

**La realidad virtual como nuevo escenario para aprender geometría 3d:  
contrastes con GeoGebra y material concreto**

**Luis Felipe Parra Molina**

**Universidad Pedagógica Nacional de Colombia  
Licenciatura en matemáticas**

**Director de tesis: John Alejandro Mendoza Rodríguez**

**Universidad Pedagógica Nacional**

**Diciembre de 2025**

**La realidad virtual como nuevo escenario para aprender geometría 3d:  
contrastes con GeoGebra y material concreto**

**Luis Felipe Parra Molina**

**1098671444**

**2019240039**

**Trabajo de grado para optar por título de  
Licenciado en matemáticas**

**Director de tesis: John Alejandro Mendoza Rodríguez**

**Universidad Pedagógica Nacional de Colombia**

**Departamento de Matemáticas**

**Licenciatura en Matemáticas**

**Bogotá**

**Diciembre de 2025**

## CONTENIDO

<b>TABLA DE ILUSTRACIONES</b> .....	5
<b>AGRADECIMIENTOS</b> .....	6
<b>INTRODUCCIÓN</b> .....	7
<b>ANTECEDENTES</b> .....	11
Geometry teaching experience in virtual reality with NeoTrie VR (2019). .....	12
The influence of NeoTrie VR´s immersive virtual reality on the teaching and learning of geometry (2021). .....	13
Exploring dynamic geometry through immersive virtual reality and distance teaching (2022). .....	14
Uso de la realidad virtual en geometría para el desarrollo de habilidades espaciales (2023). .....	15
NeoTrie VR, realidad virtual inmersiva para el aprendizaje de la geometría 3D. (2023). .....	17
<b>JUSTIFICACIÓN</b> .....	22
<b>OBJETIVOS</b> .....	26
Objetivo general .....	26
Objetivos específicos.....	26
<b>MARCO CONCEPTUAL</b> .....	27
Los esquemas de uso según Pierre Rabardel .....	27
Realidad virtual y realidad virtual inmersiva .....	30
Realidad virtual no inmersiva .....	30
Realidad virtual semi-inmersiva .....	31
Realidad virtual inmersiva .....	31
Realidad Aumentada (RA) y Realidad Mixta (RM) .....	32
La realidad virtual inmersiva como entorno de aprendizaje .....	32
La realidad virtual en el contexto de la investigación .....	33
NeoTrie VR.....	34
Teorema de Euler .....	37
<b>ESTRATEGIA INVESTIGATIVA</b> .....	39
Experimento de enseñanza .....	40

Diseño de la tarea .....	43
Descripción de la tarea .....	43
Justificación de la actividad .....	45
Particularidades de cada ambiente .....	46
<b>RESULTADOS</b> .....	<b>49</b>
<b>DISCUSIÓN</b> .....	<b>65</b>
Las herramientas de construcción .....	65
En el ambiente de material concreto .....	65
En el ambiente de GeoGebra 3D.....	67
En el ambiente de realidad virtual con NeoTrie VR.....	67
Los aspectos físicos .....	70
En el ambiente de material concreto .....	70
En el ambiente de GeoGebra 3D.....	71
En el ambiente de realidad virtual con NeoTrie VR.....	72
Los aspectos sensoriales y de visualización .....	73
En el ambiente de material concreto .....	73
En el ambiente de GeoGebra 3D.....	74
En el ambiente de realidad virtual con NeoTrie VR.....	75
<b>CONCLUSIONES</b> .....	<b>78</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA</b> .....	<b>82</b>

## TABLA DE ILUSTRACIONES

<b>Ilustración 1</b>	Plan de ejecución para la estrategia experimento de enseñanza. ....	41
<b>Ilustración 2</b>	Colaboración en la construcción de poliedro en material concreto.....	51
<b>Ilustración 3</b>	Poliedro de ocho vértices en material concreto. ....	52
<b>Ilustración 4</b>	Ensamble de poliedro elaborado con mallas. ....	52
<b>Ilustración 5</b>	Herramientas de GeoGebra. ....	53
<b>Ilustración 6</b>	Herramientas en material concreto. ....	53
<b>Ilustración 7</b>	Herramientas en NeoTrie VR. ....	53
<b>Ilustración 8</b>	Manipulación en material concreto. ....	54
<b>Ilustración 9</b>	Manipulación en GeoGebra. ....	54
<b>Ilustración 10</b>	Manipulación en NeoTrie VR. ....	55
<b>Ilustración 11</b>	Rearmado de poliedro en material concreto. ....	56
<b>Ilustración 12</b>	Herramientas para corregir errores en NeoTrie VR. ....	56
<b>Ilustración 13</b>	Objetos en aparente 3D en GeoGebra. ....	57
<b>Ilustración 14</b>	Manipulación de objetos en material concreto. ....	57
<b>Ilustración 15</b>	Manipulación de objetos en NeoTrie VR. ....	58
<b>Ilustración 16</b>	Poliedros sin caras físicas. ....	59
<b>Ilustración 17</b>	Vértices y segmento en RV. Fuente: ....	59
<b>Ilustración 18</b>	Figuras en 3D Planas. ....	60
<b>Ilustración 19</b>	Colores y texturas de las figuras en NeoTrie VR. ....	60
<b>Ilustración 20</b>	Resultados Teorema de Euler. Fuente ....	60
<b>Ilustración 21</b>	Colaboración material concreto. ....	61
<b>Ilustración 22</b>	Colaboración en GeoGebra. ....	61
<b>Ilustración 23</b>	Colaboración en NeoTrie VR. ....	62
<b>Ilustración 24</b>	Consulta externa GeoGebra. ....	62
<b>Ilustración 25</b>	Consulta externa en material concreto. ....	63
<b>Ilustración 26</b>	Elaboración de mallas calcando pentágonos. ....	66
<b>Ilustración 27</b>	Elaboración de mallas con medidas y rigor matemático. ....	66

## AGRADECIMIENTOS

Agradezco, en primer lugar, a los estudiantes que, con generosidad y curiosidad, se vincularon voluntariamente a esta investigación en el marco de mi práctica como tutor de Precálculo. Karen, Paula, Mariana, Érica, Mateo, Juan y Tatiana: su disposición, su constancia y su deseo de aprender sostuvieron cada avance de este proyecto. Un saludo especial a Tatiana, quien además colaboró con la toma de varios videos e imágenes que acompañan y enriquecen visualmente esta tesis, permitiendo que algunas ideas encontraran un rostro tangible.

Extiendo también mi gratitud a quienes, desde su quehacer cotidiano, abrieron espacios y brindaron recursos para que este trabajo creciera. A Lucho, por facilitarme la sala de estudio de matemáticas y los instrumentos necesarios. A Fredy, por su amabilidad y diligencia al reservar los espacios en las salas de informática. Al profesor Diego, por autorizar el acceso a los recursos tecnológicos de la sala GOAE, y a los tutores de ese espacio —en especial a Esteban—, cuya atención, disposición y acompañamiento fueron esenciales para el uso de los dispositivos de realidad virtual de la universidad.

Agradezco profundamente al profesor Alejandro, asesor de esta tesis, cuya guía, claridad intelectual y acompañamiento constante fueron faro en la construcción de este trabajo; y agradezco también a Juliana, amiga y gestora fundamental, cuyo apoyo, presencia atenta y confianza se convirtieron en refugio y motor durante todo el proceso. Sin la intervención, el compromiso y la dedicación de ambos, esta investigación no habría podido realizarse.

Finalmente, abrazo con gratitud a mis amigos de lenguas y matemáticas, quienes me brindaron apoyo y ánimo en los momentos más exigentes, así como a aquellos que tuvieron que soportar mis ausencias mientras dedicaba mis días —y muchas noches— a la construcción de este trabajo. Su paciencia y cariño también viven en estas páginas.

## INTRODUCCIÓN

El avance de las tecnologías digitales ha transformado de manera profunda las prácticas de enseñanza y aprendizaje en la educación matemática. En las últimas décadas, los entornos virtuales y los sistemas de geometría dinámica han ampliado las posibilidades de exploración y representación, permitiendo experiencias de aprendizaje más interactivas, visuales y autónomas. Entre estas innovaciones, la realidad virtual inmersiva (**RVI**) se ha consolidado como un campo emergente que ofrece nuevas formas de interacción con los objetos matemáticos, al integrar la acción corporal, la percepción espacial y la manipulación tridimensional (Rodríguez et al., 2021; Codina et al., 2023). Este trabajo aborda el estudio de la enseñanza de algunos objetos de la geometría tridimensional mediante el software **NeoTrie VR**, explorando posibles potencialidades, limitaciones y aplicaciones en la educación de la geometría tridimensional.

La pertinencia de esta investigación se sustenta en la necesidad de superar las dificultades que, históricamente, ha enfrentado la enseñanza de la geometría tridimensional. En el aula, los objetos del espacio suelen trabajarse mediante representaciones planas —como dibujos en papel o explicaciones en la pizarra—, lo que limita la posibilidad de apreciar plenamente cómo se organizan y relacionan sus elementos. Estas restricciones afectan la comprensión de la estructura de los cuerpos y de las conexiones que existen entre sus componentes. La realidad virtual inmersiva aparece como una alternativa capaz de transformar la experiencia de aprendizaje, pues permite que los estudiantes se sitúen dentro de un entorno tridimensional, manipulen figuras directamente y examinen sus propiedades desde diferentes posiciones y ángulos (Moral et al., 2023; Rodríguez, 2024).

A lo largo del documento, la tesis desarrolla un recorrido que articula los fundamentos teóricos, las decisiones metodológicas y los resultados obtenidos a partir de un experimento de enseñanza comparativo realizado en tres ambientes: **material concreto**, **GeoGebra 3D** y **NeoTrie VR**. Cada capítulo responde a un propósito específico y contribuye a construir una comprensión integral del fenómeno estudiado. El primer capítulo, correspondiente a los antecedentes, presenta un panorama detallado de las investigaciones previas sobre el uso de la realidad virtual inmersiva en

la enseñanza de la geometría. Se revisan experiencias realizadas en distintos niveles educativos, desde la educación primaria hasta la formación universitaria, destacando los aportes del software **NeoTrie VR** en la visualización espacial, la motivación de los estudiantes y el desarrollo del razonamiento geométrico. Esta revisión permite identificar tanto los beneficios documentados —como la mejora en la comprensión tridimensional y la colaboración entre pares— como las limitaciones y desafíos asociados al costo, la accesibilidad tecnológica y la necesidad de formación docente especializada (Cangas et al., 2019; Rodríguez et al., 2021; Codina et al., 2023).

El segundo capítulo, dedicado a la justificación, expone las razones teóricas, didácticas y empíricas que sustentan la investigación. Se argumenta la pertinencia del estudio en la enseñanza de geometría 3D, subrayando la importancia de comparar diferentes ambientes de trabajo para comprender cómo las condiciones materiales, digitales e inmersivas configuran distintas formas de acción y pensamiento geométrico. Además, se destaca el aporte del trabajo al incluir un manual pedagógico y técnico de NeoTrie VR, que documenta su funcionamiento, herramientas.

El tercer capítulo presenta los objetivos de la investigación, formulados a partir del propósito general de reflexionar sobre el uso de **NeoTrie VR** en la enseñanza de la geometría tridimensional. Se establecen metas específicas orientadas al diseño, aplicación y análisis de una tarea basada en el Teorema de Euler para poliedros convexos, común a los tres entornos de trabajo, con el fin de observar cómo cada uno promueve formas diferentes de interacción y razonamiento geométrico.

El cuarto capítulo, correspondiente al marco conceptual, desarrolla las bases teóricas que orientan el estudio. En primer lugar, se aborda la teoría de los esquemas de utilización propuesta por Pierre Rabardel (2011), que permite comprender cómo los artefactos tecnológicos —como los visores y mandos de realidad virtual— se transforman en instrumentos cognitivos a través de los procesos de instrumentalización e instrumentación. En segundo lugar, se presenta una caracterización de los tipos de realidad virtual (no inmersiva, semi-inmersiva e inmersiva) y su relación con otras modalidades tecnológicas como la realidad aumentada y la realidad mixta, situando el uso de **NeoTrie VR** dentro del nivel inmersivo. Asimismo, el capítulo incluye una descripción detallada del software **NeoTrie VR** como artefacto tecnológico central de la

investigación, destacando sus herramientas de construcción tridimensional, sus posibilidades de interacción corporal y su relevancia como instrumento que media la actividad geométrica en el entorno inmersivo. Finalmente, se explican los fundamentos matemáticos de la tarea a partir del Teorema de Euler, resaltando su valor didáctico para promover la observación, la conjetura y la argumentación geométrica.

El quinto capítulo, dedicado a la metodología, describe el enfoque de experimento de enseñanza (Camargo, 2021) que guía el trabajo. Este enfoque combina la acción pedagógica con la indagación investigativa en contextos reales, permitiendo observar cómo emergen fenómenos de aprendizaje en la interacción entre estudiantes, contenidos y herramientas. Se detallan los participantes, el diseño de la tarea, los procedimientos de recolección de información y las fases de desarrollo del experimento, así como las características específicas de los tres ambientes comparados: **material concreto, GeoGebra 3D y NeoTrie VR.**

El sexto capítulo, correspondiente a los resultados, presenta los hallazgos obtenidos durante la implementación de la tarea en los tres entornos. A través de observaciones, registros y evidencias visuales, se describen las estrategias de construcción, las dificultades, las formas de interacción y las diferencias en la percepción y comprensión de los poliedros. Se incluye un cuadro comparativo que sintetiza los principales contrastes entre los ambientes según categorías como condiciones físicas, herramientas de construcción, aspectos sensoriales y cognitivos, y nivel de cooperación entre los participantes.

En el séptimo capítulo, dedicado a la discusión, se realiza un análisis interpretativo de los resultados con base en los esquemas de uso de Rabardel y en los aportes de la literatura revisada. Se examinan tres dimensiones centrales: las herramientas de construcción y su influencia en la acción geométrica, los aspectos físicos que intervienen o desaparecen en cada entorno, y la visualización y percepción del espacio tridimensional. Este análisis permite comprender cómo los diferentes medios configuran modos particulares de relación entre el cuerpo, la herramienta y el objeto geométrico, y cómo dichas diferencias inciden en la formación en geometría.

Finalmente, el octavo capítulo, de conclusiones, sintetiza las principales aportaciones teóricas, empíricas y didácticas del estudio. Se destaca que los entornos digitales e

inmersivos ofrecen ventajas significativas para la construcción y comprensión de los objetos geométricos, en especial por la eliminación de las restricciones físicas y la posibilidad de observar el espacio desde múltiples perspectivas. No obstante, se reconoce que el material concreto conserva un valor formativo fundamental al vincular la acción corporal con la comprensión estructural de la forma. Asimismo, se discuten las implicaciones educativas del uso de **NeoTrie VR**, resaltando su potencial para fortalecer la visualización espacial y la argumentación geométrica, junto con las limitaciones derivadas del costo, la disponibilidad tecnológica y la necesidad de mediación docente adecuada (Rodríguez, 2024).

Esta investigación ofrece una mirada integral sobre la incorporación de la realidad virtual inmersiva en la enseñanza de la geometría tridimensional, proponiendo un análisis comparativo que contribuye tanto a la comprensión teórica de la mediación tecnológica como al diseño de estrategias didácticas innovadoras. La combinación de material concreto, recursos digitales y entornos inmersivos constituye una propuesta formativa que articula acción, percepción y pensamiento geométrico, orientada a enriquecer la formación de los futuros docentes de matemáticas y a consolidar nuevas perspectivas para la educación matemática contemporánea.

## ANTECEDENTES

En los últimos años, la incorporación de entornos de realidad virtual inmersiva en la educación matemática ha despertado un creciente interés entre investigadores y docentes, especialmente en el área de la geometría, debido a su potencial para transformar las prácticas de enseñanza y aprendizaje. Entre las herramientas emergentes, el software **NeoTrie VR** ha ganado relevancia como recurso didáctico capaz de permitir la creación, manipulación e interacción dinámica con objetos tridimensionales, favoreciendo así el desarrollo de habilidades espaciales, la comprensión de conceptos geométricos complejos y la motivación hacia las matemáticas.

Diversos estudios, realizados en distintos niveles educativos y contextos institucionales, han explorado sus aplicaciones pedagógicas, evaluando tanto su impacto en la adquisición y consolidación de conocimientos como las condiciones que favorecen su integración en el aula. Las experiencias documentadas no solo abordan contenidos curriculares habituales —como ángulos, polígonos, poliedros o relaciones métricas—, sino también elementos menos presentes en los programas oficiales, tales como geometría fractal, sólidos platónicos o transiciones entre dimensiones, lo que amplía el espectro de posibilidades formativas. Asimismo, estas investigaciones analizan cómo la interacción inmersiva modifica las dinámicas de trabajo, fomenta la colaboración, posibilita la comunicación a través de gestos y acciones, y ofrece entornos de aprendizaje donde es posible experimentar, cometer errores y corregirlos en tiempo real.

El conjunto de trabajos revisados a continuación reúne aportes que examinan experiencias en educación primaria, secundaria, universitaria y en la formación inicial de docentes, proporcionando un panorama amplio y diverso de las posibilidades y desafíos que el uso de **NeoTrie VR** plantea para la enseñanza de la geometría. Aunque la literatura disponible sobre este programa es todavía limitada, y en buena medida se concentra en publicaciones realizadas por el propio equipo desarrollador, se procuró incluir la mayoría de los trabajos existentes, así como las contribuciones externas que complementan esta línea de investigación. Con ello se busca ofrecer una visión clara y actualizada del desarrollo que ha tenido esta herramienta en contextos educativos —

esto es, un estado del conocimiento accesible y comprensible sobre cómo ha sido utilizada, qué problemáticas ha abordado y cuáles son los resultados reportados hasta el momento—. Los antecedentes se presentan de manera cronológica y organizada por estudios, destacando en cada uno sus objetivos, metodología, resultados y aportes principales.

Dado que todas las investigaciones revisadas se desarrollaron empleando **NeoTrie VR**, este aspecto constituye un rasgo común que atraviesa los estudios aquí descritos. A partir de esta coincidencia, se presentan de manera articulada los objetivos, enfoques metodológicos y resultados de cada trabajo, con el fin de mostrar cómo diferentes equipos de investigación han explorado las posibilidades didácticas del software en diversos niveles educativos.

### **Geometry teaching experience in virtual reality with NeoTrie VR (2019).**

En este estudio se presentó una experiencia de enseñanza de la geometría con alumnos de 11 a 14 años en una escuela en Żernica, Polonia. La actividad consistió en la creación, manipulación e interacción con objetos y modelos geométricos tridimensionales en un entorno inmersivo. La tecnología de realidad virtual utilizada fue el sistema **HTC Vive**. Los conceptos matemáticos abordados se centraron en geometría, incluyendo ángulos, polígonos, prismas y pirámides, de acuerdo con el currículo polaco. También se trabajó en la distinción entre perímetro, área y volumen, así como en la construcción de teselados y fractales básicos.

El propósito de este estudio era analizar las posibles aplicaciones didácticas de **NeoTrie VR** y recoger opiniones y comentarios para su mejora continua. Se buscaba evaluar cómo este tipo de recurso podía facilitar la superación de problemas comunes en las primeras etapas del aprendizaje de la geometría, especialmente aquellos que requieren imaginación espacial.

Los resultados sugirieron que la experiencia facilitó la eliminación de algunos problemas que enfrentan los alumnos en las etapas iniciales del aprendizaje de la geometría, como la confusión entre área y perímetro y la comprensión de conceptos como volumen. Se encontró que los estudiantes participantes resolvieron tareas geométricas más rápidamente en comparación con otras metodologías, especialmente aquellas que exigían imaginación espacial y presentaban un mayor grado de dificultad.

Además, se observó que los alumnos estuvieron más activos, propensos a la cooperación y a formular conclusiones.

El estudio concluyó que **NeoTrie VR** constituye una herramienta útil para la enseñanza de la geometría, ayudando a los niños a organizar sus conocimientos geométricos, expandir su imaginación espacial y aumentar su creatividad. También se destacó que su uso contribuye a mejorar la actitud y motivación de los estudiantes hacia las matemáticas. De acuerdo con lo señalado por Cangas et al. (2019), este tipo de entorno inmersivo facilita la resolución de tareas geométricas de forma rápida y colaborativa, promoviendo un ambiente de aprendizaje activo que fomenta la cooperación entre los estudiantes. Estos resultados sugieren que, en niveles superiores, **NeoTrie VR** no solo podría mejorar los tiempos de respuesta en la resolución de problemas complejos, sino también incentivar la colaboración y el intercambio de ideas entre futuros matemáticos.

### **The influence of NeoTrie VR's immersive virtual reality on the teaching and learning of geometry (2021).**

En este estudio, se desarrolló una propuesta de enseñanza y aprendizaje de la geometría tridimensional en aulas reales. Entre los conceptos matemáticos abordados se incluyeron la estereometría, la visualización **3D**, propiedades geométricas y topológicas, y la transición entre dimensiones **2D** y **3D**. Además, se exploraron contenidos curriculares obligatorios que presentan dificultades para los estudiantes, como la distinción entre perímetro, área y volumen, y la inducción de fórmulas asociadas. También se trabajó con figuras geométricas tratadas superficialmente en el currículo, como los sólidos platónicos y sus simetrías, así como con contenidos no curriculares de interés, como la geometría fractal.

El propósito principal de esta investigación era explorar los efectos de introducir **NeoTrie VR** en clases reales, presentando datos cualitativos observacionales sobre cómo la colaboración entre una empresa de desarrollo de software, investigadores universitarios y escuelas contribuyó a la mejora y actualización continua del recurso. Asimismo, se buscaba analizar el impacto en el contenido geométrico, las representaciones y la actividad matemática a la que los estudiantes tenían acceso, así

como en la manera en que los profesores conciben y gestionan la enseñanza de la geometría.

Los resultados sugirieron que la colaboración entre empresa–universidad–escuela tuvo un impacto positivo en las mejoras y actualizaciones del programa a través de un proceso de retroalimentación continua. Se encontró que el uso de **NeoTrie VR** influyó en las habilidades y conocimientos geométricos de los estudiantes, brindándoles acceso a nuevos contenidos y diferentes tipos de representaciones. El entorno facilitó la comprensión de conceptos como la distinción entre dimensiones y la interpretación de dimensiones superiores como extensión de las inferiores. Además, se observó una influencia positiva en la actividad matemática, al promover espacios de resolución conjunta de problemas y tipos de razonamiento analítico, analógico y estructural. El estudio destacó que **NeoTrie VR** permitió a los estudiantes no depender exclusivamente del lenguaje matemático para construir comprensión compartida, pues la interactividad del entorno inmersivo facilitó la producción de acciones y gestos significativos. También se documentaron mejoras en la actitud y motivación de los estudiantes hacia las matemáticas. En esta línea, se ha demostrado que la utilización de sistemas de geometría dinámica en realidad virtual, como **NeoTrie VR**, favorece de manera particular el desarrollo del razonamiento espacial y mejora la capacidad de los estudiantes para identificar y manipular figuras tridimensionales (Rodríguez et al., 2021). Este hallazgo resalta la importancia de considerar la **RV** como una herramienta que amplía el acceso a representaciones visuales de conceptos complejos, permitiendo que los alumnos interactúen con modelos tridimensionales que serían difíciles de comprender en formatos bidimensionales.

### **Exploring dynamic geometry through immersive virtual reality and distance teaching (2022).**

En el estudio de Rodríguez (2022), se exploró el uso de **NeoTrie VR** como pizarra **3D** para la enseñanza a distancia de la geometría, específicamente con estudiantes de la carrera de Matemáticas de la Universidad de Almería durante el año académico 2020-2021. La intervención consistió en la utilización de tecnología de realidad virtual mediante cascos especializados y también gafas estereoscópicas más económicas para teléfonos móviles. Los conceptos matemáticos abordados se centraron en las

ecuaciones paramétricas de superficies —como la esfera, el toro y la cinta de Möbius— para las cuales se implementó una calculadora gráfica tridimensional y una cámara de visión estereoscópica.

El propósito principal de esta investigación era explorar los beneficios que un entorno de aprendizaje inmersivo puede ofrecer para la enseñanza de conceptos geométricos y construcciones tridimensionales, trabajando directamente en el espacio **3D** para favorecer una comprensión más rápida de problemas espaciales complejos en comparación con métodos de enseñanza tradicionales. También se buscó analizar la retroalimentación de los estudiantes tras el uso de diversos soportes para el aprendizaje pasivo y activo, incluyendo **GeoGebra 3D**.

Los resultados indicaron una mejora significativa en la percepción de los estudiantes respecto a la comprensión de la deducción de fórmulas al utilizar NeoTrie como pizarra **3D**. Aunque no se realizó una comparación con métodos estándar, los resultados fueron positivos en cuanto a la opinión de los estudiantes. Se observó que el uso combinado de **NeoTrie VR** para la explicación de conceptos tridimensionales y de **GeoGebra 3D** para tareas individuales de aprendizaje activo constituye una opción recomendable y bien recibida por la mayoría de los participantes. Sin embargo, un grupo significativo aún prefería las explicaciones en pizarras **2D**. La implementación de videos estereoscópicos visualizables con gafas de móvil fue valorada positivamente, y los estudiantes manifestaron interés en acceder a más contenido en **3D**. El estudio sugiere que la combinación de varios soportes puede beneficiar especialmente a aquellos con mayores dificultades de comprensión o con menor visión espacial.

### **Uso de la realidad virtual en geometría para el desarrollo de habilidades espaciales (2023).**

Este estudio aporta evidencia empírica en el ámbito de la educación secundaria, donde las actividades diseñadas en entornos inmersivos de **RV** contribuyeron a la mejora de las habilidades espaciales y a la corrección de errores comunes en la representación geométrica. Según estos autores, el uso de **NeoTrie VR** facilita que los estudiantes superen obstáculos vinculados a la visualización y la manipulación de objetos

espaciales, lo que sugiere que, en un nivel universitario, una tarea similar podría promover un aprendizaje más profundo y autónomo en la resolución de problemas geométricos.

En el estudio de Moral et al. (2023), se presentó un conjunto de actividades sobre poliedros dirigidas a estudiantes de 3.º de la ESO (entre 14 y 16 años) para fomentar la adquisición y mejora de habilidades espaciales en geometría. Las actividades fueron diseñadas a partir de errores geométricos detectados en una evaluación inicial y se sustentaron en las ventajas que ofrecen los entornos inmersivos para el desarrollo de dichas habilidades. Además, se realizaron actividades con materiales manipulativos convencionales para establecer una comparativa. Los conceptos matemáticos abordados incluyeron la construcción e identificación de planos de simetría en poliedros regulares, la construcción de poliedros duales y la construcción de ejes de giro y el conteo de su orden.

El propósito principal de esta investigación era compartir y analizar una experiencia didáctica de geometría con actividades de **RV** que pudieran ayudar a desarrollar las habilidades espaciales en el alumnado. Como objetivos secundarios, se buscaba comparar la efectividad del entorno inmersivo con la de los materiales manipulativos convencionales en dos de las actividades realizadas, y analizar la adquisición de habilidades espaciales y la subsanación de errores tras la intervención.

El análisis de los resultados mostró evidencias en el desarrollo de habilidades espaciales y una mejora en la subsanación de los errores cometidos por los estudiantes. Se encontró que la realidad virtual fomenta el aprendizaje al facilitar la comprensión de ideas y conceptos en un entorno inmersivo, lo que aumenta la satisfacción personal y la motivación del alumnado. La experiencia destacó que el éxito de estos entornos se debe a la posibilidad que ofrecen a los estudiantes de aprender de sus errores en un ambiente controlado, otorgándoles autonomía y favoreciendo la creación de imágenes espaciales en la memoria. Además, Moral et al. (2023) señalaron que estas ventajas evidencian el potencial de la realidad virtual inmersiva no solo para la educación secundaria, sino también como base para experiencias en niveles universitarios, donde la resolución de problemas geométricos requiere un razonamiento espacial más avanzado y autónomo.

## **NeoTrie VR, realidad virtual inmersiva para el aprendizaje de la geometría 3D. (2023).**

Acá se recogen tres experiencias de aula con estudiantes de primaria, secundaria y formación inicial de profesores. Los conceptos matemáticos abordados abarcan desde poliedros básicos y el reconocimiento de sus elementos en primaria, hasta fractales tridimensionales como la alfombra y el tetraedro de Sierpinski y la esponja de Menger en secundaria, además de contenidos de geometría 3D con poliedros para maestros en formación.

El propósito principal de este estudio era mostrar los hallazgos iniciales de experiencias de aula que integran **NeoTrie VR** en diferentes niveles educativos, destacando su potencial motivacional, la utilización de recursos sin equivalente en el mundo físico y la posibilidad de abordar contenidos extracurriculares. Se buscaba evidenciar cómo la realidad virtual inmersiva puede potenciar la comunicación, facilitar la comprensión de conceptos y mejorar las habilidades espaciales.

Los resultados de las experiencias sugirieron un alto poder motivacional por parte de la realidad virtual, permitiendo una exploración más libre en un ambiente tridimensional simulado. Se detectó la aparición de experiencias de flujo que, a su vez, parecen potenciar la comunicación entre los componentes de los grupos, siendo más significativa en estudiantes con menor competencia en geometría. El entorno también facilitó el uso de recursos difíciles de implementar en un ambiente físico, como el “vuelo” para cambiar de punto de vista o el arrastre de elementos para promover una exploración dinámica. Aunque se observó que, a mayor edad, mayor era el nivel de inseguridad de los estudiantes en sus acciones, la curva de aprendizaje y adaptación al ambiente virtual **3D** pareció ser menor en estudiantes de secundaria en comparación con los de primaria y universidad. Asimismo, se notó un abuso de la exploración errática y dificultades en la visualización tridimensional, lo cual, según los autores, podría reducirse con un entrenamiento adecuado.

En la experiencia con primaria, **NeoTrie VR** aportó una excelente motivación, mejoró el sentido y la orientación espacial y fomentó la aparición de acciones de control metacognitivas. En secundaria, motivó a los estudiantes y facilitó la construcción de fractales, incidiendo en la asimilación de la noción de fractal y en el uso del

pensamiento estructural, aunque se detectaron dificultades en el establecimiento de consensos. Los maestros en formación inicial, si bien interpretaron correctamente los enunciados, tuvieron dificultades para trasladar la información del **2D** al **3D** y mostraron un uso excesivo de la exploración errática.

De acuerdo con Codina et al. (2023), una de las fortalezas de **NeoTrie VR** radica en que permite construir, modificar y analizar figuras geométricas de manera intuitiva gracias a la interacción directa mediante “manos virtuales” y comandos de voz. Esta posibilidad no solo estimula la creatividad y el pensamiento crítico, sino que también se traduce en una mayor comprensión de las propiedades topológicas y geométricas de los sólidos, lo que justifica su exploración en niveles universitarios, donde el dominio de habilidades espaciales resulta fundamental para el desarrollo académico en matemáticas.

### **Virtual reality in the classroom: A difficult but exciting adventure for teachers and students (2024).**

En el estudio de Rodríguez (2024), se informa sobre una práctica docente exploratoria llevada a cabo con futuros profesores de secundaria. La actividad consistió en que pequeños grupos de profesores en formación aprendieran a usar **NeoTrie VR** y diseñaran una secuencia didáctica para implementar en el aula. Los conceptos matemáticos abordados fueron variados, ya que los propios participantes diseñaron actividades sobre temas como secciones cónicas, puzles **3D** (Tangram y cubo Soma), el fractal copo de nieve de Koch en **3D**, el diseño de una casa ideal con geometría, la construcción de un parque infantil, la representación de las Pirámides de Giza a escala, la creación de un sistema planetario a escala y la demostración de identidades notables mediante su desarrollo geométrico en **2D** y **3D**.

El propósito principal de esta investigación era explorar las ventajas y dificultades encontradas al comenzar a usar la realidad virtual para diseñar secuencias didácticas, así como al aprender a manejar un software de realidad virtual tipo “sandbox” con herramientas interactivas como **NeoTrie VR**. Se planteó la pregunta de investigación: ¿Es posible que los profesores en formación puedan producir actividades apropiadas en **NeoTrie VR** en un tiempo relativamente corto?

Los resultados indicaron que el contenido matemático de las secuencias diseñadas estuvo en línea con lo esperado en el currículo oficial. La mayoría fueron planificadas para estudiantes de 13 años y requerían dos sesiones, dedicando la primera a aprender los conceptos básicos del entorno. Se observó que **NeoTrie VR** motiva fuertemente a los estudiantes, desarrolla el pensamiento matemático en acción, mejora la visión y el razonamiento geométrico en el espacio y estimula la cooperación y el trabajo en equipo.

Sin embargo, también se identificaron dificultades relacionadas con fallos tecnológicos, el costo de los equipos, el esfuerzo inicial requerido, problemas de salud y la falta de conocimiento sobre RA/RV por parte de los profesores en ejercicio. A pesar de estas limitaciones, el estudio sugirió que el esfuerzo inicial para proponer actividades propias en **NeoTrie VR** es valioso debido a la flexibilidad del entorno para crear experiencias más variadas.

Tal como expone Rodríguez (2024), la realidad virtual inmersiva en el aula representa una “aventura difícil pero emocionante” para docentes y estudiantes, al romper con los métodos tradicionales y ofrecer experiencias interactivas y visualmente enriquecedoras. Esta experiencia inmersiva no solo incrementa la motivación del alumnado, sino que también les permite visualizar y manipular objetos geométricos de manera directa, lo que resulta especialmente valioso para quienes enfrentan dificultades en la abstracción y el razonamiento espacial.

El análisis conjunto de estos trabajos muestra un desarrollo sostenido en la integración de **NeoTrie VR** en la enseñanza de la geometría. Las investigaciones destacan beneficios como el acceso a nuevas representaciones, la experimentación directa con objetos tridimensionales, la motivación estudiantil y la posibilidad de trabajar contenidos complejos mediante acciones y gestos. Sin embargo, también advierten limitaciones relacionadas con los costos, la formación docente, la adaptación al entorno virtual y ciertos riesgos didácticos asociados a exploraciones sin propósito. Además, aunque los estudios analizan efectos generales, rara vez abordan de manera detallada las condiciones materiales y sensoriales de la construcción geométrica en estos entornos. La presente investigación se sitúa precisamente en ese vacío, al comparar experiencias de construcción en diferentes ambientes y analizar cómo sus

características físicas y perceptivas influyen en la manera de relacionarse con los objetos geométricos.

No obstante, los estudios también ponen de manifiesto una serie de limitaciones y desafíos que deben ser considerados en cualquier propuesta de implementación. Entre ellos, se encuentran las limitaciones tecnológicas derivadas de fallos en el software o hardware, el elevado costo de los equipos de realidad virtual, la necesidad de capacitación docente para un uso didáctico efectivo, y las posibles dificultades de adaptación por parte de quienes tienen menor visión espacial o escasa experiencia en entornos virtuales. Además, se observan riesgos como la exploración errática sin un propósito claro, la dispersión de la atención y problemas de salud asociados a un uso prolongado, lo que exige establecer estrategias de uso responsable y equilibrado.

La realidad virtual inmersiva representa una herramienta de gran valor para la enseñanza de las matemáticas, siempre que su incorporación esté respaldada por una planificación pedagógica cuidadosa, un acompañamiento formativo al profesorado y una integración coherente con otros recursos didácticos. Las evidencias analizadas sugieren que el esfuerzo inicial para introducir esta tecnología en el aula puede verse ampliamente recompensado por la riqueza de experiencias de aprendizaje que posibilita, así como por el impacto positivo en la comprensión, la motivación y la creatividad del estudiantado. Sin embargo, su implementación requiere un enfoque crítico que considere tanto las oportunidades como las limitaciones, de modo que la realidad virtual no sea entendida únicamente como un recurso novedoso, sino como una herramienta integrada en un ecosistema pedagógico sólido y orientado al aprendizaje profundo.

Los estudios revisados permiten apreciar un desarrollo sostenido en la aplicación de entornos de realidad virtual inmersiva para la enseñanza de la geometría, con resultados favorables en la visualización, la comprensión espacial y la motivación de los estudiantes. Sin embargo, la mayoría de las experiencias se han concentrado en describir los efectos generales del uso del software y en valorar su potencial didáctico, dejando de lado aspectos vinculados con las condiciones materiales y sensoriales que intervienen en la construcción dentro de estos entornos. Elementos como la resistencia de los materiales, el peso, la gravedad o la percepción táctil apenas se han

considerado, a pesar de su influencia en la manera en que los estudiantes interpretan y construyen los objetos geométricos. El trabajo que aquí se presenta se ubica en ese espacio poco explorado, al abordar la experiencia de construcción en diferentes ambientes y analizar cómo las particularidades físicas y perceptivas de cada uno configuran modos distintos de relación con la geometría.

## JUSTIFICACIÓN

La enseñanza de la geometría tridimensional enfrenta retos persistentes debido a la naturaleza espacial y relacional de sus objetos: la representación plana habitual (pizarra, papel, pantallas **2D**) restringe la experiencia perceptiva y manipulativa de los estudiantes, lo que dificulta la construcción de imágenes mentales sólidas y el desarrollo del razonamiento espacial avanzado. Esta situación es particularmente relevante en los primeros semestres de estudios en matemáticas, donde se espera que los futuros profesionales consoliden una comprensión conceptual robusta que luego puedan trasladar a su praxis. Estudios recientes sobre intervenciones didácticas con entornos inmersivos muestran que la experiencia directa en **3D** puede favorecer la visualización espacial y la corrección de errores de interpretación geométrica (Codina et al., 2023).

La realidad virtual inmersiva surge como un recurso con potencial para ampliar las posibilidades de enseñanza y aprendizaje de la geometría: permite al estudiante ingresar en los objetos, manipularlos con gestos naturales, experimentar cambios de punto de vista y observar relaciones espaciales desde dentro y fuera de la figura. La documentación y los estudios del equipo desarrollador y de grupos de investigación que trabajan con el software **NeoTrie VR** apuntan a estas oportunidades, analizadas en experiencias con distintos niveles educativos (primaria, secundaria, formación inicial y algunos estudios universitarios). Estas fuentes describen a **NeoTrie VR** como una plataforma multijugador que posibilita la creación, manipulación e interacción directa con modelos geométricos tridimensionales, y que ha sido empleada en actividades didácticas para explorar poliedros, fractales **3D** y conceptos de estereometría (Rodríguez et al., 2021; Codina et al., 2023).

Al revisar la bibliografía disponible se observa una limitación importante: la literatura sobre **NeoTrie VR** y, en general, sobre realidad virtual inmersiva aplicada a la geometría es todavía incipiente y concentrada en pocos autores, dado que se trata de un campo de estudio emergente. Esta situación exige un tratamiento cuidadoso: gran parte de los trabajos proviene del mismo equipo desarrollador, lo que aporta información técnica relevante pero también requiere contrastar sus hallazgos con experiencias externas. Por ello, esta investigación combina los estudios y reportes del

equipo creador con trabajos de implementación y evaluación en diferentes niveles educativos, con el propósito de construir un marco de referencia que permita analizar de manera crítica el potencial y las limitaciones de **NeoTrie VR**.

La decisión de incorporar en el cuerpo del trabajo un manual detallado de **NeoTrie VR** responde a una doble necesidad: por un lado, la falta de materiales técnicos y pedagógicos exhaustivos, y por otro, la demanda práctica de un recurso que oriente su uso en contextos educativos. En la documentación que forma parte de esta tesis se sistematiza el funcionamiento del programa, los requisitos de hardware y software, y una guía de uso útil para docentes y estudiantes. Dicha sistematización constituye un aporte original a la comunidad hispanohablante, pues facilita replicar experiencias, acortar la curva de aprendizaje y documentar las restricciones técnicas observadas en la práctica. Dado que **NeoTrie VR** es relativamente nuevo y su documentación pública es limitada, el manual incluido en este trabajo funciona tanto como herramienta metodológica para la investigación como recurso pedagógico reutilizable en procesos de formación docente.

La elección de la tarea y del teorema de Euler para poliedros obedece a criterios didácticos y metodológicos definidos. El teorema de Euler ( $V - E + F = 2$ , para poliedros convexos). es un contenido central de la estereometría: su simplicidad formal contrasta con la riqueza de sus implicaciones conceptuales, lo que lo convierte en un objeto didáctico idóneo para promover la exploración, la formulación de conjeturas y la validación experimental en distintos entornos. Una tarea centrada en la construcción, descomposición y manipulación de poliedros permite a los estudiantes confrontar de manera directa la relación entre vértices, aristas y caras, y facilita la comparación entre tres ambientes de trabajo: **material concreto**, **GeoGebra 3D** y realidad virtual inmersiva. Esta comparación es metodológicamente valiosa porque la misma problemática —verificar y comprender la relación de Euler— puede abordarse en los tres entornos, pero cada uno puede ofrecer recursos distintivos: sensorialidad y tacto en el **material concreto**; precisión algebraico-gráfica y facilidad de reproducción en **GeoGebra 3D**; inmersión, cambio de perspectiva y manipulación natural en la realidad virtual. La tarea, por tanto, ha sido diseñada para exponer y contrastar las

posibilidades y limitaciones de cada ambiente en relación con objetivos de aprendizaje espacial y argumentación matemática.

Desde una perspectiva teórica, la investigación se apoya en los enfoques socioculturales e instrumentales del aprendizaje (Camargo, 2021; Rabardel, 2011), que conciben la tecnología como mediación de la actividad cognitiva y social. En el plano epistemológico, parte de la idea de que el conocimiento se construye en la interacción con los instrumentos, no solo a partir de su uso. Integrar esta mirada permite analizar no solo qué hacen los estudiantes con cada recurso, sino cómo se reorganizan sus esquemas de acción —entendidos, siguiendo a Rabardel, como formas de uso y apropiación del instrumento— al trabajar con recursos distintos. Esta conceptualización sustenta el análisis de la instrumentalización de los estudiantes (cómo aprenden a usar cada recurso) y la del propio investigador, ambos como insumos centrales del estudio. La investigación aporta relevancia para la formación docente: al comparar **material concreto, GeoGebra 3D** y realidad virtual inmersiva en una misma tarea, el estudio busca producir evidencia práctica y analítica que permita identificar qué tipo de situaciones de aprendizaje favorecen la consolidación de imágenes espaciales, la argumentación geométrica y la capacidad de representar relaciones entre los elementos de un poliedro. No se limita a evaluar efectos inmediatos en estudiantes de primer semestre, sino que ofrece a los futuros licenciados en matemáticas criterios y materiales que pueden incorporar de manera crítica en su futura labor pedagógica. Con ello, la formación inicial no se restringe a la transmisión de contenidos, sino que promueve competencias para seleccionar, adaptar y evaluar herramientas tecnológicas de manera informada y contextualizada.

La pertinencia de la investigación se refuerza por su capacidad para abordar brechas empíricas y documentales, como la ausencia de estudios en contextos universitarios y la carencia de manuales pedagógicos detallados sobre **NeoTrie VR**. Al sistematizar una experiencia de implementación universitaria, comparar tres ambientes en una misma tarea y ofrecer un manual que documenta el uso del entorno inmersivo, el trabajo genera insumos replicables para otros contextos y contribuye al debate académico sobre la integración de tecnologías inmersivas en secuencias didácticas coherentes y con sentido formativo. Esta tesis contribuye teórica, empírica y pedagógicamente al

estudio de la enseñanza de la geometría con realidad virtual inmersiva, atendiendo con rigor a las limitaciones actuales de la literatura —en particular, la escasez de estudios empíricos independientes— mediante la documentación detallada de una experiencia universitaria y la creación de un recurso que amplía la base disponible para futuras investigaciones.

## OBJETIVOS

### Objetivo general

Reflexionar sobre el uso del software **NeoTrie VR** en la enseñanza de la geometría tridimensional, mediante la identificación de sus atributos y limitaciones frente a **GeoGebra 3D** y el **material concreto**, así como la elaboración de recursos que orienten y faciliten su aplicación pedagógica en contextos de formación.

### Objetivos específicos

- Elaborar un manual de uso de **NeoTrie VR** que incluya instrucciones de instalación, descripción de funciones, propuestas de actividades didácticas de geometría y orientaciones pedagógicas para apoyar a docentes y estudiantes en el uso de esta herramienta.
- Diseñar, aplicar y documentar una tarea sobre poliedros que integren **NeoTrie VR**, **materiales concretos** y **GeoGebra 3D**, con el propósito de analizar las formas de interacción y aprendizaje que se generan en cada entorno.
- Analizar comparativamente las actividades desarrolladas con **material concreto**, **GeoGebra 3D** y **NeoTrie VR**, observando los procesos de interacción y las evidencias de aprendizaje que emergen en cada caso.
- Identificar y sistematizar las ventajas, dificultades y limitaciones que emergen en el uso de **NeoTrie VR** durante experiencias de enseñanza y aprendizaje de la geometría, a partir del trabajo con estudiantes y del análisis de su aplicabilidad en contextos educativos.

## MARCO CONCEPTUAL

### Los esquemas de uso según Pierre Rabardel

En esta investigación resulta fundamental la perspectiva de Pierre Rabardel sobre los esquemas de utilización, desarrollada en su obra *Los hombres y las tecnologías. Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos* (Rabardel, 2011). El autor parte de una premisa central: un artefacto, por sí mismo, no constituye un instrumento. Este solo adquiere tal condición cuando se inserta en prácticas de uso y es apropiado por los sujetos en el desarrollo de una actividad. En palabras de Rabardel (2011), “los dos componentes del instrumento, artefacto y esquema están asociados uno al otro, pero también en una relación de independencia relativa. Un mismo esquema de utilización puede aplicarse a una multiplicidad de artefactos [...] recíprocamente, un artefacto es susceptible de inserción en una multiplicidad de esquemas de utilización que van a atribuirle significados e incluso funciones diferentes” (p. 179).

En la realidad virtual, esta distinción adquiere especial relevancia. Los visores, mandos y entornos tridimensionales, como **NeoTrie VR**, son artefactos tecnológicos que por sí mismos no garantizan aprendizaje alguno. Solo cuando el estudiante los incorpora en su actividad de exploración geométrica y desarrolla modos particulares de manipular, observar o construir objetos tridimensionales, estos artefactos se transforman en instrumentos cognitivos. Así, la apropiación de **NeoTrie VR** no depende únicamente de su dominio técnico, sino del proceso de integración funcional dentro de los esquemas de acción del estudiante.

El instrumento es inseparable de los esquemas de utilización, entendidos como las organizaciones de la actividad del sujeto que permiten insertar el artefacto en la acción y orientarlo hacia un objetivo. Como explica Rabardel (2011), “el conjunto formado por el artefacto y los esquemas constituye el instrumento, que puede insertarse en la acción del sujeto como un componente funcional de esa acción” (p. 181). En esta investigación, los esquemas permiten comprender cómo un estudiante pasa de manipular funciones básicas a organizar acciones que expresan pensamiento geométrico.

En la experiencia de trabajo con **NeoTrie VR**, esta concepción se refleja en el modo en que los participantes aprendieron a usar el entorno. Inicialmente, su atención se centró

en dominar las herramientas básicas —crear vértices, unir aristas, formar caras o desplazar poliedros—. Con el tiempo, esas acciones se integraron en esquemas más amplios, orientados a la exploración geométrica y al razonamiento espacial. El artefacto tecnológico se transformó así en un instrumento mediador entre la acción corporal y la comprensión conceptual, en la forma en que Rabardel define los instrumentos cognitivos: recursos que median la actividad intelectual y permiten construir representaciones del objeto de conocimiento.

Una consecuencia relevante de esta propuesta es que un mismo esquema de utilización puede aplicarse a múltiples artefactos, incluso de clases distintas, mientras que un artefacto puede ser insertado en diversos esquemas, adquiriendo funciones y significados diferentes (Rabardel, 2011). Esta visión explica por qué los sujetos pueden transferir modos de acción entre entornos, o atribuir a un artefacto funciones nuevas más allá de las previstas por su diseño.

Rabardel distingue varios tipos de esquemas. “Esto nos conduce a distinguir dos niveles de esquemas en el seno de los esquemas de utilización: los esquemas de uso relativos a las tareas segundas [...] y los esquemas de acción instrumentada [...] relativos a las tareas primeras” (Rabardel, 2011, p. 172). En **NeoTrie VR**, los esquemas de uso agrupan acciones elementales asociadas directamente con el artefacto —como girar, desplazar o seleccionar una función—, mientras que los esquemas de acción instrumentada organizan esas acciones en torno a tareas más amplias, como construir un poliedro regular o comprobar el teorema de Euler. Finalmente, los esquemas de actividad colectiva instrumentada median la cooperación entre sujetos. En este estudio, aunque solo una persona manipulaba el entorno virtual a la vez, los compañeros que observaban la pantalla participaban activamente sugiriendo pasos, corrigiendo errores y discutiendo la construcción, lo que constituye una forma de actividad colectiva mediada por el artefacto.

La génesis de estos esquemas se explica mediante la génesis instrumental, que comprende dos procesos complementarios: la instrumentalización, orientada hacia el artefacto, y la instrumentación, orientada hacia el sujeto.

“Los esquemas de utilización del artefacto se enriquecen y se diversifican en función de la multiplicidad de los artefactos con los que están asociados para

formar un instrumento [...] Los artefactos a menudo preexisten, pero son instrumentalizados por el sujeto. Los esquemas [...] deben construirse totalmente nuevos; el conjunto de esos procesos puede caracterizarse en términos de procesos de instrumentación y de instrumentalización” (Rabardel, 2011, pp. 181-182).

La primera se refiere a las adaptaciones o reinterpretaciones que el usuario hace del artefacto; por ejemplo, cuando un participante descubre nuevas formas de emplear herramientas no previstas originalmente —como utilizar la función de intersección para verificar relaciones espaciales o el modo vuelo para observar un sólido desde su interior—. La segunda describe la evolución de los esquemas de utilización y de acción instrumentada, que se transforman mediante mecanismos de asimilación, acomodación y coordinación (Rabardel, 2011, pp. 190-194). La génesis instrumental implica así una doble dinámica: el sujeto transforma el artefacto y, simultáneamente, transforma sus propios esquemas cognitivos.

Rabardel utiliza ejemplos cotidianos para ilustrar esta relación. En su análisis del uso del secador de pelo, muestra cómo puede emplearse para descongelar o calentar, evidenciando la multiplicidad de esquemas de utilización de un mismo artefacto. En el contexto educativo, algo similar ocurre cuando los estudiantes con mayor experiencia en **NeoTrie VR** integran estrategias propias y adaptan el entorno a sus necesidades de exploración, mientras que los principiantes concentran su atención en la ejecución técnica.

Los esquemas de utilización no son simples rutinas, sino construcciones cognitivas y prácticas que articulan la actividad del sujeto, orientan la acción y median la relación entre el sujeto y el objeto de conocimiento. “Un artefacto puede insertarse en una multiplicidad de esquemas de utilización que le atribuyen significados y funciones diferentes” (Rabardel, 2011, p. 179). En la realidad virtual, esta multiplicidad se manifiesta en las diversas formas de interacción que los estudiantes desarrollan: manipular con las manos virtuales, observar desde distintas perspectivas o construir un poliedro, cada una configurando una relación instrumental particular con el objeto geométrico.

El marco teórico de Rabardel ofrece un fundamento para comprender la mediación tecnológica en la enseñanza de la geometría. En este trabajo, los entornos **NeoTrie VR**, **GeoGebra 3D** y **material concreto** se conciben como ambientes con diferentes artefactos cuya transformación en instrumentos depende de los esquemas de utilización construidos por los estudiantes. En las tareas diseñadas, se observan esquemas elementales (creación y rotación de poliedros) y esquemas de acción instrumentada (formulación de conjeturas, verificación del teorema de Euler). En el entorno de realidad virtual, los procesos adquieren una dimensión corporal y perceptiva más intensa, pues los movimientos y gestos se integran directamente a la acción cognitiva. Esto se observó en la implementación cuando los estudiantes, al manipular los modelos en **NeoTrie VR**, debían girar el cuerpo, inclinar la cabeza o extender los brazos para ubicar vértices y aristas, incorporando estos gestos a la resolución de las tareas propuestas. Desde esta perspectiva, el análisis de los esquemas de utilización permite interpretar cómo estas acciones concretas se transforman progresivamente en instrumentos cognitivos que sostienen la exploración y la construcción geométrica.

### **Realidad virtual y realidad virtual inmersiva**

De acuerdo con Fuchs y Moreau (2011), retomado por Rodríguez (2024), la realidad virtual puede clasificarse según el grado de inmersión que permite en tres modalidades principales: no inmersiva, semi-inmersiva e inmersiva. Esta clasificación se ha consolidado en la literatura sobre tecnologías educativas por su utilidad para distinguir los niveles de presencia, interacción y percepción que experimenta el usuario en relación con el entorno virtual. En años recientes se han incorporado también categorías híbridas como la realidad aumentada (**RA**) y la realidad mixta (**RM**), que amplían los límites de la virtualidad hacia la interacción con el entorno físico (Rodríguez, 2024). A continuación se describen tales modalidades:

#### ***Realidad virtual no inmersiva***

Se caracteriza por la interacción con entornos tridimensionales mediante pantallas convencionales y periféricos como teclado, ratón o pantallas táctiles. Aunque el usuario no se sumerge por completo, puede manipular objetos y observarlos desde distintas perspectivas. Esta modalidad es habitual en programas de geometría dinámica como

**GeoGebra 3D**, donde la experiencia tridimensional se simula en una proyección bidimensional. En esta investigación, la realidad virtual no inmersiva constituye un punto intermedio entre lo concreto y lo inmersivo: posibilita la visualización de figuras tridimensionales, pero sin la corporalidad ni la sensación de presencia que definen a la inmersión plena.

### ***Realidad virtual semi-inmersiva***

Combina elementos físicos y virtuales mediante proyecciones envolventes o pantallas panorámicas. En estos sistemas el usuario experimenta cierta inmersión sin perder completamente la referencia del entorno real. Ejemplos frecuentes son los simuladores de vuelo o los laboratorios con pantallas estereoscópicas. (Fuchs et al., 2011) señalan que este tipo de experiencia amplía la comprensión espacial en comparación con la modalidad no inmersiva, aunque aún carece de la interacción corporal directa que proporciona la inmersión total.

### ***Realidad virtual inmersiva***

Corresponde al nivel más avanzado de virtualidad. El usuario se introduce completamente en el entorno mediante visores, mandos y sensores de movimiento que sincronizan sus acciones físicas con las respuestas visuales y auditivas. La **RVI** genera la ilusión perceptiva de estar dentro del espacio virtual, integrando visión, movimiento y orientación corporal.

En el ámbito educativo, esta modalidad ha mostrado un potencial significativo para el aprendizaje de la geometría tridimensional, al permitir que los estudiantes manipulen directamente objetos matemáticos en el espacio. Rodríguez et al. (2021) destacan que el uso de herramientas como **NeoTrie VR** posibilita “ver, tocar y construir poliedros”, conectando la percepción con la conceptualización. Esta interacción corporal transforma el aprendizaje en una experiencia activa donde el conocimiento emerge del hacer y del observar de manera simultánea.

Aunque aquí se describen las tres modalidades de realidad virtual, la investigación se centra en la realidad virtual inmersiva, por ser la que sustenta la experiencia de enseñanza y aprendizaje desarrollada con **NeoTrie VR**. Su inclusión dentro del marco teórico responde a la necesidad de situar esta modalidad en relación con otras formas

de mediación tecnológica y de comprender su papel específico en la formación de imágenes espaciales y en la argumentación geométrica.

### ***Realidad Aumentada (RA) y Realidad Mixta (RM)***

La realidad aumentada y la realidad mixta no son formas de **RV** en sentido estricto, pero comparten su propósito de integrar lo digital con la percepción del espacio. La **RA** superpone objetos virtuales sobre el entorno físico, mientras que la **RM** permite una interacción bidireccional entre ambos planos. Rodríguez (2024) explica que estas tecnologías amplían las fronteras del aprendizaje inmersivo al situar los objetos matemáticos en el entorno real del estudiante, combinando la manipulación tangible con la exploración digital.

### ***La realidad virtual inmersiva como entorno de aprendizaje***

Más que una innovación tecnológica, la realidad virtual inmersiva representa un cambio en la forma de relacionarse con el conocimiento. En palabras de Rodríguez (2024), el aula que integra esta tecnología se convierte en “una aventura difícil pero emocionante”, donde tanto docentes como estudiantes deben reaprender a interactuar con los saberes. Esta transformación tiene un alcance epistemológico y pedagógico, pues modifica la relación entre el sujeto y el conocimiento: el estudiante ya no se limita a observar, sino que actúa, percibe y construye dentro del objeto de estudio.

Diversas investigaciones (Cangas et al., 2019; Codina et al., 2023; Moral et al., 2023) han documentado beneficios de la **RVI** en la educación matemática, destacando el aumento de la motivación, la mejora en la visualización espacial y la posibilidad de corregir errores conceptuales de manera autónoma. Moral et al. (2023) señalan que los entornos inmersivos favorecen la metacognición, al permitir que los estudiantes experimenten con sus propias construcciones, las modifiquen y observen los resultados en tiempo real.

En la enseñanza de la geometría, la **RVI** hace posible representar y transformar objetos complejos —como poliedros o fractales— de manera que combina percepción visual, manipulación gestual y razonamiento espacial. Según Codina, et al. (2023), **NeoTrie VR** permite crear y modificar figuras tridimensionales con las manos virtuales, lo que amplía la comprensión de las propiedades estructurales y topológicas de los sólidos. El

aprendizaje, en este contexto, se construye en la interacción: el estudiante explora, manipula y argumenta a partir de la experiencia sensorial.

### ***La realidad virtual en el contexto de la investigación***

En este trabajo, la realidad virtual inmersiva —a través del software **NeoTrie VR**— se concibe como un entorno de mediación tecnológica que permite analizar cómo los futuros docentes de matemáticas construyen conocimiento geométrico al desarrollar una tarea común en tres escenarios: **material concreto**, **GeoGebra 3D** y **RVI**. Esta comparación busca comprender las diferencias en las formas de acción, percepción y argumentación que cada entorno propicia, más que establecer jerarquías entre ellos. Siguiendo a Rabardel (2011), la **RVI** se considera un artefacto que, al ser apropiado por el estudiante, se transforma en un instrumento cognitivo, mediador entre la acción corporal y la comprensión conceptual. En este proceso, los visores y mandos dejan de ser dispositivos externos para integrarse en los esquemas de acción gestual y perceptiva del usuario. Así, la **RVI** no solo amplía los recursos de enseñanza, sino que redefine las formas de interacción con los objetos geométricos, permitiendo que la exploración sensorial y la reflexión conceptual se articulen en una misma experiencia. La realidad virtual inmersiva no debe entenderse como una herramienta cerrada, sino como un entorno de mediación cognitiva que integra percepción, acción y pensamiento. Su potencial en la enseñanza de la geometría radica en ofrecer un espacio donde los conceptos adquieren cuerpo, volumen y movimiento, permitiendo que el aprendizaje sea una experiencia significativa y situada. Más que establecer conclusiones definitivas, este trabajo propone interpretar cómo la **RVI** abre nuevas posibilidades para la formación de futuros docentes y para el estudio de los procesos de mediación tecnológica en la educación matemática.

Resulta pertinente considerar que las potencialidades y limitaciones de la realidad virtual inmersiva solo adquieren pleno sentido cuando se examinan a través de entornos concretos de implementación. Entre ellos, **NeoTrie VR** destaca como un ejemplo particularmente significativo por articular las posibilidades técnicas de la inmersión con funciones específicas para la construcción y exploración geométrica. Su diseño orientado a la manipulación directa de objetos geométricos en un espacio tridimensional, que caracterizan a la **RVI** se encarna en una herramienta práctica para

la enseñanza y aprendizaje de la geometría **3D**. Por ello, antes de analizar los resultados del experimento de enseñanza, es necesario presentar las características fundamentales de este software, ya que constituye el entorno inmersivo mediante el cual se investigó la construcción y comprensión de los objetos geométricos.

### **NeoTrie VR**

Es una plataforma educativa desarrollada por la Universidad de Almería que permite explorar, construir y manipular objetos geométricos en entornos de realidad virtual inmersiva. Según su sitio oficial, *“con **NeoTrie VR**, la geometría deja de ser abstracta para convertirse en una experiencia inmersiva e interactiva. Nuestra plataforma de realidad virtual educativa permite visualizar, manipular y crear figuras geométricas en **3D**, facilitando un aprendizaje profundo y significativo”* (NeoTrie, 2025).

El software combina la realidad virtual y la geometría dinámica, posibilitando que estudiantes y docentes trabajen colaborativamente en la creación de estructuras tridimensionales dentro de un espacio virtual. Además, incorpora herramientas que permiten *“crear figuras a partir de vértices, aristas y caras, y editar cada uno de esos elementos de forma intuitiva con los mandos virtuales”* (NeoTrie, 2025).

Una de sus características distintivas es la interacción multijugador, mediante la cual *“profesores y alumnos pueden construir juntos en tiempo real desde distintos espacios”* (NeoTrie, 2025). Asimismo, el programa permite integrar objetos **3D**, imágenes, sonidos, textos y vídeos, ampliando las posibilidades didácticas y creativas en el aula virtual. Estas experiencias pueden ser guardadas y compartidas mediante archivos en formato. NEOT, lo que favorece el intercambio y la continuidad del trabajo educativo.

**NeoTrie VR** constituye una herramienta de geometría interactiva en realidad virtual, orientada a potenciar la comprensión espacial, la visualización tridimensional y la experimentación matemática a través de experiencias inmersivas, colaborativas y dinámicas.

### **¿Qué necesito para usar NeoTrie VR?**

El funcionamiento de NeoTrie VR depende del dispositivo en el que se ejecute. Existen dos modalidades principales: PC y MetaQuest.

- Requisitos para PC (versión Steam):

- Sistema operativo: Windows 7 o superior (incluye Windows 10 y versiones posteriores).
- Procesador: Intel i5-4590 o AMD FX-8350 (o versiones superiores).
- Memoria RAM: mínimo 4 GB.
- Tarjeta gráfica: NVIDIA GeForce GTX 1050Ti o AMD Radeon RX 470 (o superiores).
- Versión mínima de DirectX: 11.
- Espacio disponible en disco duro: 1 GB como mínimo.
- Requisitos para visores MetaQuest:
  - Un visor MetaQuest 2 o superior.
  - Conexión estable a internet mediante Wi-Fi.
  - Una cuenta Meta (antes Oculus) configurada previamente.

**NeoTrie VR** ofrece licencias educativas de carácter anual, diseñadas para su uso en contextos académicos. Estas licencias incluyen cuatro componentes esenciales: acceso a las herramientas del nivel de usuario, acceso a todos los materiales educativos proporcionados por **NeoTrie VR**, actualizaciones automáticas del software y soporte técnico personalizado. (NeoTrie, 2025) Para seleccionar la licencia correspondiente, el usuario puede hacerlo desde la sección *Player Settings* dentro de la aplicación, y en el modo multijugador todos los participantes deben disponer de la misma categoría de licencia para acceder a las herramientas equivalentes (NeoTrie, 2025).

En cuanto a las opciones de licencia para un único dispositivo, **NeoTrie VR** distingue tres niveles, con precios específicos (actualizados al 16 de septiembre de 2025):

- Principiante: 79,95 € por año
- Experto: 109,95 € por año
- Avanzado: 139,95 € por año

Para usos que impliquen más de 4 dispositivos, **NeoTrie VR** solicita que los interesados contacten directamente con el equipo del proyecto para condiciones personalizadas. (NeoTrie, 2025)

Aunque la documentación pública no ofrece una tabla exhaustiva de funciones para cada nivel, se indica que la selección del tipo de licencia condiciona la disponibilidad de

herramientas en las escenas y actividades. Esto sugiere que las licencias de nivel superior (por ejemplo, la licencia *Avanzado*) activan herramientas más complejas o avanzadas que podrían estar restringidas en licencias *Principiante* o *Intermedio/Experto*. Por ejemplo, algunas actividades del proyecto implican el uso de operaciones avanzadas como reflejos, rotaciones, simetrías o generación de copias dependientes, lo cual podría requerir una licencia con mayores permisos (NeoTrie, 2025).

Desde el punto de vista legal, el uso de **NeoTrie VR** está regulado por sus Términos y Condiciones, en los cuales se establece que:

- El software y todos los derechos de propiedad intelectual (marcas registradas, derechos de autor, derechos sobre bases de datos, etc.) pertenecen a Virtual Dor S.L.
- El usuario no tiene permiso para copiar, modificar, extraer código fuente, traducir la aplicación sin autorización o crear versiones derivadas del software.
- Virtual Dor S.L. se reserva el derecho de modificar el software o cobrar por sus servicios, siempre que se informe claramente al usuario sobre lo que se está pagando.
- También se reserva el derecho de terminar el uso del software y cancelar las licencias otorgadas, en cuyo caso el usuario debe dejar de usar la aplicación y, si es necesario, eliminarla de su dispositivo.

Las posibilidades de construcción, manipulación y exploración tridimensional que ofrece **NeoTrie VR** no solo amplían el repertorio de acciones disponibles para los estudiantes, sino que también permiten abordar con mayor profundidad conceptos estructurales de la geometría espacial. Entre ellos, la relación entre vértices, aristas y caras adquiere un papel central, pues la interacción directa con los elementos constitutivos de los poliedros facilita observar regularidades y contrastar propiedades desde múltiples perspectivas. La capacidad del entorno para generar y transformar figuras en tiempo real convierte a **NeoTrie VR** en un medio propicio para el estudio de una de las relaciones más notables de la estereometría: el teorema de Euler para poliedros convexos, cuyo análisis constituye el fundamento matemático de la tarea desarrollada en esta investigación.

## Teorema de Euler

El estudio de los poliedros ocupa un lugar privilegiado en la historia de la geometría, desde la antigüedad griega hasta la matemática contemporánea. Sin embargo, fue en el siglo XVIII cuando **Leonhard Euler** formuló una de las propiedades más notables y universales de estas figuras: la relación entre el número de **vértices (V)**, **aristas (E)** y **caras (F)** de todo poliedro convexo. Esta relación, conocida como Teorema de Euler, se expresa mediante la fórmula:

$$V - E + F = 2$$

La relevancia de esta fórmula radica en su carácter general: no depende de medidas, ángulos ni proporciones, sino que revela una propiedad estructural o topológica de las figuras. Como señala Nápoles Valdés (2020), “la fórmula de Euler constituye una de las regularidades más reveladoras de la geometría, pues vincula tres elementos distintos de un poliedro en una relación constante”. Este hallazgo abrió una nueva perspectiva en las matemáticas: ya no se trataba únicamente de estudiar magnitudes, sino de comprender propiedades invariantes bajo transformación

Euler descubrió esta relación hacia 1750, a partir de su correspondencia con Christian Goldbach. La primera publicación apareció en los *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* (1758), donde enunció: “en todo poliedro convexo, si se suman las caras y los vértices y se restan las aristas, el resultado es siempre dos” (Nápoles V, 2020). Aunque el argumento original se basaba en casos concretos — como el cubo o el tetraedro—, su verificación en múltiples poliedros consolidó el resultado como un teorema.

Algunos ejemplos sencillos ilustran su validez:

- En un tetraedro,  $4 - 6 + 4 = 2$ .
- En un cubo,  $8 - 12 + 6 = 2$ .
- En un octaedro,  $6 - 12 + 8 = 2$ .

Incluso en poliedros más complejos, como el icosaedro o el dodecaedro, la relación se mantiene, mostrando que tras la diversidad de formas geométricas existe un principio de organización común.

Nápoles Valdés (2020) describe varias formas clásicas de argumentar la validez de la relación, más que demostraciones completas en sentido formal. Una de ellas consiste en proyectar un poliedro convexo sobre una esfera y luego desplegarlo en el plano, generando un grafo que conserva el número de vértices, aristas y caras del poliedro original. A partir de allí, se pueden reducir progresivamente aristas y caras sin alterar la relación, hasta llegar a un caso elemental en el que la fórmula se verifica de manera inmediata.

Otra aproximación se apoya en la inducción estructural: partiendo de un poliedro simple en el que la relación se cumple, se muestra que la adición sucesiva de caras y aristas, conservando la convexidad, no modifica el valor de  $V - E + F$ . Estas ideas evidencian que el teorema pertenece a un nivel de organización topológico, pues se mantiene bajo deformaciones continuas que no alteran la conectividad del sólido.

De hecho, el enfoque topológico que deriva de este teorema marcó un cambio en la historia de la geometría: el paso de una preocupación por las magnitudes métricas a una reflexión sobre invariantes estructurales.

El impacto del teorema de Euler trascendió la geometría elemental. La observación de que la fórmula seguía siendo válida bajo deformaciones continuas condujo a la noción de característica de Euler, una generalización que extendió la relación  $V - E + F = 2$  a superficies más amplias, incluidas aquellas con agujeros o túneles. Así, para un toro la relación es  $V - E + F = 0$ , y para superficies de mayor género la constante cambia. Con esta extensión, la idea de Euler se convirtió en un pilar de la topología moderna, y más tarde dio lugar a la característica de Euler–Poincaré, aplicable a espacios de dimensión superior (Nápoles V, 2020).

Aunque su forma más conocida se aplica a poliedros convexos, el teorema de Euler conserva un profundo valor didáctico: permitiría articular lo geométrico, lo aritmético y lo topológico, y podría favorecer la exploración, la formulación de conjeturas y la verificación empírica en contextos educativos. Por su simplicidad formal y su riqueza conceptual, este teorema se convierte en un punto de partida idóneo para estudiar la visualización espacial y el razonamiento geométrico en distintos entornos tecnológicos, como los que aborda esta investigación.

## ESTREATEGIA INVESTIGATIVA

En esta investigación participaron siete estudiantes del programa de **Licenciatura en Matemáticas** de la **Universidad Pedagógica Nacional**, quienes cursaban el primer semestre de formación. Su participación fue voluntaria y se formalizó mediante la firma de un consentimiento informado, en el que se explicaban los objetivos de la investigación y el uso académico de los registros obtenidos. Ninguno de los participantes solicitó anonimato, por lo que se conservaron sus nombres reales en las descripciones y análisis, garantizando un tratamiento respetuoso de la información. Los participantes fueron **Karen, Paula, Juan, Mariana, Erika, Tatiana y Mateo**. Todos compartían la condición de estar iniciando su formación universitaria como futuros docentes de matemáticas. Sus conocimientos en geometría eran básicos y se limitaban a los contenidos vistos en la educación media. Ninguno de ellos había trabajado con entornos digitales ni con herramientas de realidad virtual; solo Daniel Mateo tenía una experiencia previa breve con el programa **GeoGebra 3D**.

Karen y Paula, recién egresadas del colegio, mostraron entusiasmo y disposición para participar, aunque sus conocimientos geométricos eran elementales. Juan José Sarmiento evidenció facilidad para el razonamiento espacial y precisión en las construcciones geométricas. Mariana, la participante más joven, mostró interés y constancia en las tareas, aunque con poca familiaridad con la geometría espacial. Erika, con experiencia laboral reciente como docente de primaria, aportó una actitud reflexiva y analítica. Tatiana manifestó buena actitud hacia las matemáticas, aunque con conocimientos básicos. Mateo, con algunos semestres previos de formación en la misma licenciatura, se desarrolló con mayor soltura en los ambientes digitales.

Las experiencias se desarrollaron en tres ambientes de trabajo:

- **Material concreto:** participaron Juan, Karen y Paula. Esta actividad se realizó en una única sesión de aproximadamente dos horas y media.
- **GeoGebra 3D:** participaron Karen, Paula, Erika, Mariana, Tatiana y Mateo. Se realizaron dos sesiones: una de instrumentalización (30 a 40 minutos) y otra de aplicación de la tarea (alrededor de 1 hora y 15 minutos).

- **NeoTrie VR:** participaron Karen, Paula, Mateo, Erika y Mariana. Cada uno tuvo una sesión de instrumentalización y una sesión de aplicación de la tarea, con una duración aproximada de 30 a 40 minutos por sesión.

La recolección de la información se realizó mediante videos, fotografías, las guías de trabajo elaboradas por los estudiantes y registros de observación tomados durante las sesiones. Estos materiales permitieron describir las acciones, las dificultades y las formas de resolver las tareas en cada ambiente, así como comparar los modos de trabajo en los distintos contextos.

El trabajo con los estudiantes se estructuró alrededor de un experimento de enseñanza, planteado como la estrategia principal de la investigación. Este experimento permitió observar cómo los futuros docentes construyen, representan y analizan figuras geométricas al interactuar con diferentes entornos: **Material concreto**, **GeoGebra 3D** y realidad virtual inmersiva con **NeoTrie VR**. En las siguientes secciones se presenta la fundamentación teórica y metodológica que orientó su diseño, junto con la descripción de las fases, tareas y condiciones de aplicación

### **Experimento de enseñanza**

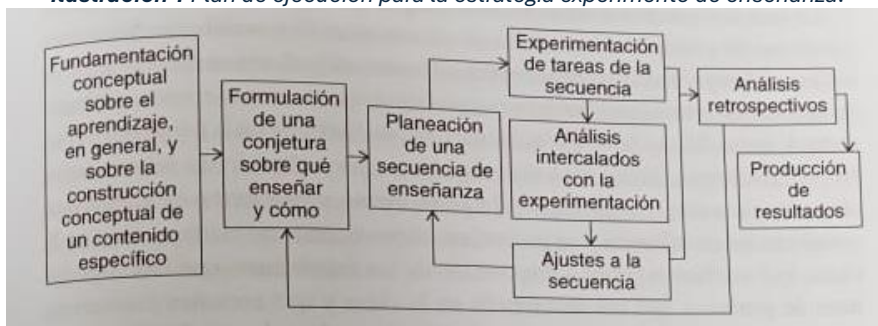
La presente investigación se enmarca en un experimento de enseñanza, entendido como una modalidad metodológica que articula el diseño de situaciones didácticas con la observación, el análisis y la reflexión sobre los procesos de aprendizaje de los estudiantes. Según Camargo Uribe (2021), este tipo de metodología se orienta a la construcción de conocimiento en contextos educativos reales, donde el investigador desempeña un papel activo en el diseño, la implementación y la evaluación de actividades que propician la emergencia de fenómenos de interés para la investigación. A diferencia de los métodos experimentales de carácter cuantitativo, el experimento de enseñanza no busca establecer relaciones causales universales, sino generar comprensiones profundas sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje que ocurren en condiciones específicas (Camargo, 2021, p. 86).

El experimento de enseñanza constituye una estrategia que combina simultáneamente la acción pedagógica y la indagación investigativa, permitiendo que los datos emerjan en el contexto mismo de la interacción didáctica. De este modo, el investigador no solo observa un fenómeno dado, sino que lo provoca deliberadamente al construir

condiciones de enseñanza planificadas con antelación. Camargo Uribe (2021) señala que esta estrategia es especialmente adecuada para el estudio de fenómenos didácticos complejos, los cuales no pueden comprenderse únicamente mediante aproximaciones teóricas o metodologías externas al aula, sino que requieren del análisis de situaciones reales vividas por los estudiantes en procesos de resolución de problemas, construcción conceptual y apropiación de herramientas tecnológicas (pp. 86-87).

En esta investigación, el experimento de enseñanza se concibió como una oportunidad para analizar cómo un grupo de futuros docentes de matemáticas, estudiantes de primer semestre de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, construye conocimiento geométrico al interactuar en diferentes entornos de mediación tecnológica: **material concreto**, **GeoGebra 3D** y realidad virtual inmersiva mediante **NeoTrie VR**. El diseño permitió observar cómo las características de cada entorno inciden en la organización de la actividad matemática, en especial en lo relativo a la percepción espacial, la manipulación de objetos y la formulación de conjeturas. De acuerdo con Camargo Uribe (2021), el experimento de enseñanza se desarrolla en tres fases principales: diseño, implementación y análisis (p. 88).

*Ilustración 1 Plan de ejecución para la estrategia experimento de enseñanza.*



*Fuente: (Camargo, 2021)*

La primera fase, de diseño, implica una reflexión sobre los contenidos matemáticos a abordar, los objetivos de aprendizaje y los posibles obstáculos que puedan presentarse. En este proyecto, dicha fase se concretó en la planeación de actividades centradas en el teorema de Euler para poliedros convexos, apoyadas en recursos tecnológicos como **NeoTrie VR**, **GeoGebra 3D** y **material concreto**. El propósito fue

favorecer la comprensión de las relaciones espaciales mediante la experimentación directa.

Estos recursos no se incorporaron como un añadido instrumental, sino como parte constitutiva de la experiencia de aprendizaje, en coherencia con lo que plantea Camargo Uribe (2021, p. 88). sobre la importancia de integrar los medios materiales y simbólicos que median los procesos de enseñanza.

La segunda fase corresponde a la implementación, en la que el investigador desarrolla las actividades diseñadas y recoge información sobre la interacción de los estudiantes con los contenidos, los materiales y las mediaciones del docente. En esta etapa, el investigador asume un rol dual: guía la experiencia de aprendizaje y, al mismo tiempo, actúa como observador sistemático de los procesos que emergen (Camargo, 2021, p. 88). En este caso, la implementación incluyó sesiones en las que los participantes interactuaron por grupos en los distintos entornos: manipularon poliedros con **material concreto**, los construyeron y visualizaron en **GeoGebra 3D**, y los recrearon en el entorno inmersivo de **NeoTrie VR**.

Durante el trabajo en realidad virtual se registraron fenómenos didácticos significativos que permitieron identificar indicios de aprendizaje geométrico mediados por la acción corporal y perceptiva. Se esperaba que los estudiantes desarrollaran esquemas de uso y acción instrumentada: aprendieran a “agarrar”, rotar y mover los poliedros en el espacio virtual, a contar sus elementos desde diferentes perspectivas y a verificar empíricamente la validez del teorema de Euler. Estas acciones mostrarían cómo la comprensión geométrica puede articularse con la exploración sensorial y motriz. Los registros recogidos —capturas de pantalla, fotografías, videos, narraciones y notas de campo— permitieron reconstruir los procesos de apropiación tecnológica y los modos de razonamiento espacial observados en la experiencia.

La tercera fase, de análisis e interpretación, consiste en contrastar las hipótesis iniciales con los resultados observados y establecer nuevas comprensiones sobre los fenómenos didácticos. Camargo Uribe (2021) explica que el análisis en esta etapa no se limita a describir acciones, sino que busca identificar regularidades, dificultades persistentes y oportunidades para reorganizar el conocimiento matemático (pp. 89-90). En esta investigación, el análisis se orientó a comprender cómo los diferentes entornos

modifican las estrategias de resolución, la coordinación de perspectivas y la forma de argumentar geoméricamente.

Camargo Uribe (2021, p. 91) destaca que el experimento de enseñanza no es un procedimiento aislado ni una intervención puntual, sino un proceso cíclico en el que cada implementación retroalimenta los diseños siguientes. En coherencia con este principio, en este estudio los resultados de cada sesión fueron analizados de manera inmediata y se utilizaron para ajustar consignas, instrumentos y mediaciones, garantizando una articulación constante entre diseño, práctica y análisis.

Metodológicamente, este enfoque resulta especialmente pertinente para investigaciones que buscan explorar la integración de recursos tecnológicos innovadores en la enseñanza de la geometría. Su pertinencia radica en que el experimento de enseñanza reconoce la complejidad del aula como un espacio donde interactúan múltiples dimensiones —cognitivas, tecnológicas, sociales y didácticas— que difícilmente podrían abordarse desde un paradigma experimental clásico. En cambio, el método propuesto por Camargo Uribe (2021, pp. 89-91) asume dicha complejidad como parte constitutiva del fenómeno a investigar, lo que permite construir explicaciones situadas y progresivas.

El carácter investigativo del experimento de enseñanza trasciende la mera descripción de los hechos. Como afirma Camargo Uribe (2021, p. 91), este método busca “crear condiciones para que emerjan fenómenos didácticos susceptibles de análisis”. En este trabajo, ello se concreta en la observación de cómo la realidad virtual inmersiva reconfigura las formas de interacción con los objetos matemáticos, promoviendo nuevas articulaciones entre percepción, acción y razonamiento geométrico. Más que establecer verdades generales, esta investigación pretende comprender cómo la mediación tecnológica transforma la experiencia de aprendizaje en la formación inicial.

## **Diseño de la tarea**

### **Descripción de la tarea**

La tarea implementada con los estudiantes tuvo como propósito central la exploración y análisis de poliedros en tres ambientes de trabajo diferenciados: **material concreto**, **GeoGebra 3D** y **NeoTrie VR**. La actividad fue diseñada con el objetivo de favorecer el reconocimiento de los elementos constitutivos de los poliedros (vértices, aristas y

caras) y la identificación de patrones en sus relaciones, conduciendo finalmente a intentar la formulación de una conjetura asociada al **Teorema de Euler**.

La tarea se estructuró de manera progresiva. Inicialmente, se solicitó a los estudiantes la construcción de figuras básicas a partir de puntos: un punto aislado, un segmento que conecta dos puntos, un triángulo formado por tres puntos, un cuadrado o pirámide con cuatro puntos, una pirámide o prisma con cinco puntos y, finalmente, un cubo o prisma rectangular con ocho puntos. Cada una de estas construcciones debía ser registrada en una tabla, donde los estudiantes consignaron el número de vértices, aristas y caras de cada una de las construcciones.

En la segunda parte, la tarea se centró en la construcción de los cinco poliedros regulares: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro. En este proceso, los estudiantes nuevamente completaron una tabla con el número de vértices, aristas y caras de cada poliedro, para intentar establecer comparaciones y analizar regularidades.

Finalmente, los estudiantes respondieron un conjunto de preguntas orientadas a promover la reflexión, Preguntas que se pueden encontrar de manera completa en los Anexos 3, 4, 5. Entre ellas se encontraban: ¿qué ocurre con la cantidad de vértices, aristas y caras a medida que agregamos puntos y formamos poliedros más complejos?, ¿puedes identificar algún patrón en los valores obtenidos?, ¿qué diferencias encuentras entre poliedros regulares e irregulares?, y ¿cómo se puede formular una conjetura sobre la relación entre vértices, aristas y caras en poliedros convexos? Estas preguntas buscaron conducir a los estudiantes hacia el reconocimiento de la relación de Euler.

Para asegurar la correcta ejecución de la tarea, previamente se realizó una actividad de instrumentalización, en la que los estudiantes aprendieron a manipular cada recurso de manera independiente. En el caso del **material concreto**, no se realizó ninguna instrumentalización formal, dado que las herramientas que iban a manipular son de uso común, por lo que los esquemas de uso asociados estaban ya establecidos e interiorizados. En **GeoGebra 3D**, los estudiantes aprendieron a crear y manipular puntos, segmentos y poliedros dentro del entorno digital, desarrollando esquemas de uso específicos para la navegación y el control del plano tridimensional. Finalmente, en

**NeoTrie VR**, se orientó una fase inicial de familiarización con los controles de realidad virtual, el trazado de vértices y aristas, y la construcción inmersiva de poliedros en el espacio tridimensional, donde los esquemas de uso implicaron tanto la coordinación motriz del cuerpo en el espacio virtual como la apropiación de los gestos instrumentales para la creación de figuras.

### ***Justificación de la actividad***

En primer lugar, se trata de una tarea que sitúa a los estudiantes en una dinámica activa de construcción del conocimiento geométrico. El hecho de partir de elementos básicos y avanzar hacia construcciones más complejas promueve el desarrollo del razonamiento inductivo, permitiendo que los estudiantes descubran patrones y formulen conjeturas por sí mismos, en lugar de recibir el conocimiento de manera expositiva. Desde la perspectiva del enfoque instrumental de Rabardel (2011), esta dinámica favorece la génesis instrumental, en la que los artefactos —sean materiales, digitales o inmersivos— son apropiados por los sujetos mediante la construcción de esquemas de uso que integran acciones técnicas, representaciones y anticipaciones cognitivas.

En segundo lugar, la tarea está enfocada en analizar la integración de recursos tecnológicos, particularmente la realidad virtual mediante **NeoTrie VR**, en la enseñanza de la geometría. La comparación de la misma tarea en tres ambientes distintos permite observar cómo varía la experiencia de aprendizaje según el medio utilizado, ofreciendo evidencias para reflexionar sobre las potencialidades y limitaciones de cada recurso. Así, la tarea no solo posibilita la observación de procesos de aprendizaje, sino también la identificación de diferentes modos de acción instrumentada, donde los estudiantes adaptan y transforman sus esquemas en función de las características del entorno y de las sugerencias de uso que cada artefacto ofrece.

La tarea se justifica en tanto responde a la necesidad de explorar nuevas formas de enseñanza de la geometría en la formación inicial de profesores de matemáticas. Al situar a los estudiantes en ambientes inmersivos, digitales y concretos, se promueve una experiencia comparativa que aporta a la reflexión sobre el papel de la tecnología en la construcción de conocimiento matemático. Además, la tarea favorece la emergencia de esquemas de actividad colectiva instrumentada (Rabardel, 2011), dado

que la resolución, el intercambio y la discusión de resultados requieren una articulación de acciones individuales mediadas por los instrumentos con procesos colectivos de interpretación y validación matemática.

### ***Particularidades de cada ambiente***

Aunque la estructura de la tarea fue la misma en los tres ambientes, cada recurso ofreció particularidades que enriquecieron la experiencia:

- **Material concreto:** Permitió a los estudiantes tener un contacto físico directo con los poliedros y su construcción, favoreciendo la identificación tangible de vértices, aristas y caras. La manipulación manual promovió la comprensión desde la experiencia sensorial, aunque presentó limitaciones en cuanto a la construcción de poliedros más complejos o en el tiempo requerido para armar cada figura. Los materiales utilizados fueron palillos, plastilina, marcadores, regla, lápiz, cartulinas y papel transparente, entre otros. En este ambiente, los esquemas de uso se relacionaron con acciones habituales, de carácter perceptivo y motriz, mientras que los esquemas de acción instrumentada emergieron cuando los estudiantes comenzaron a establecer correspondencias entre las cantidades de elementos y las propiedades geométricas observadas.
- **GeoGebra 3D:** Ofreció un entorno digital preciso que facilitó la construcción de los poliedros. La posibilidad de rotar y observar las figuras desde diferentes perspectivas constituyó un apoyo significativo para la comprensión espacial. No obstante, la interacción con el software exigió cierto nivel de familiaridad tecnológica. En este caso, los esquemas de uso implicaron aprender a seleccionar herramientas, manipular vistas y registrar datos en la interfaz, mientras que los esquemas de acción instrumentada se evidenciaron en la articulación entre los comandos del software y el razonamiento geométrico que guiaba la construcción.
- **NeoTrie VR:** Brindó un ambiente inmersivo en el que los estudiantes experimentaron la construcción de poliedros de manera tridimensional, manipulando vértices y aristas en el espacio virtual. Esta experiencia generó un mayor nivel de inmersión y visualización espacial, permitiendo que los estudiantes percibieran las figuras “desde dentro” y exploraran libremente su

estructura. Sin embargo, la novedad de la herramienta implicó un proceso inicial de adaptación y aprendizaje técnico. En este ambiente, los esquemas de uso incluyeron la coordinación corporal con los controles y el reconocimiento de las representaciones espaciales. A medida que los estudiantes lograron integrar sus acciones físicas y cognitivas, emergieron esquemas de acción instrumentada que les permitieron razonar sobre la estructura de los poliedros mientras los construían. Además, la interacción simultánea entre pares dentro del entorno virtual favoreció la conformación de esquemas de actividad colectiva instrumentada, donde el intercambio verbal y gestual posibilitó la co-construcción del conocimiento geométrico.

La tarea implementada puede interpretarse como un escenario progresivo de génesis instrumental (Rabardel, 2011), donde los artefactos se transformaron en instrumentos mediante la apropiación, el uso reflexivo y la integración en la actividad matemática. Así, las acciones de los estudiantes transitaron desde la exploración técnica inicial hasta la elaboración conceptual, evidenciando que los instrumentos —en su diversidad material, digital y virtual— se constituyeron como mediadores del pensamiento geométrico y de la construcción compartida del conocimiento.

La metodología implementada en esta investigación integró la caracterización de los participantes, el diseño del experimento de enseñanza y la elaboración de una tarea común que se aplicó en tres ambientes de trabajo: **Material concreto**, **GeoGebra 3D** y **NeoTrie VR**. Cada uno de estos elementos se articuló con el propósito de observar cómo los futuros docentes de matemáticas se aproximan al estudio de los poliedros y construyen significados geométricos al interactuar con distintos tipos de mediaciones. El experimento de enseñanza permitió organizar las fases de diseño, implementación y análisis, orientadas a comprender los procesos que emergen en contextos reales de aprendizaje. La tarea diseñada, centrada en el reconocimiento de los elementos y propiedades de los poliedros, ofreció una estructura común para todas las sesiones, garantizando que las diferencias observadas se relacionaran con las particularidades de cada entorno y no con variaciones en la consigna o en el contenido matemático abordado.

Durante la aplicación, se registraron las acciones, interacciones y producciones de los estudiantes mediante videos, fotografías, guías de trabajo y notas de observación. Estos registros documentan la forma en que los participantes enfrentaron la tarea, las estrategias que emplearon y los modos de representación y razonamiento que surgieron en cada ambiente. El investigador asumió un rol activo de acompañamiento y observación, interviniendo únicamente para orientar el uso de las herramientas o resolver dificultades técnicas.

El conjunto de estas experiencias constituye el fundamento empírico de la investigación y sustenta el análisis que se presenta en los capítulos siguientes. Dicho análisis busca describir y comprender cómo las características de cada entorno condicionan las formas de exploración, manipulación y razonamiento geométrico de los participantes, aportando elementos para reflexionar sobre la integración de herramientas materiales, digitales e inmersivas en la formación inicial de profesores de matemáticas.


## RESULTADOS

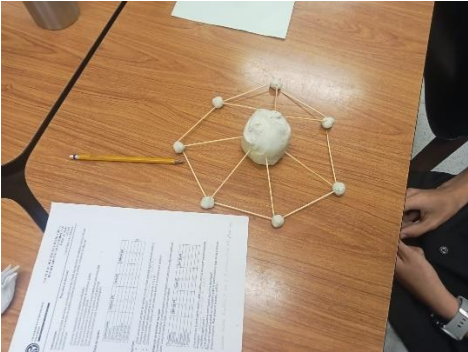
La implementación de la tarea con los estudiantes permitió obtener un conjunto amplio de observaciones sobre los modos de construcción, exploración y razonamiento que emergieron en cada ambiente de trabajo. En el uso de **material concreto**, se evidenció una participación activa y colaborativa, caracterizada por la manipulación directa de los materiales, la búsqueda de soluciones frente a la inestabilidad de las figuras y la creatividad para adaptar los objetos a fines geométricos. En **GeoGebra 3D**, el trabajo se centró en la comprensión de la interfaz y en la precisión técnica para ubicar puntos y construir cuerpos, lo que llevó a identificar dificultades recurrentes con el manejo del eje z y la visualización del espacio tridimensional. En **NeoTrie VR**, la experiencia fue marcadamente distinta: los estudiantes mostraron curiosidad y asombro ante la inmersión, exploraron con gestos corporales el entorno virtual y desarrollaron estrategias para controlar las herramientas mediante el movimiento, aunque enfrentaron confusiones en la interpretación de las figuras y limitaciones derivadas de la fatiga visual o del aislamiento propio del entorno inmersivo. Los resultados reflejan cómo cada medio generó una forma particular de relación con la geometría, desde la manipulación material y tangible hasta la vivencia perceptiva y corporal del espacio virtual.

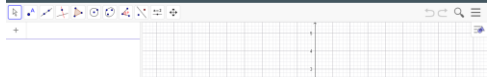


El análisis de los resultados obtenidos durante la implementación de la tarea en los tres ambientes —**Material concreto**, **GeoGebra 3D** y **NeoTrie VR**— permitió identificar una amplia variedad de situaciones, comportamientos y particularidades que influyeron en la forma en que los estudiantes construyeron, visualizaron y comprendieron los poliedros. Cada entorno generó condiciones propias de interacción, tanto en el plano físico como cognitivo y sensorial, que incidieron en el desarrollo de la actividad y en las estrategias empleadas para resolverla. Con el fin de sistematizar estas observaciones y facilitar la comparación entre los distintos escenarios, se elaboró el siguiente cuadro, en el cual se organizan los aspectos más relevantes identificados en las sesiones. En él se contrastan los tres ambientes de trabajo en torno a categorías comunes —condiciones físicas y materiales, herramientas de construcción, aspectos sensoriales y perceptivos, dimensión cognitiva, dimensión social y comunicativa, y recursos y accesibilidad—,

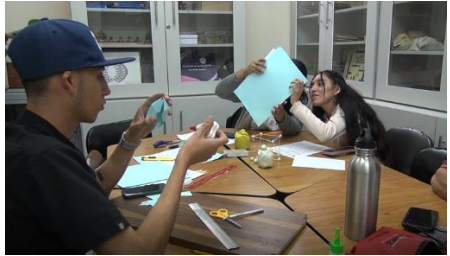
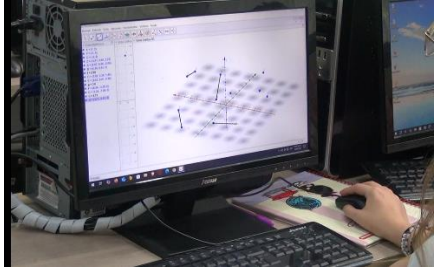
acompañadas de evidencias que documentan las situaciones concretas observadas durante la experiencia.

Tabla 1 Aspectos a comparativos en los tres ambientes. Fuente: elaboración propia.

CATEGORIA	ASPECTO A COMPARAR	MATERIAL CONCRETO	GEOGEBRA 3D	NEOTRIE	EVIDENCIA
Condiciones físicas o materiales	Peso, resistencia y estabilidad	Las construcciones estaban sujetas a la gravedad; las figuras se caían o deformaban por el peso de los materiales. La plastilina se ablandaba y los palillos se torcían, lo que obligaba a los estudiantes a sostener las figuras con las manos o apoyarlas en la mesa. Esta situación generó conversaciones	Las figuras digitales permanecían completamente estables. No existía peso ni resistencia, lo que eliminaba la necesidad de compensar la gravedad. Aunque esto facilitó la construcción, se perdió la experiencia de observar cómo la materia condiciona la forma.	En el entorno virtual las figuras flotaban libremente en el espacio, sin ninguna referencia a la gravedad o al apoyo físico. Esto permitía mover y rotar los objetos con total libertad, pero también provocaba desorientación, ya que no había un “arriba” o “abajo” que orientara la acción.	<p><b>Paula:</b> -Ayúdenme que esta cosa se me desbarata-</p> <p><i>Ilustración 2</i> Colaboración en la construcción de poliedro en material concreto.</p> 

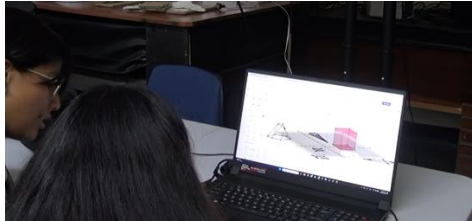

		espontáneas sobre equilibrio y estabilidad.			
	<b>Precisión y proporción de las construcciones</b>	Los poliedros presentaban un alto grado de irregularidad; los ángulos no coincidían, las caras no cerraban y las longitudes eran aproximadas. Aun así, los estudiantes consideraban válidas sus construcciones, mostrando tolerancia a la imprecisión.	La herramienta permitió gran exactitud en las medidas, aunque algunos errores se debían al mal manejo del eje z o al ingreso incorrecto de coordenadas. Las figuras resultaban visualmente correctas, pero en ocasiones seguían estando en el plano.	La precisión dependía del control motriz. Un movimiento leve del joystick podía cambiar totalmente la ubicación de un punto. En varios casos las caras no coincidían o quedaban abiertas, mostrando la dificultad de mantener la proporción a partir del gesto corporal.	<p><b>Ilustración 3</b> Poliedro de ocho vértices en material concreto.</p>  <p><b>Paula:</b> - ¡Esta cosa no cuadra! -</p> <p><b>Ilustración 4</b> Ensamble de poliedro elaborado con mallas.</p> 


<p><b>Herramientas de construcción</b></p>	<p><b>Tipo de herramientas utilizadas</b></p>	<p>Palillos, plastilina, regla, compás, cartulina, tijeras y pegante. Los objetos eran simples, pero requerían que los estudiantes los adaptaran a la función geométrica (por ejemplo, la plastilina como vértice y los palillos como aristas).</p>	<p>Herramientas predeterminadas del software: punto, segmento, cara, poliedro, rotación y vista 3D. Su uso dependía de la familiarización con la interfaz y los comandos.</p>	<p>Herramientas virtuales integradas al entorno: “crear puntos”, “unir con segmentos”, “formar caras”, “pincel”, “borrador”, “rotar figura” y “mesa de herramientas”. Cada acción requería activar un menú flotante y presionar gatillos en los controladores.</p>	<p><i>Ilustración 5 Herramientas de GeoGebra.</i></p>  <p><i>Ilustración 6 Herramientas en material concreto.</i></p>  <p><i>Ilustración 7 Herramientas en NeoTrie VR</i></p> 
	<p><b>Forma de uso y nivel de control</b></p>	<p>Manipulación completamente</p>	<p>El control se ejercía a través de clics y</p>	<p>Control corporal completo; los</p>	

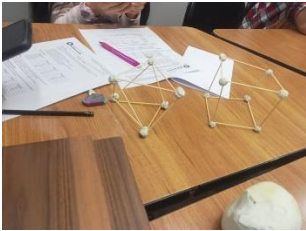

		<p>manual; se usaba el tacto, la vista y la coordinación. La precisión dependía de la destreza manual y la cooperación.</p>	<p>comandos. La acción era más técnica que corporal; los errores provenían de la falta de dominio de la vista 3D y del eje z.</p>	<p>estudiantes movían la cabeza y las manos para crear y observar las figuras. El dominio del entorno dependía del equilibrio físico y de la orientación espacial. Algunos debieron sentarse para estabilizar la vista o reducir mareos.</p>	<p><b>Ilustración 8</b> Manipulación en material concreto.</p>  <p><b>Ilustración 9</b> Manipulación en GeoGebra.</p> 
--	--	---	---	--	--

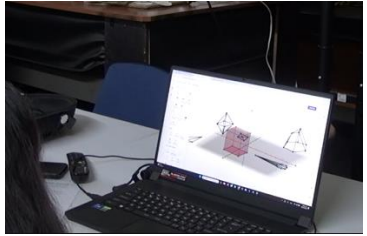
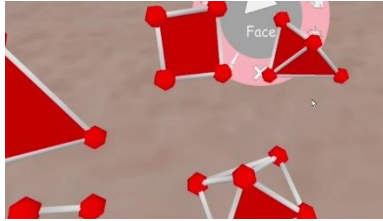
					<p><b>Ilustración 10</b> Manipulación en NeoTrie VR.</p> 
	<p><b>Corrección de errores</b></p>	<p>Los errores se solucionaban rehaciendo las figuras, reforzando las uniones o comenzando desde cero.</p>	<p>Se corregía borrando puntos o segmentos y ajustando las coordenadas. La rotación de la vista era clave para verificar la figura.</p>	<p>Las correcciones se realizaban con el borrador virtual o reiniciando todo el entorno. Algunos errores (como puntos sobrantes o caras mal cerradas) obligaban a reconstruir</p>	<p><b>Karen:</b> - ¡ay! nooo... toca volver a empezar-</p>


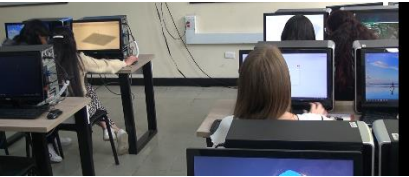
				completamente el modelo.	<p><b>Ilustración 11</b> Rearmado de poliedro en material concreto.</p>  <p><b>Ilustración 12</b> Herramientas para corregir errores en NeoTrie VR.</p> 
<b>Aspectos sensoriales y perceptivos</b>	<b>Visualización y percepción del espacio</b>	Los estudiantes podían girar las figuras, observarlas desde diferentes ángulos y	Aunque se hablaba de “vista 3D”, la visualización seguía siendo en pantalla plana. Muchos	La visualización era envolvente. Los estudiantes podían entrar dentro de las figuras y	



		<p>manipularlas físicamente. La percepción espacial era real pero limitada por la opacidad de los materiales y la falta de caras visibles.</p>	<p>creían construir en tres dimensiones cuando en realidad trabajaban sobre el plano xy. La rotación de la cámara era indispensable para detectar errores de profundidad.</p>	<p>observarlas desde todos los ángulos. Sin embargo, los colores uniformes y la falta de sombras hacían difícil distinguir límites o caras internas.</p>	<p><b>Ilustración 13</b> Objetos en aparente 3D en GeoGebra.</p> 
	<p><b>Relación táctil y corporal</b></p>	<p>Existía contacto directo; el cuerpo era parte del proceso constructivo. La sensación del peso, textura y resistencia contribuía a comprender la estructura.</p>	<p>No había tacto ni sensación física. La experiencia era puramente visual y abstracta.</p>	<p>No hay contacto real, pero el cuerpo entero interviene. El estudiante se mueve dentro del espacio y ajusta su posición para observar o crear. El movimiento reemplaza al tacto como fuente de percepción.</p>	<p><b>Ilustración 14</b> Manipulación de objetos en material concreto.</p> 


					<p><b>Ilustración 15</b> Manipulación de objetos en NeoTrie VR.</p> 
	<p><b>Fatiga o limitaciones físicas</b></p>	<p>Cansancio en manos o espalda tras sostener o ajustar las figuras durante tiempo prolongado.</p>	<p>Fatiga visual leve por la concentración en pantalla; sin esfuerzo físico significativo.</p>	<p>Mareo o desorientación por la inmersión. Algunos estudiantes prefirieron permanecer sentados; la fatiga se manifestó en la vista y el equilibrio.</p>	<p><b>En material concreto:</b>  <b>Karen:</b> - ¿Qué hora es?  <b>Yo:</b> - ... ¿Ya estas cansada? -  <b>Karen:</b> -Si!!-  <b>Paula:</b> - ¿Cuánto tiempo ha pasado? –  <b>En Realidad, virtual:</b>  <b>Mariana:</b> - ¿ya me puedo salir?  <b>Yo:</b> - ¿Por qué?... ¿ya te mareaste?  <b>Mariana:</b> - Noo... Ya estoy cansada de los ojos. -</p>

<b>Dimensión cognitiva</b>	<b>Comprensión de relaciones entre vértices, aristas y caras</b>	Los estudiantes lograron identificar los vértices y aristas, pero tuvieron dificultades con las caras porque no estaban materializadas.	Comprensión más simbólica que espacial. Sabían contar elementos, pero no visualizar las relaciones tridimensionales.	Comprensión intuitiva del volumen, aunque aparecieron confusiones al interpretar puntos o caras internas.	<p><i>Ilustración 16 Poliedros sin caras físicas.</i></p>  <p><i>Ilustración 17 Vértices y segmento en RV.</i> Fuente:</p>  <p>En <b>RV</b> mateo interpreto los puntos como poliedros con caras vértices y aristas.</p>
	<b>Dificultades conceptuales</b>	Inestabilidad y deformación impidieron la observación clara de las caras.	Problemas con el eje z y la noción de profundidad; tendencia a construir figuras	Dificultad para reconocer límites de las figuras; confusión entre caras internas y externas.	

			<p>planas creyendo que eran poliedro</p>		<p><b>Ilustración 18 Figuras en 3D Planas.</b></p>  <p><b>Ilustración 19 Colores y texturas de las figuras en NeoTrie VR.</b></p> 
	<p><b>Formulación de la conjetura del teorema de Euler</b></p>	<p>No lograron establecer la relación; las conclusiones se limitaron a “al aumentar los vértices</p>	<p>Solo un estudiante (Mateo) llegó a formular la relación correctamente, apoyándose en recursos externos.</p>	<p>Ningún estudiante la formuló; los conteos erróneos impidieron deducciones correctas.</p>	<p><b>Ilustración 20 Resultados Teorema de Euler. Fuente</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>¿Qué ocurre con la cantidad de vértices, aristas y caras a medida que agregamos puntos y formamos poliedros más complejos? <i>Aumentan</i></li> <li>¿Puedes identificar algún patrón en los valores de V, C y A? <i>Siempre se suma 2</i></li> <li>¿Hay algún cambio de las características entre las figuras regulares e irregulares? <i>Las regulares tienen lados iguales y las irregulares tienen sus lados de distinta medida</i></li> <li>¿Qué ocurre con la cantidad de vértices, aristas y caras a medida que agregamos puntos y formamos poliedros más complejos? <i>Aumentan</i></li> <li>¿Puedes identificar algún patrón en los valores de V, C y A? <i>Siempre se suma 2</i></li> <li>¿Hay algún cambio de las características entre las figuras regulares e irregulares? <i>Las regulares tienen lados iguales y las irregulares tienen sus lados de distinta medida</i></li> </ul>

		aumentan las aristas y las caras”.			<ul style="list-style-type: none"> <li>• ¿Qué ocurre con la cantidad de vértices, aristas y caras a medida que construyes poliedros más complejos? <math>R19</math> <math>A_1</math> <math>V12</math> <math>E12</math></li> <li>• ¿Identificas algún patrón? <math>R19</math></li> <li>• ¿Qué diferencias encuentras entre figuras regulares e irregulares? <math>R19</math></li> <li>• Formula en tus propias palabras una conjetura sobre la relación entre vértices, aristas y caras en poliedros convexos. <math>R19</math></li> </ul>
<b>Dimensión social y cognitiva</b>	<b>Interacción y cooperación entre estudiantes</b>	Trabajo colaborativo constante; la tarea requería coordinación física y comunicación para sostener las figuras.	Trabajo en pareja o individual. La cooperación se redujo a comentarios verbales o revisión compartida en pantalla.	Solo una persona podía manipular el entorno; los demás observaban y daban indicaciones. La colaboración fue verbal y mediada.	<p><b>Ilustración 21</b> Colaboración material concreto.</p>  <p><b>Ilustración 22</b> Colaboración en GeoGebra.</p> 

					<p><b>Ilustración 23</b> Colaboración en NeoTrie VR.</p> 
	<b>Mediación docente</b>	Intervención constante para orientar la secuencia de construcción y ofrecer soluciones prácticas.	El docente explicó el uso de herramientas, la rotación y la ubicación de puntos en el eje z.	Mediación verbal permanente; el acompañamiento fue técnico y pedagógico, especialmente para evitar errores y mareos.	
<b>Recursos y accesibilidad</b>	<b>Acceso a información externa</b>	Los estudiantes podían consultar imágenes o modelos en el celular mientras construían.	Pueden usar simultáneamente el navegador o documentos; algunos buscaron poliedros regulares o fórmulas.	No pueden acceder a ningún recurso externo sin quitarse el visor. Algunos alternaron entre la realidad y el televisor del aula	<p><b>Ilustración 24</b> Consulta externa GeoGebra.</p> 

				para registrar los resultados.	<p><i>Ilustración 25 Consulta externa en material concreto.</i></p> 
	<b>Limitaciones técnicas y logísticas</b>	Materiales económicos, fáciles de conseguir y usar.	Requiere computadores funcionales, pero no demanda recursos técnicos elevados.	Necesita visores, mandos, espacio delimitado y configuración previa. El costo y la complejidad limitan su uso frecuente.	<p>En <b>material concreto</b> se uso Plastilina, palillos, cartulina, lápiz, colores, regla y pegante.</p> <p>Los dispositivos de realidad virtual tienen un costo promedio de \$4'000.000.</p>

Estos resultados presentados en el cuadro evidencian diferencias sustanciales entre los tres ambientes de trabajo, no solo en la manera de construir los poliedros, sino también en las condiciones físicas, materiales y perceptivas que enmarcaron la experiencia. Estas variaciones orientan el análisis que se abordará en el siguiente capítulo, donde se examinarán con mayor profundidad tres aspectos centrales. En primer lugar, las herramientas de construcción y las formas de uso que cada entorno permitió, considerando el tipo de acciones que promovieron y el nivel de control que ofrecieron a los estudiantes durante la tarea. En segundo lugar, los aspectos físicos relacionados con el peso, la gravedad, la resistencia y la estabilidad de las construcciones, cuyas diferencias resultaron decisivas para comprender la manera en que cada medio condicionó la acción y la cooperación. Finalmente, los aspectos sensoriales y de visualización, vinculados a la percepción del espacio, la tridimensionalidad y la experiencia corporal que cada ambiente permitió o limitó. Estos tres ejes constituirán la base del análisis interpretativo en el capítulo de discusión, desde donde se explicarán las diferencias observadas y su significado didáctico en la comprensión del espacio geométrico y de los procesos de aprendizaje asociados a cada mediación tecnológica.

## DISCUSIÓN

### **Las herramientas de construcción**

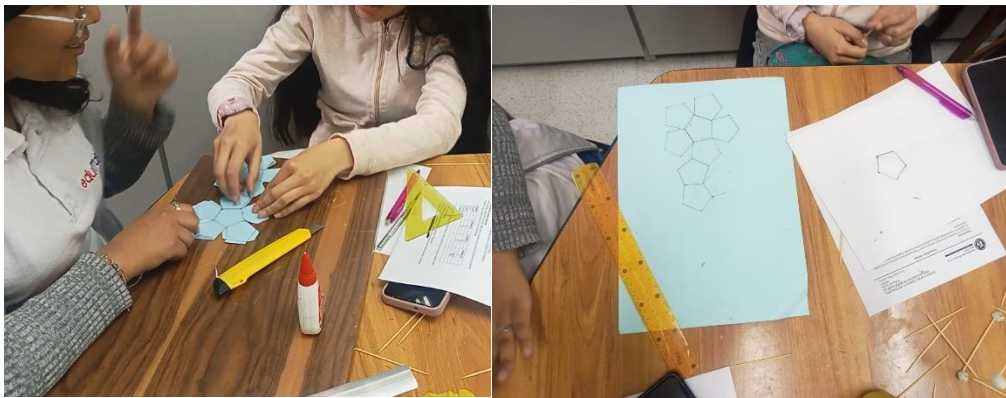
Durante la aplicación de la tarea se observaron diferencias notables en las herramientas de construcción utilizadas por los estudiantes en cada uno de los tres ambientes de trabajo: el **material concreto**, el entorno digital de **GeoGebra 3D** y la realidad virtual inmersiva con **NeoTrie VR**. Estas diferencias no se reducen al tipo de recurso o dispositivo, sino que configuran distintas formas de acción y de razonamiento geométrico. Las herramientas, como plantea Rabardel (2011), no son simples medios, sino que se transforman en instrumentos en la medida en que el sujeto las incorpora a su actividad, desarrollando esquemas de uso que articulan lo técnico con lo cognitivo. Desde esta perspectiva, analizar cómo los estudiantes actuaron con cada herramienta permite comprender las formas en que se apropiaron de los entornos y cómo dichos modos de uso condicionaron la construcción de los poliedros.

### ***En el ambiente de material concreto***

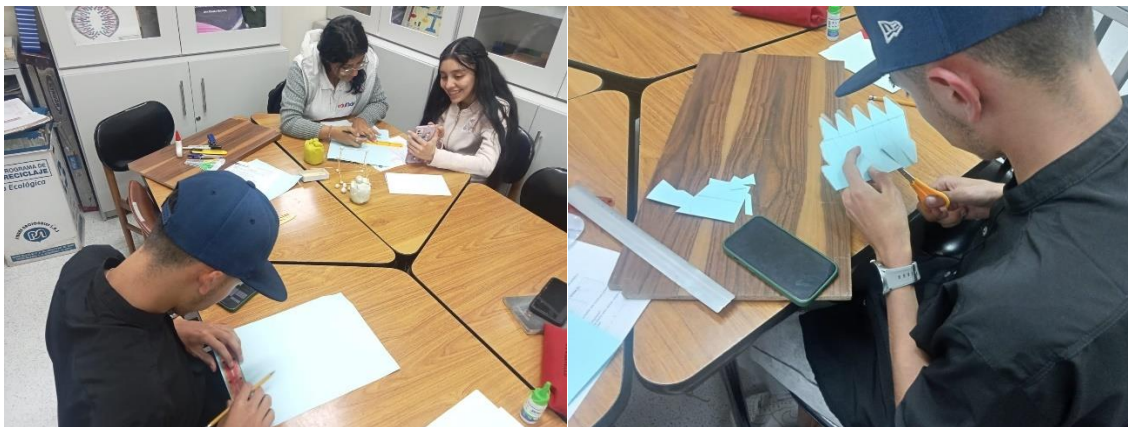
En este ambiente, los estudiantes comenzaron utilizando palillos y plastilina para representar vértices y aristas. Estos elementos no fueron únicamente materiales de trabajo, sino herramientas en sí mismas, accionadas directamente con las manos. La plastilina funcionó como punto de unión entre los palillos y permitió modelar los vértices, mientras que los palillos representaron las aristas que conectaban esas uniones. La construcción exigía sostener la figura, ajustar la posición de los palillos y equilibrar la estructura para que no colapsara, lo que convirtió las manos en el principal instrumento de acción y control. Los esquemas de uso que se evidenciaron con este tipo de herramienta se organizaron en torno a la secuencia moldear, unir, sostener y equilibrar, en la que la coordinación entre el gesto y la percepción visual era constante. Esta experiencia inicial con plastilina y palillos no solo permitió a los estudiantes explorar de manera tangible las relaciones entre vértices, aristas y caras, sino que también les hizo reconocer la necesidad de precisión y estabilidad en la construcción, aspectos que posteriormente los llevaron a optar por las mallas planas de cartulina, donde las herramientas y las acciones requerían un control diferente. En este nuevo

procedimiento, aparecieron el lápiz, la regla, el compás, el bisturí, las tijeras y el pegante como medios para trazar, recortar y plegar las caras de los poliedros. La precisión y el orden en el trazado se volvieron esenciales para lograr que las caras encajaran correctamente, de modo que la tarea manual se combinó con un control visual más riguroso. Paula y Karen decidieron replicar un pentágono regular para formar las mallas del dodecaedro, cuidando que cada cara conservara la misma medida y forma. En cambio, Juan eligió construir la malla con cálculos y mediciones más exactas, utilizando la regla para determinar longitudes y ángulos antes de cortar, plegar y pegar.

*Ilustración 26* Elaboración de mallas calcando pentágonos.



*Ilustración 27* Elaboración de mallas con medidas y rigor matemático.



Estas acciones muestran que, aunque las herramientas eran similares, las decisiones sobre cómo usarlas generaron esquemas de acción diferentes: unas centradas en la repetición de patrones mediante el calco y otras en la exactitud del

trazado mediante la medición. En ambos casos, las herramientas se transformaron en instrumentos de coordinación perceptiva y manual que estructuraron el pensamiento geométrico desde la acción.

### ***En el ambiente de GeoGebra 3D***

El entorno de **GeoGebra 3D** implicó un cambio sustancial en la relación con las herramientas. Aquí, las manos fueron sustituidas por el uso del ratón y el teclado como dispositivos de mediación, y las herramientas digitales ofrecieron modos de acción muy distintos. Los estudiantes aprendieron a crear puntos con un clic, unirlos con segmentos y cerrar figuras utilizando las herramientas disponibles en el programa como punto, segmento y poliedro regular. Tatiana y Mateo optaron por construir los poliedros paso a paso, trazando primero los vértices y luego las aristas hasta completar la estructura. En contraste, Paula y Karen decidieron usar directamente la herramienta que permite crear el poliedro regular completo, dado que en **GeoGebra** las caras no se muestran de forma explícita al realizar el poliedro paso por paso, sino únicamente cuando se utiliza esa función específica. Esta diferencia en la elección de las herramientas modificó las acciones y los tiempos de ejecución, así como las formas de razonar sobre la construcción. Mientras Tatiana y Mateo exploraban la relación entre los elementos geométricos al seguir el proceso de construcción, Paula y Karen focalizaban su atención en la figura final y en su visualización tridimensional. En ambos casos, el software organizó la secuencia de acciones y definió las posibilidades de interacción, haciendo que la precisión y la coordinación del movimiento con el cursor se convirtieran en condiciones centrales del trabajo.

### ***En el ambiente de realidad virtual con NeoTrie VR***

En **NeoTrie VR**, la relación con las herramientas fue diferente. En este ambiente, los estudiantes manipularon el entorno con controladores que representaban manos virtuales, y las acciones de crear, borrar o cerrar caras se ejecutaban mediante gestos y presiones de botones. A diferencia del clic del ratón, aquí el gesto del cuerpo se convirtió en la forma principal de acción sobre los objetos geométricos. En **NeoTrie VR**, la selección y creación de los elementos del poliedro dependió directamente del movimiento corporal. Para ubicar un vértice, el

estudiante primero desplazaba su cuerpo hacia la región del espacio donde deseaba situarlo; luego extendía el brazo y orientaba la mano hasta señalar con precisión el punto deseado. Una vez allí, oprimía el gatillo del controlador para crear el vértice flotante. Después, para construir la arista, el estudiante volvía a mover su cuerpo, ajustando la posición del torso y de los brazos para alcanzar la ubicación del segundo vértice. Finalmente, mantenía el gatillo presionado mientras trasladaba la mano desde el primer punto hasta el segundo, trazando en el aire el recorrido que daba origen al segmento. De esta manera, la acción corporal —el caminar, inclinarse, extender el brazo, orientar la muñeca y desplazar la mano en el espacio— se constituyó en el mecanismo central para definir posiciones y construir los elementos básicos del poliedro dentro del entorno virtual.

Durante la aplicación de la tarea, quienes trabajaron en este entorno fueron Mateo, Erika y Mariana. Ellos usaron las herramientas “Crear”, “Caras”, “Eliminar” y el borrador para corregir errores. Con la herramienta “Crear” se generaban los puntos y las aristas, mientras que con “Caras” se cerraban las superficies del poliedro. La precisión dependía del orden en que se seleccionaban los vértices y de la estabilidad del movimiento al apuntar con el controlador. Los errores de orientación o de cierre obligaban a repetir la secuencia, lo que hizo evidente un proceso de ajuste progresivo de los gestos hasta lograr el control del entorno. En este caso, la acción corporal se integró a la construcción geométrica, y los estudiantes debieron coordinar la vista, el movimiento y la intención de construir, desarrollando esquemas de uso que combinaban la percepción visual con la acción motriz.

Las diferencias entre los tres ambientes se hacen evidentes cuando se analizan las herramientas desde la acción concreta del estudiante. En el **material concreto**, el cuerpo y las manos fueron las mediaciones principales; el conocimiento geométrico se construyó a través del contacto y de la manipulación directa. En **GeoGebra 3D**, la acción se volvió más abstracta: el ratón y el teclado reemplazaron la manipulación tangible por una interacción simbólica en la pantalla, donde cada herramienta tiene una función determinada y un orden de uso que condiciona la secuencia de construcción. En **NeoTrie VR**, la acción se reintegra al cuerpo, pero mediada por un sistema tecnológico que traduce los

gestos en operaciones geométricas. Así, mientras que en el ambiente de **material concreto** el vértice se modela o se marca, en **GeoGebra 3D** se crea con un clic y en **NeoTrie VR** se genera con un movimiento del controlador; las aristas, que en el **material concreto** se ensamblan o se recortan, en **GeoGebra 3D** se trazan con la herramienta de segmento y en **NeoTrie VR** se enlazan virtualmente; las caras, que en las mallas se recortan y pliegan, en **GeoGebra 3D** se generaron al crear el poliedro completo y en **NeoTrie VR** se cierran mediante la acción gestual de señalar los vértices.

Cada entorno demanda, por tanto, la construcción de esquemas de uso específicos que reflejan distintas formas de pensar y hacer geometría. En el **material concreto**, los esquemas se organizan alrededor de la secuencia trazar, cortar, plegar y pegar, donde el control depende de la coordinación manual y visual. En **GeoGebra**, los esquemas se articulan con la secuencia de comandos que el programa impone, exigiendo comprender la lógica interna del software. En **NeoTrie VR**, el esquema combina la exploración visual con la ejecución motriz, y la precisión se logra mediante la estabilización de gestos y movimientos. Como señala Rodríguez (2024), en los entornos de realidad virtual la acción corporal adquiere una función cognitiva: el estudiante piensa con el cuerpo y construye conocimiento al mismo tiempo que actúa.

La comparación entre estos ambientes evidencia que las herramientas no solo facilitan la construcción, sino que orientan y modelan el pensamiento geométrico. Los estudiantes que pasaron de un entorno a otro debieron reconstruir sus procedimientos, reinterpretar lo que significaba “construir” y adaptar sus esquemas de acción. Lo que en el **material concreto** era unir palillos o plegar una malla, en **GeoGebra 3D** se convirtió en una secuencia de comandos, y en **NeoTrie VR** en una serie de gestos que activan herramientas virtuales. Este tránsito obligó a reorganizar los vínculos entre el cuerpo, la herramienta y el objeto geométrico, generando nuevas formas de comprensión del espacio tridimensional.

Estas diferencias invitan a reflexionar sobre el papel que las herramientas desempeñan en la enseñanza de la geometría. No se trata únicamente de disponer de medios diversos, sino de reconocer que cada uno propone una manera particular de construir y razonar. El profesor que oriente tareas de este

tipo debería promover que los estudiantes reconozcan esas diferencias y reflexionen sobre ellas, haciendo explícito el tipo de acciones y decisiones que cada herramienta exige. En la formación docente, esta comprensión es fundamental para diseñar experiencias en las que el tránsito entre lo concreto, lo digital y lo inmersivo favorezca la apropiación de conceptos geométricos desde la acción y la reflexión.

### **Los aspectos físicos**

Durante la aplicación de la tarea, uno de los contrastes más significativos entre los tres ambientes de trabajo estuvo determinado por los aspectos físicos que intervinieron o dejaron de intervenir en la construcción de los poliedros. El peso de los objetos, la resistencia de los materiales y la acción de la gravedad se hicieron evidentes en el ambiente de material concreto, mientras que en los entornos digitales —GeoGebra 3D y NeoTrie VR— estos factores desaparecieron o se representaron de manera parcial. Estas diferencias no fueron meramente técnicas, sino que modificaron el modo en que los estudiantes actuaron, interpretaron y comprendieron la estabilidad y la estructura de los cuerpos geométricos.

### ***En el ambiente de material concreto***

En el material concreto, las construcciones estuvieron condicionadas por las propiedades físicas de los materiales utilizados. Los palillos, la plastilina, las tijeras, la regla y la cartulina no solo eran herramientas, sino objetos con peso, textura y flexibilidad que influían directamente en el resultado. En la primera parte de la tarea, cuando los estudiantes trabajaron con palillos y plastilina, la construcción de los poliedros resultó especialmente compleja debido a la necesidad de lograr una estructura estable que pudiera sostenerse sobre la mesa de trabajo. En varias ocasiones, los vértices se desprendían o las aristas se deformaban por el peso o la tensión de las uniones, haciendo que las figuras colapsaran antes de completarse. Paula, Karen y Juan tuvieron que colaborar para sostener simultáneamente las aristas y ensamblar los vértices sin que la figura se cayera o se desarmara. En algunos intentos, el modelo se deformaba y debían empezar de nuevo, lo que convirtió la construcción en un ejercicio de coordinación manual y de equilibrio más que de cálculo o diseño. Estas dificultades llevaron al

grupo a cambiar de estrategia y optar por trabajar con mallas planas de cartulina, en las que los aspectos físicos se controlaban mejor. Paula y Karen replicaron un pentágono regular para formar las mallas del dodecaedro, cuidando que cada cara conservara la misma medida, mientras que Juan empleó la regla y los cálculos para obtener longitudes más exactas. Aun así, las construcciones de cartulina también estaban sometidas a la gravedad: las caras debían sostenerse durante el secado del pegante y era necesario equilibrar el modelo para evitar que se deformara. En este ambiente, el peso y la resistencia de los materiales definieron las acciones posibles y obligaron a los estudiantes a ajustar continuamente su proceder.

### ***En el ambiente de GeoGebra 3D***

En GeoGebra 3D, esos factores desaparecieron por completo. Las figuras no tenían peso ni ofrecían resistencia, y la gravedad no afectaba en absoluto la estabilidad de los objetos. Sin embargo, a diferencia de lo que ocurre en la realidad virtual, las figuras tampoco daban la sensación de flotar en el espacio. En este entorno, los objetos se crean y permanecen en el punto exacto donde el usuario hace clic, como si se fijaran en una superficie invisible. Tatiana y Mateo, quienes construyeron los poliedros paso a paso, comprobaron que los vértices y las aristas permanecían rígidos en la posición asignada, sin posibilidad de colapso ni desplazamiento accidental. Paula y Karen, al usar la herramienta que genera el poliedro regular completo, advirtieron que la figura permanecía inmóvil y completamente estable, sin requerir sostén ni refuerzo. En este ambiente, la acción de construir no implicó compensar fuerzas ni mantener equilibrio, sino únicamente definir puntos y relaciones. La ausencia de condiciones físicas facilitó la creación y manipulación de los objetos, pero al mismo tiempo eliminó la necesidad de pensar en la estabilidad estructural, uno de los elementos que más incidió en las decisiones del grupo en el ambiente material. En términos de Rabardel (2011), esta ausencia de resistencia transformó la acción del sujeto: lo que en el ambiente físico se regulaba por la fuerza y el equilibrio, en GeoGebra 3D se controló únicamente por la secuencia de comandos y la precisión del cursor.

### ***En el ambiente de realidad virtual con NeoTrie VR***

En NeoTrie VR, los aspectos físicos fueron parcialmente representados, pero sin repercusión real sobre las construcciones. Los objetos tridimensionales parecían tener volumen y ocupar un espacio, pero no tenían peso ni ofrecían resistencia. Mateo, Erika y Mariana, al construir los poliedros, no debieron preocuparse por sostener o equilibrar las figuras, ya que estas permanecían suspendidas en el “aire”, fijas en el lugar donde habían sido creadas. Los vértices y aristas se mantenían unidos sin importar la orientación del modelo, y las caras se cerraban con precisión sin necesidad de refuerzo. Aunque la experiencia ofrecía una sensación de espacio y profundidad, los gestos del cuerpo no generaban ningún esfuerzo físico, y el contacto con los objetos era puramente visual y gestual. Los entornos inmersivos sustituyen la interacción material por una relación simbólica del cuerpo con el espacio, donde el esfuerzo desaparece y el conocimiento se construye a través de la exploración visual y del movimiento simulado (Rodríguez et al., 2021).

Las diferencias entre los tres ambientes muestran que los aspectos físicos de la construcción —peso, resistencia, rigidez y gravedad— no son elementos secundarios, sino componentes que determinan el tipo de experiencia geométrica que los estudiantes desarrollan. En el ambiente de material concreto, la gravedad, el peso y la resistencia intervinieron directamente en la acción, obligando a los estudiantes a coordinar sus movimientos, colaborar y ajustar la estructura para evitar su colapso. En GeoGebra 3D, la ausencia total de estos factores desplazó el foco hacia la precisión de los comandos y la representación ideal de las figuras, en un espacio donde no hay ni peso ni verdadera tridimensionalidad, sino un plano de acción visualmente tridimensional pero físicamente inerte. En la realidad virtual con NeoTrie VR, la simulación del espacio sin peso ni resistencia combinó la libertad de manipulación con una sensación de corporeidad que no implicaba esfuerzo, lo que permitió concentrarse en la forma y las relaciones sin preocuparse por la estabilidad.

Estas diferencias ponen de relieve la importancia de integrar en la enseñanza experiencias que contemplen la diversidad de las condiciones físicas y perceptivas

del trabajo geométrico. En el material concreto, el aprendizaje surge de la interacción entre el pensamiento, movimiento y la materia física; los estudiantes comprenden la estructura de las figuras al enfrentar los límites del equilibrio y la resistencia. En los entornos digitales, esa experiencia se transforma en un razonamiento abstracto que privilegia las relaciones formales por encima de la manipulación. En la realidad virtual, la acción corporal recupera la interacción con el espacio, pero sin la fricción, resistencia ni el peso del mundo físico. Por ello, el desafío pedagógico consiste en articular estos tres niveles para que los estudiantes puedan reconocer qué aspectos de la geometría derivan de las propiedades físicas del entorno y cuáles pertenecen al modelo ideal. Comprender esa distinción fortalece la relación entre la experiencia sensorial, la acción y el pensamiento geométrico, y permite diseñar tareas que promuevan la reflexión sobre cómo los distintos entornos transforman las acciones y el significado mismo de construir.

### **Los aspectos sensoriales y de visualización**

Otro de los elementos que marcó diferencias notables entre los tres ambientes de trabajo fue la forma en que los estudiantes pudieron percibir y visualizar los objetos geométricos durante la construcción. La manera en que se experimenta la figura —su profundidad, orientación, color y relación entre los elementos— depende directamente de las condiciones sensoriales que cada entorno ofrece. Mientras en el **material concreto** la visualización es completa y tangible, en **GeoGebra 3D** la tridimensionalidad se representa en un plano bidimensional, y en **NeoTrie VR** se simula la tercera dimensión con gran realismo, aunque con limitaciones visuales que también influyen en la comprensión de las figuras.

### ***En el ambiente de material concreto***

Con el **material concreto**, la visualización de los poliedros fue directa, completa y real. Los cuerpos podían observarse desde todos los ángulos y manipularse físicamente, lo que permitió a los estudiantes comprobar las relaciones entre vértices, aristas y caras con la vista y el tacto de manera simultánea. En el caso de las construcciones con palillos y plastilina, esta visualización tridimensional estaba acompañada de una experiencia corporal en la que las manos intervenían

constantemente para sostener la figura y mantenerla en equilibrio. Paula, Karen y Juan giraban los modelos para observarlos desde distintas posiciones y asegurarse de que cada arista conectara correctamente con los vértices. La posibilidad de ver el poliedro real desde todos sus lados facilitó el reconocimiento de su estructura y la verificación del número de vértices, aristas y caras. Al rotar y manipular los modelos, se esperaba que los estudiantes identificaran las relaciones entre los elementos y comprobaran la validez de la fórmula de Euler de manera empírica. Esta experiencia visual, apoyada por el contacto físico, les permitió comprender que contar y reconocer no era una tarea abstracta, sino una observación concreta del objeto tridimensional.

### ***En el ambiente de GeoGebra 3D***

En **GeoGebra 3D**, la experiencia de visualización fue muy distinta. Aunque el programa permite representar figuras tridimensionales, estas se muestran en una superficie plana y su apariencia de profundidad es una ilusión creada por la proyección en pantalla. Los estudiantes construyeron figuras que a primera vista parecían en tres dimensiones, pero al girar la vista con la herramienta de rotación, descubrieron que muchas de ellas estaban realmente representadas sobre el plano de trabajo. Tatiana y Mateo, que realizaron las construcciones paso a paso, se encontraron con esta dificultad al intentar levantar las aristas o los vértices en el espacio: las figuras mantenían su forma, pero al rotarlas se evidenciaba que los puntos y las líneas se hallaban en el mismo plano. Paula y Karen, al generar el poliedro completo mediante la herramienta correspondiente, también comprobaron que la figura, aunque parecía flotar, en realidad se encontraba contenida en el plano de proyección del programa. Estas condiciones afectaron la visualización y el conteo de los elementos: los vértices y aristas se superponían y, desde ciertas perspectivas, las caras no eran visibles o parecían confundirse entre sí. En algunos momentos, los estudiantes dudaron al contar los vértices porque algunos quedaban ocultos detrás del plano o parecían coincidir visualmente. La interpretación de la figura exigió mover la cámara, cambiar de perspectiva y, sobre todo, reconstruir mentalmente la estructura tridimensional, lo que convirtió el

reconocimiento de los elementos en una tarea más abstracta y cognitiva que sensorial.

### ***En el ambiente de realidad virtual con NeoTrie VR***

En **NeoTrie VR**, la visualización incorporó la sensación de profundidad y de espacio tridimensional de manera más convincente. En **NeoTrie VR**, los estudiantes pudieron rodear las figuras, observarlas desde distintos ángulos, acercarse para examinar las aristas o alejarse para ver la forma completa. Además, el entorno les permitió observar las figuras desde su interior, lo que amplió el campo perceptivo y ofreció una perspectiva espacial completamente nueva. Esta posibilidad facilitó el conteo y la exploración de los elementos, ya que podían ubicar cada vértice, arista y cara desde dentro o fuera del poliedro y comprobar las conexiones entre ellos. Sin embargo, la uniformidad de los colores y la ausencia de sombras o texturas generaron dificultades en la identificación de las caras y en la orientación dentro del espacio. En varios momentos, los estudiantes confundieron las caras adyacentes o seleccionaron vértices equivocados al construirlas, precisamente por no distinguir con claridad los límites entre los planos. Estas confusiones visuales no se debían a errores conceptuales, sino a las limitaciones del entorno, donde la falta de contraste y de profundidad visual afectaba la percepción precisa de la forma. Así, aunque la realidad virtual permitió una visualización inmersiva y dinámica, también mostró que una percepción más envolvente no garantiza una comprensión más exacta del espacio geométrico.

La comparación entre los tres ambientes muestra que la visualización en geometría no es una experiencia uniforme, sino un proceso condicionado por las características sensoriales del entorno. En el **material concreto**, la percepción del espacio y de la forma está mediada por la acción corporal y el contacto con los objetos; la vista y el tacto se integran en una misma experiencia que permite comprender la tridimensionalidad de manera directa y facilita la observación y conteo de los elementos. En **GeoGebra 3D**, la percepción del espacio depende de la interpretación de proyecciones en una superficie plana, lo que exige al estudiante traducir mentalmente la imagen en una estructura tridimensional y

realizar el conteo mediante inferencias visuales. En la **NeoTrie VR**, la experiencia inmersiva amplía las posibilidades de exploración y de conteo, pero introduce nuevas exigencias perceptivas y cognitivas relacionadas con la interpretación de la forma y la orientación.

Desde el punto de vista pedagógico, estas diferencias tienen implicaciones directas en el aprendizaje de la geometría. En el ambiente de **material concreto**, la visualización permite desarrollar una comprensión estructural y tangible de los poliedros, en la que contar, reconocer y verificar se convierten en experiencias físicas y perceptivas. En **GeoGebra 3D**, el aprendizaje se orienta hacia la abstracción y la reconstrucción mental de las figuras, fortaleciendo el razonamiento espacial, pero exigiendo mayor atención a la interpretación visual. En la **NeoTrie VR**, la visualización inmersiva ofrece la oportunidad de recorrer los cuerpos y comprender las relaciones espaciales desde diferentes puntos de vista, lo que potencia la comprensión del espacio tridimensional, aunque requiere acompañamiento docente para orientar la observación y evitar errores derivados de las limitaciones visuales del entorno. En conjunto, los tres ambientes muestran que la visualización no es un acto pasivo de ver, sino una forma activa de pensar la geometría: mirar, mover y contar se convierten en acciones fundamentales para comprender las propiedades y relaciones que definen los objetos del espacio.

El análisis de los tres ambientes de trabajo —**Material concreto**, **GeoGebra 3D** y **NeoTrie VR**— permite comprender que las diferencias en las herramientas, en los aspectos físicos y en las formas de visualización no solo modifican las acciones de los estudiantes, sino que transforman las maneras en que se construye y se aprende la geometría. En el ambiente de **material concreto**, la construcción está mediada por la experiencia corporal, por el peso y la resistencia de los materiales, y por la necesidad de sostener, equilibrar y ensamblar las figuras. Las herramientas manuales y la manipulación directa convierten la acción en una forma de razonamiento, donde ver y hacer son procesos simultáneos. En **GeoGebra 3D**, en cambio, la acción se desplaza al dominio de lo simbólico y lo digital: las herramientas del programa guían el procedimiento y definen la lógica de construcción, mientras que la ausencia de condiciones físicas y la visualización en

una superficie plana conducen a una comprensión abstracta del espacio. En la realidad virtual con **NeoTrie VR**, la acción se reintegra al cuerpo, pero transformada por la mediación tecnológica; los gestos sustituyen a las manos, los objetos permanecen suspendidos sin peso y la visualización envolvente amplía las posibilidades de exploración, aunque introduce nuevas dificultades perceptivas y de interpretación.

Estos contrastes muestran que la enseñanza de la geometría no puede reducirse al uso de un único entorno o herramienta. Cada ambiente ofrece un tipo particular de experiencia que potencia diferentes dimensiones del pensamiento geométrico: el **material concreto** favorece la comprensión estructural y tangible de las formas; el digital con **GeoGebra 3D** promueve la abstracción y el razonamiento formal; y la realidad virtual con **NeoTrie VR** amplía la percepción espacial y la relación con el entorno tridimensional. La interacción entre estos espacios constituye un camino didáctico que permite a los estudiantes transitar desde la experiencia concreta hasta la representación y la exploración inmersiva, construyendo significados cada vez más complejos.

Desde una perspectiva pedagógica, los resultados de esta investigación invitan a considerar la integración de estos entornos como una estrategia para fortalecer el aprendizaje de la geometría en la escuela. Comprender cómo las herramientas condicionan la acción, cómo la física de los materiales transforma el modo de construir y cómo la visualización cambia la forma de percibir el espacio permite diseñar experiencias más completas y coherentes con los procesos cognitivos de los estudiantes. De esta forma, el papel del profesor es fundamental: debe guiar la reflexión sobre lo que se hace y lo que se ve en cada entorno, ayudando a los estudiantes a reconocer las relaciones entre el hacer, el ver y el pensar geoméricamente. La articulación entre la acción manual, la manipulación digital y la exploración inmersiva puede convertirse así en un eje central para la enseñanza de la geometría tridimensional, permitiendo que los aprendizajes sean no solo conceptuales, sino también vivenciales y significativos.

## CONCLUSIONES

El análisis comparativo entre los tres entornos de trabajo —**Material concreto**, **GeoGebra 3D** y **NeoTrie VR**— permitió reconocer que cada uno promueve formas específicas de interacción, percepción y razonamiento geométrico, y que dichas diferencias dependen tanto de las condiciones físicas como de las posibilidades técnicas y perceptivas de cada ambiente. La investigación da evidencias de que los entornos digitales, en particular **GeoGebra 3D** y **NeoTrie VR**, ofrecieron mayores facilidades para la construcción de los elementos geométricos gracias a la precisión de sus herramientas y a la estabilidad de las figuras, lo cual contrastó con las dificultades experimentadas en el ambiente de material concreto, donde la gravedad, el peso y la resistencia de los materiales afectaban la forma y la estabilidad de los poliedros. Esta diferencia evidenció que las herramientas digitales favorecen un trabajo más fluido y exacto, permitiendo que los estudiantes concentren su atención en las relaciones geométricas y no en las limitaciones propias del material.

La ausencia de condiciones físicas, característica de los entornos digitales, constituyó una ventaja significativa para la realización de la tarea. En la construcción con **GeoGebra 3D** y **NeoTrie VR**, la eliminación de factores como la gravedad o la resistencia permitió un tipo de acción más libre y una focalización cognitiva en los aspectos estructurales de las figuras. De este modo, la actividad geométrica se desarrolló en un plano puramente relacional, en el que la atención se dirigió a las conexiones entre vértices, aristas y caras, y no al equilibrio o la estabilidad del objeto. Esta condición, aunque aleja la experiencia de la materialidad, permitió una comprensión más abstracta de las relaciones espaciales y facilitaría la verificación de regularidades como las planteadas en el teorema de Euler. Los instrumentos tecnológicos no solo amplían las posibilidades de acción, sino que reorganizan los esquemas de uso del sujeto, transformando su manera de pensar y de actuar sobre el objeto matemático (Rabardel, 2011). Dentro de los entornos digitales, la realidad virtual inmersiva introdujo un cambio cualitativo. **NeoTrie VR** no solo comparte la precisión técnica y la ausencia de limitaciones físicas de **GeoGebra 3D**, sino que añade la posibilidad de

experimentar el espacio tridimensional desde dentro. Mientras en GeoGebra la tridimensionalidad se proyecta en un plano bidimensional que exige al usuario reconstruir mentalmente la profundidad, en NeoTrie VR el espacio se vive de manera envolvente y corporal. Esta inmersión perceptiva permitió a los estudiantes situarse dentro de los poliedros, observar sus relaciones desde distintos puntos de vista y comprender la estructura de las figuras con una coherencia espacial difícil de lograr en entornos planos. La realidad virtual integra la acción, la percepción y el razonamiento geométrico en una experiencia simultánea, en la que el conocimiento se construye a partir del movimiento y la observación coordinada (Rodríguez et al., 2021). En la misma línea, Codina et al. (2023) destacan que la interacción con objetos tridimensionales en entornos inmersivos favorece la comunicación y la exploración activa, mientras que (Codina et al., 2023) evidencian su aporte al desarrollo de la visualización espacial y a la corrección de errores comunes en la representación geométrica.

Estas características posicionan a **NeoTrie VR** como un entorno con ventajas específicas frente a otros recursos digitales. Su capacidad para simular un espacio tridimensional coherente lo diferencia de **GeoGebra 3D**, donde las figuras deben interpretarse en una superficie bidimensional. La experiencia inmersiva no solo amplía el campo perceptivo, sino que también transforma la manera en que los estudiantes comprenden el espacio, al permitirles recorrerlo y manipularlo de forma natural. Sin embargo, su uso también implica ciertas limitaciones. El costo de los dispositivos, los requerimientos técnicos de instalación y la necesidad de capacitación docente restringen su accesibilidad en contextos educativos convencionales. Además, algunos estudiantes manifestaron dificultades de adaptación, mareo o fatiga visual, lo que evidencia la necesidad de planificar sesiones breves y acompañadas por una mediación pedagógica adecuada (Rodríguez, 2024).

Desde una perspectiva didáctica, los resultados de esta investigación muestran que cada entorno puede emplearse con propósitos diferentes según las metas de aprendizaje y el nivel de los estudiantes. El material concreto continúa siendo un medio idóneo para los primeros acercamientos a la geometría espacial, cuando se busca fortalecer la relación entre el pensamiento y la acción manual y favorecer la

comprensión de la forma a partir de la experiencia sensorial. Los entornos digitales, en cambio, son especialmente útiles para promover la precisión en la construcción, la visualización de las relaciones estructurales y la formulación de conjeturas. En este contexto, **NeoTrie VR** ofrece un valor agregado al permitir un contacto perceptivo con el espacio tridimensional sin las limitaciones físicas de la materia, combinando la exactitud técnica con la vivencia corporal del entorno. Su utilización resulta particularmente adecuada para tareas orientadas al desarrollo de la visualización espacial, la exploración libre y la argumentación geométrica. Estas conclusiones tienen implicaciones directas para la enseñanza de la geometría tridimensional. En concordancia con Camargo Uribe (2021), el aprendizaje debe situarse en contextos donde los instrumentos tecnológicos se conviertan en mediadores del pensamiento y no en fines de uso. En este sentido, la realidad virtual inmersiva se integra de manera más productiva cuando forma parte de un proceso articulado que combine la manipulación concreta, la precisión digital y la exploración perceptiva. La alternancia entre estos entornos permite que los estudiantes transiten de la acción material a la reflexión abstracta y de allí a la experiencia inmersiva, construyendo representaciones cada vez más complejas y coherentes del espacio.

La incorporación de **NeoTrie VR** en la enseñanza de la geometría tridimensional constituye una oportunidad valiosa para ampliar las formas de comprender, visualizar y explorar los objetos geométricos. Su ventaja principal radica en la integración entre la acción corporal, la percepción tridimensional y la precisión digital, lo que genera experiencias de aprendizaje más dinámicas y motivadoras. Sin embargo, su implementación requiere un enfoque pedagógico cuidadoso, condiciones técnicas apropiadas y una reflexión continua sobre su papel dentro del proceso formativo. Comprender estas condiciones permite valorar la realidad virtual inmersiva no como un recurso aislado, sino como un componente de un sistema de mediaciones que, al combinar lo concreto, lo digital y lo inmersivo, contribuye al desarrollo de una comprensión más profunda, flexible y significativa del espacio geométrico y de los procesos de pensamiento asociados a él. En conjunto, los resultados y análisis desarrollados a lo largo del documento permiten afirmar que los objetivos planteados al inicio de la investigación fueron

plenamente alcanzados. Se logró elaborar un manual técnico y pedagógico de NeoTrie VR, diseñar e implementar una tarea común en tres ambientes de trabajo, analizar comparativamente las formas de interacción y los procesos de aprendizaje que emergieron en cada entorno, y caracterizar las ventajas, dificultades y limitaciones del uso de la realidad virtual inmersiva en la enseñanza de la geometría tridimensional. Asimismo, esta investigación fue revisada, evaluada y por los comités académicos de diversos eventos nacionales e internacionales, donde también fue presentada: las versiones 51 y 52 de la Jornada del Educador Matemático en la Universidad Pedagógica Nacional de Bogotá, el Primer Encuentro Nacional de Educadores en Ciencias Naturales y Matemáticas celebrado en la Universidad Nacional de Colombia (Bogotá) y el 21.º Encuentro Internacional de Matemáticas realizado en la Universidad del Atlántico (Barranquilla). La aprobación en estos escenarios confirma la pertinencia, solidez y aporte de este trabajo para la comunidad de educación matemática y para la reflexión sobre el uso de tecnologías inmersivas en la formación inicial de docentes.

## BIBLIOGRAFÍA

- Camargo, L. (2021). *Estrategias cualitativas de investigación en educación matemática: Recursos para la captura de información y el análisis*. Editorial Universidad de antioquia; Universidad Pedagógica Nacional.
- Cangas, D., Morga, G., & Rodríguez, J. L. (2019). Geometry teaching experience in virtual reality with NeoTrie VR. *Psychology, Society, & Education*, 11(3), 355-366. <https://doi.org/10.25115/psye.v11i3.2270>
- Codina S, A., Rodríguez, J. L., & Morales Rodríguez, C. S. (2023). Neotrie VR, realidad virtual inmersiva para el aprendizaje de la geometría 3D. *Investigaciones y experiencias en enseñanza de las ciencias y la matemática*. <https://doi.org/978-607-633-573-4>
- Fuchs, P., Moreau, G., & Guitton, P. (. (2011). *Virtual reality: Concepts and technologies*. CRC Press. <https://doi.org/10.1201/b11308>
- Moral, S. N., Sánchez, M. T., & Romero, A. I. (2023). Uso de la realidad virtual en geometría para el desarrollo de habilidades espaciales. *Enseñanza de las Ciencias*, 41(1), 125-147. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5442>
- Nápoles V, J. E. (2020). La fórmula de Euler y la topología. *Revista eureka sobre la enseñanza y divulgación de las ciencias*.
- NeoTrie, V. (2025). *NeoTrie VR — geometría en realidad virtual*. <https://www2.ual.es/neotrie/>
- Rabardel, P. (2011). *Los hombres y las tecnologías: Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos (Trad. M. Acosta Gempeler)* (Primera edición ed.). Bucaramanga : Universidad industrial de santander.
- Rodríguez, J. L. (2022). Exploring dynamic geometry through immersive virtual reality and distance teaching. *Mathematics education in the age of artificial intelligence*, 17. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-86909-0\\_15](https://doi.org/10.1007/978-3-030-86909-0_15)
- Rodríguez, J. L. (2024). Virtual reality in the classroom: A difficult but exciting adventure for teachers and students. *Frontiers in Education*, 9. <https://doi.org/10.3389/educ.2024.1294715>
- Rodríguez, J. L., Romero, I., & Codina, A. (2021). The influence of NeoTrie VR's immersive virtual reality on the teaching and learning of geometry. *Mathematics*, 9(19). <https://doi.org/10.3390/math9102411>

## Anexo 1

### GUIA DE NEOTRIE VR



#### ¿Qué es NeoTrie VR?

NeoTrie VR es una plataforma educativa desarrollada por la Universidad de Almería que permite explorar, construir y manipular objetos geométricos en entornos de realidad virtual inmersiva. Según su sitio oficial, *“con NeoTrie VR, la geometría deja de ser abstracta para convertirse en una experiencia inmersiva e interactiva. Nuestra plataforma de realidad virtual educativa permite visualizar, manipular y crear figuras geométricas en 3D, facilitando un aprendizaje profundo y significativo”* (NeoTrie, 2025).

El software combina la realidad virtual y la geometría dinámica, posibilitando que estudiantes y docentes trabajen colaborativamente en la creación de estructuras tridimensionales dentro de un espacio virtual. Además, incorpora herramientas que permiten *“crear figuras a partir de vértices, aristas y caras, y editar cada uno de esos elementos de forma intuitiva con los mandos virtuales”* (NeoTrie, 2025).

Una de sus características distintivas es la interacción multijugador, mediante la cual *“profesores y alumnos pueden construir juntos en tiempo real desde distintos espacios”* (NeoTrie, 2025). Asimismo, el programa permite integrar objetos 3D, imágenes, sonidos, textos y vídeos, ampliando las posibilidades didácticas y creativas en el aula virtual. Estas experiencias pueden ser guardadas y compartidas mediante archivos en formato .NEOT, lo que favorece el intercambio y la continuidad del trabajo educativo.

NeoTrie VR constituye una herramienta de geometría interactiva en realidad virtual, orientada a potenciar la comprensión espacial, la visualización tridimensional y la experimentación matemática a través de experiencias inmersivas, colaborativas y dinámicas.

### **¿Qué necesito para usar NeoTrie VR?**

El funcionamiento de NeoTrie VR depende del dispositivo en el que se ejecute. Existen dos modalidades principales: PC y MetaQuest.

- Requisitos para PC (versión Steam):
  - Sistema operativo: Windows 7 o superior (incluye Windows 10 y versiones posteriores).
  - Procesador: Intel i5-4590 o AMD FX-8350 (o versiones superiores).
  - Memoria RAM: mínimo 4 GB.
  - Tarjeta gráfica: NVIDIA GeForce GTX 1050Ti o AMD Radeon RX 470 (o superiores).
  - Versión mínima de DirectX: 11.
  - Espacio disponible en disco duro: 1 GB como mínimo.
- Requisitos para visores MetaQuest:
  - Un visor MetaQuest 2 o superior.
  - Conexión estable a internet mediante Wi-Fi.
  - Una cuenta Meta (antes Oculus) configurada previamente.

Neotrie VR ofrece licencias educativas de carácter anual, diseñadas para su uso en contextos académicos. Estas licencias incluyen cuatro componentes esenciales: acceso a las herramientas del nivel de usuario, acceso a todos los materiales educativos proporcionados por Neotrie, actualizaciones automáticas del software y soporte técnico personalizado. (NeoTrie, 2025) Para seleccionar la licencia correspondiente, el usuario puede hacerlo desde la sección *Player Settings* dentro de la aplicación, y en el modo multijugador todos los participantes deben disponer de la misma categoría de licencia para acceder a las herramientas equivalentes (NeoTrie, 2025).

En cuanto a las opciones de licencia para un único dispositivo, Neotrie VR distingue tres niveles, con precios específicos (actualizados al 16 de septiembre de 2025):

- Principiante: 79,95 € por año
- Experto: 109,95 € por año
- Avanzado: 139,95 € por año

Para usos que impliquen más de 4 dispositivos, Neotrie solicita que los interesados contacten directamente con el equipo del proyecto para condiciones personalizadas. (NeoTrie, 2025)

Aunque la documentación pública no ofrece una tabla exhaustiva de funciones para cada nivel, se indica que la selección del tipo de licencia condiciona la disponibilidad de herramientas en las escenas y actividades. Esto sugiere que las licencias de nivel superior (por ejemplo, la licencia *Avanzado*) activan herramientas más complejas o avanzadas que podrían estar restringidas en licencias *Principiante* o *Intermedio/Experto*. Por ejemplo, algunas actividades del proyecto implican el uso de operaciones avanzadas como reflejos, rotaciones, simetrías o generación de copias dependientes, lo cual podría requerir una licencia con mayores permisos (NeoTrie, 2025).

Desde el punto de vista legal, el uso de Neotrie VR está regulado por sus Términos y Condiciones, en los cuales se establece que:

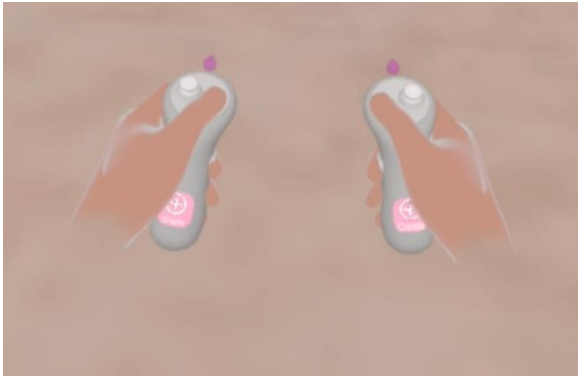
- El software y todos los derechos de propiedad intelectual (marcas registradas, derechos de autor, derechos sobre bases de datos, etc.) pertenecen a Virtual Dor S.L.
- El usuario no tiene permiso para copiar, modificar, extraer código fuente, traducir la aplicación sin autorización o crear versiones derivadas del software.
- Virtual Dor S.L. se reserva el derecho de modificar el software o cobrar por sus servicios, siempre que se informe claramente al usuario sobre lo que se está pagando.
- También se reserva el derecho de terminar el uso del software y cancelar las licencias otorgadas, en cuyo caso el usuario debe dejar de usar la aplicación y, si es necesario, eliminarla de su dispositivo.

### **¿Cómo instalar NeoTrie VR en MetaQuest?**

Para instalar NeoTrie VR en visores MetaQuest, se deben seguir los siguientes pasos:

1. Asegúrate de que tu visor MetaQuest esté configurado correctamente y conectado a una red Wi-Fi estable.
2. Ingresa a la tienda de aplicaciones desde el menú principal del visor.
3. En la barra de búsqueda, escribe “NeoTrie VR”.
4. Una vez localizada la aplicación, selecciona la opción de comprar o instalar (según corresponda).
5. Tras completar la compra, el software comenzará a descargarse e instalarse automáticamente en el dispositivo.
6. Cuando finalice la instalación, NeoTrie VR aparecerá en la biblioteca de aplicaciones del visor.
7. Desde allí podrá ejecutarse directamente para comenzar a usarlo.

### **¿Cómo interactuar en NeoTrie VR?**



Primero que todo, es importante tener en cuenta que este software solo funciona utilizando los controladores de los dispositivos de realidad virtual. Cada controlador (izquierdo y derecho) tiene la apariencia de un joystick invertido. Su diseño consta de un cuerpo cilíndrico que se ajusta a la palma de la mano y, en la parte superior, una semiesfera cuyo lado plano queda orientado hacia arriba.

En la superficie plana de esa semiesfera se encuentran alojados tres botones y un joystick, los cuales se manejan principalmente con el dedo pulgar de cada mano.

- El joystick está ubicado en la parte superior derecha (para el mando derecho) o superior izquierda (para el mando izquierdo), de manera simétrica.
- Los botones se distribuyen en la parte inferior:
  - En el mando derecho, los botones están en la parte inferior izquierda.
  - En el mando izquierdo, se encuentran en la parte inferior derecha.
- De los tres botones, dos son sobresalientes (en relieve) y están dispuestos uno encima del otro.
  - El botón superior corresponde a la tecla B.
  - El botón inferior corresponde a la tecla A.
- El tercer botón, que está a nivel de la superficie, es el que permite acceder al menú del dispositivo, es decir, al menú general de MetaQuest.

Además de los botones y joysticks, cada mando tiene dos gatillos ubicados en la parte trasera, diseñados para ser presionados con los dedos índice y medio (dedo corazón).

- El gatillo que se presiona con el dedo índice se utiliza para activar funciones específicas de las manos dentro del programa.
- El gatillo que se presiona con el dedo corazón permite atraer, sujetar y manipular objetos dentro del entorno virtual.

### **Ingreso a NeoTrie VR y uso de los controles**

Para ingresar al metaverso de NeoTrie VR, se debe oprimir el botón de menú del dispositivo (el botón plano) y, en la ventana de aplicaciones, seleccionar la aplicación NeoTrie VR. Una vez dentro del software, los controles tienen la siguiente funcionalidad:

- Joysticks: sirven para manejar la movilidad dentro del entorno del programa, desplazándose o girando en el espacio virtual.
- Botón A: abre el menú de herramientas de construcción para las manos. Dentro de este menú se encuentran herramientas como:
  - Crear
  - Editar
  - Trasladar
  - Agarrar
  - Deshacer
  - Eliminar
  - Pincel
  - Extruir pirámide
  - Extruir prisma

- Manipulación de caras



- Botón B: abre el menú general del aplicativo, donde es posible acceder a funciones como:
  - Consultar la información de los objetos creados.
  - Insertar objetos predeterminados.
  - Guardar las estructuras construidas.
  - Reubicar la mesa de trabajo hacia el lugar donde se encuentra el usuario.
  - Acceder a otras opciones adicionales que permiten gestionar el entorno de trabajo.



- Gatillo del dedo corazón: se utiliza para atraer y sostener objetos dentro del entorno virtual.
- Gatillo del dedo índice: activa las funciones asignadas a la mano seleccionada, como construir, seleccionar o modificar elementos

## ¿Cómo es la movilidad en NeoTrie VR?

La movilidad dentro del aplicativo se realiza mediante los joysticks que están ubicados en la parte superior de cada uno de los controladores. Estos joysticks poseen un rango de movimiento de 360°, lo que permite desplazarse en cualquier dirección dentro del entorno virtual.

Cuando el usuario mueve cualquiera de los joysticks hacia adelante o hacia atrás, el avatar dentro del programa se desplazará en esa dirección. Sin embargo, es importante tener en cuenta que el movimiento no se hace respecto a la orientación del visor, sino en la dirección hacia la cual se está apuntando con la mano que sostiene el controlador. Por ejemplo, si el usuario apunta con la mano hacia arriba y empuja el joystick hacia adelante, el avatar ascenderá dentro del espacio virtual; en cambio, si mueve el joystick hacia atrás mientras apunta hacia arriba, el avatar descenderá. Es decir, el desplazamiento responde a la combinación de dos factores: la orientación de la mano y la dirección en que se presiona el joystick.

Además de los movimientos hacia adelante y hacia atrás, los joysticks también permiten realizar giros rápidos dentro del espacio. Cuando el usuario desplaza el joystick hacia la derecha o hacia la izquierda, el avatar no avanza, sino que ejecuta un salto en el mismo lugar que equivale a un giro de aproximadamente 30° en la dirección señalada. Este tipo de movimiento resulta útil para reorientarse de manera rápida dentro del entorno sin necesidad de caminar virtualmente largas distancias ni girar físicamente el cuerpo, lo que facilita la navegación y la exploración en escenarios amplios o cuando se necesita observar una figura desde otro ángulo de inmediato.

Los joysticks ofrecen dos modalidades de desplazamiento: por un lado, el avance o retroceso en la dirección en que se apunta con la mano, y por otro, los giros de 30° en la misma posición al moverlos lateralmente. Ambas funciones combinadas permiten que el usuario explore y manipule los objetos 3D en NeoTrieVR de manera fluida y precisa, aprovechando la tridimensionalidad del espacio virtual.

## ¿Cómo funcionan los gatillos en NeoTrieVR?

Los gatillos corresponden a los botones ubicados en la parte frontal del cuerpo de los controladores. Cada mano cuenta con dos gatillos: uno que se acciona con el dedo índice y otro que se acciona con el dedo medio. Estos botones cumplen funciones fundamentales dentro del programa, ya que permiten seleccionar, atraer, sostener objetos y activar herramientas.

El gatillo del dedo medio cumple principalmente la función de selección y atracción de objetos. Cuando el usuario oprime este gatillo y no hay ningún objeto cercano, aparece una línea virtual con forma de parábola que se proyecta desde la mano. Esta línea funciona como un puntero a distancia que facilita la selección de elementos dentro del entorno virtual. Cuando la línea toca un objeto, este cambia de color a un tono lila con ondas, señalando que está listo para ser seleccionado. Una vez marcado, el usuario puede confirmar su elección utilizando el gatillo del dedo índice, lo que activa la función de “atraer” el objeto hacia su posición. Cuando los objetos están cercanos, es decir, al alcance de la mano, el mismo gatillo del dedo medio también permite sostener directamente los objetos o herramientas que se encuentran sobre la mesa de trabajo.

El gatillo del dedo índice, por su parte, se emplea principalmente para activar las herramientas que se sostienen con la mano o las que provienen del menú desplegable con el botón A. Su uso está directamente vinculado a las funciones de construcción y edición de la aplicación. Por ejemplo, si en la mano derecha se tiene activada la herramienta de creación, al presionar el gatillo del índice aparecerá automáticamente un punto en el espacio. Otro caso ocurre con herramientas específicas como la de punto medio: si el usuario sostiene esta herramienta con el dedo medio y selecciona un segmento presionando el gatillo del índice, el programa genera de inmediato el punto medio del segmento. De manera similar, si se seleccionan dos puntos distintos usando el gatillo del índice, mientras la herramienta se sostiene con el dedo medio, el sistema creará el punto medio entre esos dos puntos.

Ambos gatillos funcionan de manera complementaria: el del dedo medio facilita la selección y manipulación de objetos, mientras que el del índice activa y ejecuta las

herramientas de construcción y edición del software. Gracias a esta combinación, el usuario puede interactuar de manera precisa y dinámica con los distintos elementos que ofrece NeoTrieVR.

### **¿Cómo se usan las herramientas de construcción y edición?**

En NeoTrieVR existen dos grandes tipos de herramientas: las que se utilizan directamente con las manos y las que se encuentran dispuestas en la mesa de trabajo. Ambas categorías cumplen funciones específicas y complementarias dentro del entorno de construcción y edición de objetos matemáticos en realidad virtual.

Las herramientas que se usan con las manos se activan a través del botón A en cada controlador. Esto significa que cada mano puede sostener y utilizar una herramienta distinta de manera simultánea, lo cual amplía las posibilidades de interacción del usuario. Entre las herramientas que pueden asignarse a las manos se encuentran: crear, editar, trasladar, agarrar, deshacer, eliminar, pincel, extruir pirámide, extruir prisma y caras. Gracias a esta versatilidad, el usuario puede combinar diferentes acciones en un mismo momento, por ejemplo, crear con una mano y editar con la otra.

Por otra parte, están las herramientas ubicadas en la mesa de trabajo, las cuales dependen de la licencia adquirida al instalar NeoTrieVR. En el caso de la licencia que estoy utilizando, las herramientas disponibles en la mesa son las siguientes:

- Pincel para pintar utilizando la paleta de colores.
- Copiar y pegar con escala, que permite duplicar un objeto modificando sus proporciones.
- Copiar y pegar sin escala, que genera réplicas exactas de un objeto sin alterar sus dimensiones.
- Herramienta de medir, para calcular longitudes.
- Medir ángulos, que permite determinar la amplitud de un ángulo entre segmentos o rectas.
- Rotaciones, que posibilitan girar los objetos en torno a un eje.

- Crear rectas paralelas, útil para construcciones geométricas precisas.
- Crear rectas perpendiculares, que garantiza ángulos rectos en la construcción.
- Punto medio, que genera automáticamente el punto equidistante entre dos extremos.
- Borrador, para eliminar elementos del espacio de trabajo.
- Reflexiones geométricas, que permiten duplicar objetos respecto a un eje o plano de simetría.

Las herramientas manuales y las de mesa le otorgan al usuario un amplio repertorio de recursos para construir, modificar y explorar objetos tridimensionales en NeoTrieVR, haciendo posible un trabajo matemático flexible, preciso y dinámico.

### **¿Cómo se usan las herramientas de la mano?**

Primero hay que tener en cuenta que para seleccionar objetos con la mano, en cada una de las manos aparece una pequeña pirámide flotante en el espacio. Esta pirámide cumple la función de un cursor en la realidad virtual y permite señalar, elegir y manipular los objetos creados en NeoTrieVR.

**Herramienta crear:** Para usar esta herramienta, primero se activa en cualquiera de las manos desde el menú que aparece al presionar el botón A. La herramienta de crear se encuentra en la parte superior del menú, y puede seleccionarse moviendo el joystick hacia arriba con el pulgar. Una vez seleccionada, al presionar el gatillo del dedo índice aparecerá un punto en el espacio. Para construir segmentos, se selecciona un primer punto con el gatillo y luego, sin soltar, se hace clic en un segundo punto, generando así un segmento entre ambos. Repitiendo este proceso se pueden construir polígonos y estructuras más complejas.



**Herramienta editar:** Se activa desde el menú del botón A de cualquiera de las manos, seleccionándola con el joystick. Una vez activa, se selecciona un objeto con el gatillo del dedo índice. Luego, con movimientos de la mano y manteniendo el gatillo presionado, es posible modificar la posición de los puntos, vértices o aristas, cambiando así la forma o tamaño de la figura creada.



**Herramienta trasladar:** Se activa también desde el menú del botón A. Al seleccionarla, el usuario puede elegir un objeto con el gatillo del dedo índice y, sin soltarlo, moverlo libremente en el espacio. La característica principal de esta herramienta es que realiza una traslación pura, es decir, desplaza el objeto de un lugar a otro sin modificar su orientación ni rotarlo.



**Herramienta agarrar:** Se selecciona desde el menú del botón A. Con esta herramienta, al seleccionar un objeto con el gatillo, se permite no solo moverlo en el espacio, sino también rotarlo de manera simultánea. Es decir, mientras se traslada el objeto, también se ajusta su orientación dependiendo del movimiento de la mano. Al soltar el gatillo, el objeto queda suspendido en el espacio en la nueva posición y orientación.



**Herramienta deshacer:** Para usar esta herramienta, se accede al menú del botón A y se selecciona con el joystick. Una vez activada, se utiliza el gatillo del dedo índice para deshacer la última acción realizada. Es importante tener en cuenta que la acción de deshacer está vinculada a la mano que tiene la herramienta activa: cada mano conserva su propio historial de acciones.



**Herramienta eliminar:** Se activa desde el menú del botón A. Luego, al hacer clic con el gatillo del índice sobre un objeto en el espacio, este se elimina de manera inmediata. Además, si el objeto eliminado es base o soporte de otras construcciones, todos los elementos derivados también serán eliminados automáticamente.



**Herramienta pincel:** Se selecciona igualmente desde el menú del botón A. Una vez activada, al mantener presionado el gatillo del dedo índice, aparece una línea cilíndrica que sigue el recorrido de la mano, generando un trazo en el espacio. Al soltar el gatillo, el trazo se detiene. Esta herramienta permite dar un carácter más visual y artístico a las construcciones, así como resaltar ciertos elementos en el espacio.



**Herramienta extruir pirámide:** Esta herramienta permite generar un sólido piramidal a partir de una base poligonal ya construida. Para usarla, primero se debe crear un polígono plano con la herramienta crear. Una vez que el polígono está cerrado, se selecciona la herramienta extruir pirámide en el menú del botón A. Después, al presionar el gatillo sobre la base seleccionada y arrastrar la mano hacia arriba o hacia abajo, se genera una pirámide cuya altura depende del movimiento realizado. El vértice superior de la pirámide se ubica en la dirección en la que se extruye la base.



**Herramienta extruir prisma:** Similar a la pirámide, esta herramienta permite generar un prisma a partir de una base poligonal cerrada. Se selecciona en el menú del botón A y luego se elige la base del polígono creado. Al presionar el gatillo y arrastrar la mano hacia la dirección deseada, se genera un prisma cuya altura corresponde a la magnitud del arrastre. El resultado es un sólido con dos bases poligonales paralelas y caras laterales rectangulares.

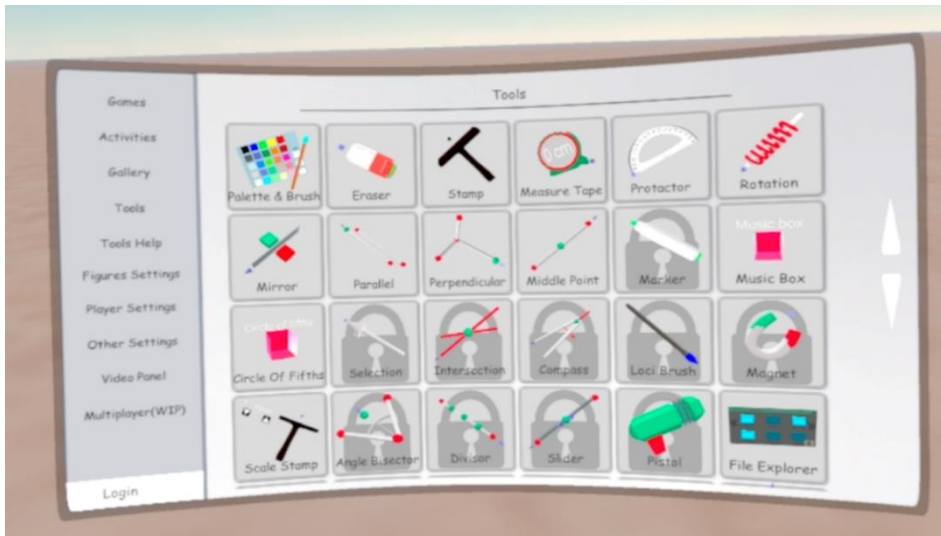


**Herramienta caras:** Esta herramienta se utiliza para crear una cara plana sobre un polígono previamente construido. Primero se selecciona en el menú del botón A. Luego, es necesario haber cerrado un polígono con la herramienta crear. Una vez listo, se selecciona con el gatillo un punto del perímetro y, sin soltarlo, se continúa seleccionando los puntos consecutivos del polígono en orden horario o antihorario. Cuando el recorrido está completo, el software genera automáticamente la cara plana del polígono seleccionado, rellenando su superficie.



### ¿Cómo se usan las herramientas de la mesa?

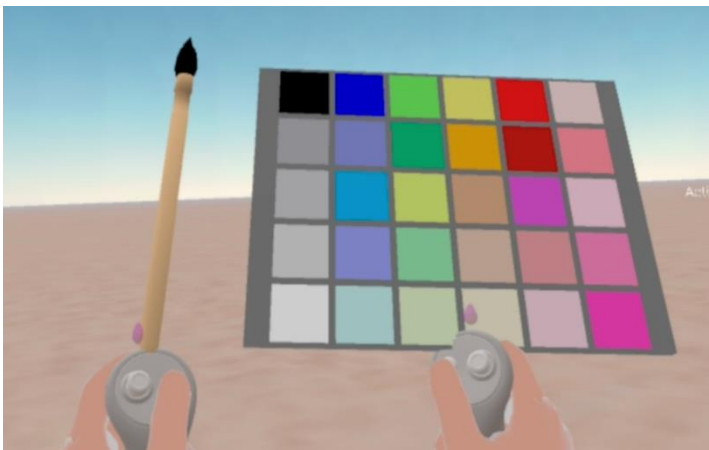
Para usar las herramientas de la mesa, primero es necesario agarrar la herramienta con cualquiera de las manos, y para esto se requiere estar lo suficientemente cerca de ella. Existen varias formas de lograrlo:



- Acercarse directamente a la mesa: Esto se hace utilizando el joystick de cualquiera de las manos, desplazándose en dirección hacia la mesa mientras se apunta con la pirámide (el cursor) hacia ella, hasta quedar a una distancia adecuada que permita interactuar con la herramienta.
- Traer la mesa de trabajo al lugar donde uno se encuentra: Esta opción se realiza usando el menú del sistema, que se activa con el botón B. Dentro de este menú aparece una opción representada con la imagen de un compás. Para seleccionarla, se apunta con la pirámide hacia el ícono del compás y se oprime como si fuera un botón en el espacio. En ese momento, la mesa de trabajo aparece automáticamente justo en el lugar donde estaba ubicado el menú, es decir, frente al usuario.
- Atraer una herramienta desde la distancia: Para esto se utiliza el gatillo del dedo medio. Al oprimir este gatillo, aparece una línea que funciona como selector a distancia, permitiendo apuntar a cualquier herramienta de la mesa. Una vez seleccionada la herramienta, se activa el gatillo del dedo índice, lo cual hace que la herramienta se acerque y pueda ser agarrada. Es importante mantener oprimido el gatillo del dedo medio mientras se usa el índice para atraer la herramienta.

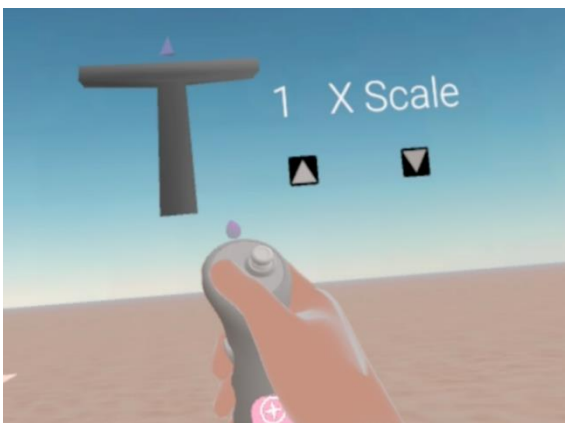
Cuando la herramienta ya está al alcance de la mano, se agarra con el gatillo del dedo medio y se activa con el gatillo del dedo índice. Al igual que las herramientas de la mano, las de la mesa también presentan una pequeña pirámide en el espacio, la cual sirve como cursor para seleccionar, señalar y manipular los elementos de trabajo.

### **Herramienta de pincel y paleta de colores**



Para usar esta herramienta primero es necesario acercarse a la mesa de trabajo y seleccionar el pincel con cualquiera de las manos. Para agarrarlo se utiliza el gatillo del dedo medio, de manera que el pincel quede sostenido en la mano virtual del usuario. Una vez se tiene el pincel, en la mesa de trabajo también aparece la paleta de colores, la cual contiene una serie de colores distribuidos en pequeños cuadros que funcionan como opciones para elegir. Para seleccionar un color específico, se debe acercar la punta del pincel al color deseado dentro de la paleta; en ese momento, el sistema reconoce la selección y el pincel queda cargado con el color escogido. Después de haber elegido el color, se dirige la punta del pincel hacia el objeto que se desea modificar, y cuando la punta hace contacto con el objeto, se oprime el gatillo del dedo índice para que el color se aplique de inmediato sobre la superficie. Este procedimiento puede repetirse cuantas veces se requiera, cambiando de color en la paleta y aplicando en diferentes objetos o superficies del espacio de trabajo.

## Herramienta de copiar y pegar con escala



Para utilizar esta herramienta primero es necesario tomarla de la mesa de trabajo con cualquiera de las manos. Para agarrarla se emplea el gatillo del dedo medio, de manera que la herramienta quede sujeta en la mano virtual. Una vez sostenida, se debe acercar la pequeña pirámide de selección que aparece en el extremo de la herramienta hacia el objeto que se desea copiar. Cuando la pirámide toca el objeto, se oprime el gatillo del dedo índice, lo que genera de inmediato un mensaje en el espacio indicando que la figura u objeto ha sido guardado correctamente. Después de esto, para pegar una copia a escala del objeto guardado, se debe llevar la pirámide hacia el lugar del espacio en el que se desea que aparezca la nueva figura y realizar un doble clic con el gatillo del dedo índice. Al hacerlo, la copia aparecerá en ese punto con la escala definida.

Esta herramienta cuenta con un menú propio que incluye la proporción de la escala con la cual se generará la copia. En dicho menú aparecen flechas que permiten modificar esta proporción: al presionar la flecha hacia arriba, la escala aumenta y la

figura copiada aparece más grande, mientras que al presionar la flecha hacia abajo, la escala disminuye y la figura aparece más pequeña. Las flechas se seleccionan oprimiéndolas como si fueran botones en el espacio virtual, permitiendo ajustar con precisión el tamaño de las copias que se generen.

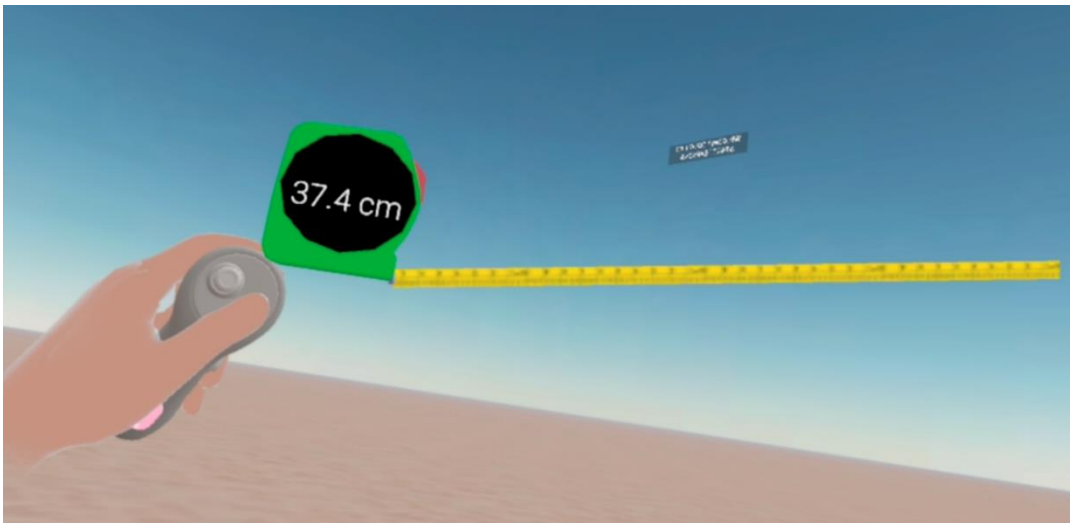
### **Herramienta de copiar y pegar**



Para utilizar esta herramienta, primero es necesario tomarla de la mesa de trabajo con cualquiera de las manos, utilizando el gatillo del dedo medio para sujetarla. Una vez sostenida, se debe acercar la herramienta al objeto que se desea copiar. En la punta de la herramienta aparece una pequeña pirámide de selección, la cual debe tocar el objeto. Cuando la pirámide está correctamente ubicada sobre el objeto, se oprime el gatillo del dedo índice. En ese momento, aparece un mensaje en el espacio que indica que el objeto ha sido guardado de manera correcta.

Después de que el objeto ha sido copiado, se puede proceder a pegarlo en cualquier parte del espacio virtual. Para ello, basta con dirigir la pirámide de la herramienta hacia el punto exacto donde se quiere colocar la nueva copia y realizar un doble clic con el gatillo del dedo índice. Al hacerlo, el objeto copiado aparece en esa ubicación con las mismas dimensiones y características que tenía el original, quedando listo para ser manipulado o utilizado en la construcción

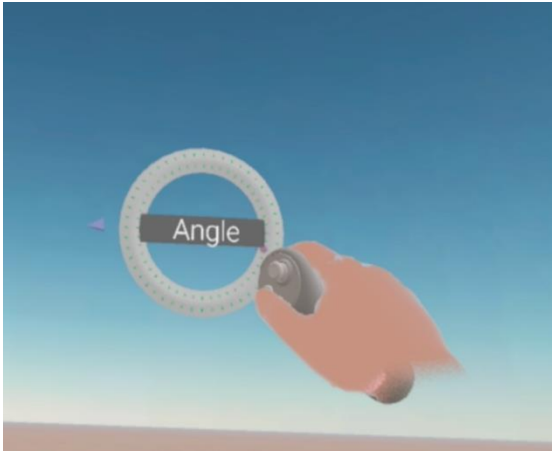
### **Herramienta de medir**



Para utilizar esta herramienta, lo primero que se debe hacer es tomarla de la mesa de trabajo con cualquiera de las manos, utilizando el gatillo del dedo medio para sujetarla firmemente. Una vez que la herramienta está en la mano, se procede a realizar la medición de un objeto o de una distancia en el espacio. Para iniciar la medición, se debe dar un clic con el gatillo del dedo índice en el punto de inicio deseado. En ese momento aparece en el espacio una línea del metro que comienza a extenderse desde ese punto, mostrando de manera inmediata en la pantalla de la propia herramienta la medida que se va generando.

Si se desea fijar la medida en un punto específico, se debe realizar un segundo clic con el gatillo del dedo índice en la ubicación donde se quiere terminar la medición. De esta manera, la línea del metro queda establecida en el espacio, permitiendo observar claramente la distancia entre los dos puntos seleccionados. Además, la herramienta muestra en su pantalla la longitud exacta del metro colocado, lo que permite tener un registro visible y preciso de la medida tomada. Esta línea permanece en el entorno virtual y puede ser usada como referencia para continuar construcciones, comparaciones de tamaño o verificaciones de proporciones entre distintos objetos.

### **Herramienta de medir ángulos**

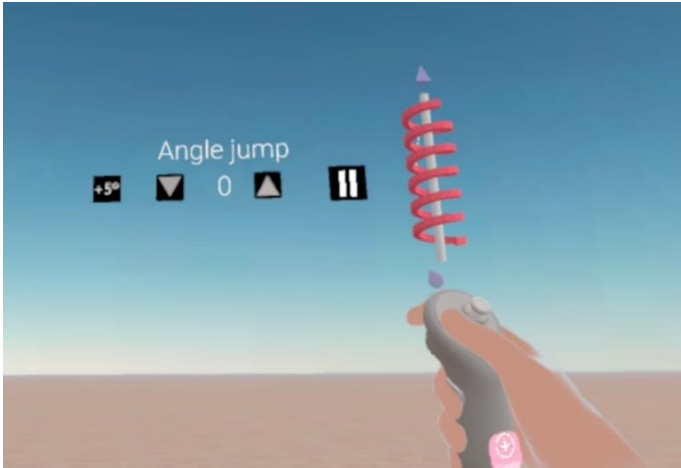


Para utilizar esta herramienta lo primero que se debe hacer es tomarla de la mesa de trabajo con cualquiera de las manos, sujetándola mediante el gatillo del dedo medio. Una vez que la herramienta está en la mano, se procede a seleccionar los segmentos que forman el ángulo que se desea medir. Para ello, se debe acercar la pequeña pirámide de selección de la herramienta sobre cada uno de los segmentos y hacer clic con el gatillo del dedo índice.

Al seleccionar los dos segmentos, la herramienta de manera automática calcula el ángulo formado entre ellos y proyecta en el espacio la abertura correspondiente. Al mismo tiempo, aparece en la pantalla de la propia herramienta el valor numérico del ángulo medido, expresado en grados. Esta representación facilita la verificación directa de la medida y, además, brinda una referencia visual del ángulo dentro del entorno virtual.

La medición queda visible en el espacio, permitiendo comparar diferentes ángulos, verificar construcciones geométricas o analizar relaciones entre los objetos. Esta herramienta resulta especialmente útil para actividades relacionadas con geometría plana y espacial, ya que ofrece una manera precisa y rápida de medir los ángulos directamente sobre los elementos construidos en el entorno de realidad virtual.

### **Herramienta de hacer rotaciones**



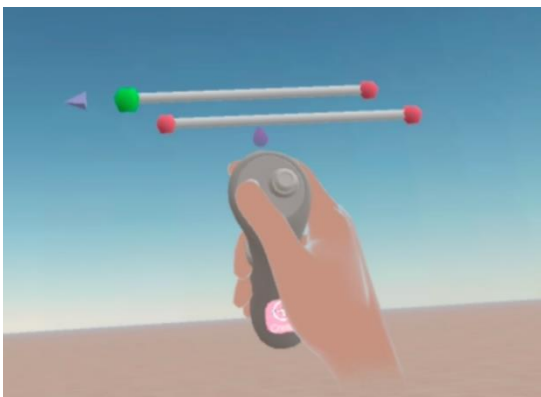
Para utilizar esta herramienta lo primero que se debe hacer es tomarla con cualquiera de las manos presionando el gatillo del dedo medio. Una vez que la herramienta está en la mano, en su menú aparece un panel donde se pueden definir los grados de rotación que se aplicarán al objeto seleccionado. Dicho panel cuenta con un par de flechas, una hacia arriba y otra hacia abajo, que funcionan como botones. Al presionarlas con la punta de la pirámide de la herramienta y el gatillo del dedo índice, se va aumentando o disminuyendo el ángulo de rotación en incrementos definidos, hasta ajustar el valor deseado según la necesidad de la construcción o la exploración geométrica.

Cuando ya se ha establecido el ángulo de rotación, se procede a aplicar la herramienta sobre el objeto. Para ello, se acerca la pequeña pirámide de selección hacia el objeto que se desea rotar y se oprime el gatillo del dedo índice. De inmediato, el objeto realiza la rotación indicada en torno a su centro o al eje preestablecido dentro del entorno virtual, mostrando la transformación en tiempo real.

Esta herramienta resulta especialmente útil cuando se requiere analizar simetrías, estudiar movimientos rígidos o construir figuras que dependen de rotaciones específicas. Gracias a la precisión del menú de selección de grados, se pueden realizar rotaciones exactas de  $90^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $180^\circ$  u otros valores, lo que facilita el trabajo con polígonos regulares, sólidos de revolución o configuraciones espaciales que exigen un control detallado de los ángulos. Además, la posibilidad de modificar rápidamente los valores permite experimentar con diferentes rotaciones sin

necesidad de rehacer los objetos, fomentando la exploración y el descubrimiento dentro del entorno de realidad virtual.

### **Herramienta de crear rectas paralelas**



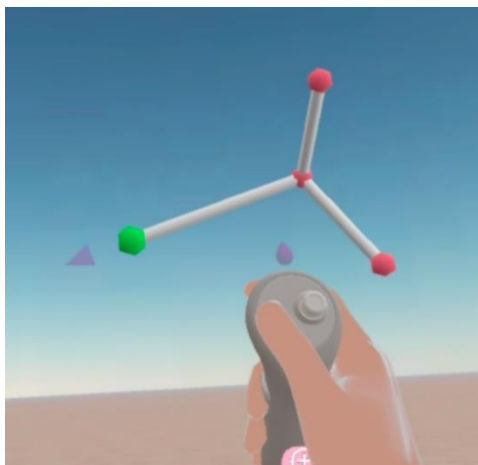
Para utilizar esta herramienta primero se debe tomar con cualquiera de las manos presionando el gatillo del dedo medio. Una vez que la herramienta está en la mano, se selecciona el segmento al cual se desea trazar una recta o segmento paralelo. Para ello, se acerca la pequeña pirámide de la herramienta al segmento y se oprime el gatillo del dedo índice; en ese momento, la herramienta reconoce el objeto como referencia para construir el paralelo.

Después, se debe escoger un punto por donde se quiere que pase la recta paralela. Este punto también se selecciona tocándolo con la pirámide de la herramienta y oprimiendo el gatillo del dedo índice. Automáticamente, el programa genera un nuevo punto de un color diferente que indica la posición de referencia para el paralelo. Al unirse ese punto con otro generado por la herramienta, aparece el segmento paralelo correspondiente al segmento original.

De esta manera, se construye un segmento paralelo de forma precisa y automática, sin necesidad de cálculos adicionales. Esta herramienta resulta muy útil para estudiar propiedades de los paralelogramos, el teorema de Tales, las configuraciones geométricas con rectas y planos, o simplemente para crear construcciones espaciales que requieran conservar direcciones fijas. Al trabajar en realidad virtual, la

visualización del paralelismo se hace más intuitiva, pues el estudiante puede observar directamente cómo el nuevo segmento mantiene la misma dirección que el original, facilitando la comprensión de este concepto geométrico fundamental.

### **Herramienta de crear rectas perpendiculares**



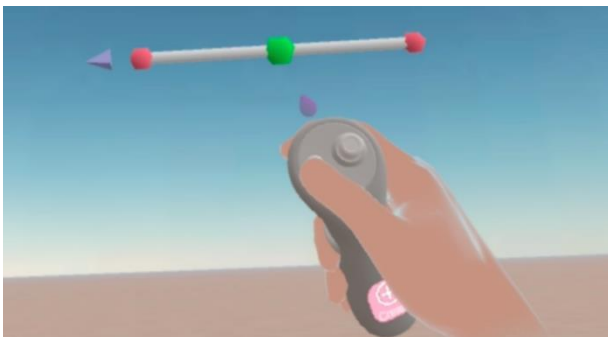
Para utilizar esta herramienta, primero se debe tomar con cualquiera de las manos presionando el gatillo del dedo medio. Una vez sostenida, se activa seleccionando tres puntos en el espacio que servirán para definir un plano imaginario. Para ello, se toca cada punto con la pequeña pirámide de la herramienta y se oprime el gatillo del dedo índice.

Cuando los tres puntos han sido seleccionados, la herramienta genera automáticamente un cuarto punto que se proyecta de manera perpendicular al plano definido. Este punto aparece claramente diferenciado, indicando la dirección de la perpendicularidad respecto al plano original.

De esta manera, la herramienta permite construir rectas perpendiculares de manera rápida y precisa en el espacio. Su utilidad radica en que facilita la comprensión de la relación entre planos y rectas, la noción de perpendicularidad tridimensional y la construcción de figuras geométricas como prismas, pirámides o poliedros en general. Además, en el entorno de realidad virtual, esta visualización resulta más intuitiva, ya que el usuario puede apreciar en tiempo real cómo la perpendicularidad se

representa de manera espacial, fortaleciendo la interpretación geométrica de este concepto.

### Herramienta de punto medio

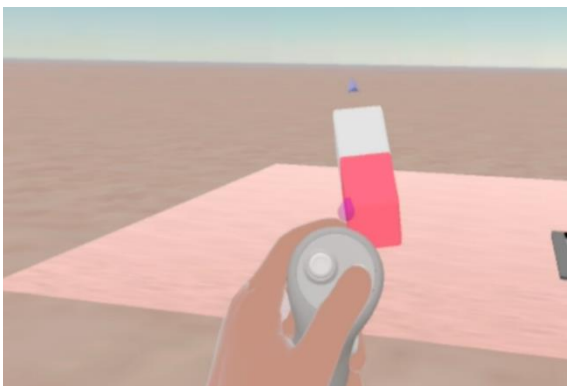


Para usar esta herramienta, primero se debe tomar con cualquiera de las manos presionando el gatillo del dedo medio. Una vez sostenida, existen dos formas principales de obtener el punto medio:

- **Entre dos puntos:** Se seleccionan dos puntos tocándolos con la pequeña pirámide de la herramienta y oprimiendo el gatillo del dedo índice en cada uno de ellos. Automáticamente aparecerá un nuevo punto en la posición exacta que corresponde al punto medio entre los dos seleccionados.
- **En un segmento:** También es posible seleccionar directamente un segmento. Para ello, se apunta con la pirámide de la herramienta hacia el segmento y se oprime el gatillo del dedo índice. De inmediato aparecerá un punto en la mitad del segmento, marcando su punto medio.

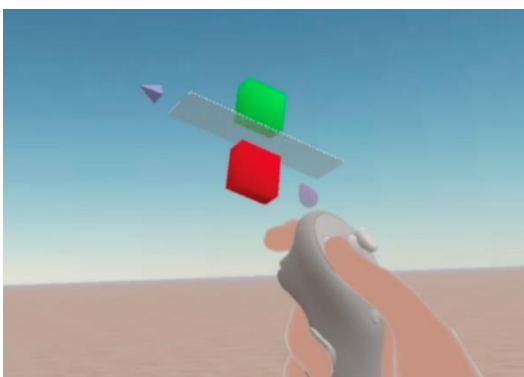
Esta herramienta es especialmente útil para construir figuras geométricas con precisión, ya que el punto medio es un elemento clave en la creación de mediatrices, diagonales, bisectrices y otros elementos geométricos. Además, en el entorno de realidad virtual, visualizar el punto medio de forma automática permite comprender de manera más clara la simetría y la proporcionalidad en el espacio tridimensional.

### Herramienta de borrador



Para usar esta herramienta primero se debe seleccionarla, agarrándola con la mano mediante el gatillo del dedo medio. Una vez sostenida, se apunta con la pequeña pirámide hacia el objeto que se desea borrar y se oprime el gatillo del dedo índice. El objeto desaparecerá de inmediato del espacio de trabajo. Esta herramienta es fundamental para corregir errores o limpiar el entorno de construcción en cualquier momento.

### **Herramienta de hacer reflexiones geométricas**



Para usar esta herramienta, primero se debe agarrar con la mano presionando el gatillo del dedo medio. Una vez sostenida, se selecciona el objeto que se desea reflejar tocándolo con la pequeña pirámide de la herramienta y oprimiendo el gatillo del dedo índice. Posteriormente, se debe escoger el plano de simetría sobre el cual se quiere realizar la reflexión. De manera automática, aparecerá la imagen reflejada del objeto respecto al plano seleccionado. Esta herramienta es muy útil para estudiar propiedades de simetría, construir figuras congruentes y explorar transformaciones geométricas en el espacio tridimensional.

## Anexo 2

### Actividad Integral de Instrumentalización

#### Grupo 2: GeoGebra 3D

- **Materiales Necesarios:**
  - Computador con acceso a GeoGebra 3D
  - Proyector o pantalla para demostraciones grupales (opcional)
  
- **Aprendizajes Necesarios:**
  - Manejar el entorno 3D de GeoGebra: navegación, zoom, rotación y uso de herramientas básicas.
  - Creación y manipulación de modelos 3D, identificando vértices, aristas y caras digitalmente.
  - Uso de las funciones de GeoGebra para anotar y registrar datos relevantes.
  
- **Actividad de Instrumentalización:**
  1. **Abrir GeoGebra Classic 6** y activar las vistas “Álgebra” y “3D Gráfica” desde el menú **Vista → Álgebra/3D Gráfica**.
  2. **Rotación del espacio:** arrastrar con el ratón o usar los iconos de giro en la barra de herramientas.
  3. **Zoom:** rueda del ratón o los botones “+ / –” para acercar/alejar;

4. **Translación:** pulsar la rueda y arrastrar, o usar la herramienta “Mover Vista”.
5. Haz clic en el lienzo de Gráfica 3D para asegurarte de que la barra de herramientas de la vista 3D se actualice con los iconos de navegación y construcción de objetos.
6. Selecciona la herramienta **Punto** (o escribe en la entrada  $A=(x,y,z)$ ) para crear el primer vértice A definiendo coordenadas explícitas.
7. Tras el primer clic, arrastra hacia arriba o hacia abajo antes de soltar para ajustar la coordenada z del punto A y luego suéltalo para fijarlo en el espacio.
8. Repite el proceso para crear los vértices B, C, D (por ejemplo  $B=(2,0,0)$ ,  $C=(1,1.732,0)$ ,  $D=(1,0.577,1.633)$ ), comprobando en Álgebra que cada punto registra sus coordenadas correctamente.
9. Selecciona la herramienta **Segmento** o escribe  $\text{Segment}[A,B]$  en la entrada para unir A con B; verás cómo aparece una arista en la vista 3D.
10. Continúa creando segmentos entre cada par de vértices adyacentes (por ejemplo,  $\text{Segment}[B,C]$ ,  $\text{Segment}[C,A]$ ,  $\text{Segment}[A,D]$ ,  $\text{Segment}[B,D]$ ,  $\text{Segment}[C,D]$ ) hasta completar todo el “esqueleto” del poliedro.
11. Usa el icono **Rotar vista 3D** o mantén pulsado el botón derecho del ratón para girar el espacio tridimensional y verificar desde distintos ángulos que todas las aristas están unidas correctamente.
12. Haz zoom con la rueda del ratón o las herramientas **Zoom In/Zoom Out** para acercarte a detalles o alejarte y apreciar la forma completa de tu poliedro.
13. Emplea la herramienta **Mover Vista** (o mantén pulsada la rueda y arrastra) para trasladar la escena y comprobar la estructura desde otros puntos de vista

### Grupo 3: NeoTrie VR

- **Materiales Necesarios:**

- Gafas de realidad virtual con la aplicación NeoTrie VR instalada
  - Espacio físico adecuado para el uso seguro del entorno inmersivo
- **Aprendizajes Necesarios:**
    - Uso básico de la tecnología de realidad virtual: encendido, calibración y navegación dentro del entorno.
    - Manipulación de objetos en 3D de manera inmersiva, identificando y construyendo poliedros virtuales.
    - Registro visual y espacial de los elementos geométricos (vértices, aristas, caras) en un entorno interactivo.
- **Actividad de Instrumentalización:**
    1. Colóquense el casco y abran NeoTrie VR; presionen la tecla **T** para iniciar el tutorial con Hypatia o Euclides, observe cómo guían en los primeros movimientos y en el uso básico de manos y teleport
    2. Practiquen el **teleport** usando el botón asignado en sus controladores para desplazarse dentro y fuera del espacio de trabajo; exploren volar manteniendo pulsado el joystick.
    3. Aprendan las **acciones de las manos**: mantengan tocado el joystick y pasen la mano sobre los iconos de selección (punto, segmento, cara) hasta que cambien a blanco, luego suelten para activarlos.
    4. Abran el **menú principal** (botón Menú o menú contextual en la mano izquierda) y localicen los iconos de guardado, carga y ajustes de herramienta; identifiquen también dónde aparecen las opciones de exportar/modelo.
    5. Seleccionen la herramienta **Pluma (Brush)** y, apuntando con el gatillo al espacio 3D, tracen un punto y suelten para crear el vértice A; verán un marcador flotante donde soltar.

6. Repitan el paso anterior para generar los vértices B, C, D (por ejemplo:  $A=(0,0,0)$ ,  $B=(2,0,0)$ ,  $C=(1,1.732,0)$ ,  $D=(1,0.577,1.633)$ ), comprobando que cada coordenada aparece en pantalla.
7. Con la mano activando **Conexión (Connection)**—manteniendo pulsado el joystick y eligiendo el icono de segmento—unan cada par de puntos A–B, B–C, C–A, A–D, B–D, C–D para formar el esqueleto.
8. Muevan su avatar con **teleport** o joystick alrededor del poliedro esquelético, giren la vista y hagan zoom para verificar que todas las aristas estén correctamente unidas.
9. Para crear **caras**, vuelvan a **Conexión**, seleccionen el sub-ícono de cara (face): luego apunten sucesivamente a los vértices de una cara (p.ej.,  $A \rightarrow B \rightarrow C$ ) y regresen a A para cerrarla automáticamente.
10. Continúen agregando caras hasta completar el sólido (4 para tetraedro, 6 para cubo, etc.), comprobando en cada ciclo que no queden huecos en la superficie.
11. Antes de generar una cara, pueden cambiar su **color**: mantengan pulsado el joystick, escojan “Color” en el menú contextual, elijan tonalidad y luego creen la cara para reforzar la diferenciación visual.
12. Una vez terminado el poliedro, abran el menú de guardado y elijan **Exportar modelo** (p. ej., GLTF) o **Guardar en la nube interna**, para conservar su construcción y poder reabrirla en futuras sesiones

### Anexo 3

#### Propuesta de Actividad

##### Instrucciones:

Construya los siguientes elementos con material concreto. Puede usar recortes de cartulina y unir los vértices con pegamento o con bolitas de plastilina y palillos para formar las aristas. Registre en la tabla sus características:

Un punto (representado con plastilina o dibujado)

Dos puntos (conéctalos con un segmento de cartulina o palillo)

Tres puntos (forma un triángulo plano)

Cuatro puntos (forma un cuadrado o una pirámide con base triangular)

Cinco puntos (intenta formar un prisma o una pirámide)

Ocho puntos (forma un cubo o prisma rectangular)

##### Tabla de registro

Construcción	Vértices (V)	Caras (C)	Aristas (A)
Un punto			
Dos puntos			
Tres puntos			
Cuatro puntos			
Cinco puntos			
Ocho puntos			

##### Preguntas:

- ¿Qué ocurre con la cantidad de vértices, aristas y caras a medida que agregamos puntos y formamos poliedros más complejos?

- ¿Puedes identificar algún patrón en los valores de V, C y A?
- ¿Cuántas aristas, caras y vértices crees que tendría un poliedro con 9 vértices?

### Construcción de poliedros regulares

Utiliza plantillas o desarrolla tus propias redes (net) en cartulina para construir los siguientes poliedros regulares. Luego completa la tabla con sus características:

Poliedro	Vértices (V)	Caras (C)	Aristas (A)
Tetraedro			
Cubo			
Octaedro			
Dodecaedro			
Icosaedro			

- ¿Qué ocurre con la cantidad de vértices, aristas y caras a medida que construyes poliedros más complejos?
- ¿Identificas algún patrón?
- ¿Qué diferencias encuentras entre figuras regulares e irregulares?
- Formula en tus propias palabras una conjetura sobre la relación entre vértices, aristas y caras en poliedros convexos. (Pista: piensa en la relación de Euler)

## Anexo 4

### Propuesta Actividad

En GeoGebra 3D, construya los siguientes elementos, registrando en la tabla sus características.

Utilizando las herramientas de GeoGebra, dibuja los siguientes elementos en el espacio y completa la tabla

**Un punto**

**Dos puntos** (Conéctalos con un segmento)

**Tres puntos** (Intenta formar un triángulo)

**Cuatro puntos** (Puedes hacer una pirámide o un cuadrado)

**Cinco puntos** (Pirámide, prisma o tetraedro)

**Ocho puntos** (Cubo o prisma)

<b>Construcción</b>	<b>Vértices (V)</b>	<b>Caras (C)</b>	<b>Aristas (A)</b>
Un punto			
Dos puntos			
Tres puntos			
Cuatro puntos			
Cinco puntos			
Ocho puntos			

Responde las siguientes preguntas:

- ¿Qué ocurre con la cantidad de vértices, aristas y caras a medida que agregamos puntos y formamos poliedros más complejos?
- ¿Puedes identificar algún patrón en los valores de V, C y A?
- ¿Cuántas aristas caras y vértices crees que tendría un poliedro con 9 vértices?

Complete la siguiente tabla con las características de cada poliedro

<b>Poliedro</b>	<b>Vértices (V)</b>	<b>Caras (C)</b>	<b>Aristas (A)</b>
Tetraedro			
Cubo			
Octaedro			
Dodecaedro			
Icosaedro			

- ¿Qué ocurre con la cantidad de vértices, aristas y caras a medida que agregamos puntos y formamos poliedros más complejos?
- ¿Puedes identificar algún patrón en los valores de V, C y A?
- ¿Hay algún cambio de las características entre las figuras regulares e irregulares?

## Anexo 5

### Propuesta Actividad

En NeoTrie VR, construya los siguientes elementos, registrando en la tabla sus características.

Utilizando las herramientas de edición, dibuja los siguientes elementos en el espacio y completa la tabla

**Un punto**

**Dos puntos** (Conéctalos con un segmento)

**Tres puntos** (Intenta formar un triángulo)

**Cuatro puntos** (Puedes hacer una pirámide o un cuadrado)

**Cinco puntos** (Pirámide, prisma o tetraedro)

**Ocho puntos** (Cubo o prisma)

<b>Construcción</b>	<b>Vértices (V)</b>	<b>Caras (C)</b>	<b>Aristas (A)</b>
Un punto			
Dos puntos			
Tres puntos			
Cuatro puntos			
Cinco puntos			
Ocho puntos			

Responde las siguientes preguntas:

- ¿Qué ocurre con la cantidad de vértices, aristas y caras a medida que agregamos puntos y formamos poliedros más complejos?

- ¿Puedes identificar algún patrón en los valores de V, C y A?
- ¿Cuántas aristas caras y vértices crees que tendría un poliedro con 9 vértices?

Complete la siguiente tabla con las características de cada poliedro

<b>Poliedro</b>	<b>Vértices (V)</b>	<b>Caras (C)</b>	<b>Aristas (A)</b>
Tetraedro			
Cubo			
Octaedro			
Dodecaedro			
Icosaedro			

- ¿Qué ocurre con la cantidad de vértices, aristas y caras a medida que agregamos puntos y formamos poliedros más complejos?
- ¿Puedes identificar algún patrón en los valores de V, C y A?
- ¿Hay algún cambio de las características entre las figuras regulares e irregulares?

## Anexo 6

### Experiencias Neotrie VR (Mi experiencia)

#### Sesión 1

La primera experiencia con Neotrie VR. Luego de instalar la aplicación, ingresé al espacio virtual donde parecía estar dentro del Panteón; había una mesa que tenía unas herramientas, una ventana donde se podían observar unas carpetas que parecían ser las carpetas donde se almacenan los archivos, y unos cubos rojos pequeños ubicados en un espacio específico. Encima de la mesa estaban la palabra Neotrie y los sólidos platónicos. Luego de observar el entorno, exploré los controles. El controlador tiene cuatro botones y un joystick; cada uno tiene dos botones tipo gatillo (uno para el dedo índice y otro para el dedo medio) y dos botones al lado del joystick que se usan con el dedo pulgar.

La primera reacción fue oprimir el gatillo del dedo índice y observé que en el espacio aparecía un punto. Nuevamente oprimí el gatillo del dedo índice varias veces y aparecieron puntos en el espacio. Luego probé el gatillo del dedo medio y observé que salía una especie de parábola que apunta y señala objetos; al momento de oprimir el gatillo del dedo índice, me di cuenta de que los objetos señalados eran atraídos para tenerlos al alcance de las manos. Pude traer algunas herramientas que estaban en la mesa de trabajo, pero no pude usar ninguna de ellas. Seguido de esto, probé los botones del dedo pulgar. Estos botones abrían dos menús distintos: uno abre el menú de las herramientas que tienes en las manos y el otro abre el menú general de la aplicación. Inicialmente exploré el menú de las herramientas y observé que ambos mandos tenían la misma distribución de botones. Por el momento, los botones que pude identificar fueron dos de movimiento, uno para crear, uno para borrar y uno para hacer trazos.

Después de explorar estos botones, me dispuse a "jugar" con la aplicación, creando puntos y trazos en el espacio. Descubrí que los movimientos que se pueden hacer al coger los objetos son uno libremente y otro que los mantiene en un mismo ángulo. Durante esta exploración tuve muchas dificultades para moverme en el espacio. Me di cuenta de que los joysticks permiten movilidad, pero aún no pude lograr entender

cómo se mueve uno en el espacio con el joystick, por lo que inicialmente el movimiento también se hacía en el espacio real que dispusimos para usar las gafas (Meta Quest). Realizando estos movimientos sufrí de mareos, por lo que decidí terminar la exploración, quitarme el dispositivo de realidad virtual y descansar. La exploración inicial duró aproximadamente 35 minutos.

En esta misma sesión, mi compañera también ingresó a la aplicación luego de mi exploración. Pude observar que ella exploró más o menos de la misma manera los controles y las acciones de cada botón, pero ella se centró más en el menú de la aplicación. En esta exploración pudo observar que este menú tenía un tutorial que inició, pero luego de aprender a realizar segmentos, que es una de las primeras tareas del tutorial, Euclides (quien es el personaje que te enseña a usar las herramientas) desaparece y ya no se pudieron ver más sus mensajes ni instrucciones. Pude observar que mi compañera también tuvo muchos problemas de movilidad y, para acceder al menú, tuvo que agacharse porque en el espacio virtual se encontraba muy arriba del suelo, por lo que todas las herramientas las tenía muy abajo. Ella tiene más problemas para ver con las gafas, pues por algún motivo no puede enfocar bien al usar las Meta Quest, por lo que se mareó con mayor facilidad y se quitó el dispositivo aproximadamente 15 minutos después.

## **Sesión 2**

En la segunda experiencia con Neotrie VR ya tenía más información acerca de la aplicación y sabía que no era necesario usar el espacio real para movilizarse por el espacio virtual; estos movimientos se podrían hacer desde una silla, sentados (es más recomendable una silla que gire). Para esta experiencia, el objetivo era lograr movilizarme por el espacio desde la silla del computador. Luego de ingresar a la plataforma, lo primero que intenté hacer fue mover los joysticks de los controladores. Con el joystick de la mano derecha alcancé a identificar dos movimientos: uno que era hacia adelante o hacia atrás, pero en un principio no sabía cómo controlar el ángulo de movimiento; el otro es a la izquierda o a la derecha, haciendo unos saltos, girando. Con el joystick de la mano izquierda, al momento de moverlo, aparecía una parábola de la mano que apuntaba a algún lugar del espacio; en el momento de soltar el joystick, se da un salto hacia el lugar donde termina la parábola.

Inicialmente no sabía cómo funcionaba esta forma de moverse, por lo que estaba dando saltos muy aleatorios. Ahí me di cuenta de que el espacio fuera del Panteón es muy, muy grande y podría ser un lugar donde se podrían hacer construcciones grandes. Luego de un tiempo, me di cuenta de cómo funciona el joystick de la mano izquierda: la movilidad que proporciona es por medio de saltos, y la forma de controlarlo es con la parábola que se forma al oprimir el joystick; el personaje salta al final de la parábola. Intenté regresar a la mesa de trabajo apuntando hacia ella. Luego de algunos saltos, logré volver a la zona de la mesa de trabajo e intenté movilizarme con el joystick de la mano derecha. Este proporcionaba una movilidad en forma de vector. Al principio no entendía muy bien cómo era el avance, porque el movimiento cogía un sentido, pero no era capaz de controlar la dirección. Me ocurría que me metía debajo del piso y no sabía cómo subir de nuevo. Luego de un tiempo, me di cuenta de que la forma de controlar la dirección es con la misma mano, apuntando hacia donde uno quiere darle dirección al movimiento. Entonces, si quería salir del suelo, debía apuntar con la mano hacia arriba y con el joystick apuntando hacia adelante para subir en el espacio.

Luego de esto, realicé varios movimientos alrededor del espacio e intenté coger algunas herramientas para utilizarlas. La forma de coger las herramientas es acercándose a ellas con la mano virtual y dar clic en el gatillo. Luego de intentar usar algunas herramientas, me cansé y terminé la sesión.

### **Sesión 3**

Para la tercera sesión, inicialmente y sin querer, ingresé al tutorial donde Euclides te enseña a usar algunas de las herramientas. En esta ocasión aprendí a utilizar las herramientas de las manos: crear puntos (cuando das clic en dos puntos se genera un segmento) y, con la unión de tres vértices y segmentos (mínimo), se comienzan a formar polígonos. Inicialmente se toma el menú de cualquiera de las dos manos; para esto, el menú se despliega oprimiendo el botón A del controlador. Como soy diestro, inicialmente desplegué el menú y probé las herramientas con la mano derecha. Este menú contiene herramientas para crear puntos y segmentos, otra para hacer traslaciones, otra para hacer rotaciones y traslaciones al tiempo, y una para crear caras y polígonos.

Para realizar puntos y segmentos se utiliza la herramienta "Editar", haciendo clic, disparando el gatillo para que salgan puntos en el espacio. Para realizar un segmento, se da clic con el gatillo en uno de los puntos creados hasta que se ponga azul y luego se selecciona el otro punto haciendo clic para crear un segmento recto entre estos dos. Luego probé la herramienta para realizar caras. Entonces, uní varios puntos con segmentos de tal manera que formé polígonos irregulares y, nuevamente con la mano derecha, desplegué el menú de herramientas y escogí la de realizar caras. Para esto, se da clic con el gatillo en cada uno de los vértices del polígono, iniciando y terminando en orden con el mismo punto inicial.

Luego de esto, usando una combinación de las dos herramientas anteriores, intenté crear poliedros en el espacio y comencé a manipularlos con la herramienta de "Editar", que permite cambiar el tamaño de los segmentos y la forma de las caras y poliedros, y observarlos desde varios puntos de vista e inclusive desde adentro. Después me puse a experimentar con las herramientas que aprendí a usar, movilizándome por el espacio y haciendo figuras de diferentes tamaños y colores. Esta interacción duró aproximadamente 40 minutos y para ese momento ya me cansé de usar la realidad virtual, por lo que me quité los dispositivos y terminé la sesión.

#### **Sesión 4**

Para esta sesión, al ingresar a la plataforma de realidad virtual, nuevamente como al finalizar la última vez, comencé a explorar las herramientas que tenía disponibles, ya con mucha más habilidad para el movimiento. Lo que hice fue coger y utilizar las herramientas del sistema para crear formas y figuras en el espacio. Con el pincel escribía cosas como mi nombre para observar cómo se veía; hacía muchos puntos y los unía con segmentos. De repente, realizaba algunos polígonos y jugaba a agrandarlos y encogerlos. También lo hacía con poliedros y, en conclusión, la pasé un buen rato explorando las herramientas y lo que podía hacer con ellas.

De la mesa, tuve muchos problemas para aprender a usar la herramienta de copiar y pegar. Es una herramienta en forma de "T" que, como todas, tiene una pequeña pirámide en el espacio que es la que permite seleccionar el objeto al cual se le piensa aplicar. Pero para esta herramienta, luego de seleccionar el objeto, aparecía un mensaje que decía que había sido guardado con éxito, pero al momento de tratar de

replicarlo no era posible con los objetos. Sin embargo, si lo intentaba con las pinceladas que hacía con la brocha, sí me era posible con solo un clic copiar el objeto y con otro clic "pegarlo" en el espacio. Otra de las herramientas de la mesa que pude utilizar fue la de perpendicular. Me di cuenta de que estas herramientas usan mucho de la teoría para poder ser utilizadas; por ejemplo, para crear una perpendicular se necesitaba una recta a la cual hacer la perpendicular y un punto por el cual va a pasar, lo que usaba el teorema recta-punto (interno o externo). De igual manera que las otras herramientas, esta tiene una pirámide en el espacio y su forma son dos segmentos de rectas perpendiculares. La otra herramienta que pude usar fue la de rectas paralelas. Tal como la de rectas perpendiculares, la herramienta en la mesa se ve como dos segmentos de rectas paralelas y también tiene la pequeña pirámide que sirve para seleccionar los objetos. El funcionamiento también es muy similar: había que seleccionar una recta y un punto para conseguir la recta paralela.

Luego de usar todas estas herramientas y de estar explorando, pensé que no tenía mucho sentido la forma como estaba explorando y que debía ponerme un objetivo, por lo que recordé que en clase de geometría nos pedían en GeoGebra realizar objetos robustos, lo que implicaba que no cambiaran sus propiedades si se movían los puntos. Pensé en realizar un cubo robusto con las herramientas disponibles y de esa manera tratar de aprender a usarlas todas. Inicialmente, intenté hacer un cuadrado en el plano, pero tuve dificultades al poner cuatro puntos sobre un plano. Al momento de realizar el cuadrado, en alguno de los que hice tuve que tomarlo con las manos de una esquina y observarlo muy detalladamente desde todos los ángulos porque no parecía que todos sus puntos estuvieran sobre el mismo plano. Efectivamente, al observar el cuadrado, tuve que tomarlo de cada uno de sus vértices y noté que, al ponerlo en perspectiva haciendo que solo se viera el perfil, había uno de los cuatro puntos que estaba levemente fuera del plano. Por lo que pensé que para realizar el cubo que quería debía usar alguna herramienta desde el principio, porque al poner los puntos en el espacio no iba a funcionar. Lo primero que pensé usar fue la herramienta de perpendiculares, pero para este momento ya llevaba aproximadamente 40 minutos de interacción y mi visión se comenzaba a cansar, por lo que decidí detenerme y descansar.

## **Sesión 5**

Para esta sesión el objetivo era claro: debía realizar un cubo robusto y ya tenía indicios (o eso creía) de cómo realizarlo. Inicialmente me dispuse a realizar un segmento de cualquier tamaño y sobre este realizar una recta perpendicular para formar un ángulo de 90 grados. Repetí el proceso dos veces para obtener los dos ángulos de 90 grados, pero acá tuve mi primer inconveniente: con la figura en "U" que tenía, ya podría tener otro lado de la primera cara, que sería un cuadrado, pero no tenía cómo marcar el punto para sacar la otra perpendicular a la misma distancia del segmento original para que los cuatro lados quedaran del mismo tamaño. Tuve que hacerlo a ojo. Estuve intentando usar una herramienta en la mesa que es un metro, pero no me servía para marcar puntos a distancias que necesitara.

Luego de trazar la última perpendicular, tuve un paralelogramo formado por el punto de intersección de las cuatro rectas. Con estos cuatro vértices, realicé en cada uno de ellos otra recta que fuera perpendicular a los dos segmentos que se unen en cada vértice. Nuevamente tuve el problema de que en cada una de estas nuevas rectas necesitaba poner un punto a la misma distancia de la medida del segmento inicial, pero no tenía herramienta para realizar esto. Puse un punto en un lugar aproximado. Acá nuevamente tuve el problema de que si ponía los puntos a distancias distintas, el cuadrilátero que se formaría no tendría sus cuatro puntos sobre el mismo plano, por lo que tendría que primero escoger un punto y luego sobre ese trazar perpendiculares a la otra recta. Al hacerlo las cuatro veces, tendría entonces otro paralelogramo igual que el primero.

Ahora, luego de tener todas las rectas y los ocho puntos de intersección, me dispuse a crear las caras que formarían mi "cubo". Cuando observé la figura e intenté manipularla para ver si realmente era un cubo robusto, me di cuenta de que no era un cubo, pues las medidas de sus lados no eran todas iguales. Aunque todos sus lados sí eran paralelos por parejas, la medida no era igual, lo cual es fundamental. Para este momento ya habían pasado aproximadamente 45 minutos, lo cual ya empiezo a sentir en el cansancio de los ojos. A veces intento resistir más tiempo, pero comienzo a sudar y a marearme, por lo que mejor terminé la sesión acá.

## **Sesión 6**

Para esta sesión quise hacer algo diferente con una compañera. Normalmente lo que hacemos es que transmitimos a una pantalla lo que se está viendo desde el visor de realidad virtual. En esta ocasión, mi compañera se pondría el visor y yo le enseñaría los comandos básicos que había aprendido a usar. La primera diferencia es que ella se sentó en el sofá. Esto fue algo no planeado, pues yo siempre me sentaba en la silla del computador, que tiene ruedas y gira, lo que ayuda a la movilidad sin estar de pie. Pienso que es menos traumático para el cuerpo estar sentado usando la realidad virtual. De pie, normalmente me mareo en menos tiempo o con algún movimiento fuerte, lo que provocaba en la mayoría de las ocasiones la salida automática de la realidad virtual. No le vi ningún inconveniente a que ella se quedara sentada en el sofá; al contrario, me llamó la atención cómo iba a funcionar la movilidad.

Inicialmente, le dije a mi compañera (Juliana) que intentara explorar la movilidad. Al igual que yo al principio, no entendía cómo se movía uno en el espacio virtual con los joysticks. Le indiqué que tenían dos tipos de movilidad diferente: uno era por medio de saltos y otro era el llamado movimiento de Superman. Con uno, cuando oprimías el joystick, salía una parábola que te indicaba dónde iba a ser la posición final del salto. Por otro lado, el movimiento con el otro joystick te daba el sentido, pero hacia donde estuvieras apuntando con la mano te daba la dirección. Ella en poco tiempo lo entendió y creo que el hecho de no estar en una silla con movimiento le pudo haber ayudado a evitar tratar de moverse en el espacio real, que es una de las primeras reacciones que tiene el cuerpo.

Luego de que ella aprendió a moverse, le indiqué que se acercara a la mesa de trabajo para que observara y tomara las herramientas. Después de un poco de exploración, le indiqué que con los mandos podría sacar dos tipos de menús: uno que te daba opciones para crear, mover y editar objetos, y otro que te daba acceso a configuraciones del programa. Le expliqué cuáles eran las funciones del primer menú, que se despliega con el botón A. Tiene seis opciones, cada una en una parte de un círculo y puede ser seleccionada con el joystick. La que está en la parte de arriba (a las 12 del reloj) es una función de editar. En sentido horario, las siguientes dos son de rotación y traslación de los objetos: uno sirve para desplazar los objetos sin rotarlos y el otro para trasladarlos rotándolos. En la parte de abajo se encuentra un pincel con el cual puedes realizar pinceladas en el espacio, y las siguientes dos son para crear caras de polígonos y para crear poliedros. También hay una función para borrar y deshacer lo hecho.

Después de explicarle cómo estaba compuesto el menú, le indiqué que seleccionara la herramienta de editar. Luego le dije que hiciera clic con el gatillo del control; al hacer esto apareció un punto en el espacio y ella empezó a sacar más puntos. Luego le dije que seleccionara un punto. Para esto, debía tener en cuenta la pequeña pirámide que hay en el espacio, que es la que permite seleccionar los elementos. Le solicité que seleccionara un punto haciendo clic con el gatillo y luego otro, manteniendo sostenido el clic después del primero. Ella hizo el intento un par de veces y, al realizarlo bien, se dio cuenta de que salía un segmento entre los dos puntos. Lo intentó nuevamente varias veces hasta que lo pudo dominar. En ese momento, le indiqué que sacara el menú y usara la herramienta de borrar para limpiar el espacio.

Cuando terminó, le pedí el favor de que hiciera tres puntos en el espacio. Ella los hizo y le indiqué que uniera todos los puntos con segmentos. Al hacer eso, se pudo dar cuenta de que la figura que tenía era un triángulo. Luego le indiqué que seleccionara en el menú la herramienta para hacer caras y que después seleccionara cada uno de los puntos haciendo clic con el gatillo en orden horario o antihorario. Luego de esto, el triángulo que tenía formado solo por segmentos ya tuvo una cara. Finalmente, le solicité que seleccionara la herramienta para trasladar girando los elementos y le pedí que cogiera el triángulo y lo observara.

Ella manipuló por un tiempo el triángulo. También le di la opción de que usara la herramienta editar para que pudiera cambiar la forma y tamaño. Después de dejarla explorando un momento, le dije nuevamente que limpiara y borrara todo. Luego de esto, le solicité que realizara un cubo con lo que había aprendido. Para este momento ya habían pasado aproximadamente 30 minutos y ella se estaba cansando, por lo que decidí quitarse el dispositivo.

## **Sesión 7**

Para esta sesión, nuevamente al ingresar, mi objetivo era poder realizar el cubo, ya que la última vez había logrado formar un paralelepípedo rectangular que estaba muy cerca de ser un cubo, pero no lo era. Por lo que me centré en explorar las

herramientas que tengo en la mesa y las usé una por una para ver cómo me podrían ayudar. Observo que tengo herramientas de reflexión, para hacer rectas paralelas, perpendiculares, para copiar objetos, para copiarlos y pegarlos con homotecia, un metro para medir, un borrador y un pincel para colorear. Finalmente, luego de probarlos todos, con el único que tuve problemas para aprender su funcionamiento fue con la herramienta de copiar y pegar objetos.

Explorando el menú de opciones del programa encontré una ventana donde mostraban las herramientas de la mesa y cómo era su funcionamiento. Observando este menú, me di cuenta de que no estaban todas las herramientas disponibles en mi mesa de trabajo en comparación con las que me mostraba el menú. Esta interacción no duró mucho tiempo, pues en ese momento recordé que para realizar un cubo es necesaria una igualdad de medidas y normalmente esa es una función que se cumple utilizando el compás en una herramienta como GeoGebra o con material concreto. Desafortunadamente, la licencia que tengo de Neotrie VR no tiene acceso a todas las herramientas, pues la que obtuve fue la más básica y personal. Luego de esto, me quité el dispositivo y le di paso a mi compañera para que realizara alguna exploración.

Ella, después de haber aprendido lo de la última sesión, se dispuso a realizar un cubo también, pero no tuvo en cuenta las propiedades del poliedro, por lo que lo que hizo fue unir los segmentos de cuatro puntos que parecían ser un cuadrado. Para realizar este cuadrado, me preguntó con qué herramienta se hacían las traslaciones de los objetos, a lo cual le indiqué que con la mano izquierda podría hacer el movimiento mientras con la derecha podría ir creando cosas. Esto se le dificultó mucho. Al principio no supe cuál era la dificultad, pero sí veía alguna incomodidad en ella. Luego de un tiempo, me di cuenta de que ella es zurda y maneja mucho mejor la mano izquierda, por lo que le indiqué que no importaba la mano, que podría entonces crear objetos con la izquierda y manipular los movimientos con la derecha, pues es el mismo menú para ambas.

Luego de que tuvo el cuadrilátero inicial y de entender que puede usar las herramientas con cualquiera de las manos, realizó otra cara del "cubo" poniendo un punto encima de uno de los vértices y uniéndolo con un segmento. Finalmente, puso otro punto más o menos encima de otro vértice colindante y más o menos a la misma altura del último punto puesto, para de esta manera unir el punto anterior con este

nuevo y el vértice del cuadrilátero con el nuevo punto. Así obtuvo una nueva cara del "cubo". De esta misma manera, poniendo dos puntos más, completó todas las caras. Intentó ponerle caras después a la figura con la herramienta de caras y finalmente intentó usar la de copiar y pegar de la mesa, ya que había visto que yo había tenido problemas con ella. Desafortunadamente, ella tampoco logró usarla bien, pues si bien se evidencia que los objetos son copiados y guardados, no fue posible pegarlos en el espacio. Luego de estar un tiempo en esta interacción, Juliana se cansa y se quita el dispositivo, aproximadamente 40 minutos después. Ella me manifiesta de manera recurrente que casi no le gusta entrar a la realidad virtual porque no es capaz de ver bien lo que proyecta el dispositivo, pues ve muy borroso y no es capaz de enfocar bien; por eso se mareaba más rápido.

## **Sesión 8**

Para esta sesión ya habíamos planeado explorar una actividad con el teorema de poliedros de Euler, por lo que mi objetivo fue realizar una exploración en torno a este teorema. Inicialmente quise comprobar si efectivamente funcionaba. Para iniciar, primero realicé un tetraedro en el espacio con puntos escogidos de tal manera que pudiera formarlos, para así poder contar sus caras, aristas y vértices.

El principal problema fue cómo establecer la cuenta, pues tenía un objeto en el espacio, pero no podía identificar bien cuáles elementos ya había contado y cuáles no. Por lo que decidí tomar la herramienta del pincel para pintar los vértices que ya había contado. El siguiente problema que identifiqué fue que, al momento de contar las aristas, olvidé cuántos vértices había contado, por lo que tuve la necesidad de tener algún bloc de notas o algo donde anotar la información recolectada.

Para solucionar este problema, pensé en usar la herramienta del pincel que hace trazos en el espacio y escribir los datos en tablas. Usando ahora herramientas como la de editar y trasladar los objetos con giro, pude manipular el tetraedro y tomarlo como si lo tuviera en la vida real, además de modificar en tiempo real su tamaño y hasta poder tener una perspectiva del objeto desde adentro. Esto, de alguna manera, me facilitó un poco el conteo. Tuve alguna dificultad al momento de contar las aristas, pues la precisión del dispositivo no era la suficiente y en muchas ocasiones,

en vez de seleccionar la arista, estaba seleccionando alguna de las caras, al punto que me tocaba agrandar el objeto para poder pintar bien.

Luego de hacer el conteo y escribir los datos, me dispuse a verificar el teorema. Efectivamente, para el tetraedro, se cumplía que el número de vértices más el número de caras menos el número de aristas es igual a dos. despues realicé un intento de paralelepípedo en el espacio y de igual manera conté los vértices, caras y aristas. Finalmente, comprobé nuevamente que el teorema funcionaba. Recordé que el teorema no funciona para poliedros no convexos, por lo que intenté realizar una figura no convexa para comprobarlo. La figura que realicé fue una especie de cuadrado al cual se le quita un cuadrado más pequeño de una esquina, quedando así una figura en forma de "L". Al realizar nuevamente el conteo de caras, vértices y aristas descubrí con sorpresa que este objeto también cumplía con el teorema de Euler. Me sorprendí mucho porque pensaba que no iba a cumplirlo. Para este momento ya habían pasado aproximadamente 45 minutos, por lo que ya me comenzaba a sentir muy cansado de los ojos y decidí salir de la realidad virtual.

## **Sesión 9**

Para esta sesión, la idea era trabajar en poliedros para lograr diseñar una actividad para los estudiantes que van a ser voluntarios para el estudio. Inicialmente, mi compañera Juliana ingresó a la plataforma y comenzó a realizar poliedros para verificar el teorema. Esta era su tercera vez en el programa NeoTrie VR. Rápidamente creó un tetraedro. Como ya había observado la forma como yo había contado y anotado los datos, ella lo replicó y comprobó el teorema para la primera figura, anotando los datos y haciendo las sumas y restas en el espacio con la herramienta del pincel. Luego hizo lo mismo con una figura de más vértices: agregó un vértice más a una de las caras del tetraedro, formando una pirámide de base cuadrada. De la misma manera, usando el pincel, contó los vértices, caras y aristas. Anotó los datos en el espacio, hizo las sumas y restas, y comprobó que funcionaba el teorema de Euler.

Nuevamente realizó otra figura agregando otro vértice. Lo que hizo fue igual que en la figura anterior: agregar un punto más a la base de la pirámide y obtuvo una pirámide de base de un pentágono irregular. Nuevamente contó y anotó los datos para

comprobar el teorema. En este punto, ella se quitó el dispositivo y mencionó que la tarea era muy fácil de resolver, que sí necesitaba de manipulación del objeto y observarlo desde diferentes ángulos para poder hacer el conteo.

Luego de esto, ingresé yo a la plataforma para realizar algo que se me había ocurrido. Pensé en ir agregando puntos en el espacio e ir formando polígonos y poliedros, uniendo los puntos con segmentos a ver qué resultaba. Inicié con un punto aleatoriamente al alcance de las manos. Observé que no podía hacer nada más que trasladarlo. Luego puse otro punto en otra parte aleatoria y creé el segmento que había entre ellos; nuevamente, no pude hacer nada más que trasladarlo y rotarlo. Agregué otro punto y uní los dos extremos del segmento que tenía al nuevo punto con otros dos segmentos. Acá pude observar que tenía el contorno de un triángulo y realicé la cara para formarlo. Luego de esto, puse otro punto en alguna parte y pensé que podía unir cada punto con el nuevo. De esta manera, todos los puntos estaban unidos con todos los puntos y observé que la figura que tenía era un tetraedro.

Luego puse otro punto en el espacio y nuevamente pensé en unir todos los puntos con ese nuevo punto. Después de hacer eso, para mí fue muy confuso saber bien cuál era la figura que tenía, pues ahora había segmentos dentro de la figura que formarían diagonales del poliedro. Borré estas diagonales para poder observar mejor el poliedro formado; era una especie de cubo deformado. Intenté agregar otro punto más para nuevamente unir todos los puntos a este nuevo punto y entre ellos, incluyendo los segmentos que había borrado. Para observar cuál era el poliedro que se formaba, en esta ocasión fue difícil identificar cuáles eran los segmentos que quedaban completamente en el interior. Comencé a crear caras en los polígonos que yo creía que serían las caras del poliedro. Realizando este ejercicio, pude observar que en una de las caras que había hecho salía levemente uno de los puntos. Tuve que coger la figura, manipularla y ponerla en perspectiva de tal manera que se pudiera ver que, efectivamente, había un punto que se salía del poliedro, por lo que tuve que redefinir las caras. Luego de determinar que todos los segmentos quedaban dentro, me dispuse a observar el poliedro desde adentro para borrar las diagonales. Para este punto ya habían pasado casi 40 minutos y nuevamente me empecé a sentir cansado de la visión, por lo que decidí quitarme el dispositivo.

### **Instrumentalización Material Concreto. (Estudiantes)**

Para desarrollar la actividad con material concreto se citó a los estudiantes (Juan, Karen y Paula) en una sala de estudio del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. Se dispuso una mesa de trabajo donde contaban con diversas herramientas y materiales: hojas de papel blanco, octavos de cartulina, papel transparente, regla, tijeras, lápices, marcadores, esferos, bisturí, colbón, pegante, plastilina de dos colores, palillos de cocina, un compás y una grapadora.

Luego de proporcionarles la hoja con la actividad consignada, los estudiantes realizaron una lectura rápida e inmediatamente se dispusieron a desarrollarla. Inicialmente, debían construir algunos elementos geométricos: una figura con un punto, una figura con dos puntos, una figura con tres puntos, una figura con cuatro puntos, con cinco y así sucesivamente. Las primeras figuras geométricas las realizaron usando papel y lápiz. Para la primera figura dibujaron un punto, para la segunda un segmento, para la tercera un triángulo y para la cuarta un cuadrado, tal como se sugería en la actividad. Hasta este momento, los estudiantes no tuvieron ninguna dificultad y parecían sentirse cómodos y sorprendidos por la facilidad con que realizaban la tarea.

Para la quinta figura, la actividad sugería formar un prisma o una pirámide de base cuadrada. Hasta ese punto, los estudiantes habían trabajado solo con lápiz y papel, sin vacilar. Sin embargo, para representar una figura en el espacio con cinco vértices tuvieron que analizar cómo podrían realizarla. La idea inicial fue utilizar cartulina y dibujar la red de la figura, pero esta opción fue descartada rápidamente, pues en la guía también se sugería el uso de plastilina como vértices y palillos como aristas. A los estudiantes les pareció que estas herramientas eran mucho más sencillas de manipular que realizar la red y luego ensamblarla.

Rápidamente lograron hacer el prisma con bolitas de plastilina y palillos, utilizando la plastilina como vértices de la figura y los palillos como aristas. En esta parte de la tarea los tres estudiantes comenzaron a trabajar en equipo: primero elaboraron la cantidad de bolitas necesarias (en este caso, seis) y, mientras uno de ellos moldeaba la plastilina, los otros dos iban armando la figura. Inicialmente acordaron hacer una pirámide con base cuadrada. Los estudiantes no se percataron de que, para esta

tarea, no era necesario que la base estuviera en el mismo plano; sin embargo, era evidente que en su construcción los cuatro puntos no se encontraban coplanares.

Después de tener la figura armada, los estudiantes procedieron a contar los vértices, aristas y caras. Se evidenció que tuvieron dificultades para contar las caras, pues perdían la referencia de ellas, quizá al no tenerlas representadas físicamente. Para la siguiente figura, realizaron otro punto con plastilina y le unieron cuatro palillos, intentando luego conectar las puntas de estos palillos a la base de la pirámide que ya habían construido, de manera que se formara una especie de octaedro "irregular". Al momento de pegar los palillos a la base, tuvieron muchas dificultades, ya que la figura se desarmaba al colocarla sobre la mesa debido a su propio peso. En ese momento, los tres estudiantes debieron intervenir simultáneamente para sostener la estructura y lograr que permaneciera firme hasta completar la tarea. Una vez terminada, realizaron el conteo de vértices, aristas y caras. Al igual que con la figura anterior, no tuvieron problemas para contar los vértices y aristas, pero sí presentaron dificultades con las caras por la falta de una referencia clara.

De manera similar, realizaron una especie de cubo; sin embargo, los ángulos en los vértices nunca fueron de 90 grados. Finalmente, efectuaron el conteo de los elementos del cubo.

Posteriormente, la tarea invitaba a reflexionar sobre la conjetura del teorema de Euler, pero los estudiantes no lograron encontrar ninguna relación entre el número de vértices, aristas y caras de un poliedro. La primera pregunta planteaba qué ocurría con estos elementos a medida que aumentaba el número de vértices. Los tres concluyeron que el número de vértices, aristas y caras aumenta cada vez que se agrega un vértice más. La siguiente pregunta buscaba determinar si existía alguna relación entre estos tres elementos, pero ninguno pudo identificar una.

Finalmente, la tercera pregunta hacía referencia a un objeto con nueve vértices: cuántas caras y aristas tendría. En este caso, los estudiantes tuvieron dificultades para elaborar la figura. Su idea fue construir una pirámide con base octagonal.

Primero realizaron la base octagonal con palillos y plastilina, pero al intentar unir cada vértice de la base con el noveno punto que formaría el vértice superior de la

pirámide, notaron que los palillos no alcanzaban, pues la base tenía un tamaño que superaba la longitud de dos palillos de extremo a extremo. Ante esto, Juan observó las herramientas disponibles en la mesa y notó que la bola grande de plastilina de donde habían tomado material podía servir. Se le ocurrió colocarla en el centro de la figura y pegar allí todos los palillos, logrando así completar la construcción y proceder al conteo de vértices, caras y aristas de la figura con nueve vértices.

En la siguiente parte de la tarea, la construcción se centraba en los poliedros regulares. Para el tetraedro, el cubo y el octaedro, los estudiantes usaron las figuras que ya habían elaborado, imaginando que correspondían a poliedros regulares, a pesar de las imperfecciones en su construcción. Antes de ello, necesitaron buscar en sus celulares imágenes de tetraedros y octaedros, y luego hicieron lo mismo con el dodecaedro y el icosaedro.

Con estas dos últimas figuras (dodecaedro e icosaedro) volvieron a tener problemas en la construcción. Tras reflexionar y buscar referencias en internet, decidieron realizarlas mediante redes en cartulina, que luego recortarían, doblarían y pegarían. En ese momento ya había transcurrido aproximadamente una hora y media desde el inicio de la actividad, y los estudiantes se encontraban cansados, por lo que decidieron dividir el trabajo: las dos chicas se encargaron del dodecaedro y Juan del icosaedro.

El procedimiento para elaborar las mallas fue distinto en cada caso. Las chicas intentaron calcar la malla, dibujando un pentágono regular en una hoja con regla y compás y luego replicando varios pentágonos unidos para formar la red del dodecaedro, que posteriormente recortaron, doblaron y pegaron. Juan, en cambio, observó una imagen del icosaedro en internet, realizó cálculos y midió los lados con regla y lápiz. Luego recortó la malla con bisturí, la dobló, la pegó con colbón y coloreó las aristas con diferentes tonos. En cada vértice marcó un punto con esfero y numeró las caras, completando así su tarea.

Se pudo notar que el trabajo de Juan fue más pulcro, pues realizó cálculos previos de medidas y puntos de intersección, mientras que las chicas calcaban los pentágonos a partir del primero, ubicando los siguientes según suposiciones. El problema de este método fue que no lograron ángulos perfectos en la malla, y al momento de

ensamblar la figura esta no encajaba bien, por lo que debieron forzarla con cinta adhesiva para poder completarla y así contar los vértices, aristas y caras.

En la parte final, los estudiantes no llegaron a conclusiones diferentes a las iniciales: cuanto más compleja es la figura, mayor es el número de vértices, aristas y caras. Sin embargo, no lograron establecer la relación propuesta por la conjetura del teorema de Euler.

### **Instrumentalización GeoGebra 3D (Estudiantes)**

A diferencia del material concreto, en el cual no hubo necesidad de una instrumentalización debido a que las herramientas utilizadas son aquellas que los estudiantes se suponen ya deberían saber manejar, para la aplicación de la tarea en GeoGebra sí fue necesaria una instrumentalización, puesto que la mayoría de los estudiantes no tenía conocimiento del programa o no lo había usado antes.

El propósito de esta actividad fue familiarizar a los estudiantes con el software GeoGebra 3D y explorar algunas funciones básicas de navegación y construcción en el entorno tridimensional. Para esta tarea se presentaron cinco estudiantes (Karen, Paula, Erika, Mariana y Tatiana). Inicialmente, debían ingresar al programa, activar la vista 3D y, con el ratón, manipular el espacio realizando rotaciones, traslaciones y zoom. En esta parte de la tarea era importante tener como referencia los ejes coordenados que muestra el programa y el plano formado por los ejes  $x$  y  $y$ .

Después de esto, los estudiantes debían formar un poliedro colocando vértices en coordenadas específicas y uniéndolos mediante segmentos. En la creación inicial de los puntos no hubo mayores dificultades; ellos mismos encontraron la herramienta de punto y exploraron cómo ubicar los puntos en el programa. Sin embargo, al momento de asignar coordenadas específicas surgieron dificultades, pues algunos de ellos (Karen y Paula) pudieron identificar cómo se movían los puntos en el plano  $xy$ , pero no lograron reconocer cómo desplazarlos en la coordenada  $z$ . Por ello, tuve que intervenir y mostrarles cómo mover los puntos en el eje  $z$  para luego ajustarlos en el plano  $xy$  a la altura correspondiente. También les indiqué que, en la parte inferior de

la pantalla, hay una barra donde pueden escribir directamente las coordenadas del punto para que este aparezca en el lugar indicado.

Con todos los estudiantes que asistieron fue necesario hacer esta explicación. La disposición del salón permitió que trabajaran en parejas: Karen y Paula, Erika y Mariana, mientras que Tatiana trabajó sola. Por lo tanto, tuve que hacer tres explicaciones. Primero, con Karen y Paula, quienes fueron las que más rápidamente realizaron la tarea; después, con Erika y Mariana, ya que presentaron la misma dificultad; y finalmente con Tatiana, quien, al estar sola, avanzó más despacio que las otras dos parejas.

Luego de ubicar los puntos en las coordenadas indicadas, los estudiantes debían unirlos con segmentos. En esta parte, la principal dificultad fue encontrar la herramienta de segmentos en el panel de herramientas. No obstante, después de mostrarles dónde se encontraba y tras una breve exploración, ellos mismos identificaron la herramienta y comprendieron su funcionamiento al hacer clic en los puntos que debían unir. Finalmente, los estudiantes construyeron el poliedro formado por los vértices indicados y, con él, realizaron una exploración aplicando zoom y rotando el objeto.

El primer grupo en terminar fue el de Karen y Paula, quienes casi no tuvieron inconvenientes en la exploración de las herramientas; únicamente presentaron dificultades al ubicar los puntos en las coordenadas específicas solicitadas. El grupo de Erika y Mariana también tuvo problemas al posicionar los puntos, pero al acercarme a explicarles, noté que estaban realizando toda la tarea en el plano: tenían un segmento ubicado en el plano  $xy$ , por lo que no estaba en el espacio tridimensional requerido. Ellas no habían identificado esta diferencia, por lo que, tras explicarles cómo levantar el punto en el eje zeta y cómo introducir directamente las coordenadas desde la barra de entrada, decidieron comenzar de nuevo, ya que habían comprendido la perspectiva espacial de GeoGebra.

En el caso de Tatiana, se demoró un poco más en realizar la actividad. Al ayudarle con la visualización y la ubicación de los puntos en el espacio, entendió cómo funcionaba la perspectiva del programa, mostrando gran entusiasmo al experimentar con cada una de las herramientas.

El tiempo de duración de la actividad fue más corto de lo esperado. El primer grupo (Karen y Paula) terminó la tarea en aproximadamente 15 minutos; el segundo grupo (Erika y Mariana) la completó en unos 20 minutos; y Tatiana finalizó en cerca de 30 minutos.

### **Aplicación de la tarea en GeoGebra. (Estudiantes)**

Para la aplicación de la tarea en GeoGebra se utilizó la sala de tecnología de la Universidad Pedagógica Nacional. En esta ocasión participaron los estudiantes Tatiana, Karen, Paula y Mateo. Tatiana y Mateo realizaron la tarea de manera individual, mientras que Paula y Karen trabajaron en pareja.

Para los tres grupos, la parte inicial de la tarea resultó muy fácil. Todos lograron construir un punto, un segmento y un triángulo en el plano de GeoGebra 3D utilizando las herramientas adecuadas —la de punto y la de segmento—. El problema surgió cuando debieron realizar los poliedros en el espacio.

Básicamente, las únicas herramientas que estaban utilizando eran las de punto y segmento, y la dificultad radicó en ubicar un punto fuera del plano principal en GeoGebra 3D. Aunque sabían cómo generar el punto fuera del plano, experimentaron una confusión visual al momento de construir la figura, ya que no lograban determinar con claridad si los puntos se encontraban dentro o fuera del plano.

La estudiante Nicoll solicitó ayuda para realizar una figura en el espacio. Le indiqué cómo crear un punto fuera del plano y cómo construir una figura uniendo los vértices de una base plana con ese punto elevado. Sin embargo, tuvo algunas dificultades con esta estrategia, pues no lograba identificar con certeza qué puntos estaban dentro y cuáles fuera del plano. Para ella, la tarea resultó un poco estresante y frustrante, ya que no conseguía formar correctamente la figura con cinco vértices en el espacio. Finalmente logró hacerlo, pero tuvo que retirarse antes de completar toda la actividad debido a un compromiso.

Para Karen y Paula, la realización de la tarea fue un poco más sencilla, probablemente porque trabajaron en pareja. También tuvieron dificultades al construir la figura de cinco puntos, pero por sí mismas llegaron a la misma estrategia que Tatiana: crear una pirámide con base en el plano de GeoGebra y un punto fuera de este plano, uniendo los vértices de la base con el punto superior.

Comenzaron a construir las figuras y a contar los elementos de las figuras de cuatro, cinco y ocho vértices. Sin embargo, al observar las imágenes, parecía que las figuras estaban en el espacio, pero al rotar el plano de GeoGebra se evidenció que todas las figuras estaban en realidad sobre el plano. Basadas en esa vista y en su imaginación, realizaron el conteo de vértices, caras y aristas.

Al responder la primera tanda de preguntas, no lograron encontrar ningún patrón específico al aumentar los vértices; simplemente escribieron que la cantidad de lados y aristas aumentaba cada vez que se agregaban más vértices.

En la segunda parte de la tarea, debían construir poliedros regulares como el tetraedro, el cubo, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro. Las estudiantes usaron internet en el mismo computador para observar cómo debían lucir estas figuras. Exploraron el programa y encontraron una herramienta que permite construir poliedros regulares, por lo que no tuvieron mayores inconvenientes. A diferencia de las figuras anteriores, en estas los poliedros aparecían con las caras coloreadas en rojo, lo cual facilitó el conteo de sus elementos. No obstante, al rotar las figuras, perdían la perspectiva de los elementos que ya habían contado.

A diferencia del trabajo con material concreto —donde los estudiantes podían marcar o colorear los elementos ya contados—, en GeoGebra no utilizaron ninguna herramienta para resaltar o identificar los componentes revisados. Al finalizar la tarea, no identificaron la conjetura del teorema de Euler; simplemente afirmaron que cada vez que se aumenta un vértice, también aumentan el número de caras y aristas. Además, mencionaron que los poliedros regulares tienen aristas de igual longitud y están formados por polígonos regulares, mientras que los irregulares presentan aristas de distintas medidas.

El estudiante Mateo también realizó la actividad de manera individual. Al igual que los otros grupos, para él fue sencillo realizar las primeras figuras —el punto, el segmento y el triángulo—. Sin embargo, al momento de determinar las características de las

dos primeras figuras, no se percató de que con un punto se tiene un vértice, y que con dos puntos se forma un segmento que posee dos vértices y una arista; en estas dos figuras colocó cero en todas las casillas de vértices, aristas y caras. En la figura del triángulo sí realizó correctamente la construcción y no tuvo mayores dificultades.

No obstante, también presentó problemas al realizar las figuras en el espacio. Su estrategia fue muy similar a la del grupo anterior: construyó en el plano la base de una pirámide con un polígono que tenía un vértice menos que el número solicitado, y luego añadió un punto en el interior de la figura. Posteriormente, unió los vértices de la base con ese punto y lo desplazó fuera del plano para formar la pirámide con el número de vértices solicitado. De esta manera, la tarea se le facilitó más que a los otros grupos, pues utilizó la herramienta de rotación del espacio 3D en GeoGebra para obtener distintas perspectivas de los objetos construidos.

En la primera parte de las reflexiones, Mateo también conjeturó que, a medida que aumentan los vértices, aumentan las aristas y las caras de la figura, coincidiendo con las conclusiones de Karen y Paula. En la siguiente parte de la tarea, utilizó internet para identificar los poliedros regulares que debía construir, y exploró las herramientas de GeoGebra para realizarlos. También recurrió a imágenes de internet para observar mejor las figuras y contar sus elementos.

Al encontrar la herramienta para construir poliedros, tuvo mayor facilidad para realizar el conteo de los elementos, ya que empleó la rotación y el cambio de perspectiva en GeoGebra para observar las figuras desde distintos ángulos. Finalmente, Mateo fue el único de los tres grupos que logró escribir correctamente la conjetura del teorema de Euler, aunque lo hizo después de consultar en internet la relación entre los elementos de los poliedros. Aun así, afirmó que dicha relación se mantiene tanto para poliedros regulares como irregulares, señalando que lo verdaderamente relevante es la cantidad de vértices.

### **Instrumentalización NeoTrie VR**

Para esta sesión, la actividad se realizó en la sala de tecnología de la Universidad Pedagógica Nacional. En este caso, la instrumentalización se llevó a cabo con cuatro

estudiantes: Felipe, Mateo, Paula y Karen. Cabe destacar que Paula y Karen ya habían realizado la misma actividad en los tres ambientes diferentes. Para esta ocasión, la intención era que los estudiantes experimentaran la realidad virtual y se familiarizaran con el software NeoTrie VR.

Inicialmente, se intentó hacer una familiarización con cada uno de ellos en el uso de la realidad virtual. Para esta ocasión se contaba con varias gafas de realidad virtual, pero no se disponía del televisor para transmitir y observar lo que los estudiantes estaban viendo dentro de la experiencia inmersiva.

Desafortunadamente, días antes se habían usado los dispositivos en un evento académico y las configuraciones habían sido restablecidas a los valores de fábrica. Esto impidió acceder a la cuenta con la licencia de NeoTrie VR, por lo que se decidió que los estudiantes se familiarizaran con la realidad virtual utilizando la aplicación Meta First Steps. Esta decisión se tomó porque había disponibilidad de varios dispositivos de realidad virtual al mismo tiempo, lo cual permitió organizar un primer acercamiento en parejas, cada estudiante con su propio dispositivo y en su propio entorno virtual.

La primera pareja fue Mateo y Karen. Ninguno de los dos había tenido experiencia previa con la realidad virtual, por lo que se les dieron indicaciones básicas de seguridad: evitar salir del espacio delimitado como seguro y, en caso de mareo, retirarse el dispositivo para descansar. Al colocarse los visores, los dispositivos estaban configurados en realidad combinada, de tal manera que los estudiantes podían ver el exterior mientras ingresaban a NeoTrie VR, que corresponde a un entorno completamente inmersivo.

La única indicación inicial que se dio a los estudiantes fue cómo abrir el menú e ingresar a la aplicación First Steps. Primero se les mostró qué botón del mando permitía desplegar el menú, en qué parte de este aparecían las aplicaciones y qué gatillo se utilizaba para navegar por ellas hasta ingresar a la aplicación deseada. A partir de allí, se dejó que cada estudiante explorara por su cuenta la experiencia de realidad virtual.

Para Mateo y Karen la experiencia fue realmente muy intuitiva. En esta aplicación se explica, de manera general, para qué sirve cada botón del mando a través de una serie de juegos y tareas. Inicialmente, los estudiantes visualizan una oscuridad completa y, a partir de un rayo de luz, se abre el espacio de la realidad virtual con una serie de imágenes y sonidos impresionantes. Al observar las expresiones de los estudiantes frente a lo amplio que puede llegar a ser el espacio en la realidad virtual, se evidencia el asombro por la experiencia.

Al ingresar a la aplicación, luego de la presentación inicial, se encuentran en un espacio donde hay una mesa con diferentes herramientas. Al interactuar con cada una de ellas, los estudiantes aprenden a usar los mandos en la realidad virtual. En la mesa de herramientas hay una pelota colgando de una cuerda, una raqueta de ping pong con algunas pelotas, una consola de videojuegos tipo retro con tres cartuchos, unos cubos de colores, un control remoto y un par de aviones de papel. Los cartuchos incluyen un juego de baile y uno de disparos.

Estas herramientas sirven principalmente para que los estudiantes se acostumbren al uso de la realidad virtual y a la manipulación de objetos. Por ejemplo, deben agarrar los aviones de papel y lanzarlos, lo que les enseña cómo coger las cosas dentro de este entorno. También deben tomar un control remoto virtual y manipularlo para mover un zepelín en la mesa, lo cual les muestra cómo usar herramientas dentro de la realidad virtual con los mandos en sus manos. Para insertar los cartuchos en la consola, los estudiantes necesitan precisión al realizar el movimiento. En uno de estos juegos, deben bailar con un robot y realizar algunos movimientos específicos, lo que les enseña a movilizarse dentro de la realidad virtual.

Luego de experimentar todos los elementos de la aplicación, Mateo se quitó el dispositivo y ayudó a Paula a ponérselo e ingresar a la experiencia. Inicialmente, Paula no tenía idea de cómo comenzar a manipular la realidad virtual, pero Mateo, quien acababa de vivir su primera experiencia, estuvo presto a colaborarle mientras ella comprendía el funcionamiento de los mandos e ingresaba a la aplicación. Una vez dentro, cada herramienta le sirvió para aprender a manipular el entorno.

De la misma manera, Karen se quitó el dispositivo y lo entregó a Felipe Calderón para que ingresara a la aplicación. A diferencia de Paula, Karen y Mateo, Felipe no requirió

de ninguna indicación, ya que estuvo atento a cómo lo hacían sus compañeros y, además, había tenido un acercamiento previo a la realidad virtual. Esto le facilitó mucho más el proceso de ingreso y manipulación de la aplicación.

En general, para ninguno de los cuatro estudiantes hubo mayores inconvenientes en el aprendizaje y manipulación de la realidad virtual. Finalmente, la experiencia resulta muy similar a la realidad, con algunas diferencias en cuanto a la manipulación de objetos, pues en la vida real se hace con las manos, mientras que en la realidad virtual se hace mediante los mandos. Sin embargo, las demás expresiones motrices y visuales son muy parecidas a las de la realidad, lo que hace que resulte mucho más familiar que otros programas o dispositivos.

Luego de esta sesión, en la que los estudiantes se familiarizaron con la realidad virtual e hicieron el tutorial que trae por defecto el sistema de las Meta Quest, se programó una segunda sesión para que se familiarizaran con el programa de geometría en realidad virtual inmersiva. En esta ocasión, los participantes fueron Karen, Paula, Mateo y un compañero de ellos, a quien dejamos ingresar a la actividad para que no se quedara solo sin nada que hacer.

Dado que la única cuenta con licencia de NeoTrie es la mía, la aplicación de la instrumentalización se realizaría de manera individual. La primera persona en utilizar el dispositivo fue Paula. Ella ya había ingresado a la realidad virtual en la sesión anterior y estaba familiarizada con el entorno de Meta y su metaverso, por lo que le resultó sencillo buscar e ingresar a la aplicación NeoTrie VR.

A diferencia de ocasiones anteriores, la instrumentalización de los estudiantes se llevaría a cabo esta vez de forma guiada. Esto se debía a que, en mi experiencia personal, había comprobado que el aprendizaje del software es mucho más rápido cuando se guía al estudiante paso a paso. En mi caso, necesité aproximadamente tres sesiones para aprender a manipular el programa de manera autónoma, mientras que mi compañera Juliana, en una única sesión guiada, logró manejarlo con gran destreza gracias a las instrucciones que recibió.

Lo primero que se hizo cuando Paula ingresó al programa fue dejarle un tiempo de exploración por sí sola. Ella preguntó si podía caminar y, al oprimir el joystick de la mano derecha, descubrió que podía desplazarse dentro del espacio virtual. Al acercarse a la mesa de trabajo de NeoTrie intentó agarrar un objeto, pero en su lugar apareció un punto. Al darse cuenta de que podía generar puntos en el espacio, comenzó a colocar varios a su alcance. Su reacción física inmediata fue intentar alejarse para observarlos desde otra perspectiva y, al acercarse nuevamente, trataba de esquivarlos.

Nuevamente intentó coger las herramientas de la mesa, pero no le fue posible porque estaba usando el botón inadecuado para hacerlo. Luego de un par de intentos logró agarrar algunas, aunque no supo cómo hacerlas funcionar. En algún momento, Paula utilizó una herramienta que, con los puntos, generaba automáticamente segmentos. Al parecer, se trataba de la función "extruir pirámide", una funcionalidad que yo no había visto antes en esta herramienta de NeoTrie.

Después de que ella construyera varios segmentos con dicha herramienta, le expliqué que con la herramienta "crear" podía generar un segmento seleccionando primero un punto y luego otro, como si fuesen los dos vértices del segmento. A partir de allí, Paula comenzó a crear y unir puntos con segmentos consecutivos, mostrando una gran agilidad en el proceso.

Al apretar el gatillo del dedo medio, Paula observó que los objetos se seleccionaban y decidió explorar qué sucedía con esta función. Seleccionó varios objetos hasta que, en cierto momento, seleccionó el letrero de NeoTrie y oprimió el gatillo. De esta manera, el letrero fue atraído hacia ella, lo que la tomó por sorpresa y provocó que hiciera un gesto de alejarse para protegerse. Después atrajo algunos de los poliedros que hay alrededor del letrero y, para evitar ocupar el mismo espacio que estos objetos virtuales, empezó a realizar movimientos en el espacio real.

A medida que los objetos se acumulaban en el espacio, Paula se movió tanto que terminó tropezando levemente con el compañero que la había acompañado a la sesión. Él la ayudó a ubicarse nuevamente en el centro del área delimitada, pero Paula exclamó que aún sentía que los objetos quedaban encima de ella. Ante esto, su

compañero le respondió que podía usar los joysticks para desplazarse en el espacio virtual, sin necesidad de moverse físicamente en el espacio real.

Luego, Paula utilizó la función para atraer las herramientas de la mesa, lo que le permitió agarrarlas de manera más sencilla. Tomó el borrador e intentó eliminar algunos de los elementos que había construido y que tenía cerca. Posteriormente, intervine para pedirle que realizara un triángulo. Ella, de inmediato, colocó tres puntos en el espacio y los unió entre sí con segmentos, formando rápidamente la figura.

A continuación, le expliqué que construiríamos una cara del triángulo. Para ello, le pedí que desplegara el menú de herramientas de la mano y seleccionara la herramienta de "caras". Al inicio tuvo dificultad, ya que se pasaba de la herramienta que deseaba debido a la sensibilidad del dispositivo. Finalmente, se le indicó que, con esta herramienta, debía seleccionar cada uno de los puntos del triángulo sin soltar el gatillo, de manera que pudiera crear la cara correspondiente.

Luego le expliqué que también tenía disponible en las manos una herramienta para agarrar objetos y le mostré en qué parte se encontraba, con el fin de que ella la utilizara.

Ella agarró la pirámide y la movió en el espacio, dejándola sobre su cabeza. Luego le indiqué si podía hacer una pirámide y, para ello, puso un punto en la parte inferior e intentó unir todos los vértices del triángulo a este nuevo punto, de modo que finalmente quedaran conectados. Después, le sugerí que construyera las caras que faltaban. Paula exclamó cuál era la herramienta, pero de inmediato lo recordó y la utilizó para completar las caras pendientes.

Al terminar de hacer las caras de la pirámide, se dio cuenta de que había puesto un punto de más justo en la esquina de uno de los vértices del triángulo inicial. Decidió rehacer la figura y le sugerí que usara la herramienta de eliminar de la mano. Ella pensó en utilizar el borrador, a lo que le respondí que también era adecuado. Paula intentó coger el borrador, pero al acercarse a la figura lo soltaba, de manera que tuvo que hacer varios intentos para acercarse con éxito.

Finalmente llegó a un punto en el que no podía acercarse más a la pirámide que había realizado, pues no lograba agarrar el borrador. Tras varios intentos, desistió y decidió usar otra parte del espacio virtual disponible para construir una nueva figura.

Se alejó del lugar virtual en el que se encontraba y se ubicó en un espacio completamente vacío. Allí volvió a realizar un triángulo, agregó un cuarto punto y unió todos los vértices del triángulo con este punto para formar un tetraedro. Luego le añadió las caras y lo observó; sin embargo, para hacerlo no utilizó la herramienta de mover objetos, sino que prefería desplazarse en el espacio real, usando muy poco los joysticks para moverse.

Paula no se percató de que solo había colocado tres caras a la figura. Sus compañeros, quienes observaban desde fuera de la realidad virtual lo que ella veía, la hicieron notar que le faltaba una cara. Ella se movió para tratar de identificar cuál era la que faltaba, pero la falta de contraste en el color no le permitió distinguirla. Sus compañeros intervinieron nuevamente para indicarle cuál era; Paula lo negaba diciendo que no, pero ellos insistieron en que sí. Finalmente le sugirieron que probara a crearla y, cuando lo hizo, comprobó que efectivamente había faltado una cara.

Después de esto sí utilizó la herramienta para mover objetos y observó la figura desde otras perspectivas, agarrándola con las manos en la realidad virtual. Cabe señalar que, por algún motivo, Paula realizaba la mayoría de las figuras en la parte superior del espacio, lo que la obligaba a inclinarse y estirarse para ejecutar la mayor parte de los movimientos y acciones dentro del programa.

Finalmente, Paula vio la herramienta del pincel y se puso a dibujar en el espacio corazones y a escribir los nombres de las personas que nos encontrábamos en el salón. Luego de esto, Paula ya había cumplido los objetivos de la instrumentalización y realizó la misma tarea en los dos ambientes.

A continuación, el turno fue para Karen. Antes de ponerle los dispositivos me aseguré de salir y reiniciar el programa, y le entregué el dispositivo desde el home de Meta. También se le dieron las indicaciones de cómo ingresar a la aplicación y no hubo mayor problema al respecto. Cuando ingresó a la aplicación de NeoTrie, su primera

reacción fue acercarse a la mesa de trabajo, pero preguntó: "¿Cómo hago para moverme?". Luego se le dieron las indicaciones para moverse con los joysticks de ambas manos.

Ella se acercó a la mesa de trabajo e intentó agarrar alguno de los objetos de la mesa. Inicialmente logró agarrarlo, pero inmediatamente lo soltó. Al intentar agarrarlo de nuevo comenzaron a salir puntos en el espacio. Después de que estuvo un tiempo corto explorando y sacando puntos, le expliqué cómo debía hacer para sacar segmentos haciendo click con el gatillo en ambos puntos. Ella inmediatamente comenzó a unir puntos con segmentos y, por su propia cuenta, armó un tetraedro. Paula y el compañero que la acompañaba le ayudaron a crear las caras del tetraedro.

Karen preguntó si era posible modificar los puntos, entonces le explicamos que, si usaba la herramienta de la mano de edición, podría modificar los puntos y la figura que había armado, moviendo cada punto uno por uno. Luego observó la mesa de trabajo y quiso coger la herramienta del pincel y la tabla de colores que estaban sobre la mesa. Intentó agarrar el pincel y la tabla de colores, pero se le dificultó sostener la herramienta y acercarse al poliedro que había hecho para pintarlo de otro color. Ella se acercó con dificultad a la figura e intentó usar el pincel para pintar las caras del poliedro que había formado.

Finalmente, se acabó el tiempo que podíamos estar usando el laboratorio, por lo que Mateo no pudo realizar una instrumentalización y dejamos la sesión para otro día.

## **Aplicación de la tarea en NeoTrie VR (Estudiantes)**

### **Caso Mateo**

En el caso de Mateo, él no tuvo la experiencia directa de participar en la sesión de Realidad Virtual Inmersiva (RVI) durante la instrumentalización del grupo de VR, aunque sí estuvo presente y observó cómo sus compañeros utilizaban la aplicación. Para la realización de la tarea, Mateo primero quiso explorar el programa durante un tiempo antes de comenzar formalmente. Ya había visto cómo sus compañeros

manipulaban el entorno, por lo que rápidamente comprendió cómo generar segmentos y figuras en el espacio.

Una vez que Mateo consideró que dominaba las herramientas básicas necesarias, comenzó la tarea. Sin embargo, de inmediato surgió la primera dificultad: NeoTrie VR es un programa de realidad inmersiva, por lo que, al estar dentro del entorno virtual, el usuario pierde la percepción del espacio físico real. Esto significaba que Mateo no podía ver la guía de trabajo mientras usaba el visor. Para leerla, debía acercarse físicamente a la mesa donde la tenía y levantarse las gafas, lo cual debía hacer repetidamente, ya que se concentraba en una parte de la guía y luego olvidaba el siguiente paso.

En una de esas ocasiones, Mateo comentó: "Eso mareo mucho". Cada vez que se acercaba a la mesa donde estaba la guía, salía de la zona segura que delimita el programa al inicio de la sesión. Al salir de esa zona, en el visor se observa cómo el usuario traspasa el límite del entorno seguro y se empieza a ver el espacio real. Para poder trabajar más cómodamente, Mateo redefinió el límite de la zona segura de modo que quedara cerca de la mesa real donde tenía la guía. Así, desde una misma posición, podía colocarse las gafas para entrar en la realidad virtual y trabajar, y luego quitárselas para leer o escribir en la hoja.

Como la imagen de lo que veía Mateo se estaba transmitiendo en un televisor, el dispositivo permanecía activo incluso cuando él se quitaba las gafas. Esto le permitió usar una estrategia bastante ingeniosa: sostenía el visor con una mano, apuntando hacia el lugar que quería observar en el entorno virtual, mientras con la otra mano escribía en la guía real, observando en el televisor la figura y los datos que había generado. De esta manera, alternaba entre la realidad virtual y la realidad física para construir las figuras y registrar los elementos correspondientes.

Esta dinámica funcionó durante varios minutos y resultó ser una solución creativa para superar la dificultad de alternar entre ambos entornos. Sin embargo, comenzó a presentar un problema práctico: al quitarse las gafas y manipular el lápiz para escribir en la hoja, Mateo golpeaba accidentalmente los dispositivos, especialmente los mandos, contra la mesa donde tenía la guía. Por ello, le sugerí que redefiniera nuevamente el límite del espacio en el centro del área y que utilizara la herramienta

de pincel de trazos de la aplicación —que se controla con las manos— para escribir directamente los elementos de las figuras dentro del entorno virtual. De esa manera, evitaría quitarse el visor y reduciría el riesgo de golpear los controladores.

Tras ajustar el espacio, Mateo continuó la tarea sin salir de la realidad virtual, escribiendo directamente en el aire los nombres y elementos de cada figura. Al realizar el conteo del primer objeto, observó que el "punto" generado por NeoTrie no era un punto propiamente dicho, sino una figura tridimensional que, según el ángulo de observación, parecía un octaedro, un dodecaedro o un exaedro. Esta confusión se debía a la falta de sombras y contraste en el programa.

Mateo creó un primer punto, luego otro, los unió mediante un segmento sin dificultad y posteriormente generó un tercer punto, uniéndolos con segmentos para formar un triángulo. Con la herramienta de creación de caras, añadió la superficie del triángulo con facilidad, mostrando gran naturalidad en el uso del programa, pese a ser su primera experiencia directa (aunque había observado previamente a sus compañeros).

Durante el conteo de vértices, caras y aristas de las primeras figuras, Mateo cometió un error de interpretación: consideró el punto como una figura con ocho vértices, seis caras y doce aristas. En consecuencia, al realizar figuras más complejas —como un segmento con dos puntos— registró dieciséis vértices, doce caras y veinticinco aristas. Con el triángulo anotó veintisiete vértices, veinte caras y treinta y nueve aristas, y así continuó con el tetraedro, lo que le generó una gran cantidad de cálculos y complicó la tarea.

Mateo utilizaba el espacio real para moverse y cambiar las perspectivas de las figuras sin manipular directamente los objetos creados. Contaba, calculaba y escribía dentro del entorno virtual, hasta que se cansó y decidió descansar unos minutos antes de continuar.

Después de la pausa, se colocó nuevamente los dispositivos y, ya con un plan de acción definido, realizó rápidamente todas las figuras que faltaban. Ubicó los objetos cerca unos de otros para poder observarlos y compararlos con facilidad.

Aun cuando ahora escribía en el espacio virtual con el pincel de trazos, ocasionalmente debía salir de la realidad virtual para consultar la guía de trabajo. En esta fase, parecía sentirse más cómodo y ágil para construir las figuras en 3D.

Finalmente, para transcribir los registros escritos con el pincel en el entorno virtual, Mateo volvió a usar su estrategia inicial: se quitó las gafas, apuntó con las manos hacia los lugares donde estaban los datos en el espacio virtual y utilizó la imagen proyectada en el televisor para copiar los resultados en la guía.

Evidentemente, para Mateo fue muy difícil formular la conjetura del teorema de Euler, ya que la cantidad de elementos que había contabilizado en las figuras no era la correcta. Esto se debió a que, desde el principio, no interpretó los puntos generados por NeoTrie como puntos geométricos, sino como poliedros tridimensionales, tal como se visualizan en el programa.

### **Caso Mariana**

Para esta sesión se tenía previsto que asistieran Karen y Paula, pues ellas fueron las que inicialmente participaron en la instrumentalización en realidad virtual. Sin embargo, no pudieron asistir por motivos personales, por lo que en esta sesión estuvieron Erika y Mariana, quienes nos habían acompañado en la sesión de instrumentalización de GeoGebra. Para este caso realizaríamos una instrumentalización guiada e intentaríamos aplicar la tarea en la misma sesión.

La primera persona en ingresar a la realidad virtual fue Mariana, a quien se le dispuso una silla para que usara la realidad virtual sentada en medio del salón.

Antes de iniciar, se le indicó cómo funcionaban los botones y los joysticks de los controladores. La primera instrucción fue que ingresara a la aplicación NeoTrie; se le dieron las indicaciones para entrar y, cuando ya estaba en la aplicación, se le dejó un momento para que explorara. Inicialmente, y sin cambiar de posición, comenzó a hacer clic con el gatillo del dedo índice, y empezaron a aparecer puntos en el espacio. Ella empezó a sacar muchos puntos en el espacio cercano que tenía.

En ese momento le di una indicación y le pedí que seleccionara un punto. Ella no supo cómo escoger los puntos y preguntó cómo hacerlo. Le indiqué que en las manos virtuales tenía una pequeña pirámide con la que debía seleccionar los objetos haciendo clic cuando la pirámide estuviera tocando el elemento. Le pedí que seleccionara dos puntos para que apareciera un segmento. Ella lo intentó, pero tuvo que hacer varios intentos para poder generar un segmento. Después de esto, comenzó a unir varios puntos con segmentos. Como tenía muchos puntos acumulados, le indiqué que podía usar la herramienta para eliminar elementos. Le expliqué que debía abrir el menú con el botón "A" y seleccionar la herramienta de eliminar para borrar los elementos creados. Mariana empezó a crear segmentos y puntos con una mano y, con la otra, iba borrando algunos de los elementos que estaba elaborando, hasta formar un hexágono. En ese momento se preguntó qué pasaba si borraba un punto del hexágono y notó que también se borraba el segmento que unía ese punto con otro.

Luego observó la mesa y preguntó cómo podía llegar hasta allí. Le indiqué que podía desplazarse usando los joysticks para acercarse a la mesa. Ella intentó moverse hacia la mesa usando los joysticks, ya que no tenía libertad de movimiento físico porque estaba sentada en la silla. Inicialmente logró acercarse a la mesa de trabajo dentro de la realidad virtual, pero no entendía muy bien cómo era que se movía en ese espacio virtual. En ese momento le expliqué que, si movía el joystick, se desplazaba en la dirección hacia donde apuntaba con la mano.

Cuando se acercó a la mesa, su primera reacción fue tomar el pincel y la paleta de colores. Le expliqué que, con el gatillo del dedo medio, podía agarrar las herramientas de la mesa. Ella quiso pintar cosas, así que le indiqué que realizara un triángulo. Le señalé en qué parte del menú estaba la herramienta de "caras" y le expliqué cómo podía usarla para generar la cara del triángulo y luego pintarla. Mariana tomó la paleta y el pincel y pintó el triángulo de rosado. En ese momento le pregunté si era capaz de hacer una pirámide, y ella dijo que sí, que con cinco puntos la podía hacer.

Inicialmente hizo un cuadrilátero y luego puso un punto encima para poder formar la pirámide. Después de esto, y con mucha agilidad, le puso caras a la pirámide. En ese momento le indiqué que existía una herramienta para agarrar las figuras y poder

rotarlas y manipularlas mejor. Ella pudo rotar la pirámide y poner todas las caras para después pintarlas una por una.

Luego de esto, Mariana intentó agarrar algunas herramientas de la mesa para usarlas. Tomó el metro para medir, y le indiqué que, cuando tuviera la herramienta agarrada, debía accionarla con el otro gatillo al mismo tiempo.

Después de esta exploración, Erika le indicó que realizara algunos elementos para completar la tarea. Desafortunadamente, Erika tenía un problema en la voz, por lo que yo tuve que apoyar con las indicaciones. Primero le pregunté a Mariana cuántos vértices, aristas y caras tenía una figura formada por un punto. Ella creó un punto en el espacio y mencionó que eso era un hexágono. Erika le comentó que eso era un punto, pero que se veía como un poliedro. Mariana mencionó que el primer elemento solo tenía un punto, cero caras y cero aristas.

Luego, con dos puntos, los unió con un segmento y dijo que había dos puntos y dos aristas, pero corrigió rápidamente preguntando qué eran las aristas. Le contesté que las aristas eran los segmentos que unen los vértices de un poliedro. Inmediatamente corrigió y mencionó que la figura con dos puntos tenía entonces dos vértices, un segmento y cero caras.

Luego creó otro punto, unió los tres con segmentos y le puso cara al triángulo para formar una figura con tres puntos. Dijo que tenía tres vértices, tres aristas y una cara. Para la figura con cuatro puntos, realizó un cuadrilátero y no pensó en una figura en tres dimensiones. Mencionó que tenía cuatro vértices, cuatro aristas y una cara. Yo le pregunté si no podía hacer una figura en 3D como una pirámide, pero ella respondió que la pirámide se hace con cinco puntos.

Después realizó la pirámide, pero solamente usando segmentos y vértices; en esta ocasión no le puso las caras. A partir de esa pirámide comenzó a contar los elementos. Primero mencionó que tenía cinco vértices y, teniendo la pirámide en el espacio, empezó a contar los elementos señalándolos uno por uno. Para contar las caras, simplemente se las imaginó y las fue contando según la figura que veía.

Luego le pregunté qué figura haría con seis vértices. Ella realizó un cuadrilátero y agregó dos puntos sobre el cuadrilátero, formando una especie de prisma triangular sin las caras. Al momento de unir los puntos con segmentos, también unió puntos con segmentos que formaban diagonales dentro del poliedro. Dijo que, para seis vértices, luego intentó contar las aristas, pero tuvo que hacerlo dos veces porque en la primera se perdió, ya que perdió la referencia de los vértices que ya había contado. Finalmente contó doce aristas, pues había unido cada uno de los puntos con los otros. Al momento de contar las caras, tuvo dificultad porque estaba considerando como caras los polígonos formados por las diagonales internas del poliedro. En esta ocasión fue más difícil identificar las caras porque ella creía que muchas de esas diagonales definían caras, y no podía visualizarlas bien. Le recomendé entonces generar las caras con la herramienta para ver si identificaba que las diagonales no formaban caras. Sin embargo, ella puso caras con la herramienta también en las figuras que se formaban por las diagonales. Hizo solo algunas caras formadas por las diagonales y comenzó a contarlas, llegando a la conclusión de que la figura tenía nueve caras.

Luego, la actividad pedía un poliedro con ocho puntos. Mariana se alejó del lugar en el que estaba en NeoTrie para buscar un espacio vacío donde pudiera realizar la figura. Construyó una especie de prisma rectangular, pero, igual que en la ocasión anterior, también puso los segmentos que formaban las diagonales del prisma rectangular. Le pregunté por qué realizaba las diagonales y si esas diagonales formaban caras del poliedro. Ella me respondió que no, pero que esas eran las aristas que se podían hacer, lo que mostró un problema en la comprensión del concepto de arista. Ella contó las aristas y mencionó que tenía veinticuatro aristas, ocho puntos y quince caras, pero luego dijo que más o menos quince caras porque se había perdido contando. Repitió el conteo y mencionó que había dieciocho caras, pues contó cada uno de los polígonos que se formaban como si fueran caras de la figura. Aparentemente, estaba pensando en las caras y los vértices que se podían construir, más que en las caras y vértices propios del poliedro formado.

Después de terminar con esta figura, Mariana mencionó que ya estaba cansada de la vista, por lo que se quitó el dispositivo para que siguiera el turno de Erika.

## Caso Erika

Al igual que Mariana, Erika se ubicó en medio del salón, en una silla dispuesta para que trabajaran la realidad virtual sentadas. Al igual que con Mariana, se le dio primero un espacio para que explorara sola. Erika ya había visto cómo había trabajado Mariana y, además, en poco tiempo Mariana le indicó cuáles eran los botones más importantes: el gatillo para activar las herramientas y el botón para sacar el menú desde las manos. Por eso, apenas inició, Erika empezó inmediatamente a sacar puntos en el espacio y a usar el menú de herramientas para seleccionar algunas.

Primero realizó un segmento, observó las herramientas que tenía en la mano y comenzó a probar la movilidad. Realmente parecía que ya hubiera usado realidad virtual, porque rápidamente logró dominar el movimiento dentro de la aplicación NeoTrie. En su exploración hizo un triángulo y le puso una cara. En este caso no fue necesario darle instrucciones, porque ya le había advertido a Erika que observara cómo lo hacía Mariana para saber cómo se manejaban los controles.

Al poner los segmentos del triángulo, por falta de precisión en su primera vez con el dispositivo, no logró ubicar exactamente los puntos y creó un punto muy cercano a uno de los vértices del triángulo, de modo que al finalizar la construcción el triángulo tenía un segmento extra en uno de los lados. Erika agarró el triángulo con la mano y con la herramienta de rotar, y se dio cuenta del error cometido en la construcción. Inmediatamente usó la herramienta de eliminar para borrar el punto extra y el segmento, y dejó finalmente un triángulo con su respectiva cara.

Luego, con ese triángulo, intentó realizar una pirámide de base cuadrada. Usó el triángulo como referencia y, en el lado inferior del triángulo, puso otros dos puntos al frente para unirlos con segmentos y de esa manera construir la base cuadrada de la pirámide sin mover el triángulo. Finalmente unió los vértices de la base con el otro punto del triángulo para así formar la pirámide. Después usó la herramienta de caras y la de rotación para ir poniendo las caras de la pirámide. Erika tomó la pirámide y la movió para tener diferentes perspectivas y notó que le faltaba una cara: la cara inferior. Lo notó porque al levantar la figura y mirarla por debajo se podía ver el interior de la pirámide; se alcanzaban a observar segmentos que no deberían verse si la cara

inferior estuviera puesta. Luego comenzó a eliminar punto por punto, observando cómo desaparecían también las caras de la pirámide.

Erika continuó explorando la aplicación y, en el siguiente caso, comenzó a realizar un cuadrilátero, pero con la particularidad de que los vértices del cuadrilátero estaban ubicados en posiciones alejadas, y ella tenía que moverse dentro de la realidad virtual para poder unir los puntos con segmentos. Esto mostró cierta experticia en dominar el movimiento en NeoTrie a pesar de ser la primera vez que lo usaba. Finalmente, con este cuadrilátero, realizó un "cubo" irregular. Comenzó a visualizar el objeto y fue agregando puntos y segmentos que luego unió a ese cubo para formar una estructura más compleja.

Luego de esta exploración, que duró aproximadamente 20 minutos, nos dispusimos a describirle la tarea para que realizara las figuras en NeoTrie y contara los elementos de cada una. Inicialmente se le indicó que realizara una figura en 3D con cuatro puntos. Ella pensó un momento e hizo cuatro puntos en el espacio, para luego unirlos con segmentos formando de esta manera un tetraedro irregular. Le preguntamos cuántos vértices, aristas y caras tenía. Para contar las aristas, usó las manos virtuales y fue señalando cada arista una por una. Dijo que tenía seis aristas, cinco vértices, y luego se dispuso a contar las caras generándolas con la herramienta de caras y contándolas una por una. Mencionó que tenía cuatro caras.

Luego se le pidió que realizara una figura de cinco puntos. Primero borró todos los elementos del tetraedro irregular y comenzó a ubicar los puntos de la nueva figura. Esta vez, con más facilidad, lo que hizo fue ubicar cuatro puntos aproximadamente en el mismo plano y un quinto punto por debajo de esos cuatro, casi en la mitad, pero más abajo, ubicado fuera del plano de los otros. Finalmente unió todos los puntos con segmentos, formando así una pirámide de base cuadrada invertida. Le puso las caras una por una. Al momento de poner la última cara, era un poco complicado saber cuál era la que faltaba: solo se podía identificar que faltaba una cara porque se veían, desde el otro lado, segmentos que no deberían verse si la cara estuviera puesta. Luego realizó el conteo de los elementos, afirmando que había cinco vértices, cinco caras y ocho aristas.

Después se le indicó que realizara una figura con seis puntos, y la solución que propuso fue muy similar a la de Mariana: puso dos puntos encima de un cuadrilátero y los unió con segmentos para formar una especie de prisma triangular. Sin embargo, en este caso ella no unió todos los segmentos exteriores y tomó uno de los segmentos diagonales del prisma triangular, lo que cambiaba la figura a un poliedro convexo en el que había aristas del objeto que no se pusieron explícitamente en la figura construida por Erika. Ella comentó que había seis vértices, nueve aristas y cuatro caras.

Finalmente, Erika ya se encontraba cansada en esta parte de la sesión y tuvimos que terminar la actividad de realidad virtual. Se quitó los dispositivos y revisaron la información para intentar formular una conjetura. Sin embargo, la información que tenían no era adecuada para conjeturar algo más elaborado, y lo único que pudieron proponer es que, a medida que aumentan los puntos, aumentan los lados y las caras.

## Anexo 7



Paula Mojica, Karen Villarraga

Propuesta Actividad

En GeoGebra 3D, construya los siguientes elementos, registrando en la tabla sus características.

Utilizando las herramientas de GeoGebra, dibuja los siguientes elementos en el espacio y completa la tabla

Un punto

Dos puntos (Conéctalos con un segmento)

Tres puntos (Intenta formar un triángulo)

Cuatro puntos (Puedes hacer una pirámide o un cuadrado)

Cinco puntos (Pirámide, prisma o tetraedro)

Ocho puntos (Cubo o prisma)

Construcción	Vértices (V)	Caras (C)	Aristas (A)
Un punto	1	0	0
Dos puntos	2	0	1
Tres puntos	3	1	3
Cuatro puntos	4	4	6
Cinco puntos	5	5	8
Ocho puntos	8	6	12

Responde las siguientes preguntas:

- ¿Qué ocurre con la cantidad de vértices, aristas y caras a medida que agregamos puntos y formamos poliedros más complejos? *Aumenta*
- ¿Puedes identificar algún patrón en los valores de V, C y A?
- ¿Cuántas aristas, caras y vértices crees que tendría un poliedro con 9 vértices?

*Vértices = 9  
Caras = 9  
Aristas = 16*

Complete la siguiente tabla con las características de cada poliedro

Poliedro	Vértices (V)	Caras (C)	Aristas (A)
Tetraedro	4	4	6
Cubo	8	6	12
Octaedro	6	8	12
Dodecaedro	20	12	30
Icosaedro	12	20	30

- ¿Qué ocurre con la cantidad de vértices, aristas y caras a medida que agregamos puntos y formamos poliedros más complejos? *Aumenta*
- ¿Puedes identificar algún patrón en los valores de V, C y A?
- ¿Hay algún cambio de las características entre las figuras regulares e irregulares?

*F. regulares = Tienen todos sus lados iguales*

*F. irregulares = Tienen sus lados de distinta medida*

Mateo Sánchez Martínez

Propuesta Actividad

En GeoGebra 3D, construya los siguientes elementos, registrando en la tabla sus características.

Utilizando las herramientas de GeoGebra, dibuja los siguientes elementos en el espacio y completa la tabla

Un punto

Dos puntos (Conéctalos con un segmento)

Tres puntos (Intenta formar un triángulo)

Cuatro puntos (Puedes hacer una pirámide o un cuadrado)

Cinco puntos (Pirámide, prisma o tetraedro)

Ocho puntos (Cubo o prisma)

Construcción	Vértices (V)	Caras (C)	Aristas (A)
Un punto	0	0	0
Dos puntos	0	0	0
Tres puntos	3	1	3
Cuatro puntos	4	4	6
Cinco puntos	5	5	8
Ocho puntos	8	6	12
Nueve puntos	9	9	16

Responde las siguientes preguntas:

- ¿Qué ocurre con la cantidad de vértices, aristas y caras a medida que agregamos puntos y formamos poliedros más complejos? *Sus valores aumentan, hay más.*
- ¿Puedes identificar algún patrón en los valores de V, C y A?
- ¿Cuántas aristas, caras y vértices crees que tendría un poliedro con 9 vértices?

$V=9, C=9, A=16$

Complete la siguiente tabla con las características de cada poliedro

Poliedro	Vértices (V)	Caras (C)	Aristas (A)
Tetraedro	4	4	6
Cubo	8	6	12
Octaedro	6	8	12
Dodecaedro	20	12	30
Icosaedro	12	20	30

- ¿Qué ocurre con la cantidad de vértices, aristas y caras a medida que agregamos puntos y formamos poliedros más complejos? *V = aumentan y disminuyen, C = aumentan, A = aumentan, disminuyen*
- ¿Puedes identificar algún patrón en los valores de V, C y A? *Las A son la suma de C y V menos 2.*
- ¿Hay algún cambio de las características entre las figuras regulares e irregulares?

*No, ya que importa la cantidad de puntos y segmentos mas no la medida de cada segmento.*



Propuesta de Actividad

Instrucciones:

Construya los siguientes elementos con material concreto. Puede usar recortes de cartulina y unir los vértices con pegamento o con bolitas de plastilina y palillos para formar las aristas. Registre en la tabla sus características:

- Un punto (representado con plastilina o dibujado)
- Dos puntos (conéctalos con un segmento de cartulina o palillo)
- Tres puntos (forma un triángulo plano)
- Cuatro puntos (forma un cuadrado o una pirámide con base triangular)
- Cinco puntos (intenta formar un prisma o una pirámide)
- Ocho puntos (forma un cubo o prisma rectangular)

Tabla de registro

Construcción	Vértices (V)	Caras (C)	Aristas (A)
Un punto	1	0	0
Dos puntos	2	0	1
Tres puntos	3	1	3
Cuatro puntos	*4/4	*4/1	*6/4
Cinco puntos	5	5	8
Ocho puntos	8	6	12

\* Pirámide (Tridimensional) / Cuadrado (Plano)

Preguntas:

- ¿Qué ocurre con la cantidad de vértices, aristas y caras a medida que agregamos puntos y formamos poliedros más complejos? Rta: Aumentan
- ¿Puedes identificar algún patrón en los valores de V, C y A? Rta:
- ¿Cuántas aristas, caras y vértices crees que tendría un poliedro con 9 vértices? Rta: vértices: 9 Caras: 14 Aristas: 21

Construcción de poliedros regulares

Utiliza plantillas o desarrolla tus propias redes (net) en cartulina para construir los siguientes poliedros regulares. Luego completa la tabla con sus características:

Poliedro	Vértices (V)	Caras (C)	Aristas (A)
Tetraedro	4	4	6
Cubo	8	6	12
Octaedro	6	8	12
Dodecaedro	30	12	30
Icosaedro	12	20	30

- ¿Qué ocurre con la cantidad de vértices, aristas y caras a medida que construyes poliedros más complejos? Rta: Aumentan
- ¿Identificas algún patrón? Rta:
- ¿Qué diferencias encuentras entre figuras regulares e irregulares? Rta:
- Formula en tus propias palabras una conjetura sobre la relación entre vértices, aristas y caras en poliedros convexos. (Rta: piensa en la relación de Euler)

Karen Sofia Villarraga Celis / 13-05-25



**Propuesta de Actividad**

**Instrucciones:**

Construya los siguientes elementos con material concreto. Puede usar recortes de cartulina y unir los vértices con pegamento o con bolitas de plastilina y palillos para formar las aristas. Registre en la tabla sus características:

- Un punto (representado con plastilina o dibujado)
- Dos puntos (conéctalos con un segmento de cartulina o palillo)
- Tres puntos (forma un triángulo plano)
- Cuatro puntos (forma un cuadrado o una pirámide con base triangular)
- Cinco puntos (intenta formar un prisma o una pirámide)
- Ocho puntos (forma un cubo o prisma rectangular)

**Tabla de registro**

Construcción	Vértices (V)	Caras (C)	Aristas (A)
Un punto	1	0	0
Dos puntos	2	0	1
Tres puntos	3	1	3
Cuatro puntos	4/4	4/1	6/4
Cinco puntos	5	5	8
Ocho puntos	8	6	12

**Preguntas:**

- ¿Qué ocurre con la cantidad de vértices, aristas y caras a medida que agregamos puntos y formamos poliedros más complejos? *RTA: Aumenta*
- ¿Puedes identificar algún patrón en los valores de V, C y A?
- ¿Cuántas aristas, caras y vértices crees que tendría un poliedro con 9 vértices? *9 vértices, 14 caras, 21 aristas*

**Construcción de poliedros regulares**

Utiliza plantillas o desarrolla tus propias redes (net) en cartulina para construir los siguientes poliedros regulares. Luego completa la tabla con sus características:

Poliedro	Vértices (V)	Caras (C)	Aristas (A)
Tetraedro	4	4	6
Cubo	8	6	12
Octaedro	6	8	12
Dodecaedro	20	12	30
Icosaedro	12	20	30

- ¿Qué ocurre con la cantidad de vértices, aristas y caras a medida que construyes poliedros más complejos? *RTA: Van aumentando según la complejidad*
- ¿Identificas algún patrón?
- ¿Qué diferencias encuentras entre figuras regulares e irregulares?
- Formula en tus propias palabras una conjetura sobre la relación entre vértices, aristas y caras en poliedros convexos. *(relación de Euler)*

*Paula Morica / 13-05-25*

Juan Jose Samiento Vanegas



UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL  
Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

Trabajo de Grado  
2025-01

Luis Felipe Parra Molina

Propuesta de Actividad

Instrucciones:

Construya los siguientes elementos con material concreto. Puede usar recortes de cartulina y unir los vértices con pegamento o con bolitas de plastilina y palillos para formar las aristas. Registre en la tabla sus características:

- Un punto (representado con plastilina o dibujado)
- Dos puntos (conéctalos con un segmento de cartulina o palillo)
- Tres puntos (forma un triángulo plano)
- Cuatro puntos (forma un cuadrado o una pirámide con base triangular)
- Cinco puntos (intenta formar un prisma o una pirámide)
- Ocho puntos (forma un cubo o prisma rectangular)

Tabla de registro

Construcción	Vértices (V)	Caras (C)	Aristas (A)
Un punto	1	0	0
Dos puntos	2	0	1
Tres puntos	3	1	3
Cuatro puntos	4	4	6
Cinco puntos	5	5	8
Ocho puntos	8	6	12

Preguntas:

- ¿Qué ocurre con la cantidad de vértices, aristas y caras a medida que agregamos puntos y formamos poliedros más complejos? *Aumentan las V, C, A.*
- ¿Puedes identificar algún patrón en los valores de V, C y A? *No logro identificar ningún patrón :(*
- ¿Cuántas aristas, caras y vértices crees que tendría un poliedro con 9 vértices?

$V=9, C=14, A=21$

Construcción de poliedros regulares

Utiliza plantillas o desarrolla tus propias redes (net) en cartulina para construir los siguientes poliedros regulares. Luego completa la tabla con sus características:

Poliedro	Vértices (V)	Caras (C)	Aristas (A)
Tetraedro	4	4	6
Cubo	8	6	12
Octaedro	6	8	12
Dodecaedro	20	12	30
Icosaedro	12	20	30

- ¿Qué ocurre con la cantidad de vértices, aristas y caras a medida que construyes poliedros más complejos?
- ¿Identificas algún patrón?
- ¿Qué diferencias encuentras entre figuras regulares e irregulares?
- Formula en tus propias palabras una conjetura sobre la relación entre vértices, aristas y caras en poliedros convexos. (Pista: piensa en la relación de Euler)

\*Al hacer un cuadrado tendría 4 vértices, 1 cara y 4 aristas, siendo esta figura una figura plana.

