



**UNIVERSIDAD PEDAGOGICA  
NACIONAL**

*Educadora de educadores*

UN ACERCAMIENTO AL CONCEPTO DE DERIVADA, POR MEDIO DE  
CONSTRUCCIONES DE LA RECTA TANGENTE COMO LUGAR  
GEOMÉTRICO.

**Nataly Arango Sáenz**

Universidad Pedagógica Nacional  
Facultad de Ciencias y Tecnología  
Licenciatura en Matemáticas  
Bogotá  
2021

UN ACERCAMIENTO AL CONCEPTO DE DERIVADA, POR MEDIO DE  
CONSTRUCCIONES DE LA RECTA TANGENTE COMO LUGAR  
GEOMÉTRICO.

**Nataly Arango Sáenz**

Tesis de grado presentada como  
requisito para optar por el título de  
Licenciada en Matemáticas

**Asesor:**

**Gil Alberto de Jesús Donado Nuñez**  
Prof. Departamento de Matemáticas UPN

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA  
NACIONAL

*Educadora de educadores*

Universidad Pedagógica Nacional  
Facultad de Ciencias y Tecnología  
Licenciatura en Matemáticas  
Bogotá  
2021



FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

## ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Presentados y aprobados el documento escrito y la sustentación del Trabajo de Grado titulado "UN ACERCAMIENTO AL CONCEPTO DE DERIVADA, POR MEDIO DE CONSTRUCCIONES DE LA RECTA TANGENTE", elaborado por la estudiante NATALY ARANGO SÁENZ, identificada con el Código 2013240001 y Cédula 1075658793, el equipo evaluador, abajo firmante, asigna como calificación **treinta y seis (36)** puntos.

El mismo equipo evaluador recomienda la siguiente sugerencia de distinción:

Ninguna  Meritoria  Laureada

El Trabajo de Grado, presentado como monografía, constituye un requisito parcial para optar al título de **Licenciado en Matemáticas**.

En constancia se firma a los quince (15) días del mes de septiembre de 2021.

Mg. GIL ALBERTO DE JESÚS DONADO NÚÑEZ  
Director del Trabajo de grado

Mg. JORGE EDGAR PÁEZ ORTEGÓN  
Jurado del Trabajo de grado

Mg. ORLANDO AYA CORREDOR  
Jurado del Trabajo de grado

# Agradecimientos

A la Universidad Pedagógica Nacional que me brindó la oportunidad de crecer tanto personal como intelectualmente y además me dio la fuerza suficiente para trabajar por todos los sueños que tengo y deseo hacer realidad. Agradezco también a todos los miembros de la comunidad educativa que hicieron de mi paso por la universidad una de las mejores experiencias de mi vida. Quiero hacer también, un espacio en este párrafo para agradecer a mi familia, ya que gracias a ellos soy quien soy y especialmente a mi mamá quién siempre me apoyó sin importar cuan grandes fuesen mis locuras, por ultimo y no menos importante, a mis amigos y compañeros Edwin Yesid Cita Alvarez y Daniel Eduardo Silva Amazo, gracias por aguantar mi mal genio y por todas las chocoaventuras, espero compartir con ustedes muchas más.

Gracias.

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA  
NACIONAL

*Educadora de educadores*

# Resumen

El presente trabajo de grado es una propuesta que sigue la teoría acerca de las situaciones didácticas (TSD) trabajada por (Brousseau, 1986). Además está inspirado por el trabajo de (Tellechea y Robles, 2013), el cual se enfocó en motivar la enseñanza del concepto de derivada a partir de construcciones geométricas de la recta tangente, tomando como ejemplo la función  $f(x) = x^2$ . En el presente trabajo quise generalizar esta idea y abordar funciones de la forma  $x^n$ , con  $n \in \mathbb{Q}$ , esto con el fin de capturar la atención de los estudiantes de una forma mas visual y que al momento de explicar que la derivada de una función es la pendiente de la recta tangente, el estudiante logre comprender de una mejor manera esta definición.

También se puede apreciar en este trabajo, una marcada referencia histórica proveniente de grandes matemáticos como Apolonio, Fermat y Descartes, quienes abordaron la construcción de la recta tangente a partir de construcciones geométricas, estas construcciones me sirvieron como fundamento para el diseño de las actividades que son mencionadas en el cuerpo de este trabajo.

## Palabras claves

Recta tangente, pendiente de una recta, derivada

*Educadora de educadores*

# Índice general

<b>1. Referentes conceptuales</b>	<b>14</b>
1.1. Aproximaciones al concepto de derivada . . . . .	14
1.1.1. Apolonio . . . . .	15
1.1.2. El método de las tangentes de Fermat . . . . .	17
1.1.3. El método de las tangentes de Descartes . . . . .	19
1.2. Algo de historia de la geometría . . . . .	22
<b>2. Referentes didácticos</b>	<b>23</b>
2.1. Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) . . . . .	24
2.1.1. Aprendizaje por adaptación . . . . .	24
2.1.2. Situación didáctica y situación a-didáctica . . . . .	25
2.2. Visualización . . . . .	26
2.2.1. La vinculación de la visualización con los sistemas semióticos de representación . . . . .	28
2.2.2. La visualización como estrategia para la comprensión . . . . .	30
2.3. TIC'S en el aula . . . . .	30
<b>3. Diseño de Actividades</b>	<b>33</b>
3.1. Elementos claves para el diseño de las actividades . . . . .	33
3.1.1. Clasificación de actividades . . . . .	34
3.1.2. Clasificación de los tipos de evaluaciones . . . . .	35
3.2. Secuencias de Actividades . . . . .	36
3.2.1. Actividad 1 . . . . .	36
3.2.2. Actividad 2 . . . . .	39
<b>4. Metodología y análisis de resultados</b>	<b>50</b>
4.1. Puesta en escena . . . . .	51
4.2. Análisis prueba piloto . . . . .	51
4.2.1. Intervención prueba piloto . . . . .	51

4.2.2. Análisis prueba piloto . . . . .	53
4.2.3. Intervención Actividad grupal y análisis . . . . .	57
<b>A. Problemas de Apolonio</b>	<b>64</b>
<b>B. La recta tangente para otras funciones</b>	<b>81</b>
B.1. Construcción de la tangente para $f(x) = e^x$ . . . . .	82
B.2. Construcción de la tangente para $f(x) = \ln(x)$ . . . . .	84
B.3. Comparación entre la tangente para $f(x) = e^x$ y de la $f(x) = \ln(x)$ . . . . .	85
Referencias . . . . .	86



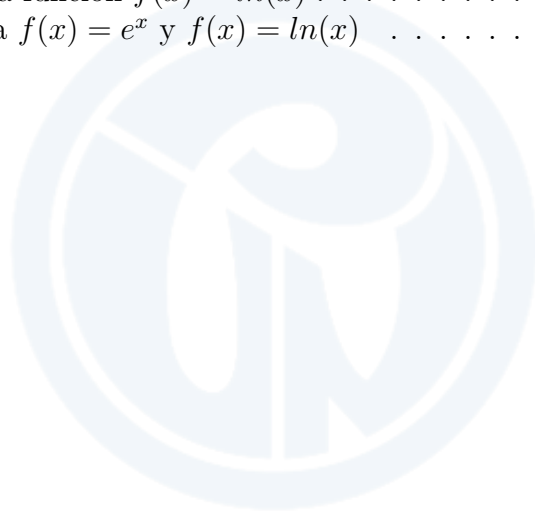
UNIVERSIDAD PEDAGOGICA  
NACIONAL

*Educadora de educadores*

# Índice de figuras

1.	El método de las tangentes de Descartes . . . . .	11
1.1.	El método de las tangentes de Apolonio . . . . .	16
1.2.	El método de las tangentes de Fermat . . . . .	18
1.3.	Demostración El método de las tangentes de Fermat . . . . .	19
1.4.	Tangente por Descartes . . . . .	20
2.1.	Áreas visuales corticales. . . . .	28
2.2.	Rectas tangentes a $f(x) = x^3$ . . . . .	29
3.1.	Ejemplo actividad 1 . . . . .	37
3.2.	Ejemplo actividad 1 (Parte 1) . . . . .	37
3.3.	Punto 1; actividad 1 (Parte 2) . . . . .	38
3.4.	Punto 1; actividad 1 . . . . .	39
3.5.	Punto 2; actividad 1 . . . . .	39
3.6.	Punto 1; actividad 2 . . . . .	41
3.7.	Punto 1 Pendiente de la recta; Actividad 2 . . . . .	43
3.8.	Punto 2 (caso 1); actividad 2 . . . . .	45
3.9.	Punto 2 (caso 2); actividad 2 . . . . .	46
3.10.	Actividad 2, $f(x) = \sqrt{x}$ . . . . .	47
A.1.	PPP, Problema 1 de Apolonio . . . . .	64
A.2.	PPR, Problema 2 de Apolonio, (caso 1) . . . . .	65
A.3.	PPR, Problema 2 de Apolonio, (caso 2) . . . . .	66
A.4.	PPR, Problema 2 de Apolonio, (caso 3) . . . . .	67
A.5.	RRR, Problema 3 de Apolonio, (caso 1) . . . . .	68
A.6.	RRR, Problema 3 de Apolonio, (caso 2) . . . . .	69
A.7.	PPC, Problema 4 de Apolonio, (caso 1 los puntos son externos) . . . . .	70
A.8.	PPC, Problema 4 de Apolonio, (caso 1 los puntos son internos) . . . . .	70
A.9.	PPC, Problema 4 de Apolonio, (caso 2 punto externo) . . . . .	71

A.10.PPC, Problema 4 de Apolonio, (caso 2 punto interno) . . . . .	72
A.11.RRP, Problema 5 de Apolonio, (caso 1) . . . . .	73
A.12.RRP, Problema 5 de Apolonio, (caso 2) . . . . .	73
A.13.RRP, Problema 5 de Apolonio, (caso 3) . . . . .	74
A.14.PRC, Problema 6 de Apolonio, (caso 1) . . . . .	75
A.15.PRC, Problema 6 de Apolonio, (caso 2) . . . . .	76
A.16.PRC, Problema 6 de Apolonio, (caso 3) . . . . .	77
A.17.CCP, Problema 7 de Apolonio, (caso 1) . . . . .	79
B.1. Tangente de la función $f(x) = e^x$ . . . . .	82
B.2. Tangente de la función $f(x) = \ln(x)$ . . . . .	84
B.3. Tangente para $f(x) = e^x$ y $f(x) = \ln(x)$ . . . . .	85

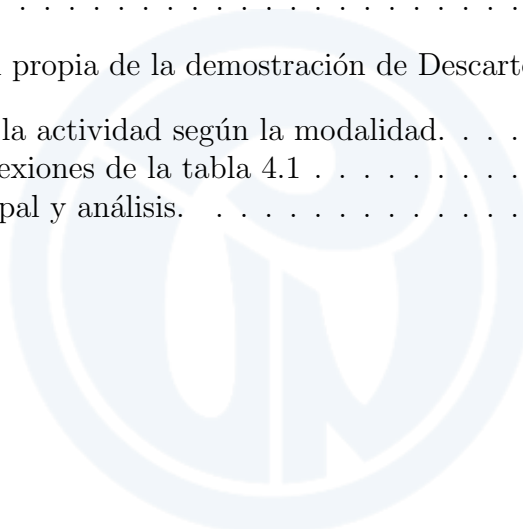


UNIVERSIDAD PEDAGOGICA  
NACIONAL

*Educadora de educadores*

# Índice de cuadros

1. Glosario. . . . .	13
1.1. Interpretación propia de la demostración de Descartes. . . . .	21
4.1. Momentos de la actividad según la modalidad. . . . .	53
4.2. Análisis y reflexiones de la tabla 4.1 . . . . .	56
4.3. Actividad grupal y análisis. . . . .	60



UNIVERSIDAD PEDAGOGICA  
NACIONAL

*Educadora de educadores*

# Introducción

El cálculo diferencial es una de las materias principales en los currículos universitarios para carreras como la ingeniería, economía y por supuesto, matemáticas. No obstante, los estudiantes presentan dificultades en la comprensión de los conceptos abordados durante el estudio de dicha materia, sobre todo en los cursos de educación media académica y en los primeros semestres de su vida universitaria, más aún con el manejo de la definición de derivada. Así lo menciona (Mendoza, Alemán, y Nieves, 2017), afirmando que la mayoría de los estudiantes logran dominio para hacer cálculos operativos a la hora de encontrar derivadas, pero difícilmente logran interpretar el significado de los procesos que realizan.

Pensando en una estrategia para acercar más a los estudiantes con la definición de derivada, se me ocurrieron un par de actividades que usan la visualización como recurso para acercarse a esta definición, sin abordar el concepto de límite explícitamente, es decir, aunque la derivada se puede definir como un límite, también pretendo mostrar que no es necesario hacerlo explícito, y podemos llegar a la definición mediante construcciones geométricas de la recta tangente, reduciendo así el uso de métodos analíticos propios del álgebra. Surge así la idea de crear actividades que favorezcan la comprensión del concepto de derivada como pendiente de la recta tangente mediante la visualización, adaptando el trabajo realizado por (Tellechea y Robles, 2013), el que encontré gracias a un ejercicio propuesto por el profesor Guayambuco en el curso de cálculo diferencial, esto inicia en mi el deseo de investigar y profundizar sobre la definición de derivada vista como la pendiente de la recta tangente. Topándome así con las construcciones de las rectas tangentes realizadas por Descartes, los problemas de tangencia de Apolonio y la aproximación a la tangente por medio de rectas secantes de Fermat.

En el trabajo de (Tellechea y Robles, 2013), aplican el método de Descartes para hallar la recta tangente a la gráfica de la función  $f(x) = x^2$ , cosa que me llamó mucho la atención y me generó intriga, preguntándome si ¿se podría generalizar el método

y aplicarlo a más funciones? La respuesta es sí, y el resultado es el presente trabajo.

Hablando un poco de las actividades que propongo, debo decir que estas fueron pensadas para ser aplicadas en un entorno tradicional de un aula de clase, es decir de forma presencial, sin embargo, fue necesario modificarlas debido a la emergencia sanitaria a nivel mundial causada por el COVID-19, siendo estas, implementadas de manera remota, haciendo uso de un software libre llamado GeoGebra, el cual facilitó el desarrollo de las actividades. Es de aclarar, que no es indispensable el uso de TIC'S ya que como dije anteriormente, inicialmente fueron pensadas para un entorno de presencialidad.



UNIVERSIDAD PEDAGOGICA  
NACIONAL

*Educadora de educadores*

# Justificación

Antes del surgimiento del cálculo diferencial, el estudio de rectas tangentes a curvas, dieron lugar a un tipo de cálculo enteramente libre del concepto de límite. Fue en la teoría de Descartes, R. (1664), donde se afirmó que “para hallar la normal a una curva algebraica en un punto  $A$ , se debe tomar un segundo punto variable sobre la curva  $B_i$ , luego, buscar la ecuación de la circunferencia con centro en el eje de coordenadas  $D_i$ , que contenga a los dos puntos, igualando entonces a cero el discriminante de la ecuación que determina las intersecciones de la circunferencia con la curva, se puede hallar el centro de la circunferencia tal que coincide con  $A$  conocido el centro, pueden determinarse fácilmente tanto la normal como la tangente a la curva por este punto”. Ver figura 1.

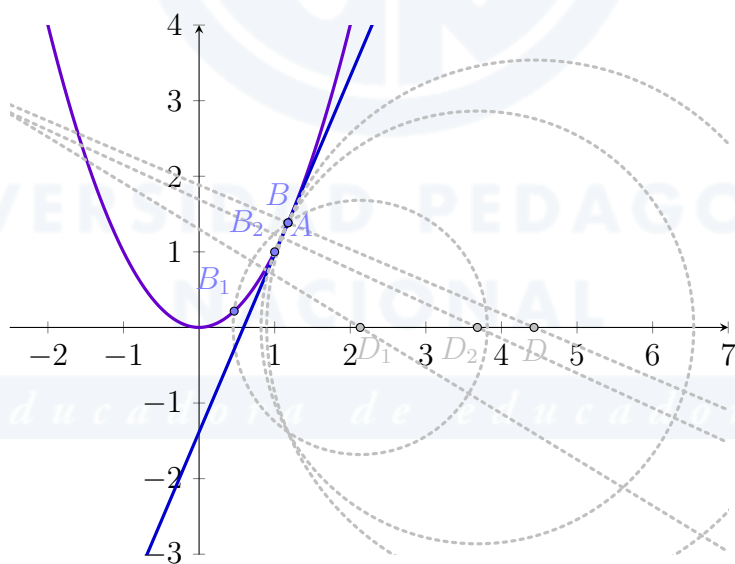


Figura 1: El método de las tangentes de Descartes

Utilizando lo anterior como fundamento (Tellechea y Robles, 2013), mostró que es posible encontrar la derivada de la función  $f(x) = x^2$  a partir de construcciones geométricas de la recta tangente, esto es una opción diferente a lo que tradicionalmente se enseña en la escuela, que es la introducción del concepto de derivada a partir de la definición de límite y su desarrollo conceptual, es netamente algebraico y aplicado en problemas concretos; la propuesta de (Tellechea y Robles, 2013) presenta una buena alternativa para la introducción de este concepto, construyendo la tangente a la función  $f(x) = x^2$ , en cualquier punto de esta sin necesidad de conocer el valor de la derivada de la función.

Como afirma (Camargo y Acosta, 2012), la geometría es un factor que unifica varias ramas de las matemáticas ya que tiene muchos recursos de visualización que permiten trabajar conceptos tanto geométricos como aritméticos y algebraicos. Apoyándome en esto, pretendo introducir el concepto de derivada en los estudiantes utilizando construcciones geométricas de la recta tangente, con el objetivo de que con esta visualización logren una buena comprensión de dicho concepto y se les facilite el trabajo posterior de profundización en el tema de derivadas.

## Objetivo general

Introducir el concepto de derivada, haciendo uso de construcciones geométricas de la recta tangente para funciones de la forma  $f(x) = x^n$ , con  $n \in \mathbb{Q}$ .

## Objetivos específicos

- \* Generalizar el método empleado por (Tellechea y Robles, 2013) para construir rectas tangentes a funciones de la forma  $f(x) = x^n$
- \* Proponer actividades para el aula donde se construya el concepto de derivada, prescindiendo en lo posible de los cálculos algebraicos y reglas de derivación.
- \* Hacer uso de construcciones geométricas para visualizar las derivadas como pendientes de las rectas tangentes.

# Glosario

A continuación se presenta un glosario con los símbolos geométricos que serán utilizados en el presenta trabajo para facilitar su lectura y comprensión.

Glosario de algunos símbolos en geometría	
Definición	Símbolo
1. Punto $A$	$A$
2. Recta que va desde el punto $A$ al punto $B$	$\overleftrightarrow{AB}$
3. Segmento que va desde el punto $A$ al punto $B$	$\overline{AB}$
4. Distancia del punto $A$ al punto $B$	$AB$
5. La recta $l$ paralela a la recta $m$	$l \parallel m$
6. La recta $l$ perpendicular a la recta $m$	$l \perp m$
7. Segmento $AB$ congruente al segmento $CD$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$
8. Ángulo con vértice en $O$	$\angle EOF$
9. Circunferencia con centro en $O$ y radio $OB$	$\odot O, OB$
10. Cuadrilátero con vértices en los puntos $A, B, C,$ y $D$	$\square ABCD$
11. Triángulo con vértices en los puntos $A, B,$ y $C$	$\triangle ABC$

Cuadro 1: Glosario.

*Educadora de educadores*

# Capítulo 1

## Referentes conceptuales

### 1.1. Aproximaciones al concepto de derivada

El cálculo es un instrumento técnico que sirve para abordar múltiples problemas presentes en diferentes campos, por ejemplo: en la física, astronomía, ingenierías, química entre otros, siendo una de las grandes conquistas intelectuales de la humanidad; contribuyendo con una colección vasta de ideas, que han fascinado la mente humana durante los últimos siglos.

Es asombroso ser consciente de todo el conocimiento necesario que se debe desarrollar en las personas y en la sociedad para dar lugar al nacimiento de una nueva idea, teoría o incluso una nueva ciencia, (Ruiz, 2002) afirma que, el cálculo formaliza conceptos y métodos que la humanidad estuvo tratando de dominar por más de veinte siglos. Una larga lista de personas trabajaron con los métodos infinitesimales pero hubo que esperar hasta los siglos XVII y XVIII, para que el inglés Isaac Newton (1642 - 1727) y el alemán Gottfried Leibniz (1646 - 1716), con sus aportes, diesen un paso firme y fundamental en el uso de dichos métodos, permitiendo tener la madurez social, científica y matemática para hablar del cálculo que utilizamos en nuestros días; aunque ellos son conocidos como los padres del cálculo diferencial, fueron solo un peldaño en una larga lista de pensadores y matemáticos que viene desde muchos siglos atrás, entre esos grandes pensadores se realizará la mención de algunos de sus trabajos que son relevantes para esta investigación:

### 1.1.1. Apolonio

Como lo hace notar (Urbaneja, 2017), Apolonio nació en (Perga, 262 A.C, Alejandría, 190 A.C.), fue el tercer gran matemático de la Grecia clásica, sucesor de Euclides y Arquímedes, se le atribuyen la creación de los nombres de elipse, parábola e hipérbola.

#### Los 10 problemas de tangencia

Los problemas de Apolonio fueron propuestos y resueltos en la obra  $\text{Επαφαί}$ , (Eπαφαί, Tangencias). Aunque esta obra se perdió, se conserva una referencia a ella en un manuscrito redactado en el siglo  $IV$  por Papo de Alejandría. Citando a (Urbaneja, 2017) los 10 problemas se enuncian de la siguiente forma: "Dados tres objetos, un punto, una recta o una circunferencia, construir una circunferencia que sea tangente a los tres objetos dados, o que los contenga en el caso de los puntos". Así, llamando  $C$  la circunferencia,  $R$  a la recta y  $P$  al punto, a continuación se describen los problemas, en el Anexo A (puede ver la construcción de algunos problemas y sus casos).

1. PPP. Dados tres puntos no colineales, construir una circunferencia que los contenga.
2. PPR. Dados dos puntos y una recta, construir una circunferencia tangente a la recta y que contenga a los dos puntos.
3. RRR. Dadas tres rectas, construir una circunferencia tangente a ellas.
4. PPC. Dados dos puntos y una circunferencia, hallar la circunferencia que contenga a los dos puntos y sea tangente a la circunferencia.
5. RRP. Dadas las rectas  $l$  y  $k$  y el punto  $A$ , construir una circunferencia que sea tangente a las dos rectas y que contenga al punto.
6. PRC. Dado un punto, una recta, y una circunferencia, hallar la circunferencia que sea tangente a la recta y a la circunferencia dadas y contenga el punto.
7. PCC. Hallar una circunferencia que sea tangente a dos circunferencias dadas y pase por un punto.
8. RRC. Construir la circunferencia que sea tangente a dos rectas y una circunferencia dadas.

9. RCC. Construir una circunferencia tangente a otras dos circunferencias y una recta.
10. CCC. Construir una circunferencia que sea tangente a tres circunferencias dadas.

Con los anteriores 10 problemas, los cuales fueron concebidos después de su trabajo con las secciones cónicas, Apolonio empezó a trabajar en la tangencia de estas, llegando entonces a la generalidad de la que hablaremos a continuación.

### La tangente a la parábola de Apolonio

Si se tiene una parábola con vértice  $v$ ,  $H$  un punto cualquiera de ella y se desea construir la recta tangente a esta por el punto  $H$ , es necesario encontrar el punto  $S$  sobre el eje de simetría de la parábola de tal manera que se cumpla que  $EV = VS$  donde, el punto  $E$  es la proyección del punto  $H$  sobre el eje de simetría Ver 1.1. Para su demostración se realiza una construcción auxiliar la cual se describe como sigue:

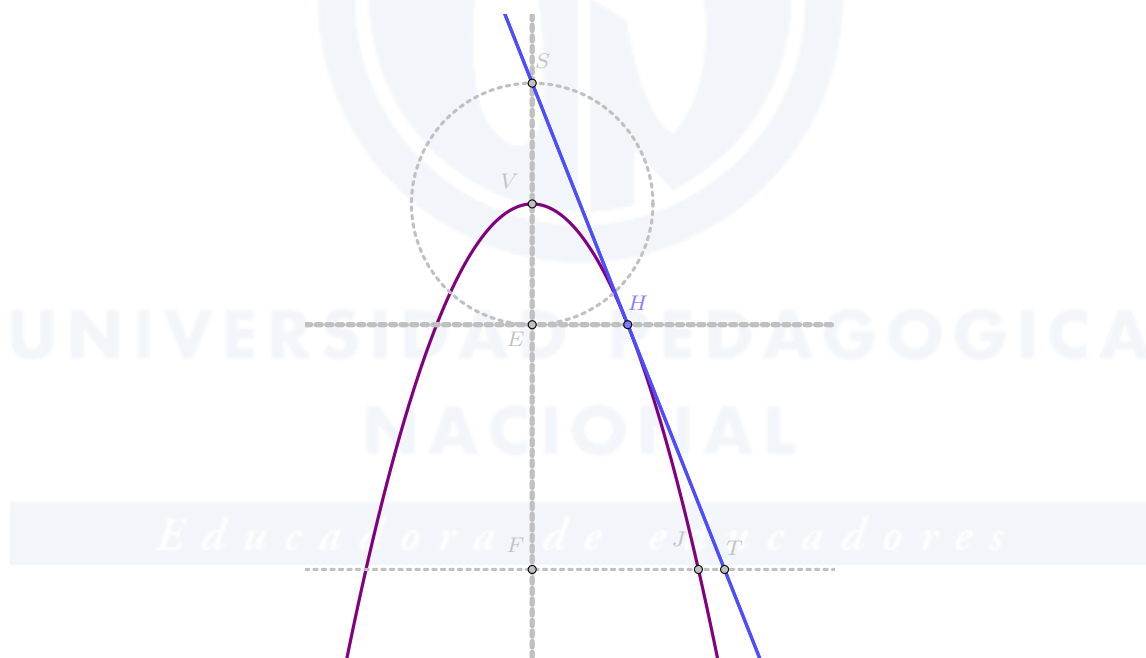


Figura 1.1: El método de las tangentes de Apolonio

Pasos de construcción:

1. Sea  $H$  un punto en la parábola con vértice en  $V$  y eje de simetría  $l$ .
2. Sean  $m \perp l$  por punto  $H$ .
3.  $m \cap l = \{E\}$ .
4.  $\odot V, EV$ .
5.  $l \cap \odot V, CV = \{S, E\}$ .
6.  $\overleftrightarrow{HS}$ .
7.  $\overline{AG} \cap \odot C, CD = \{H\}$ .
8. Sea  $J$  un punto en la parábola.
9. Sean  $n \perp l$  por punto  $J$ .
10.  $n \cap l = \{F\}$ .
11.  $\overleftrightarrow{HS} \cap n = \{T\}$ .

Para la construcción realizada en 1.1, la idea es llegar a que la distancia  $FJ < FT$ , sin importar el lugar donde se encuentre  $J$ , esto quiere decir que esa desigualdad se cumple teniendo cualquiera de las siguientes interestancias  $V - E - F$  o  $V - F - E$ , entonces gracias a que se cumple siempre  $FJ < FT$ , Apolonio dice que  $T \neq J$  y por esta razón  $\overleftrightarrow{HS}$  es tangente a  $f(x)$  por el punto  $H$ .

### 1.1.2. El método de las tangentes de Fermat

Como lo menciona (Areán Álvarez, 2017), Fermat Nació el 17 de Agosto de 1601 en Beaumont-de-Lomagne (Francia) y murió el 12 de Enero de 1665.

Durante su investigación de máximos y mínimos, Fermat determinó la tangente a una curva cualquiera tomando dos puntos en ella y dejando uno de ellos fijo, traza la recta secante a la curva que los contiene, así, a medida que estos puntos son cada vez más cercanos la recta secante se convierte en la tangente a la curva ver 1.2.

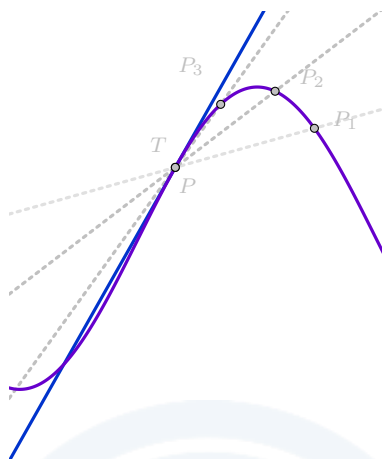


Figura 1.2: El método de las tangentes de Fermat

A continuación se muestra un ejemplo práctico del método que realizó Fermat, utilizando para esto la función  $f(x) = (x+2)^2 + 1$  y así ilustrar lo anteriormente dicho.

#### Pasos de construcción:

Para esta construcción se tiene como partida que la recta  $l$  es tangente a la función  $f(x) = (x+2)^2 + 1$  por el punto  $A$ .

1. Sea  $l$  eje de simetría de la parábola  $f(x) = (x+2)^2 + 1$ ,
2.  $h \perp l$  por punto  $A$ .
3. Sea  $G$  un punto en  $f(x)$  y diferente de  $A$ .
4.  $r \perp l$  por punto  $G$ .
5.  $h \cap l = \{C\}$ .
6.  $r \cap l = \{F\}$ .
7. Sea  $E$  el vértice de la parábola.
8.  $\odot E, CE$ .
9.  $l \cap \odot E, CE = \{B, C\}$ .
10.  $\overleftrightarrow{AB}$ .

$$11. \overleftrightarrow{AB} \cap r = \{D\}.$$

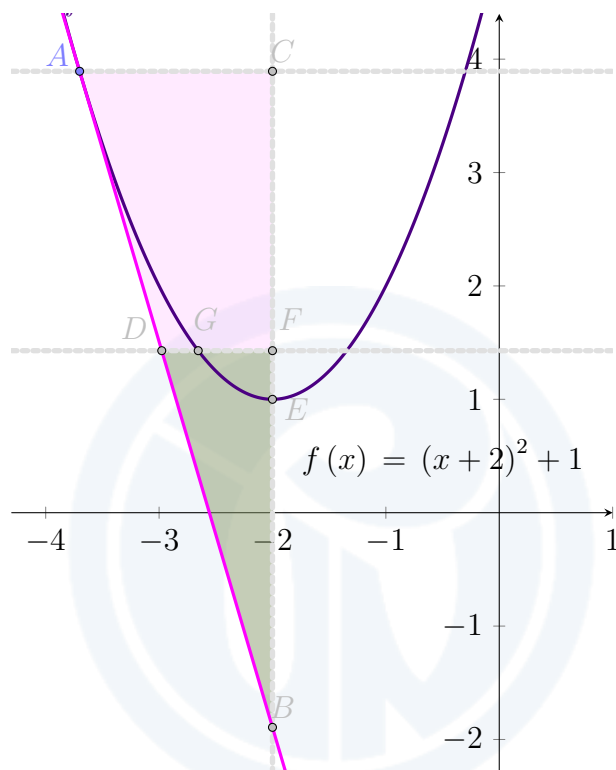


Figura 1.3: Demostración El método de las tangentes de Fermat

Para la demostración de la tangencia a la parábola, Fermat toma como principio la demostración de Apolonio para la tangente de una parábola, inicialmente se toman los triángulos semejantes  $\triangle ACB \sim \triangle DFB$ , la idea es realizar una demostración por contradicción diciendo que  $D = G$  y con la semejanza de triángulos y la afirmación realizada por Apolonio concluye que  $DF > FG$  de esta forma contradice que  $D = G$ , siendo entonces  $A$  el único punto de la parábola por donde pasa la recta  $\overleftrightarrow{AB}$ , de esta manera Fermat demuestra que la recta  $\overleftrightarrow{AB}$  es tangente a  $f(x)$  por el punto  $A$ .

### 1.1.3. El método de las tangentes de Descartes

Descartes (31 de marzo de 1596 Francia, 11 de febrero de 1650, Estocolmo, Suecia), como los antiguos griegos, él sabía que si en una parábola se toma el segmento

$\overline{OB}$  igual al segmento  $\overline{OC}$  y se trazaba la recta que pasa por los puntos  $A$  y  $C$ , se obtiene la recta tangente a la parábola en el punto  $A$  y, consecuentemente, el segmento  $\overline{DE}$  es siempre la mitad del segmento  $\overline{OE}$ , entonces los triángulos  $\triangle DAE \cong \triangle OCD$ . ver la figura 1.4

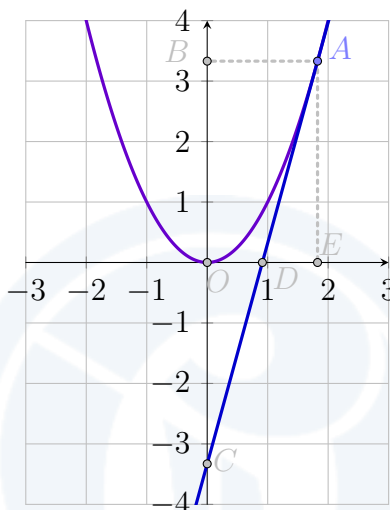


Figura 1.4: Tangente por Descartes

Descartes y Fermat como los padres de la geometría analítica (Hernández y Víctor, 2002), al disponer de las herramientas más eficientes proporcionadas por el álgebra renacentista, hicieron posible tanto la extensión de las propuestas de Apolonio, como la generalización de sus resultados y la conformación de lo que hoy conocemos como Geometría Analítica, es decir, aquella disciplina matemática caracterizada por los recursos mediante los que se abordan fundamentalmente los siguientes dos problemas:

1. Dada una ecuación, hallar el lugar geométrico que representa.
2. Dado un lugar geométrico definido por determinadas condiciones, hallar su ecuación matemática.

Para la construcción realizada en 1.4, se tiene entonces la siguiente demostración:

Dado el punto  $A$  en la función  $f(x) = x^2$  Entonces el punto  $D$  es punto medio del segmento  $\overline{OE}$

Desmostaron construcción de la figura 1.4	
Afirmación	Razón
1. Sea $l \perp$ al eje $y$ por el punto $A$ y $m \perp$ al eje $x$ por el punto $A$	Teo. Perpendicular por punto externo.
2. $l \cap y = \{B\}$ y $m \cap x = \{E\}$	Teo. intersección de rectas (1).
3. Sea $y \cap x = \{O\}$	Teo. intersección de rectas.
4. $\overline{BO} \parallel \overline{AE}$ y $AB \parallel \overline{OE}$	Teo. perpendicular paralelismo (1,3).
5. $\square ABOE$ paralelogramo	D. Paralelogramo (4).
6. $\overline{BO} \cong \overline{AE}$	Teo. Paralelogramo segmentos congruentes (5).
7. $\odot O,OB$	Teo. Existencia de la circunferencia (2,3).
8. $\odot O,OB \cap y = \{C, B\}$	Teo. Centro intersección (7).
9. $\overline{BO} \cong \overline{OC}$	D. Circunferencia (8).
10. $\angle COD$ y $\angle ADC$ son rectos	Teo. 4 ángulos rectos (1, 3 y 8).
11. $\overleftrightarrow{AC}$	Teo. 2 Puntos recta (Dado y 8).
12. $\overleftrightarrow{AC} \cap x = \{D\}$	Teo. intersección de rectas (1).
13. $\angle DOC \cong \angle DEA$	Teo. Angulos opuestos por el vértice (1, 2, 12).
14. $\triangle AED$ y $\triangle COD$	D. Triángulo (Dado, 2, 3, 8, 12).
15. $\angle OCD \cong \angle EAD$	Teo. 180 (14, 13, 10).
16. $\overline{AE} \cong \overline{OC}$	Transitividad (6,9).
17. $\triangle AED \cong \triangle COD$	Criterio ALA (10, 15, 16).
18. $\overline{DO} \cong \overline{DE}$	D. triángulos congruentes (17).
19 $D$ punto medio de $\overline{EO}$	D. punto medio(18).

Cuadro 1.1: Interpretación propia de la demostración de Descartes.

*Educadora de educadores*

Basándome en el resultado del cuadro 1.1, el cual demuestra las afirmaciones de Descartes enunciadas en la obra *La Géométrie* (Descartes, 1981), puedo concluir que si  $x = EO$ , entonces  $AE = x^2$  y como  $D$  es el punto medio del  $\overline{EO}$  tenemos que  $DE = \frac{x}{2}$ .

En consecuencia,

$$\frac{AE}{DE} = \frac{x^2}{\frac{x}{2}}$$

$$\frac{AE}{DE} = 2x$$

En otras palabras, puedo usar resultados geométricos para comprobar analíticamente que la pendiente de la recta tangente (la derivada) de la función  $f(x) = x^2$ , es  $f'(x) = 2x$ .

Siendo este, la motivación principal y el punto de partida para la realización del presente trabajo.

## 1.2. Algo de historia de la geometría

La geometría es una rama de las matemáticas que estudia las propiedades, la forma, la medida y las relaciones entre cuerpos geométricos. Como expresa (Ruiz, 2002) la geometría y la aritmética son áreas que se remontan incluso a los orígenes de la escritura, con el hombre prehistórico y la pintura rupestre, gracias a su interés por plasmar su entorno; Heródoto decía que en el antiguo Egipto surgió una geometría observacional o empírica, al igual que en Sumeria y Babilonia, esto fue en gran medida gracias a la necesidad de medir y separar terrenos, la simetría de sus construcciones y el arte son una muestra clara del uso de estas áreas.

En la Grecia antigua, los matemáticos como: Euclides, Pitágoras, Arquímedes, Apolonio, entre otros, tal como se vio en la sección anterior, Según (Ruiz, 2002), despejaron el camino de la geometría empírica, que floreció en la Antigüedad, para entrar a una geometría axiomatizada y lógica, Euclídeas mostró rigurosamente la geometría, Arquímedes propuso diferentes formas de medir el área de ciertas figuras curvas, superficies y el volumen de sólidos limitados por superficies curvas.

## Capítulo 2

### Referentes didácticos

Una de las mayores preocupaciones de los profesores de matemáticas es que sus estudiantes además de dominar un conjunto determinado de conceptos, los puedan aplicar tanto dentro como fuera del entorno escolar, mostrando de esta forma un dominio de estos y una apropiación del conocimiento.

Esto ha llevado a los docentes a buscar estrategias que faciliten la enseñanza de las matemáticas, haciendo que muchas veces se busque la solución en la forma como se enseña y no en lo que se enseña, es decir, no se fuerza a los estudiantes a dar un significado a un conjunto de conceptos sino que por el contrario, evidencien su conocimiento repitiendo procesos de manera mecánica, tal como lo hace notar (Suhit, 2006) los estudiantes presentan dificultades para transferir esos conocimientos “supuestamente aprendidos” a nuevas situaciones, aunque los estudiantes sepan derivar o integrar, al no conocer el concepto de fondo, se les dificultará en la resolución de problemas aplicados como por ejemplo: el cálculo de áreas, razones de cambio, máximos y mínimos, entre otros.

Por lo anterior, tomo como fundamento didáctico para sustentar el presente trabajo la posición de (Brousseau, 1986) y cito lo siguiente: Actualmente la nueva tendencia que se está dando en la educación en general, es la introducción de tecnologías en las dinámicas de clase, esto con el fin de fomentar el interés de los estudiantes; En el caso de la educación matemática el uso de la tecnología se da como elemento de motivación para los estudiantes, quienes se sienten atraídos por los nuevos dispositivos digitales en general.

## 2.1. Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD)

A continuación expondré de manera breve y concisa las ideas principales de esta teoría que contribuye a examinar el papel que juega la tecnología en las dinámicas de enseñanza matemática, también el cómo se pueden utilizar como guía para el diseño de actividades utilizando SGD (software de geometría dinámica).

La Teoría de las Situaciones Didácticas se desarrolla principalmente bajo el concepto de aprendizaje por adaptación, el cual proviene de la teoría de Piaget en relación a la teoría del aprendizaje.

### 2.1.1. Aprendizaje por adaptación

(Brousseau, 1986) afirma que esta teoría se basa en su mayoría en las investigaciones de Piaget las cuales realizó con niños menores de 2 años, sin ningún tipo de educación formal aún y que no han desarrollado un lenguaje verbal ni escrito. La cual se da como resultado de la interacción del sujeto con el medio en que vive, sin ningún tipo de mediación de un guía, tutor o profesor. (Brousseau, 1986) adaptó este aprendizaje biológico y natural, al análisis de las actividades escolares en general llegando entonces a afirmar que el aprendizaje por adaptación se considera cuando se da la interacción de un sujeto con un medio (que en muchos casos es material o tangible). (Acosta, 2010), complementa diciendo que el aprendizaje por adaptación se da en los estudiantes con los siguientes pasos en la construcción del conocimiento, pero antes definiremos tres conceptos importantes.

#### **El medio**

En el aprendizaje por adaptación puede decirse que el medio es fundamental ya que es el facilitador donde se dan las acciones, a su vez, este medio reacciona a dicha acción, a esto es lo que llamamos retroacción. Por esta razón, el medio debe estar muy bien diseñado de forma que didácticamente este mismo pueda incidir en los estudiantes para que adquieran los conocimientos esperados. En el presente trabajo haremos uso de la herramienta GeoGebra como medio físico con el cual los estudiantes pueden interactuar, siendo un software muy conocido y difundido debido a que es de libre acceso, posee una interfaz geométrica, una algebraica y numérica (hoja de cálculo). A partir de él se pueden generar actividades interactivas y autodidactas.

#### **Resultado de la validación**

Este se considera como una señal de que se realizó un avance o hubo un aprendizaje, teniendo como consecuencia que se reafirme o modifique una conducta observable respecto a la acción inicial, este puede tomar dos valores:

- \* Cuando la validación arroja un resultado positivo, esto quiere decir que refuerza la acción y esto los motiva a repetirla con mayor frecuencia.
- \* Cuando la validación arroja un resultado negativo, esto produce un cambio en la acción iniciando un nuevo ciclo acción-retroacción-validación.

Según (Acosta, 2010), debemos tener presente que no puede haber validación si no se realizan acciones y si no se identifica e interpreta la retroacción del medio.

### **La devolución**

Para (Brousseau, 1986) este es un proceso que perdura durante el desarrollo de toda la actividad, ya que se realiza una validación permanente para fomentar la autonomía y reforzar los conocimientos previos de los estudiantes, este proceso se realiza de la mano con la validación, para que sea mas efectivo es necesario que las actividades se puedan corregir en tiempo real.

Con estos tres conceptos es mas fácil comprender los pasos a seguir por en el aprendizaje por adaptación:

1. Parte de una intención, o una meta que desea alcanzar.
2. Realiza una acción sobre el medio.
3. El medio reacciona a esa acción (lo cual recibe el nombre de retroalimentación).
4. Interpretar la retroacción del medio usando los conocimientos de los que ya dispone.
5. Validar su acción de acuerdo con la interpretación que hace de las retroacciones del medio.

Tomado de (Acosta, 2010).

*Educadora de educadores*

### **2.1.2. Situación didáctica y situación a-didáctica**

(Brousseau, 1986) Las define como:

**Situación A-Didáctica:** Es el proceso en el que el docente diseña actividades que modelan situaciones de la vida real y las aborda haciendo uso de conocimientos previos familiares a los estudiantes, buscando que estos tengan más confianza para

generar, hipótesis y conjeturas sin la intervención directa del docente, con el propósito posteriormente de institucionalizar los conocimientos adquiridos.

**Situación Didáctica:** Es el proceso en el cual el docente como facilitador, proporciona el medio didáctico en donde el estudiante puede construir su conocimiento de forma autónoma, con intervenciones muy discretas del docente para que el estudiante comprenda los conceptos que se desean profundizar, al final del proceso, el docente realiza una institucionalización para reafirmar lo aprendido.

Básicamente el objetivo que se espera obtener con esta teoría es el estudio de la relación entre los saberes, la enseñanza y el aprendizaje de los contenidos propios de la matemática, donde los estudiantes estructuren su pensamiento para el futuro, haciendo uso de los conceptos de forma autónoma y los vinculen a sus saberes desde su propio contexto.

## 2.2. Visualización

La teoría (TSD) es importante para los fines del presente documento, ya que con ayuda de esta y por medio de construcciones de la recta tangente se pretende reconocer cómo el estudiante construye y comprende la noción de derivada sin la noción de límite, para esto es pieza clave la visualización en el estudiante, ya que por medio de una serie de pasos se requiere que: saque conclusiones, generalice y defina a partir de gráficas o construcciones geométricas que el mismo deberá realizar. Como dice (Brousseau, 1986), la visualización apoya la validación de estrategias con el uso de un recursos didácticos, con la intención de tener un enfoque distinto de enseñanza donde el elemento principal bajo esta teoría es la interacción del alumno con el medio, para el desarrollo de estrategias deductivas. A continuación será mas explicita sobre las bondades de la visualización.

Como se vio anteriormente el surgimiento del cálculo ha sido un campo en el que por muchos siglos grandes pensadores han trabajado y dedicado parte de su vida, como resultado de esto, también surge la enseñanza y el aprendizaje del cálculo, que ha sido por muchos años un campo de gran interés, donde a su vez una gran cantidad de autores que han centrado especial atención al desarrollo de dinámicas para facilitar su aprendizaje, actualmente entre esas dinámicas surge la propuesta de mediar su aprendizaje a través de la visualización tanto para los grados en educación media y en la educación superior.

Teniendo en cuenta lo dicho por (Fallas-Monge, 2011) la visualización está jugando un papel fundamental como herramienta para transferir el conocimiento de una forma mas clara y directa, ya que toma la habilidad innata que tenemos los seres humanos de procesar e interpretar información de forma visual; Dicha habilidad ha ido evolucionando y perfeccionando, se puede apreciar esto fijándose en pinturas rupestres pasando por la cartografía y el dibujo técnico. Continuando con la idea de (Fallas-Monge, 2011), gracias a esta habilidad podemos transmitir emociones, descubrir tendencias patrones e identificar generalidades, crear laberintos de memoria y todo gracias a la evolución de nuestro cerebro, como lo explica (Castro, 2010), el córtex visual está dividido en seis áreas o zonas llamadas V1, V2, V3, V4, V5 y V6. Ver en la figura 2.1.

Las neuronas de estas zonas se especializan en identificar características específicas, por ejemplo: V1 es el encargado de realizar un escaneo mas profundo y detallado de la imagen, V2 visión estéreo, V3 determina la profundidad y la distancia, V4 identifica los colores, V5 diferentes movimientos, V6 determina la posición del objeto o la imagen, tomado de (Castro, 2010).

Evolutivamente nuestro cerebro se adaptó para obtener información de forma muy visual, (Fallas-Monge, 2011) menciona diferentes autores que hablan del papel que juega la visualización para aprender algo, aun más importante lo mucho que influye en la apropiación del conocimiento, entre esos autores están:

- \* Miller, indica que la capacidad del canal de entrada del ser humano es mayor cuando estamos usando la habilidad visual.
- \* Koffka (1928) indica que nuestro cerebro tiene una fuerte habilidad para identificar patrones.
- \* Arnheim (1993) puntualiza que la percepción visual influye en toda organización del pensamiento.
- \* Eppler (2003) las imágenes son efectivas para la transferencia del conocimiento.
- \* Kosslyn (1980) sugiere que el recuerdo visual es mejor que el recuerdo verbal.
- \* Burkhard (2005) señala que la actividad cerebral mayoritariamente trata con procesamiento y análisis de imágenes visuales.
- \* Larkin y Simón (1987) indican que la representación visual es superior a la representación en secuencia verbal en varias tareas cognitivas.

Tomado de (Fallas-Monge, 2011)

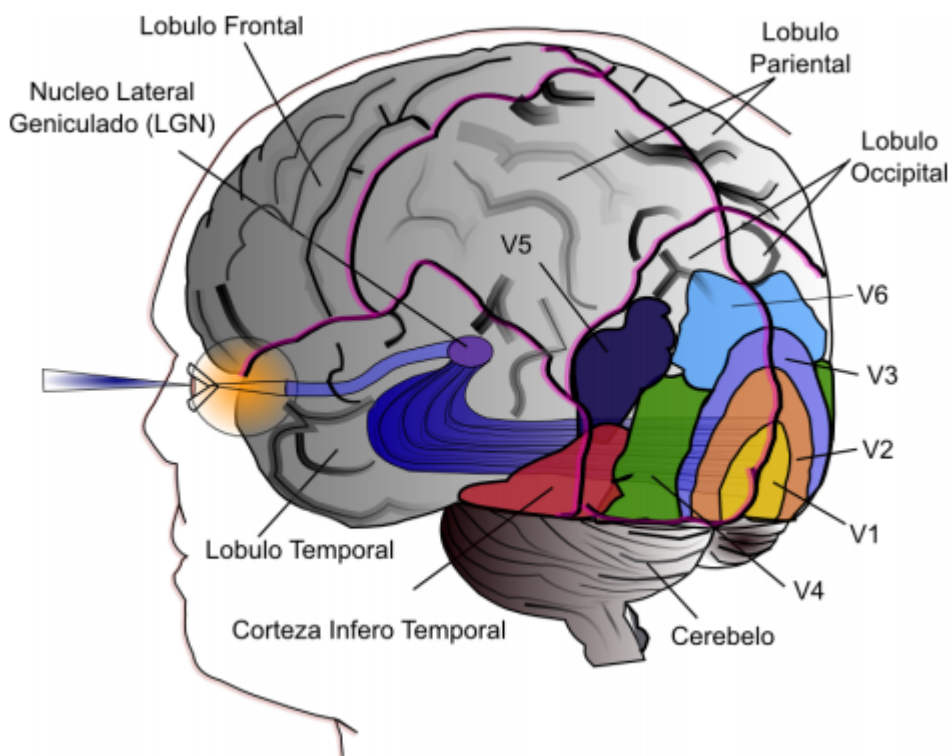


Figura 2.1: Áreas visuales corticales.  
Tomado de (Castro, 2010)

### 2.2.1. La vinculación de la visualización con los sistemas semióticos de representación

Los objetos matemáticos, por lo general, no se logran captar directamente por los sentidos, por eso surge la necesidad de buscar diferentes sistemas de representación, ya que la mayoría de los objetos matemáticos no existen en el mundo físico, existen en el mundo de la ideas. Todos los conceptos matemáticos necesitan para una mejor y más completa comprensión, de más de un sistema de representación que permita el uso de las reglas que los conceptos tengan.

Generalmente durante el proceso de enseñanza de las matemáticas se priorizan

los métodos algebraicos, procedimentales y algorítmicos; los docentes durante la enseñanza enfatizan mucho en estos y le restan importancia a la visualización, (Hitt, 1998) propone el siguiente ejemplo, para explicar mas claramente lo anterior.

Un docente propone a sus estudiantes el siguiente enunciado: Sea  $f$  una función diferenciable en todo su dominio tal que  $f(-x) = -f(x)$  entonces para cualquier valor de  $a$  podemos afirmar que:

- A)  $f'(a) = -f(-a)$     C)  $f(-a) = f'(a)$   
 B)  $f'(-a) = -f'(a)$     D) Ninguna de las anteriores

El profesor para orientar a los estudiantes propone la siguiente afirmación:

$$f'(-a) = -f'(a)$$

Dado que:

$$f'(-a) = (f(-a))'$$

$$(-f'(a))' = -f'(a)$$

Les pregunta ¿es correcta la demostración?

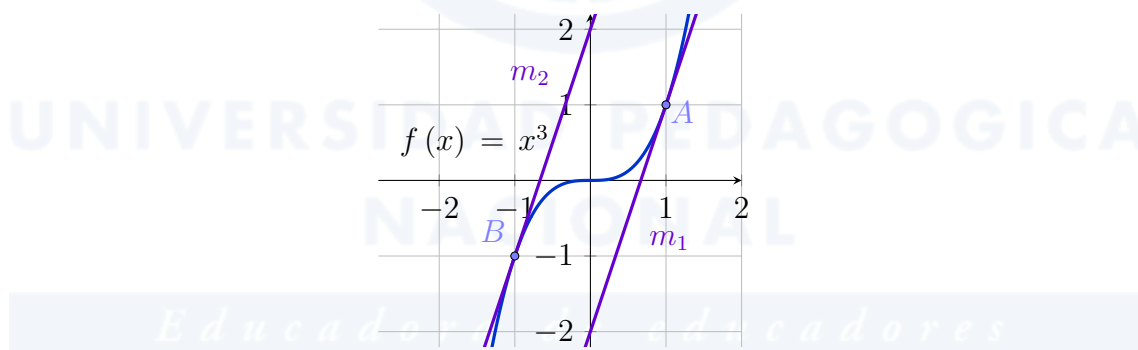


Figura 2.2: Rectas tangentes a  $f(x) = x^3$

Es posible analizar esta situación viendo un caso particular, como se puede ver en la figura 2.2, si  $m_1$  y  $m_2$  son tangentes a  $f(x) = x^3$  por los puntos  $A(1, 1)$  y  $B(-1, -1)$ , tenemos que no se cumple que  $f'(-a) = -f'(a)$ , así, la figura 2.2 sirve como un ejemplo donde la afirmación no se cumple; ya que para el caso particular

de  $f(x) = x^3$  se tiene que  $f'(-1) > 0$  y  $-f'(1) < 0$  por lo tanto  $(f(-1))' \neq -f'(1)$ .

(Zimmermann y Cunningham, 1991) define la visualización como: la habilidad de poder representar un concepto o problema matemático por medio de un diagrama apropiado, ya sea a mano o usando TIC gráficas, para lograr mayor entendimiento y como una ayuda en la resolución del problema.

Siendo coherentes con esta temática y a juicio de (Suhit, 2006), las continuas observaciones e investigaciones de los profesores sobre la deficiente preparación en matemática de los estudiantes, viendo la poca articulación del cálculo en cómo se enseña y como se muestra su participación en otras áreas donde el cálculo debe ser un pilar; nos lleva a replantearnos como profesores, nuevos procesos didácticos en la construcción de los conceptos básicos y en particular la incidencia de la visualización matemática como estrategia para la comprensión, esto con el fin de elaborar una propuesta para mejorar la enseñanza y aprendizaje del Cálculo Diferencial.

### 2.2.2. La visualización como estrategia para la comprensión

Inicialmente nos vamos a plantear dos preguntas

- 1 ¿Es lo mismo observar, ver o mirar?
- 2 ¿Es lo mismo oír que escuchar?

Teniendo esto presente y dando una respuesta a la primera pregunta según (Española, 1852), ver es cuando se tiene éxito en la acción de mirar, esto quiere decir que cuando se mira un objeto y no se detallan sus propiedades, tan solo se da un breve vistazo de que algo esta ahí, pero cuando se realiza la acción de ver se profundiza un poco mas en el objeto, por ejemplo su color o forma, pero cuando se realiza la acción de observar ya se tienen en cuenta todas las propiedades perceptibles del objeto, distancia, tamaño, posición etc. Durante la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas estas tres acciones juegan un papel muy importante en el desarrollo de las clases, ya que si los estudiantes tan solo están mirando o inclusive viendo, la información que les este suministrando el profesor no llega a ellos.

## 2.3. TIC ´S en el aula

La posición frente al manejo en las aulas de las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC), es que cada día se vuelve más indispensable el trabajarlas, ya

que por el desenvolvimiento de la sociedad en lo que hoy conocemos como la era digital y de la información, está presente en todos los sistemas que componen nuestra sociedad. Debemos de tener en cuenta que la tecnología se fundamenta en el capital humano, esto quiere decir, que no solo permite gestionar en tiempo casi real el compromiso de los participantes sino que también se puede analizar su potencial y desempeño para generar planes de acción prácticamente personalizados. En el campo de la educación se puede afirmar que a pesar de que ha sido lenta su inclusión en la aplicación de nuevos métodos de enseñanza, hay investigaciones que sustentan la importancia de su uso. Cómo lo expresa (Araya, 2007), la discusión no esta sobre si es necesaria o no la tecnología, sino sobre las ventajas que ofrece su implementación, buscando la mejor manera de aprovecharlas para enriquecer el proceso de enseñanza-aprendizaje, también la influencia positiva en la cognición y procesos del pensamiento de los estudiantes.

Es necesario replantearnos las estrategias para enseñar y evaluar los diferentes contenidos, sacando el mejor partido a las TIC, en diferentes niveles educativos para mejorar la calidad.

Teniendo en cuenta lo dicho por (Araya, 2007) usar las TIC, han generado cambios significativos en la forma como los estudiantes aprenden matemáticas. tomando en cuenta la amplia gama de herramientas computacionales que tienen a su disposición las nuevas generaciones, proporcionando diferentes condiciones para que los estudiantes identifiquen, examinen y comuniquen distintas posturas, frente a algún planteamiento o discusión, Las TIC pueden llegar a jugar un papel muy importante en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, solo si son utilizadas correctamente. Ya que en el caso de que su uso no sea el adecuado, pueden llegar a ser mas un obstáculo que impida el proceso de aprendizaje en las diferentes actividades; por eso es necesario no solo mostrar la herramienta sino también orientarlos para sacarle el mejor provecho para que lleguen al resultado deseado promoviendo así un medio para que ellos indaguen y formulen sus propias preguntas, ya que esto es fundamental en el aprendizaje de las matemáticas.

En esta propuesta, el papel que juegan los entornos de geometría dinámica es fundamental, aunque no es un limitante puesto que existe la posibilidad de usar regla y compás en el desarrollo de las actividades propuestas en el presente trabajo. No obstante, por las circunstancias actuales de pandemia, fue necesario hacer uso del programa GeoGebra como calculadora gráfica y medio facilitador para el desarrollo de las actividades, cabe aclarar que en adelante cada vez que nombre la

Geometría Dinámica, nos referiremos a dicho programa, sin excluir la posibilidad de que otros programas tengan las mismas posibilidades para su implementación. Hablando de TIC'S existen diversos programas de Geometría Dinámica, unos mejores en cuanto de funcionamiento, calidad gráfica, precisión matemática y costos. Solo para mencionar algunos están: GeoGebra, Cabri Géomètre, Geometre, Regla y Compás y Cinderella.



UNIVERSIDAD PEDAGOGICA  
NACIONAL

*Educadora de educadores*

# Capítulo 3

## Diseño de Actividades

El diseño de las actividades se realizó a partir del marco teórico anteriormente enunciado, usando los principios expuestos por los investigadores, con la idea de contribuir a un aprendizaje significativo del concepto de derivada, que por las razones expuestas en el marco teórico, podría no haber sido interiorizado por los estudiantes. Las actividades son coherentes con el enfoque expuesto por (Brousseau, 1986) que habla sobre situaciones didácticas y a-didácticas, por ejemplo, se utilizó como medio el SGD (Geogebra) en las que se pide a los estudiantes la construcción de objetos matemáticos, familiares para ellos, y a partir de estos realizar variaciones, para que los estudiantes analicen los cambios y de esta forma puedan ir obteniendo relaciones entre la derivada de la función  $f(x)$  en un punto  $P$  y la pendiente de la recta tangente a la gráfica de dicha función.

### 3.1. Elementos claves para el diseño de las actividades

Aprender sobre un área del conocimiento, es comprender conceptos e interiorizarlos a tal grado de saber como aplicarlos. Citando a (Flores, Lupiáñez Gómez, Berenger, Antonio, y Molina, 2011), para llegar a esto el estudiante tiene que llegar a crear la siguiente cadena de conductas:

- \* Hacer
- \* Interiorizar
- \* Organizar

- \* Retener
- \* Identificar las condiciones
- \* Recuperar

Se debe tener en cuenta que el profesor debe tener en todo momento claros los objetivos de aprendizaje, pero es importante que estos objetivos estén orientados a suplir las dificultades y limitaciones de los estudiantes, proporcionando así diferentes tipos de actividades para que ellos logren alcanzar los objetivos deseados.

En el presente trabajo se acude a algo que (Brousseau, 1986) nombra, la resolución de problemas como medio, donde el estudiante interactúa para lograr un aprendizaje por adaptación. Aquí se definen tres clases de acciones y siete clases de evaluaciones, a continuación daré un breve recuento de en que consiste cada una de ellas:

### 3.1.1. Clasificación de actividades

**Pregunta en forma individual:** Haciendo uso de su propio lenguaje el estudiante puede preguntar al profesor ó monitor, alguna cuestión que se relacione con el problema planteado. La retroacción correspondiente para el estudiante será una pregunta orientadora.

**Pregunta en forma grupal:** Una vez que el grupo ha esta en el proceso ó ha terminado de resolver un problema, el profesor ó monitor, se asegura con una pregunta para todos los integrantes del grupo, de esta forma también saber si han comprendido el concepto esperado.

**Preguntas para hacer extensiones del problema:** Cuando una persona ó grupo ha terminado antes que el resto, con una pregunta el monitor se asegura que realice una extensión del problema.

Lo que hace la diferencia realmente entre un aprendizaje significativo en los estudiantes y uno que no lo sea, son el tipo de actividades a implementar, por esta razón considero importante fomentar el pensamiento critico y argumentativo en ellos, reformulando los problemas y facilitando situaciones donde se puedan dar los diferentes tipos de preguntas anteriormente mencionadas.

### 3.1.2. Clasificación de los tipos de evaluaciones

Existen diferentes clases de evaluación en la educación. Todas con diferentes propósitos durante y después de la instrucción o actividad que se desarrollo, a continuación las nombraremos y cual es su propósito con el presente trabajo.

#### **Evaluación diagnóstica o pre-evaluación:**

Antes de crear la actividad, es necesario conocer la población a la que ira dirigida, esto con el fin de conocer las fortalezas, habilidades, conocimiento y falencias que puedan tener. Basada en la información que recolectada, es posible crear la actividad o en el caso del presente trabajo realizar modificaciones pertinentes según sea el caso.

#### **Evaluación formativa**

Se aplica en el primer intento de desarrollar la actividad, tiene como objetivo monitorear el aprendizaje del estudiante para proporcionar retroalimentación. durante este proceso Ayuda a identificar las primeras brechas en la actividad. Basado en esta retroalimentación, se identifica donde enfocarse para fortalecer y rediseñar algunos aspectos de la actividad.

#### **Evaluación sumativa**

Valorar los resultados más importantes al final de la actividad, pero mide más la efectividad del aprendizaje, las reacciones y los beneficios a largo plazo, los cuales pueden ser determinados por la forma cómo los estudiantes usan el conocimiento aprendido.

#### **Evaluación Confirmativa**

Después de implementar la actividad, es necesario tomar una evaluación, el objetivo de esta evaluación es averiguar si la actividad es exitosa luego de algún tiempo, la evaluación confirmativa es una extensión de una evaluación sumativa.

#### **Evaluación referenciada en la norma**

Esta pretende comparar el rendimiento de un estudiante con el rendimiento general del aula.

#### **Evaluación referenciada en el criterio**

Mide los rendimientos del estudiante con un grupo establecido de criterios pre-determinados o estándares de aprendizaje. Chequea lo que se espera que sepan los estudiantes y sean capaces de hacer en una etapa específica de su educación.

### **Evaluación ipsativa**

Mide y compara el rendimiento de un estudiante con los resultados anteriores obtenidos por el, con este método se busca que el estudiante se supere a si mismo y aprenda de sus errores, lo cual puede aumentar la confianza en si mismo.

## **3.2. Secuencias de Actividades**

### **3.2.1. Actividad 1**

Esta actividad fue diseñada para aplicar antes de la actividad principal, debido a que fue necesario repasar y fortalecer algunos conceptos en los estudiantes. Por esta misma razón se deja de manera opcional su aplicación.

Con esta actividad se espera que los estudiantes recuerden como calcular la pendiente de una recta a partir de la gráfica, inicialmente se les muestra un ejemplo para ayudarlos a recordar este proceso. Esta actividad se puede desarrollar haciendo uso de regla y compás o cualquier calculadora gráfica, el docente la puede adaptar fácilmente según los recursos con los que cuente, ya que lo único estrictamente necesario, es que los estudiantes puedan ver la gráfica de la función, en este caso si no cuenta con recursos tecnológicos puede hacer las gráficas en el tablero y dar las indicaciones correspondientes a los estudiantes para su desarrollo.

#### **Objetivos de la actividad**

- \* Indagar y evidenciar los conocimientos previos que tenga el estudiante en relación a la pendiente de una recta.
- \* Fortalecer en los estudiantes el concepto de pendiente de una recta.
- \* Involucrar algunas funciones lineales.
- \* Lograr que los estudiantes verbalicen lo comprendido acerca de su trabajo realizado y afiancen conocimientos.

#### **La pendiente a partir de la gráfica, Ejemplo:**

Nos dan la gráfica de una recta y nos piden encontrar su pendiente.

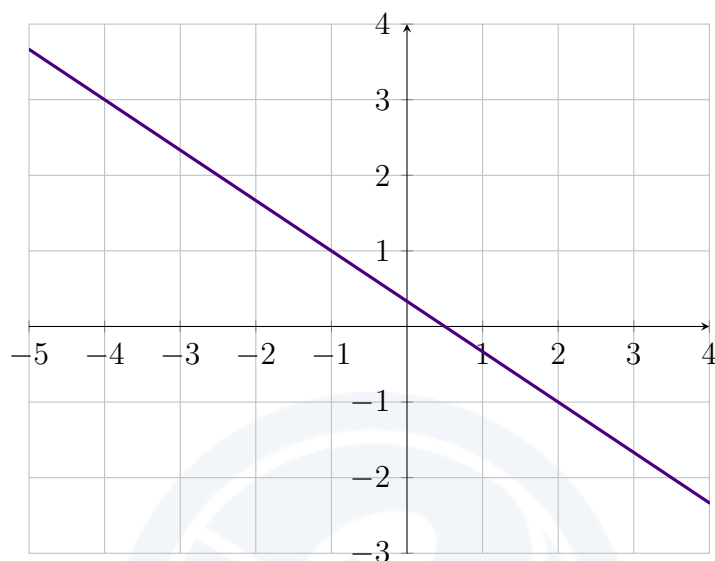


Figura 3.1: Ejemplo actividad 1

Después se busca dos puntos por los que pase la recta en este caso La recta pasa por los puntos  $A(-4, 3)$  y  $B(2, -1)$ .

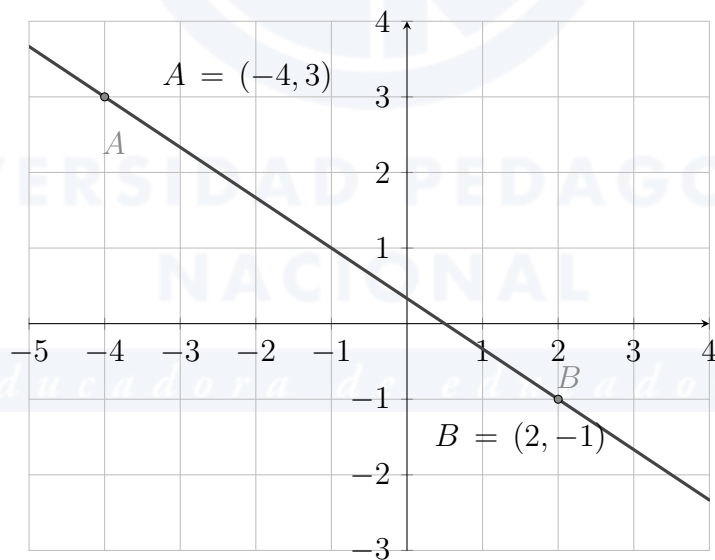


Figura 3.2: Ejemplo actividad 1 (Parte 1)

Recordemos que:

$$\text{Pendiente} = \frac{\text{desplazamiento vertical}}{\text{desplazamiento horizontal}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

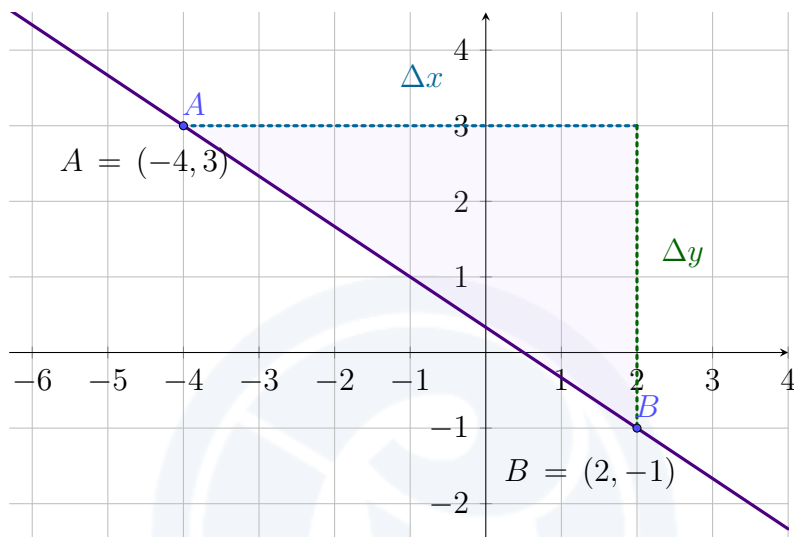


Figura 3.3: Punto 1; actividad 1 (Parte 2)

En otras palabras, por cada cuatro unidades que nos movemos verticalmente hacia abajo de la recta, nos movemos seis unidades horizontalmente a la derecha.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{-4}{6} \\ &= \frac{-2}{3} \end{aligned}$$

**Enunciado actividad 1** ¿Cuál es la pendiente de la recta que se muestra en cada una de las siguientes gráficas?

*Educadora de educadores*

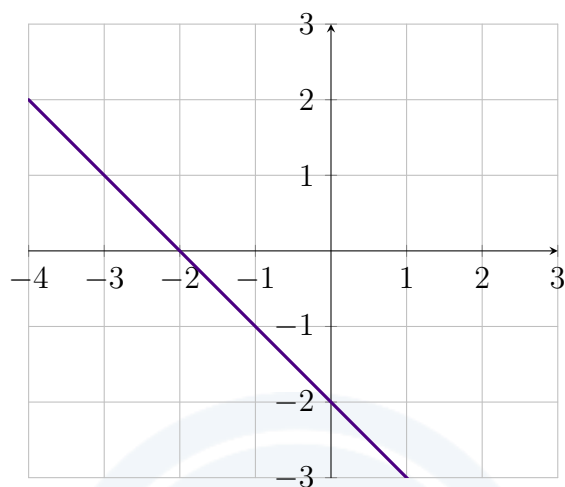


Figura 3.4: Punto 1; actividad 1

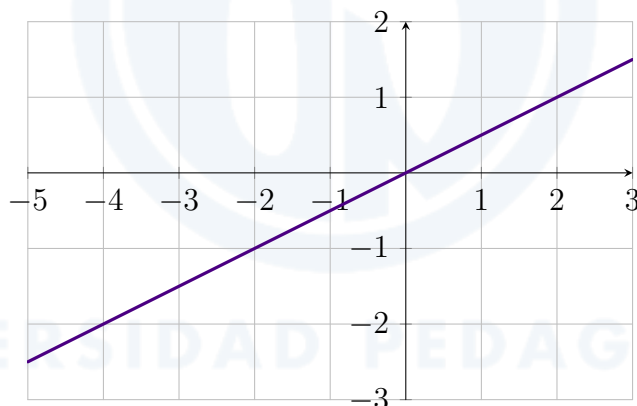


Figura 3.5: Punto 2; actividad 1

### 3.2.2. Actividad 2

Las ideas expuestas en esta actividad surgen como una propuesta para apoyar la enseñanza del concepto de derivada, no se pretende en ningún momento sustituir el desarrollo analítico este tema, sino más bien servir como soporte intuitivo a su desarrollo. El acercamiento que se presenta ha sido formulado conforme a los principios generales expuestos por Descartes para la construcción de tangentes principalmente y por otros autores que anteriormente han sido mencionados, quienes me sirvieron

de inspiración a la hora de encontrar las generalidades necesarias para el desarrollo y creación de esta actividad; Inicialmente solo se toman las funciones de la forma  $f(x) = x^n$ , pero se dejan en el documento también las construcciones de otras funciones como opción de ampliar dicha actividad ver (Anexo B).

### Objetivos de la actividad

- \* Involucrar las rectas tangentes como otra alternativa para la representación de la derivada de una función.
- \* Lograr que los estudiantes verbalicen sobre lo aprendido y realizado en su trabajo para luego verificar si es lograron los conocimientos previos.
- \* Fomentar en el estudiante el desarrollo de habilidades de exploración, generalización y conjeturación.

### Momento 1 de la actividad 2

Inicialmente se les pide a los estudiantes seguir los pasos de construcción y se les muestra como debe quedar para que ellos corrijan o revisen en caso de tener alguna dificultad.

**Punto 1** Realizar la construcción siguiendo una secuencia de pasos propuesta por el docente y responder las preguntas con ayuda de la construcción

Pasos de construcción:

1. Grafique en el plano cartesiano la función  $f(x) = x^2$ .
2. Tomar un punto cualquiera en la función el cual vamos a nombrar  $A$ .
3. Construir la recta  $m$  perpendicular al eje  $y$ , que pase por el punto  $A$ .
4. Construir la recta  $l$  perpendicular al eje  $x$ , que pase por el punto  $A$ .
5.  $y \cap m = \{B\}$  y  $x \cap l = \{E\}$ .
6. Sea el punto  $O = (0, 0)$ .
7.  $\odot B,_{2OB}$ .
8.  $\odot B,_{2OB} \cap y = \{P, D\}$

9. Suponiendo que el punto  $D$  está esta abajo construir  $\overleftrightarrow{AD}$ .
10.  $\overleftrightarrow{AD} \cap x = \{F\}$ .

Hasta este punto debemos tener la construcción así.

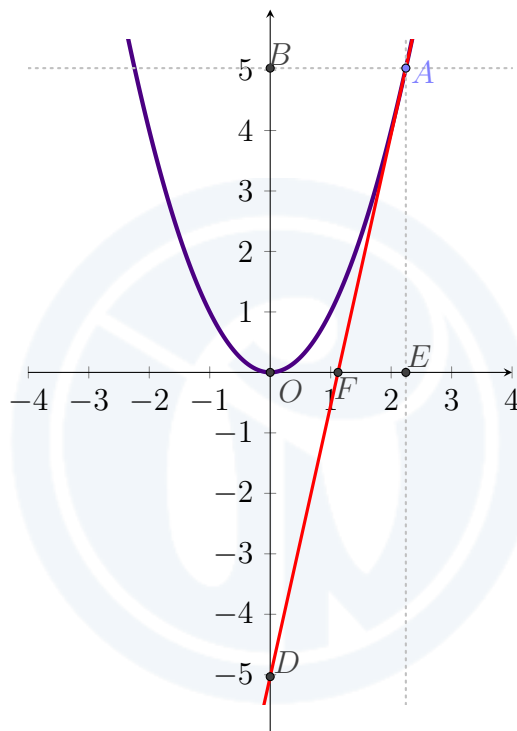


Figura 3.6: Punto 1; actividad 2

### Momento 2 de la actividad 2

Teniendo en cuenta la construcción anterior se pide a los estudiantes responder unas preguntas, estas tienen algunas pautas para ayudarlos en la exploración y también que puedan llegar a la generalidad.

#### Responder las siguientes preguntas:

1. Si la coordenada en el eje  $x$  del punto  $A$  es igual a 2, ¿Cuáles de las siguientes opciones muestra mejor las coordenadas del punto  $A$  para este caso?

Marca todas las que correspondan.

- $A(4, 2)$ .
- $A(2, 4)$ .
- $A(2, 2)$ .

2. Si la coordenada en el eje  $x$  del punto  $A$  es igual a 3, ¿Cuáles de las siguientes opciones muestra mejor las coordenadas del punto  $A$  para este caso?

Marca todas las que correspondan.

- $A(3, 3)$ .
- $A(9, 3)$ .
- $A(3, 9)$ .

3. Si la primera coordenada del punto  $A$  la llamamos  $x$  ¿Cómo sería la segunda coordenada?

Marca todas las que correspondan

- 0.
- $x$ .
- $x^2$ .

4. Si las coordenadas del punto  $A$  son  $(x, x^2)$  ¿Qué coordenadas tendrían los puntos  $B$  y  $E$ ?

5. Si las coordenadas del punto  $A$  son  $(x, x^2)$  ¿Qué coordenadas tendrían los puntos  $D$  y  $P$ ?

6. Podemos decir que la distancia  $AE = x^2$  sin importar donde pongamos el punto  $A$  ¿Siempre pasa esto? ¿Porque?

7. ¿A que equivalen las distancias  $BO$  y  $BD$ ?

8. Teniendo en cuenta las distancias de los puntos  $A$  y  $D$  halladas anteriormente calcular la pendiente de la recta  $\overleftrightarrow{AD}$ .

Para esto aplica lo que se vio con la actividad 1.

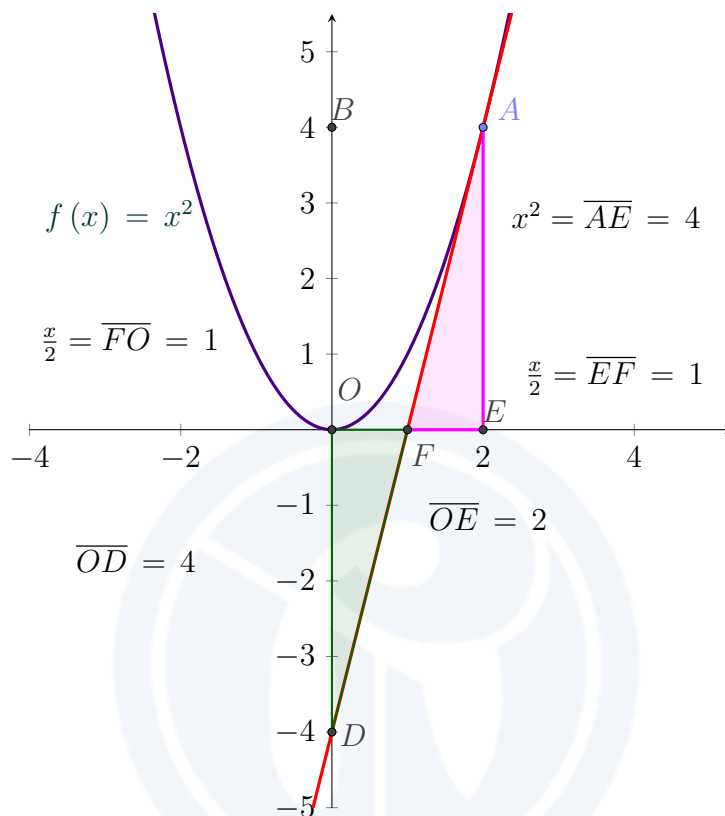


Figura 3.7: Punto 1 Pendiente de la recta; Actividad 2

9. Construir la recta tangente a la función  $f(x) = x^2$  que pase por el punto  $A$ .
10. ¿Qué relación existe entre la recta  $\overleftrightarrow{AD}$  y la recta tangente construida en el ítem 9.

### Cierre de la actividad

Como la recta  $\overleftrightarrow{AD}$  y la recta tangente construida con GeoGebra son la misma, se Propone a los estudiantes lo siguiente:

Teniendo el  $\triangle AEF$ , calcular la tangente del ángulo  $\angle AFE = \theta$  con ayuda de las razones trigonométricas, recordemos que la tangente de un ángulo en un es  $\frac{\text{Catetoopuesto}}{\text{Catetoadyacente}}$ , entonces tenemos que:

$$\tan(\theta) = \frac{AE}{EF}$$

$$\tan(\theta) = \frac{x^2}{\frac{x}{2}}$$

$$\tan(\theta) = 2x$$

Entonces con los cálculos anteriores y con la comparación realizada entre la recta  $\overleftrightarrow{AD}$  y la recta tangente construida con GeoGebra, podemos concluir que la pendiente que se calculó en el punto 8 de la actividad es la pendiente de la recta tangente de la función  $f(x) = x^2$  por el punto  $A$ , que también se conoce como la derivada de la función.

En conclusión si queremos calcular la pendiente de la recta tangente en un punto específico de  $f(x) = x^2$  solo debo reemplazar la coordenada en  $x$  del punto en la pendiente  $m = 2x$ .

### Momento 3 de la actividad 2

Ahora se le pide a los se va a realizar una construcción para la función  $f(x) = x^3$  similar a la del punto anterior, la idea de esto que llevar a los estudiantes a encontrar algunas relaciones y quizá que encuentre la generalidad.

**Punto 2** Realizar la construcción siguiendo una secuencia de pasos propuesta por el docente y responder las preguntas con ayuda de la construcción

Pasos de construcción:

1. Grafiqué en el plano cartesiano la función  $f(x) = x^3$ .
2. Tomar un punto cualquiera en la función el cual vamos a nombrar  $A$ , se denota  $A \in f(x)$ .
3. Construir la recta  $m$  perpendicular al eje  $y$ , que pase por el punto  $A$ .
4. Construir la recta  $l$  perpendicular al eje  $x$ , que pase por el punto  $A$ .
5.  $y \cap m = \{B\}$  y  $x \cap l = \{E\}$ .
6. Sea el punto  $O = (0, 0)$ .
7.  $\odot B,_{3OB}$ .
8.  $\odot B,_{3OB} \cap y = \{P, D\}$

9. Suponiendo que el punto  $A$  está su coordenada en  $x < 0$  se construye con  $P$  que es el punto de arriba la recta  $\overleftrightarrow{AP}$ , pero si la coordenada del punto  $A$  es  $x > 0$  construir  $\overleftrightarrow{AD}$ .
10.  $\overleftrightarrow{AP} \cap x = \{F\}$ .

Hasta este punto debemos tener la construcción así.

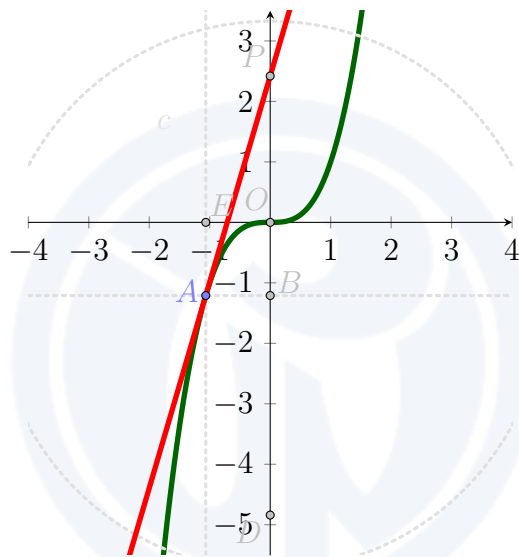
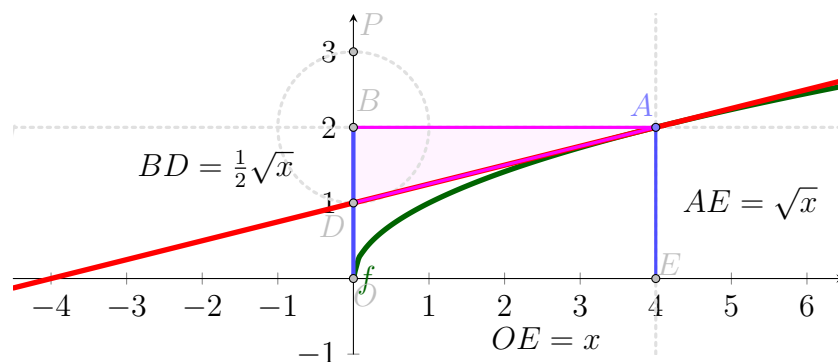


Figura 3.8: Punto 2 (caso 1); actividad 2

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA  
NACIONAL

*Educadora de educadores*



Figura 3.10: Actividad 2,  $f(x) = \sqrt{x}$ 

3. ¿Cuáles serían los pasos de construcción para  $f(x) = x^n$  con  $n \in \mathbb{R}$ ?

Teniendo en cuenta lo anterior la generalidad para las funciones de la forma  $f(x) = x^n$  con  $n \in \mathbb{R}$  es que el radio de la circunferencia con centro  $B$  es igual a  $n(OB)$  esto quiere decir que para calcular el radio de la circunferencia se debe multiplicar siempre la distancia  $BO$  por el exponente de la función de la forma  $f(x) = x^n$ , de manera que la circunferencia es  $\odot B, n(OB)$ .

Pasos de construcción:

1. Grafiqué en el plano cartesiano la función  $f(x) = x^n$ .
2. Tomar un punto cualquiera en la función el cual vamos a nombrar  $A$ , se denota  $A \in f(x)$ .
3. Construir la recta  $m$  perpendicular al eje  $y$ , que pase por el punto  $A$ .
4. Construir la recta  $l$  perpendicular al eje  $x$ , que pase por el punto  $A$ .
5.  $y \cap m = \{B\}$  y  $x \cap l = \{E\}$ .
6. Sea el punto  $O = (0, 0)$ .
7.  $\odot B, n(OB)$ .
8.  $\odot B, n(OB) \cap y = \{P, D\}$
9. Suponiendo que el punto  $A$  está su coordenada en  $x < 0$  se construye con  $P$  que es el punto de arriba la recta  $\overleftrightarrow{AP}$ , pero si la coordenada del punto  $A$  es  $x > 0$  construir  $\overleftrightarrow{AD}$ .

$$10. \overleftrightarrow{AP} \cap x = \{F\}.$$

Para la construcción anterior se demuestra lo siguiente:

Dado  $A \in f(x) = x^n$  Entonces  $EF = \frac{x}{n}$ .

**Demostración:**

Por la construcción anterior,  $\triangle AEF \sim \triangle DOF$  por la congruencia de sus tres ángulos, así, tenemos las siguientes razones y proporciones:

$$\begin{aligned} \frac{AE}{OD} &= \frac{EF}{OF} \\ \frac{x^n}{(n-1)x^n} &= \frac{EF}{OF} \\ \frac{1}{(n-1)} &= \frac{EF}{OF} \\ \frac{1}{(n-1)} &= \frac{EF}{x-EF} \\ \frac{x-EF}{(n-1)} &= EF \\ x &= nEF \\ EF &= \frac{x}{n} \end{aligned}$$

De este modo, la pendiente de la recta  $\overleftrightarrow{AB}$  sería:

$$\begin{aligned} m &= \frac{AE}{EF} \\ m &= \frac{x^n}{\frac{x}{n}} \\ m &= nx^{n-1} \end{aligned}$$

Así, hemos generalizado el trabajo hecho por (Tellechea y Robles, 2013) para funciones del tipo  $f(x) = x^n$ , esto quiere decir que sin hacer uso de la definición de límite o de la regla de las potencias hemos hallado la derivada de estas funciones.

El objetivo es entonces, introducir el concepto de derivada apoyándonos en esta construcción geométrica, esperando que los estudiantes logren comprender de una

mejor manera, que la derivada de una función es la pendiente de la recta tangente, construida en cualquier punto  $A \in f(x)$ .

¿Porque se realizaron de esta forma las actividades? Para (Brousseau, 1986), sin importar qué situación a-didáctica el docente diseñe, no se puede pretender que todos los estudiantes lo resolverán de inmediato, todos son diferentes y tienen procesos distintos, por esta razón el docente debe buscar una situación a-didáctica que provoque en los estudiantes una interacción más independiente y fructuosa. Pero el docente durante este proceso debe ser cuidadoso con sus intervenciones, puesto que puede afectar el carácter a-didáctico de la situación.



UNIVERSIDAD PEDAGOGICA  
NACIONAL

*Educadora de educadores*

## Capítulo 4

# Metodología y análisis de resultados

A continuación, se presenta el desarrollo de las actividades teniendo en cuenta la teoría de situaciones didácticas según lo mencionado por (Brousseau, 1986); El propósito de este trabajo, es brindar una herramienta que apoye la introducción del concepto de derivada para estudiantes de grado 11 o primeros semestres de universidad.

Inicialmente las actividades fueron pensadas para desarrollarlas de manera presencial en una institución educativa, pero debido a la emergencia sanitaria causada por la contingencia del COVID-19, no fue posible aplicarlas de esta forma. De todas las actividades, solo se aplicó el momento 1 de la actividad 2 a el grupo más grande de estudiantes, aunque no fue necesario adaptarla a la virtualidad, ya que se diseñaron inicialmente en la interfaz en línea de GeoGebra.

Teniendo en cuenta lo anteriormente dicho, la actividad se implementó inicialmente a 2 estudiantes de forma individual, a través de vídeo llamada haciendo uso de la plataforma Google Meet. Una vez analizados los resultados, se hicieron algunos cambios a las actividades, por razones de complejidad semiótica y de enfoque hacia la facilidad de utilizar y acceder a la interfaz donde se estaba implementando la actividad (GeoGebra). Después de esto, se implementó a un grupo de estudiantes en grado 11 del Colegio Teresiano sede Bogotá mediante vídeo llamada, utilizando la misma plataforma y como resultado, decidí mejorar algunos detalles del medio donde fue aplicada la actividad finalizando así con una interfaz de GeoGebra tipo libro.

## 4.1. Puesta en escena

Las actividades están dirigidas a estudiantes de grado 11 o primeros semestres de universidad, por lo cual el pilotaje fue realizado a dos estudiantes de dicho grado. Teniendo en cuenta a lo mencionado por (Brousseau, 1986) con relación a la evaluación diagnóstica o pre-evaluación, se realizó una caracterización de la población a la que se le implementó la actividad, de esta forma saber el nivel cognitivo que poseen. Una estudiante (la llamaremos Nata), reside en la ciudad Chía, vive en compañía de sus padres y abuela, tiene 16 años y se graduó el 7 de diciembre del 2020 del Colegio Nueva York, ubicado en el norte de la ciudad de Bogotá. La segunda estudiante (la llamaremos Isa), vive en la ciudad de Bogotá, en compañía de sus padres, hermana, abuelos y mascotas, tiene 15 años y esta en grado 11 del colegio Agustiniano Sede Salitre.

Isa y Nata se caracterizan por su gusto por aprender y una curiosidad que las lleva por lo general a leer e indagar sobre temas muy variados, ambas son artistas Nata es artista plástica e Isa canta y toca el piano, la cantidad de tiempo que llevo de conocerlas hace que mi comunicación con ellas sea un poco mas abierta. Teniendo en cuenta lo descrito por (Gaete, 2015), los adolescentes en general se caracterizan por un incremento de las habilidades de pensamiento abstracto y en un desarrollo cognitivo amplio también por su creatividad, aunque no se comunican muy fácil con personas que representan algún tipo de autoridad, esto los lleva a ser críticos y reservados con sus padres y con la sociedad en general, esto no sucede con sus pares.

## 4.2. Análisis prueba piloto

Esta primera versión de la actividad, tenía los pasos de construcción y las preguntas programadas como una macro en la vista gráfica de GeoGebra, pero para que ellas pudieran trabajar en ella, era necesario enviarlo al correo y también tenían que tener GeoGebra instalado en el pc.

### 4.2.1. Intervención prueba piloto

A continuación se presenta una tabla donde se comparan los momentos de la actividad como se sugiere para aplicarla de forma presencial y como se realizó con Isa y Nata de forma virtual.

Contraste Presencial vs Virtual			
Momentos de la actividad	Presencial	Nata	Isa
1. Inicio	Saludo y presentación de la maestra en formación	Enviar el enlace y conectarse a la llamada	Enviar el enlace y conectarse a la llamada
2. Apertura de la actividad	Pedir a los estudiantes que ingresen a la actividad previamente instalada en los pc	Enviar al correo la actividad y explicarle como puede abrirla con GeoGebra	Enviar al correo la actividad, ayudarle a instalar GeoGebra indicándole donde ingresar y enviando el enlace para descargar el programa, después explicarle como puede abrir la actividad con GeoGebra
3. Indicarles como funciona la interfaz	El botón siguiente les va a ir mostrando lo que deben hacer, con el botón anterior se pueden devolver, la idea es seguir los pasos de construcción, lean atentamente y utilicen las herramientas de GeoGebra para que sea más fácil		
4. Pasos de construcción	Pasar por los puestos revisando cuidadosamente sin interrumpir la dinámica de la clase, en caso de que un estudiante presente duda con algo realizar preguntas o dar pautas orientadoras, sin darles las respuestas	Como están compartiendo pantalla se puede ver que fortalezas y dificultades tienen durante el proceso de construcción	
5. Retro acción	Comparar la construcción con la imagen que les da el sistema, con esto realizar las correcciones pertinentes		

6. Responder preguntas	Durante esta etapa van respondiendo una preguntas, con la finalidad que los lleve a encontrar la pendiente de la recta que construyeron
7. Cierre	La interfaz les presenta una serie de conclusiones para ayudar a institucionalizar el concepto deseado; durante este momento de la actividad, la docente en formación apoyara, reafirmando que al calcular la derivada de una función y evaluar el valor de la coordenada en $x$ se esta calculando la pendiente de la recta tangente a la función en cualquier punto en esta, siempre y cuando esta exista

Cuadro 4.1: Momentos de la actividad según la modalidad.

#### 4.2.2. Análisis prueba piloto

Análisis de la actividad realizada por Isa y Nata		
Momentos de la actividad	Nata	Isa
1. Apertura de la actividad	Se evidenció que era necesario buscar otro medio para implementar la actividad, ya que obliga a las personas a instalar el programa GeoGebra, descargar la macro y anclarla al programa para poderla abrir, en ese momento me di cuenta que en un curso donde la cantidad de estudiantes ronda al rededor de 30 personas, esto seria demasiado tedioso y difícil de lograr desde la virtualidad, para poder implementarla	
2. Indicarles como funciona la interfaz	Ella empezó de inmediato a presionar el botón anterior y siguiente, y dijo "que lindo te va diciendo que hacer, y también lo puedo devolver"	Al Principio no quería tocar nada, ella solo dijo: "no conozco bien el programa GeoGebra, de pronto daño algo sin querer y no quiero que eso pase".

3. Pasos de construcción	La mayor dificultad fue que no conocían bien el programa GeoGebra, durante la construcción lo que mas dificultad les dio fue saber donde estaban las herramientas, pero para no decirles donde buscar como tal, se les explico que si necesitaba algo por ejemplo relacionado con puntos: punto medio, punto de intersección eso se busca en el conjunto de herramientas de punto, lo mismo sucede con las rectas, polígonos y demás	
	Se puso a revisar todas las herramientas antes de continuar con la construcción, y después de eso ya era solo cuestión de símbolos por ejemplo $\odot B_{,2OB}$ , nunca lo había visto	Poco a poco empezó a manipular más la interfaz, e ir resolviéndola con más confianza, me decía que no quería dañarla por que era muy importante hasta que le dije que no se preocupara que excitaban muchas copias y no habría problema con eso, a demás si se llegara a equivocar no va a pasar nada malo, la única idea es que aprendas algo nuevo, después continuo diciendo, aquí puedo encontrar las rectas perpendiculares ¿verdad?

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA  
NACIONAL

*Educadora de educadores*

4. Retro acción	<p>Al comparar la imagen que le mostró la interfaz con la suya, dijo que estaba bien ya que era igual, pero cuando le pedí que moviera el punto <math>A</math> la construcción se dañó, la maestra en formación le preguntó ¿qué crees que le faltó? a lo que ella responde, cuando puse el punto <math>B</math> por que no se mueve con la recta otra recta”, refiriéndose a la recta <math>\overleftrightarrow{AB} \perp</math> al eje <math>y</math> por el punto <math>A</math>, como ella misma logró encontrar el error, después se le pregunto ¿cómo lo puedes corregir? donde respondió, devolverme hasta llegar hasta ese paso y retomar desde allí.</p>	<p>En el momento de compara su contracción con la imagen, las tenía perfectas y también estaba bien construida, relámete esto se dio porque en el momento 4 ella preguntaba para cada paso que le pedían realizar, ya que no estaba segura.</p>
5. Responder preguntas	<p>La primera dificultad que se presentó fue con la recolección de los datos en tiempo real, ya que aunque la interfaz les brinda las preguntas, ellas debían responder en el cuaderno y no había forma de realizar retroacción automáticamente, la solución en ese caso fue ir realizado comentarios muy puntuales o realizar otra pregunta con el objetivo de indagar cómo iban con el desarrollo de la actividad e ir al tanto de las dificultades que tuvieran si este fuera el caso, teniendo muy en cuenta el no interferir en su proceso de deducción. Sin embargo, en general no fue necesario intervenir mucho, sólo se dio cuando tenían que encontrar la pendiente de la recta de forma gráfica, debido a que ninguna de las dos recordaban cómo hacerlo, por lo que fue necesario realizar un pequeño ejercicio intermedio para ayudarlas a recordar el procedimiento</p>	

6. Cierre	Mas que un comentario ella hizo la siguiente pregunta ¿entonces que cuando se calcula la derivada es la pendiente de esa recta? la MF le responde que si, pero esa recta es muy especial por que como puedes ver cuando se compara con la tangente del programa GeoGebra son la misma recta, esto quiere decir que es la pendiente de la recta tangente, ella se sorprende y me dice que por que no le habían dicho eso nunca en el colegio, la MF le dice alguna vez escuchaste decir al profesor "la derivada es la pendiente de la recta tangente", ella se queda pensando y grita, si ¿por qué no lo había entendido si es una "bobada"?	Ella hasta ahora estaba empezando a ver el tema de la derivada y dijo que si había escuchado al profesor decir "la derivada es la pendiente de la recta tangente", pero no lo había entendido, solo es eso, no hay nada mas que decir es la pendiente de esa recta, repetía ella mientras hacia gestos de que es tan obvio, ahora si ya entendí, entonces la MF le dice por esa razón cuando veas aplicaciones de las derivadas te van a decir que es una razón y se le conoce como la razón de cambio de la variable $y$ con respecto a la variable $x$ .
-----------	--	--

Cuadro 4.2: Análisis y reflexiones de la tabla 4.1

Durante el desarrollo de la prueba piloto, se llegó a la conclusión que es necesario cambiar el medio, para facilitar la apertura de la interfaz, recolección de datos y demás, ya que se implementaría con un curso de 11 en modalidad virtual y sería imposible realizar los pasos de apertura de forma óptima para su instalación y desarrollo.

Gracias a eso se encontró una versión virtual de GeoGebra donde permite crear actividades tipo libro, tiene variedad de preguntas como de selección múltiple o abiertas a las que de inmediato se puede realizar la retroacción, otra ventaja es que las respuestas llegan de forma automática al correo del docente y lo único que necesitan para ingresar a la actividad es un enlace ya que se realiza completamente en línea.

### 4.2.3. Intervención Actividad grupal y análisis

Después de la prueba piloto, se implementó una sola actividad con el curso 11-B del colegio Teresiano sede Bogotá, el curso estaba conformado por 35 estudiantes, todas mujeres, con un rango de edad entre los 16 y 17 años, Estas condiciones académicas permiten evidenciar la homogeneidad del grupo de estudio en el que se implemento. Teniendo en cuenta que solo contaba 40 minutos para el desarrollo de la actividad elegí implementar el momento 1 de la actividad 2.

También se modificó completamente el medio gracias a los resultados y reflexiones obtenidos con la prueba piloto, esto se logro gracias a que se monto la actividad en el aplicativo GeoGebra en linea, el cual permite crear documentos completos con contenido explicativo, interfaz de construcción o manipulación y crear cuestionarios en linea, en la metodología se adapto la dinámica para aprovechar el tiempo teniendo en cuenta este factor, la MF decidió ir realizando la construcción con las estudiantes de esta forma evitar retrasos en caso de que no conocieran bien el programa GeoGebra y como manejar las herramientas de este programa.

Puesta en escena actividad grupal	
Momentos de la actividad	Grupo 11B
1. Inicio	Saludo y presentación de la MF, se abre la llamada desde The Classroom, y todas la estudiantes se empiezan a unir después se toma asistencia y se da inicio a la clase.
2. Apertura de la actividad	Antes de enviar el enlace de la actividad se les pregunta si alguna vez han trabajado con GeoGebra, a lo que no se obtuvo respuesta, la MF preguntó si la estaban escuchando, una estudiante respondió que sí y que también lo habían trabajado algunas veces, después la MF presenta pantalla donde ellas pueden ver la interfaz, y les explica que, por el chat de la llamada se envía el enlace de la actividad, la idea es que todas sigamos la construcción paso a paso, la MF también la va a ir realizándola para quienes tengan dudas que cómo se usa el programa puedan resolverlo más fácilmente.
3. Indicarles como funciona la interfaz	La MF inicia indicando que los dos botones que hay en la parte de abajo (anterior y siguiente) les van a ir mostrando los pasos de construcción ya sea para ir avanzando o devolverse según lo requieran.

4. Pasos de construcción	La MF, mientras compartía pantalla, iba realizando la construcción y haciendo algunas preguntas a lo que ellas solo respondían si o no únicamente por el chat, hasta que una estudiante abrió el micrófono y dijo: "Ya no puedo más, si me pongo a escribir por el chat, me voy a demorar la vida entera, es mas fácil hablar. . <sup>E</sup> sto hizo que las compañeras se rieran y se relajaran durante el resto de la actividad, también algunas empezaron a participar más con el micrófono.
5. Retro acción	En el momento que algunas iban llegando a la parte de la comparación de la imagen, una de ellas decía que cuando movía el punto <i>A</i> no era igual que la imagen de la MF, se le pidió presentar pantalla por que quizá su dificultad podía ayudar a otras compañeras con la misma situación, a lo que muchas respondieron por el chat, "si profe yo no se que pasó" dijo una de ellas. Después de explicar lo del punto de intersección lograron corregir sus construcciones y continuar con el siguiente momento.

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA  
NACIONAL

*Educadora de educadores*

6. Responder preguntas	Cuando inició la parte de las preguntas, como algunas estudiantes tenían el micrófono abierto se podía escuchar comentarios como, pues es el mismo punto ó otra estudiante dijo: Cierro profe que la respuesta es que cambia obviamente. ^ a lo que otra estudiante dijo que no dijera las respuestas que eso toca individual, la MF les dijo que en ningún momento se había dicho que era individual tampoco se dijo que no pudieran compartir sus opiniones o preguntar con tranquilidad, pero si quería ver ustedes como lo tomaban ustedes, así que después de ese comentario ellas empezaron a discutir algunas respuestas, eso me gustó porque, habían comentarios como ha yo esa no la había entendido o yo pensé que era la otra, al momento de llegar al cálculo de la pendiente de forma gráfica, la MF les mostró otro pequeño ejercicios que ya tenia preparado, les explicó cómo se calcula la pendiente a partir de la gráfica, después se les dijo entonces ¿cuál es la pendiente de esa recta? Se realizo el calculo con ellas de la pendiente de la recta llegando a que era $m = 2x$ después se les pidió que derivaran la función $f(x) = x^2$ , a lo que una de ella dijo que era $f'(x) = 2x$ y otra de inmediato pregunto ¿por que es el mismo?
------------------------	---

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA  
NACIONAL

*Educadora de educadores*

7. Cierre	Ya faltando 3 minutos para finalizar, aparece la reflexión y se les pregunta a la estudiantes, que si habían escuchado al profesor decir "La derivada es la pendiente de la recta tangente", algunas respondieron que de pronto si, la MF les dijo al calcular la pendiente de la recta nos dio $m = 2x$ cuando la comparamos con la recta tangente que se construye con el programa nos dimos cuenta que sea la misma, y cuando calculamos la derivada de $f(x) = x^2$ nos dio $f'(x) = 2x$ , en ese momento una de ellas pregunto ¿porque es lo mismo?, la MF respondió la pendiente de esa recta roja es $m = 2x$ y esa recta roja es tangente a la función por el punto $A$ , ahora la razón por la que la pendiente de la recta es igual a la derivada de la función, es por lo mismo que dice tu profe "La derivada es la pendiente de la recta tangente" por esa razón cuando veas aplicaciones de las derivadas te van a decir que es una razón y se le conoce como la razón de cambio.
-----------	---

Cuadro 4.3: Actividad grupal y análisis.

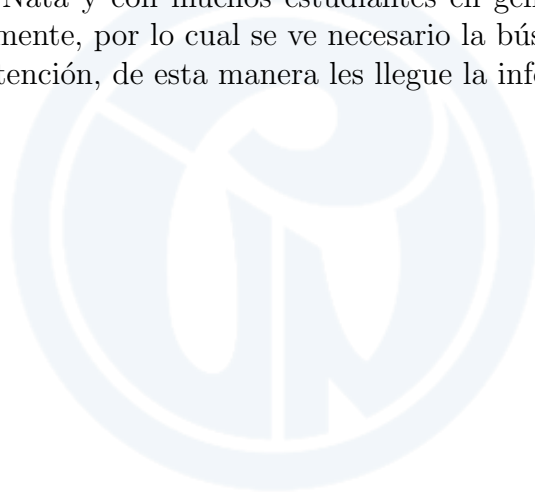
Estas condiciones académicas permiten evidenciar la homogeneidad del grupo de estudio. A diferencia de Isa y Nata (Gaete, 2015), con el curso de 11B del colegio Teresiano, fue muy difícil romper el hielo e incentivar su participación, por esa razón inicialmente con este grupo les dije que podían escribir y si no querían abrir el micrófono, este silencio se rompió gracias a que una estudiante abrió el micrófono, he hizo el siguiente comentario, "Ya no puedo más, si me pongo a escribir por el chat, me voy a demorar la vida entera, es mas fácil hablar". Esto realmente fue lo que rompió el hielo y ayudó a que se lograra el desarrollo de la actividad de una forma más fluida y dinámica.

# Recomendaciones y reflexiones

1. En el capítulo tres se deja una actividad para reforzar el cálculo de la pendiente de forma gráfica, para realizar antes de aplicar la actividad principal, se le llamó Actividad 1, esto con el fin de reforzar ese procedimiento.
2. Aunque se puede realizar la actividad, haciendo uso de regla y compás en caso de no contar con las instalaciones necesarias en los centros educativos, se presenta una dificultad y no es el dinamismo de la construcción que también se pierde, pero por ejemplo para las funciones de la forma  $f(x) = x^n$  con  $n = \pi$ , aunque en el presente trabajo no se trabaja con  $n \in \mathbb{R}$  si no que  $n \in \mathbb{Q}$  la construcción también sirve para todos los reales, por esta razón la falta de un programa de geometría dinámica puede ser un factor decisivo al momento de querer expandir la actividad.
3. Gracias al surgimiento de lo que hoy se conoce como paquetes computacionales de geometría dinámica, es posible profundizar en las aproximaciones gráficas numéricas en los conceptos matemáticos. Particularmente en el presente trabajo, se utiliza el software de geometría interactiva GeoGebra, para proponer actividades de aprendizaje mediante construcciones gráficas-numéricas manipulables directamente en pantalla.
4. En muchas ocasiones cuando el docente le da la información al estudiante este no logra comprenderlos, inmediatamente; diseñar actividades que les cambie constantemente o les de como retos nuevos es muy útil para mantener su atención.
5. Al realizar sesiones personalizadas, fue mucho mas fácil evidenciar el progreso de cada una, y las fortalezas y debilidades que pudieran presentar, esto ayudó a mejorar toda la actividad y ver la necesidad de otra para reforzar conceptos previos.

6. Por mucho que a los estudiantes se le repita una y otra vez que un concepto, es muy difícil que lo interioricen si no se tiene un acercamiento concreto, esto lo evidenció con Nata, en el cierre de la primera intervención la versión uno, ella dijo: zo no sabia que la derivada era la pendiente de una recta, yo si escuchaba que el profé escribía eso siempre y también repetía que la derivada es la pendiente de la recta tangente pero nunca lo entendí”.

Según (Española, 1852) la acción de escuchar se da cuando se hace con intención esto quiere decir que se esta prestando atención a los sonidos, su procedencia e intención, mientras que oír tan solo es darnos cuenta de que hay un sonido pero no se presta atención, teniendo en cuenta lo dicho anteriormente, el problema evidenciado con Nata y con muchos estudiantes en general, es que se pierde su atención fácilmente, por lo cual se ve necesario la búsqueda de alternativas para captar su atención, de esta manera les llegue la información indicada.



UNIVERSIDAD PEDAGOGICA  
NACIONAL

*Educadora de educadores*

# Conclusiones

1. Se halló la derivada de las funciones de la forma  $f(x) = x^n, n \in \mathbb{Q}$  sin necesidad de hacer cálculos algebraicos, es decir, sin aplicar la regla de las potencias. Esto se logró generalizando el método de (Tellechea y Robles, 2013), construyendo de manera geométrica y rigurosa la recta tangente a la función en cualquier punto.
2. A los estudiantes se les puede insistir una y otra vez en una definición o concepto, pero si ellos no interactúan con él, difícilmente lograrán interiorizarlo.
3. La visualización es muy importante en el desarrollo cognitivo de los estudiantes, por eso es necesario crear actividades que fomenten la retentiva de información a través de esta en los estudiantes.
4. La actividad resultó favorable para apoyar la introducción del concepto de derivada, ya que durante la aplicación de la misma se obtuvieron resultados positivos por parte de los estudiantes, incluso más de lo que se esperaba.
5. Al realizar la prueba piloto se tuvo que modificar un poco el medio, esto fue útil para la aplicación grupal, lo cual permitió que los estudiantes se familiarizarán más con él, logrando también un manejo más amigable para ellos.
6. El uso de software dinámico da una nueva dimensión al aspecto geométrico, ya que permite transitar de la graficación estática tradicional a la visualización dinámica, donde las representaciones geométricas adquieran “vida propia” y arrojan valiosa información, permitiendo que el alumno conjeture sobre resultados que posteriormente se formalizarán en el curso. Esto sumado a que en el día a día que vivimos, los estudiantes son usuarios frecuentes de la tecnología esto hace que ¡¡exijan!! de alguna manera, que las dinámicas de las sesiones de clase cambien para capten mayormente su atención.

# Apéndice A

## Problemas de Apolonio

A continuación se describen algunos problemas de Apolonio y sus construcciones correspondientes, tener en cuenta que se nombraran  $C$  la circunferencia,  $R$  a la recta y  $P$  al punto

1. PPP. Dados tres puntos no colineales, construir una circunferencia que los contenga.

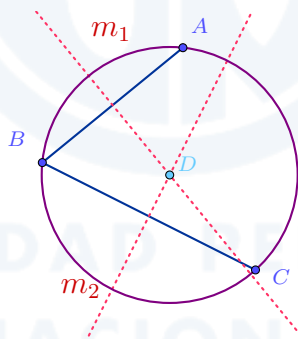


Figura A.1: PPP, Problema 1 de Apolonio

Pasos de construcción:

Dados  $A, B$  y  $C$  puntos no colineales.

- a) Construir los segmentos  $\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$ .
- b) Construir las mediatrices  $m_1$  y  $m_2$  de los segmentos  $\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$  respectivamente.
- c)  $m_1 \cap m_2 = \{D\}$ .

d)  $\odot D, AD$ .

2. PPR. Dados dos puntos y una recta, construir una circunferencia tangente a la recta y que contenga a los dos puntos.

Este problema se divide en 3 casos, a continuación se muestran las condiciones que tienen de cada caso y los pasos de construcción para cada uno de ellos.

\* Caso 1: Si los dos puntos dados pertenecen a una recta paralela a la recta dada.

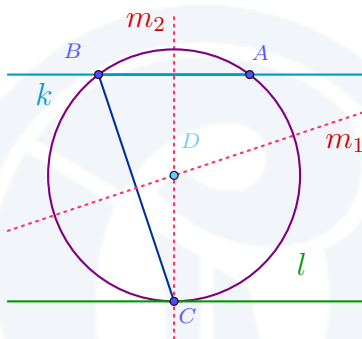


Figura A.2: PPR, Problema 2 de Apolonio, (caso 1)

Pasos de construcción:

Dados la recta  $k$ ,  $A, B \in k$ .

a)  $\overline{AB}$

b)  $m_2$  mediatriz de  $\overline{AB}$

c)  $l \perp m_2$  por  $C$ .

d)  $\overline{BC}$ .

e)  $m_1$  mediatriz de  $\overline{BC}$ .

f)  $m_1 \cap m_2 = \{D\}$ .

g)  $\odot D, AD$ .

\* Caso 2: Si los puntos  $A$  y  $B$  no están en una recta paralela a la recta dada.

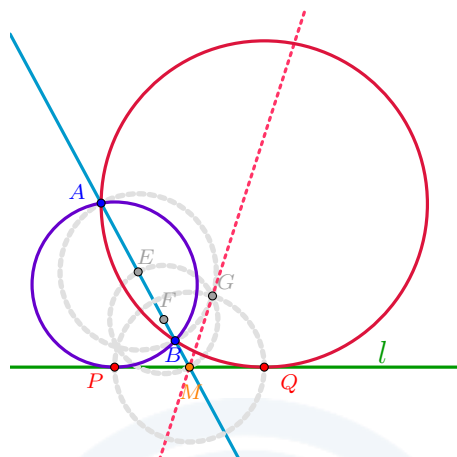


Figura A.3: PPR, Problema 2 de Apolonio, (caso 2)

Pasos de construcción:

Dados los puntos  $A$  y  $B$  y la recta  $l$  tal que  $A, B \notin l$

- a) Sean la recta  $k$ ,  $A, B \in k$ .
- b)  $l \cap k = \{M\}$ .
- c)  $E$  punto medio de  $\overline{AB}$ .
- d) Construir  $\odot E, BE$ .
- e)  $F$  punto medio de  $\overline{EM}$ .
- f) Construir  $\odot F, FM$ .
- g)  $\odot E, BE \cap \odot F, FM = \{G\}$ .
- h) Construir  $\odot M, MG$ .
- i)  $l \cap \odot M, MG = \{P, Q\}$ .
- j) usando el problema PPP construir la circunferencia que contiene a los puntos  $P, A, y B$ .
- k) usando el problema PPP construir la circunferencia que contiene a los puntos  $Q, A, y B$ .

Las circunferencias resultantes en los ítem  $j$  y  $k$  son tangentes a la recta  $l$  y pasan por los puntos  $A$  y  $B$ .

Algo interesante es que  $\overleftrightarrow{MG}$  resulta ser tangente a  $\odot E, BE$ .

\* Caso 3: Cuando uno de los puntos está sobre la recta dada.

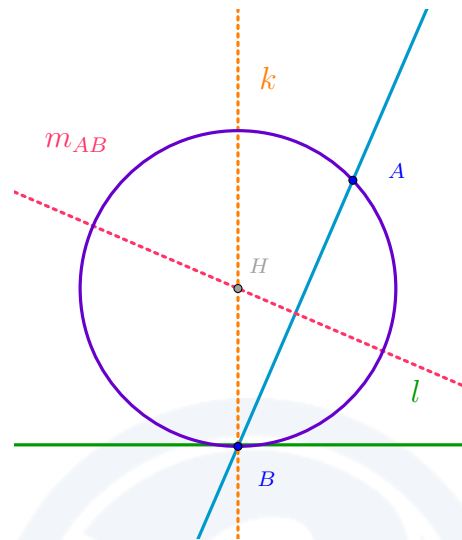


Figura A.4: PPR, Problema 2 de Apolonio, (caso 3)

Pasos de construcción:

Dados la recta  $l$ ,  $B \in l$  y  $A \notin l$ .

- a) Construir  $m_{AB}$  tal que  $m_{AB}$  es la mediatriz de  $\overline{AB}$ .
- b) Construir la recta  $k$  tal que  $k \perp l$  por  $B$ .
- c)  $l \cap k = \{H\}$ .
- d) Construir  $\odot H,_{HB}$ .

La circunferencia  $\odot H,_{HB}$  es tangente a la recta  $l$  por el punto  $B$ .

3. RRR. Dadas tres rectas, construir una circunferencia tangente a ellas.

Este problema se divide en 2 casos, a continuación se muestran las condiciones que tienen de cada caso y los pasos de construcción para cada uno de ellos.

\* Caso 1: Si dos de las rectas son paralelas y una transversal a ellas.

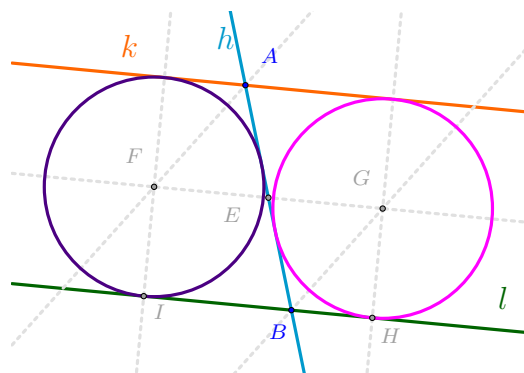


Figura A.5: RRR, Problema 3 de Apolonio, (caso 1)

Pasos de construcción:

Dados la recta  $k \parallel l$  y la recta  $h$  transversal a ellas.

a)  $l \cap h = \{B\}$ .

b)  $k \cap h = \{A\}$ .

c)  $E$  punto medio de  $\overline{AB}$ .

d) construir la recta  $i \parallel l$  por el punto  $E$

e)  $C \in l$

f) Sea  $j$  es la bisectriz del ángulo  $\angle CBA$ .

g)  $j \cap i = \{G\}$ .

h) la recta  $f \parallel j$  por el punto  $A$ .

i)  $f \cap i = \{F\}$ .

j) Construir la recta  $m$  tal que  $m \perp l$  por  $G$ .

k)  $m \cap l = \{H\}$ .

l) Construir la recta  $n$  tal que  $n \perp l$  por  $F$ .

m)  $n \cap l = \{I\}$ .

n) La circunferencia  $\odot G, GH$ .

ñ) La circunferencia  $\odot F, FI$ .

Las circunferencias  $\odot G, GH$  y  $\odot F, FI$  son tangentes a las rectas  $k$ ,  $h$  y  $l$ .

\* Caso 2: Las tres rectas son secantes entre si

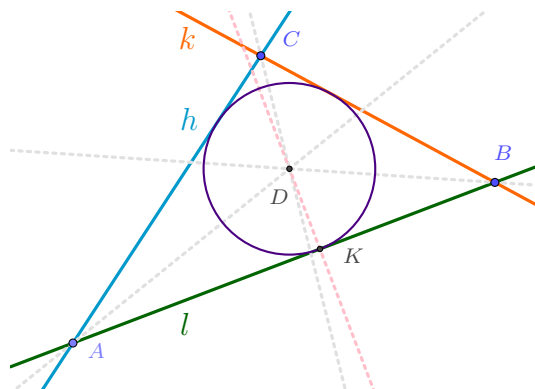


Figura A.6: RRR, Problema 3 de Apolonio, (caso 2)

Pasos de construcción:

Dadas la recta  $k$ ,  $l$  y  $h$  secantes entre si.

- a)  $l \cap k = \{B\}$ .
- b)  $h \cap l = \{A\}$ .
- c)  $K \cap h = \{C\}$ .
- d) tenemos el triángulo  $\triangle ABC$ .
- e) sea  $D$  El incentro triángulo  $\triangle ABC$ .
- f) construir la recta  $i \perp l$  por el punto  $D$ .
- g)  $l \cap i = \{K\}$ .
- h) La circunferencia  $\odot D, DK$ .

La circunferencia  $\odot D, DK$  es tangente a las rectas  $k$ ,  $h$  y  $l$ .

4. PPC. Dados dos puntos y una circunferencia, hallar la circunferencia que contenga a los dos puntos y sea tangente a la circunferencia.

Este problema se divide en 4 casos, a continuación se muestran las condiciones que tienen de cada caso y los pasos de construcción para cada uno de ellos.

- \* Caso 1: los puntos  $A$  y  $B$  son (exteriores) o (interiores) a la circunferencia dada.

Construcción cuando los puntos  $A$  y  $B$  son exteriores:

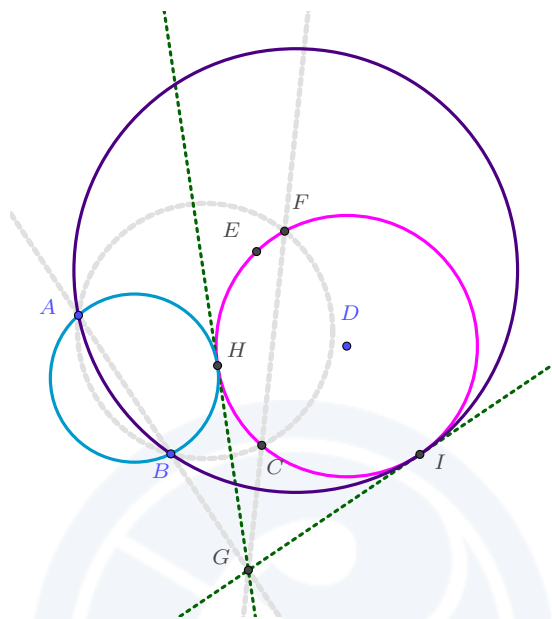


Figura A.7: PPC, Problema 4 de Apolonio, (caso 1 los puntos son externos)

Construcción cuando los puntos  $A$  y  $B$  son interiores:

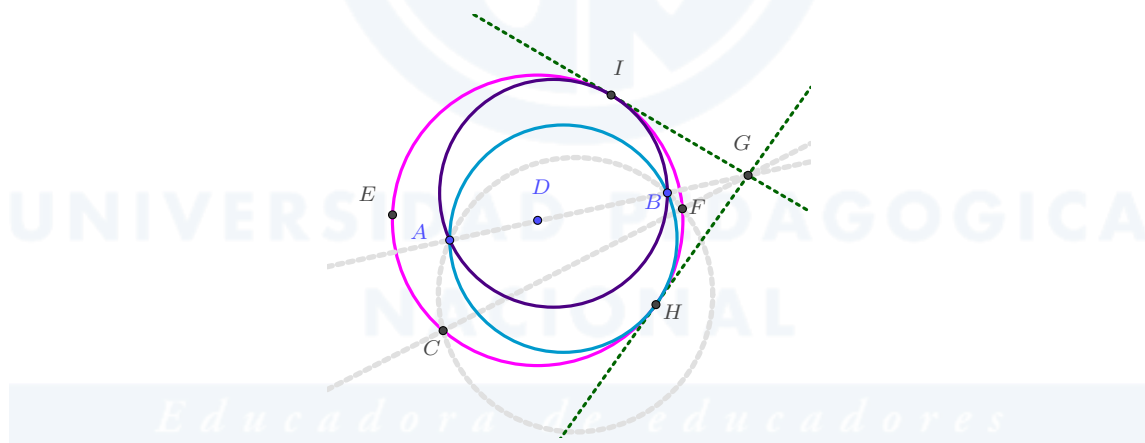


Figura A.8: PPC, Problema 4 de Apolonio, (caso 1 los puntos son internos)

Dados los puntos  $A, B$  (exteriores) o (interiores) la circunferencia  $\odot D, DE$ .

Pasos de construcción:

- a) Construir la circunferencia  $h$  tal que contenga los puntos  $A, B$  y se interseque con  $\odot D, DE$ .

- b)  $\odot D, DE \cap h = \{F, C\}$ .
- c)  $\overleftrightarrow{AB}$  y  $\overleftrightarrow{CF}$ .
- d)  $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{AB} = \{G\}$ .
- e) Usando la construcción de PPR (Caso 2) construir  $\overleftrightarrow{HG}$  y  $\overleftrightarrow{GI}$  tangentes a la circunferencia  $\odot D, DE$ .
- f) Usando el problema PPP construir las circunferencias que pasan por las triadas de puntos  $A, B, H$  que nombraremos  $k$  y  $A, B, I$  que nombraremos  $j$ .

Las circunferencias  $k$  y  $j$  son tangentes a la circunferencias  $\odot D, DE$  y contiene los puntos  $A$  y  $B$ .

- \* Caso 2: los puntos  $A$  y  $B$  pertenecen al interior de la circunferencia dada. Construcción cuando el punto  $B$  esta en el exterior de la circunferencias  $\odot D, DE$ :

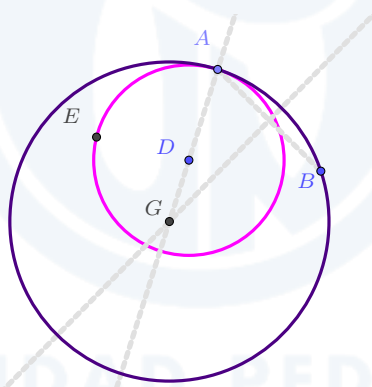


Figura A.9: PPC, Problema 4 de Apolonio, (caso 2 punto externo)

Construcción cuando el punto  $B$  esta en el interior de la circunferencias  $\odot D, DE$ :

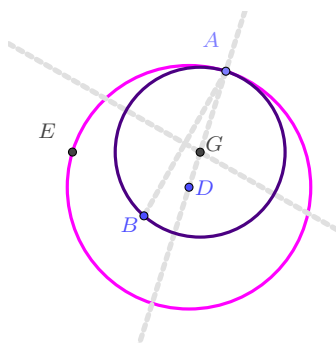


Figura A.10: PPC, Problema 4 de Apolonio, (caso 2 punto interno)

Pasos de construcción:

Dado el punto  $A \in \odot D, DE$  y el punto  $B$  en el (interior) o en el (exterior) de la circunferencia.

a) Construir  $m$  la mediatriz del  $\overline{AB}$

b)  $\overleftrightarrow{AD}$

c)  $\overleftrightarrow{AD} \cap \overline{AB} = \{G\}$ .

d)  $\odot G, AG$

La circunferencia  $\odot G, AG$  es tangente a  $\odot D, DE$  y contiene a los puntos  $A, B$ .

5. RRP. Dadas las rectas  $l$  y  $k$  y el punto  $A$ , construir una circunferencia que sea tangente a las dos rectas y que contenga al punto.

Este problema se divide en 3 casos, a continuación se muestran las condiciones que tienen de cada caso y los pasos de construcción para cada uno de ellos.

- \* Caso 1: Si las rectas se intersecan y el punto pertenece la interior del ángulo comprendido entre ellas.

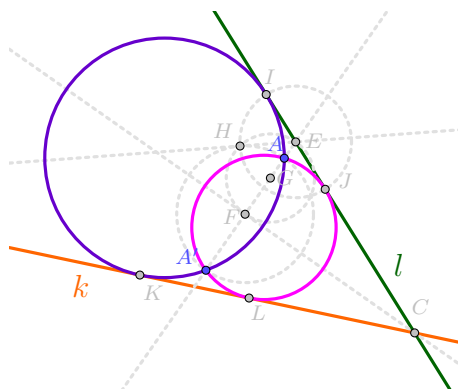


Figura A.11: RRP, Problema 5 de Apolonio, (caso 1)

Pasos de construcción:

Dadas las rectas  $l$  y  $k$  y el punto  $A$  pertenece al interior del ángulo formado entre ellas.

- a)  $l \cap k = \{G\}$ .
- b) sea  $D \in l$  y  $B \in k$ .
- c) Construir  $m$  la bisectriz del ángulo  $\angle BGD$ .
- d)  $A'$  es simétrico al punto  $A$  respecto a la recta  $m$ .
- e) Usar los pasos de construcción de PPR (caso 2), con los puntos  $A, A'$  y las rectas  $l, k$ .

Las circunferencias resultantes son tangentes a las rectas  $l, k$  y pasan por el punto  $A$ .

\* Caso 2: Si el punto  $A$  pertenece a una de las rectas.

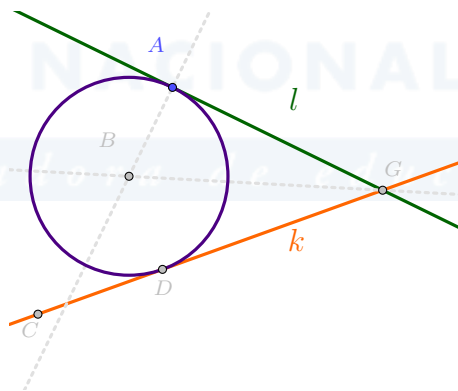


Figura A.12: RRP, Problema 5 de Apolonio, (caso 2)

Pasos de construcción:

Dadas las rectas  $l$  y  $k$  y el punto  $A$  pertenece a una de ellas.

- a)  $l \cap k = \{G\}$ .
- b) sea  $A \in l$ .
- c) sea  $C \in k$ .
- d) Construir  $m$  la bisectriz del ángulo  $\angle AGC$ .
- e) Sea  $h \perp l$  por punto  $A$ .
- f)  $l \cap h = \{B\}$ .
- g)  $\odot B, AB$ .

La circunferencia  $\odot B, AB$  es tangente a la recta  $l$  por el punto  $A$  y a la recta  $k$  por el punto  $D$ .

\* Caso 3: El punto  $A$  está entre las dos rectas  $l \parallel k$ .

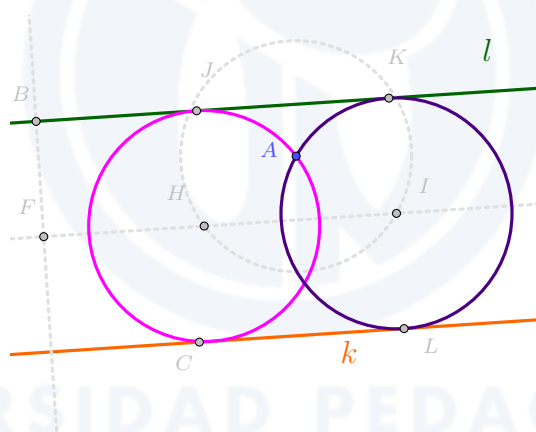


Figura A.13: RRP, Problema 5 de Apolonio, (caso 3)

Pasos de construcción:

Dadas las rectas  $l \parallel k$  y el punto  $A$  pertenece al semiplano comprendido entre ellas.

- a) sea  $B \in l$ .
- b) Sea  $h \perp l$  por punto  $B$ .
- c)  $h \cap k = \{E\}$ .
- d) sea  $F$  punto medio de  $\overline{BE}$ .
- e)  $i \parallel l$  por el punto  $F$ .

- f)  $\odot A, BE$ .
- g)  $\odot A, BE \cap i = \{H, I\}$ .
- h)  $\odot A, AH$  y  $\odot A, AI$ .

La circunferencia  $\odot A, AH$  es tangente a las rectas  $l$  y  $k$  por los puntos  $J, C$  respectivamente y a la circunferencia  $\odot A, AI$  es tangente a las rectas  $l$  y  $k$  por los puntos  $K, L$  respectivamente.

6. PRC. Dado un punto, una recta, y una circunferencia, hallar la circunferencia que sea tangente a la recta y a la circunferencia dadas y contenga el punto.

Este problema se divide en 3 casos, a continuación se muestran las condiciones que tienen de cada caso y los pasos de construcción para cada uno de ellos.

\* Caso 1: Si el punto  $A \in l$

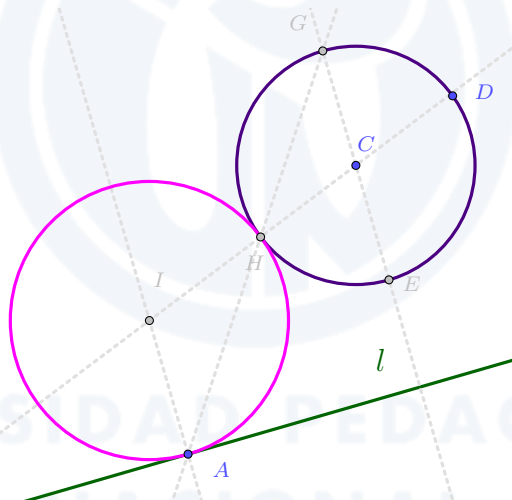


Figura A.14: PRC, Problema 6 de Apolonio, (caso 1)

Pasos de construcción:

Dado el punto  $A \in l$  y el punto  $A$  y la circunferencia  $\odot C, CD$ .

- a) Sean  $h \perp l$  por punto  $C$  y  $r \perp l$  por punto  $A$ .
- b)  $h \cap \odot C, CD = \{G, E\}$ .
- c)  $\overline{AG}$ .
- d)  $\overline{AG} \cap \odot C, CD = \{H\}$ .

e)  $\overleftrightarrow{AH}$ .

f)  $\overleftrightarrow{AH} \cap r = \{I\}$ .

g)  $\odot I, AI$ .

La circunferencia  $\odot I, AI$  es tangente a la recta  $l$  por el punto  $A$  y a la circunferencia  $\odot C, CD$  por el punto  $H$ .

\* Caso 2: Si el punto  $A \in \odot D, DE$

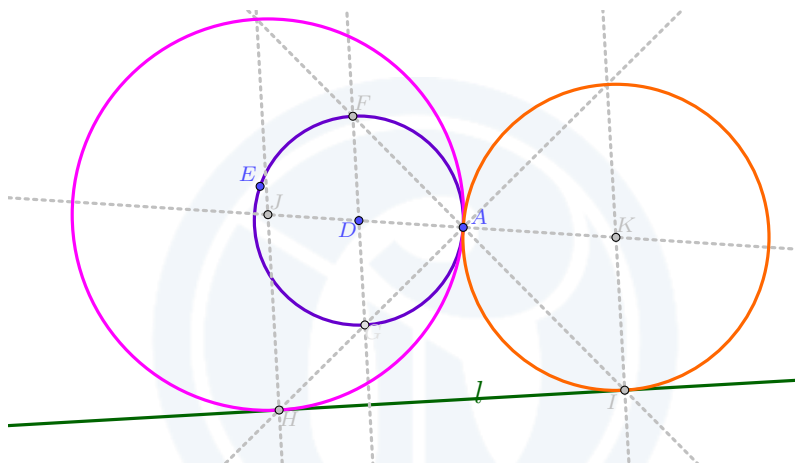


Figura A.15: PRC, Problema 6 de Apolonio, (caso 2)

Pasos de construcción:

Dado el punto  $A \in \odot D, DE$  y la recta  $l$ .

a) Sea  $h \perp l$  por punto  $D$ .

b)  $h \cap \odot D, ED = \{F, G\}$ .

c)  $\overleftrightarrow{AG}$  y  $\overleftrightarrow{AF}$ .

d)  $\overleftrightarrow{AG} \cap \text{recta } l = \{H\}$ .

e)  $\overleftrightarrow{AF} \cap \text{recta } l = \{I\}$ .

f) Sean  $m \perp l$  por punto  $H$  y  $n \perp l$  por punto  $I$ .

g)  $m \cap \overleftrightarrow{AD} = \{J\}$ .

h)  $n \cap \overleftrightarrow{AD} = \{K\}$ .

i)  $\odot J, AJ$  y  $\odot K, AK$ .

Las circunferencias  $\odot J_{AJ}$  y  $\odot K_{AK}$  son tangentes a la recta  $l$  por los puntos  $H$  y  $I$  respectivamente y a la circunferencia  $\odot D_{DE}$  por el punto  $A$ .

\* Caso 3: Si el punto  $A \notin l$  y  $A \notin \odot D_{DE}$

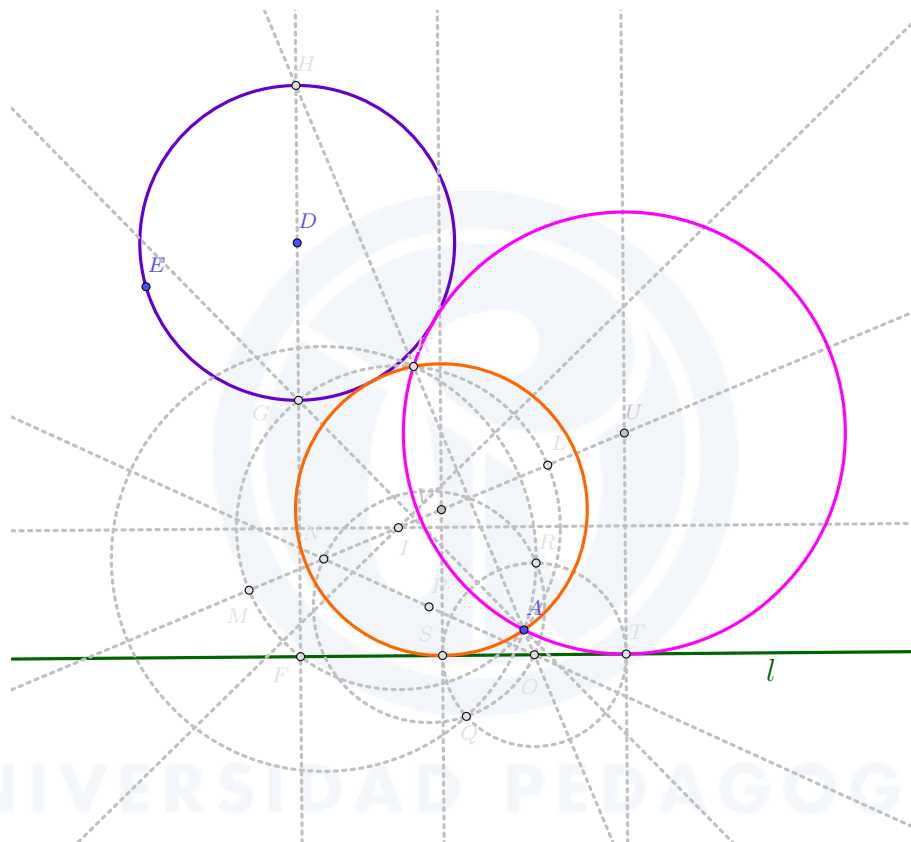


Figura A.16: PRC, Problema 6 de Apolonio, (caso 3)

Pasos de construcción:

- a) Sea  $h \perp l$  por punto  $D$ .
- b)  $h \cap \odot D_{ED} = \{H, G\}$  y  $h \cap l = \{F\}$ .
- c) Sean  $m$  mediatriz  $\overline{GF}$  y  $n$  mediatriz  $\overline{AG}$ .
- d)  $m \cap n = \{I\}$ .
- e)  $\odot I_{IG}$ .
- f) Sea  $\overleftrightarrow{AH}$ .

- g)  $\odot I, IG \cap \overleftrightarrow{AH} = \{K\}$  y  $\overleftrightarrow{AH} \cap l = \{O\}$ .  
 h) Sea  $t$  mediatriz  $\overline{AK}$ .  
 i)  $\odot I, IG \cap t = \{M, L\}$ .  
 j) Sea  $N$  el punto medio de  $\overline{IM}$ .  
 k)  $\odot N, AN$ .  
 l) Sea  $P$  el punto medio de  $\overline{NO}$ .  
 m)  $\odot N, AN \cap \odot P, PO = \{Q\}$ .  
 n)  $\odot O, OQ \cap l = \{T, S\}$ .  
 ñ) Sea  $w \perp l$  por punto  $T$  y  $x \perp l$  por punto  $S$ .  
 o)  $w \cap t = \{U\}$ .  
 p)  $x \cap t = \{V\}$ .  
 q)  $\odot U, AU$  y  $\odot V, AV$ .

Las circunferencias  $\odot U, AU$  y  $\odot V, AV$  son tangentes a la recta  $l$  por los puntos  $T$  y  $S$  respectivamente y a la circunferencia  $\odot D, DE$ .

7. PCC. Hallar una circunferencia que sea tangente a dos circunferencias dadas y pase por un punto.

Este problema se divide en 2 casos, a continuación se muestran las condiciones que tienen de cada caso y los pasos de construcción para cada uno de ellos.

- \* Caso 1: Si el punto  $A$  pertenece a alguna de las dos circunferencias.

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA  
NACIONAL

*Educadora de educadores*

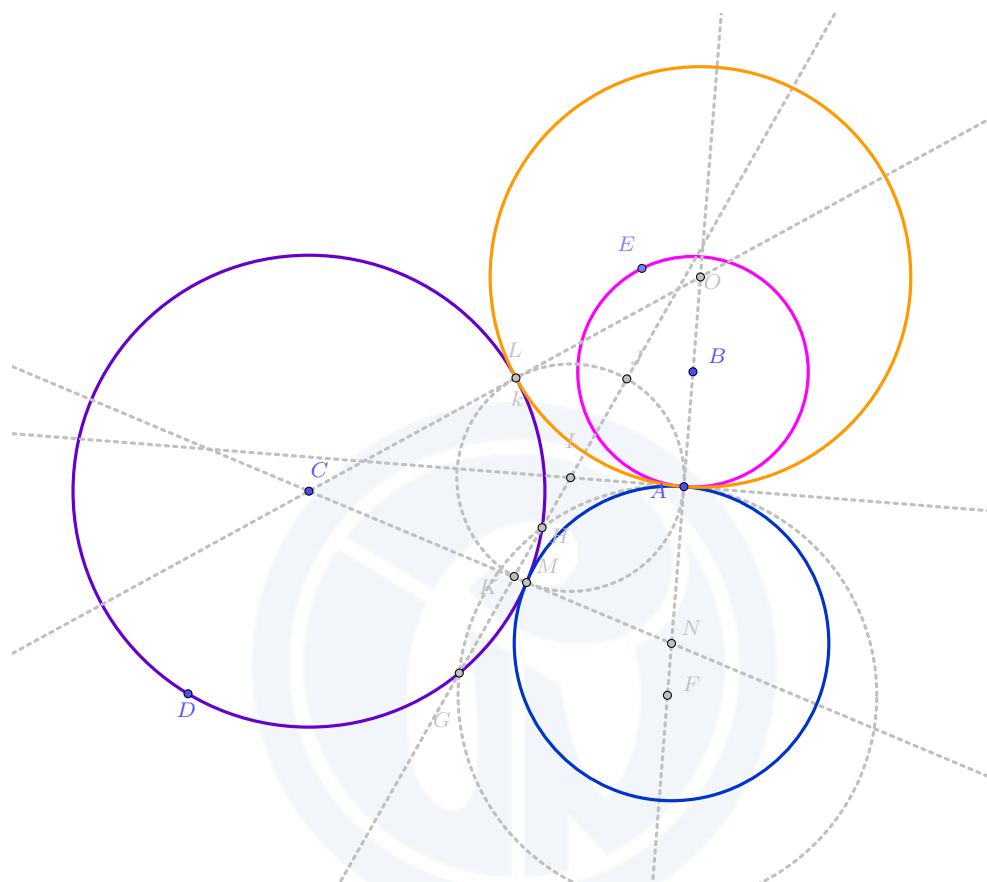


Figura A.17: CCP, Problema 7 de Apolonio, (caso 1)

Pasos de construcción:

- a)  $A \in \odot B, BE$  y  $\odot C, CD$
- b)  $\overleftrightarrow{AB}$ .
- c)  $l \perp \overleftrightarrow{AB}$ .
- d) Sea la  $\odot F, AF$ , tal que se interseque por dos puntos con la  $\odot C, CD$ .
- e)  $\odot F, AF \cap \odot C, CD = \{G, H\}$ .
- f)  $\overleftrightarrow{GH} \cap l = \{I\}$
- g)  $\odot I, AI$ .
- h)  $\odot C, CD \cap \odot I, AI = \{M, L\}$ .
- i)  $\overleftrightarrow{CL}$  y  $\overleftrightarrow{CM}$ .

$$j) \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CM} = \{N\}.$$

$$k) \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CL} = \{O\}.$$

$$l) \odot N,NA \text{ y } \odot O,OA.$$

Las circunferencia  $\odot N,NA$  y  $\odot O,OA$  son tangentes a las  $\odot C,CD$  por los puntos  $l$  y  $M$  y a  $\odot B,BE$ , por el punto  $A$ .



UNIVERSIDAD PEDAGOGICA  
NACIONAL

*Educadora de educadores*



**UNIVERSIDAD PEDAGOGICA  
NACIONAL**

*Educadora de educadores*

## Apéndice B

### La recta tangente para otras funciones

#### B.1. Construcción de la tangente para $f(x) = e^x$

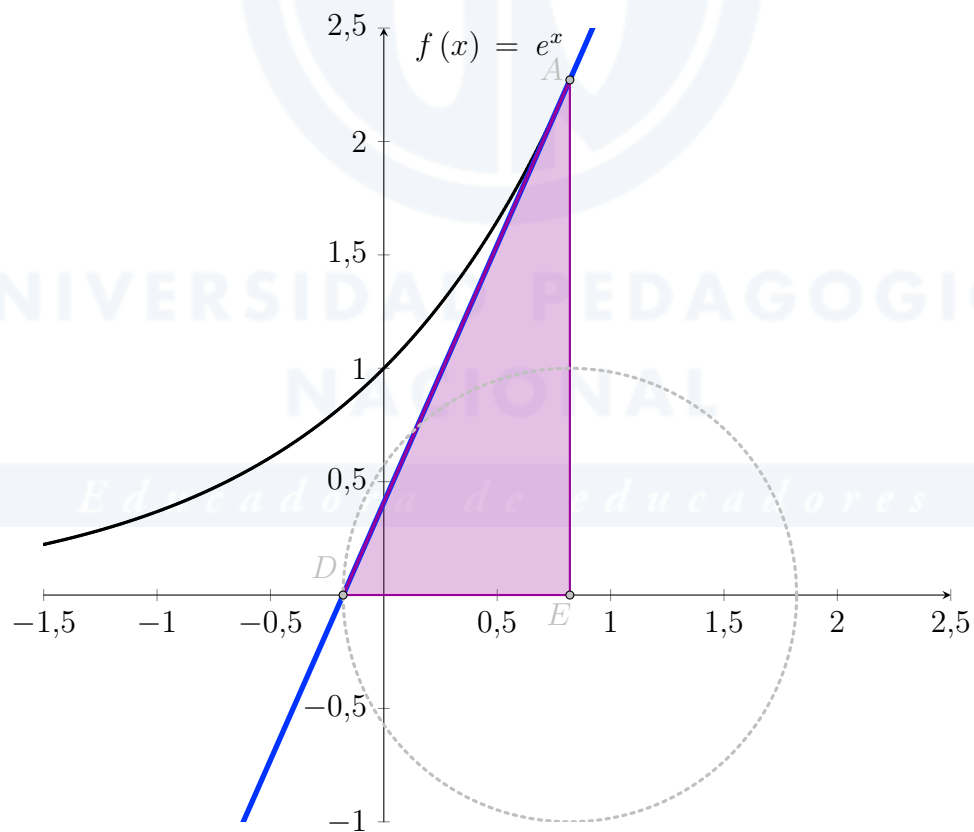


Figura B.1: Tangente de la función  $f(x) = e^x$

Pasos de construcción:

1. Sea  $A \in f(x)$ .
2.  $l \perp$  al eje  $x$  por  $A$ .
3.  $l \cap x = \{E\}$ .
4.  $\odot E, 1$ .
5.  $\odot E, 1 \cap x = \{D\}$ .
6.  $\overleftrightarrow{AD}$ .

La recta  $\overleftrightarrow{AD}$  es tangente a  $f(x) = e^x$  por el punto  $A$ .

La circunferencia  $\odot E, 1$  tiene ese radio tan específico por que durante la exploración que estaba haciendo para esta función me di cuenta que la base del triángulo  $\triangle AED$  me refiero al segmento  $\overline{ED}$ , nunca cambiaba de tamaño y siempre era 1 sin importar donde este el punto  $A$ , esto cobra sentido cuando se quiere calcular la tangente del ángulo  $\angle ADE$ , se tiene que:

$$\frac{AE}{DE} = \frac{e^x}{1}$$

$$\frac{AE}{DE} = e^x$$

Teniendo esto en cuenta construí la tangente para la función  $f(x) = \ln(x)$ .

## B.2. Construcción de la tangente para $f(x) = \ln(x)$

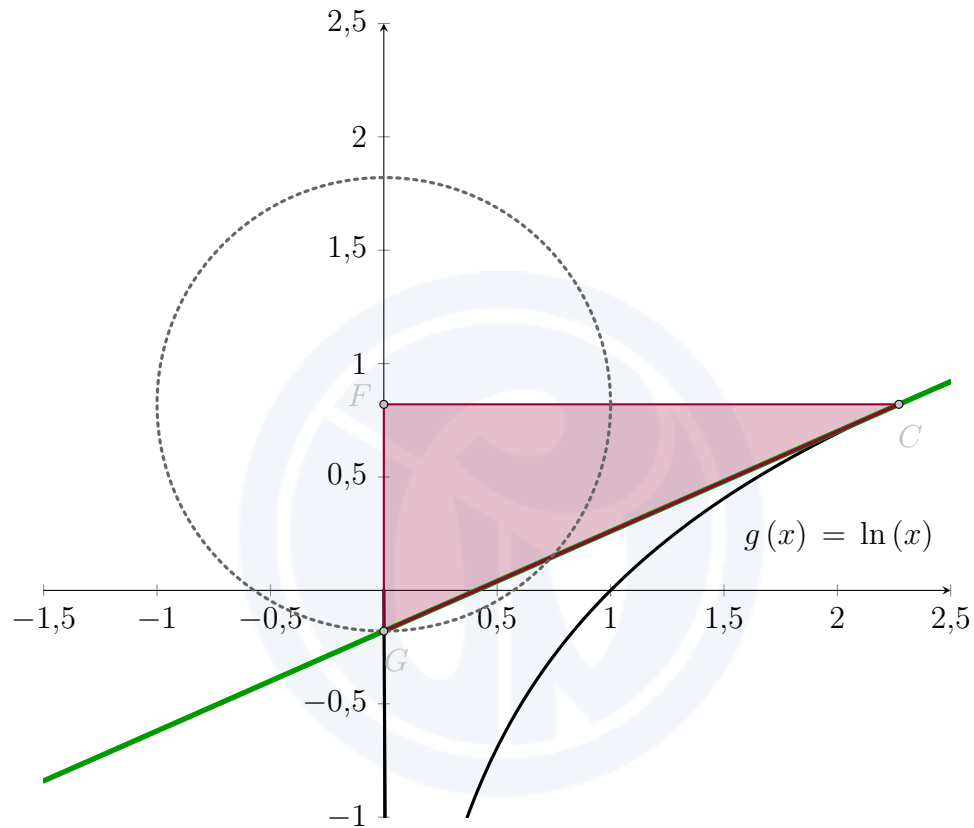


Figura B.2: Tangente de la función  $f(x) = \ln(x)$

Pasos de construcción:

1. Sea  $C \in f(x)$ .
2.  $m \perp$  al eje  $y$  por  $C$ .
3.  $m \cap y = \{F\}$ .
4.  $\odot F_{,1}$ .
5.  $\odot F_{,1} \cap y = \{G\}$ .

6.  $\overleftrightarrow{CG}$ .

La recta  $\overleftrightarrow{CG}$  es tangente a  $f(x) = \ln(x)$  por el punto  $C$ .

En consecuencia al calcular la tangente del ángulo  $\angle CGF$ , se tiene que:

$$\frac{CF}{FG} = \frac{1}{x}$$

### B.3. Comparación entre la tangente para $f(x) = e^x$ y de la $f(x) = \ln(x)$

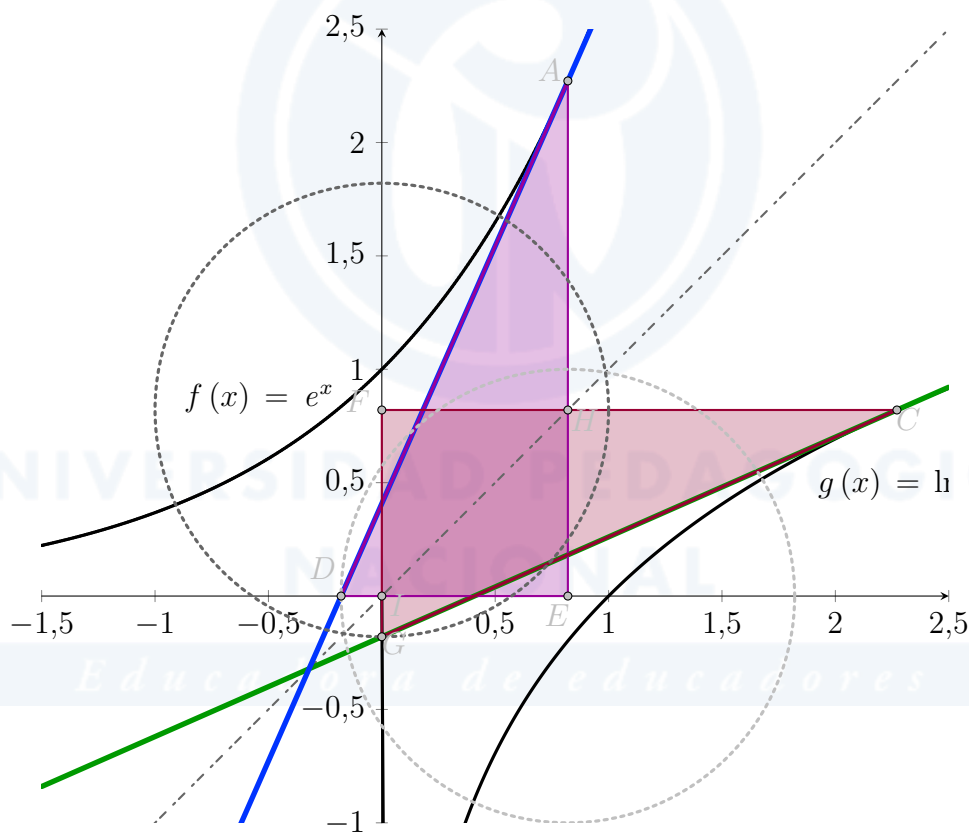


Figura B.3: Tangente para  $f(x) = e^x$  y  $f(x) = \ln(x)$

## Referencias

- Acosta, M. E. (2010). Enseñando transformaciones geométricas con software de geometría dinámica.
- Araya, R. G. (2007). Uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*.
- Areán Álvarez, L. F. (2017). *Un teorema adelantado a su tiempo tres siglos Fermat* (1.ª ed.; Rba, Ed.). Descargado de <https://mega.nz/fm/Zw9HBSAQ>
- Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática. *Recherches en didactique des mathematiques*, 7(2), 33–115.
- Camargo, L., y Acosta, M. (2012). La geometría, su enseñanza y su aprendizaje. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*(32), 4–8.
- Castro, C. B. P. (2010). *Cómputo evolutivo como enfoque en la descripción del contenido de la imagen aplicado a la segmentación y el reconocimiento de objetos* (Tesis de Master no publicada). Centro de investigación científica y de educación superior de Ensenada. *de educadores*
- Descartes, R. (1981). *Discurso del método: dióptrica. meteoros. geometría* (Vol. 21). Alfaguara.
- Española, R. A. (1852). *Diccionario de la lengua castellana*. Imprenta Nacional.
- Fallas-Monge, J. (2011). Visualización del conocimiento en la enseñanza de la ma-

- temática. .
- Flores, P., Lupiáñez Gómez, J. L., Berenger, L., Antonio, M., y Molina, M., González. (2011). *Materiales y recursos en el aula de matemáticas*. Universidad De Granada.
- Gaete, V. (2015). Desarrollo psicosocial del adolescente. *Revista chilena de pediatría*, 86(6), 436–443.
- Hernández, V. M., y Víctor, M. (2002). La geometría analítica de descartes y fermat:¿ y apolonio. *Apuntes de historia de las matemáticas*, 1(1), 32–45.
- Hitt, F. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículum. *Educación matemática*, 10(02), 23–45.
- Mendoza, L. G., Alemán, M. R. B., y Nieves, L. M. A. (2017). Identificación de dificultades en el aprendizaje del concepto de la derivada y diseño de un ova como mediación pedagógica. *Revista Científica General José María Córdova*, 15(20), 137–153.
- Ruiz, A. (2002). Historia y filosofía de las matemáticas. *Euned*, 1, 620. Descargado de [http://www.centroedumatematica.com/aruiz/libros/Historia\\_y\\_filosofia\\_de\\_las\\_matematicas.pdf](http://www.centroedumatematica.com/aruiz/libros/Historia_y_filosofia_de_las_matematicas.pdf) doi: 10.1007/s10764-006-9077-5
- Suhit, G. (2006). La visualización como estrategia para la comprensión. .
- Tellechea, E., y Robles, G. (2013). *La derivada a partir de consideraciones geométricas de la recta tangente* (Inf. Téc.). Hermosillo: Universidad de Sonora.
- Urbaneja, P. (2017). *Apolonio: el dominio de las secciones cónicas*. RBA. Descargado de <https://books.google.com.co/books?id=9Q7KtQEACAAJ>
- Zimmermann, W., y Cunningham, S. (1991). Editor's introduction: What is mathematical visualization. *Visualization in teaching and learning mathematics*, 1–7.