

Análisis geométrico de las formas diferenciales como
herramienta de representación alternativa aplicada en la ley de
inducción electromagnética.

Jean Paul Rodríguez Villamil

Universidad Pedagógica Nacional de Colombia

Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de Física

Bogotá D.C., Colombia

Análisis geométrico de las formas diferenciales como
herramienta de representación alternativa aplicada en la ley de
inducción electromagnética.

Jean Paul Rodríguez Villamil

Asesor:

Yecid Javier Cruz Bonilla

Universidad Pedagógica Nacional de Colombia

Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de Física

Línea de Profundización: La enseñanza de la Física y la relación Física-
Matemáticas

Bogotá D.C., Colombia

Junio de 2025

Contenido

Lista de Figuras

Introducción	12
Nociones sobre el espacio vectorial y el espacio tangente	22
1.1 Espacio Tangente	30
Formas Diferenciales	40
2.1 1 –Formas	40
2.2 Producto de 1 –Formas	43
2.3 2 –Formas	50
A. Propiedad asociativa	51
B. Propiedad Distributiva	53
2.4 k –Formas	54
Operador diferencial y Operador Hodge-Star aplicado a formas diferenciales	62
2.5 Diferenciación de k -formas	62
2.6 Operador Hodge-Star	72
2.7 Operadores Vectoriales	77
Métrica de Minkowski y Electromagnetismo en la relatividad especial	81
3.1 Geometría local en Lorentz y geometría local euclidiana	.81
3.2 Operador <i>Hodge-star</i> en la métrica de Minkowski	85
3.3 Ecuaciones de Maxwell	91

Aplicación de las formas diferenciales y representación gráfica de la inducción electromagnética	106
Conclusiones	122
Referencias Bibliográficas	125
Anexos	129

Índice de Figuras

1. Figura No. 1. Un punto sobre una curva C en un espacio vectorial en \mathbb{R}^2 representa en $T_p C$ el conjunto de todas las rectas tangente a la curva C en p
2. Figura 2. e^1 es un vector unitario (de magnitud 1) generador de la recta a través de un escalar. Dado que describe elementos en una dimensión genera por si un número correspondiente a un punto dentro de la recta.
3. Figura 3. Donde e^1, e^2, e^3 , son vectores unitarios generadores de la base vectorial con un origen común en O que representan la idea de dimensión relacionándose directamente con el número de vectores que generan la base.
4. Figura No. 4. De la línea secante que une dos puntos de una circunferencia, La noción aquí es establecida como el vector desplazamiento $\Delta \vec{r}$ que interseca los puntos señalados sobre la circunferencia por los vectores posición \vec{r}_0 y \vec{r}_f
5. Figura No. 5. De las distintas posiciones marcadas por los vectores posición desde el origen 0 en la circunferencia, se establecen así las distintas rectas secantes que definen la diferencias espaciales entre posiciones.
6. Figura No. 6. De las rectas tangentes para los puntos p y q en la curva $C = r^2 = x^2 + y^2$ que describen los espacios tangentes $T_p C$ y $T_q C$ siendo dx y dy los vectores bases correspondientes a estos espacios tangentes. $T_p C$ sobre la curva C , p con coordenadas $p = (a, \mathcal{F}(a))$ donde se encuentra el espacio tangente a la curva en p .
7. Figura 7 - Espacio Vectorial en R^2 con vectores base (x, y) que contiene el subespacio vectorial $T_p R^2$ con vectores base $\langle dx, dy \rangle$ donde el vector \vec{v} se considera en las coordenadas $\langle dx, dy \rangle_{(x,y)}$ con referencia al punto p .
8. Figura No. 8. De la medición generada por el covector \vec{v} cuando el vector \vec{u} se proyecta sobre él.
9. Figura No. 9. – De la representación de los diferentes valores para ω en el plano $dx - dy$ definidos como covectores, siendo una función lineal en el espacio tangente $T_p C$
10. Figura No. 10 – De la composición de las superficies generadas en el sentido dx y dy atravesadas por el vector \vec{v} que define la función lineal $\omega = 3dx + 2dy$
11. Figura No. 11- De la composición de los planos generados en el sentido dx y dy respectivamente. La superposición de estas superficies generadas por la función lineal ω define una nueva orientación sin modificar las características del vector \vec{v} que continua “perforando” la misma cantidad de secciones de planos orientadas en comparación de su descomposición.

12. Figura 12. De la existencia de 2 vectores \vec{v}_1 y \vec{v}_2 , y su definición en el espacio de las formas. Representa el producto de los vectores definidos en el espacio tangente. Su relación con el producto vectorial forma un área por definición.
13. Figura No. 13. Representación gráfica de la propiedad de anticonmutatividad del producto entre 1-Formas
14. Figura No. 14. De las áreas generadas por los vectores \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} en la conformación del paralelepípedo rectangular.
15. Figura No. 15. De la propiedad asociativa que genera el paralelepípedo a través del producto exterior.
16. Figura No. 16. De la analogía de las permutaciones en un espacio vectorial con vectores base i, j, k , en un espacio vectorial V asociada al espacio tangente donde los vectores base dx, dy, dz consideran el orden de las permutaciones asociadas a la propiedad de anticonmutatividad.
17. Figura No.17. Como interpretación del área creada por los vectores \vec{u}, \vec{v} que al escalarse por una cantidad \vec{w} veces brinda la configuración del volumen al sobreponerse una sobre otra según la orientación de los planos.
18. Figura No. 18. Propiedad distributiva sobre la suma de dos áreas distintas generadas por los vectores \vec{u}, \vec{w} , y \vec{v} .
19. Figura 19: Gráfico de un campo escalar descrito por la función ϕ donde muestra el vector χ tangente al punto p que pertenece a la curva C . Los valores en la escala representados en color blanco corresponden a aquellos donde la función incrementa nominalmente.
20. Figura No. 20. De los vectores \vec{u} y \vec{v} en el plano V
21. Figura No. 21. De la representación del complemento ortogonal de los vectores \vec{u} y \vec{v} en el plano V
22. Figura No 22. De la 2-forma $u \wedge v$ creada por los vectores \vec{u} y \vec{v}
23. Figura No. 23. De la analogía del complemento ortogonal con el operador *Hodge-Star* en el espacio de las formas
24. Figura 24. De la representación de aplicar el operador *Hodge-star* a un vector \vec{u}
25. Figura 25. De la representación de los eventos γ, ξ, ρ en un espacio geométrico localmente Euclidiano. Definidas sus relaciones por el teorema de Pitágoras libre de coordenadas.
26. Figura No. 26. De los tiempos propios sobre dos eventos sobre la línea del universo y otro fuera de ella. Definen la distancia propia en término de intervalos luminosos. Libre de coordenadas
27. Figura No. 27. De la representación en coordenadas espaciales y temporales de los eventos originales
28. Figura No. 28. Del uso del triángulo de Pascal relacionado con el coeficiente binomial para definir el espacio y la *formas* que definen sus operaciones.
29. Figura No. 29. (2D) De la representación del campo eléctrico E_x como malla o segmentos de área en el plano $dy \wedge dz$ producto de la aplicación del operador Hodge-Star sobre las

las componentes del campo eléctrico en F_E . Los puntos en el centro representan la orientación de los planos hacia afuera

30. Figura No. 30. (3D) De la Hipersuperficie (Izquierda) y su segmentación en áreas con su respectiva orientación. Los planos que se describen en dirección dx con su respectiva orientación como ejercicio de perspectiva de su orientación.
31. Figura No. 31. (3D) De la comparación de los planos o 2-formas que describen las componentes dy y dz del dual del campo eléctrico con sus respectivas orientaciones. Imagen creada con Python
32. Figura No. 32 Dual (Hodge-Star) del campo eléctrico en el tensor electromagnético de la Ley de Faraday: Cada plano establecido con sus vectores normales que indican la orientación de las Hipersuperficies, con $|E_x| = |E_y| = |E_z| = C$ como campo constante y uniforme. Imagen creada con Python
33. Figura No. 33. (3D) De la conformación en el espacio de los hiperplanos que describen el campo magnético. Análogos a los planos creados inicialmente con el dual del campo eléctrico. Imagen creada con Python
34. Figura No. 34. (3D) De la conformación en el espacio de los hiperplanos que describen el campo magnético. Esta vez con sus orientaciones en el espacio. Imagen creada con Python.
35. Figura No. 35. (2D) De la conformación en el espacio de los segmentos de plano que describen el campo magnético. Su orientación en el espacio es en dirección dx . Imagen creada con Python
36. Figura No. 36. (2D) De la inducción electromagnética de acuerdo con la expresión $E = -\frac{B_z}{2} dy + \frac{B_y}{2} dz$ para el campo eléctrico (1-forma) y $B_0 dy \wedge dz$ para el campo magnético (2 forma) como segmentos de área que se orientan en dirección dx . Imagen creada con Python
37. Figura No. 37. (3D) De la inducción electromagnética de acuerdo con la expresión $E = -\frac{B_z}{2} dy + \frac{B_y}{2} dz$ para el campo eléctrico (1-forma) en forma de vórtice y $B_0 dy \wedge dz$ para el campo magnético (2 forma) como segmentos de área que se orientan en dirección dx su desarrollo en el tiempo. Imagen creada con Python
38. Figura No. 38. (3D) De la inducción electromagnética con el campo eléctrico (1-forma) en forma de vórtice representado por los vectores en rojo $B_0 dy \wedge dz$ para el campo magnético (2 forma) como segmentos de área ahora que varían en el tiempo indicando la variación del flujo magnético en el tiempo que se orientan en dirección dx . Imagen creada con Python
39. Figura No. 39. Representación del operador *Hodge-Star* sobre el operador *F Faraday*: De la aplicación del operador *Hodge-star* sobre el operador *F Faraday*.

Planteamiento del problema

En ciencias las matemáticas son consideradas fundamentales, la herramienta principal para la resolución de problemas analíticos, guía en nuestra comprensión de conceptos y estructuras que son producto de una interpretación más argumentable en torno a las *representaciones* de nuestro conocimiento empírico de la naturaleza. Son un filtro que reduce la complejidad de nuestra percepción a *modelos* imaginables y explicativos, pero también hacia territorios conceptuales inexplorados y subyacentes. Consideramos en la abstracción matemática un escenario de posibilidades como proceso mental, elaboramos esquemas para dotar de sentido a patrones y formas como elementos, realizamos asociaciones y conexiones que dotamos de algún orden, de alguna característica, clasificamos información según sus cualidades, generamos relaciones, formamos sistemas, comparamos partes y estructuras, establecemos hipótesis, generamos proposiciones que pretendemos tengan validez de carácter universal ya sea como hecho predictivo y/o explicativo, expresiones todas en el ejercicio del análisis interno del pensamiento son condicionadas por nuestras interpretaciones, que ciertamente guardan relación en la naturaleza del conocimiento objetivo y colectivo del universo y sus fenómenos.

Al respecto de nuestras interpretaciones, en *Hertz* se aproximan hacia el conocimiento *consciente* de la naturaleza sobre el concepto de *Imagen*¹

“Nos formamos imágenes o símbolos de objetos externos; y la forma que les damos es tal que las consecuencias necesarias de las imágenes en el pensamiento son siempre las

¹ Bild

imágenes de las consecuencias necesarias en la naturaleza de las cosas representadas. Para que este requisito se cumpla, debe existir cierta conformidad entre la naturaleza y nuestro pensamiento. La experiencia nos enseña que este requisito puede cumplirse y, por lo tanto, que dicha conformidad existe de hecho. Cuando, a partir de nuestra experiencia previa acumulada, hayamos logrado deducir imágenes de la naturaleza deseada, podremos desarrollar en poco tiempo, a través de ellas, como si se tratara de modelos, las consecuencias que en el mundo externo solo surgen en un tiempo comparativamente largo, o como resultado de nuestra propia intervención. De este modo, podremos anticiparnos a los hechos y decidir sobre los asuntos presentes de acuerdo con la comprensión así obtenida. Las imágenes de las que hablamos aquí son nuestras concepciones de las cosas.²

La *imagen* constituye en el ejercicio de pensamiento, las *concepciones* funcionales como modelo simbólico validados por su capacidad predictiva en la naturaleza. La relación de las estructuras racionales y objetos externos implica un *isomorfismo lógico* del pensamiento y la naturaleza que nos lleva a plantear que la experiencia confirma que las imágenes “encajan” en la naturaleza en contraste sobre la idea de que la mente le impone estructura al mundo en *Kant*.

La *Imagen como representación* acentúa la idea de que las imágenes son *modelos hipotéticos* que simplifican la realidad para hacerla más comprensible, se plantea como una relación pragmática que basa su intercambio en el *lenguaje*, en tanto sofisticada su mensaje en ambas direcciones y que genera evaluación de sus afirmaciones en términos como la *permitividad* y la *correctividad*³. En aras de su comprensión, la primera nos refiere a la coherencia lógica interna de las abstracciones,

² Die Prinzipien der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt (Hertz, 1894)

³ Zulässigkeit y Richtigkeit respectivamente

la segunda su correspondencia con la experiencia. En la explicación de un fenómeno por ejemplo podemos considerar un número de abstracciones que podemos interpretar como *admisibles*⁴, es decir, pueden ser imaginadas resultando coherentes en un cuerpo de pensamiento, articularse porque sus afirmaciones guardan algún tipo de referencia y relación de una lógica interna que las asocia como estructura, en tanto estas pueden ser consideradas así como *permisibles*, aunque *corregiremos* aquellas que contradigan su relación con los elementos externos de la experiencia⁵.

Conectamos aquí a las matemáticas como *lenguaje simbólico* que deriva en la *geometría* como una de sus expresiones de *representación*. Vinculamos en esta noción la síntesis de las estructuras racionales de la abstracción y el cuerpo de sus afirmaciones, como consecuencias observables de las relaciones espaciales que definen un *modelo* sobre la experiencia. Las relaciones internas que constituyen la existencia e interacción de las *imágenes* como un *modelo matemático* se pueden evidenciar en una estructura lógica que sustentan sus proposiciones y axiomas, la geometría puede actuar en ese sentido como *corrección* en sus relaciones esenciales. Es necesario aquí contrastar ante lo planteado que los *modelos* no son verdaderos por ser abstractamente consistentes (en un enfoque empirista), sino por su capacidad predictiva y su evaluación sobre las imágenes de la naturaleza. Por lo tanto, es necesario aclarar que la geometría sustenta su validez no solo en la coherencia lógica de su estructura axiomática (Permitividad) sino en su capacidad para generar consecuencias que correspondan a las relaciones espaciales observadas en la experiencia (Correctividad) evitando así reducir su 'corrección' a un mero ejercicio de abstracción por si sola.

⁴ Porque no van en contradicción a las nociones del pensamiento. (Hertz, 1894)

⁵ Die Prinzipien der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt (Hertz, 1894): Introducción

En este respecto nos lleva en contraste a la perspectiva de la coherencia lógica de Hilbert⁶ en un enfoque formalista, si la geometría es producto enteramente de la lógica, esta existe en un reino abstracto autónomo es decir no requiere un vínculo con la experiencia asumiendo por sí sola a la geometría como consistente⁷.

En las consideraciones establecidas por Hilbert sobre los *principios de la geometría*⁸ se basa sobre los *elementos del espacio o los elementos de la geometría del espacio* en 3 sistemas de *objetos*⁹ “puntos, líneas y planos” sobre la definición de 5 axiomas básicos¹⁰ y sus posibilidades de relación, conexión e interdependencia. Cabe aclarar que estas descripciones tienen una naturaleza sintáctica en comparación a las ideas de *Hertz* que son de naturaleza semántica. Se considera sintáctica porque guardan relación con la idea de estructura a nivel de *lenguaje formal*, sus sistemas de objetos se entienden sin un *significado intrínseco*, es decir se definen por sus axiomas, por lo cual la importancia de su trabajo contiene una validez interna que genera una estructura autónoma, que es consistente por sí misma siendo crucial la ausencia de contradicciones y preservando principalmente sus relaciones formales. Esta naturaleza de pensamiento percibe la geometría como un conjunto de relaciones internas que considera sus pruebas formales sobre la lógica de sus axiomas, su consistencia es suficiente para validar su existencia. Si bien en *Descartes* la geometría se alcanza un *paradigma proto-formal* (en relación con la formalización moderna) sobre la representación de figuras mediante ecuaciones

⁶ Hilbert, D. (1928): *Die Grundlagen der Mathematik*

⁷ Hilbert, D. (1928): *Die Grundlagen der Mathematik*

⁸ Hilbert, D. (1899): *Grundlagen der Geometrie*. §1 Die fünf Axiomgruppen.

⁹ Dingen: algo que existe en una determinada forma, apariencia, de una determinada manera y como tal es objeto de percepción, de conocimiento

¹⁰ (De conexión, de orden, de paralelos (axioma de Euclides), de congruencia, de continuidad (axioma de Arquímedes))

algebraicas¹¹, las nociones de estos símbolos que conforman las expresiones algebraicas en *Hilbert* los desprovveen de algún significado espacial físico, sometiéndolos a reglas de manipulación, si son consistentes algebraicamente, también la geometría es consistente.

Es importante aquí situar contextualmente el trabajo de *Hilbert* y suponer algunas condiciones que orientaron sus intenciones sobre este trabajo. La Crisis de los Fundamentos¹² se remonta al siglo XIX el desarrollo y la fuerza de geometrías no-Euclidianas consideradas consistentes contradecían el postulado de las paralelas de Euclides (e.g., Gauss, Lobachevsky, Bolyai, Riemann) demostró que la geometría no era una verdad *única y necesaria* sobre el espacio físico. Sí existían múltiples sistemas coherentes, si múltiples geometrías son lógicamente posibles, su intuición orientaba a pensar ¿cuál describe el "espacio real"? ¿Es la matemática un descubrimiento de verdades empíricas o una construcción humana? Esto también se acentuaba por inconsistencias en la teoría de conjuntos (Cantor) y los fundamentos del cálculo infinitesimal (Weierstrass, Dedekind) generando una profunda inquietud sobre la solidez lógica de toda la matemática. En ese orden la búsqueda de un sistema que estuviera exento de paradojas y contradicciones, además de consistente en sí mismo resultó fiable para encontrar un conocimiento puro matemático.

Estas dos perspectivas difieren en sus objetivos, una se basa en el conocimiento matemático, otra sobre su adecuación a los fenómenos físicos. Y aunque *Hertz* de modo intrínseco se aproxime a consideraciones geométricas sobre el desarrollo de su trabajo, este no está basado propiamente

¹¹ "La solución de un problema geométrico se reduce a manipular símbolos según reglas algebraicas, sin necesidad de imaginación espacial" (Descartes, *Discurso del Método*, Parte II)

¹² Morris Kline (1980): *Mathematics: The Loss of Certainty*. Oxford University Press. Capítulo 8, "The illogical development: At the gates of paradise"

Jean Dieudonné (1987): *Mathematics: The Music of Reason*. Springer. Capítulo 3, "Objects and methods in classical Mathematics, 4. Geometry from Euclid to Hilbert".

en la naturaleza de la geometría. Por otro lado, es evidente que *Hilbert* no consideraba a la experiencia y el mundo externo como condición para sustentar una geometría pura y con una imagen única como representación formal en matemáticas, sistemas que son puramente producto del pensamiento. Mientras en *Hertz* puede discernirse como las estructuras racionales de las matemáticas que proveen esquemas relacionales abstractos, al ser interpretados como modelos geométricos, permiten representar y predecir patrones espaciales en la realidad física. Esta conexión no es isomórfica ni necesaria, sino pragmática y regulada por criterios de consistencia lógica, *simplicidad* y adecuación empírica.

En el siguiente cuadro se comparan estas ideas sobre la geometría:

Aspecto	Coherencia Lógica	Corrección Empírica
Definición Central	Consistencia sintáctica: " <i>Un sistema es consistente si no existe una fórmula P tal que P y ¬P sean demostrables</i> " (Hilbert, 1928, p. 3).	Adecuación empírica (Richtigkeit): "Las consecuencias de las imágenes (modelos) deben corresponder a las consecuencias de la naturaleza" (Hertz, 1894, p. 1).
Naturaleza	Sintáctica: Validez interna del sistema formal. "La geometría existe como estructura abstracta autónoma" (Hilbert, 1899, §9).	Semántica: Relación modelo-fenómeno. " <i>La corrección empírica es la piedra angular de la física</i> " (Hertz, 1894, p. 25).
Método de validación	Pruebas formales. " <i>La consistencia de la geometría se reduce a la</i>	Verificación experimental. " <i>El modelo debe ser confrontado con mediciones</i> " (Hertz, 1894, p. 2).

	<i>consistencia de la aritmética"</i> (Hilbert, 1899, §32).	
Prioridad Epistemológica	Certeza abstracta. <i>"La consistencia garantiza la existencia de objetos matemáticos"</i> Condición necesaria para la matemática. (Hilbert, 1928, p. 11).	Criterio secundario tras la consistencia: Utilidad predictiva. <i>"La lógica es preliminar; sin adecuación empírica, el modelo es estéril"</i> (Hertz, 1894, p. 28).
Objetivo	Fundamento seguro de la matemática. <i>"Proteger la matemática de paradojas mediante formalización"</i> fundamento seguro del conocimiento abstracto. (Hilbert, 1928, p. 8).	Construcción de modelos predictivos útiles: Construir modelos pragmáticos. <i>"Los modelos son herramientas, no revelaciones de esencias"</i> (Hertz, 1894, p. 29).

Bajo estos contrastes consideramos pertinente el siguiente fragmento en *Vygotsky (Pensamiento y lenguaje, 1934)*:

"Creemos que tanto el desarrollo de la actividad espontánea como el de la no espontánea (del pensamiento sobre la producción de los conceptos), se relacionan y se influyen constantemente. Son partes de un proceso único, el de la evolución de la formación del concepto, que se encuentra afectado por las variaciones externas y las condiciones internas, pero que es esencialmente unitario, y no un conflicto de formas de ideación antagónicas, mutuamente excluyentes."

Hallamos en este fragmento una asociación apropiada sobre la base del contexto de pensamiento del individuo, sobre el *concepto*; un puente epistemológico, una asociación profunda en el aprendizaje desde la relación sintáctica y semántica sobre las concepciones en matemáticas, siendo nuestro escenario aquellos de la geometría. Ambos elementos del *lenguaje* son de vital importancia sobre el desarrollo del conocimiento matemático y por ende científico, a pesar del devenir de los objetivos propios de sus aspiraciones metafísicas. ¿Por qué desde el aprendizaje? Porque de forma deductiva estas concepciones nutren el aparato colectivo del conocimiento, permiten encontrar síntesis sobre la discusión de su desarrollo e implicaciones gracias al papel que corresponde en el lenguaje y por ende expresiones diversas sobre el universo, su concepción y entendimiento, por lo cual se entiende como un ejercicio inmerso dentro de consideraciones culturales.¹³ (Vygotsky, 1934). Un punto válido y potencialmente observable sobre la *mediación semiótica* como proceso mediante el cual los individuos utilizan signos, símbolos y herramientas culturales para construir conocimiento y desarrollar habilidades cognitivas entre los elementos de la abstracción algebraica y la intuición geométrica que puede ser objeto en que los estudiantes desarrollen una comprensión profunda y flexible de las matemáticas y las teorías físicas sobre la naturaleza del universo como una relación de interdependencia.

El concepto de *Campo* es un ejemplo de este aspecto:

1. “La interacción de partículas puede describirse mediante el concepto de *campo de fuerza*. Es decir, en lugar de decir que una partícula actúa sobre otra, podemos decir que la partícula crea un *campo* a su alrededor; una fuerza determinada actúa entonces sobre todas las demás partículas ubicadas en este campo¹⁴ En la mecánica clásica, el campo es

¹³ "Las matemáticas son un producto cultural que se internaliza mediante herramientas simbólicas (lenguaje, gráficos, fórmulas)" (Vygotsky, *Pensamiento y Lenguaje*, 1934). Cap. V

¹⁴ Landau, L. D., & Lifshitz, E. M. (2000). *The classical theory of fields* (4th ed.). Butterworth-Heinemann. Pág. 43.

simplemente una forma de describir el fenómeno físico: la *interacción de partículas*.
(Landau, L. 2000)

2. En la teoría de la relatividad, debido a la velocidad finita de propagación de las interacciones, la situación cambia radicalmente. Las fuerzas que actúan sobre una partícula en un momento dado no están determinadas por su posición en ese mismo instante. Un cambio en la posición de una partícula influye en las demás solo después de transcurrido un cierto intervalo de tiempo. Esto significa que el propio campo adquiere realidad física. No podemos hablar de una interacción directa entre partículas ubicadas a distancia. Las interacciones solo pueden ocurrir en cualquier momento entre puntos vecinos en el espacio (interacción de contacto). Por lo tanto, debemos hablar de la interacción de una partícula con el campo y de la interacción subsiguiente del campo con la segunda partícula” (Landau, L. 2000).

Esta perspectiva moderna se nutre de principales paradigmas de esta *Interacción de partículas* que se sintetizan en el siguiente cuadro grosso modo:

Evolución de las Teorías de Interacción Física¹⁵

Teoría/Período	Mecanismo de Interacción	Limitaciones	Confirmación Experimental
Newtonianismo (s. XVIII)	"Acción a distancia instantánea entre corpúsculos, con fuerza $\propto 1/r^2$ (gravitación y otras)"* [Adapt. de p. 19]	• Omite EM/química/cohesión [T exto fuente, p. 19]	Éxito en astronomía (órbitas planetarias) pero no en

¹⁵ Berkson W., 1981. Las teorías de los campos de fuerza. Desde Faraday hasta Einstein, Alianza Editorial, S. A., Madrid. Introducción, Pág 18.

Llancaqueo, A., Caballero, M. C., & Moreira, M. A. (2003). El concepto de campo en el aprendizaje de la Física y en la investigación en educación en ciencias. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias*, *2*(3), 227-253.

Teoría/Período	Mecanismo de Interacción	Limitaciones	Confirmación Experimental
	<i>"Propagación instantánea de fuerzas"</i>		fenómenos electromagnéticos
Teoría de Campos (Faraday, Maxwell, s. XIX)	<i>"Supera la acción a distancia; campos como entidades físicas reales en el vacío"</i> (Harman, 1990). <i>"Campos como entidades físicas reales en el vacío (no solo matemáticas)¹⁶, con propagación a velocidad finita"</i> [Síntesis de p. 19-20] <i>Ecuaciones de Maxwell: campos vectoriales en espacio euclidiano. Velocidad finita de campos EM (Maxwell)"</i> (Berkson, 1981).	<ul style="list-style-type: none"> • Éter como medio hipotético nunca detectado • Sobre el éter: <i>"No explicaba cohesión"</i> [p. 19] 	Hertz (1887): Ondas EM confirmaron velocidad finita y realidad física de campos [p. 20]
Relatividad (Einstein, s. XX)	<i>"Campos geométricos sin éter; gravedad como curvatura espaciotemporal"</i> [Interpretación. de p. 20-21] <i>"Geometrización de campos gravitatorios; velocidad finita (c) como invariante universal"</i> (Landau & Lifshitz, 1992).	<ul style="list-style-type: none"> • Unifica gravedad, pero no electromagnetismo cuántico Solo a altas energías/velocidades, 	Corrimiento al rojo (1919), ondas gravitacionales (2015)

Estas descripciones contienen información sobre el *estado físico* de un sistema que se define por sus *interacciones* de partículas, sobre sus posiciones en el espacio, su evolución temporal, incluso que se modifican a razón a la evolución teórica de su geometría. Sobre el concepto de *campo* en física, en (Llancaqueo, Caballero & Moreira, 2003) su propuesta sobre la *Teoría de*

¹⁶ Campos como "dispositivos matemáticos" (Laplace, Poisson)

campos conceptuales de Vergnaud establece que el conocimiento se organiza en *campos conceptuales*, conjuntos de situaciones que requieren conceptos, representaciones y operaciones interrelacionadas para su resolución. Allí los conceptos son explicados conformantemente de la siguiente manera:

Concepto como Triplete ($C = \{S, I, R\}$)

- **S (Situaciones):** Fenómenos y problemas físicos que dan sentido al concepto (ej. interacción partícula-campo, flujos en medios continuos).
- **I (Invariantes Operatorios):** Base conceptual (implícita o explícita) para la acción.
 - *Conceptos-en-acción:* Categorías de pensamiento relevantes (ej. posición, carga).
 - *Teoremas-en-acción:* Proposiciones asumidas verdaderas (ej. leyes físicas, propiedades matemáticas).
- **R (Representaciones Simbólicas):** Lenguajes para representar el concepto (ecuaciones, gráficos, diagramas, lenguaje natural).

Esta estrategia pretende reconocer el conjunto de dominio de conocimiento en el desarrollo cognitivo del estudiante, que articulado internamente favorece el aprendizaje del concepto de *campo* en física, visto como “*un concepto abstracto, matemático y contraintuitivo, que requiere integrar múltiples significados físicos y matemáticos*” (Llancaqueo, Caballero & Moreira, 2003)

En relación con el *campo electromagnético* existen algunas dificultades esenciales en su comprensión de forma intuitiva. Estudiantes se enfrentan a desafíos *conceptuales* profundos al

aprender electromagnetismo (EM); La comprensión intuitiva de los *campos* como entidades físicas, en lugar de meras herramientas matemáticas, es escasa entre los estudiantes destacando la desconexión entre teoría y aplicaciones reales, donde introduce entidades "invisibles" como electrones, campos, flujo y potencial, a diferencia de la mecánica, donde los conceptos velocidad, fuerza y partículas macroscópicas son familiares. Particularmente presentan mayor nivel de abstracciones matemáticas en el dominio del cálculo (vectorial primordialmente), con representaciones como campos vectoriales, integrales de superficie y teoremas (p. ej., Gauss o Stokes) que requieren mayor sofisticación matemática¹⁷. Esta introducción acelerada de nuevos conceptos abstractos alejados del pensamiento mecanicista en el currículo tradicional presenta conceptos como carga, fuerza, campo, flujo, ley de Gauss, potencial, corriente, etc., se presentan en rápida sucesión sin suficiente conexión o práctica para discriminar, reducen el EM a algoritmos descontextualizados, donde "los estudiantes resuelven problemas mediante analogías superficiales sin construir modelos mentales coherentes. Esto se agrava al separar comúnmente electrostática de magnetismo, obstaculizando una visión unificada de la teoría electromagnética lo que dificulta en consecuencia la internalización de conceptos como la ley de Ampère-Maxwell. (Chabay, R., & Sherwood, B. 2006).

En (Bollen et al., 2015, p. 2) a través de un instrumento de evaluación en el artículo: "*Students' difficulties with vector calculus in electrodynamics*" creado para establecer las dificultades de los estudiantes con el uso y comprensión del cálculo vectorial en electrodinámica, se evidencian dificultades significativas al aplicar los operadores vectoriales en contextos físicos, especialmente en la interpretación de representaciones gráficas de campos vectoriales incluyendo la desconexión entre matemáticas y física que se acentúa en la enseñanza tradicional por el énfasis y priorización de la manipulación sobre cálculos

¹⁷ Chabay, R., & Sherwood, B. (2006). Restructuring the introductory electricity and magnetism course. *American Journal of Physics*, *74*(4), 329.

algebraicos, pero no sobre el desarrollo de la comprensión conceptual o habilidades para interpretar representaciones gráficas (Singh & Maries, 2013) del gradiente, rotacional y divergencia. Enfatizar en representaciones gráficas y estrategias conceptuales del fenómeno con sus expresiones analíticas pueden contribuir cerrar la brecha en la comprensión estructural de los contenidos.¹⁸

Es notable que interviene de manera directa en la organización del plan de estudios que se ofrece en las universidades de carreras que incluyen espacios académicos de fundamentación que impliquen el aprendizaje del electromagnetismo y por ende la formalización de su corpus a través de los tópicos de matemáticas que estructuran sus saberes (Álgebra lineal, cálculo diferencial, integral y vectorial, ecuaciones diferenciales)

Tradicionalmente, se han empleado conceptos y herramientas propias del cálculo vectorial como fundamento para la descripción de gran cantidad de fenómenos físicos; las leyes del electromagnetismo, la mecánica de fluidos y termodinámica donde los operadores vectoriales son esenciales y de vital importancia para su formulación. Sin embargo, la formulación vectorial, a pesar de ser compacta y enormemente útil para la manipulación algebraica de los conceptos y su empleo en la resolución de problemas, no permite evidenciar directamente el carácter geométrico involucrado en los fenómenos físicos; como lo hicieron los trabajos originales de Gauss o de Maxwell descritos, como se había dicho antes, en notación diferencial.

Así,

“Las formas diferenciales surgen como una herramienta útil ya que permiten asignar a cada una de ellas un tipo de magnitud, además las formas diferenciales vistas como planos e intersecciones de estos mismos tienen correspondencia con la experiencia, pues los planos establecen límites del espacio, sus intersecciones pueden conducir flujos y encerrar regiones del mismo”. [Peña, 2008.]

¹⁸ Bollen, L., van Kampen, P., & De Cock, M. (2015). Students' difficulties with vector calculus in electrodynamics. *Physical Review Special Topics - Physics Education Research*, *11*(1), Article 020129.

Resaltar el análisis a partir de la modelación geométrica propuesta a través de las formas diferenciales pretendería en los aspectos electrodinámicos fortalecer la relación implícita de sus formalizaciones, y sus construcciones geométricas, es decir permitiría construir nociones como la modelación geométrica de las ecuaciones electrodinámicas en dimensiones mayores sin dificultar su modelamiento y compactar y sus definiciones analíticas donde facilitaría su relación con la experiencia sensible de los fenómenos del electromagnetismo.

Antecedentes

En este apartado se realiza una revisión de referencia en el estudio de las formas diferenciales aplicado en distintas áreas de aplicación en física realizadas como trabajos de grado en la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia, que datan de mediados de la década del 2000 hasta el presente. En las siguientes tablas se realiza una síntesis en comparativa sobre sus aportes, ventajas didácticas, limitaciones, y relevancia en la enseñanza.

Aportes en Formas Diferenciales

Autor y Año	Área de aplicación	Aportes clave
Agudelo Jiménez, 2018	Campo gravitacional clásico	1. Analogías históricas: Evolución conceptual (geocentrismo → Newton). 2. Generalización geométrica: Formas diferenciales como extensión del cálculo vectorial. 3. Representación gráfica:

		Tubos/superficies orientadas para campo gravitacional.
Pacheco Sarmiento, 2016	Ecuaciones de continuidad y vorticidad	<p>1. Interpretación gráfica de flujos:</p> <ul style="list-style-type: none"> - 2-formas \equiv flujo másico. - 3-formas \equiv densidad. <p>2. Vorticidad como 2-forma: Representación de rotacional mediante superficies orientadas.</p> <p>3. Teorema de Stokes aplicado: Aspas giratorias para campos de velocidad (1-formas).</p>
Moreno Peña, 2008	Contextualización geométrica (EM)	<p>1. Correspondencia física-geometría.</p> <p>2. Derivada exterior para fuentes.</p>
Torres Herrera, 2008	Leyes de Maxwell	<p>1. Asignación física de formas (0,1,2).</p> <p>2. Derivada exterior unificada.</p> <p>3. Visualización 3D.</p>
Barragán, 2005	Péndulo esférico	<p>1. 2-formas simplécticas.</p> <p>2. "Tornados hamiltonianos".</p> <p>3. Análisis gráfico.</p>

Autor y Año	Ventajas didácticas	Limitaciones
--------------------	----------------------------	---------------------

<p>Agudelo Jiménez, 2018</p>	<p>- Vincula historia y epistemología (evolución de conceptos).</p> <p>- Potencia comprensión espacial mediante superficies orientadas.</p>	<p>- Representación limitada para operadores sin análogo geométrico (ej: rotacional en campos conservativos).</p>
<p>Pacheco Sarmiento, 2016</p>	<p>- Visualización intuitiva de flujos complejos (ej: vórtices toroidales).</p>	<p>- Complejidad en fluidos turbulentos no abordada.</p> <p>- Enfoque en fluidos ideales.</p>
<p>Moreno Peña, 2008</p>	<p>- Supera barreras matemáticas.</p> <p>- Conexión con sentido común.</p> <p>1. Correspondencia física-geometría: Superficies e intersecciones como base de magnitudes físicas (flujos, intensidades).</p> <p>2. Derivada exterior para fuentes: Rotacional (fuentes de circulación) y divergencia (fuentes de flujo).</p> <p>3. Representación dual: Formas diferenciales como alternativa</p>	<p>Necesidad de material didáctico específico (representaciones gráficas).</p> <p>- Abstracción inicial para estudiantes</p> <p>Expresiones analíticas.</p>

	<p>perceptual a vectores (ej: superficies > abstracción).</p>	
Torres Herrera, 2008	<ul style="list-style-type: none"> - Clarifica naturaleza física. - Simplifica ecuaciones. 1. Asignación natural de formas diferenciales a cantidades físicas: <ul style="list-style-type: none"> - 0-formas: escalares. - 1-formas: intensidades. - 2-formas: flujos. 2. Derivada exterior como generalización de grad, div, rot. 3. Visualización 3D de campos (tubos, cajas) 	<p>Formalizaciones. -</p> <p>Oscurecimiento de distinciones físicas en cálculo vectorial.</p> <p>- Requiere base en geometría diferencial.</p>
Barragán, 2005	<ol style="list-style-type: none"> 1. Vinculación de ecuaciones de Hamilton con 2-formas simplécticas. 2. "Tornados hamiltonianos" como curvas paramétricas. 3. Análisis gráfico de sistemas no lineales. 	<ul style="list-style-type: none"> - Limitado a pocos grados de libertad - Dependencia de analogías vectoriales.

Autor y Año	Relevancia para enseñanza
Agudelo Jiménez, 2018	Refuerza relación física-geometría en teorías clásicas, priorizando evolución histórica y representación espacial Redefinición y representación gráfica de campos gravitacionales
Pacheco Sarmiento, 2016	Demuestra versatilidad en sistemas continuos, vinculando matemática avanzada con fenómenos observables (ej: torbellinos).
Moreno Peña, 2008	Cálculo diferencial e integral, relación operadores y geometría. Ofrece ruta para contextualizar electromagnetismo en cursos introductorios, priorizando comprensión fenomenológica.
Torres Herrera, 2008	Criterios para elegir formalismo (Cálculo vectorial vs. Formas diferenciales) en las representaciones geométricas
Barragán, 2005	Puente intuición-abstracción. Tránsito de expresiones de la mecánica clásica al cálculo vectorial. caracterización del movimiento del péndulo esférico a través del análisis de los campos vectoriales. Soluciones numéricas del fenómeno.

Es importante establecer algunos aspectos geométricos de las formas como puntos de encuentro sobre la base de la teoría y campos de aplicación; sobre las 1-formas: En (Pacheco, 2016) Campos de velocidad \equiv Intensidad EM (Torres/Moreno, 2008). Líneas gravitacionales (Agudelo, 2018) Sobre las 2-formas: Flujo másico (Pacheco, 2016) \equiv Flujo magnético (Torres/Moreno, 2008) \equiv Estructura simpléctica (Barragán, 2005). Geometría en tubos o colmena (Agudelo, 2018)

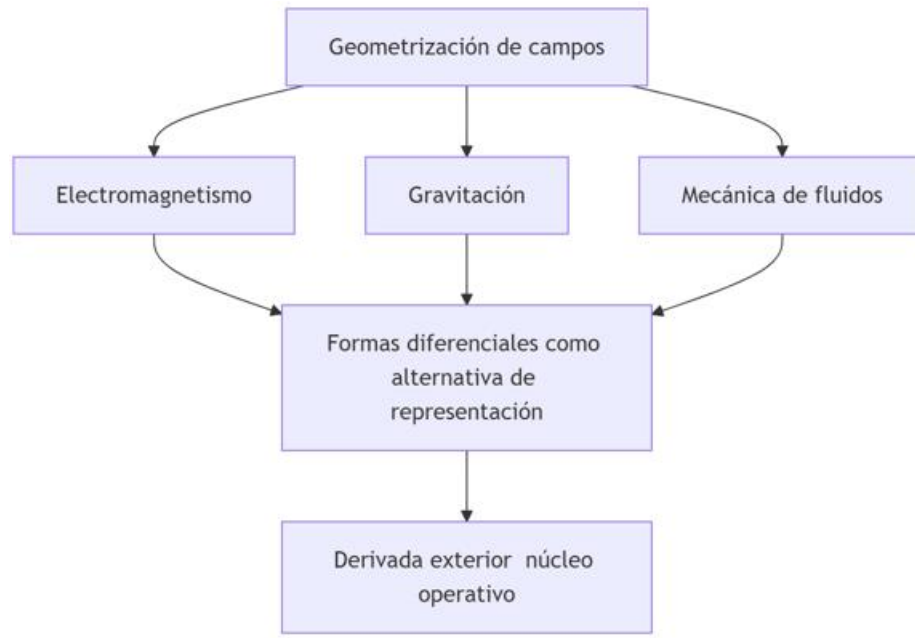
Distintas aportes de la derivada exterior bajo las áreas de aplicación

A modo de resumen estas son los distintos aportes sobre el operador derivada exterior importante en el estudio de las formas diferenciales de acuerdo con las áreas de aplicación identificadas durante esta revisión:

Ecuación física	Formulación con formas diferenciales	Interpretación geométrica
Continuidad (fluidos)	$d(\rho \text{ vol}) = 0$	Conservación flujo en volumen cerrado.
Ley de Gauss (EM)	$d(\Phi) = \rho_v$	Fuentes de flujo eléctrico.
Conservación energía (mecánica)	$d\omega = 0$ (forma simpléctica)	Flujos en espacio de fase sin disipación.

Conclusiones Transversales

El siguiente gráfico conecta por medio de la necesidad de representación alternativa para la geometrización de las áreas de aplicación encontrando en las formas diferenciales una poderosa por su capacidad intuitiva.



Algunos aportes secundarios son sintetizados a manera de listado de acuerdo con un análisis de las conclusiones de los trabajos aquí expuestos.

1. Unificación conceptual

Destacan que las formas diferenciales:

- Clarifican la naturaleza geométrica de cantidades físicas (ej: 1-forma \equiv trabajo, 2-forma \equiv flujo).
- Simplifican operaciones mediante la derivada exterior (reemplaza *grad, div, rot*).
- Electromagnetismo: permite comprender las Fuentes de campo ($d\omega = \text{fuente}$)
- Gravitación: Permite reconocer la conservación de campo ($d(d\omega) = 0 \leftrightarrow \nabla \times g = 0$).

2. Potencial pedagógico

- En electromagnetismo: Superan limitaciones de visualización 3D del cálculo vectorial. (Torres, 2008)
- En mecánica: Permiten analizar sistemas complejos (no lineales) con herramientas gráficas. (Barragán, 2005)

3. Retos

- a. Curva de aprendizaje inicial para estudiantes acostumbrados a vectores. (Peña, 2008)
- b. Necesidad de material didáctico con enfoque geométrico (ej: representaciones de tubos, superficies orientadas). (Peña, 2008)
- c. Curva de aprendizaje: Necesidad de capacitación docente en interpretación geométrica. (Peña, 2008)

Principales antecedentes locales en el aporte a este trabajo

En el estudio de las formas diferenciales localmente en el departamento resaltan los trabajos establecidos Moreno Peña, Raúl Eduardo, titulado “Contextualización de las Ecuaciones de Maxwell empleando formas diferenciales” (2008) trabajo que permitió establecer las necesidades sobre la visualización geométrica intuitiva de los fenómenos electromagnéticos resaltando la formalización de las formas diferenciales de forma pedagógica a través de la relación concepto-fenómeno-lenguaje matemático centrado en la poca comprensión de aspectos epistemológicos e históricos y comprensión de las teorías físicas como una apuesta de contextualización. De John Eduard Barragán “Presentación de la mecánica hamiltoniana con formas diferenciales. estudio de caso: el péndulo esférico.” Establece los cimientos en investigación pedagógica de las formas diferenciales en el departamento de física de la UPN en el nuevo milenio, su propuesta busca establecer geoméricamente y de manera intuitiva las expresiones de la mecánica Hamiltoniana para describir los movimiento del péndulo esférico donde su aporte permite establecer el estudio de este caso en 2 y 3 grados de libertad, facilitando su comprensión dado al alto grado de complejidad que presenta sus expresiones en mecánica analítica, su innovación se centra en las representaciones gráficas.

Con relación a aportes en la enseñanza del electromagnetismo de William Alejandro Prada Coronado. “De la acción a distancia al concepto de campo: una discusión sobre la acción a

distancia en términos del desarrollo de la teoría de campos de Faraday hasta Maxwell” Donde establece un desarrollo histórico-crítico destinado a la enseñanza de la evolución del concepto de campo magnético para su comprensión y reconocimiento en el aula.

De Jhayson Leon Palacio Rangel. “La relación luz, electricidad, magnetismo y la perspectiva de campos” donde se realiza una extensa revisión histórica y conceptual sobre los aportes a la teoría electromagnética desde lo experimental en la formalización del concepto de campo.

Ahora, es necesario pensar ¿Qué herramientas de formalización y geométricas de las formas diferenciales se aplican en la representación del campo electromagnético en la ley de Faraday de inducción electromagnética? ¿Qué aspectos formales y de representación de las formas diferenciales son principales para interpretar su aplicación a elementos del campo electromagnético y contribuir a la interpretación de sus fenómenos?

Objetivo General

1. Aplicar el formalismo de las formas diferenciales para modelar la ley de Faraday y representar gráficamente la inducción electromagnética, con el fin de evidenciar sus relaciones geométricas e identificar su interpretación estructural.

Objetivos Específicos

1. Formular la ley de Faraday en el lenguaje de formas diferenciales estableciendo su equivalencia con las ecuaciones de Maxwell.

2. Diseñar representaciones geométricas que ilustren la estructura matemática del formalismo de formas diferenciales y la apliquen para modelar el fenómeno de inducción electromagnética.

La metodología utilizada para el desarrollo de trabajo es de índole deductiva, principalmente parte de la revisión y análisis bibliográfico de carácter descriptivo-exploratorio estableciendo búsqueda por criterios de selección en bases de datos, bibliotecas físicas y virtuales, repositorios sobre temáticas relacionadas en geometría diferencial, representación geométrica de formas diferenciales y campo electromagnético basado en formas diferenciales. Su organización se basa en realizar un recorrido conceptual que abarque conceptos centrales y la identificación de información no abordada, no profundizada o no existente, para analizar su estado del arte, realizar síntesis de información para la reproducción de conceptos bajo perspectiva personal como recurso de metacognición y comprensión subjetiva. Se pretende realizar una validación sobre las representaciones gráficas que otorga el formalismo de las formas diferenciales, analizando estructuras que se alinean como modelo matemático de representación de la inducción electromagnética, por lo tanto el uso de herramientas de modelación como *Python* y de *visualización como como Office PP* se emplearan para corresponder a la visualización de los elementos descritos formal y analíticamente.

CAPÍTULO 1

Nociones sobre el espacio vectorial y el espacio tangente

Supongamos una curva contenida en un espacio vectorial en \mathbb{R}^2 , descrita como $C \subseteq \mathbb{R}^2$ y p como un punto sobre la curva C donde $p \in C$. El espacio tangente a la curva C en p se representa como $T_p C$ es el conjunto de todos los vectores tangentes a la curva en el punto p en C .

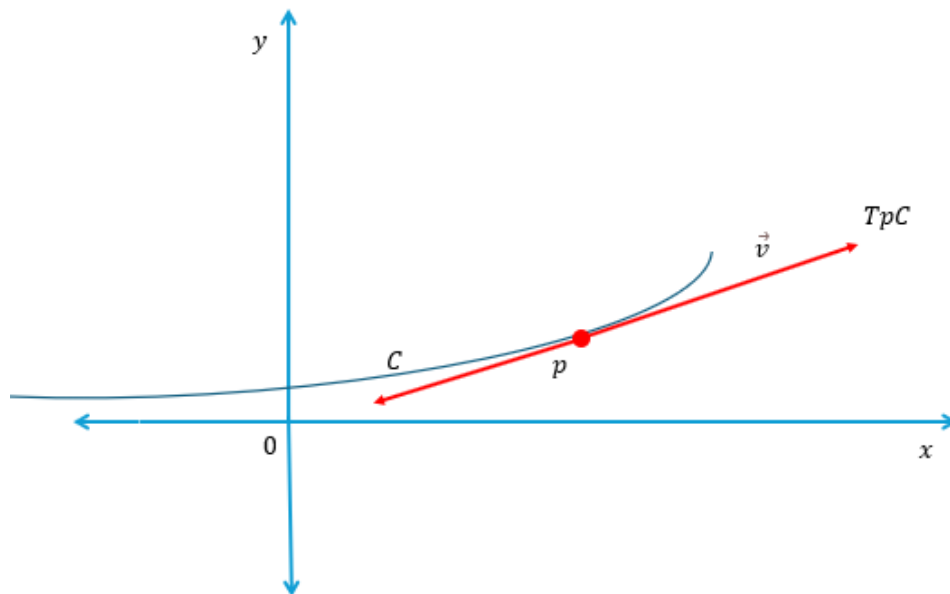


Figura No. 1. Un punto sobre una curva C en un espacio vectorial en \mathbb{R}^2 representa en $T_p C$ el conjunto de todas las rectas tangente a la curva C en p . Creación propia

El lugar geométrico de p en C se halla en un *espacio vectorial* V . Se relaciona con la ubicación relativa de p como un objeto geométrico en referencia de un sistema de coordenadas base donde se aloja y define la curva C . El espacio vectorial V que alberga la localización de la curva produce una definición espacial de los elementos en su interior que satisfacen un conjunto con características propias.

En lo que respecta al alcance de su definición formal, la colección de elementos contenidos en una región S se reúnen en el concepto de *campo* al encontrar particularmente una correspondencia numérica o vectorial sobre los puntos en el espacio de una región delimitada. Para cada punto p en la región S , un campo F es la función $F(p)$ que describe un elemento en p que pertenece al espacio vectorial V – formalmente $F: S \rightarrow V$ – una representación o valor que regresa una cantidad escalar o un conjunto ordenado de escalares que se encuentran en función de su distribución espacial. Aquí resulta importante cuestionarse como se determinan los valores o representaciones de los elementos de S , y en ocasión de entender esta correspondencia, la definición específica del lugar geométrico de un elemento de S es materia de la relación biunívoca¹⁹ de los conjuntos representados por aquellas cantidades escalares ordenadas²⁰ y asociadas al espacio en aspectos dimensionales. El conjunto de los números reales \mathbb{R} permite extender la idea de medición del espacio en tanto conforma una base cuantitativa específica a la distribución espacial; su conexión más común puede hallarse en la interpretación de la representación euclidiana de la recta numérica, elemento de esta asociación que se deriva del sentido de la estructura axiomática²¹ y donde se definen cualidades propias para el conjunto \mathbb{R} que incluye las características de *Cuerpo*²² en matemáticas.

La posibilidad de configuración de una recta real en n disposiciones sobre la región S se define a través de la expresión $\mathbb{L} = \{p + t\vec{v} \mid t \in F\}$ donde t representa un parámetro en la producción de la recta real. Cuando $t = 0$, la función que genera a \mathbb{L} nos devuelve a p como lugar geométrico

¹⁹ Una relación definida punto a punto. Cada elemento del conjunto de los puntos que componen una región espacialmente hablando le corresponde un valor de un conjunto numérico definido. La función definida como campo resume esta relación dando un número único a un punto único en el espacio definido.

²⁰ Equivalente a números que en secuencia ordenada corresponden a segmentos del espacio también ordenados.

²¹ Así como el conjunto de los números reales, responden a un conjunto de parámetros para estructurar su composición a través de la coherencia y consistencia de sus operaciones internas.

²² Define las operaciones suma y multiplicación para un conjunto de números donde se satisfacen propiedades bien definidas.

de referencia u origen comúnmente asociado a cero. En cuanto a los valores de t distintos de cero estos permiten extender esta definición a la secuencia ordenada de puntos conformantes de la recta que irán determinando su dirección a través del carácter²³ del vector v . Implica entonces que para cada punto p conformante inscrito en la recta real \mathbb{L} , su dirección permanece constante, así como la asociación de cada punto a una posición, que está en función de su distancia, con la magnitud de \vec{v} también constante, de aquí encontramos comúnmente a t bajo el concepto de pendiente, aclarando que $\vec{v}, t, p \in \mathbb{R}$.

Sin embargo, es necesario mencionar la necesidad de una estructura en la región S que proporcione un sentido de referencia. Supongamos un conjunto de rectas cualesquiera en S que se generan según la anterior expresión para \mathbb{L} , describirán distintas configuraciones distribuidas en el espacio y cada una presentará una distinción de acuerdo con la variación de p como origen, \vec{v} como vector director de la recta y t como parámetro que define la longitud de la recta y el valor numérico que otorga en cada punto o posición sobre ella. Algunas rectas se intersecan, otras nunca se encontrarán y algunas otras tendrán algún tipo de equivalencia entre sí. Para nuestro propósito es importante encontrar aquellas rectas que permiten generar expresiones que puedan describir cada recta en este conjunto de manera particular, así cada recta es correspondiente a una expresión relativa dada por estas *rectas generadoras* con estas características determinadas que se desarrollan a través de un elemento algebraico denominado como *base*. Una base es conjunto linealmente independiente que se genera a través de un conjunto de vectores de magnitud equivalente a la unidad y se presenta entre ellos una relación de ortonormalidad. Un vector unitario²⁴ representa la unidad vectorial primaria más pequeña en

²³ Definido por su magnitud (longitud) y dirección en el espacio.

²⁴ De magnitud 1.

el sentido de longitud, su replicación es el resultado de extender la existencia de vectores unitarios similares al vector unitario original, que al posicionarles uno tras otro de manera secuencial produce y componen su extensión en el espacio como conjunto, en un sentido general, es consecuencia de su definición axiomática del producto de un vector por un escalar, donde el escalar representa la cantidad de veces que se replicará el vector unitario original resaltando que todos los vectores similares generados comparten entre sí las mismas cualidades de magnitud y dirección.

Por su definición, dado un vector unitario e^1 , el coeficiente c_1 representa un valor dentro del conjunto de los números reales que describe la magnitud resultante de e^1 mediante la siguiente relación $c_1 e^1 = e_1^1 + e_2^1 + \dots + e_n^1$ así la suma de n veces e^1 resulta en la cantidad que representa c_1 como escalar de acuerdo con cuanto se extiende el vector unitario e^1 . En $c_1 e^1$ que se alinea en términos de \mathbb{L} toma sentido ubicar elementos con dimensión cero como puntos, donde se define un número correspondiente en su asociación al espacio así mismo su dimensión será 1.

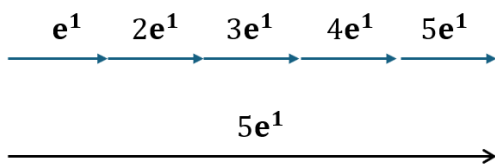


Figura 2. e^1 es un vector unitario (de magnitud 1) generador de la recta a través de un escalar. Dado que describe elementos en una dimensión genera por sí un número correspondiente a un punto dentro de la recta. *Creación propia*

Incluiremos para fines de su comprensión aquel término ahora representado como $c_2 e^2$. c_2 es un coeficiente exclusivo y correspondiente al vector e^2 que así mismo permite su extensión en el espacio.

Es necesario comprender la relación entre estos términos en lo que respecta a sus implicaciones espaciales. El vector e^2 presenta una dirección diferente en proyección del vector e^1 ,

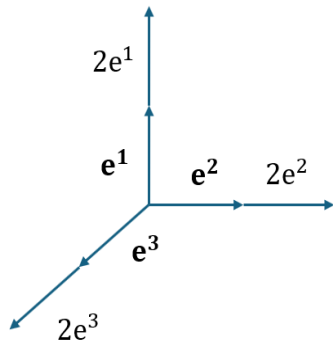


Figura 3. Donde e^1, e^2, e^3 , son vectores unitarios generadores de la base vectorial con un origen común en O que representan la idea de dimensión relacionándose directamente con el número de vectores que generan la base. *Creación propia*

geométricamente se puede generar una independencia entre estos vectores haciéndolos perpendiculares entre sí, el producto punto de la relación de estos vectores nos regresa como valor cero, siendo $\langle e^1, e^2 \rangle = 0$ formalmente²⁵.

Preliminarmente e^1 y e^2 nos genera un plano ante cualquier configuración aleatoria.

Establecer la condición de perpendicularidad limita a estos dos vectores a compartir un origen común—como cualquier par de rectas que se intersecan en un punto— pero implica que no habrá expresiones relativas entre ellos cuando se extiendan en el espacio, es decir, no existirá un equivalente a la recta generada por e^1 que se pueda expresar en términos de e^2 y viceversa, puntualmente este par de vectores solamente encontrarán expresiones equivalentes de las cuales autogeneran estos vectores por sí mismos.

Cada una de las rectas generadas por e^1 y e^2 precisa una imagen correspondiente para un punto p en el espacio que no se halla ciertamente sobre ellas, que no pertenece específicamente a la métrica de una recta exclusivamente, sino es motivo de la descripción simultánea de ambas. En extenso la noción de coordenada incluye la correspondencia posición-número abordada previamente y establece una relación de la forma (a, b) donde $a, b \in \mathbb{R}$, así p asociado a una región del espacio nos retorna un par ordenado que especifica la región del espacio en la que localiza, brindando un significado al concepto de *campo* también anteriormente planteado. e^1 y e^2 nos permite implícitamente afirmar la construcción de un espacio en 2 dimensiones que nos

²⁵ Una expresión derivada resulta de $\|e^1\| \|e^2\| \cos \varphi = 0$, donde se cumple esta relación cuando $\varphi = \pi/2$

entrega 2 números asociados a posiciones específicas en regiones del espacio gracias a una métrica o herramienta de medición construida por estos vectores que denominamos base.

Extendiendo las consideraciones acerca de aquellos vectores linealmente independientes, consideremos a \mathbb{R} como el conjunto de los números reales que definen los coeficientes como $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ tal que $C = \{c_1, c_2, c_3, \dots, c_n \in \mathbb{R}\}$ y sea \mathbb{R}^m el conjunto de los vectores unitarios que conforman la base vectorial con $e = \{e^1, e^2, e^3, \dots, e^m \in \mathbb{R}\}$. Cada miembro de C —con n miembros— siendo números reales que multiplican a cada miembro de e , vectores unitarios —con m miembros— que conforman la base, únicamente donde se cumpla que $n = m$, ofrece así de acuerdo con esto, que c_1e^1 tiene a $n = 1$ y $m = 1$, c_2e^2 tiene a $n = 2$ y $m = 2$, y así sucesivamente. Cada uno de estos coeficientes opera exclusivamente con un vector unitario de acuerdo con la relación anteriormente presentada, por lo cual c_1e^2, c_2e^3, c_3e^2 por ejemplo carecen de sentido de operabilidad y no permiten escalar²⁶ un término particular en la expresión. Se considera así un conjunto de vectores linealmente independientes cuando:

$$c_1e^1 + c_2e^2 + c_3e^3 + \dots + c_n e^n = 0, \text{ donde } c_1, c_2, c_3, \dots, c_n = 0$$

Presenta la *combinación lineal* de una manera algebraica. De lo anterior que un conjunto de vectores sea linealmente independiente significa que no existe una combinación de vectores base multiplicados por su correspondiente coeficiente que exprese algún miembro contenido de esta combinación. Así no existe una combinación del tipo de la expresión que pueda expresar a c_1e^1 como una combinación lineal de $c_2e^2 + c_3e^3$ o c_2e^2 como resultado de la combinación lineal de $c_1e^1 + c_3e^3$, indica entonces que son elementos únicos y no hay una expresión de equivalencia

²⁶ Ampliar o reducir un termino

en términos de los otros vectores que conformen algún término en particular de esta combinación.

Cualquier coeficiente distinto de cero, $c \neq 0$, establece un término de un vector que existe y se extiende en la dirección del vector unitario. A modo de ejemplo tomaremos la combinación lineal para el vector tridimensional $\vec{v} = 3e^1 + 4e^2 + e^3$ donde nos indica que el vector e^1 se extiende 3 veces, el vector e^2 se extiende 4 veces y finalmente el vector e^3 con magnitud 1, recordando que estos vectores son perpendiculares entre sí y describen distintas direcciones. De lo anterior se entiende que estos vectores unitarios se definen como componentes del vector \vec{v} , y en general cualquier vector en el espacio puede ser expresado en términos de estos vectores componentes que generan una base coherente que permite esta equivalencia.

Generalmente se detalla una expresión para la combinación lineal que expresa cualquier vector en el espacio de acuerdo con:

$$\vec{v} = \sum_{n,m=1}^k c_n e^m \neq 0$$

Dado que se establece que $n = m$, abreviaremos esta definición reescribiendo esta igualdad como $n = m = i$. Así,

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^k c_i e^i \neq 0$$

Donde el término k definido como el límite de la sumatoria representa la dimensión de los vectores que es igual o menor a la cantidad de vectores que determinan la dimensión de la base vectorial.

En este punto hemos caracterizado una conexión coherente entre la distribución espacial de una región, una parametrización lógica del espacio, su magnitud, y los objetos geométricos que podrían describirse a partir de estas estructuras, agruparemos todo lo descrito hasta aquí en el concepto de *espacio vectorial*.

En un *espacio vectorial* estructuralmente se producen relaciones entre los elementos²⁷ asociados a un conjunto que se ciñen a condiciones fundamentales que norman su operabilidad. La adición y el producto por un escalar son dos operaciones centrales dentro del cuerpo de cualquier conjunto numérico que permiten extender el significado de la interacción de sus elementos de manera derivada en imágenes que dan cuenta de su lugar geométrico en el espacio básicamente gracias al alcance obtenido por su operabilidad.

En la expresión ordenada $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ de forma concisa se expone la conformación de un espacio vectorial, donde las definiciones desarrolladas durante esta construcción conceptual se encuentran alineadas, conexas y constituidas con los parámetros propios que permiten su existencia desde la estructura axiomática. Para dar orden a las ideas planteadas se mencionan a modo de exposición aquellos parámetros llamados *axiomas* que sustentan la existencia de un *cuerpo* de acuerdo con la teoría de grupos y que se extienden a la definición formal de un *espacio vectorial*.

Sean los elementos u, v y w que pertenecen al conjunto de los números reales \mathbb{R} , para un espacio vectorial V se definen los siguientes axiomas²⁸:

²⁷ Principalmente vectores como elementos que caracterizan un espacio vectorial. Aunque se incluyen polinomios, funciones y otras estructuras que permiten describirse punto a punto en un espacio vectorial.

²⁸ Grossman, S. I. y Flores Godoy, J. J. (2012). Algebra lineal (7a ed.). McGraw-Hill.

Axiomas: Definición de un grupo Abeliano²⁹, suma como operación interna

1. Si $u \in V$ y $v \in V$ entonces $u + v \in V$
2. Para todo u, v, w en V entonces $(u + v) + w = u + (v + w) = (u + w) + v$
3. Existe un conjunto vacío 0 tal que para todo $u \in V$, $u + 0 = 0 + u = u$
4. Si $u \in V$ existe un elemento $-u \in V$ tal que $u + (-u) = 0$
5. Si u y $v \in V$ entonces $u + v = v + u$

Si α y β son escalares $\in V$ entonces:

Axiomas: Definición de interacción escalares- vector, multiplicación por un escalar como operación externa.

6. Si $u \in V$ y α es un escalar, entonces $\alpha u \in V$
7. Si u y $v \in V$ y α es un escalar, entonces $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$
8. Si $u \in V$ y α y β son escalares, entonces $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$
9. Si $u \in V$ y α y β son escalares entonces $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$
10. Para cada elemento $u \in V$, entonces $1u = u$

1.1 Espacio tangente³⁰

²⁹ Aquí se define la existencia de operaciones binarias que satisfacen la conmutatividad entre los elementos de un espacio vectorial como propiedad.

³⁰ Este capítulo se basa bajo los desarrollos establecidos en D. Bachman, A Geometric Approach to Differential Forms. Springer Science Business Media, LLC 2012. Cáp 3 Forms. Aunque los desarrollos aquí presentados son una propuesta del autor basado en el movimiento circular uniforme.

Las estructuras algebraicas se amplían, una perspectiva geométrica nos conduce hacia posibilidades que brindan los espacios vectoriales, la conexión es una característica crucial en la interpretación de los elementos geométricos y en su interior que permite describir la extensa variedad de expresiones. *La definición de una función, descrita geoméricamente en un espacio vectorial es la extensión de una expresión algebraica dotada de una identidad espacial.*

Consideremos el ejemplo de una partícula que describe una trayectoria circular en distintas posiciones alrededor de un punto fijo en O como el centro de la circunferencia. Cada posición descrita por esta partícula en la trayectoria puede ser referenciada a partir de un vector de posición que se extiende desde el centro en O hasta la posición de la partícula en la trayectoria, así el desplazamiento³¹ de esta partícula es el resultado de la diferencia de dos vectores de posición distintos de acuerdo con $\vec{\Delta r} = \vec{r}_f - \vec{r}_o$. Cada posición de esta partícula está asociada con un tiempo también distinto que es conexo con los instantes en que inicia y finaliza su medición para un observador en O de acuerdo con $\Delta t = t_f - t_o$. Hablaremos de la razón del desplazamiento en un intervalo de tiempo como la *velocidad media* de la partícula de acuerdo con:

$$\bar{v} = \frac{\vec{r}_f - \vec{r}_o}{t_f - t_o} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

³¹ Dado que este movimiento se establece en un plano, la posición de esta partícula se especifica con un par ordenado (x, y) números generados por su imagen en las rectas también generadas por los vectores base que permiten especificar su lugar geométrico en el espacio-que se denominará $\mathcal{F}(x, y)$ – entonces aquel vector de desplazamiento resultante es producto de la diferencia de sus posibles posiciones en la trayectoria.

Encontramos una recta que pasa por la posición inicial y final de esta trayectoria medida temporalmente que se presenta como una *razón de cambio*, en geometría euclidiana puede ser relacionada como la *recta secante* que corta a la curva en estas dos posiciones.

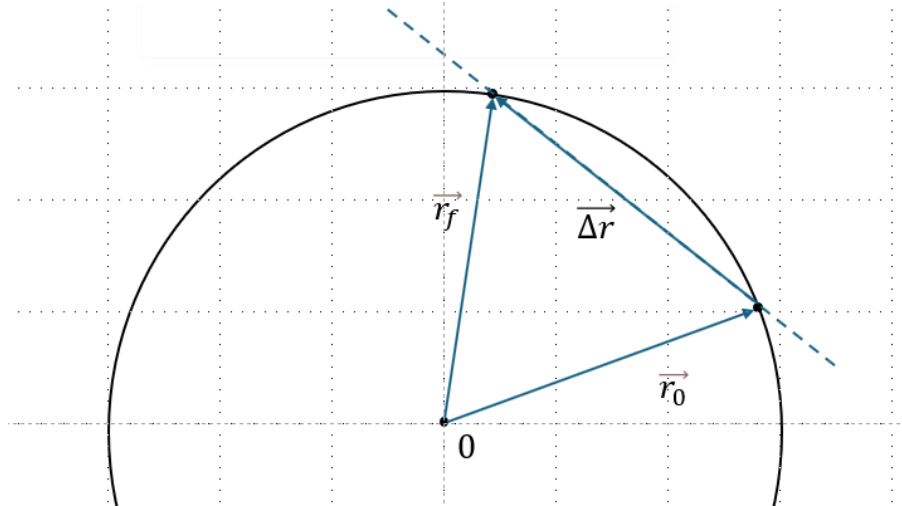


Figura No. 4. De la línea secante que une dos puntos de una circunferencia, La noción aquí es establecida como el vector desplazamiento $\vec{\Delta r}$ que interseca los puntos señalados sobre la circunferencia por los vectores posición \vec{r}_0 y \vec{r}_f . Creación propia

Cada vez que estas posiciones se acercan nuevas rectas secantes se producen introduciendo nuevas razones de cambio conocidas comúnmente como *pendiente*. Cuando estas posiciones se acercan tanto la una a la otra como espacialmente sea posible, nos regresará instantes de tiempo también muy cercanos tanto para tender en su diferencia a cero, siendo un valor límite cuando $t_o \rightarrow t_f$

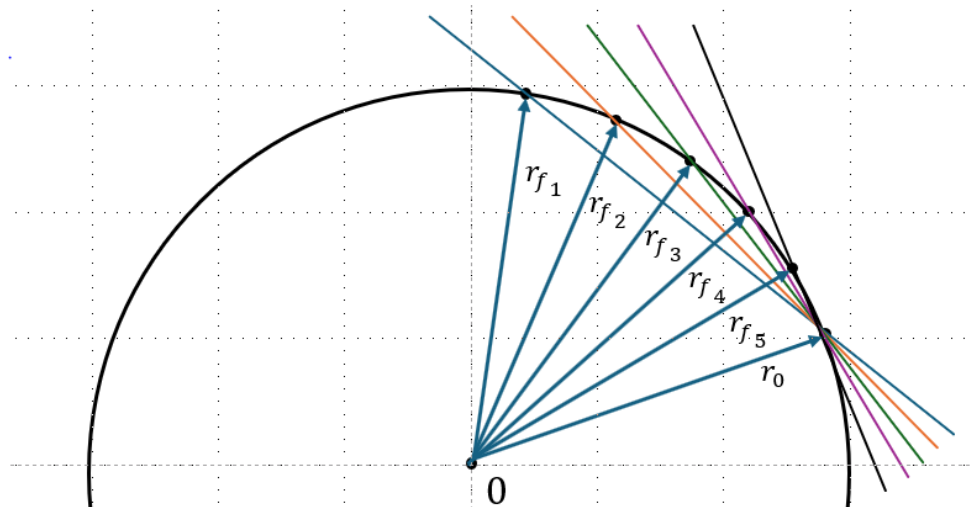


Figura No. 5. De las distintas posiciones marcadas por los vectores posición desde el origen 0 en la circunferencia, se establecen así las distintas rectas secantes que definen la diferencias espaciales entre posiciones. Creación propia

De este modo la expresión para la velocidad instantánea de esta partícula se presenta como:

$$\vec{v} = \lim_{t_o \rightarrow t_f} \frac{\vec{r}_f - \vec{r}_0}{t_f - t_o}$$

Reescribiendo esta expresión en equivalencia

$$\vec{v} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

De este modo habremos conseguido la expresión analítica de una pendiente especial que se denomina *recta tangente* a esa posición correspondiente al punto p que pertenece a la trayectoria descrita como una curva, conocida como *derivada* de esa curva C en ese punto p . De esta manera la expresión para la velocidad de la partícula se puede escribir como:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Para cada punto de la trayectoria es posible asociar una recta tangente que permite calcular la velocidad de la partícula, encontraremos así un conjunto de rectas tangentes asociadas a cada

punto dentro de la curva para el movimiento de la partícula, de este modo se asocia a este espacio un campo de rectas tangentes que describen las distintas velocidades que puede tomar la partícula en su movimiento, así un campo de velocidades que se describen en dirección de x y y en el punto p de la curva C con trayectoria circular tomando como referencia un espacio vectorial que realice mediciones en dos dimensiones que llamaremos \mathbb{R}^2 .

$$v = \frac{dr(\vec{x}, \vec{y})}{dt}$$

Dado que la variación en r se evalúa temporalmente, el objetivo de evaluar r espacialmente en términos de x y y nos permite reescribir la expresión en términos parciales de acuerdo con la regla de la cadena,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

En coordenadas rectangulares, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la magnitud del vector posición desde su centro en el origen con trayectoria circular. Su solución nos lleva a la expresión,

$$dr = \frac{x}{r} \frac{dx}{dt} + \frac{y}{r} \frac{dy}{dt}$$

De este resultado obtenemos una combinación lineal para la velocidad en cualquier punto de la curva C tal que $\frac{dx}{dt}$ y $\frac{dy}{dt}$ se establecen como los vectores base de ese nuevo espacio vectorial

denominado como *espacio tangente*. Tenemos entonces que $\frac{x}{r}$ y $\frac{y}{r}$ son coeficientes distintos de cero vistos como pendientes del campo de velocidades instantáneas en dirección x y y .

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$$

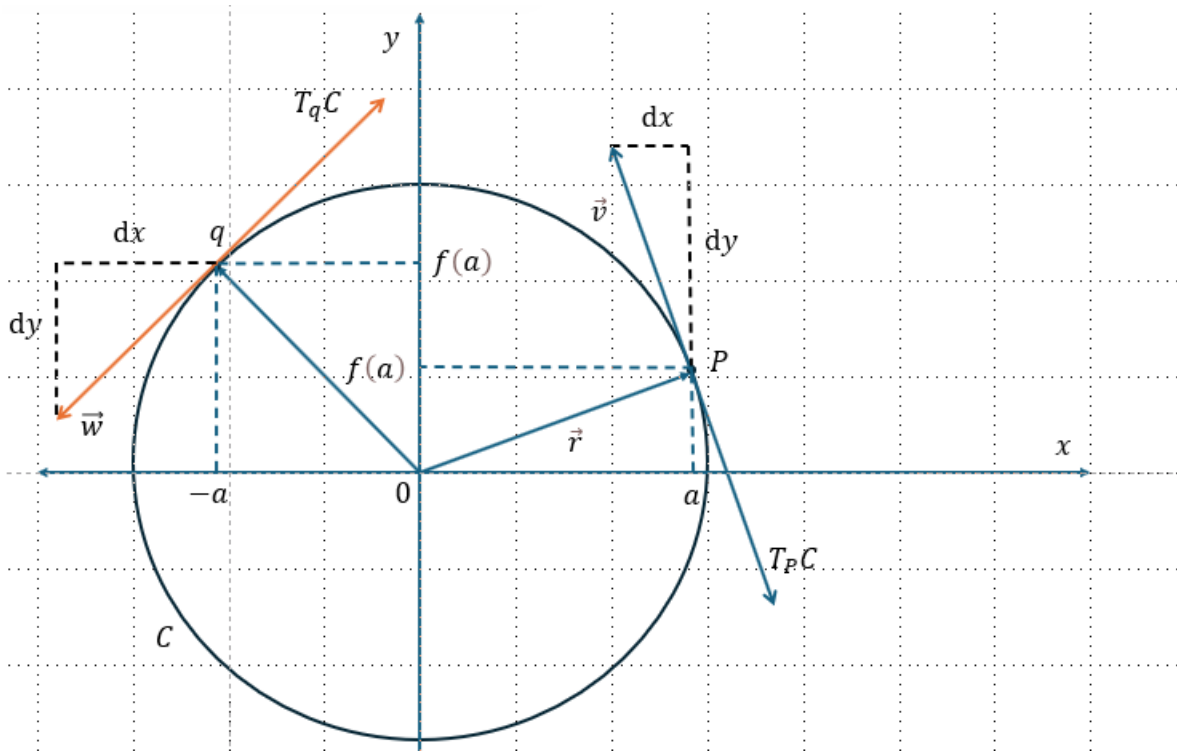


Figura No. 6. De las rectas tangentes para los puntos p y q en la curva $C = r^2 = x^2 + y^2$ que describen los espacios tangentes $T_p C$ y $T_q C$ siendo dx y dy los vectores bases correspondientes a estos espacios tangentes. $T_p C$ sobre la curva C , p con coordenadas $p = (a, \mathcal{F}(a))$ donde se encuentra el espacio tangente a la curva en p . Creación propia

Particularmente asignaremos un valor a cada pendiente de acuerdo con:

$$\frac{x}{r} = a, \quad \frac{y}{r} = b$$

Así nos permite establecer una función de la velocidad en términos del espacio tangente como

$$\omega = adx + bdy$$

Esta función nos permite asignar valores muy específicos y en proyección nos permite *medir*

Obtenemos así una función lineal que permite determinar cualquier elemento en el espacio tangente conformado por dx y dy como un subconjunto del espacio vectorial V , donde $T_p C \subset V$ donde $T_p C$ es conexo y se rige por las propiedades axiomáticas y de conformación del espacio vectorial V que lo contiene.

Extendiendo la definición establecida en *número de la ecuación para combinación lineal* se presenta de forma general la función que representa cualquier elemento definido dentro del espacio vectorial tangente de acuerdo con,

$$\omega = \sum_{i=1}^k f_i dx_i \neq 0$$

Siendo una combinación lineal donde $\{a, b, \dots, i\}$ son escalares o funciones suaves³² diferentes de cero asociadas a los vectores base $\{dx_1, dx_2, \dots, dx_i\}$

Para el espacio vectorial V con origen en O el sistema de coordenadas 2-dimensional que especifica la posición de la partícula sobre la curva C en un instante de tiempo es:

$$(x, y) : C \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y)(p) = (x(p), y(p))$$

³² Smooth function originalmente en inglés, su traducción se refiere a esas funciones que guardan las características de ser diferenciables en cualquier punto sobre su dominio, admiten derivadas de orden superior (diferenciables infinitamente) y permanecen continuas independiente de su diferenciación. En contraste comúnmente se asocian gráficamente a aquellas funciones que no se representan con picos.

Entiéndase como una función que retorna un par ordenado (x, y) a un punto p evaluado de la curva C descrita en un plano³³ en \mathbb{R}^2 , así para p se produce una imagen correspondiente a una posición en la recta x asociada con un número y simultáneamente una imagen correspondiente a una posición en la recta y asociada con otro número.

A raíz de la construcción del espacio tangente sobre el punto p , el sistema de coordenadas que especifica la partícula espacialmente está dada por la función:

$$\langle dx, dy \rangle : T_p C \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \langle dx, dy \rangle(\vec{v}) = \langle dx(\vec{v}), dy(\vec{v}) \rangle$$

Estas funciones anteriormente descritas se conocen comúnmente como *funciones de mapeo* en tanto su referencia esta netamente a otorgar valores a cada punto descrito en el espacio produciendo así un campo escalar o en su defecto un campo vectorial.

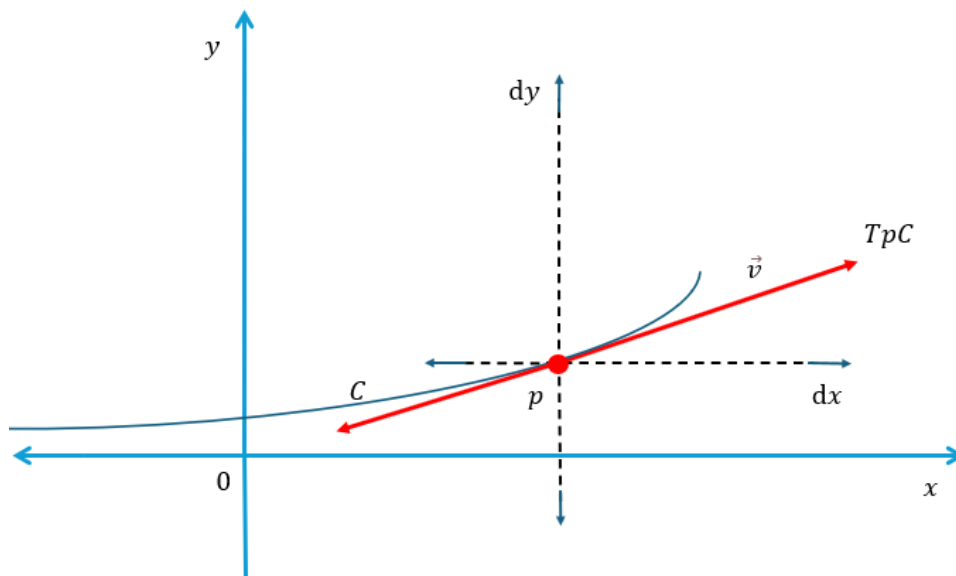


Figura 7 - Espacio Vectorial en R^2 con vectores base (x, y) que contiene el subespacio vectorial TpR^2 con vectores base $\langle dx, dy \rangle$ donde el vector \vec{v} se considera en las coordenadas $\langle dx, dy \rangle_{(x,y)}$ con referencia al punto p . Creación propia

³³ Creado por los vectores base \hat{i}, \hat{j} que al escalarse conforman el espacio vectorial V . Su escalación resulta en las rectas x, y que conforman un espacio vectorial de 2 dimensiones.

$\langle dx, dy \rangle(\vec{v})$ es entonces el *producto escalar* entre un vector \vec{v} definido en p y la base ortonormal $\langle dx, dy \rangle$ del espacio tangente $T_p C$ en \mathbb{R}^2 , su representación puede presentarse como el producto de las matrices de vectores fila y vectores columna de la forma $(a, b) \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$ donde los términos dx, dy del vector columna son conocidos como *covectores*.

Un *covector* en un espacio vectorial V genera la medición lineal de un vector de forma que es \vec{v} como *covector* es quien mide la longitud de la proyección del vector \vec{u} . El vector \vec{u} sobre \vec{v} cómo se ilustra a continuación.

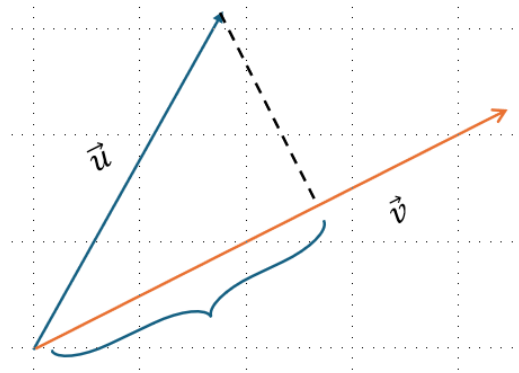


Figura No. 8. De la medición generada por el covector \vec{v} cuando el vector \vec{u} se proyecta sobre él. Creación propia

es en efecto una función lineal, del mismo modo que toma un vector y produce un número,

Así la función $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}$ representa de manera análoga lo que la función lineal ω corresponde al espacio tangente $\omega: T_p C \rightarrow \mathbb{R}$. De acuerdo con esto la expresión que describe el producto escalar o punto entre vectores a través de la función lineal φ es:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n u_i v_i$$

Similar a la expresión,

$$\omega = \sum_{i=1}^k f_i dx_i$$

Que define la función lineal ω en el espacio tangente. Siendo también el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de los elementos pertenecientes a V que conforman un espacio vectorial con respecto a un espacio vectorial original.³⁴

Para visualizar estos *covectores* como función de mapeo, tomaremos la ecuación $\omega = adx + bdy$ y como ejemplo establecemos a $a = 3$ y $b = 2$ siendo $\omega = 3dx + 2dy$, así:

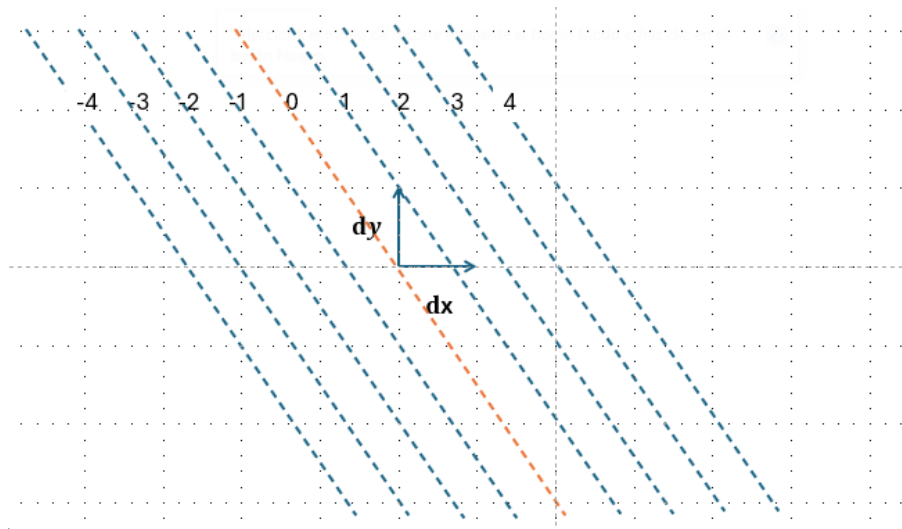


Figura No. 9. – De la representación de los diferentes valores para ω en el plano $dx - dy$ definidos como covectores, siendo una función lineal en el espacio tangente $T_p C$. Creación propia

Donde ω toma los siguientes valores:

$$-3 = 3dx + 2dy$$

$$0 = 3dx + 2dy$$

$$-2 = 3dx + 2dy$$

$$1 = 3dx + 2dy$$

$$-1 = 3dx + 2dy$$

$$2 = 3dx + 2dy$$

Es necesario resaltar que ω puede tomar valores para los intervalos aún más pequeños representados por las líneas punteadas, el conjunto descrito en el espacio a través de estas funciones crea planos orientados llamados también *1-formas*

CAPÍTULO 2

Formas diferenciales

2.1 1-Formas

La función lineal $\omega(\langle dx, dy \rangle) = 3dx + 2dy$ puede ser evaluada brindando valores a dx y dy así $\omega(\langle 3, -4 \rangle) = 3(3) + 2(-4) = 1$. El producto escalar es también visualizado como la proyección del vector v sobre ω . De acuerdo con esto:

$$\omega(\langle dx, dy \rangle) = adx + bdy = \|3,2\| \text{Proj}_{(3,2)}(3, -4)$$

Donde una 1-forma ω es un múltiplo de la proyección escalar sobre una recta. Otra interpretación nos lleva a afirmar que la evaluación de una 1-forma sobre el vector \vec{v} es también la proyección de este vector $\vec{v}(3,2)$ sobre cada eje coordenado dx y dy respectivamente, escalado por una constante y sumado posteriormente como se define en términos de la combinación final que la define. La formación de los planos ω se encuentra en el

espacio dual del espacio tangente $T_p C$ asociado con el espacio cotangente donde $\omega \in (T_p C)^*$ siendo $(*)$ el símbolo que designa al espacio dual. Para estos efectos representamos el dual del espacio vectorial V como V^*

Para $\vec{v}(3,2)$ descrito en el espacio tangente $T_p C$, el vector \vec{v} atraviesa 3 planos correspondientes que se producen en el eje coordenado dx , del mismo modo atraviesa respectivamente 2 planos producidos en el eje coordenado dy .

De acuerdo con la expresión $\omega = 3dx + 2dy$ en esta 1-forma encontramos una combinación lineal equivalente que está alineada al principio de superposición. La representación aquí desarrollada pretende ilustrar la descomposición en \mathbb{R}^3 de la función lineal ω , que, aunque realmente son superficies que se extienden de manera infinita espacialmente, para fines de su comprensión se presentan como secciones de plano que son descritas en el plano tangente.

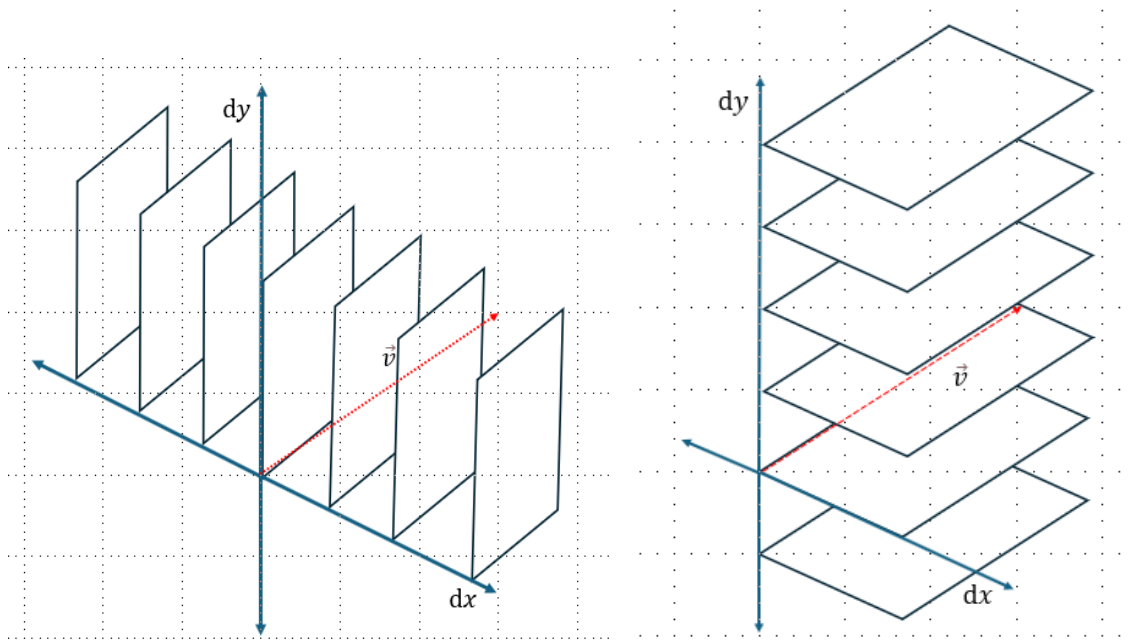


Figura No. 10 – De la composición de las superficies generadas en el sentido dx y dy atravesadas por el vector \vec{v} que define la función lineal $\omega = 3dx + 2dy$. Creación propia

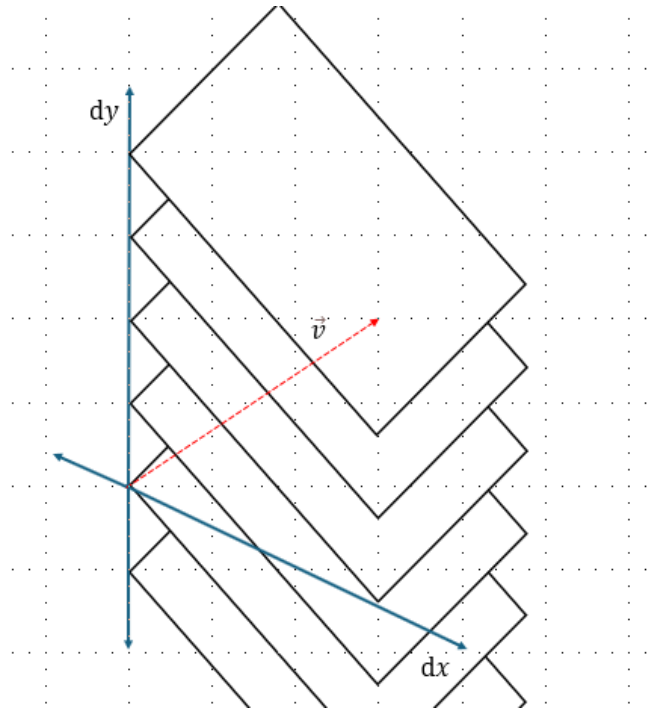


Figura No. 11- De la composición de los planos generados en el sentido dx y dy respectivamente. La superposición de estas superficies generadas por la función lineal ω define una nueva orientación sin modificar las características del vector \vec{v} que continua “perforando” la misma cantidad de secciones de planos orientadas en comparación de su descomposición. Creación propia

En esta oportunidad a y b han sido abordados a manera de ejemplo como escalares, estos también pueden entenderse como funciones, de modo que la expresión $\omega = f dx + g dx$ donde f y g son funciones, puede extender las consideraciones sobre las 1-formas, donde su representación espacial como el espaciamiento de las superficies orientadas dependen esencialmente de la base usada definiendo a la función lineal ω , en consecuencia especifican familias de superficies (formas) conforme la disposición y estructura de la base lo restringe.

$$\sum_{i=1}^k f_i dx^i = \omega(\langle dx^1, dx^2, \dots, dx^n \rangle) = f_1 dx^1 + f_2 dx^2 + \dots + f_n dx^n$$

Donde,

$$\omega: T_p \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Indicando que es una función lineal en el espacio tangente en \mathbb{R}^n que recibe como entradas, vectores y devuelve a su vez escalares que pertenecen al conjunto de los números reales \mathbb{R}

2.2 Producto de 1-Formas³⁵

Anteriormente se ha descrito cómo la combinación lineal que compone a la función ω puede ser vista como sumas de 1-Formas que en correspondencia se establecen para cada función, las representan y se ordenan a través de las familias de superficies. Para nuestros propósitos se aborda consecuentemente la operación respecto al producto entre formas diferenciales en el espacio vectorial tangente $T_p C$.

Para las 1-Formas ω_1 y ω_2 existe vectores asociados \vec{v}_1 y $\vec{v}_2 \in T_p \mathbb{R}^2$ respectivamente, sin embargo, el proceso de obtener el producto entre estas formas se desarrolla a través del *producto exterior* conocido también como *producto cuña*³⁶. Específicamente ω_1 y ω_2 evalúan a \vec{v}_1 y \vec{v}_2 , esta evaluación es definida por la expresión $\omega_1 \wedge \omega_2 (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ así que cada una de estas funciones actúan particularmente en cada uno de los vectores, por lo tanto $\omega_1(\vec{v}_1)$, $\omega_2(\vec{v}_1)$ y consecuentemente $\omega_1(\vec{v}_2)$, $\omega_2(\vec{v}_2)$ obtienen un número o escalar por cada evaluación. Su representación geométrica es la producción de nuevos vectores en un espacio de coordenadas

³⁵ Michael Penn (2020) Differential Forms | Introduction and the Tangent Space.

³⁶ “Wedge product” originalmente en inglés

donde ω_1 y ω_2 serán los nuevos ejes coordenados produciendo así un nuevo plano con las mismas propiedades del subespacio donde los vectores \vec{v}_1 y \vec{v}_2 se originan inicialmente.

En relación con los nuevos vectores estos tendrán como componentes en el plano $\omega_1 - \omega_2$:

- I. $\langle \omega_1(\vec{v}_1), \omega_2(\vec{v}_1) \rangle$ para \vec{v}_1
- II. $\langle \omega_1(\vec{v}_2), \omega_2(\vec{v}_2) \rangle$ para \vec{v}_2

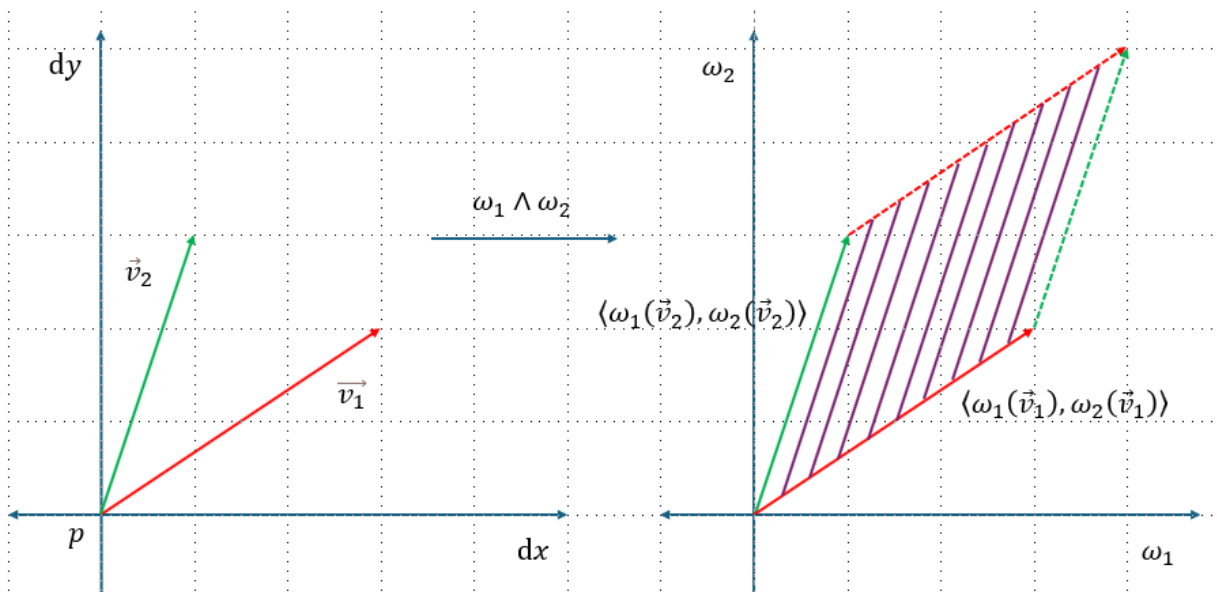


Figura 12. De la existencia de 2 vectores \vec{v}_1 y \vec{v}_2 , y su definición en el espacio de las formas. Representa el producto de los vectores definidos en el espacio tangente. Su relación con el producto vectorial forma un área por definición. Creación propia

Según la figura se produce el área del paralelogramo con componentes $\langle \omega_1(\vec{v}_1), \omega_2(\vec{v}_1) \rangle$ y $\langle \omega_1(\vec{v}_2), \omega_2(\vec{v}_2) \rangle$ teniendo presente que esto implica un área con una orientación positiva o negativa según la relación de los nuevos vectores.

La siguiente expresión relaciona las 1-formas ω_1 y ω_2 a través del producto exterior que es en consonancia la matriz de los elementos de la evaluación sobre los vectores \vec{v}_1 y \vec{v}_2 .

$$\omega_1 \wedge \omega_2 (\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \det \begin{vmatrix} \omega_1(\vec{v}_1) & \omega_2(\vec{v}_1) \\ \omega_1(\vec{v}_2) & \omega_2(\vec{v}_2) \end{vmatrix}$$

El producto exterior es una operación análoga al producto vectorial o producto cruz definido en el espacio vectorial V , esto implica que el producto exterior es exclusivamente una operación dentro del espacio dual que define la interacción de las formas diferenciales a través de la operación del producto entre vectores.

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = T_p \mathbb{R}^2 \times T_p \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

Es preciso resaltar la *anticonmutatividad* del operador vectorial producto cruz en el espacio vectorial V , así ¿Se alinea el *producto exterior* bajo esta misma característica en el espacio tangente $T_p \mathbb{R}^2$? ¿En consecuencia el producto exterior de las 1-formas cumple con la expresión $\omega_1 \wedge \omega_2(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = -\omega_2 \wedge \omega_1(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$?

En este sentido, el producto exterior $\omega_2 \wedge \omega_1$ se definiría como:

$$\omega_2 \wedge \omega_1 (\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \det \begin{vmatrix} \omega_2(\vec{v}_1) & \omega_1(\vec{v}_1) \\ \omega_2(\vec{v}_2) & \omega_1(\vec{v}_2) \end{vmatrix}$$

Entonces,

$$\omega_2 \wedge \omega_1 (\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \omega_2(\vec{v}_1)\omega_1(\vec{v}_2) - \omega_2(\vec{v}_2)\omega_1(\vec{v}_1)$$

En el orden lógico de la expresión $\omega_1 \wedge \omega_2 = -\omega_2 \wedge \omega_1$ establecemos ambos determinantes de la siguiente manera.

$$\omega_1(\vec{v}_1)\omega_2(\vec{v}_2) - \omega_1(\vec{v}_2)\omega_2(\vec{v}_1) = \omega_2(\vec{v}_1)\omega_1(\vec{v}_2) - \omega_2(\vec{v}_2)\omega_1(\vec{v}_1)$$

Donde,

$$\omega_1(\vec{v}_1)\omega_2(\vec{v}_2) - \omega_1(\vec{v}_2)\omega_2(\vec{v}_1) = -[\omega_2(\vec{v}_2)\omega_1(\vec{v}_1) - \omega_2(\vec{v}_1)\omega_1(\vec{v}_2)]$$

Reorganizando,

$$\omega_1(\vec{v}_1)\omega_2(\vec{v}_2) - \omega_1(\vec{v}_2)\omega_2(\vec{v}_1) = -[\omega_1(\vec{v}_1)\omega_2(\vec{v}_2) - \omega_1(\vec{v}_2)\omega_2(\vec{v}_1)]$$

Lo que genera,

$$\omega_1 \wedge \omega_2 (\vec{v}_1, \vec{v}_2) = -[\omega_1 \wedge \omega_2 (\vec{v}_1, \vec{v}_2)]$$

Siendo inconsistente a simple vista. Produciendo la siguiente expresión,

$$\omega_1 \wedge \omega_2 (\vec{v}_1, \vec{v}_2) \neq -[\omega_1 \wedge \omega_2 (\vec{v}_1, \vec{v}_2)]$$

Finalmente, para cumplir la relación es necesario multiplicar esta expresión por -1

$$\omega_1 \wedge \omega_2(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = -\{-[\omega_1 \wedge \omega_2(\vec{v}_1, \vec{v}_2)]\}$$

Concluyendo así,

$$-(-\omega_1 \wedge \omega_2)(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = -\omega_2 \wedge \omega_1(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$$

Por lo tanto, el orden de operación en el producto de dos 1-formas es crucial dada la consideración del determinante en el producto exterior. De acuerdo con esto, la expresión para cumplir la relación *número de ecuación* es:

$$\omega_2 \wedge \omega_1(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = -\det \begin{vmatrix} \omega_2(\vec{v}_1) & \omega_1(\vec{v}_1) \\ \omega_2(\vec{v}_2) & \omega_1(\vec{v}_2) \end{vmatrix}$$

De manera similar la relación es consistente sí,

$$\omega_1 \wedge \omega_2(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = -\omega_1 \wedge \omega_2(\vec{v}_2, \vec{v}_1)$$

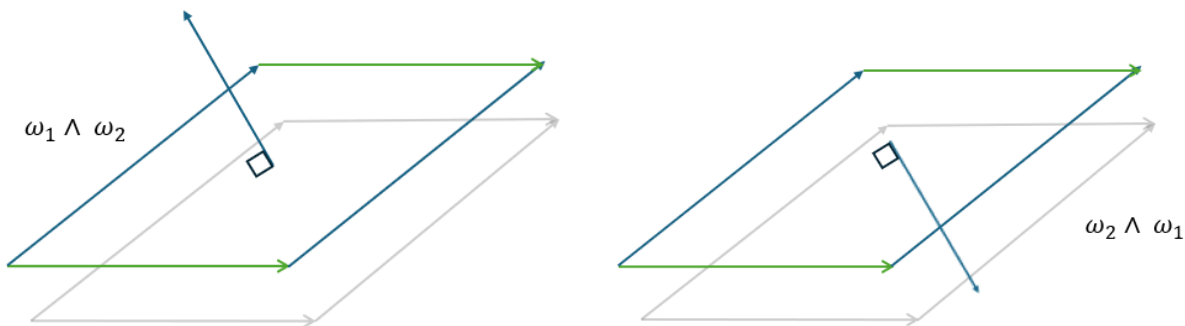
Cambiando el orden de los vectores en la parte derecha de la ecuación satisfaciendo la relación.

Ahora bien, ¿esta anticonmutatividad opera de manera similar cuando se establece el producto exterior de una 1-forma por sí misma?

Desde la interpretación geométrica del producto exterior, no, y esto en razón a la proyección de los vectores idénticos sobre ejes coordenados idénticos, que en principio no genera áreas o superficies. Desde la consideración del determinante que lo describe, elementos idénticos que conforman la matriz se operan dando como resultado cero. Por lo tanto,

$$\omega_1 \wedge \omega_1(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = 0$$

De manera similar a:



$$\omega_1 \wedge \omega_2(\vec{v}_1, \vec{v}_1) = 0$$

Figura No. 13. Representación gráfica de la propiedad de anticonmutatividad del producto entre 1-Formas. Creación propia

Consideremos el caso donde el producto de dos 1-formas en $T_p\mathbb{R}^2$ satisfacen la siguiente expresión, $\omega_1 \wedge \omega_2(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = t(dx \wedge dy)$ para $c \in \mathbb{R}$.

Sean $\omega_1 = adx + bdy$ y $\omega_2 = cdx + edy$ donde $a, b, c, e \in \mathbb{R}$ entonces,

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = (adx + bdy) \wedge (cdx + edy)$$

Se opera distributivamente

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = adx \wedge cdx + adx \wedge edy + bdy \wedge cdx + bdy \wedge edy$$

Reorganizando,

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = ac dx \wedge dx + ae dx \wedge dy + bc dy \wedge dx + be dy \wedge dy$$

En principio los elementos obtenidos como $dx \wedge dx$ y $dy \wedge dy$ representan el producto exterior de un eje coordenado que conforma el espacio vectorial tangente en p , de lo cual establece que el producto exterior de una 1-forma por sí mismo es igual a cero. Véase de este modo,

$$dx \wedge dx = dy \wedge dy = 0$$

Por tanto, la ecuación se reescribe de la siguiente forma,

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = ae dx \wedge dy + bc dy \wedge dx$$

De la propiedad que establece la anticonmutatividad del producto exterior visto anteriormente

$$dx \wedge dy = -dy \wedge dx$$

Entonces,

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = ae dx \wedge dy - bc dx \wedge dy$$

Aplicando factor común

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = (ae - bc)dx \wedge dy$$

Donde $t = (ae - bc)$ cumpliendo así con la propiedad

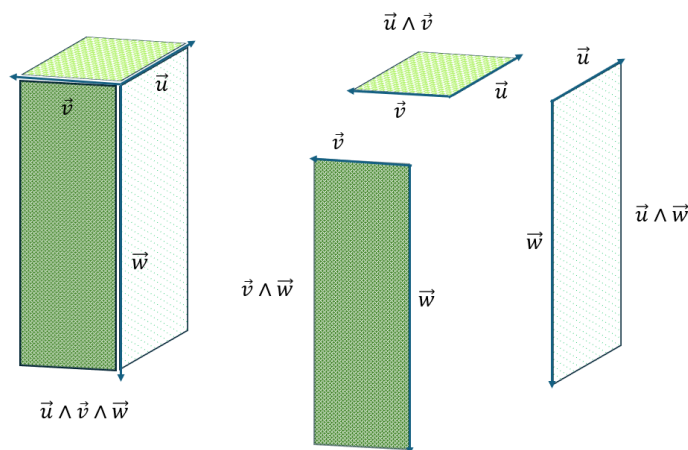
$$\omega_1 \wedge \omega_2(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = t(dx \wedge dy)$$

Hasta aquí se han aplicado a modo de exposición el uso de los axiomas/propiedades de anticonmutatividad y clausura con el fin de extender e introducir algunas propiedades adicionales de las **2-forma** que presentaremos a continuación.

2.3 2-Formas³⁷

Obtuvimos de manera geométrica y analítica la conformación de *2-formas* a través del producto exterior también conocido como *producto cuña* por la forma del operador que relaciona 1-formas.

Esta operación puede generar la configuración de áreas mientras la disposición, relación y ordenación entre ellas en el espacio generan volúmenes. La siguiente gráfica resulta en la composición de un paralelepípedo rectangular y sus respectivos elementos conformantes que resultan producto de las áreas generadas por los vectores \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} y sus permutaciones respectivas.



³⁷ Keenan Crane (2021, Feb 3) Discrete Differential Geometry - CMU 15-458/858
 Bachman, D. (2012). *A geometric approach to differential forms*. Providence, RI: American Mathematical Society.

Figura No. 14. De las áreas generadas por los vectores \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} en la conformación del paralelepípedo rectangular. Creación propia

Algunas propiedades adicionales subyacen de estas relaciones.

A. Propiedad asociativa

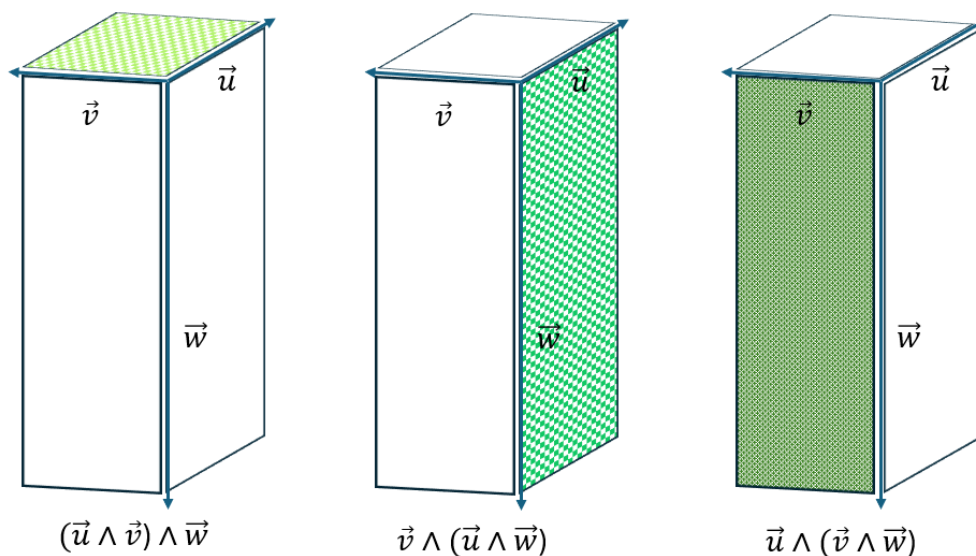


Figura No. 15. De la propiedad asociativa que genera el paralelepípedo a través del producto exterior. Creación propia

De la generación de áreas componentes en la configuración espacial del paralelepípedo se extraen algunas consideraciones:

- i) Se cumple la propiedad asociativa sobre el producto exterior, pero es importante considerar el orden de las permutaciones que definen la orientación de los planos espacialmente. Esto es visible gracias al signo en consecuencia para establecer la conmutatividad sobre el producto exterior. Análogo a la operabilidad del producto vectorial (producto cruz), el orden de los elementos incluidos en el producto exterior

establece un orden de permutaciones relacionadas con la posición de los vectores base que configuran el espacio vectorial.

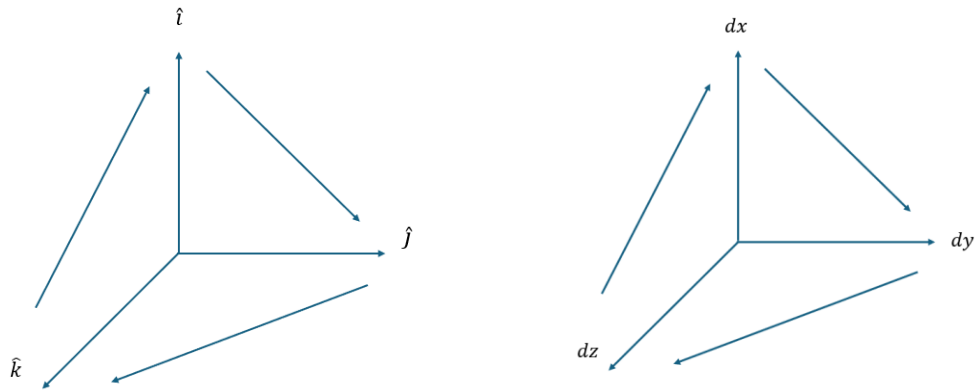


Figura No. 16. De la analogía de las permutaciones en un espacio vectorial con vectores base i, j, k , en un espacio vectorial V asociada al espacio tangente donde los vectores base dx, dy, dz consideran el orden de las permutaciones asociadas a la propiedad de anticonmutatividad. Creación propia

- ii) Pueden visualizarse como el resultado de escalar un área orientada en particular y a consideración del observador establecer la elección del área base con el objetivo de escalar para conformar el volumen. En definición es resultado del producto de un escalar quien define como se expande dimensionalmente la magnitud del área en el espacio.

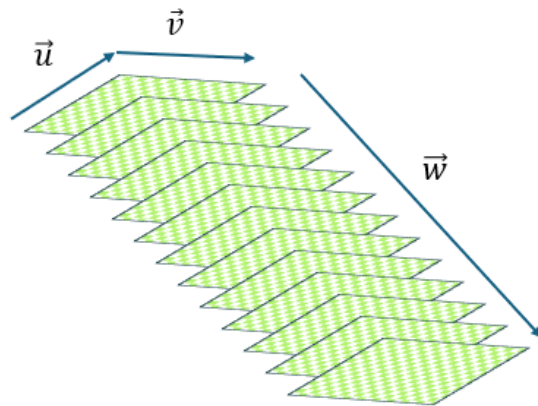


Figura No.17. Como interpretación del área creada por los vectores \vec{u}, \vec{v} que al escalarse por una cantidad \vec{w} veces brinda la configuración del volumen al sobreponerse una sobre otra según la orientación de los planos. Creación propia

B. Propiedad Distributiva

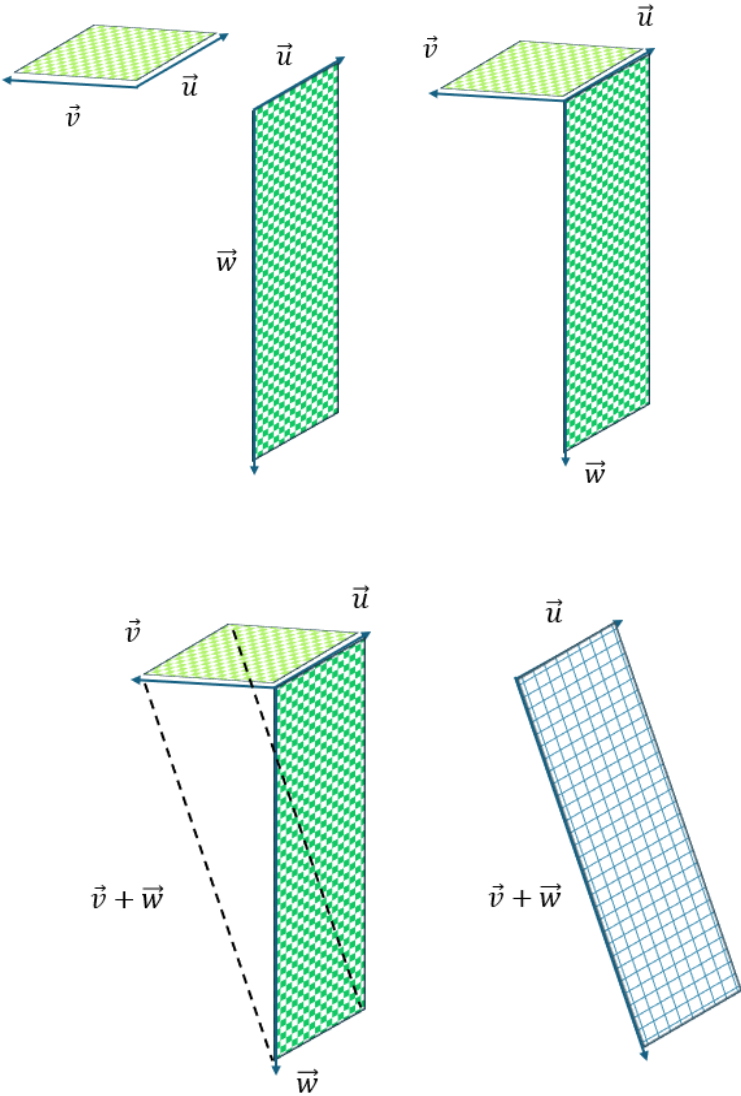


Figura No. 18. Propiedad distributiva sobre la suma de dos áreas distintas generadas por los vectores \vec{u}, \vec{w} , y \vec{v} . Creación propia

La composición del plano $\vec{u} \wedge \vec{v}$ sumado al plano $\vec{u} \wedge \vec{w}$ nos presenta geoméricamente la propiedad distributiva sobre la suma generando la relación de forma analítica que a simple vista parece ser una composición bastante intuitiva, de manera algebraica se presenta como:

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) + (\vec{u} \wedge \vec{w}) = (\vec{v} + \vec{w}) \wedge \vec{u}$$

Donde la suma vectorial $\vec{v} + \vec{w}$ representada por la línea punteada en el gráfico es generatriz del plano de modo expositivo resultado del producto exterior con \vec{u} .

2.4. *k*-Formas³⁸

En este apartado se pretende formalizar la generalización del producto exterior a través de los elementos llamados *k*-forma siendo una función $\omega: (T_p \mathbb{R}^n)^k \rightarrow \mathbb{R}$ que se define como una función lineal ω que recibe *k* entradas y cada entrada es un vector con dimensión *n* generando un número o escalar como resultado.

Observamos la representación geométrica basada en la producción del paralelepípedo de volumen definido de manera dimensional por 3 vectores \vec{u} , \vec{v} , y \vec{w} que introducimos ahora con el nombre de **3-Forma**, luego del producto exterior basado entre estos vectores. La expresión analítica detallada sobre el producto exterior como determinante de una matriz de 2 x 2 se extiende de la misma forma para el producto exterior de tres *1-formas*

³⁸ Michael Penn (2020, May 21) Differential Forms | Introduction and the Tangent Space.
Bachman, D. (2012). *A geometric approach to differential forms*. Providence, RI: American Mathematical Society.

Supongamos que $\omega_1, \omega_2,$ y ω_3 son 1 -formas y $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ son vectores, así:

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \det \begin{vmatrix} \omega_1(\vec{v}_1) & \omega_2(\vec{v}_1) & \omega_3(\vec{v}_1) \\ \omega_1(\vec{v}_2) & \omega_2(\vec{v}_2) & \omega_3(\vec{v}_2) \\ \omega_1(\vec{v}_3) & \omega_2(\vec{v}_3) & \omega_3(\vec{v}_3) \end{vmatrix}$$

Es el valor del volumen orientado en 3 dimensiones del paralelepípedo que se extiende en el espacio. Bajo esta consideración para mayores dimensiones, la extensión de esta expresión resulta como:

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_n (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n) = \det \begin{vmatrix} \omega_1(\vec{v}_1) & \omega_2(\vec{v}_1) & \dots & \omega_n(\vec{v}_1) \\ \omega_1(\vec{v}_2) & \omega_2(\vec{v}_2) & \dots & \omega_n(\vec{v}_2) \\ \vdots & \vdots & \cdot & \vdots \\ \omega_1(\vec{v}_n) & \omega_2(\vec{v}_n) & \dots & \omega_n(\vec{v}_n) \end{vmatrix}$$

El resultado es un valor en \mathbb{R} que satisface el producto exterior que produce “un paralelepípedo conformado por la extensión de k -vectores proyectados sobre cada uno de los planos coordinados k -dimensionales, calcula el resultado de las áreas, multiplicando cada una por una constante y sumando los resultados”³⁹

Así el resultado establece por cada permutación un cambio de signo,

³⁹ Del fragmento explícito: “An m -form on $T_p\mathbb{R}^n$ can be thought of as a function which takes the parallelepiped spanned by m vectors, projects it onto each of the m -dimensional coordinate planes, computes the resulting areas, multiplies each by some constant, and adds the results.” (Bachman, 2012)

$$\begin{aligned}\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) &= -\omega_1 \wedge \omega_3 \wedge \omega_2 (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) \\ &= \omega_3 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)\end{aligned}$$

La cantidad de permutaciones de manera simultánea establece una generalización a estos intercambios en matrices donde la definición en dimensiones mayores se presenta como:

$$\omega \wedge v = (-1)^{kl} v \wedge \omega$$

De esto las k -formas en $T_p \mathbb{R}^n$ son funciones multilineales y alternantes⁴⁰.

En resumen, para extender un poco de información en esta definición, su base⁴¹ está dada por:

$$\omega : \{dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n\}$$

Para v^1, v^2, \dots, v^k , entonces,

$$dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} (v^1, v^2, \dots, v^k) = \det (v_{ik}^k)$$

De modo matricial indicaremos como una permutación entre dos términos de la base interviene en el cambio de columnas. Los términos resaltados en negrita presentan su disposición original en la definición.

$$dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{dx}_{ij+1} \wedge \mathbf{dx}_{ij} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} (v^1, \dots, v^k) = \begin{vmatrix} v_{i_1}^1 & \cdots & \mathbf{v}_{ij+1}^1 & \mathbf{v}_{ij}^1 & \cdots & v_{i_k}^1 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ v_{i_1}^k & \cdots & \mathbf{v}_{ij+1}^k & \mathbf{v}_{ij}^k & \cdots & v_{i_k}^k \end{vmatrix}$$

La permutación se presenta así:

⁴⁰ Visto también durante la permutación del producto exterior de las formas ω_1, ω_2 y ω_3 dentro de la matriz determinante.

⁴¹ dx_{i_1} representa otra denominación útil -en sentido tensorial- para definir las bases dx, dy y dz usadas para definir el espacio tangente en \mathbb{R}^3

$$-dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x_{ij} \wedge \mathbf{d}x_{ij+1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} (v^1, \dots, v^k) = - \begin{vmatrix} v_{i_1}^1 & \cdots & \mathbf{v}_{ij}^1 & \mathbf{v}_{ij+1}^1 & \cdots & v_{i_k}^1 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ v_{i_1}^k & \cdots & \mathbf{v}_{ij}^k & \mathbf{v}_{ij+1}^k & \cdots & v_{i_k}^k \end{vmatrix}$$

Generando un signo menos de acuerdo con la propiedad de anticonmutatividad.

Recordemos la definición de una 1-forma de manera general,

$$\varphi = \sum_{i=1}^n u_i v^i$$

Entonces,

$$\omega = \sum_I (a_{i_1}, \dots, a_{i_k}) (dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k})$$

$$v = \sum_J (b_{j_1}, \dots, b_{j_l}) (dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l})$$

Siendo I y J la suma de todos los multiíndices (i_1, \dots, i_k) y (j_1, \dots, j_l) de grado k y l que consisten en todos los vectores de entrada de $1 < \dots < k$ y $1 < \dots < l$

Ahora el producto exterior entre las formas $v \wedge \omega$, definido como:

$$v \wedge \omega = \sum_I \sum_J a_I b_J (dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l} \wedge \mathbf{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k})$$

Nos permite rastrear el término $\mathbf{d}x_{i_1}$ con el fin de realizar tantas permutaciones como sea necesario para alcanzar la parte inicial del término entre paréntesis, es decir donde se posiciona $\mathbf{d}x_{j_1}$. Así mismo cada uno de los términos pertenecientes a ω en la definición hasta que el reordenamiento revierta el orden a $\omega \wedge v$. Es necesario tener en cuenta que por cada permutación

de cada término como lo fue demostrado anteriormente, genera la aparición de un signo negativo.

$$v \wedge \omega = (-1)^l \sum_I \sum_J a_I b_J (\mathbf{dx}_{i_1} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k})$$

El nuevo término $(-1)^l$ genera sobre l el número de permutaciones realizadas hacia la izquierda.

De manera análoga aparece k como el número de permutaciones realizadas hacia la derecha, es por esto por lo que el exponente kl en la expresión $(-1)^{kl}$ nos indica que el producto de las permutaciones generadas kl nos brinda dos resultados notables: Par o impar, donde:

1. kl es impar nos brinda un resultado negativo.
2. kl es par nos brinda un resultado positivo.

Este desarrollo nos permite además visualizar así una definición formal de una k -forma de manera general como una suma,

$$\omega = \sum_I f_I dx_I$$

Con $I = (i_1, \dots, i_k)$ desde $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n$. Siendo f_I desde coeficientes hasta una familia de funciones.

Operador diferencial y Operador Hodge-Star aplicado a formas diferenciales.

2.5 Diferenciación de k -formas⁴²

Nuestra noción acerca de la *diferenciación* o comúnmente conocida *derivación* se relaciona con algunas ideas distintivas que nos permiten asociarla:

- a) Como operación inversa de la *integración*, aquí que algunos cursos usan el término “antiderivada” como estrategia de relación para dotar de carácter familiar a esta operación en enseñanza preliminar en cursos de cálculo integral.

- b) Como la tasa de cambio de una función. Evocando el *límite de $\Delta x \rightarrow 0$* siendo Δx una sección infinitesimal tan pequeña espacialmente que tiende a cero, se acerca un valor progresivamente cercano, pero su valor no es cero. Esto nos permite entender la derivada como un proceso de *medición* permitiendo conocer el cambio de una cantidad con respecto a otra.

Una expresión familiar que nos conduce a reconocer que ciertamente es una derivada es:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

⁴² Keenan Crane (2021, Feb 3) Discrete Differential Geometry - CMU 15-458/858
Michael Penn (2020, May 21) Differential Forms | Introduction and the Tangent Space.

Siendo f una función cualquiera dentro de \mathbb{R} .

- c) Como la *recta tangente* a una curva o punto específico de una curva cualquiera en un espacio vectorial real en \mathbb{R}^2 , estrechamente relacionada con el concepto de pendiente. Posteriormente nos genera información sobre el cambio generando así una interpretación inicial sobre la inclinación de dicha recta. Para \mathbb{R}^3 , se establece como un *plano tangente* para un punto específico de la superficie de un volumen, siendo la “mejor aproximación lineal” a ese punto.
- d) Al identificar una notación particular elegida como dx, dy, dz o dt como ejemplo e indicándonos variables que son susceptibles al cambio y que están sujetas o no a parametrizaciones para su análisis.
- e) Cuando se analiza una función de manera que nos permita identificar su cambio con respecto a una o varias variables, representada por el concepto de *derivada parcial*:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$$

- f) Cuando conceptos propios del cálculo vectorial como *gradiente, divergencia y rotacional* son usados para describir procesos y fenómenos en ciencias y otros campos, representando sistemas a partir de campos vectoriales.

Características adicionales dotan de más información al concepto de diferenciación en general, presentamos así un panorama de alcances y posibilidades dentro del *espacio dual* donde habitan las *formas diferenciales*.

Nombramos Ω^k al espacio que habitan todas las *k-formas diferenciales* en \mathbb{R}^n y la operación ***derivada exterior*** como:

$$d: \Omega^k \rightarrow \Omega^{k+1}$$

Donde Ω^{k+1} genera un único mapa lineal con $k + 1$ *formas diferenciales* en \mathbb{R}^n

Preliminarmente nos indica que la operación *derivada exterior* aumenta en grado la *forma* original, para ampliar este tema es necesario exponer tres propiedades presentadas aquí con el propósito de hacer claro su desarrollo:

- I. Para $k = 0$, $df_p(\vec{v}) = D_{\vec{v}}f|_p$
- II. $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$
- III. $d(d\omega) = 0$
- I. Para $k = 0$, $df_p(\vec{v}) = D_{\vec{v}}f|_p$

Para la primera propiedad, nos presenta que para una 0-forma ⁴³($k = 0$) en general, la 1-forma df aplicada a un vector \vec{v} es igual a la derivada direccional de la función f a lo largo de la dirección del campo vectorial $\vec{\chi}$.

⁴³ Entendidas también como escalares, o un campo escalar, que representan un valor en el espacio V

Así que, ¿qué es una *derivada direccional*?

De una función escalar f en un punto p con respecto a un vector \vec{v} , la derivada direccional⁴⁴: es la *tasa de cambio* a la cual incrementa la función cuando nos alejamos desde p con velocidad $\vec{\chi}$.

Se define analíticamente como:

$$D_{\vec{v}}f|_p = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(p + \Delta x \vec{v}) - f(p)}{\Delta x}$$

Con $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y siendo f una función de n variables en la dirección de un vector v también con n entradas.

Esta expresión se asemeja a aquella definida para la derivada común.

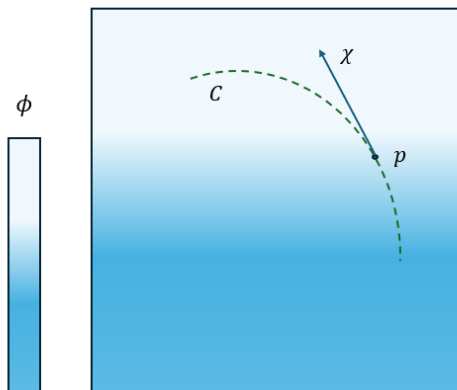


Figura 19: Gráfico de un campo escalar descrito por la función ϕ donde muestra el vector χ tangente al punto p que pertenece a la curva C . Los valores en la escala representados en color blanco corresponden a aquellos donde la función incrementa nominalmente. Creación propia

⁴⁴ El término $\varepsilon \vec{v}$ es análogo a $t \vec{v}$ visto para la parametrización de una recta real. Se ha cambiado el término Δx por ε evitando confusiones.

La función ϕ debe ser diferenciable en cualquier punto en su dominio.

Pero aquí la propiedad, $df_p(\vec{v}) = D_{\vec{v}}f|_p$ también se puede definir como:

$$df_p(\vec{v}) = D_{\vec{v}}f|_p = \nabla f|_p \cdot \vec{v}$$

Siendo el último término el gradiente de la función producto punto con el vector \vec{v}

$$\nabla f|_p \cdot \vec{v}$$

La primera parte de esta expresión,

$$df_p(\vec{v})$$

La función f implícitamente nos entrega información de tipo escalar del campo que equivalentemente representa el concepto de una 0-forma en el espacio dual, su *derivada exterior* es equivalente al gradiente de la función, producto punto con el vector⁴⁵ descrito en el punto p .

La función gradiente sobre un campo escalar brinda una dirección que da cuenta de la mayor tasa de cambio de la función escalar en cualquier punto p incluido en el dominio de la función, obteniendo así un campo vectorial con magnitud y dirección.

En extenso la expresión $df_p(\vec{v}) = \nabla f|_p \cdot \vec{v}$

$$\nabla f|_p \cdot \vec{v} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \vec{v}_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \vec{v}_n = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1(\vec{v}) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n(\vec{v}) = df_p(\vec{v})$$

⁴⁵ Con $p \in \mathbb{R}^n$ y $\vec{v} \in T_p \mathbb{R}^n$

El lado izquierdo nos describe la función gradiente en \mathbb{R}^n donde los vectores $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ conforman la base en el espacio real. En el lado derecho la base es descrita por $\{dx_1, \dots, dx_n\}$ donde el vector \vec{v} no estaría representado por sus componentes. Cabe aclarar que existe una distinción importante sobre la equivalencia de esta expresión, mientras el gradiente que actúa sobre un campo escalar resulta en un campo vectorial, en contraste la sección final de la expresión nos brinda *una 1-forma diferencial que actúa sobre un vector \vec{v}* . Agregando que la función gradiente depende del producto punto.

Con el diferencial de una 0-forma definimos a df como una *1-forma* de la siguiente manera,

$$df_p(\vec{v}) = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1(\vec{v}) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n(\vec{v})$$

De forma general,

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

considerando a d como un *operador diferencial parcial de primer orden*, definiendo así la *diferenciación exterior*.

Pero ¿Qué hay de las *k-formas*?

Obtuvimos la expresión,

$$\omega = \sum_I f_I dx_I$$

Para denotar una *k-forma* de modo algebraico. Si aplicamos el operador *derivada exterior* conseguimos una expresión general, definiendo una *k + 1 forma*.

$$d\omega = \sum_I \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_I$$

II. $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$

Sean ω una k -forma y η una m -forma con: $\omega = \sum_I f_I dx_I$, $\eta = \sum_J g_J dx_J$ su producto exterior esta definido por:

$$\omega \wedge \eta = \sum_{I,J} f_I g_J dx_I \wedge dx_J$$

Ahora, ¿Qué resulta de su diferenciación?

$$d(\omega \wedge \eta) = \sum_{I,J} \sum_{r=1}^n \frac{\partial}{\partial x_r} (f_I g_J) dx_r \wedge dx_I \wedge dx_J$$

$$d(\omega \wedge \eta) = \sum_{I,J} \sum_{r=1}^n \left(\frac{\partial f_I}{\partial x_r} g_J + \frac{\partial g_J}{\partial x_r} f_I \right) dx_r \wedge dx_I \wedge dx_J$$

Este término obtenido por la propiedad del producto $d(fg) = (f'g + fg')$

$$\left(\frac{\partial f_I}{\partial x_r} g_J + \frac{\partial g_J}{\partial x_r} f_I \right)$$

Luego podemos distribuir estos términos sobre la suma

$$d(\omega \wedge \eta) = \sum_{I,J} \sum_{r=1}^n \left(\frac{\partial f_I}{\partial x_r} g_J \right) dx_r \wedge dx_I \wedge dx_J + \sum_{I,J} \sum_{r=1}^n \left(\frac{\partial g_J}{\partial x_r} f_I \right) dx_r \wedge dx_I \wedge dx_J$$

Dividido en estos dos grandes términos, el primero específicamente puede reordenarse como:

$$\sum_{I,J} \sum_{r=1}^n \left(\frac{\partial f_I}{\partial x_r} dx_r \wedge dx_I \right) \wedge g_J dx_J = d\omega \wedge \eta$$

Y el segundo nos muestra

$$\sum_{I,J} \sum_{r=1}^n \left(\frac{\partial g_J}{\partial x_r} dx_r \wedge dx_J \right) \wedge f_I dx_I = \omega \wedge d\eta$$

¿De dónde podemos obtener el término que completa esta propiedad?

dx_J es una k -forma representada como $dx_J = \{ dx_{x_1} \wedge \dots \wedge dx_{x_n} \}$ cuando el término dx_r realiza permutaciones el término $(-1)^k$ restringe a permutaciones pares o impares su resultado.

2.6 Operador *Hodge-Star* (\star)⁴⁶

Para explicarlo iniciaremos con una pregunta: ¿Qué es un complemento ortogonal para un subespacio lineal?

La definición de un complemento ortogonal es descrita como:

$$V^\perp = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, u \rangle \geq 0 \forall u \in V \}$$

⁴⁶ Keenan Crane (2021, Feb 3) Discrete Differential Geometry
Merino, L. (s.f.). Complemento ortogonal. Universidad de Granada. Recuperado de <https://www.ugr.es/~lmerino/3-3.html>

Geoméricamente se explica con el plano V que incluye a los vectores \vec{u} y \vec{v} , el plano vectorial V que puede denominarse un espacio vectorial en \mathbb{R}^2

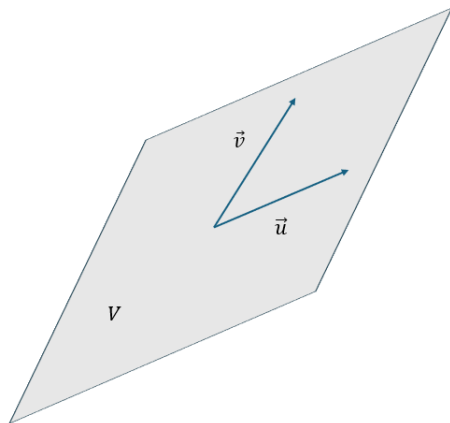


Figura No. 20. De los vectores \vec{u} y \vec{v} en el plano V . Creación propia

Su *complemento ortogonal* se refiere a todos los vectores x tal que al operar producto escalar con todos los vectores u que pertenecen al espacio vectorial V son iguales a cero, siendo ortonormales entre sí. Es importante que en estos espacios vectoriales el producto escalar este definido.

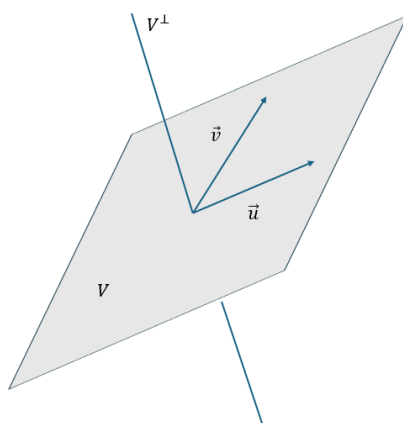


Figura No. 21. De la representación del complemento ortogonal de los vectores \vec{u} y \vec{v} en el plano V . Creación propia

Para explicar el operador *Hodge-star* que es reconocido con el símbolo (\star) nos guiaremos por el plano creado por el producto exterior de los vectores \vec{u} y $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$:

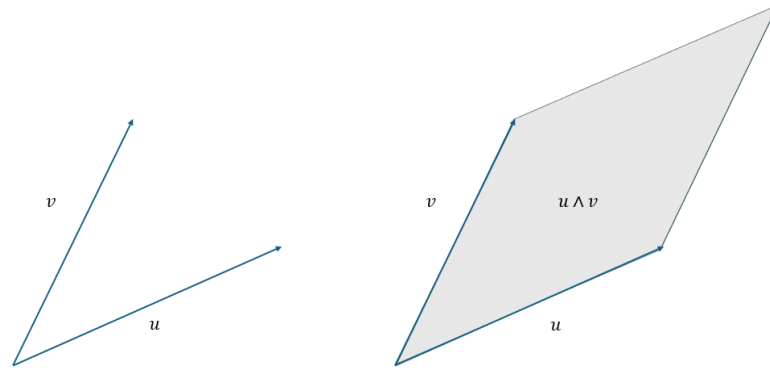


Figura No 22. De la 2-forma $u \wedge v$ creada por los vectores \vec{u} y \vec{v} . Creación propia

El operador *Hodge-star* aplicado a esta 2-forma $u \wedge v$ nos muestra:

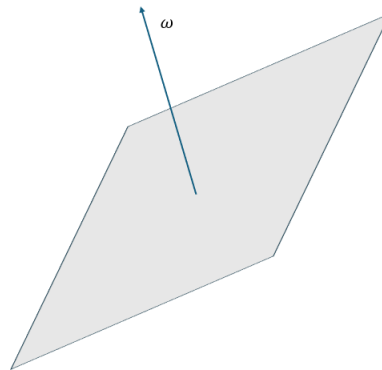


Figura No. 23. De la analogía del complemento ortogonal con el operador *Hodge-Star* en el espacio de las formas. Creación propia

Donde $\star (u \wedge v) = \omega$, indicándonos un vector ω que corresponde a la magnitud y dirección de esta 2-forma, Siendo ω ortogonal al plano describiendo un ángulo de 90° con referencia a este.

Para un espacio en \mathbb{R}^2 , el operador *Hodge-star* aplicado a un vector significa una rotación de 90° en sentido antihorario.

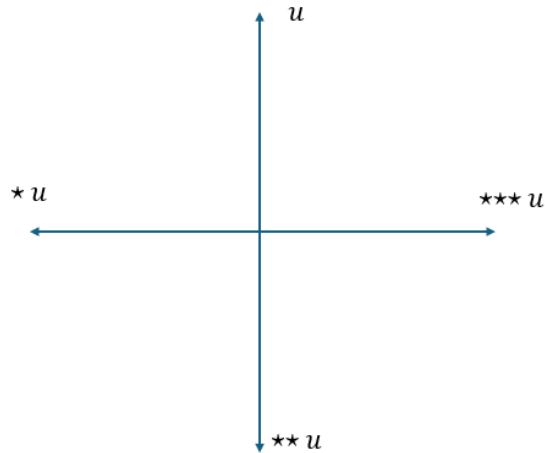


Figura 24. De la representación de aplicar el operador *Hodge-star* a un vector \vec{u} . Creación propia

En este orden aplicando el operador a una *3-forma en* \mathbb{R}^4 definida como $dx \wedge dy \wedge dz$ su resultado es:

$$\star (dx \wedge dy \wedge dz) = dw$$

Y aquí existe algo interesante si pensamos que sucede cuando en este mismo espacio aplicamos el operador a dw ,

$$\star dw = dx \wedge dy \wedge dz$$

Nos brinda un principio de exclusión, siendo el resultado del operador aquellos elementos que no hacen parte de la expresión original.

Formalmente el operador *Hodge-star* se define a *k-formas*:

$$\star \omega = \sum_I f_I \star dx_I$$

El operador \star solo se aplica a términos que definen la dimensión del espacio. En tanto que no se aplica a funciones como lo define la expresión, puede aplicarse incluso a escalares.

Para un espacio en \mathbb{R}^3 , entonces

$$\star 1 = dx \wedge dy \wedge dz$$

$$\star (dx \wedge dy \wedge dz) = 1$$

Sea el espacio de todas las *k-formas* en \mathbb{R}^n :

$$\bigwedge^k (\mathbb{R}^n)$$

El operador *hodge-star* se define como:

$$(\star) = \bigwedge^k (\mathbb{R}^n) \rightarrow \bigwedge^{n-k} (\mathbb{R}^n)$$

Que depende del coeficiente binomial

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Siendo el número de formas para agrupar *k* elementos (sin algún orden específico) de un conjunto de *n* elementos. Lo que nos indica en esta expresión la forma natural en que actúa el operador (\star) donde hay tantas *k*-formas como $(n - k)$ formas.

Es así como en un espacio en \mathbb{R}^3 cada forma puede ser representada de la siguiente manera:

<i>0-forma</i>	<i>1-forma</i>	<i>2-forma</i>	<i>3-forma</i>
$\bigwedge^0(\mathbb{R}^3)$	$\bigwedge^1(\mathbb{R}^3)$	$\bigwedge^2(\mathbb{R}^3)$	$\bigwedge^3(\mathbb{R}^3)$

2.7 Operadores vectoriales⁴⁷

En la sección 1.6 pudimos realizar algunas observaciones sobre cómo funciona la derivada exterior aplicada sobre las formas. Obtuvimos una expresión para la derivada exterior de una *0-forma* o función en \mathbb{R}^n permitiendo asociar conceptos como *derivada direccional* y *gradiente*.

Con la expresión general de la derivada exterior sobre una *0-forma*:

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

Obtuvimos una expresión que define análogamente el gradiente relacionando así a la derivada de una *0-forma*.

Gradiente (<i>Grad</i>(<i>F</i>))	Derivada exterior de una <i>0-forma</i>
$\frac{\partial f}{\partial x_1} \hat{i} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \hat{n}$	df

Ahora generaremos expresiones equivalentes para los operadores divergencia y rotacional.

⁴⁷ Sjamaar, R. (2015). *Manifolds and differential forms*. Providence, RI: American Mathematical Society
Michael Penn (2020, May 21) Differential Forms | Introduction and the Tangent Space.

De la aplicación de la derivada exterior a la 1 -forma $\alpha = f(x, y, z)dx + g(x, y, z)dy + h(x, y, z)dz$ en $T_p\mathbb{R}^3$ obtuvimos la expresión:

$$d\alpha = \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial z}\right) dx \wedge dz$$

Y podemos reconocer de esta expresión que acompañan a las 2 -formas que su estructura es sumamente parecida a aquellos factores del rotacional de un campo vectorial, solo con la diferencia de que son acompañados por vectores.

$$\nabla \times f = \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right) \hat{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}\right) \hat{j} + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) \hat{k}$$

Aquí el operador (\star) aplicado al resultado de la derivada exterior sobre la 1 -forma nos permite relacionar análogamente estas dos definiciones:

$$\star d\alpha = \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) \star (dx \wedge dy) + \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right) \star (dy \wedge dz) + \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial z}\right) \star (dx \wedge dz)$$

Entonces

$$\star (dx \wedge dy) = dz,$$

$$\star (dy \wedge dz) = dx,$$

$$\star (dx \wedge dz) = -dy$$

$-dy$ dado a la permutación que debe realiza para estar en el orden específico

$$\star d\alpha = \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dz + \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right) dx - \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial z}\right) dy$$

Finalmente,

$$\star d\alpha = \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}\right) dy + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dz$$

Obteniendo así una expresión análoga para el *rotacional* de un campo vectorial V

Rotacional ($Rot(F)$)	Derivada exterior de una 1-forma
$\left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right) \hat{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}\right) \hat{j} + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) \hat{k}$	$\star d\alpha$

De la aplicación de la derivada exterior a la 1-forma $\beta = F dx + G dy + H dz$ en $T_p \mathbb{R}^3$

¿Cuál es el Hodge-star de esta expresión?

$$\star \beta = \star (F dx + G dy + H dz)$$

$$\star \beta = (F dy \wedge dz + G dz \wedge dx + H dx \wedge dy)$$

$$\star \beta = (F dy \wedge dz - G dx \wedge dz + H dx \wedge dy)$$

Obteniendo una 2-forma definida para las funciones F, G y H . Si aplicamos el operador *derivada exterior* obtenemos:

$$d \star \beta = d(F dy \wedge dz - G dx \wedge dz + H dx \wedge dy)$$

$$d \star \beta = \left(\frac{dF}{dx} dx \wedge dy \wedge dz - \frac{dG}{dy} dy \wedge dx \wedge dz + \frac{dH}{dz} dz \wedge dx \wedge dy \right)$$

$$d \star \beta = \left(\frac{dF}{dx} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{dG}{dy} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{dH}{dz} dx \wedge dy \wedge dz \right)$$

$$d \star \beta = \left(\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} \right) dx \wedge dy \wedge dz$$

Aplicando el operador *Hodge-star* a esta expresión resulta como:

$$\star d \star \beta = \star \left(\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} \right) dx \wedge dy \wedge dz$$

$$\star d \star \beta = \left(\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} \right)$$

De establecer el operador *Hodge-star* para $dx \wedge dy \wedge dz$ obtenemos una *0-forma*, es decir, nos devuelve las funciones iniciales derivadas parcialmente sobre un término que define la base.

Obteniendo así una expresión análoga para la *divergencia* de un campo vectorial V

Divergencia ($Div(F)$)	Derivada exterior de una 1-forma
$\frac{dF_x}{dx} + \frac{dF_y}{dy} + \frac{dF_z}{dz}$	$\star d \star \beta$

Hemos así desarrollado expresiones equivalentes para los operadores vectoriales gradiente, rotacional y divergencia respectivamente. El siguiente cuadro relaciona y compara los operadores obtenidos a modo de resumen:

Operador vectorial	Cálculo vectorial	Formas Diferenciales
Gradiente	∇f	df
Rotacional	$\nabla \cdot f$	$\star df$
Divergencia	$\nabla \times f$	$\star d \star f$

CAPÍTULO 3

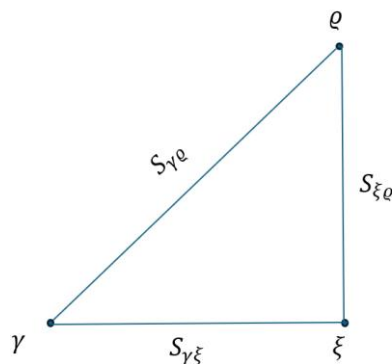
Métrica de Minkowski y Electromagnetismo en la relatividad especial.

En este capítulo se busca establecer aplicación del desarrollo teórico de las formas diferenciales. Se establece realizar aquí primero un desarrollo de la métrica de Minkowski a través de la manipulación de expresiones analíticas para reproducir la matriz que la representa en *2-formas* y *3-formas* correspondientemente. Esto se realiza en ocasión de establecer el término de Faraday F para la redefinición en formas diferenciales de la inducción electromagnética y la ley Ampere-Maxwell.

3.1 Geometría local en Lorentz y geometría local euclidiana⁴⁸

Contextualización.

Los eventos γ , ξ , ϱ se encuentran en un espacio libre de coordenadas, un espacio geométrico localmente euclidiano.



⁴⁸ Como se describe en Misner et. Al 1970

Figura 25. De la representación de los eventos γ, ξ, ρ en un espacio geométrico localmente Euclidiano. Definidas sus relaciones por el teorema de Pitágoras libre de coordenadas. Creación propia

El intervalo espacial entre eventos puede ser conocido a través de la expresión $S_{\gamma\rho}^2 = S_{\gamma\xi}^2 + S_{\xi\rho}^2$ siendo la línea geodésica la trayectoria más corta que determina la distancia propia entre los eventos $\overline{\gamma\xi}$.

En el criterio de la distancia local espacio-tiempo en una medición física real se infiere la geometría de Lorentz a través de dos señales lumínicas de acuerdo con los siguientes eventos.

- I. $\gamma\rho$ es la línea del universo para una partícula libre.
- II. ζ es un evento fuera del horizonte de eventos de la línea del universo.
- III. Un rayo de luz emitido desde ζ impacta la línea del universo $\gamma\rho$ en el evento ς
- IV. Desde un evento anterior ϑ en la línea del universo $\gamma\rho$, sale un rayo de luz alcanzando el evento ζ

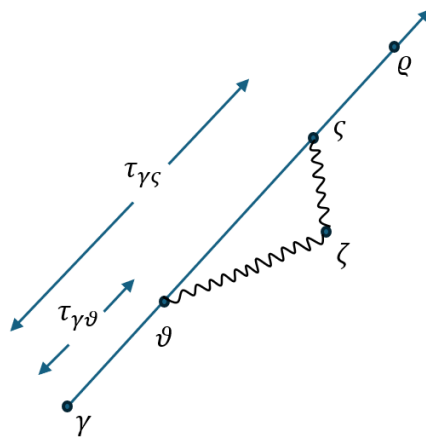


Figura No. 26. De los tiempos propios sobre dos eventos sobre la línea del universo y otro fuera de ella. Definen la distancia propia en término de intervalos luminosos. Libre de coordenadas. Creación propia

La distancia propia $S_{\gamma\zeta}$ que indica la distancia local espacio-tiempo entre γ y el evento ζ está dada por:

$$S_{\gamma\zeta}^2 = -\tau_{\gamma\zeta}^2 = -\tau_{\gamma\zeta}\tau_{\gamma\vartheta}$$

Esta distancia espacial está definida en términos temporales, siendo $\tau_{\gamma\zeta}$ el *tiempo propio* de $\gamma\zeta$ y $\tau_{\gamma\vartheta}$ el *tiempo propio* de $\gamma\vartheta$, medidos desde la línea del universo $\gamma\varrho$ por un reloj de un *observador inercial*. Se conectan $\vartheta \rightarrow \zeta$ y $\zeta \rightarrow \zeta$ formando un trapecio en un diagrama de *Minkowski*.

Para una descripción con coordenadas, donde t representa el tiempo medio entre los eventos donde salen las señales lumínicas. El producto entre los tiempos $(t+x)(t-x) = t^2 - x^2 = \tau_{\gamma\zeta}^2$

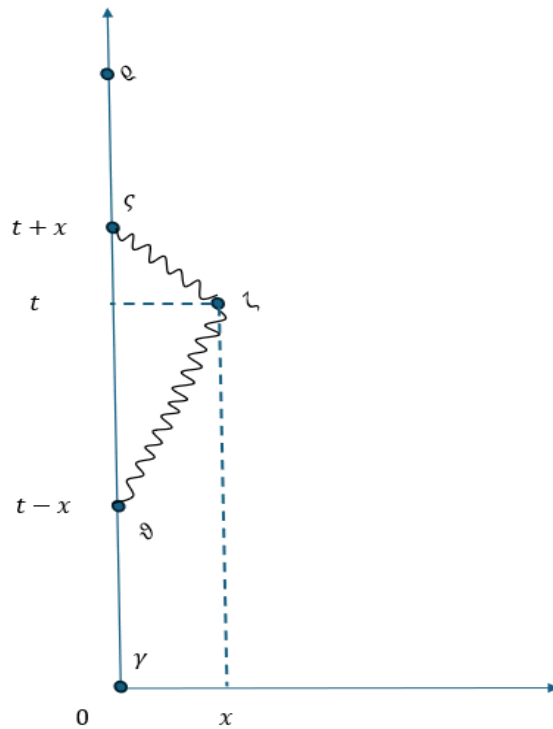


Figura No. 27. De la representación en coordenadas espaciales y temporales de los eventos originales. Creación propia

Introduciendo el uso de coordenadas, para cualquier otro evento cercano ζ , existe un intervalo espacial (distancia propia), así como un intervalo temporal (tiempo propio) dado en las coordenadas apropiadas como:

$$S_{\gamma\zeta}^2 = -\tau_{\gamma\zeta}^2$$

$$S_{\gamma\zeta}^2 = -[x_0(\zeta) - x_0(\gamma)]^2 + [x_1(\zeta) - x_1(\gamma)]^2 + [x_2(\zeta) - x_2(\gamma)]^2 + [x_3(\zeta) - x_3(\gamma)]^2$$

Con $x_0 = t$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, en coordenadas cartesianas, nos indica las diferencias temporal y espacial entre los eventos. Así puede reescribirse comúnmente como:

$$S_{\gamma\zeta}^2 = -[\Delta t(\gamma\zeta)]^2 + [\Delta x(\gamma\zeta)]^2 + [\Delta y(\gamma\zeta)]^2 + [\Delta z(\gamma\zeta)]^2$$

“Si encontramos para cualquier sistema de coordenadas que esto es localmente verdad para todos los eventos vecinos a γ y ζ entonces se garantiza que el sistema de coordenadas es localmente de Lorentz, así como la geometría espaciotemporal”.⁴⁹

Este intervalo espacial es descrito a través del tensor métrico $g_{ij} = g_{ij}u^i u^j$ análogo al operador *kroncker delta* δ_j^i donde $i = j = 1$ y $i \neq j = 0$ como resultados de la operación producto punto de las componentes de espacio tiempo en notación matricial.

⁴⁹ (Misner, Thorne, & Wheeler, 1973, p. 21)

$$\begin{aligned}
S_{\gamma\zeta}^2 = g \langle i, j \rangle &= g_{ij} u^i u^j \\
&= g_{00} u^0 u^0 + g_{01} u^0 u^1 + g_{02} u^0 u^2 + g_{03} u^0 u^3 + g_{10} u^1 u^0 + g_{11} u^1 u^1 + g_{12} u^1 u^2 \\
&+ g_{13} u^1 u^3 + g_{20} u^2 u^0 + g_{21} u^2 u^1 + g_{22} u^2 u^2 + g_{23} u^2 u^3 + g_{30} u^3 u^0 \\
&+ g_{31} u^3 u^1 + g_{32} u^3 u^2 + g_{33} u^3 u^3
\end{aligned}$$

$$S_{\gamma\zeta}^2 = g \langle i, j \rangle = \left\| \begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|$$

Cuando $g(i, i) = i^2$, $g(i, j) = g(j, i) = i \cdot j = j \cdot i$ se obtiene el producto escalar de i sobre j y viceversa. El término $g_{00} u^0 u^0 = -1$ representa la coordenada temporal. Esta notación matricial se denomina métrica de Minkowski.

Esta forma del intervalo es una aproximación válida en vecindarios pequeños incluso en geometrías curvas (principio de equivalencia).

3.2 Operador *Hodge-star* en la métrica de Minkowski⁵⁰

El operador Star puede también considerarse como una función bilineal de formas diferenciales:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \geq \bigwedge^k (\mathbb{R}^n) \times \bigwedge^k (\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$$

Generalizando con esta expresión, una operación asociada con el producto punto entre formas diferenciales en función de esta expresión.

Se define $\star \omega$ como la única $n - k$ forma tal que para todo v que pertenece a $\bigwedge^k (\mathbb{R}^n)$

⁵⁰ Michael Penn (2020)
Ozols, M. (2012)

$$v \wedge \star \omega = \langle \omega, v \rangle dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

Para extender esta expresión a k -formas con $I = (i_1, \dots, i_k)$ y $J = (j_1, \dots, j_l)$ para el producto punto entre dx_I y dx_J ,

$$\langle dx_I, dx_J \rangle \geq \sum_{\sigma \in S_m} \text{sgn}(\sigma) \langle dx_{i_1}, dx_{j_{\sigma 1}} \rangle \cdots \langle dx_{i_k}, dx_{j_{\sigma k}} \rangle$$

Leyéndose inicialmente como la suma de todas las permutaciones σ del grupo simétrico S_m , donde:

- I. S_m es el conjunto de todas las permutaciones de k elementos.
- II. $\text{sgn}(\sigma)$ es el signo de la permutación. Así que es $+1$ cuando es una permutación par y -1 cuando la permutación es impar, refiriéndose así al número de transposiciones.

Esta expresión describe así mismo el determinante de una matriz $m \times n$ que permite relacionar sus operaciones internas con aquellas que definen el producto exterior; (i) mantiene sus características multilineares visualizándose a través del cambio de filas o columnas, (ii) establece orientación de superficies y volúmenes de acuerdo con el signo producto a razón de las permutaciones realizadas además incluyendo su carácter anti conmutativo (iii) mantiene el criterio de independencia lineal.

De la métrica de Minkowski, obtenemos vía producto punto los términos que la conforman la matriz diagonal:

$$\langle dt, dt \rangle = -1$$

$$\langle dx, dx \rangle = 1$$

$$\langle dy, dy \rangle = 1$$

$$\langle dz, dz \rangle = 1$$

Recordemos que tenemos 3 coordenadas espaciales y una coordenada temporal, linealmente independientes, dx, dy, dz, dt . Si contemplamos el espacio de las 2 formas en $\mathbb{R}^4: \Lambda^2(\mathbb{R}^4)$ de acuerdo con el coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ obtenemos 6 *dos-formas* asociadas a un espacio de 4-dimensiones.

$$(i) dt \wedge dx$$

$$(iv) dx \wedge dy$$

$$(ii) dt \wedge dy$$

$$(v) dy \wedge dz$$

$$(iii) dt \wedge dz$$

$$(vi) dx \wedge dz$$

También puede conocerse la cantidad de formas correspondientes a este espacio a través del triángulo de Pascal.

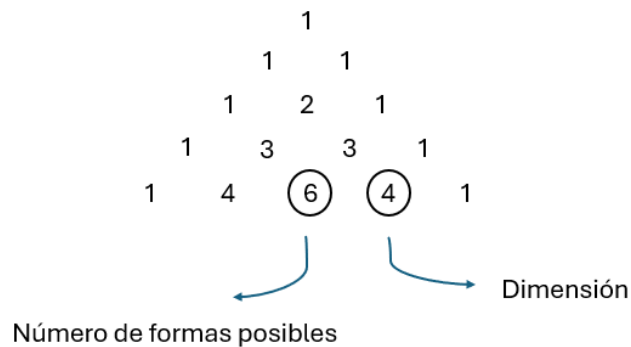


Figura No. 28. Del uso del triángulo de Pascal relacionado con el coeficiente binomial para definir el espacio y la *formas* que definen sus operaciones. Creación propia

El desarrollo del producto punto la 2-forma (i) $dt \wedge dx$ por sí misma nos resulta:

$$\langle dt \wedge dx, dt \wedge dx \rangle = \langle dt, dt \rangle \langle dx, dx \rangle - \langle dt, dx \rangle \langle dx, dt \rangle$$

$$\langle dt \wedge dx, dt \wedge dx \rangle = (-1)(1) - (0)(0) = -1$$

Siendo $\langle dt, dt \rangle \langle dx, dx \rangle$ la permutación identidad (1) y $-\langle dt, dx \rangle \langle dx, dt \rangle$ la primera permutación (1,2) por lo cual lleva el signo negativo.

Simultáneamente para las demás 2-formas (ii), (iii), (iv), (v), (vi) por sí mismas resulta:

$$\langle dt \wedge dy, dt \wedge dy \rangle = \langle dt \wedge dz, dt \wedge dz \rangle = -1$$

$$\langle dx \wedge dy, dx \wedge dy \rangle = \langle dy \wedge dz, dy \wedge dz \rangle = \langle dx \wedge dz, dx \wedge dz \rangle = 1$$

Los términos restantes producen cero.

Resulta así la matriz detallada por las operaciones del producto punto entre las 2-formas establecidas.

	$dt \wedge dx$	$dt \wedge dy$	$dt \wedge dz$	$dx \wedge dy$	$dy \wedge dz$	$dx \wedge dz$
$dt \wedge dx$	-1	0	0	0	0	0
$dt \wedge dy$	0	-1	0	0	0	0
$dt \wedge dz$	0	0	-1	0	0	0
$dx \wedge dy$	0	0	0	1	0	0
$dy \wedge dz$	0	0	0	0	1	0
$dx \wedge dz$	0	0	0	0	0	1

Dónde la línea punteada divide las coordenadas espaciales de las coordenadas temporales.

Si contemplamos el espacio de las 3 formas en \mathbb{R}^4 : $\Lambda^3(\mathbb{R}^4)$ de acuerdo con el coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ obtenemos 4 3-formas asociadas a un espacio de 4-dimensiones.

$$(i) dx \wedge dy \wedge dz$$

$$(iii) dt \wedge dy \wedge dz$$

$$(ii) dt \wedge dx \wedge dy$$

$$(iv) dt \wedge dx \wedge dz$$

Tomaremos (ii) $dt \wedge dx \wedge dy$ de manera que:

$$\langle dt \wedge dx \wedge dy, dt \wedge dx \wedge dy \rangle =$$

$$\langle dt, dt \rangle \langle dx, dx \rangle \langle dy, dy \rangle - \langle dt, dx \rangle \langle dx, dt \rangle \langle dy, dy \rangle$$

$$- \langle dt, dy \rangle \langle dx, dx \rangle \langle dy, dt \rangle - \langle dt, dt \rangle \langle dx, dy \rangle \langle dy, dx \rangle$$

$$- \langle dt, dy \rangle \langle dx, dt \rangle \langle dy, dx \rangle - \langle dt, dx \rangle \langle dx, dy \rangle \langle dy, dt \rangle$$

$$= (1)(-1)(-1) - (0)(0)(-1) - (0)(-1)(0) - (1)(0)(0) - (0)(0)(0) - (0)(0)(0)$$

$$= 1$$

Este resultado es generado por la permutación identidad (1) y las permutaciones

$$(1,2) (1,3) (2,3)(1,2,3)(1,3,2)$$

De las posibles 16 operaciones establecidas en este espacio cuatridimensional se obtiene la matriz diagonal:

	$dx \wedge dy \wedge dz$	$dt \wedge dx \wedge dy$	$dt \wedge dy \wedge dz$	$dt \wedge dx \wedge dz$
$dx \wedge dy \wedge dz$	-1	0	0	0
$dt \wedge dx \wedge dy$	0	1	0	0
$dt \wedge dy \wedge dz$	0	0	1	0
$dt \wedge dx \wedge dz$	0	0	0	1

Para un espacio de las formas $\Lambda^1(\mathbb{R}^4)$ el operador *Hodge-star* aplicado a la componente temporal nos arroja una 3-forma,

$$\star dt = dx \wedge dy \wedge dz$$

para probar la expresión tomaremos

$$\star dt = A dx \wedge dy \wedge dz + B dt \wedge dx \wedge dy + C dt \wedge dy \wedge dz + D dt \wedge dx \wedge dz$$

$$v \wedge \star dt = \langle dt, v \rangle dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

para $v = dt$, entonces

$$dt \wedge \star dt = \langle dt, dt \rangle dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz$$

En el lado izquierdo obtendremos

$$dt \wedge \star dt = A dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz + B dt \wedge dt \wedge dx \wedge dy + C dt \wedge dt \wedge dy \wedge dz + D dt \wedge dt \wedge dx \wedge dz$$

El único término resultante es $A dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz$ y, por ende,

$$dt \wedge \star dt = A dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz = \langle dt, dt \rangle dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz$$

Con $\langle dt, dt \rangle = 1$, definimos $A = 1$. En la expresión para $\star dt$, los coeficientes B, C, D son igual a cero, por lo tanto

$$\star dt = dx \wedge dy \wedge dz$$

Así a través del operador *Star*, la matriz identidad puede ser establecida como:

	$\star dt$	$\star dz$	$\star dx$	$\star dy$
$\star dt$	-1	0	0	0
$\star dz$	0	1	0	0
$\star dx$	0	0	1	0
$\star dy$	0	0	0	1

3.3 Tensor electromagnético ⁵¹

Conocemos de forma clásica la expresión que describe la fuerza de Lorentz en electromagnetismo, $F = q(E + v \times B)$ que relaciona los campos eléctrico y magnético.

Para nuestros propósitos iniciaremos con un elemento que compacta esta definición a través de la matriz generada por el *tensor electromagnético relativista* “Esta ecuación matricial

⁵¹ Eastman, A. (s.f.). *Differential forms and their application to Maxwell's equations*.

demuestra la unidad de los campos eléctrico y magnético. Ningún término por sí mismo E (Campo eléctrico) o B (Campo magnético) es una unidad geométrica independiente del marco”⁵² refiriendo la unidad que conforman estos campos intrínsecamente. Surge de la formulación del electromagnetismo en el contexto de las transformaciones de Lorentz, introduciendo las posibilidades de la electrodinámica en el campo de la relatividad especial, con características invariantes y con referencia espaciotemporal en la métrica de Minkowski.

$$\|F_{\beta}^{\alpha}\| = \begin{vmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{vmatrix}$$

Con $\alpha = \beta = (0,1,2,3)$

Esta matriz antisimétrica se entiende producto de la conformación de la definición matricial de la divergencia y el rotacional de los campos eléctrico y magnético respectivamente⁵³

$$\nabla \cdot E = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

$$\nabla \times B = \begin{pmatrix} 0 & -\partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & -\partial/\partial x \\ -\partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$$

⁵² Misner et Al, 1970

⁵³ Eastman, A. (s.f.). *Differential forms and their application to Maxwell's equations.*

Donde el vector fila 1×3 superior indica el producto escalar del campo eléctrico E y los elementos 3×3 de la diagonal también superior indica el producto vectorial del campo magnético. Es importante resaltar que la diagonal superior e inferior comparten una relación de invariancia independiente de su elección con $E \rightarrow B, B \rightarrow -E$

La siguiente expresión nos presentan en extenso la ley magnetostática ($\nabla \cdot B = 0$) y magnetodinámica ($\frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \times E = 0$) en forma vectorial y resumidas en la *ley de Faraday*.

$$\begin{cases} \frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y}, \\ \frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}, \\ \frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x}, \end{cases} \quad \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

Resumida así:

$$F = E + B = 0$$

A partir de la matriz generada por el tensor electromagnético establecemos nuevas etiquetas para las filas y columnas

	dt	dx	dy	dz
dt	0	E_x	E_y	E_z
dx	E_x	0	B_z	$-B_y$
dy	E_y	$-B_z$	0	B_x
dz	E_z	B_y	$-B_x$	0

Para conformar la expresión que describe la *ley de Faraday* en formas diferenciales, ubicaremos la posición en la matriz de los elementos como referencia y asociaremos su posición a las componentes espacial y temporal según corresponda. Al ser de naturaleza antisimétrica nos fijaremos solamente en los términos de la diagonal inferior, sin embargo, este ejercicio se puede efectuar sin importar su elección teniendo en cuenta la relación $E \rightarrow B, B \rightarrow -E$.

Para el término E_x su posición se asocia a las componentes fila dt y columna dx , por tanto, este término queda compuesto como:

$$E_x dx \wedge dt$$

Similarmente junto a los términos restantes conformantes del campo eléctrico como parte del **tensor electromagnético** F nos arroja la siguiente información

$$E = E_x dx \wedge dt + E_y dy \wedge dt + E_z dz \wedge dt$$

Análogamente para los términos conformantes del campo magnético

$$B = B_x dz \wedge dy + B_y dz \wedge dx + B_z dy \wedge dx$$

La expresión que da cuenta de la *ley de Faraday* en formulación relativista del electromagnetismo, el campo electromagnético total se representa por una **2-forma** F , que combina los campos eléctricos y magnéticos:

$$F = E_x dx \wedge dt + E_y dy \wedge dt + E_z dz \wedge dt + B_x dz \wedge dy + B_y dz \wedge dx + B_z dy \wedge dx$$

Estructuralmente con coeficientes acompañados de 2 formas en 4 dimensiones

(dt, dx, dy, dz) . Usaremos el operador *derivada exterior* d sobre F , operador que

llamaremos de aquí en adelante como *Faraday*.

$$\begin{aligned} dF = & \frac{E_x}{dy} dy \wedge dx \wedge dt + \frac{E_x}{dz} dz \wedge dx \wedge dt + \frac{E_y}{dx} dx \wedge dy \wedge dt + \frac{E_y}{dz} dz \wedge dy \wedge dt \\ & + \frac{E_z}{dx} dx \wedge dz \wedge dt + \frac{E_z}{dy} dy \wedge dz \wedge dt + \frac{B_x}{dx} dx \wedge dz \wedge dy + \frac{B_x}{dt} dt \wedge dz \wedge dy \\ & + \frac{B_y}{dy} dy \wedge dz \wedge dx + \frac{B_y}{dt} dt \wedge dz \wedge dx + \frac{B_z}{dz} dz \wedge dy \wedge dx + \frac{B_z}{dt} dt \wedge dy \wedge dx \end{aligned}$$

Aplicando la propiedad anticonmutativa y asociando los términos semejantes

$$\begin{aligned} dF = & \left(\frac{E_y}{dx} - \frac{E_x}{dy} - \frac{B_z}{dt} \right) dt \wedge dx \wedge dy + \left(\frac{E_z}{dx} - \frac{E_x}{dz} + \frac{B_y}{dt} \right) dt \wedge dx \wedge dz \\ & + \left(\frac{E_z}{dy} - \frac{E_y}{dz} - \frac{B_x}{dt} \right) dt \wedge dy \wedge dz + \left(-\frac{B_x}{dx} + \frac{B_y}{dy} - \frac{B_z}{dz} \right) dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

Con B_x y B_z con signo negativo en el tensor métrico finalmente obtenemos

$$\begin{aligned} dF = & \left((\nabla \times E)_z + \frac{B_z}{dt} \right) dt \wedge dx \wedge dy + \left((\nabla \times E)_y + \frac{B_y}{dt} \right) dt \wedge dx \wedge dz \\ & + \left((\nabla \times E)_x + \frac{B_x}{dt} \right) dt \wedge dy \wedge dz + (\nabla \cdot B) dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

Así dF representa la unificación de las ecuaciones para la *inducción electromagnética* F

(i) $\nabla \cdot B = 0$ y (ii) $\partial B / \partial t + \nabla \times E = 0$ conocidas como *Ley de Gauss para el campo magnético* y *Ley de Faraday-Lenz* respectivamente.

Ley de Faraday ($F = B + E$) Inducción electromagnética	
$\left(\frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \times E = 0\right)$	dF (1-forma)

Tomaremos de nuevo el operador F para conocer la *Ley de Gauss para la densidad de flujo eléctrico* ρ y la *Ley de Ampere* de forma generalizada en el vacío.

Aplicamos el operador *Hodge-star* al operador *Faraday* F

$$\star F = E_x dy \wedge dz - E_y dx \wedge dz + E_z dx \wedge dy - B_x dt \wedge dx + B_y dt \wedge dy - B_z dt \wedge dz$$

Luego al aplicar el operador derivada exterior al operador $\star F$

$$\begin{aligned} d \star F &= \frac{E_x}{dx} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{E_x}{dt} dt \wedge dy \wedge dz - \frac{E_y}{dy} dy \wedge dx \wedge dz \\ &\quad - \frac{E_y}{dt} dt \wedge dx \wedge dz + \frac{E_z}{dz} dz \wedge dx \wedge dy + \frac{E_z}{dt} dt \wedge dx \wedge dy \\ &\quad - \frac{B_x}{dy} dy \wedge dt \wedge dx - \frac{B_x}{dz} dz \wedge dt \wedge dx + \frac{B_y}{dx} dx \wedge dt \wedge dy \\ &\quad + \frac{B_y}{dz} dz \wedge dt \wedge dy - \frac{B_z}{dx} dx \wedge dt \wedge dz - \frac{B_z}{dy} dy \wedge dt \wedge dz \end{aligned}$$

Aplicando la propiedad de anticonmutatividad y asociando los términos

$$d \star F = \left(\frac{E_x}{dx} + \frac{E_y}{dy} + \frac{E_z}{dz}\right) dx \wedge dy \wedge dz + \left(\frac{E_x}{dt} + \frac{B_y}{dz} + \frac{B_z}{dy}\right) dt \wedge dy \wedge dz$$

$$+ \left(\frac{E_y}{dt} - \frac{B_x}{dz} + \frac{B_z}{dx} \right) dt \wedge dx \wedge dz + \left(\frac{E_z}{dt} - \frac{B_x}{dy} - \frac{B_y}{dx} \right) dt \wedge dx \wedge dy$$

Con B_x y B_z con signo negativo en el tensor métrico finalmente obtenemos

$$d \star F = (\nabla \cdot E) dx \wedge dy \wedge dz + \left(\frac{E_x}{dt} + (\nabla \times B)_x \right) dt \wedge dy \wedge dz \\ + \left(\frac{E_y}{dt} + (\nabla \times B)_y \right) dt \wedge dx \wedge dz + \left(\frac{E_z}{dt} + (\nabla \times B)_z \right) dt \wedge dx \wedge dy$$

Ahora aplicando el operador *Hodge-star* a esta nueva expresión

$$\star d \star F = (\nabla \cdot E) dt + \left(\frac{E_x}{dt} + (\nabla \times B)_x \right) dx \\ + \left(\frac{E_y}{dt} + (\nabla \times B)_y \right) dy + \left(\frac{E_z}{dt} + (\nabla \times B)_z \right) dz$$

El término $(\nabla \cdot E)$ proporciona la densidad de carga eléctrica ρ , los términos restantes nos proporcionan las componentes en dx , dy y dz de la densidad de corriente

$$\star d \star F = \rho dt - (J_x dx + J_y dy + J_z dz)$$

Es así como $\star d \star F$ se describe como una 1-forma unificando así la *Ley de Gauss para la densidad de flujo eléctrico* ρ y la *Ley de Ampere* de forma generalizada en el vacío.

Consideremos a modo de exposición sus expresiones en forma vectorial.

$$\begin{cases} \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial y}, \\ \frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z}, \\ \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial x}, \end{cases} \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

Ley de Ampere-Maxwell Conservación de la carga	
$\rho dt - (J_x dx + J_y dy + J_z dz)$	$\star d \star F$ (1-forma)

Capítulo 4

Aplicación de las formas diferenciales y representación gráfica de la inducción electromagnética.

Este apartado presenta un análisis de las representaciones geométricas del campo electromagnético derivadas de la Ley de Faraday, recopiladas y sintetizadas a partir de la exposición de la formalización de las formas diferenciales. Se busca evaluar la capacidad de estas visualizaciones para capturar la esencia física de la inducción electromagnética, sus ventajas, limitaciones y coherencia con el formalismo matemático subyacente.

Estas representaciones son producto la modelación en *Python*, con el uso de las librerías *Numpy* y *Matplotlib.pyplot*. con asistencia de la Inteligencia artificial en la corrección del código y generación de alternativas de visualización.

En la ley de Faraday como parte del **tensor electromagnético** F , en formulación relativista del electromagnetismo, el campo electromagnético total se representa por una **2-forma** F , que combina los campos eléctricos y magnéticos:

$$F = E_x dx \wedge dt + E_y dy \wedge dt + E_z dz \wedge dt + B_x dz \wedge dy + B_y dz \wedge dx + B_z dy \wedge dx$$

1. Inicialmente representaremos gráficamente la parte del campo eléctrico del operador F

$$F_E = E_x dx \wedge dt + E_y dy \wedge dt + E_z dz \wedge dt$$

Las componentes como $E_x dx \wedge dt$ corresponden a áreas en un plano espacio-tiempo. (Misner et Al, 1973) mientras que en (Frankel, T, 2011) las 2-formas con un componente temporal, como $dx \wedge dt$ corresponden a flujos en el espacio tiempo, pero requieren una “proyección” espacial a través del dual, aplicando el operador *Hodge-star* para su representación visual⁵⁴

De este último esta expresión puede establecerse así.

$$F_E = (E_x dx + E_y dy + E_z dz) \wedge dt$$

De la propiedad asociativa en el producto de *1-formas* vista en el capítulo 2.

Representando el campo eléctrico espacial en 1-formas. Dado a las limitaciones de su representación gráfica, es necesario aplicar el operador *Hodge-star*.

La expresión se reescribe como,

$$\star F_E = E_x dy \wedge dz + E_y dz \wedge dx + E_z dy \wedge dx$$

Se espera así que cada 2 forma represente un área o superficie orientada y que su coeficiente que representa el campo eléctrico en las diferentes componentes su magnitud.

Para su visualización representaremos $E_x dy \wedge dz$ en el plano $dy - dz$

⁵⁴ Frankel, T. *The Geometry of Physics: An Introduction*, 3rd ed. (Cambridge Univ. Press, 2011). Electromagnetism in Minkowski space, Pág 197

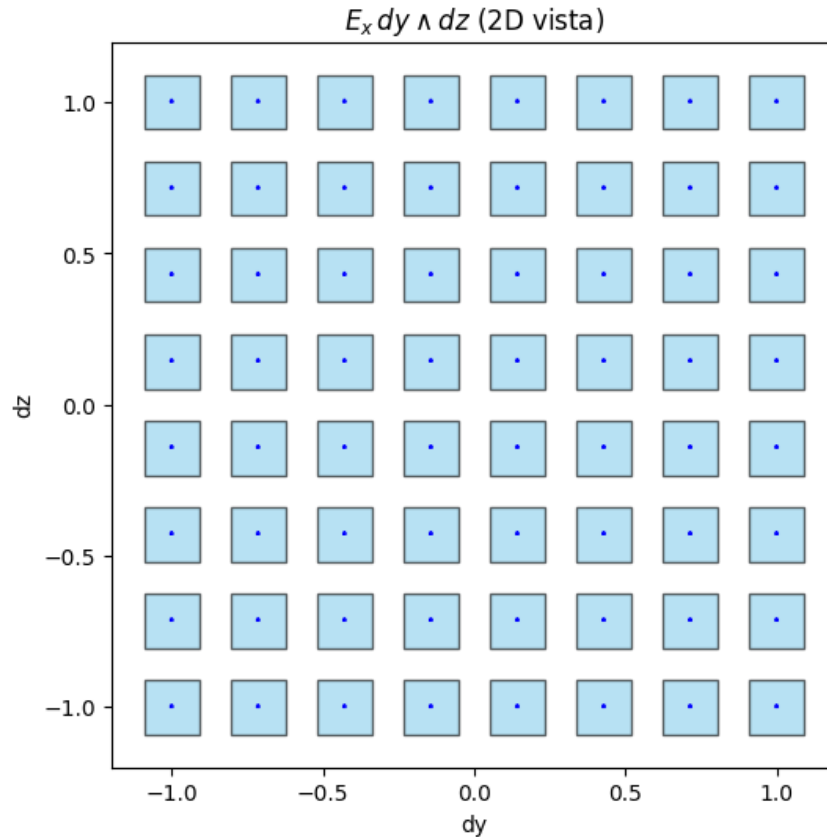
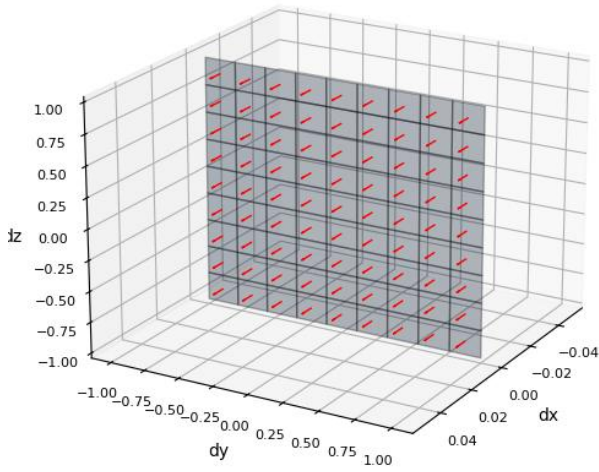


Figura No. 29. (2D) De la representación del campo eléctrico E_x como malla o segmentos de área en el plano $dy \wedge dz$ producto de la aplicación del operador Hodge-Star sobre las las componentes del campo eléctrico en F_E . Los puntos en el centro representan la orientación de los planos hacia afuera. Imagen creada con Python

Los puntos de color azul en el centro de las superficies, representa el vector normal que, indica la dirección de las superficies, recordando que son áreas orientadas.

Se observan así mismo segmentos de área o pequeñas porciones de superficie que conforman una hipersuperficie o un plano infinito que se extiende en el plano $dy - dz$ en dirección de la componente dx , siendo una 2 forma continua. La representación anterior es mostrada de manera local por cuadrados discretos para poder visualizar su orientación y magnitud.

$E_x dy \wedge dz$ como hipersuperficie continua con orientación (3D)



$E_x dy \wedge dz$

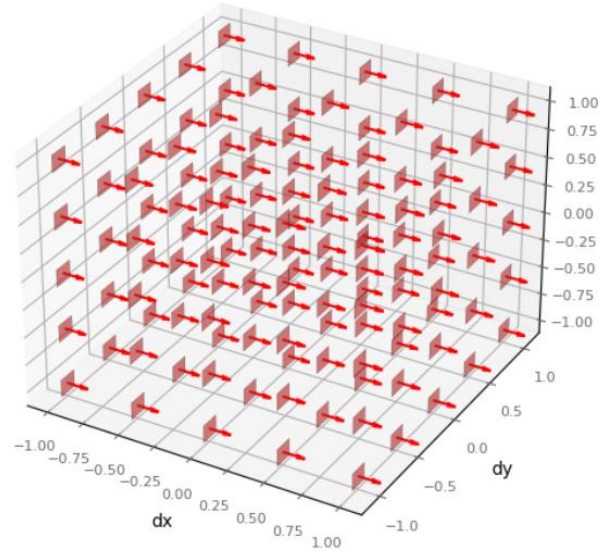
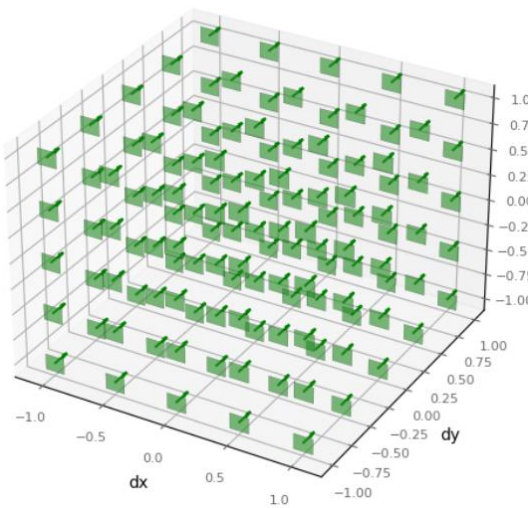


Figura No. 30. (3D) De la Hipersuperficie (Izquierda) y su segmentación en áreas con su respectiva orientación. Los planos que se describen en dirección dx con su respectiva orientación como ejercicio de perspectiva de su orientación.

Imagen creada con Python

De manera análoga se sigue de los términos $E_y dz \wedge dx$ y $E_z dy \wedge dx$ donde se orientan en dirección dy y dz respectivamente.

$E_y dz \wedge dx$



$E_z dx \wedge dy$

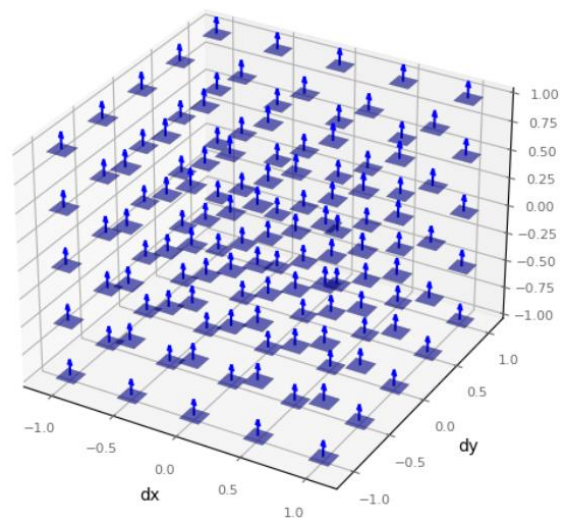


Figura No. 31. (3D) De la comparación de los planos o 2-formas que describen las componentes dy y dz del dual del campo eléctrico con sus respectivas orientaciones. Imagen creada con Python.

Aquí con $E_x = E_y = E_z = C$ que corresponde a un campo eléctrico constante y uniforme.

La superposición en la expresión, la orientación de los planos y su magnitud en sentido de sus vectores normales nos generan la siguiente representación

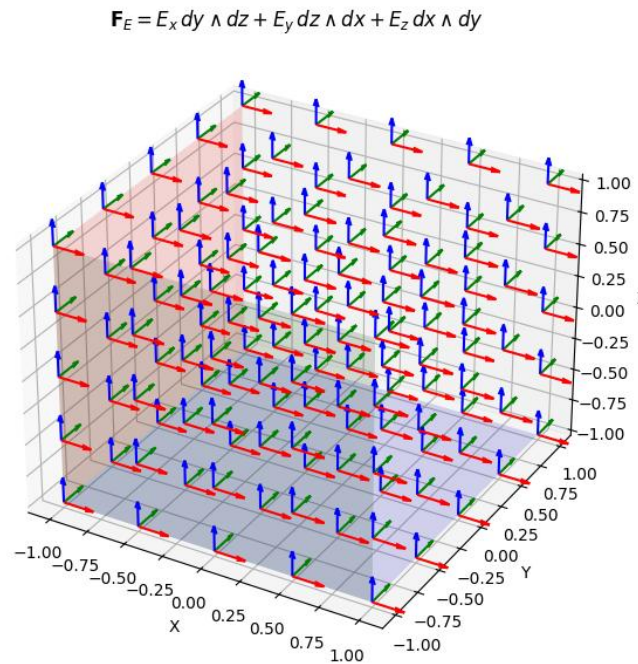


Figura No. 32 Dual (Hodge-Star) del campo eléctrico en el tensor electromagnético de la Ley de Faraday: Cada plano establecido con sus vectores normales que indican la orientación de las hipersuperficies, con $|E_x| = |E_y| = |E_z| = C$ como campo constante y uniforme. Imagen creada con Python

Los colores verde, azul y rojo representan la hipersuperficie generada por cada expresión así los vectores asociados con los colores de cada superficie indican su orientación punto a punto.

Esta representación ayuda a entender cómo el campo eléctrico se descompone en elementos de área. Es necesario identificar que la *1-forma* $(E_x dx + E_y dy + E_z dz) = E$ mide la

fuerza por unidad de carga⁵⁵ o diferencia de potencial en una dirección dada representada por el vector normal sobre las superficies generadas por su dual $\star E$, la 2-forma que mide flujo eléctrico a través de planos o superficies, permitiendo asociar a cada plano un valor de circulación o flujo⁵⁶.

El siguiente cuadro resume así las implicaciones vistas del campo eléctrico en formas

Operador	Tipo	Representación	Mide
E	1-forma	Vector o 1-forma	Fuerza por unidad de carga a lo largo de un camino
$\star E$	2-forma	Superficie	Flujo eléctrico (en un plano ortogonal a E)

Geoméricamente $\star E$ es el *complemento ortogonal* E , como referencia visual de lo que sucede entre estos dos operadores $\star E \perp E$.

De la expresión que describe la *Ley de Faraday* en forma vectorial

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

Es posible obtener una expresión reducida en *formas diferenciales* a partir de la aplicación del operador derivada exterior sobre el campo eléctrico.

Así en la expresión:

⁵⁵ $E(x, y, z) = Ex\hat{i} + Ey\hat{j} + Ez\hat{k}$ como definición vectorial del campo eléctrico.

⁵⁶ Warnick, K. F., & Russer, P. (2014). Differential forms and electromagnetic field theory. *Progress In Electromagnetics Research*, *148*, 83–112.

$$dE = \frac{-\partial B}{\partial t}$$

Su parte izquierda representa la *2-forma* que es posible comparar directamente con la variación del campo magnético B en el tiempo.

Podemos relacionar estas 2 cantidad correspondientes como:

$$dE = \nabla \times E$$

2. La ley de Faraday en razón a sus términos del campo magnético $F_B = B_x dz \wedge dy + B_y dz \wedge dx + B_z dy \wedge dx$

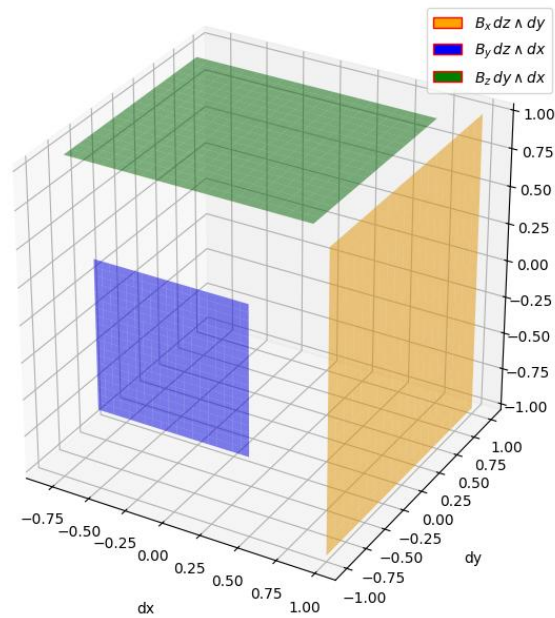


Figura No. 33. (3D) De la conformación en el espacio de los hiperplanos que describen el campo magnético.

Análogos a los planos creados inicialmente con el dual del campo eléctrico. Imagen creada con Python

Componentes de la 2-forma B y orientaciones

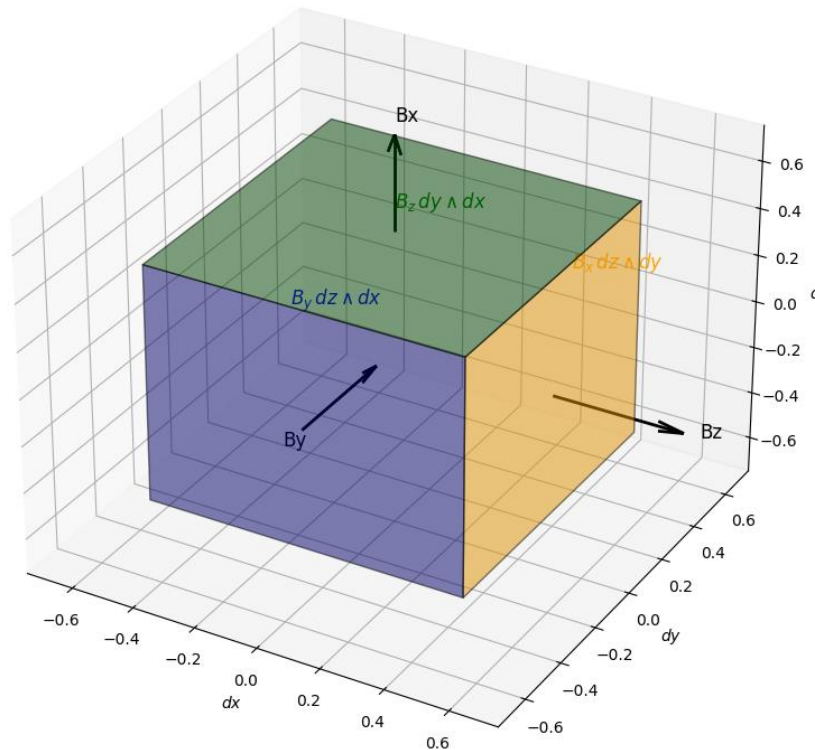


Figura No. 34. (3D) De la conformación en el espacio de los hiperplanos que describen el campo magnético.

Esta vez con sus orientaciones en el espacio. Imagen creada con Python.

Como referencia a la representación de las *2-formas* que representan el dual (*Hodge-Star*) del campo eléctrico, estos planos también son orientados y a pesar de tener una mayor dimensión (en términos de su extensión, pueden ser también segmentados o limitados para facilitar su representación). Los planos generados por la *2-forma del campo magnético* nos presentan esta coincidencia.

$\star E$ (Dual del E)	B
$E_x dy \wedge dz$	$-B_x dy \wedge dz$
$E_y dz \wedge dx$	$B_y dz \wedge dx$
$E_z dx \wedge dy$	$B_z dx \wedge dy$

Bajo la información de esta tabla podríamos objetar que son planos paralelos y que se describen bajo la misma componente, es decir el vector que representa la dirección del campo eléctrico $E_y dz \wedge dx$ es el mismo que $B_y dz \wedge dx$ sin embargo debemos tener en cuenta que al aplicar el operador *Hodge-Star* sobre los términos del campo eléctrico, estos planos se describen en el espacio dual mientras que los del campo magnético se describen en el espacio original

Es necesario aclarar que en el espacio-tiempo de Minkowski en 4D (dt, dx, dy, dz) es posible graficar el dual del campo eléctrico E ($\star E$) pero no sucede lo mismo con respecto al dual del campo magnético B ($\star B$) por que su dual representa un flujo espaciotemporal. Por lo tanto, su representación solo se hace visible cuando se realiza en 3D siendo su dual ($\star B$) posible de representar gráficamente.

$$\star F_B = B_x dx + B_y dy + B_z dz$$

Siendo una *1-forma* que representa el dual del campo magnético.

Esta representación por separado del campo eléctrico E y el campo magnético B resulta de este modo importante porque permite encontrar las limitaciones con formas diferenciales.

Dim	Objeto	Representación	Dual	¿Se mezclan E y B?
4D	<i>F</i> Tensor de Faraday	2-forma en 4D	2-forma en 4D ($\star F$)	Sí
4D	Campo eléctrico <i>E</i>	1-forma	2-forma en 4D ($\star E$)	Sí
4D	Campo magnético <i>B</i>	2-forma	2 forma en 4D ($\star B$)	Sí
3D	Campo eléctrico <i>E</i>	1-forma	No es una 2-forma en 3D	No
3D	Campo magnético <i>B</i>	2-forma en 3D	1-forma (vector)	No

Así la representación del campo eléctrico como *1-formas o vectores* y la del campo magnético como *2-formas* en un espacio-tiempo de 4D, resulta más apropiada y fácil de usar para representar *F* como tensor electromagnético en el fenómeno de inducción electromagnética como en (Misner et. Al, 1983. p.99).

3. En correspondencia a poder representar gráficamente el fenómeno de inducción electromagnética que representa la ley de Faraday o el operador *F* en formas diferenciales retomaremos la ecuación

$$dE = \frac{-\partial B}{\partial t}$$

La parte derecha corresponde a la variación del campo magnético en el tiempo, en este caso podemos tomar como referencia cualquiera de los términos del campo magnético dentro de

la ecuación F es decir $F_B = B_x dz \wedge dy + B_y dz \wedge dx + B_z dy \wedge dx$. Así escogeremos $B_x dz \wedge dy$ haciendo B_y y B_z igual a cero. Variando solo el campo magnético en el plano $dz \wedge dy$ entonces,

$$dE = -B_x dz \wedge dy = B_x dy \wedge dz$$

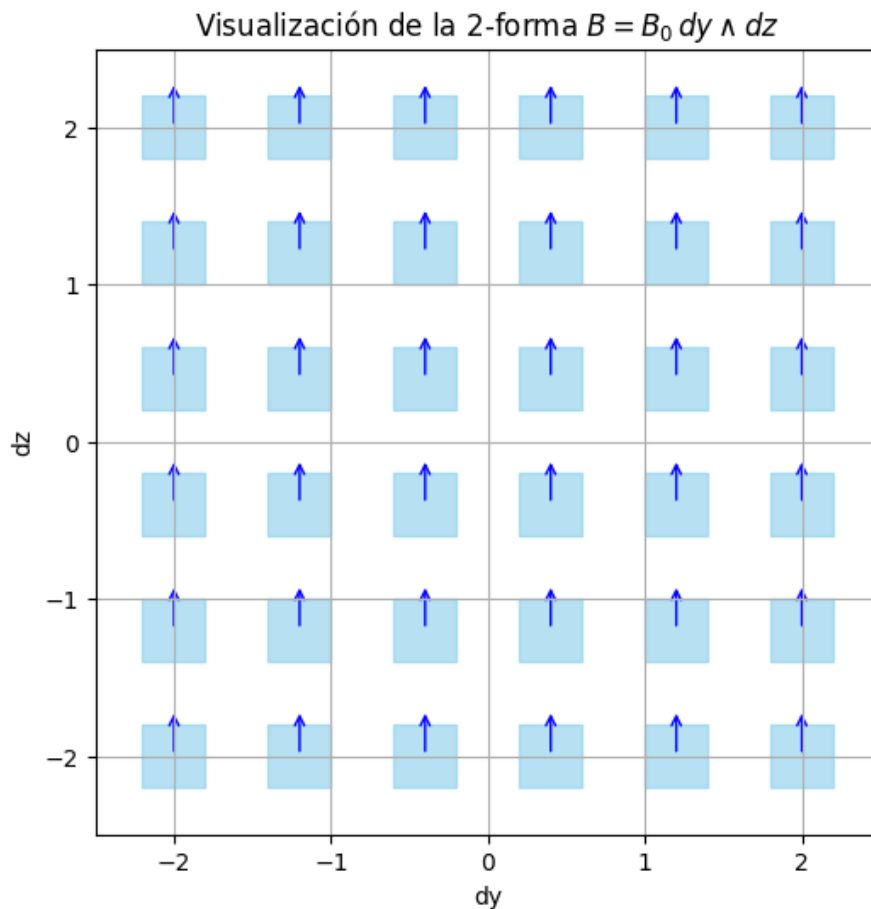


Figura No. 35. (2D) De la conformación en el espacio de los segmentos de plano que describen el campo magnético. Su orientación en el espacio es en dirección dx . Imagen creada con Python

Si $B_x = B_0$ es decir es una constante, es necesario encontrar una *1-forma* E tal que sea igual a $B_0 dy \wedge dz$. Una de sus soluciones que pueden satisfacer esta igualdad es⁵⁷

$$E = -\frac{B_z}{2} dy + \frac{B_y}{2} dz$$

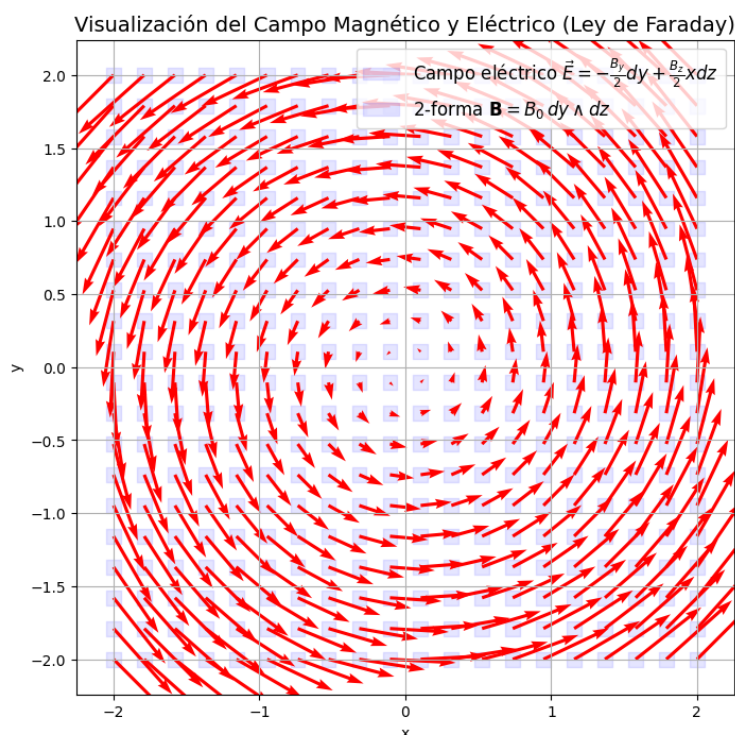


Figura No. 36. (2D) De la inducción electromagnética de acuerdo con la expresión $E = -\frac{B_z}{2} dy + \frac{B_y}{2} dz$ para el campo eléctrico (1-forma) y $B_0 dy \wedge dz$ para el campo magnético (2 forma) como segmentos de área que se orientan en dirección dx . Imagen creada con Python

Es importante resaltar que la forma en la que se propaga la *1-forma* que representa el campo eléctrico es consecuencia de la forma de la función que describe la *2-forma* para el campo magnético.

⁵⁷ Ver anexos.

Visualización 3D del Campo Magnético y Eléctrico

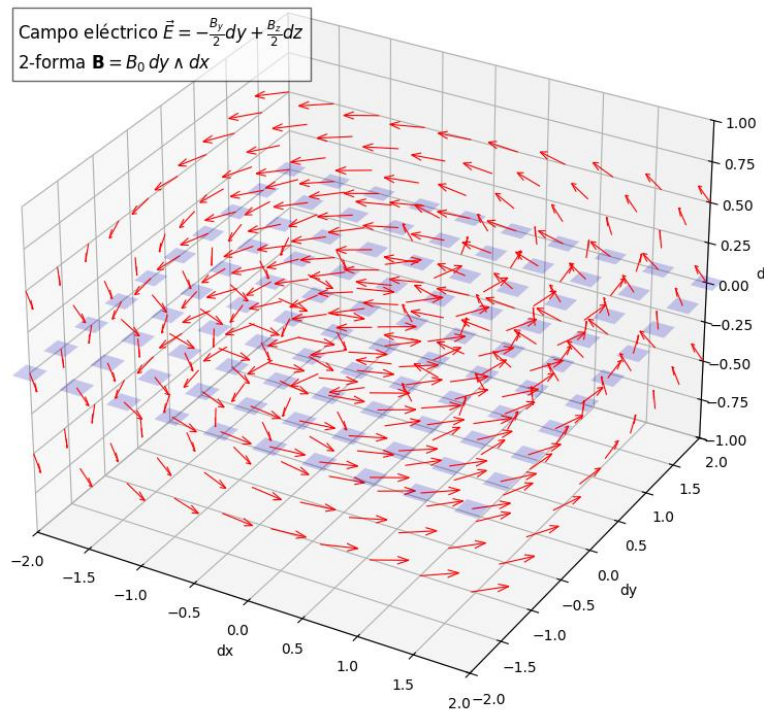


Figura No. 37. (3D) De la inducción electromagnética de acuerdo con la expresión $E = -\frac{B_z}{2} dy + \frac{B_x}{2} dz$ para el campo eléctrico (1-forma) en forma de vórtice y $B_0 dy \wedge dz$ para el campo magnético (2 forma) como segmentos de área que se orientan en dirección dx su desarrollo en el tiempo. Imagen creada con Python

En consecuencia, los planos en azul generados en dirección dx del campo magnético representan el flujo magnético como la cantidad que induce el campo eléctrico en rojo.

Así

Operador	Tipo	Representación	Mide
B	2- forma	Superficie	Flujo magnético (En un plano ortogonal con $\star B$)

$\star B$	1- forma	Vector	Brinda información sobre la intensidad (Magnitud) y dirección del campo magnético.
-----------	-------------	--------	---

Flujo Magnético Variable y Campo Eléctrico Inducido (Ley de Faraday)

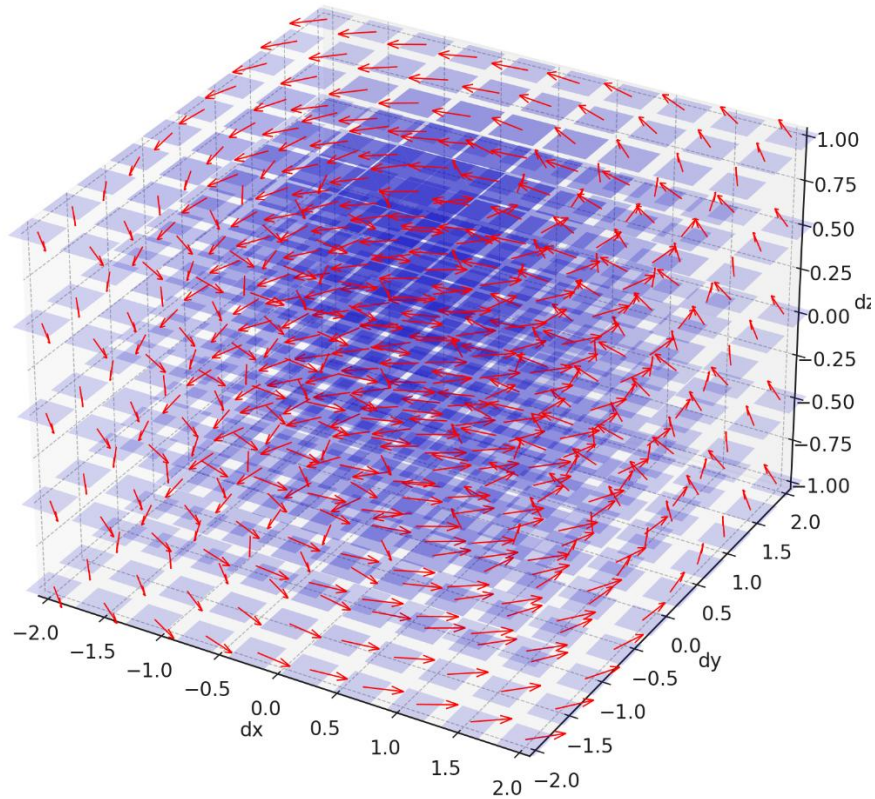


Figura No. 38. (3D) De la inducción electromagnética con el campo eléctrico (1-forma) en forma de vórtice representado por los vectores en rojo $B_0 \, dy \wedge dz$ para el campo magnético (2 forma) como segmentos de área ahora que varían en el tiempo indicando la variación del flujo magnético en el tiempo que se orientan en dirección dx . Imagen creada con Python

Operador	Tipo	Representación	Mide
B	2- forma	Superficie	Flujo magnético (En un plano ortogonal con $\star B$)
$\star B$	1- forma	Vector	Brinda información sobre la intensidad (Magnitud) y dirección del campo magnético.
E	1- forma	Vector o 1- forma	Fuerza por unidad de carga a lo largo de un camino
$\star E$	2- forma	Superficie	Flujo eléctrico (en un plano ortogonal a E)

Finalmente, como punto de referencia en la aplicación del operador *Hodge-star* sobre el operador F que describe la ley de Faraday en formas diferenciales, (Misner et. Al, 1983) nos brindan esta gráfica

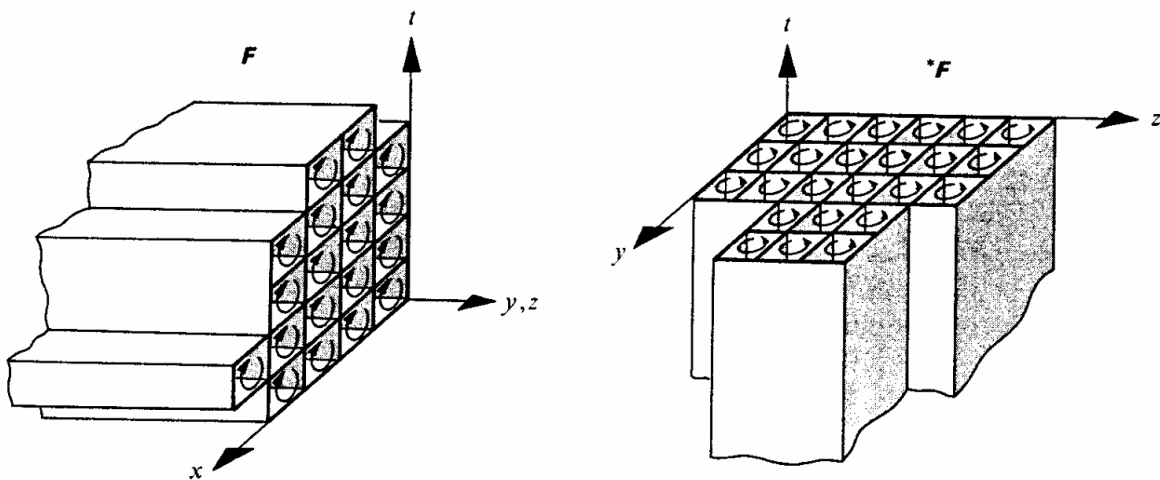


Figura No. 39. **Representación del operador *Hodge-Star* sobre el operador *F Faraday*:** De la aplicación del operador *Hodge-star* sobre el operador *F Faraday*.⁵⁸

La figura de la izquierda nos otorga una imagen análoga al ejercicio de visualización realizado en la figura No 37. pero con una orientación distinta de los planos de acuerdo con su perspectiva. La aplicación del operador (\star) supone una rotación de 90° de acuerdo con la definición dada en el capítulo 2 sobre el operador *Hodge-Star*. Siendo en este caso $\star F$ su dual electromagnético.

⁵⁸ Tomado de: (Misner et. Al. 1973. P. 107)

Conclusiones

1. F es la 2-forma en \mathbb{R}^4 de Faraday $\Lambda^2(\mathbb{R}^4)$ que relaciona el campo eléctrico E (2-forma con componente temporal) y el campo magnético B (2-forma con componente espacial) de forma simultánea. Los unifica en una sola expresión derivada del tensor electromagnético relativista de Minkowski.
2. F_E representa como expresión la 2-forma del campo eléctrico en la expresión para F , Esta expresión inicialmente carece de sentido espacial dado a su componente temporal, dificultando su visualización directa. Su definición luego de aplicar la propiedad asociativa sobre las formas nos permite visualizarlo como una 1-forma $F_E = (E_x dx + E_y dy + E_z dz) \wedge dt$ siendo análogo al gradiente de F_E . Esta definición nos permite relacionar una 1-forma con la representación del gradiente de una función.
3. Su dual $\star F_E$ permite representar geoméricamente planos espaciales que existen en el espacio dual. Estos planos permiten definir inicialmente la orientación del vector o 1-forma de campo eléctrico E correspondiente que físicamente describe la fuerza por unidad de carga a lo largo de un camino, así mismo permite identificar los planos que definen el flujo eléctrico como ortogonales a E con la relación $E \perp \star E$.
4. El elemento dual del campo magnético ($\star B$) no tiene una definición intuitiva en un espacio en \mathbb{R}^4 dado a que describe un flujo espaciotemporal difícil de representar gráficamente. El campo magnético B en el espacio original ya tiene características espaciales que conforman planos orientados en \mathbb{R}^3 siendo una 2-forma. Su dual ($\star B$) en \mathbb{R}^3 consigue así tener una definición de 1-forma o vector indicando la dirección del campo magnético. Por lo tanto para representar de manera

geoméricamente la inducción electromagnética se elige convencionalmente a E como una 1 -forma y a B como una 2 -forma, Siendo B quien mide a través de sus planos orientados el flujo magnético, mientras que E mediría la fuerza por unidad de carga.

5. Los planos definidos B y $\star E$ miden el flujo, magnético y eléctrico correspondientemente. Los vectores o 1 -formas E y $\star B$ miden la intensidad en términos de magnitud y dirección en términos del campo eléctrico y el campo magnético.
6. Es indudable la importancia de los operadores *Diferencial* y *Hodge Star* en la formalización de las expresiones y en la representación geométrica de las formas diferenciales. Mientras que el operador diferencial aumenta la dimensión de la expresión a la que opera, el operador Hodge-Star define el salto entre dimensiones según el espacio de las formas en las que actúe, pero aún más es que intuitivamente genere rotaciones espaciales de 90° en estructuras complejas, facilitando su intuición geométrica como en el caso del dual del tensor electromagnético F
7. La inducción electromagnética está definida en la variación del campo magnético en el tiempo. Representada por un flujo magnético y el campo eléctrico que lo rodea de manera inducida por la variación del flujo magnético, si la dirección de la 2 -forma que representa el flujo magnético cambia de dirección la dirección de la rotación del campo eléctrico inducido también cambia.
8. $dE = \nabla \times E$ es una relación con alto grado de significado. La derivada exterior operada en una 1 -forma o vector nos arroja el rotacional del campo eléctrico E . Sin

embargo, son analogías para poder identificar el movimiento del campo y no representan una igualdad en el sentido de la equivalencia.

9. Los operadores vectoriales son una referencia clara de las expresiones en extenso de aplicar los operadores diferencial y Hodge-Star, de acuerdo con la conclusión anterior no son equivalentes en tanto los operadores de las formas se aplican enteramente a formas, valga la redundancia, mientras que los operadores vectoriales se aplican a campos vectoriales, escalares y a funciones..

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Hertz, H. (1894). *Die Prinzipien der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt* [The principles of mechanics presented in a new context]. Leipzig: Barth.
- [2] Hilbert, D. (1928). *Die Grundlagen der Mathematik* [The foundations of mathematics]. Berlin: Springer.
- [3] Hilbert, D. (1950). *The foundations of geometry* (E. J. Townsend, Trans.). La Salle, IL: The Open Court Publishing Company. (Trabajo original publicado en 1899)
- [4] Vygotsky, L. S. (1995). *Pensamiento y lenguaje: Teoría del desarrollo cultural de las funciones psíquicas* (J. A. González, Trad.). México: Ediciones Fausto. (Obra original publicada en 1934)
- [5] Kline, M. (1980). *Mathematics: The loss of certainty*. New York: Oxford University Press.
- [6] Dieudonné, J. (1992). *Mathematics: The music of reason* (D. C. Wilson, Trans.). New York: Springer-Verlag. (Obra original publicada en 1987)
- [7] Descartes, R. (2002). *Discurso del método* (M. García Morente, Trad.). Madrid: Alianza Editorial. (Obra original publicada en 1637)
- [8] Misner, C. W., Thorne, K. S., & Wheeler, J. A. (1973). *Gravitation*. San Francisco, CA: W. H. Freeman and Company.
- [9] Bachman, D. (2012). *A geometric approach to differential forms*. Providence, RI: American Mathematical Society.
- [10] Sjamaar, R. (2015). *Manifolds and differential forms*. Providence, RI: American Mathematical Society.
- [11] Fortney, J. P. (2018). *A visual introduction to differential forms and calculus on manifolds*. Boca Raton, FL: CRC Press.
- [12] Flanders, H. (1989). *Differential forms with applications to the physical sciences* (2nd ed.). New York, NY: Dover Publications.
- [13] Michael Penn (2020, May 21) Differential Forms | Introduction and the Tangent Space. [Video]. YouTube

https://www.youtube.com/watch?v=PaWj0WxUxGg&list=PL22w63XsKjqzQZtDZO_9s2HEMRJnaOTX7&index=1

[14] Keenan Crane (2021, Feb 3) Discrete Differential Geometry - CMU 15-458/858 [Video]. YouTube <https://www.youtube.com/watch?v=mas->

[PUA3OvA&list=PL9_jI1bdZmz0hIrNCMQW1YmZysAiIYSSS&index=1](https://www.youtube.com/watch?v=mas-PUA3OvA&list=PL9_jI1bdZmz0hIrNCMQW1YmZysAiIYSSS&index=1)

[15] Merino, L. (s.f.). Complemento ortogonal. Universidad de Granada. Recuperado de <https://www.ugr.es/~lmerino/3-3.html>

[16] Ozols, M. (2012, enero 16). *Differential geometric formulation of Maxwell's equations*.

[17] Eastman, A. (s.f.). *Differential forms and their application to Maxwell's equations*.

[18] Landau, L. D., & Lifshitz, E. M. (2000). The classical theory of fields (4th ed.). Butterworth-Heinemann. Pág. 43.

[19] Berkson W., 1981. Las teorías de los campos de fuerza. Desde Faraday hasta Einstein, Alianza Editorial, S. A., Madrid. Introducción, Pág 18

[20] Llancaqueo, A., Caballero, M. C., & Moreira, M. A. (2003). El concepto de campo en el aprendizaje de la Física y en la investigación en educación en ciencias. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias*, *2*(3), 227-253.

[21] Chabay, R., & Sherwood, B. (2006). Restructuring the introductory electricity and magnetism course. American Journal of Physics, *74*(4), 329.

[22] Bollen, L., van Kampen, P., & De Cock, M. (2015). Students' difficulties with vector calculus in electrodynamics. Physical Review Special Topics - Physics Education Research, *11*(1), Article 020129

[23] Agudelo Jiménez, D. J. (2018) *Análisis geométrico del campo gravitacional clásico mediante el uso de analogías entre vectores y formas diferenciales* [Trabajo de grado, Universidad Pedagógica Nacional].

[24] Pacheco Sarmiento, E. A. (2016). *Interpretación geométrica desde las formas diferenciales: Ecuación de continuidad y ecuación de vorticidad* [Trabajo de grado, Universidad Pedagógica Nacional de Colombia].

[25] Torres Herrera, N. J. (2008). *El uso de formas diferenciales en la enseñanza de la teoría de campo electromagnético: Ley de Ampère-Maxwell y ley de inducción de Faraday* [Trabajo de grado, Universidad Pedagógica Nacional].

[26] Barragán, J. E. (2005). *Presentación de la mecánica hamiltoniana con formas diferenciales: Estudio de caso el péndulo esférico* [Trabajo de grado de pregrado, Universidad Pedagógica Nacional].

- [27] Moreno Peña, R. E. (2008). *Contextualización de las ecuaciones de Maxwell empleando formas diferenciales* [Tesis de grado, Universidad Pedagógica Nacional].
- [28] Warnick, K. F., & Russer, P. (2014). Differential forms and electromagnetic field theory. *Progress In Electromagnetics Research*, *148*, 83–112.

Anexos

K-Formas

Un ejemplo útil puede ilustrar de forma analítica el valor del volumen del paralelepípedo.

$\omega = 3 dx \wedge dy \wedge dz$ es una *3-forma* donde $v_1 = (1, 0, 3)$, $v_2 = (1, 2, 4)$, $v_3 = (3, -1, 2)$ son los vectores conformantes. El volumen del paralelepípedo se encuentra a través de la matriz determinante. Siendo las *1-formas*, $\omega_1 = 3dx$, $\omega_2 = dy$ y $\omega_3 = dz$ bajo organización arbitraria esta *3-forma* puede asociarse a como una conformación de *1-formas*.

En la posición (1,1) al interior de la matriz determinante, $\omega_1(\vec{v}_1)$ nos indica el producto punto entre $3dx$ y los elementos de $v_1 = (1, 0, 3)$. Cada uno de los elementos de v_1 son valores asociados a un vector unitario que conforma el espacio vectorial, por tanto, el valor '1' escala a dx , '0' escala a dy y finalmente '3' escala a dz . Así de acuerdo con las propiedades del producto punto,

$$\omega_1(\vec{v}_1) = 3dx \cdot (1, 0, 3) = 3 + 0 + 0 = 3$$

Para $\omega_1(\vec{v}_2)$ se posiciona en (1, 2) entonces,

$$\omega_1(\vec{v}_2) = 3dx \cdot (1, 2, 4) = 3 + 0 + 0 = 3$$

Finalmente, para completar la posición (1, 3):

$$\omega_1(\vec{v}_3) = 3dx \cdot (3, -1, 2) = 9 + 0 + 0 = 9$$

Obteniendo así la primera columna de la matriz determinante:

$$\begin{vmatrix} 3 & \omega_2(\vec{v}_1) & \omega_3(\vec{v}_1) \\ 3 & \omega_2(\vec{v}_2) & \omega_3(\vec{v}_2) \\ 9 & \omega_2(\vec{v}_3) & \omega_3(\vec{v}_3) \end{vmatrix}$$

Sucesivamente las *1-formas* dy y dz operaran los términos de las columnas 2 y 3 de la matriz determinante:

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \det \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 9 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -39$$

-39 como el valor del volumen del paralelepípedo proporcionando una orientación que es establecida por el signo negativo. Es entonces que el paralelepípedo conformado por la extensión de estos 3 vectores proyectados sobre cada uno de los planos coordenados en \mathbb{R}^3 , se obtienen a través del determinante de la matriz; se desarrolla como el resultado de las áreas, se multiplican cada una por una constante y se suman sus resultados.

La anticonmutatividad entre formas, vista anteriormente sobre el producto de *1-formas* se extiende también a situaciones generales de *m-formas*

¿Qué sucede si realizamos un intercambio de filas y columnas de la matriz determinante siguiendo las posibilidades que nos presenta el álgebra lineal?

Esta es la matriz determinante donde se intercambian la columna 2 por la columna 3 con sus nuevas posiciones:

$$\omega_1 \wedge \omega_3 \wedge \omega_2 (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \begin{vmatrix} \omega_1(\vec{v}_1) & \omega_3(\vec{v}_1) & \omega_2(\vec{v}_1) \\ \omega_1(\vec{v}_2) & \omega_3(\vec{v}_2) & \omega_2(\vec{v}_2) \\ \omega_1(\vec{v}_3) & \omega_3(\vec{v}_3) & \omega_2(\vec{v}_3) \end{vmatrix}$$

Se extiende así la definición de anticonmutatividad,

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = -\omega_1 \wedge \omega_3 \wedge \omega_2 (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$$

Descomponiendo esta definición según el ejemplo,

$$\omega_1 \wedge \omega_3 \wedge \omega_2 (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \det \begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ 9 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 39$$

Un nuevo intercambio de columnas genera:

$$\omega_3 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \begin{vmatrix} \omega_3(\vec{v}_1) & \omega_1(\vec{v}_1) & \omega_2(\vec{v}_1) \\ \omega_3(\vec{v}_2) & \omega_1(\vec{v}_2) & \omega_2(\vec{v}_2) \\ \omega_3(\vec{v}_3) & \omega_1(\vec{v}_3) & \omega_2(\vec{v}_3) \end{vmatrix}$$

Por lo tanto, genera de nuevo un cambio en el signo de la definición,

$$\omega_3 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \det \begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 9 & -1 \end{vmatrix} = -39$$

Derivada exterior

Si $\alpha = f(x, y, z)dx + g(x, y, z)dy + h(x, y, z)dz$, una 1-forma en $T_p\mathbb{R}^3$ la derivada exterior actúa como:

$$\begin{aligned} d\alpha &= \frac{\partial f}{\partial x} dx \wedge dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial f}{\partial z} dz \wedge dx \\ &+ \frac{\partial g}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial g}{\partial y} dy \wedge dy + \frac{\partial g}{\partial z} dz \wedge dy \\ &+ \frac{\partial h}{\partial x} dx \wedge dz + \frac{\partial h}{\partial y} dy \wedge dz + \frac{\partial h}{\partial z} dz \wedge dz \end{aligned}$$

De acuerdo con la propiedad de clausura o exactitud, $dx \wedge dx = dy \wedge dy = dz \wedge dz = 0$

$$\begin{aligned} d\alpha &= \frac{\partial f}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial f}{\partial z} dz \wedge dx + \frac{\partial g}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial g}{\partial z} dz \wedge dy + \frac{\partial h}{\partial x} dx \wedge dz + \frac{\partial h}{\partial y} dy \\ &\wedge dz \end{aligned}$$

De la propiedad de anticonmutatividad,

$$d\alpha = -\frac{\partial f}{\partial y} dx \wedge dy - \frac{\partial f}{\partial z} dx \wedge dz + \frac{\partial g}{\partial x} dx \wedge dy - \frac{\partial g}{\partial z} dy \wedge dz + \frac{\partial h}{\partial x} dx \wedge dz + \frac{\partial h}{\partial y} dy \wedge dz$$

De la propiedad asociativa,

$$d\alpha = \left(\frac{\partial g}{\partial x} dx \wedge dy - \frac{\partial f}{\partial y} dx \wedge dy \right) + \left(\frac{\partial h}{\partial y} dy \wedge dz - \frac{\partial g}{\partial z} dy \wedge dz \right) + \left(\frac{\partial h}{\partial x} dx \wedge dz - \frac{\partial f}{\partial z} dx \wedge dz \right)$$

Finalmente,

$$d\alpha = \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial z} \right) dx \wedge dz$$

Sean $F = \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right)$ $G = \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \right)$ $H = \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial z} \right)$ entonces la nueva expresión que

llamaremos β es:

$$\beta = F dx \wedge dy + G dy \wedge dz + H dx \wedge dz \quad \text{2-forma}$$

Permitiendo evidenciar más fácilmente que el resultado de la diferenciación de una *1-forma*

es una *2-forma*

Ahora encontremos que sucede cuando esta 2-forma es derivada.

$$d\beta = \frac{\partial F}{\partial x} dx \wedge dx \wedge dy + \frac{\partial F}{\partial y} dy \wedge dx \wedge dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy +$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial G}{\partial y} dy \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial G}{\partial z} dz \wedge dy \wedge dz +$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} dx \wedge dx \wedge dz + \frac{\partial H}{\partial y} dy \wedge dx \wedge dz + \frac{\partial H}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dz$$

De acuerdo con la propiedad de clausura,

$$d\beta = \frac{\partial F}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy + \frac{\partial G}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial H}{\partial y} dy \wedge dx \wedge dz$$

De la propiedad de anticonmutatividad,

$$d\beta = \frac{\partial F}{\partial z} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial G}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz - \frac{\partial H}{\partial y} dx \wedge dy \wedge dz$$

De la propiedad asociativa,

$$d\beta = \left(\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial y} \right) dx \wedge dy \wedge dz$$

Con $\left(\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial y} \right) = E$ la expresión que llamaremos γ finalmente se establece como:

$$\gamma = E dx \wedge dy \wedge dz \quad \text{3-forma}$$

Siendo una *3-forma* que pertenece al espacio $T_p \mathbb{R}^3$. $d\gamma = 0$ en cualquiera de sus 3

componentes de acuerdo con la propiedad de clausura o exactitud.