores de visualización propuestos en las categorías existentes (visual, verbal y lógica), donde el menor porcentaje se observa en la clasificación de las líneas que componen el sólido, se observa una diferencia significativa entre la verbalización de la ubicación del sujeto con respecto al objeto en contraste con a la ubicación del objeto con respecto al sujeto, se evidencia dominio del manejo del nombre de las figuras geométricas y sus características . (Ver Anexo B. Justificación de las preguntas.

6.10. Contraste pre- test y pos- test

Con respecto al razonamiento geométrico del grupo, se puede concluir lo siguiente:

Existe un leve progreso en identificar los elementos tanto de la figura plana como del sólido correspondiente al combinar las figuras.

Comparando los datos del pre test y post test, existe una diferencia entre lo que lograron identificar de las características y los nombre geométrico de las figuras planas.

Existe un avance en la visualización, cuando el estudiante se ubica como sujeto con relación al objeto, ubicando diferentes posiciones con el fin de construir una figura tridimensional o sólido.

Es necesario indicar que las actividades de clasificación de objetos y figuras geométricas permiten que el niño identifique atributos de estas figuras y realice discriminación visual por medio de comparaciones verbales de lo que observa y es posible afirmar que los pensamientos y las acciones interiorizadas pueden ser reversibles para ser ordenadas mentalmente de diferentes maneras con el fin de desarrollar un razonamiento de conceptos y también de esa manera contribuir en el desarrollo de conceptos numéricos y de medida, enfatizando en las habilidades geométricas esenciales en la resolución de problemas, ya que es indispensable que el estudiante visualice y perciba la geometría de forma bidimensional (2D) y tridimensional (3D), para tener un verdadero modelo geométrico matemático que lo relacione con su contexto cotidiano.

7. Interpretación de los resultados

Al contrastar las dos estrategias. “Orientación estática del sujeto y de los objetos”, “tareas de interpretación de perspectivas tridimensionales”, se evidencia que en ambas estrategias los

estudiantes parten para sus construcciones de sus conceptos básicos como punto, línea, recta, semirrecta, segmento y polígonos básicos (cuadrado, triángulo, rectángulo), los cuales elaboran con habilidad y agilidad en el ambiente computacional software Geogebra, mostrando conocimiento y dominio de los íconos, pertinentes para la elaboración de las figuras con ayuda del mouse, el cual les da la posibilidad de tener una relación de posición en el plano cartesiano con sus coordenadas, para empezar la construcción de la figura y así planificar procesos mentales y de rotación, basadas en la visualización y el razonamiento, de los dos primeros niveles de Van Hiele, lo cual se visualizó en las verbalizaciones cuando relacionan el concepto de sólido como una figura que está conformada por caras y vistas que pueden unir para su construcción.

Además se evidenció que caracterizan de manera sencilla las figuras planas que conocen, reconociendo atributos básicos en ellas. Es evidente que los niveles e indicadores propuestos por Van Hiele y Hoffer (1983) como se citó en Cabello (2013) en cada una de las sesiones han ido mejorando gradualmente, el nivel de razonamiento que parte del reconocimiento, análisis y comprensión de los procesos mentales que efectúa cuando elabora la figura.

Al lograr estructuras tridimensionales su campo de visualización se expande y esto les permite reconocer con mayor exactitud los componentes y atributos que contienen las figuras, los sujetos de la estrategia uno muestran mayores posibilidades de hacer estas relaciones desde la primera y hasta la última sesión contrario a los sujetos de la estrategia dos quien en las últimas sesiones mostraron dificultad para lograr la construcción y su respectiva caracterización.

A continuación se muestra el esquema que evidencia el proceso de comparación de los datos obtenidos en la investigación con el fin de analizar los resultados a lo largo de la investigación teniendo como base el razonamiento geométrico basado en dos estrategias través de la aplicación

de protocolos verbales, sustentados con diario de campo, pre test y post test y contratados con las fuentes teóricas sobre el tema.

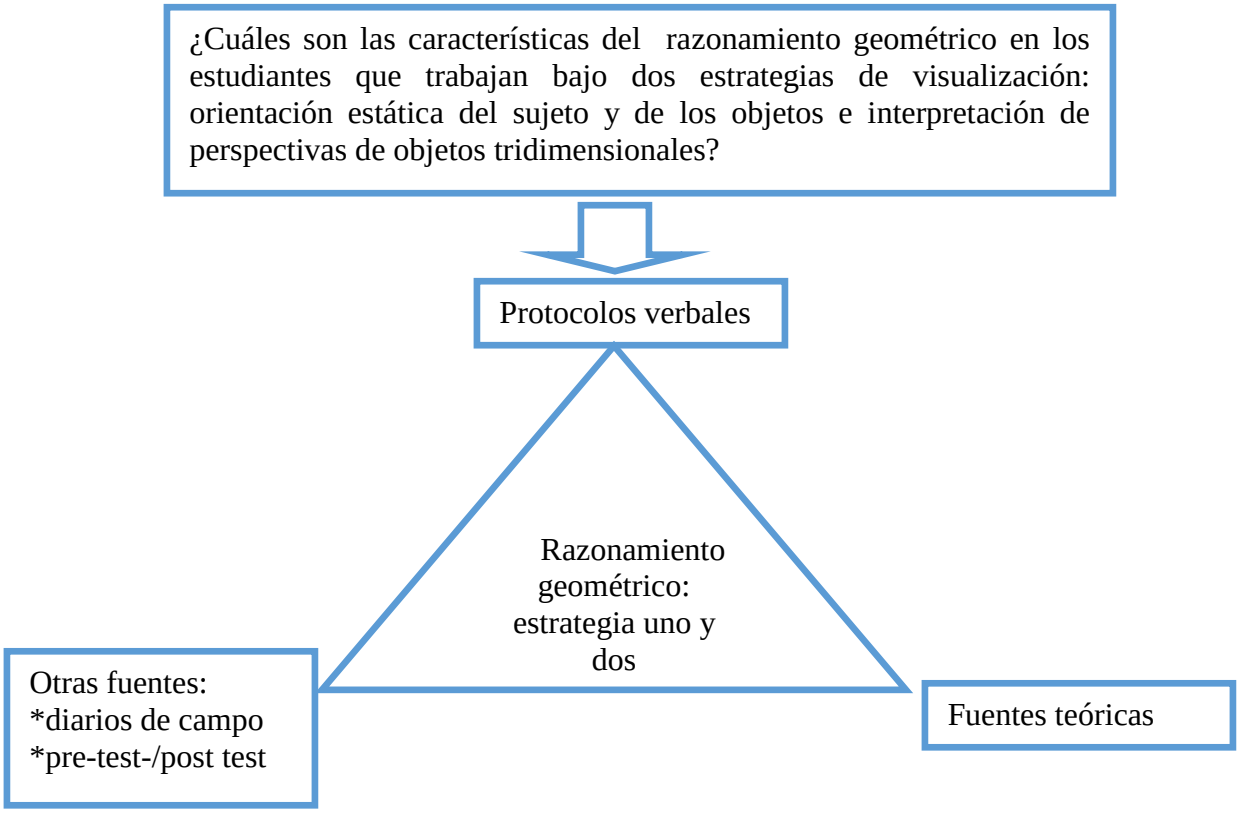


Figura 26. Relación de los instrumentos de recolección de los datos

Fuente: elaboración propia

De acuerdo a las categorías planteadas en la investigación y haciendo una relación con los datos encontrados en las diferentes fuentes, se establece las siguientes características del proceso de razonamiento de acuerdo a las categorías establecidas en la investigación.

Visual:

- Logran discriminación de atributos (sólidos y figuras isométricas).
- Manejan conceptos básicos.
- Identifican de figuras planas y sus componentes.
- Tienen facilidad de la percepción del sujeto con relación objeto (partir de la imagen), al realizar la construcción (estrategia uno).
- Se observa dificultad de la percepción del objeto con relación al sujeto (partir de la vista), al realizar la construcción (estrategia 2).

Verbal:

- Usan vocabulario geométrico en sus caracterizaciones.
- Tiene capacidad de comprensión (composición y descomposición).
- Usan símbolos geométricos (cuando hace mención a las opciones del ambiente).

Dibujo:

- Hacen reproducción del modelo de acuerdo al taller.
- Usan las opciones del ambiente computacional de forma adecuada.
- Hacen uso adecuado de la vista gráfica en el ambiente computacional (ubicación espacial).

Lógica:

- Interpreta imágenes.
- Establecen argumentos lógicos.
- Manejan el espacio – describen de los atributos de las figuras.
- Identifican los nombres geométricos (figuras planas- sólidos).

Aplicada:

- Realizan composición y descomposición de figuras.
- Hacen rotación mental de las figuras geométricas.

- Rotación en el ambiente de las figuras geométricas hecha en la ventana gráfica tridimensional (3D).
- Manejo del ambiente computacional, vista gráfica (2D), vista gráfica (3D).
- Interacciones cognitivas (visualizan, hacen razonamientos y construye).

8. Conclusiones

Partiendo de la aplicación de dos estrategias de visualización "orientación estática del sujeto y de los objetos "y "tareas de interpretación de perspectivas tridimensionales" en un ambiente computacional, cuyos datos son analizados con protocolos verbales apoyados en diarios de campo, análisis de pre test y post test, y lo desarrollado en el marco teórico, se concluye lo siguiente:

La estrategia dos resulto más compleja en cuanto a la construcción de figuras isométricas, las cuales implicaban tener un claro lenguaje gráfico para poder interpretar las representaciones planas desde las proyecciones que ellas tenían de sus vistas y tener presente la forma, tamaño, y la posición de las figuras, para así mismo ser proyectadas.

Ahora de acuerdo a estándares básicos de competencias matemáticas del Ministerio de Educación Nacional (2006), para grado tercero se logra evidenciar manejo de la figura tridimensional en las dos estrategias y esto les permite hacer rotaciones mentales que los lleva a caracterizar los sólidos y figuras isométricas propuestas, especificando propiedades básicas de los mismos.

Al lograr construcciones tridimensionales su campo visual se amplía, y esto les permite reconocer con mayor exactitud los componentes y atributos que contienen las figuras, los sujetos

de la estrategia uno muestran mayores posibilidades de hacer estas relaciones desde la primera y hasta la última sesión contrario a los sujetos de la estrategia dos, quienes en las últimas sesiones mostraron dificultad para lograr la construcción y su respectiva caracterización.

Las dos estrategias les permiten desarrollar habilidades de horizontalidad, poción espacial con diferentes puntos de referencia y esto a su vez les brinda la posibilidad de realizar construcciones en el espacio computacional con una similitud muy aproximada conservando las características propias de la figura.

De acuerdo con los objetivos de esta investigación donde se pretendió establecer una caracterización del razonamiento geométrico, se establece que en cuanto a la estrategia uno "orientación estática del sujeto con respecto al objeto" y la estrategia dos "tareas de interpretación de perspectivas tridimensionales" el razonamiento se da de acuerdo a los siguientes componentes basados en el nivel de visualización de Van Hiele, donde logran reconocer las figuras geométricas como un todo identificando sus atributos principales, al producir una copia similar al modelo en el ambiente computacional con mayor facilidad en la ventana vista gráfica bidimensional (2D); para realizar las caracterizaciones hacen uso de sus pre saberes y comparaciones con el entorno, tal como lo establece Van Hiele y Hoffer, pero con mayor precisión en la estrategia uno, puesto que en la estrategia dos se evidenció gran dificultad para iniciar su construcción a partir de las vistas, sin embargo, es de resaltar que en la estrategia dos, cuando los sujetos lograron usar la vista gráfica tridimensional (3D), fue más asertivo y ágil la descripción de los atributos por la facilidad de rotar en el ambiente computacional la figura desde diferentes posiciones, además de lo anterior se evidencia un enriquecimiento de vocabulario geométrico usado por los participantes en la investigación, esto nos permite establecer de acuerdo a los resultados, que es la estrategia uno "orientación estática de los sujetos

y relación a los objetos" fue la estrategia más adecuada para desarrollar procesos de visualización en los sujetos de estudio.

Ahora bien, teniendo en cuenta los aportes encontrados por los estudios realizados anteriores a esta investigación, se puede concluir en cuanto al uso de protocolos verbales como método de investigación, que estos contribuyen al análisis del razonamiento geométrico en la medida que permiten evidenciar los procesos de razonamiento geométrico de los sujetos estudiados al usar el ambiente computacional, logrando registros completos por medio de ayudas como a tube Catcher y la video grabadora, esto contrastado con las investigaciones hechas por Valencia *et al.* (2012).

La investigación además coincide con la hecha por Marmolejo y Vega (2012); en cuanto a lo que mencionan no basta con pocas sesiones para desarrollar la visualización, es necesario un proceso juicioso y constante para lograr resultados positivos y no solo en tercero de primaria, sino a lo largo de su educación primaria y secundaria; además en la investigación hecha por Briceño y Guzmán (2015) también se coincide, al evidenciar que las herramientas tecnológicas permiten que el estuante reduzca la distancia entre la imagen, figura y la representación que hace de la misma mejorando los procesos de visualización en los estudiantes

Al igual que otros investigaciones trabajadas en el marco teórico se concluye que es necesario e indispensable concientizar a los docentes sobre la incidencia positiva que tienen las nuevas tecnologías en el proceso de aprendizaje no solo en matemáticas (geometría), sino en las otras áreas del conocimiento, debido a que el mundo globalizado está permeado de esta nuevas tecnologías y es la responsabilidad de los docentes hacer uso asertivo de las mismas.

Finalmente es importante resaltar que el software Geogebra; como un ambiente computacional, según Rechinot (2007) como se citó en Castellanos (2010) dice "la utilización de GeoGebra no solo es motivadora a la hora de trabajar si no también es un apoyo de procesos

de resolución de problemas, elaboración de conjeturas y validación" (p. 45), permite establecer que el uso de la tecnología contribuye de manera eficiente al desarrollo del razonamiento geométrico tanto que permite manipular de forma real las figuras y de una manera práctica caracterizar los sólidos y mejorar sus procesos de visualización que fue evidente en el desarrollo de la investigación. El ambiente computacional que se seleccionó para esta investigación contribuyó para que los sujetos se acercaran y familiarizaran con un vocabulario geométrico nuevo que aunque básico, le permitió al participante identificar conceptos como segmento, línea, polígono, punto, etc. Además permitió enriquecer experiencias a nivel exitosas con el uso del PC.

9. Recomendaciones

El desarrollo del razonamiento geométrico, como se mencionó en la presente investigación, es un aspecto que en los últimos años ha sido de poca importancia en los currículos de matemáticas, sin desconocer que son múltiples los estudios que han mostrado el beneficio de trabajar sobre este aspecto; el desconocimiento de dichos estudios se ve reflejado en parte en los resultados que muestran un bajo rendimiento académico en el área de matemáticas y más aún en geometría. Por lo tanto, es importante que desde el ciclo inicial se trabaje la visualización y el razonamiento a través de talleres motivadores donde se haga uso de las matemáticas dinámicas (software), como una herramienta enriquecedora para la resolución de problemas y en el desarrollo de habilidades como las planteadas por Hoffer (1981), para las diferentes representaciones geométricas. Es así que la geometría será más productiva si se hace uso de estrategias participativas y dinámicas, con el apoyo de las nuevas tecnologías de la información para construir conocimiento significativo.

En lo referente a las nuevas tecnologías, el poco empoderamiento de los docentes en cuanto a ambientes computacionales que contribuyan de manera significativa al aprendizaje hace ver a estas tecnologías como una herramienta sub utilizada, más aun en los niveles de primaria; por ello se debe hacer conciencia del uso asertivo de la geometría dinámica a través de los software, que contribuirán a focalizar sus procesos de razonamiento geométrico y el fortalecer la resolución de problemas.

Si se tienen en cuenta estos dos aspectos a la vez, puede observarse que es importante y fundamental que las instituciones asuman un reto que involucre la contribución activa de los participantes en el proceso educativo, profundizando y reflexionando sobre los modelos propuestos, se requiere compromiso y asumir responsabilidades que permitan fortalecer los proceso pedagógicos en este caso de la geometría y la tecnología, con una disposición innovadora.

Los resultados y análisis de esta investigación permiten continuar profundizando sobre las propuestas de Van Hiele y Hoffer, en lo que respecta a la visualización que contribuye al desarrollo del razonamiento geométrico, evidenciando las dificultades y aciertos, abriendo posibilidades de profundización sobre este aspecto, resaltando la visualización como un componente de vital importancia en los proceso de razonamiento.

Se acorta la brecha en el camino al empoderamiento de la geometría en el aula de primaria, brindando una visión de enseñanza de la misma, que invita a hacer una geometría mucho más crítica y reflexiva, alejada de aspectos memorísticos, que promueva las experiencias significativas, que den valor, que fortalezcan y den un giro positivo a la enseñanza de la matemática resaltando la importancia de la geometría en esta área.

Es importante en el aprendizaje geométrico del estudiante, dar este primer paso que es la “visualización “, la cual no es solo observar, puesto que requiere desarrollar habilidades engranando aspectos como el dibujo, la lógica, lo visual, lo verbal y la aplicación misma de la visualización, permitiendo hacer de la geometría un espacio de reflexión y análisis del entorno, a través de ambientes computacionales para mejorar el razonamiento geométrico.

Finalmente, se recomienda realizar investigaciones más a fondo sobres las bondades del uso de ambientes computacionales para el desarrollo del razonamiento geométrico en estudiantes de básica primaría, que permitan fomentar acciones interdisciplinares para un uso adecuado de la herramienta que aporte de manera significativa en el manejo de las TIC en la institución.

10. Referencias

Al-ebous, T. (2016). Effect of the Van Hiele Model in Geometric Concepts Acquisition: The Attitudes towards Geometry and Learning Transfer Effect of the First Three Grades Students in Jordan. *International Education Studies. 9 (4)*, 87-98.

Alsina, C., Fortuny, J., & Pérez, R. (1997). *¿Por qué Geometría? Propuestas didácticas para la ESO.* Madrid: Editorial Síntesis .

Arboleda, G. (2015). *Propuesta de enseñanza aprendizaje de la geometría de las figuras planas en básica primaria.* Bogotá, D.C.: Universidad Nacional de Colombia.

Argudo, M. (2013). *Las TIC'S y el aprendizaje de la geometría.* Valencia: Universidad CEU Cardenal Herrera.

Battista, M. (2007). The development of geometric and spatial thinking. En F. Lester, *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning Charlotte, NC* (págs. 843-908). Nueva York: Information Age Publising.

Bello, J. (2013). *Mediación del software Geogebra en el aprendizaje de programación lineal en alumnos del quinto grado de educación secundaria.* Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.

Benavides, O., & Restrepo, K. (2005). Métodos en investigación cualitativa: triangulación. *Revista Colombiana de Psiquiatría* , 118-124.

Berssan, A., & Bogisic, B. (2000). *Razones para enseñar geometría en la educación Básica.* Buenos Aires: Ediciones Noveduc.

Berthelot, R., & Salin, M. (1992). *l'enseignement de l'espace et de la g´eom´etrie dans la scolarit´e obligatoire.* Burdeos: Université Sciences et Technologies.

Briseño, C., & Guzmán, J. (2015). Construcción de conceptos matemáticos mediante la visualización. *XIV CIAEM-IACME,* (págs. 1-12). Chiapas.

Brito, D. (2006). La verbalización como registro para análisis en la investigación sobre lectura. *Anales de Documentación. (9),* 43-51.

Cabello, A. (2013). *La modelización de Van Hiele en el aprendizaje constructivo de la geometría en primero de la educación secundaria obligatoria a partir de Cabri.* Salamanca: Universidad de Salamanca.

Carmona, J. (2011). *LaCircunferencia, Una Propuesta Didáctica utilizando la geometría dinámica y la teoría de Van Hiele.* Bogotá, D.C.: Universidad Nacional de Colombia .

Castellanos, I. (2010). *Visualización y razonamiento en las construcciones geométricas utilizando el software geogebra con alumnos de II de magisterio de la .* Tegucigalpa: Universidad Pedagógica Nacional.

Castiblanco, A., Urquina, H., Camargo, L., & Acosta, M. (2004). *Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales. Proyecto: Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo.* Bogotá, D.C.: Ministerio de Educación Nacional.

Castro, R., & Guevara, M. (s.f.). Procesamiento de lectura: una mirada al lector de telesecundaria. *XI Congreso Nacional de Investigación Educativa*, (págs. 1-11). Guanajuato.

Coello, J. (2011). *Lateralidad como directriz de la orientación espacial.* Milagro: Universida Estatal de Milagro.

Corredor, L. F. (2010). *Geomatría dínamica y lugares geométricos.* . Bogotá: Universidad Konrad Lorenz.

Costes, C., Osio, E., Bernardi, C., Facello, T., & Ferraris, A. (2010). *Conclusiones y propuestas después de una investigación sobre las clases de geometría.* Santa Rosa: III REPEM – Memorias.

Díaz, E. (2014). *El uso de las TIC's como medio didáctico para la enseñanza de la geometría.* Manizales: Universidad Nacional de Colombia.

Doncel, N. (2013). Protocolo verbal en la identificación de habilidades de auto-regulación. *Revista Educación y Desarrollo Social. 7 (1),* 79-94.

Duval, R. (2001). *La Geometría desde un Punto de Vista Cognitivo.* Obtenido de PMME-UNISON: http://fractus.uson.mx/Papers/ICMI/LaGeometria.htm

Ericsson, K., & Simon, H. (1993). *Protocol Analysis.* Cambridge: The MIT Press.

Fernández, J., Mercado, F., & Sánchez, M. (2003). Teoría y práctica psicomotora de la orientación y localización espacial. *Revista ef deportes. 9 (59),* Revista Digital.

Fernández, T. (2013). La investigación en visualización y razonamiento espacial. pasado, presente y futuro. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa, & N. Climent, *Investigación en Educación Matemática XVII* (págs. 19-42). Bilbao: SEIEM.

Flores, J. (2010). *Exploración del impacto de un software dinámico en el aprendizaje de la geometría.* Tegucigalpa: Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán.

Fouz, F. (2006). Test geométrico aplicando el modelo de Van Hiele. *Sigma. (28),* 33-60.

García, J. (2009). *Estimular la orientación espacial, Nivel 1-2-3-4.* Madrid: Grupo Gesfomedia.

García, M. (2011). *La geometria dinamica como herramienta para el dibujo.* Cantabria : Universidad de Cantabria.

García, S., & López, O. (2008). *La enseñanza de la Geometría.* México, D.F.: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

Gómez, I. (2012). Visualización matemática: intuición y razonamiento. En I. Gómez, *Contribuciones matemáticas en honor a Juan Tarrés* (págs. 201-219). Madrid: UCM.

Gómez, M. (2012). *Didáctica de la Matemática basada en el diseño curricular de educación inicial-nivel preescolar* . León: Universidad de Léon.

González, M. (s.f.). *Diseño de un proyecto para la mejora de la práctica educativa en la enseñanza de la Geometría mediante la aplicación de Google Maps en el tercer ciclo de Primaria.* Madrid: UAM.

González, O., & Arévalo, C. (2011). *Desarrollo del pensamiento geométricoespacial en niños de segundo de primaria desde la situación "viaje alrededor del mundo geométrico en ocho días".* Quindío: Uniandes.

Gonzato, M. (2013). *Evaluación de conocimientos de futuros profesores de educación primaria para la enseñanza de la visualización espacial.* Granada: Universidad de Granada.

Gonzato, M., Fernández, T., & Díaz, J. (2011). Tareas para el desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial. *Revista de didactica de las matematicas. 77* , 99–117 .

Guibert, A., Ebeaume, J., & Roland, M. (1993). *Actividades Geométricas para la Educación] Infantil y primaria.* Madrid: Narcea.

Guillén, G. (2004). El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos: describir, clasificar, definir y demostrar como componentes de la actividad matemática. *Educación matemática. 16 (3)*, 103-125.

Gutiérrez, A. (1991). Procesos y habilidades en visualización espacial. *3er congreso internacional sobre investigación en educación matemática*, (págs. 44-59). Valencia.

Gutiérrez, S. (s.f.). *El pensamiento geométrico en los estudiantes de primer grado de secundaria.* Chihuahua: Universidad Autónoma de Chihuahua.

Herrera, M. D. (2003). Teoría y práctica psicomotora de la orientación y localización espacial. . *Lecturas: Educación física y deportes*, 59.

Hoffer, A. (1981). Geometry is more than proof. *The mathematics teacher. 74 (1)*, 1-18.

Isaza, M., & López, A. (2012). *Propuesta didáctica según Van Hiele para el desarrollo de la noción de espacio en los niños y niñas de primero de primaria del liceo cuba de la ciudad de Pereira Risaralda.* Pereira: Universidad Tecnológica de Pereira.

Ixcaquic, I. (2015). *Modelo De Van Hiele y Geometría Plana: (Estudio realizado en primero básico del Instituto Nacional de Telesecundaria, del municipio de San Francisco El Alto, departamento de Totonicapán).* Quetzaltenango: Universidad Rafael Landívar.

Jaramillo, C., & Esteban, P. (2006). Enseñanza y aprendizaje de las estructuras matemáticas a partir del modelo de Van Hiele. *Revista Educación y Pedagogía. 18 (45)*, 111-118.

Kerlegand, C. (2013). *Desarrollo de dos propiedades de la circunferencia usando el modelo de Van Hiele y la visualización.* México, D.F.: Instituto Politécnico Nacional .

Kosslyn, S. (1988). Aspects of a cognitive neuroscience of mental imagery. *Science. 240 (4859)*, 1621-1626.

Kosslyn, S. (1994). *Image and brain.* Cambridge: The MIT Press.

Lastra, S. (2005). *Propuesta metodológica de enseñanza y aprendizaje de la geometría, aplicada en escuelas críticas.* Santiago d Chile: Universidad de Chile.

Lastra, S. (2005). *Propuesta metodológica de enseñanza y aprendizaje de la geometría, aplicada en escuelas críticas.* Santiago de Chile: Universidad de Chile .

Lázaro, A., & Berruezo, P. (2009). La pirámide del desarrollo humano. *Revista Iberoamericana de Psicomotricidad y Técnicas Corporales. 9 (34),* 15-42.

Lin, J., & Lin, S. (2014). Tracking eye movements when solving geometry problems with handwriting devices. *Journal of Eye Movement Research. 7 (1),* 1-15.

Londoño, G. (2017). *Razonamiento asociado a la proporcionalidad entre áreas en correspondencia con el modelo educativo de Van Hiele en estudiantes de grado séptimo.* Medellín: Universidad de Medellín.

Majadas, F. (2012). *Geogebra: panorama actual y futuro.* Obtenido de Observatorio Tecnológico: http://recursostic.educacion.es/observatorio/web/gl/software/software-educativo/1082-geogebra-panorama-actual-y-futuro

Malara, N. (1999). Acerca de las dificultades que tienen los profesores de secundaria para visualizar y representar objetos tridimensionales. *Educación Matemática. 11 (3),* 54-68.

Marmolejo, G., & Vega, M. (2012). La visualización en las figuras geométricas. Importancia y complejidad de su aprendizaje. *Educación Matemática. 24 (3),* 7-32.

Martínez, L. (2007). *La Observación y el Diario de Campo en la Definición de un Tema de Investigación.* Bogotá, D.C.: Institución Universitaria Los Libertadores.

Mayor, J., Suengas, A., & González, J. (1993). *Estrategias Metacognitivas. Aprender a aprender y aprender a pensar.* Madrid: Síntesis Psicología.

Mendoza, J. (2015). *Utilización del software Geogebra, como herramienta cognitiva y su incidencia en el aprendizaje de la matemática en el Primer Semestre de la Carrera de Ingeniería en Industrias Pecuarias, FCP, ESPOCH* . Riobamba: Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

Ministerio de Educación Nacional . (18 de 04 de 2004). *Pensamiento Geométrico y Tegnologias Computacionales* . Obtenido de Colombia Aprende : http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articles-113753_archivo.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas: Guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden.* Bogotá, D.C.: Ministerio de Educación Nacional.

Ministerio, E. (2010). *Linieamientos curriculares para matematica.* Bogota: Editorial Magisterio.

Newell, A., & Simon, H. (1972). *Human Problem Solving.* Englewood Cliffs: Prentice Hall.

Valencia, L. B. (2008). *Lla solución de problemas en la comprensión de conceptos de geometría dinámica a través de ambientes computacionales.* Bogotá: ecné, Episteme y Didaxis: TED.

Novo, M. (2013). *Recursos didácticos para la enseñanza-aprendizaje de la Geometría en la Escuela Primaria.* Valladolid.

Ochaíta, E. (1993). Ceguera y desarrollo psicológico. En A. Rosa, & E. Ochaíta, *Psicología de la ceguera* (págs. 140-161). Madrid: Alianza Editorial.

Pachano, L., & Terán, M. (2008). *Estrategia para la enseñanza y aprendizaje en la educación básica: experiencia constructivista.* San Cristóbal: Universidad de los Andes.

Peña, A. (2012). Las TIC en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría en la ESO. *Suma. (69)*, 37-48.

Peña, C. (2009). *Solución de problemas.* Obtenido de Blog : http://gerenciacarlos.zoomblog.com/archivo/2009/11/28/solucion-De-Problemas.html

Pérez, Y., & Ramírez, R. (2011). Estrategias de enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Fundamentos teóricos y metodológicos. *Revista de Investigación. 35 (73)*, 169-193.

Piaget, J. (1981). *Seis estudios de Psicología.* Barcelona: Barral.

PISA. (2016). *Pruebas Saber 2014-2016.* París: OCDE .

Pradas, D. (2009). *El esquema corporal en niños y en niñas.* Granada: CSIF.

Proenza, Y., & Leyva, M. (2007). *Aprendizaje desarrollador en matemática.* Obtenido de Matemáticas: http://www.monografias.com/trabajos52/pensamiento-geometrico/pensamiento-geometrico2.shtml

Quaranta, M., & Ressia, B. (2009). *La Enseñanza de la Geometría en el Jardín de Infantes.* La Plata: Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires.

Ramírez, N. (2014). *Estrategia didáctica para la clasificación de triángulos y cuadriláteros orientada por el modelo Van Hiele y Geogebra.* Medellín: Universidad Nacional de Colombia.

Requena, M. (2000). Resolución de problemas algebraicos de las olimpiadas venezolanas de matemáticas. *Enseñanza de la Matemática. 9 (1)*, 3-9.

Requena, M. (2003). El análisis de protocolos verbales como técnica para la comprension de los procesos de razonamiento. *Laurus. 9 (16)*, 79-96.

Ruiz, N. (2012). *Análisis del desarrollo de competencias geométricas y didácticas mediante el software de geometría dinámica GeoGebra en la formación inicial del profesorado de Primaria.* Madrid: Universidad Autónoma de Madrid.

Sainz, O. (2014). *La visualización en geometría: un estudio en 3° ESO.* . Santander: Universidad de Cantabria.

Sordo, J. (2005). *Estudio de una estrategia didáctica basada en las nuevas tecnologías para la enseñanza de la geometría.* Madrid : Universidad Complutense de Madrid .

Souto, B. (2009). *Visualización en Matemáticas un Estudio Exploratorio con Estudiantes de Primer Curso de Matemáticas.* Madrid: Universidad Complutense de Madrid.

Torregrosa, G. (2002). *Visualización y aprendizaje de la geometría.* San Vicente del Raspeig: Universidad de Alicante.

Torres, C., & Racedo, D. (2014). *Estrategia Didáctica Mediada por el Software Geogebra para fortalecer la enseñanza-aprendizaje de la geometría en estudiantes de 9° de básica secundaria.* Barranquilla: Universidad de la Costa "CUC".

UNESCO. (2009). *Aportes para la enseñanza de la Matemática.* Santiago de Chile: SERCE/LLECE.

Valencia, D. (2014). *GeoGebra es un software interactivo de matemática* . Obtenido de https://prezi.com/nas2au27kx58/geogebra-es-un-software-interactivo-de-matematica-que-reu/

Valencia, N., & Leiva, A. (2005). *Reportes automatizados y verbales: incidencia en el aprendizaje de la solución de problemas.* Bogotá, D.C.: Universidad Pedagógica Nacional.

Valencia, N., & Sanabria, L. (2008). *La solución de problemas en la comprensión de conceptos de geometría dinámica a través de ambientes computacionales.* Bogotá, D.C.: Universidad Pedagógica NacionaL.

Valencia, N., Sanabria, L., & Ibáñez, J. (2012). Proceso cognitivos y metacognitivos en la solución de problemas de movimientos de figuras en el plano a través de ambientes computacionales. *Tecné, Episteme y Didaxis. (31),* 45-65.

Vargas, G., & Gamboa, R. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. *Uniciencia. 27 (1),* 74-94.

Vygotsky, L. (1978). *Interaction Between. Learning and Development.* Nueva York : Harvard University Press.

Watkins, K. (2006). *Informe sobre Desarrollo Humano 2006.* Barcelona: Editorial Aedos, s.a.

11. Anexos

Los anexos por su gran extensión se encuentran recopilados en un libro independiente anexo a este documento