¿EUCLIDES ES A PROPORCIÓN COMO DEDEKIND ES A CORTADURAS?

EIMMY LORENA ZAFRA GRANADOS

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D.C.
2012

¿EUCLIDES ES A PROPORCIÓN COMO DEDEKIND ES A CORTADURAS?

EIMMY LORENA ZAFRA GRANADOS

Trabajo de Grado presentado como requisito para optar por el título de Licenciada en Matemáticas

Edgar A Guacaneme S.

ASESOR
EDGAR ALBERTO GUACANEME
Profesor Departamento de Matemáticas

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D.C.
2012

DEDICATORIA

¡A ti que me has dado todo!

AGRADECIMIENTOS

Gracias a Dios que me permitió concluir con esta etapa de mi vida académica y de forma puntal con la consolidación de este documento, fruto de un largo proceso de estudio y reflexión.

A mis padres que con su esfuerzo y constancia han sabido educarme y enseñarme valores que han sido el motor para alcanzar los proyectos que me he propuesto hasta este momento.

Al profesor Edgar Alberto Guacaneme por su dedicación, paciencia y motivación y sobre todo por su ejemplo de lo que debe ser un educador.

A mis compañeros de carrera, quienes me han brindado su amistad, apoyo, consejos y motivación durante todo este proceso; en especial a Leidy Pita por su apoyo incondicional y sus motivaciones constantes que me alentaron en momentos de dificultad.

Deseo tener el privilegio de seguir contando con ustedes en esta siguiente etapa de mi vida como profesional y que sigan formando parte de ésta, mi historia.

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE

1.Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	¿Euclides es a proporción como Dedekind es a cortaduras?
Autor(es)	Zafra Granados, Eimmy Lorena
Director	Suárez Guacaneme, Edgar Alberto
Publicación	Bogotá, D.C., 2012. p. 74
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional. UPN.
Palabras Claves	Teoría euclidiana de la proporción, números reales, Richard Dedekind, Euclides, educación del profesor de Matemáticas.

2.Descripción
El presente trabajo de grado se desarrolla en el marco de la Licenciatura en Matemáticas del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. Éste se lleva a cabo en tres momentos. Inicialmente se aborda el estudio de dos contenidos centrales: algunos aspectos de la teoría euclidiana de la proporción y la construcción de los números reales de Dedekind. En segundo lugar, y como objetivo esencial del estudio, se analiza el eventual uso que de apartes de la teoría de las proporciones de Euclides hizo el matemático alemán Julius W. R. Dedekind en su construcción de los números reales. Por último, se pretende concluir cuál es el aporte que el estudio histórico hace al conocimiento profesional de la docente en formación.

3.Fuentes

Los textos fundamentales utilizados en el desarrollo del trabajo de grado son:

a) Para el estudio de las definiciones y proposiciones presentes en la teoría euclidiana de la proporción y la construcción de los números reales.

Puertas, M. (1994). *Elementos*. Madrid: Gredos, S.A.

Guacaneme, E. A. (en prensa). *Significados de los conceptos de razón y proporción en el libro V de los Elementos*. En O. León (comp.). Colección Pedagogía y Didáctica; Educación Matemática (pp. 101-137). Bogotá, Doctorado Interinstitucional en Educación. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Guacaneme, E. A. (2008). *¿Teoría euclidiana de la proporción en la construcción de los números reales?* Ponencia presentada en la Segunda Escuela Nacional de Historia y Educación Matemática (ENHEM2). Popayán, 10 a 12 de noviembre.

Guacaneme, E. (2012).*Teoría euclidiana de la proporción en la construcción de los números reales: ¿un asunto útil para un profesor?* Revista Tecné, Epistemé y Didaxis. 31, 113–131.

Dedekind, R. (1872). *Creación de los números Irracionales*. Continuidad y números Irracionales. Traducción y comentarios por J. Bares y J. Climent.

b) Para el estudio del uso de la teoría de las proporciones de Euclides en la construcción de los números reales de R. Dedekind.

Corry, L. (1994). *La teoría de las proporciones de Eudoxio interpretada por Dedekind.* Mathesis. Filosofía e historia de las matemáticas, 10 (1), 1-24.

Cousquer, É. (1994). *De la théorie des proportions à la théorie des nombres réels*. La mémoire des nombres. Commission Inter-IREME pistémologie et Histoire des Mathématiques. Grt. Actes du 10ème colloque Inter-IREMd' épistémologie & d'histoire des mathématiques - Université de Caen - Cherbourg, 27-28 mai 1994. 295-318

Dedekind, R (1872). *De las cartas a R. Lipschitz*. Continuidad y números Irracionales. Traducción y comentarios por J. Bares y J. Climent.

Knorr, W. (1992). *De exhaución a cortaduras: primeras etapas de la teoría griega de las proporciones*. Mathesis. Filosofía e historia de las matemáticas, 8 (1), 1-12.

c) Para concluir el aporte que el estudio histórico hace al conocimiento profesional de la docente en formación.

Guacaneme, E. A. (2011). *La Historia de las Matemáticas en la educación de un profesor: razones e intenciones.* XIII Conferencia interamericana de educación matemática (CIAEM). Recife, Brasil 26-30 de Junio.

4.Contenidos

A continuación se describe el contenido general de cada capítulo del presente trabajo.

Introducción. Se realiza una síntesis acerca de la temática que se dará a conocer en el documento, la finalidad del estudio de dicha temática y la metodología implementada para el desarrollo de la misma.

Capítulo 1: Generalidades del estudio. Se presentan las generalidades del proyecto, planteando el asunto de estudio, la justificación del mismo, los objetivos propuestos para éste y, por último, las actividades que se desarrollaron para el cumplimiento de dichos objetivos.

Capítulo 2: Mirada a la estructura de las teorías. Se presenta la comprensión lograda de los documentos estudiados acerca de la teoría euclidiana de las proporciones y de la construcción de los números reales a través de cortaduras.

Capítulo 3: Recapitulación de perspectivas. Se dan a conocer las reflexiones logradas en cuanto a la repercusión de la proporción euclidiana en la teoría de las cortaduras de Dedekind, desde la mirada de historiadores como Leo Corry, Wilbur R. Knorr y Eliane Cousquer.

Capítulo 4: Repercusiones de la Historia de las Matemáticas en el conocimiento del educador de matemáticas. Se Identifica cuál fue el aporte del conocimiento adquirido por la docente en formación a lo largo del estudio y cómo contribuyó a su desarrollo profesional.

Capítulo 5: Conclusiones. Se exponen las conclusiones obtenidas del estudio.

Anexos: Se presenta la traducción personal del documento en francés “De la théorie des proportions à la théorie des nombres réels” de Eliane Cousquer (1994).

5.Metodología
El presente estudio requirió de los siguientes pasos: Inicialmente se realizó la lectura y estudio de los documentos referentes a la teoría euclidiana de la proporción: (Puertas, 1994 & Guacaneme, 2008). Paso seguido se estudió el documento concerniente a la construcción de los números reales (Dedekind, 1872). Se leyeron y analizaron documentos de historiadores que abordan la relación entre la teoría de las proporciones y la construcción de los números reales (Corry & Cousquer, 1994; Knorr, 1992 & Dedekind, 1872). De acuerdo con el estudio de los documentos mencionados se realizó la reflexión acerca de cuáles son los aspectos de la teoría euclidiana de la proporción que se encuentran presentes en la construcción de los números reales hecha por Dedekind. Por último, teniendo en cuenta las categorías planteadas por Guacaneme (2011) en relación con la pregunta *¿Para qué se plantea la apropiación del conocimiento histórico de las matemáticas por parte de los profesores?,* se reflexionó sobre los aprendizajes logrados por la docente en formación, así como, sobre el aporte y repercusión de éstos al conocimiento del profesional.

6.Conclusiones
Existe una tesis histórica la cual plantea que la teoría de las proporciones de Euclides ha brindado las bases para la construcción de la teoría de los números reales. Algunos historiadores han estudiado los argumentos en pro y en contra de la mencionada equivalencia de dichas teorías y han encontrado que si bien hay elementos que se toman de la teoría Euclidiana, existen también divergencias que deben establecerse; una de estas hace referencia a la presencia del principio de completitud en la teoría de los números reales, principio con el cual no cuenta la teoría de las proporciones. También hay diferencias en cuanto al concepto griego de número ya que es diferente del concepto actual de número abstracto. Por lo anterior se concluye que la teoría de los números reales vía cortaduras no es equivalente con la teoría de las proporciones de Euclides. La apropiación del conocimiento histórico de las matemáticas por parte de los profesores se plantea porque ésta es una fuente de artefactos que le permiten al profesor tener una visión acerca de la actividad matemática y del objeto matemático; también porque el estudio de la Historia de las Matemáticas le permite al docente desarrollar competencias profesionales que no solo tienen que ver con el conocimiento matemático.

Elaborado por:	Eimmy Lorena Zafra Granados
Revisado por:	Edgar Alberto Guacaneme Suárez

Fecha de elaboración del Resumen:	24	11	2012

CONTENIDO

LISTA DE ANEXOS

INTRODUCCIÓN

El trabajo de grado "¿Euclides es a proporción como Dedekind es a cortaduras?" consiste en una revisión y estudio de documentos que tratan acerca de la teoría euclidiana de la proporción, la teoría de la construcción de los números reales vía cortaduras y documentos que dan cuenta de la tesis histórica según la cual la teoría de los números reales de Dedekind es equivalente a la teoría de las proporciones de Euclides.

Este documento pretende dar cuenta de lo que los historiadores han planteado acerca del uso que de la teoría de las proporciones de Euclides hizo el matemático alemán Julius W. R. Dedekind en su construcción de los números reales. Por otra parte se busca estudiar el potencial aporte que dicho estudio hace en relación con el conocimiento del profesor de Matemáticas.

Para el primer objetivo, inicialmente se presenta una breve descripción del libro V *Elementos* de Euclides, en el cual se presentan algunos aspectos de la teoría de la razón y la proporción para magnitudes geométricas; luego se dirige la mirada hacia el trabajo de la construcción de los números reales a través de cortaduras, realizado por Dedekind, y por último, se estudian los documentos elaborados por historiadores (Leo Corry, Wilbur Knorr y Eliane Cousquer) que han abordado la relación de la definición euclidiana de proporción con la de cortaduras de Dedekind. De forma paralela se hace una revisión de las cartas entre Dedekind y su colega Lipschitz a través de las cuales este último exhibe su postura acerca de la equivalencia de las dos teorías en mención.

En cuanto al aporte de dicho estudio al conocimiento del profesor se buscó reflexionar sobre los aprendizajes logrados por la docente en formación, a partir de las categorías planteadas por Guacaneme (2011), de forma específica se analizó la pregunta acerca del ¿para qué de la apropiación del conocimiento histórico por parte de los profesores? De esta actividad se realizó la escritura de los aportes obtenidos por la docente en formación.

La metodología general que se utilizó, consistió en la lectura inicial de los documentos, precedido del estudio de los mismos y por último de la organización y escritura de las reflexiones logradas a lo largo del desarrollo del trabajo.

Por último están las conclusiones del trabajo, la bibliografía que sustenta los referentes de este documento y en los anexos se encuentra la traducción del documento en francés "*De la théorie des proportions à la théorie des nombres réels" de Eliane Cousquer.*

Se espera que la lectura de este documento sea de motivación para otros estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas, despertando en ellos el deseo por navegar y explorar a través del océano de la Historia de las Matemáticas.

1 GENERALIDADES DEL ESTUDIO

En este capítulo se establecen los aspectos específicos que sitúan el asunto de estudio, la justificación del mismo, los objetivos propuestos para éste y por último las actividades que se desarrollaron para el cumplimiento de dichos objetivos.

1.1 JUSTIFICACIÓN

La motivación esencial que orienta y promueve el desarrollo del proyecto aquí expuesto, específicamente lo relativo al interés por la Historia de las Matemáticas, surge de la preocupación frente a la poca información y uso que se le da a ésta en los diferentes espacios académicos del ciclo de fundamentación de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, en contraste con la potencial importancia de la Historia como herramienta en la labor docente y en la investigación. Tal importancia se evidenció durante el *Seminario de Educación Matemática* visto en el primer semestre de 2011, al reconocer que muchas de las investigaciones en Educación Matemática contienen un apartado donde se discute una aproximación histórica a los objetos matemáticos implicados en éstas.

Otra motivación para este estudio surgió en la experiencia como estudiante de la Licenciatura en Matemáticas en el curso de *Proyecto de aula*, donde se hizo énfasis en la importancia de la proporcionalidad como tema matemático de la Educación Básica colombiana; al respecto, se advierte que este tema abarca y se relaciona con muchas temáticas de las matemáticas escolares en los diferentes ciclos de formación.

Estas dos motivaciones encuentran eco favorable en el trabajo que actualmente desarrolla el profesor Guacaneme, quien ha estudiado la historia de la proporcionalidad y ha establecido seis hitos de ésta. Uno de tales hitos lo constituye la participación de la teoría euclidiana de la proporción en la constitución de los números reales por parte de Richard Dedekind. Este hito en particular es llamativo, pues parece relacionar la proporción con un tema aritmético con el que usualmente, desde la escuela no se relaciona: los números reales.

Surge entonces la inquietud acerca de si tal relación es apropiada y conveniente, e incluso si ésta podría usarse como herramienta para abordar la enseñanza y el aprendizaje de los números reales, tema en el que se reconoce, desde la *Práctica educativa*, que los estudiantes de la Educación Básica y Media tienen muchas dificultades.

Se debe precisar que la intencionalidad de la autora del presente documento de abordar la Historia de las Matemáticas, en sentido específico la historia de la proporcionalidad, emerge del reconocimiento de la importancia de la inmersión de ésta en el conocimiento del profesor de Matemáticas y de la reflexión acerca de cómo diversas visiones del objeto de estudio generan en el profesional un mayor acercamiento y entendimiento del objeto matemático.

1.2 ASUNTO DE ESTUDIO

Atendiendo a lo anterior, el objeto esencial de estudio, es el uso que de la teoría de las proporciones de Euclides hizo el matemático alemán Julius W. R. Dedekind en su construcción de los números reales. Asimismo, se estudia el potencial aporte que dicho estudio hace en relación con el conocimiento del profesor de Matemáticas.

Tal objeto esencial de estudio implica el análisis de:

- Algunos elementos de La teoría euclidiana de las proporciones.
- La construcción de los reales a través de cortaduras.

- La relación de la definición euclidiana de proporción con las cortaduras de Dedekind.

- La correspondencia entre Dedekind y Lipschitz, en la que Dedekind explicita el uso que hace de la definición euclidiana de proporción en su construcción de los números reales.

A través de dicho estudio se espera abordar respuestas a las preguntas: ¿Cuál es la relación entre la definición euclidiana de proporción y las cortaduras de Dedekind? y ¿cuál es el aporte de la historia de la proporción al conocimiento de la docente en formación?

En cuanto al aporte del estudio para el conocimiento del profesor se tiene una hipótesis inicial que se refiere a que la teoría euclidiana de la proporción podría ser fundamental en el diseño de una propuesta de enseñanza o introducción de los números reales. Con ello se reconocería un uso específico de la Historia de las Matemáticas como fuente de herramientas para el ejercicio profesional del docente. Más allá de tal hipótesis, nos planteamos la pregunta general acerca de cuál es el aporte que el estudio histórico hace al conocimiento profesional de la futura docente de Matemáticas. En esta dirección se reflexiona sobre los aprendizajes logrados, a la luz de las categorías planteadas por Guacaneme (2011) en relación con la pregunta *para qué se plantea la apropiación del conocimiento histórico de las matemáticas por parte de los profesores.*

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivos generales

- Identificar relaciones entre algunos elementos de la teoría euclidiana de la proporción y las cortaduras de Dedekind.

- Explicitar los aprendizajes profesionales logrados a partir del análisis cuidadoso y reflexivo del papel de la definición euclidiana de proporción en la construcción de los números reales, vía las cortaduras.

1.3.2 Objetivos específicos

- Analizar cuál era la interpretación dada por Euclides al concepto de proporción.

- Estudiar la repercusión de la proporción euclidiana en la teoría de las cortaduras de Dedekind.

- Identificar cuál es el aporte de la historia de la proporción al conocimiento de la docente en formación.

1.4 METODOLOGÍA

Aunque en las actividades consignadas en el anteproyecto de este estudio no estaban contemplados los documentos que se mencionarán a continuación, se hizo necesario realizar la lectura y estudio de: El libro V de Elementos de Euclides (Puertas, 1994), ¿Teoría euclidiana de la proporción en la construcción de los números reales? (Guacaneme, 2008), el documento Creación de los números Irracionales (Dedekind, 1872) y De las cartas a R. Lipschitz (Dedekind, 1872).

Un segundo momento consistió en el análisis de aportes realizados por historiadores acerca de la teoría griega de las proporciones y del uso que Dedekind hace de ésta para la construcción de los números reales. Así se estudiaron los planteamientos de Corry (1994) que trata de la interpretación que Dedekind hace de la teoría de las proporciones de Eudoxio, la traducción del documento de Cousquer (1994) que aborda la relación de la definición euclidiana de proporción y las cortaduras de Dedekind y el estudio de la exhausión a cortaduras que trata sobre las primeras etapas de la teoría griega de las proporciones, abordado por Knorr (1992).

En tercer lugar se reflexionó acerca del conocimiento adquirido por la docente en formación a lo largo del estudio y cómo éste contribuyo a su desarrollo profesional. Esta actividad se realizó a la luz de unas categorías que dan cuenta de las intenciones de la Historia en el conocimiento del profesor de Matemáticas (Guacaneme, 2011).

2 MIRADA A LA ESTRUCTURA DE LAS TEORÍAS

En este apartado se presenta la comprensión lograda de los documentos estudiados acerca de la teoría euclidiana de las proporciones y de la construcción de los números reales a través de cortaduras.

2.1 ESTUDIO DE ALGUNOS ASPECTOS DE LA TEORÍA EUCLIDIANA DE LA PROPORCIÓN

Para el estudio del conjunto de definiciones y proposiciones de la teoría euclidiana de la proporción se recurrió a dos documentos base: En primer lugar se realizó la lectura y análisis del Libro V de *Elementos* de Euclides (Puertas, 1994) y como paso seguido se estudió el documento *¿Teoría euclidiana de la proporción en la construcción de los números reales?* (Guacaneme, 2008), siendo este último una mirada de la relación entre la teoría euclidiana de la proporción y la construcción del conjunto de números reales desde una perspectiva no profesional de la Historia de la Matemática.

Elementos se reconoce como la obra principal de Euclides, visionario que encaminó sus esfuerzos por recopilar, organizar y exponer el conocimiento aritmético y geométrico de sus antecesores con la finalidad de construir una teoría hipotético deductiva, convirtiendo así esta armoniosa presentación en una herramienta para el razonamiento deductivo de muchos campos del conocimiento, entre estos la Geometría y Física.

Es en su Libro V donde se ha centrado la atención, puesto que es en éste donde Euclides presenta una teoría de la proporción, a través de la cual reorganiza aspectos de la teoría eudoxiana de la proporción, y enuncia la definición de proporción que podría ser el enlace esencial con la construcción del conjunto de los números reales vía cortaduras.

El Libro V, en la versión de Puertas (1994) presenta 18 definiciones y 25 proposiciones o teoremas.

2.1.1 Definiciones

Del total de definiciones en el marco de este estudio se reconocen como muy importantes aquellas que caracterizan los conceptos de: parte, razón, guardar razón, guardar la misma razón, magnitudes proporcionales y guardar una razón mayor. Los textos reportados por Puertas (1994) para cada una de estas son:

> *Definición 1: "Una magnitud es parte de una magnitud, la menor de la mayor, cuando mide a la mayor."(p. 9)*
>
> *Definición 2: "Y la mayor es múltiplo de la menor cuando es medida por la menor."(p. 9)*
>
> *Definición 3: "Una razón es determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas."(p. 9)*
>
> *Definición 4: "Se dice que guardan razón entre sí las magnitudes que, al multiplicarse, pueden exceder una a otra."(p.10)*
>
> *Definición 5: "Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda que una tercera con una cuarta, cuando cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera excedan a la par, sean iguales a la par o resulten inferiores a la par, que cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, respectivamente y tomados en el orden correspondiente." (p. 11)*
>
> *Definición 6: "Llámense proporcionales las magnitudes que guardan la misma razón" (p. 12)*
>
> *Definición 7: "Entre los equimúltiplos, cuando el múltiplo de la primera excede al múltiplo de la segunda pero el múltiplo de la tercera no excede al múltiplo de la cuarta, entonces se dice que la primera guarda con la segunda una razón mayor que la tercera con la cuarta." (p. 13)*

Al momento de lectura y análisis de las definiciones anteriores, inicialmente se entiende que al hablar de magnitudes se hace referencia únicamente a las longitudes, ya que se desconocía los diferentes tipos de magnitudes; por ejemplo al leer la definición 3 se piensa que las magnitudes no son de diferente naturaleza, por tanto se hace difícil comprender la frase “dos magnitudes homogéneas”; por supuesto, aparte de esto la terminología poco clara de la definición (relación con respecto al tamaño) crea obstáculo en la comprensión del concepto de razón. Lo importante para la docente en formación consistió en el hecho de indagar a qué otra naturaleza de magnitudes hacía referencia dicha definición y en general la teoría de la proporción. Es a partir de esto que se llega a la conclusión de que Euclides basa su obra en el uso del conjunto de magnitudes geométricas, las cuales pueden ser longitud, superficies, volumen y de amplitud angular. También con esta definición 3 se establece que las dos magnitudes presentes en una razón no pueden ser de diferente naturaleza.

Por otra parte cuando Euclides compara magnitudes, lo hace sin importar el número que se le asigna a la cantidad de magnitud; por ejemplo, cuando se comparan dos superficies lo importante no son las cantidades numéricas asignadas a las superficies, ni la relación entre las dos, la idea es que dichas magnitudes sean homogéneas y arquimedianas para poder ser comparadas. Esta última condición de acuerdo a la interpretación personal de la docente en formación indica que al tener por ejemplo, dos segmentos de recta, uno tan largo como se quiera de longitud z y otro de longitud tan corta como se quiera de longitud x , tomando un múltiplo adecuado de x se podrá sobrepasar la longitud del segmento z.

A través del tiempo, los historiadores han notado la importancia y “problemas” de las definiciones 5 y 7, las cuales tienen un papel representativo en este estudio. En primer lugar, las definiciones en un contexto actual están hablando de cuándo dos razones están en proporción y en desproporción respectivamente. Por otra parte, se hace evidente la dificultad al interpretar dichas definiciones, ya que están expuestas en un lenguaje que se encuentra en otra época o contexto, usa términos no predefinidos (*v.gr.* equimúltiplos) y omite el uso de simbología. Es por esto que los historiadores incorporan las definiciones a un lenguaje simbólico, por ejemplo Puertas (1994) presenta dos versiones para la quinta definición, una formulada como *disyunción exclusiva de conjunciones*:

> *"Siendo a, b, c, d unas magnitudes del dominio de la teoría y m y n unos números naturales cualesquiera, se da una proporción a:b :: c:d si y sólo si: o ((m.a>n.b) y (m.c>n.d)) o ((m.a=n.b) y (m.c=n.d)) o ((m.a<n.b) y (m.c<n.d))." (p. 12)*

y otra expresada como conjunción de implicaciones:

> *"siendo a, b, c, d unas magnitudes del dominio de la teoría y m y n unos números naturales cualesquiera, se da una proporción a:b :: c:d si y sólo si: (si m.a>n.b, entonces m.c>n.d) y (si m.a=n.b, entonces m.c=n.d) y (si m.a<n.b, entonces m.c<n.d)." (p. 12)*

Continuando con la definición 7, Knorr (1992) establece que "Uno de los defectos conocidos de la teoría euclidiana en el libro V es que no prueba que «no tener la misma razón» sea equivalente a «tener una razón mayor o menor razón»"(p.8); aunque al explorar las proposiciones de *Elementos*, Guacaneme (2008) "(por ejemplo en el libro V, proposiciones 9 y 10) corrobora que Euclides sí supone tal equivalencia, con lo cual dispone de una herramienta potente para la demostración de la proporcionalidad o desproporcionalidad de cuatro magnitudes".

2.1.2 Proposiciones

Finalizando la caracterización del libro V de Elementos, Guacaneme (2012) clasifica en cinco grupos de propiedades las veinticinco proposiciones y los dos porismas del libro, así:

Grupo 1: las proposiciones que se refieren a las magnitudes y sus múltiplos, pero que no aluden a las razones ni a las proporciones. (Proposiciones 1, 2, 3, 5 y 6).

Grupo 2: Proposiciones que aluden a propiedades "de orden" de las razones a partir de propiedades "de orden" en las magnitudes. (Proposición 7(sin el porisma 7´) y 8.)

Grupo 3: Proposiciones que describen cómo relaciones entre razones determinan relaciones u operaciones entre magnitudes. (Proposiciones 9, 10, 14, 20, 21 y 25).

Grupo 4: Proposiciones que incluyen propiedades de las proporciones o desproporciones, es decir de las razones en sí mismas. (Proposiciones 4, 7', 11, 12, 13, 16, 17, 18, 19, 19', 22, 23 y 24).

Grupo 5: Referido a la proposición 15, la cual sólo alude a una proporción.

A su vez se encuentra que en las proposiciones no se establecen operaciones entre razones, aunque sí entre las magnitudes que conforman dichas razones.

El interés del estudio de las proposiciones de *Elementos* surge por la necesidad de aclarar el uso que de las definiciones se hace para demostrar una proporción, ya que esto permite ver la definición en uso y así comprender su significado.

2.2 CONSTRUCCIÓN DE LOS NÚMEROS REALES VÍA CORTADURAS

Para el estudio de la construcción de los números reales se recurre a la teoría elaborada por el matemático Julius Wilhelm Richard Dedekind, quien de forma inicial estudia la continuidad de la línea recta.

Dedekind en el año 1858 se encontraba ejerciendo su labor como docente del Politécnico Federal de Zúrich; es en esta institución en la cual se ve enfrentado a exponer los elementos del Cálculo Diferencial. Debido a este reto encuentra que el único camino disponible para abordar su exposición es a través de la geometría, que si bien era una herramienta útil desde lo didáctico, desde lo científico y riguroso no tenía ninguna distinción; es por esto que se ve envuelto en un sentimiento como él lo llama de "insatisfacción" y decide encontrar una justificación estrictamente aritmética y rigurosa de los principios del análisis infinitesimal. Se decía que dicho análisis se ocupaba de magnitudes continuas, pero no existía ninguna demostración rigurosa acerca de éstas, por tanto un objetivo implícito era lograr definir la esencia de la continuidad.

Para iniciar con la presentación del estudio de los números reales realizado por Dedekind se debe precisar que en la obra de Dedekind cuando se menciona a R se hace referencia al sistema de los números racionales, caracterizando a éste como un dominio ordenado, unidimensional y que se extiende al infinito en dos sentidos opuestos. Por otra parte es importante conocer que para Dedekind la recta está compuesta por puntos.

El punto de partida para el desarrollo de la construcción de los números reales consistió en la comparación que Dedekind realizó entre los números racionales y los puntos de una línea recta L. Inicialmente Dedekind observa que los puntos de una línea recta al igual que los números racionales se encuentran en una determinada posición, es decir si se diferencian los dos sentidos opuestos de la recta como derecha e izquierda y si *p* y *q* son dos puntos diferentes se tiene que *p* está situado a la derecha de *q* y al mismo tiempo *q* a la izquierda de *p*, o bien se ubican de forma inversa; llevando esta propiedad al plano de los números racionales se identifica la condición ser mayor que o ser menor que.

Si *p* es un punto específico de L, entonces la recta quedará dividida en dos partes; los de la primera clase que estarán ubicados a la izquierda de *p* y los puntos de la segunda clase que contiene todos los puntos que están ubicados a la derecha de *p;* el punto *p* pertenecerá bien sea a la primera clase o a la segunda clase, pero nunca a las dos.

De acuerdo con la anterior analogía se concluye que a cada número racional le corresponde uno y solo un punto *p* de L. Debido a que “la recta L es infinitamente más rica en individuos puntuales que el dominio R de los números racionales en individuos numéricos” (Dedekind, 1872, p. 5), se afirma que hay infinitos puntos que no corresponden a ningún número racional.

A continuación es necesario refinar el conjunto de los números racionales, dando origen a nuevos números tales que el dominio sea tan completo, como continua es la recta. Dedekind encuentra la condición de continuidad en el siguiente principio:

> *"Si se reparten todos los puntos de la recta en dos clases, tales que cada punto de la primera clase está situado a la izquierda de cada punto de la segunda clase, entonces existe un único punto que determina esta partición de todos los puntos en dos clases, este corte de la recta en dos partes" (Dedekind, 1872, p. 6).*

Es a partir de dicho principio que se inicia la construcción desde el conjunto R discontinuo de números racionales a un dominio continuo. El primer paso de la creación de dicho dominio continuo consiste en analizar las separaciones que cada número *a* genera al sistema R, es evidente que el sistema quedará dividido en dos clases lo importante es lograr descubrir ¿qué características están marcando cada una de esas clases?, ¿qué elementos son los que habitan en ellas?

Para lograr dar respuesta a dichos interrogantes se da inicio al estudio de las dos clases mencionadas anteriormente; éstas se denotan como A_1 y A_2 y se encuentra que cumplen con dos propiedades: la primera es que cada número perteneciente a A_1 es menor que cualquier número de A_2, la segunda es que entre los números de la primera clase existe uno mayor o entre los números de la segunda clase existe uno menor. Es a esta separación la que se bautizará como *cortadura* (A_1, A_2).

Hasta este punto el matemático Dedekind ha demostrado la existencia de una cortadura, estableciendo que ésta es generada por un número racional, sin embargo su cuestionamiento le permite ir más allá demostrando que existen infinitas cortaduras y que no son precisamente producidas por un número racional; es a través de esta propiedad que surge el estado de incompletitud del dominio R de los números racionales.

De acuerdo con lo anterior se concluyó que hay cortaduras de números racionales que son generadas por números racionales y otras que son generadas por algo que no está en el conjunto, es por esto que se crea un nuevo número denominado *irracional,* el cual estará definido por una cortadura (A_1, A_2) no producida por un número racional. La unión de estas dos clases de cortaduras diferentes generadas tanto por racionales como por irracionales, constituyen el dominio de los números reales; en consecuencia en este conjunto dos números se considerarán diferentes si y solo sí son generados por cortaduras estrictamente diferentes.

Ahora bien, para ordenar todos los números reales Dedekind analiza la relación entre dos cortaduras cualesquiera $(A_1, A_2)\ y\ (B_1, B_2)$, determinadas por dos números cualesquiera $\alpha\ y\ \beta$, concluyendo que si se tienen dos números diferentes, necesariamente uno debe ser el mayor y el otro el menor.

Finalmente Dedekind (1872) muestra que el sistema $\mathfrak{R}$ de todos los números reales es un dominio ordenado, unidimensional, que cumple con las siguientes leyes:

1. Si $\alpha > \beta$ y $\beta > \gamma$, entonces también $\alpha > \gamma$. Es decir que el número β se encuentra entre los números α y γ.

2. Si α y γ son dos números diferentes, entonces hay siempre infinitos números diferentes que están situados entre α y γ.

3. Si α es un número determinado, entonces todos los números del sistema $\mathfrak{R}$ se subdividen en dos clases $\mathfrak{A}_1$ y $\mathfrak{A}_2$, cada una de las cuales contiene infinitos individuos; la primera clase $\mathfrak{A}_1$ comprende todos los números α_1, que son $< \alpha$, la segunda clase $\mathfrak{A}_2$ comprende todos los números α_2, que son mayores que α. (p. 10).

   El número α puede pertenecer a la primera o a la segunda clase y de acuerdo a esta escogencia será o el número máximo de la primera clase o el número mínimo de la segunda clase, se dice que esta división está determinada por el número α.

Debido a la continuidad del dominio $\mathfrak{R}$ se valida el siguiente teorema:

4. Si el sistema $\mathfrak{R}$ de todos los números reales se subdivide en dos clases, $\mathfrak{A}_1$ y $\mathfrak{A}_2$ tales que cada número α_1 de la clase $\mathfrak{A}_1$ es menor que cada número α_2 de la clase $\mathfrak{A}_2$, entonces existe un y sólo un número α por el cual esa división está determinada. (Dedekind, 1872, p. 10).

Continuando con la caracterización del dominio $\mathfrak{R}$ de todos los números reales, Dedekind ve necesario dotar al conjunto con operaciones entre sus individuos; para esto basta con definir la cortadura (C_1, C_2) la cual, según Dedekind corresponderá al resultado del cálculo γ generado por las cortaduras (A_1, A_2) y (B_1, B_2) determinadas en el sistema R por los números α y β; de esta forma se define las operaciones de adición, diferencia, productos, cocientes, potencias, raíces y logaritmos para el sistema $\mathfrak{R}$.

Cabe aclarar que Dedekind no termina aquí la estructura del conjunto $\mathfrak{R}$, lo presentado es hasta ahora el inicio, ya que además de dotarlo de orden, define para $\mathfrak{R}$ las operaciones de la aritmética, pero con lo descrito anteriormente se logra el propósito para este trabajo, centrado en el estudio de la teoría de las cortaduras de Dedekind.

3 RECAPITULACIÓN DE PERSPECTIVAS

El capítulo que se presenta a continuación tiene como objetivo dar a conocer las reflexiones logradas en cuanto a la repercusión de la proporción euclidiana en la teoría de las cortaduras de Dedekind, desde la mirada de historiadores como Leo Corry, Wilbur R. Knorr y Eliane Cousquer.

La estructura del presente apartado consiste en una síntesis de las ideas planteadas por los autores mencionados anteriormente y para ello se respetará la estructura interna de los documentos.

3.1 PERSPECTIVA DE LEO CORRY

3.1.1 La teoría de proporciones de Eudoxio

Leo Corry inicia su artículo presentando la esencia de cada una de las dos teorías que han sido el centro de discusión de cierto número de autores que han estado a favor o en oposición de la comparación realizada entre las definiciones de razón e identidad de razones propuestas por Eudoxio, con las definiciones propuestas en la teoría de Dedekind.

De ahí que inicie su trabajo exponiendo las definiciones 4 y 5 del libro V de Elementos referidas a la definición de razón y razones idénticas respectivamente, ya que este autor busca dar una mirada crítica a estas definiciones, iniciando por afirmar que el primer problema de las mismas radica en la traducción inicial del texto griego original, puesto que éste se encontraba en un lenguaje retórico y al pasar a un lenguaje simbólico se tiende a irrespetar las características y propiedades que tiene la definición en su lenguaje original; como ejemplo, señala que en el simbolismo griego no se cuenta con el proceso de operar “objetos”, cosa que sí sucede al realizar la traducción de la quinta definición a una notación algebraica actual.

Corry logra identificar que existe una serie de condiciones para las definiciones mencionadas anteriormente; entre estas se encuentra la homogeneidad de las magnitudes en una razón, es decir, para que una magnitud pueda estar en razón con otra es necesario que sean de la misma clase, (por ejemplo una razón entre dos segmentos, o entre dos superficies o entre dos volúmenes) puesto que carece de sentido comparar por ejemplo una superficie con un volumen, (por más que se agreguen superficies nunca se llegará a obtener un volumen, pues ésta siempre continuara siendo de dos dimensiones) esta condición de homogeneidad trasciende a las operaciones con magnitudes.

En concordancia con lo anterior en Corry (1994) surge un aspecto importante para la comparación de magnitudes, no será necesario que éstas sean conmensurables, sino que se podrá comparar magnitudes inconmensurables la una con la otra, teniendo claro que no son números los que se están comparando sino magnitudes homogéneas.

Por último, con la definición de guardar razón (definición 4 del Libro V de *Elementos*) se estudia de forma conjunta las proporciones entre magnitudes conmensurables o entre magnitudes inconmensurables; a su vez se define una característica importante para la proporción y consiste en el hecho de que la proporción es una comparación entre dos razones diferentes, la cual de acuerdo con Corry (1994) no es permitido considerársele como una igualdad de fracciones en el sentido operativo del término.

3.1.2 La teoría de “cortaduras” de Dedekind

A continuación, el artículo de Corry comparte el esquema utilizado por Dedekind para la construcción del conjunto $\Re$; ya que en este trabajo de grado se ha realizado un estudio del mismo libro *Continuidad y números Irracionales* se concluye que los aspectos mencionados por Corry en este apartado ya han sido tratados en el presente documento, por tal razón se omite su escritura.

3.1.3 Equivalencia y diferencia de las dos teorías

Las proporciones de Eudoxio y las cortaduras de Dedekind han sido punto de debate para muchos historiadores de las Matemáticas, algunos afirman que la definición de identidad de razones coincide de forma misteriosa con la teoría de los números irracionales de Dedekind. Para demostrarlo se presenta a continuación el argumento de Heath, expuesto por Corry (1994).

> *Primero se toma un cociente* $\frac{x}{y}$ *de magnitudes homogéneas y se le asocia una cortadura, entonces, si se tienen dos cocientes idénticos, también deben existir dos cortaduras asociadas a éstos que sean equivalentes.*
>
> *Su demostración consiste en tomar cualquier cociente* $\frac{x}{y}$ *y definir A como el conjunto de todos los racionales* $\frac{a}{b}$ *, tales que* $\frac{a}{b} \leq \frac{x}{y}$, *y B como el conjunto de todos los racionales* $\frac{a}{b}$ *tales que* $\frac{x}{y} \leq \frac{a}{b}$. *Hasta este punto se tendría una cortadura asociada a un cociente.*
>
> *Ahora se tiene otro cociente* $\frac{x'}{y'}$ *para el cual se definen los conjuntos A´ y B´ de forma similar. Se supone que* $\frac{x}{y}$ *es igual a* $\frac{x'}{y'}$ *, ahora se toma el racional* $\frac{a}{b}$ *perteneciente A, por lo tanto* $\frac{x'}{y'}$ *también pertenece a A´ ya que;*
>
> 1. *Si* $\frac{a}{b} \leq \frac{x}{y}$ *entonces* $ay \leq bx$*,con* $a, b \neq 0$ $y \in Z$
> 2. $ay' \leq bx'$ *por Def V de Euclides.*
> 3. $\frac{a}{b} \leq \frac{x'}{y'}$
> 4. *Aplicando este mismo proceso para un racional* $\frac{a}{b}$ *perteneciente a B, se prueba que* $(A, B) = (A', B')$

Es a partir de dicha demostración que Heath logra afirmar que la definición de cocientes iguales no es otra cosa diferente a la teoría de Dedekind. Sin embargo cabe mencionar que la anterior demostración presenta algunos problemas que no se consideran tan obvios; por ejemplo en el paso 1: Si $\frac{a}{b} \leq \frac{x}{y}$ entonces $ay \leq bx$, se están realizando operaciones aritméticas en una desigualdad, pero sin importar la naturaleza de los elementos, ya que se operan las magnitudes a, b con cocientes de racionales; de forma similar en el ítem 3: $\frac{a}{b} \leq \frac{x'}{y'}$ se utiliza la misma simbología de desigualdad ($\leq$) para los cocientes de racionales y para las magnitudes, hecho que es de importancia a la hora de realizar una correcta interpretación del lenguaje matemático.

Por supuesto también hay autores que rechazan la correspondencia presentada anteriormente, ya que los lenguajes aceptados para las traducciones de los textos griegos son únicamente el retórico y el geométrico, garantizando así una interpretación menos distorsionada de la original no es válido pensar en que dicha teoría eudoxiana sea presentada a través de un lenguaje simbólico – algebraico.

Pero este, es hasta ahora el primer punto de la discusión, ya que aparece otro argumento que desvirtúa la mencionada correspondencia de teorías, éste se refiere al concepto de número griego en comparación con el sentido de número de las matemáticas actuales; siendo el primero definido como una pluralidad compuesta de unidades, en oposición con el número actual que se refiere a la cantidad como abstracta; de hecho al remitirnos a *Elementos* es claro el uso y distinción realizado tanto para número como para magnitud, siendo el número utilizado para el manejo de cantidades discretas y la magnitud para cantidades "continuas"; es de tal importancia la diferencia de estos conceptos que en la obra Euclidiana se presentan dos teorías separadas para las magnitudes geométricas y los números. Entonces si bien Euclides trabaja con el número y la magnitud, debe ser claro que la cantidad no será abstracta, ya que representará una cantidad de magnitud específica o una cantidad numérica en particular.

Aunque el número y la magnitud aludan a conceptos diferentes de cantidad, comparten la propiedad de poder comparar dos elementos de la misma clase y así establecer si estos son iguales o desiguales, cosa que no sucede con las razones ya que en éstas se establece cuándo guardan la misma razón y no cuándo son iguales; puesto que ellas ni miden ni representan la cantidad de alguna medición. Así mismo las razones no se operan, es a sus magnitudes que la conforman a las que se les aplica una operación aritmética.

Dentro de este marco ha de considerarse descabellada la idea de comparar la teoría de las proporciones con la teoría de los números irracionales.

Corry menciona que en trabajos realizados por Sabetai Unguru ha surgido una razón nueva para argumentar la diferencia de las teorías en mención; esta hace referencia a las motivaciones o intencionalidades por las que se crearon tales teorías, mencionando que para Dedekind la construcción de los números reales a partir de cortaduras surge de su necesidad de encontrar una explicación formal y rigurosa para la idea de convergencia, aunque de forma global éste buscara encerrar en un sistema todos aquellos elementos o individuos que se encontraban “flotando en el aire” y no tenían ningunas leyes que los caracterizaran y dotaran de estructura.

Por su parte Unguru al estudiar de forma inicial las definiciones de razón y proporción de Eudoxio encuentra que éste no tenía estas mismas intenciones a la hora de conformar su teoría, es claro que sus motivaciones eran otras aunque no sean tan evidentes. Es debido a la falta de evidencias concretas de las motivaciones de Euclides y Eudoxio que éste argumento ha sido criticado.

3.1.4 Dedekind y la teoría de Eudoxio

Corry reconoce que las intencionalidades de la obra de Dedekind tienen un respaldo en la correspondencia con su colega Rudolph Lipschitz, por esto le es relevante conocer dichas conversaciones académicas y así intentar extraer los verdaderos argumentos con los cuales Dedekind defendía su teoría.

A continuación se presentan los elementos principales de las discusiones llevadas a cabo entre los dos matemáticos mencionados anteriormente; para lograr una mayor comprensión fue necesario el estudio directo de las cartas consignadas en el documento *Continuidad y números Irracionales (Dedekind, 1872),* por lo tanto en este apartado se presenta la interpretación personal lograda de dicho estudio.

En la carta escrita el 30 de mayo de 1876 (Dedekind, 1872) Dedekind inicia la exposición de sus argumentos para refutar el comentario enviado por Lipschitz, quien asegura que la definición de cortadura es en esencia igual a la definición 5 del libro V de la obra *Elementos* de Euclides, explicando que su diferencia radica simplemente en la forma en que se presenta dicha definición. De acuerdo con lo anterior Lipschitz solicita a Dedekind retirar su afirmación de que ciertos teoremas como $\sqrt{2}.\sqrt{3} = \sqrt{6}$ aún no hayan sido demostrados, ya que haciendo uso de la obra *Elementos* se lograría llegar a la demostración del teorema en mención.

Es de admiración el sentido de respeto con el cual se dirige Lipschitz a su colega siendo cuidadoso de no herir como él lo llama “a un corazón analítico”; por supuesto Dedekind según se evidencia en sus palabras es un hombre sencillo quien se declara como no susceptible a dichos cometarios pero sí firme en la exposición de los motivos que validan su teoría.

En su planteamiento inicial Dedekind expone que en el dominio R se pueden generar cortaduras, siendo éstas, herramientas para conformar así los números irracionales, por tanto la unión de estos concebirían al dominio de los números reales en los cuales Dedekind identifica una propiedad en la que encuentra el principio de continuidad, plasmando su hallazgo en el siguiente teorema: “El sistema de todas las cortaduras en el dominio de por sí discontinuo de los números racionales constituye una multiplicidad continua” (Dedekind, 1872, p. 19).

Es a partir de su teoría de cortaduras que afirma se puede demostrar la proposición $\sqrt{2}\,.\sqrt{3} = \sqrt{6}$, aclarando que si algún matemático asegura que el teorema ya está demostrado deberá ser respaldado por una demostración publicada y rigurosa, puesto que luego de una exhaustiva búsqueda en los textos matemáticos del momento Dedekind sólo logra contagiarse de indignación al encontrar los siguientes "groseros argumentos circulares" (Dedekind, 1872) para validar dicho teorema:

$\sqrt{a}\,.\sqrt{b} = \sqrt{ab}$, porque $\left(\sqrt{a}\,.\sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2.\left(\sqrt{b}\right)^2 = ab$; con esto no se prueba la multiplicación de dos números irracionales ya que según Dedekind lo único que se hace es tomar el teorema $(mn)^2 = m^2n^2$ ya demostrado para los números racionales y utilizarlo sin ninguna complicación para los irracionales, generando en Dedekind un sentimiento de indignación al sentirse engañando con esta aparente demostración, al jugar con la confianza con la que los estudiantes creen en la palabra del educador.

Con el argumento anterior Dedekind da por aclarada su afirmación de la no existencia de dicha demostración; sin embargo este continúa su defensa explicándole a Lipschitz que no basta con la definición euclidiana de guardar la misma razón, ni con los demás elementos del libro V de Euclides para demostrar el teorema en cuestión, debido a que en esta teoría no está presente el principio de continuidad.

Para que dicha definición estuviera dotada de sentido y pudiera ser comparada con su principio de continuidad, las magnitudes deberían según Dedekind contar con dos condiciones:

1. De cada dos magnitudes diferentes y homogéneas siempre se reconocerá a una como la mayor y a otra como la menor.

2. Si A es una magnitud, y *n* un número entero, hay siempre una magnitud *nA* homogénea con A, el múltiplo correspondiente al número *n* de A.

A pesar del cumplimiento de estas dos condiciones; Dedekind escribe que en la obra no se cuenta con una forma para ampliar el dominio de magnitudes homogéneas, aunque reconoce que a pesar de que Euclides no toma como sinónimos a la razón y el número, su quinta definición bien podría definir a este último.

A partir del siguiente ejemplo Dedekind explica por qué el dominio de magnitudes homogéneas nunca se extendería más allá del dominio de los números racionales: Inicialmente se toma una magnitud A específica, luego se toman todos los múltiplos *nA* para formar un dominio de magnitudes que cumplirá con las dos condiciones mencionadas anteriormente, sin embargo no existe en *Elementos* un dominio de magnitudes mayor a éste; ahora, si se tomara como inicio dicho dominio de magnitudes y se conformaran razones entre dos magnitudes cualesquiera de éste, se llegaría como se indicó de forma inicial a la conformación del dominio R, siendo este su mayor nivel de extensión.

Sin embargo Dedekind reconoce que Euclides a lo mejor estaba pensando en más dominios de magnitudes, porque de lo contrario no habría condicionado su quinta definición y simplemente hubiera bastado con afirmar que: la razón de A a B es igual a la de A_1 a B_1, si hay dos números enteros m y n, tales que se da al mismo tiempo que $nA=mB$ y que $nA_1=mB_1$. Aunque en su Libro X trate con magnitudes inconmensurables, cuyas razones serían números irracionales, Dedekind es reiterativo afirmando que ni Euclides, ni en sus antecesores se encuentra aquel dominio de magnitudes continuo.

A continuación se enuncia el principio de continuidad:

> *"Si se reparten todas las magnitudes de un dominio de magnitudes con una gradación continua en dos clases tales que cada magnitud de la primera clase es menor que cada magnitud de la segunda clase, entonces existe, o bien una magnitud máxima en la primera clase, o bien una mínima en la segunda clase" (Dedekind, 1872, p 21).*

Como el dominio de magnitudes no cuenta con dicho principio, entonces, el dominio numérico queda incompleto. A raíz de esto, según Dedekind sería sencillo demostrar el teorema $\sqrt{2}.\sqrt{3} = \sqrt{6}$: “entiendo como el producto $\sqrt{2}.\sqrt{3}$ el número$\sqrt{6}$, y por consiguiente $\sqrt{2}.\sqrt{3} = \sqrt{6}$q.e.d”; ya que el dominio carecería de definiciones generalesde las operaciones aritméticas para los números presentes en él. Dedekind concluye su carta afirmando que por el contrario, su teoría de cortaduras sí permite la creación de dominio de los números reales.

El 27 de julio de 1876 Dedekind envía una nueva correspondencia a Lipschitz en la que menciona la disminución de sus esperanzas de que se pongan de acuerdo; también menciona que él pensaba que con su ejemplo de $\sqrt{2}$ había quedado claro su trabajo sobre la continuidad. Tomando las palabras de Lipschitz “¿Tiene la definición de su cortadura un contenido diferente de esto?” Dedekind le solicita que no suponga el hecho de que él, haya descubierto algún fenómeno nuevo en las matemáticas, un número nuevo o que diga algo nuevo con su teorema “Se reparten todos los puntos… produce en dos trozos” (Dedekind, 1872,p 23), ya que por ejemplo, le explica que el fenómeno de cortadura se observa siempre que se busca representar a los números irracionales a través de aproximaciones tan pequeñas como se quiera de números racionales y así mismo los demás casos tiene ya una existencia.

Dedekind quiere que su colega comprenda que, la esencia de su escrito está en el hecho que solo con el fenómeno de la cortadura y la aritmética de los números racionales, sin la intervención del concepto de magnitud, se pueden definir los números reales de tal forma que tengan completitud.

Continuando con su defensa Dedekind le escribe a Lipschitz que en cuanto a su afirmación que en *Elementos* de Euclides estos principios de continuidad se sobreentienden, continua en desacuerdo, ya que Euclides puede aplicar su definición de guardar la misma razón a todo tipo de magnitudes presentes en su sistema, sin embargo a la hora de construir la aritmética basados en razones entre magnitudes (Dedekind comenta que esta no fue la intencionalidad de Euclides) se necesitan demostraciones válidas de la completud del dominio de las magnitudes, para así dotar de fundamentos científicos a la aritmética.

Por otra parte al hacer referencia a lo evidente del principio de continuidad de una línea recta (cosa que asegura Lipschitz) Dedekind aunque no está en total acuerdo con el uso de argumentaciones geométricas, intenta ponerse bajo esta postura, pero encuentra que aún así tampoco la acepta, ya que si se pensara el espacio Euclidiano y toda recta contenida en él como discontinua, aún así se conservaría intacta la geometría Euclidiana, es decir, su sistema no necesita de la propiedad de continuidad para funcionar; condición que sí es necesaria en su teoría de los números reales.

Finalmente Dedekind se da por satisfecho en la exposición de sus argumentos y de forma educada y sensible pide disculpas a Lipschitz por la minuciosidad presente en éstos.

3.1.5 Otros sistemas numéricos en la obra de Dedekind

En este último apartado, Corry presenta un compilado de algunos de los trabajos realizados por Dedekind, los cuales se convierten en otro punto de diferencia en relación con la teoría euclidiana de las proporciones, además de la construcción de los números reales. Por ejemplo, Dedekind también analizó el sistema de números naturales a través del concepto de cadena, logrando caracterizarlo, dotándolo de propiedades para sus operaciones y justificando su estructura de orden. Por otra parte realizó un trabajo acerca de los números algebraicos, teoría cuyo eje central se basa en el concepto de “ideal” a través del cual resolvería uno de los problemas principales de dicho sistema, la factorización única.

Corry evidencia que el concepto de ideal es similar al de cortaduras y cadenas refiriéndose a colecciones de números; por esto se ve que el concepto de cortadura de Dedekind nace de una motivación más profunda al querer trabajar con los sistemas numéricos, convirtiéndose en el motor de la creación matemática de él y no en una versión mejorada de la teoría euclidiana de la proporción.

En conclusión, Corry puntualiza el cierre de su documento dejando claro que reconoce una cierta equivalencia entre la teoría de las proporciones Euclidiana y la teoría de cortaduras de Dedekind. Pero que así mismo existen divergencias puntuales entre ambas teorías presentes en la exposición de Dedekind en relación con el asunto, al igual que en el análisis que realiza del sistema axiomático de Euclides y finalmente la diferencia presente en las intenciones particulares de estudio del concepto de número.

En concordancia con lo anterior Corry siente como desvirtuación histórica de las contribuciones de estos dos matemáticos a la ciencia, el hecho de afirmar que la teoría de Euclides es la misma que la teoría de cortaduras de Dedekind con simples cambios de forma en su estilo y contenido, desconociendo el marco conceptual histórico en donde se localiza cada teoría y negando de esta forma el valor que cada una de estas contiene.

3.2 PERSPECTIVA DE WILBUR KNORR

En esta sección se presentan lo planteamientos relevantes a este estudio, realizados por Wilbur Knorr (1992).

A continuación se presentan los cuatro elementos básicos representativos del método de exhaución eudoxiana:

a) Razonamiento indirecto.

b) Una hipótesis de proporción desigual que supone la existencia de la cuarta proporcional de tres magnitudes determinadas.

c) Construcción de una magnitud intermedia a través del procedimiento de bisección de Elementos X, 1.

d) Manipulación de las desigualdades de las razones para deducir la contradicción" (Knorr, 1992, p. 4)

A partir del método eudoxiano que se acabó de mencionar, Knorr deduce las definiciones euclidianas de igual razón y de mayor razón, las cuales se encuentran como definiciones 5 y 7 en el Libro V de *Elementos*.

Para el caso de mayor razón se tiene que:

si $A{:}B \neq C{:}D$, sea $A{:}B \neq C{:}X$ para $X \neq D$. Supóngase primero por razonamiento indirecto que $X < D$.Luego se construye un X' tal que $X < X' < D$ y X' es conmensurable con C. Por tanto

$$C{:}X > C{:}X' > C{:}D$$

Por conmensurabilidad hay enteros positivos m y n tales que $C{:}X' = m{:}n$. Al sustituir los iguales queda

$$A{:}B > m{:}n > C{:}D$$

Es decir, $nA > mB$ mientras que $nC < mD$. Esta última condición expresa que "A tiene con B una razón mayor que C con D"

Ahora para el caso de igual razón, la demostración es análoga pero negando la condición inicial: $A{:}B = C{:}D$ si $nA >=< mB$ cuando $nC >=< mD$.

Knorr hace mención de uno de los defectos que encuentra en la teoría euclidiana en el Libro V, en el cual no se prueba que "no tener la misma razón" sea equivalente a "tener una mayor o menor razón" sin embargo, según Knorr, Euclides en las proposiciones 9 y 10 supone esta afirmación, razón por la cual se cree que si las tomaba como equivalentes.

En el estudio de las teorías eudoxiana y euclidiana se encuentra una equivalencia, según Knorr de carácter técnico, es decir, la estructura de dichas teorías es semejante; debido a esto surge el interrogante de los motivos que alguien tendría para modificar dicha técnica eudoxiana; uno de estos es el de la simplificación pues los procesos euclidianos aunque conceptualmente no son muy claros son más sencillos de aplicar, ya que en las pruebas euclidianas solo basta con hacer uso de las definiciones o postulados para justificar un argumento, caso contrario de las eudoxianas en donde es necesario un razonamiento, en el que se van construyendo los argumentos de la demostración, haciendo uso de los pasos fundamentales indicados al inicio de este apartado.

Por otra parte la modificación de la técnica eudoxiana se pudo haber dado debido a la completez, al incluir una definición puntual para la proporción, a través de la cual se demostrarán los teoremas relativos a ésta, puesto que dichos teoremas no hubiesen podido ser demostrados con la técnica eudoxiana, la cual los presuponía.

En conclusión, actualmente la teoría Euclidiana es la que aporta las bases para la teoría de la proporción, sin embargo no se debe desconocer que su precursor fue Eudoxio y que gracias a sus aportaciones algunos matemáticos como Arquímedes han recurrido a su técnica, para demostrar sus propios principios.

3.3 PERSPECTIVA DE ELIANE COUSQUER

En esta sección se da cuenta del estudio del documento realizado por Cousquer (1994) donde aborda un recorrido por el concepto de número Real y la teoría de la proporcionalidad.

3.3.1 Un problema de la enseñanza

Cousquer plantea su preocupación en torno a las dinámicas que están siendo utilizadas en las escuelas para abordar el estudio de los números reales, en las cuales el uso inadecuado de las calculadoras está nublando las interpretaciones que un estudiante crea acerca de un número. Por ejemplo ella plantea la siguiente pregunta: “¿Acaso 13/7 es un número para un alumno de colegio, o es el signo de un cálculo para efectuar en la calculadora, el cual da 1,8571429?” muy seguramente la respuesta será esta última.

Es desde los programas académicos en donde se está permitiendo un retroceso en la educación; Cousquer recuerda que anteriormente en los primeros semestres de la universidad se debía construir el sistema de los números reales, ya sea por cortaduras de Dekind o por sucesiones de Cauchy; pero es lamentable que actualmente se estén omitiendo estas preguntas acerca de la irracionalidad, dando por hecho la existencia de los números reales. Es por esto que Lebesgue critica la presentación mediocre que se realiza acerca de los números racionales e irracionales en la escuela, en donde se abordan por ejemplo las medidas de magnitudes solamente conmensurables, omitiendo los números irracionales.

Por su parte Cousquer reconoce desde su papel como docente de una maestría, que los estudiantes se interesan por la construcción del sistema de números reales, sin embargo hay muchas preguntas que se suponen conocidas sin haber sido enseñadas y es en este punto donde emergen cuestionamientos acerca del aporte que el descubrimiento de la irracionalidad le puede dar a un estudiante, cuando estos están condicionados por el uso de calculadora ¿Es necesario que en la enseñanza se hable de estos fundamentos de la matemática? ¿Es claro para el estudiante, qué son los números?

3.3.2 El descubrimiento de la irracionalidad

De acuerdo con los interrogantes planteados, Cousquer inicia un recorrido histórico acerca del origen de la irracionalidad, buscando comprender la construcción de los números reales. Para ello da una primera mirada a las antiguas civilizaciones, iniciando con una de las más antiguas, la civilización Babilónica, para quienes su sistema de notación era en base sesenta; esta civilización aún no hacían distinción entre racionales e irracionales.

Continuando se encuentra la civilización egipcia la cual no realizó mayores aportes a la irracionalidad. Por su parte la civilización griega contaba con un sistema de base decimal y con el ábaco como instrumento para el conteo; a finales del periodo clásico la noción de número abarcaba la de la fracción.

Más tarde en la escuela pitagórica surgen las primeras técnicas de demostración iniciadas por Thales. Los pitagóricos pensaban que entre dos segmentos cualesquiera siempre se podría encontrar una medida común que les permitiera establecer una razón, pero al preguntarse acerca de la razón que se establece al comparar la diagonal del cuadrado y el lado del mismo, surgieron inconvenientes al encontrar que dichos segmentos eran inconmensurables, es decir, no era posible conseguir un segmento común para ellos.

Según Cousquer (1994) una primera demostración del problema en mención, es realizada por Aristóteles quien afirma que "la diagonal es inconmensurable con el lado del cuadrado, porque si se supone su conmensurabilidad se deriva que números pares e impares son iguales", esto lo demuestra haciendo uso de una técnica de demostración denominada reducción al absurdo.

Otra técnica que surge se basa en el método de antipairesis o sustracción recíproca, en el que se distingue el caso conmensurable en el cual el algoritmo es finito y el caso inconmensurable en donde el proceso es infinito. Con esto se crean nuevos interrogantes acerca del continuo y el infinito, siendo Aristóteles quien establece un teorema acerca del infinito, diferenciando el infinito entre la existencia en acto y la existencia en potencia, enfatizando que el infinito potencial es el útil para los matemáticos, ya que éste permite la posibilidad de crecimiento o decrecimiento de forma indefinida.

Cousquer se cuestiona acerca de cómo definir la razón de dos magnitudes inconmensurables, si estas no pueden ser definidas como razón de dos naturales; encontrando que Eudoxo y Euclides son los primeros en dar solución a este problema.

3.3.3 La medición de las magnitudes en griego

Euclides, en su obra *Elementos*, nunca llega a definir el concepto de magnitud; de acuerdo al entorno de desarrollo de su trabajo se ha podido evidenciar que éstas son longitud, superficie, volumen y amplitud ángular; las cuales se miden a través de un proceso de yuxtaposición, en el que una magnitud mide a otra de la misma clase si la segunda se obtiene yuxtaponiendo la primera un número natural de veces.

Para las magnitudes geométricas el criterio de igualdad consiste en la superposición, buscando que dichas magnitudes coincidan.

En Grecia surge otro momento importante con la aparición de las cuadraturas y medición de volúmenes, haciendo referencia a dos de los problemas más estudiados, la cuadratura del círculo y la duplicación del cubo. Aunque en Euclides no se encuentre evidencias de cálculos de superficies o volúmenes, sí hay un tratamiento con estos, por ejemplo el teorema de Pitágoras.

Para operar magnitudes homogéneas, los griegos hacían uso de la yuxtaposición, viendo ésta como un proceso de multiplicación, el cual es limitado, ya que como se evidencia, el producto de dos longitudes da como resultado una superficie; el producto de tres longitudes permite obtener el paralelepípedo rectángulo, es decir un volumen; pero el producto de más de tres longitudes ya pierde sentido.

Un hecho que debe ser claro es que en el álgebra geométrica griega los problemas eran de carácter geométrico y nunca eran representados numéricamente, cosa que sí sucede actualmente, cuando ya ha sido posible asociarles problemas numéricos como los productos notables y la solución de ecuaciones de segundo grado.

Cousquer continúa su estudio de las matemáticas griegas revisando la teoría de las proporciones de Euclides; encontrando como primeras definiciones a la razón, siendo una relación que solo se puede dar entre magnitudes homogéneas y a la proporción definida como identidad de razones. La definición 5 proporciona una serie de criterios para saber cuando dos magnitudes guardan la misma razón: *A* es a *B* como *C* es a *D* si, para todos los enteros n y p posibles:

- Si $nA>pB$ entonces $nC>pD$
- Si $nA = pB$ entonces $nC = pD$
- Si $nA<pB$ entonces $nC<pD$

En el Libro V se establecen unas relaciones especiales entre las proporciones, por ejemplo en la definición 9 cuando tres magnitudes son proporcionales se habla de una razón duplicada, cuando cuatro magnitudes son proporcionales se hace mención de una razón triplicada y así sucesivamente sea cual fuere la proporción.

Por su parte el Libro XII da cuenta de los teoremas que dependen de la medida de las magnitudes, las superficies y volúmenes y se expresan en el lenguaje de las proporciones. También en este se encuentra un nuevo procedimiento para realizar demostraciones denominado método de exhaución que consiste en un procedimiento geométrico matemático de aproximación a un resultado. Otra herramienta mencionada por Cousquer para demostrar por reducción al absurdo es el teorema 1 del Libro 10: "Deux grandeurs inégales étant proposées, si on retranche de la plus grande une partie plus grande que samoitié, si l'on retranche du reste une partie plus grande que samoitié, et si on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées"[1]. (Cousquer, 1994, p. 9)

Una versión en español es: Dadas dos magnitudes desiguales, si se quita de la mayor una magnitud mayor que su mitad y, de la que queda, una magnitud mayor que su mitad y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor dada.

[1] Se realiza la cita en el idioma original del documento, debido a que la traducción realizada no es formal.

Las aproximaciones iniciales realizadas por los griegos a la irracionalidad son de carácter geométrico, aunque algunos matemáticos como Herón desarrollaron cálculos con valores de cantidades aproximadas a irracionales.

3.3.4 Las contribuciones de los matemáticos árabes

Los matemáticos Árabes han trabajado sobre la teoría de las proporciones de Euclides, por ejemplo Omar Khayyam (1048-1123) trata de definir la igualdad de dos razones enumerando los siguientes casos:

- $A = B$ y $C = D$
- $A = B/n$ y $C = D/n$
- $A = pB/n$ y $C = pD/n$

Concluyendo que $A/B = C/D$, resaltando que esta razón resultante es numérica.

Otro aporte árabe a las matemáticas consistió en el desarrollo del Álgebra, creando soluciones para las ecuaciones de segundo grado a partir de un concepto denominado “cosa”. De forma paralela inicia en Europa el desarrollo del simbolismo algebraico, el cual permite la unificación del Cálculo y el aporte al desarrollo de la noción de número real.

Finalmente la invención de la coma decimal fue un aporte árabe que no tuvo mayor protagonismo, sin embargo permitió la comparación de los números de forma más fácil que con el uso de las representaciones fraccionarias.

3.3.5 Proceso de numerización de las razones

En este apartado Cousquer presenta algunos autores de la historia que permitieron considerar las razones geométricas como números.

El primer autor referenciado es Oresme, quien desarrolla las operaciones sobre las razones, las composiciones de razones y por último afirma que las razones se comportan como magnitudes continuas, es decir que entre dos razones diferentes se pueden insertar tantas medias como se quiera.

Viète (1540-1603) describe el Álgebra Analítica, siendo esta tanto aritmética como geométrica. De las teorías griegas Viète conserva la ley de los homogéneos: solo se puede sumar o restar las magnitudes homogéneas, el producto de dos magnitudes homogéneas da una magnitud de otra dimensión. Este autor también plantea que la jerarquía de las magnitudes no se limita a longitudes, superficies y volúmenes, ya que comprende magnitudes de dimensiones como 4, 5, 6…

Por otra parte al mostrar que 4 cantidades son proporcionales si y solo si el producto de los medios es igual al producto de los extremos, establece una relación entre la forma de escritura de las proporciones con la de las ecuaciones.

Continuando con Descartes, se menciona su aporte que consiste en la ruptura de la ley de la homogeneidad, demostrando que todos los resultados de operaciones con magnitudes, una vez se elija una unidad de medida, pueden ser representados por longitudes, constituyendo lo que se conoce como el álgebra de longitudes.

Por su parte, Arnault (1667) presenta otra definición de razón y proporción: “cuando una magnitud o alguna de sus alícuotas es contenida un número de veces preciso en la otra se denomina razón exacta, dichas magnitudes son conmensurables porque siempre tiene alguna alícuota que les sirve de medida común. El caso contrario se da cuando no hay alícuota que mida de manera precisa ninguna de las dos magnitudes, las magnitudes que tienen este tipo de razones se llaman inconmensurables porque no tienen entre ellas medida común”. (Cousquer, 1994, p. 14*)*.

Para la definición de proporción se plantean dos definiciones:

1. Cuando la razón de un antecedente en su consecuente es igual a esa de otro antecedente en otro consecuente, esta igualdad de razones se llama proporción.

2. Dos razones son llamadas iguales cuando todas las alícuotas paralelas de los antecedentes son cada una igualmente contenidas en cada consecuente.

Durante más de un siglo estos elementos de la geometría de Arnault, fueron punto de referencia para las matemáticas.

Stevin trabaja sobre la naturaleza de las magnitudes y los números "«la communauté et la similitude entre grandeurs et nombres est si universelle qu'elles semblent quasi identité»" (Cousquer, 1994, p. 15*)*.

A continuación se presenta una versión en español de la anterior postura de Stevin (1548- 1620): "la comunidad y la similitud entre magnitudes y números es tan universal que casi parecen identidad[2]". Los números para él son de estructura continua, diferenciando entre número aritmético (sin adjetivo de longitud) y número geométrico; sin embargo los dos son llamados número.

Newton (1707) afirma que: "Onentend par nombre, moins une collection de plusieurs unités, qu'un rapport abstrait d'une quantité quelconque à une autre de même espèce, qu'on regarde comme l'unité. Le nombre est de trois espèces, l'entier, le fractionnaire, et le sourd. L'entierest mesuré par l'unité ; le fractionnaire par un sous-multiple de l'unité ; le sourd est inconmensurable avec l'unité. " (Cousquer, 1994, p. 15*)*.

Versión en español: "Por número entenderemos, no tanto el conjunto de unidades como la relación abstracta de cualquier magnitud hacia otra magnitud del mismo género, tomada por nosotros como unidad. Los números los hay de tres tipos: entero, fraccionario e irracional. El número entero es aquello que se mide con

[2] Traducción personal.

unidades; el fraccionario, con partes múltiples de la unidad; los números irracionales no son conmensurables con la unidad”[3].

D'Alembert (1759) habla de sólo dos clases de números, los enteros o los números quebrados o fraccionarios; si las razones inconmensurables son miradas como números, es porque aún que no son números propiamente hablando; da igual que realmente no lo sean, ya que la diferencia de una razón inconmensurable con un número puede ser tan pequeña como uno quiera.

Legendre (1794) desarrolla el sentido de las proporciones: “Si uno tiene la proposición
A: B:: C:D , se sabe que el producto de extremos $A \cdot D$ *es igual al producto de los medios* $B \cdot C$*”.*

Debido al descubrimiento de geometrías no euclidianas, los matemáticos toman conciencia de que los fundamentos de las matemáticas no pueden ser garantizados solo tomando como base la geometría euclidiana; en este proceso, la teoría de las proporciones va a ser abandonada en provecho de una construcción de los números reales a partir de los números racionales.

Después de un tiempo largo surge la necesidad de fundamentar el análisis matemático sobre bases rigurosas, convirtiéndose en una preocupación importante sobre todo para la enseñanza; por esto un gran número de matemáticos se ven presionados a argumentar los teoremas fundamentales del análisis haciendo una construcción explícita de esos números a partir de los números racionales.

No fue el objetivo de Cousquer definir en este artículo las diferentes formas de construcción de los números reales a partir de los racionales; su intencionalidad era la de mostrar que a lo largo de la historia se han planteado interrogantes

[3] Traducción personal.

interesantes para los respectivos contextos; los estudiantes están en la capacidad de plantear y estudiar los mismos problemas recreándolos en su contexto actual.

Cousquer a través de su documento, a modo personal deja abierta una invitación a los educadores, para la búsqueda en la Historia de las Matemáticas de interrogantes acordes con las temáticas abordadas en los diferentes cursos de la escolaridad, siendo éstos herramientas potenciales para la exploración y el descubrimiento matemático de los estudiantes, dando a su vez apropiación y sentido al estudio de la temática u objeto matemático que se esté abordando en el momento.

3.3.6 ¿Qué hacer en la enseñanza?

Como conclusión Eliane Cousquer encuentra que las construcciones de los números reales a principios del ciclo universitario han sido abandonadas debido a que los estudiantes las consideran como muy difíciles, ya que no están acostumbrados a hacer razonamientos en los que deban realizar más de una línea de argumentación.

La solución al problema es clara, se debe capacitar al educador para que esté en condiciones de brindar a sus alumnos argumentos rigurosos y completos que aporten a la construcción justa de la noción de número de los estudiantes.

Por otra parte se debe hacer énfasis en el análisis de las actividades matemáticas, para que los estudiantes obtengan bases sólidas y no les sea difícil al entrar a su ciclo universitario.

Los educadores deben analizar la enseñanza de los números teniendo en cuenta factores como el uso actual de las calculadoras, la coherencia entre lo geométrico y numérico, etc. Es necesario comprometerse en un proceso de reflexión que ponga el énfasis en la coherencia vertical de los aprendizajes.

4 REPERCUSIONES DE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS EN EL CONOCIMIENTO DEL EDUCADOR DE MATEMÁTICAS

El estudio de la Historia de las Matemáticas realizado en este trabajo, permitió el surgimiento de planteamientos referentes al profesor, a las Matemáticas, a los estudiantes, a la Historia de las Matemáticas y, en general, a la enseñanza de ésta en la escuela. Bajo la mirada de la categorización realizada en “La historia de las matemáticas en la educación de un profesor: razones e intenciones” (Guacaneme, 2010) se pretenden encasillar dichos planteamientos.

En Guacaneme (2011), de forma inicial se plantean cinco categorías que organizan los planteamientos conrespectoa su objeto de referencia, estos son:

1. Los que aluden a la racionalidad (los por qué).
2. A las intenciones (los para qué).
3. Al tipo de historia (los qué).
4. A las estrategias metodológicas (los cómo).
5. Al momento adecuado (los cuando) de una formación histórico-epistemológica en función del conocimiento del profesor.

De forma particular se indagará en la segunda categoría referente a las intenciones, cuya pregunta orientadora es ¿Para qué se procura la apropiación del conocimiento histórico de las matemáticas por parte de los profesores? Cabe aclarar que los porqués se relacionan con los para qué; desde una mirada de los por qué una respuesta inicial plantea que la exclusión o inclusión de la Historia de las Matemáticas en la formación de profesores depende de las valoraciones sociales de la historicidad de las matemáticas, algunas posturas son extremistas y afirman que la Historia de las Matemáticas es parte sustancial de estas y por tanto es necesario incluir su historia en la enseñanza.

Una segunda respuesta al por qué, está dada con respeto a las políticas del Estado sobre la formación de profesores, en algunos lugares esto se evidencia de forma directa ya que se evalúa un componente histórico para poder ejercer la docencia.

Dando respuesta al para qué según Guacaneme (2011), se afirma que la Historia de las Matemáticas le proporcionan al educador matemático "instrumentos" para ejercer su labor docente; éstos se convertirán en herramientas en la medida en que se les dé un uso bien sea para el que fueron o no creados, dependiendo dicho uso de las intenciones, tendencias, concepciones, motivaciones, etc. del educador.

Al relacionar la Historia de las Matemáticas con la Educación Matemática, surgen los artefactos que favorecen el conocimiento del profesor de matemáticas relacionándose con los instrumentos, según Guacaneme estos artefactos son:

1. **Visiones de la actividad matemática**: El enfoque está dado hacia la actividad de creación matemática y la actividad de comunicación de sus resultados; se reconoce que las razones que seducen a su realización son de tipo utilitario, debido a problemas de otras disciplinas (curiosidad intelectual, retos, placer, entre otras).

   De forma personal se le adjudica gran importancia al hecho de conocer el hacer y no solo el producto de la actividad matemática; muchas veces se pierden esos pequeños detalles que aportan al conocimiento matemático del educador debido a que en su proceso de formación se acostumbra a la entrega de productos terminados y refinados y no a la exposición de aquel camino que condujo a dichos resultados, pues es realmente en éste donde se encuentran esa gama de sensaciones, emociones, razones, justificaciones matemáticas, procesos lógicos, etc. que alimentan el quehacer matemático.

Cuando se pone en juego la actividad de creación matemática, comprendemos su verdadera esencia, formamos parte de ese remolino que va tomando conceptos previos, ideas nuevas, errores, dificultades, conceptos arraigados, algoritmos, técnicas, etc. para realizar procesos de exploración, indagación, argumentación, validación, demostración, entre otros, a través de los cuales va surgiendo esta actividad humana presente en el universo numérico pero proyectada en la realidad social y cultural del ser humano.

2. **Visiones de los objetos matemáticos:** La Historia de las Matemáticas permite reconocer preguntas, problemas, tratamientos, representaciones, etc. de los objetos matemáticos; al igual que admite interrelaciones entre ella misma y con otras disciplinas.

   Por otra parte la Historia de las Matemáticas permite cambiar, ampliar o construir la visión del objeto matemático, ya que a través de ésta se conoce el marco matemático bajo el cual nacen los objetos, teniendo así la posibilidad de añadir a estos, elementos de la teoría actual que amplíen la visión bajo la cual son estudiados.

   A su vez, el conocimiento histórico del objeto permite tener un marco de validez nuevo de éste, contando así con dos visiones (pasado y presente) que permiten interpretar, analizar y validar aquellas construcciones o argumentos en los cuales el objeto se encuentre presente. Por supuesto desde la labor del educador, el docente contará con un instrumento más para presentar el objeto y a su vez al momento de validar las producciones de los estudiantes, lo hará no desde la mirada de lo correcto e incorrecto, por el contrario validará el proceso e intentará interpretar las producciones de los estudiantes buscando el marco matemático desde el cual éstos proporcionan los argumentos que validan sus resultados.

Uno de los caminos interesantes pero poco valorado para estudiar un objeto matemático es su historia; al conocer los aspectos relevantes de la construcción de un objeto, como lo son los ingredientes matemáticos utilizados en su creación, el proceso de su construcción, sus casos frustrados de evolución, las características de su personalidad y finalmente su etapa de madurez es cuando realmente se puede decir que se conoce a dicho objeto y de esta forma se contará con un mayor número de herramientas para poder trabajar con él y saber cómo debe ser relacionado con los demás objetos matemáticos de su entorno.

El estudio de la historia de las proporciones y la construcción de los números reales vía cortaduras se convirtió en el canal que permitió el acercamiento de la docente en formación a la Historia de las Matemáticas, creando un vínculo de afecto y deseo por continuar con el estudio de algunos objetos y conceptos matemáticos particulares, los cuales fueron abordados en el pregrado, sin embargo su estudio fue muy vago y careció de significado para la estudiante; entre estos se encuentra el concepto de límite, el cual se abordó a través de la definición formal de un libro de texto y la repetición de ejercicios, pero nunca se plantearon ejercicios que promovieran el descubrimiento de la esencia de dicho concepto.

A su vez en el transcurso del estudio surgieron objetos matemáticos cuyo significado no era muy claro, como es el caso del número irracional, (aunque había sido presentado en el ciclo de fundamentación de la universidad, en dicho momento no se logró comprender la esencia de su significado) por lo cual fue necesario dar una inspección interna del significado que se tenía de este, concluyendo que dicho significado (un número irracional es un número que no puede ser expresado como una fracción) no era el más elaborado y menos el que caracterizara de mejor forma a dicho número. Luego de concluir el estudio de la historia de la construcción de los números reales realizada por Dedekind surgió un nuevo concepto de número irracional, siendo este un tipo particular de cortadura de racionales. Lo anterior hace parte de una de las evidencias personales de las ventajas del estudio de los objetos matemáticos desde su perspectiva histórica.

3. **Competencias profesionales:** De acuerdo con Guacaneme (2011) el estudio de la Historia de las Matemáticas promueve el desarrollo de competencias personales y profesionales; algunas de estas son adquiridas en cualquier otro campo del conocimiento, por ejemplo, la lectura y la escritura; pero otras son propias de este tipo de actividad, por ejemplo aprender a leer un texto histórico pues es diferente a leer cualquier otro artículo ya que se requiere de una abstracción mayor en la cual se identifiquen las estructuras principales de la obra y se logren apreciar los elementos, conceptos u objetos matemáticos involucrados en el desarrollo de la teoría; por supuesto de no tener conocimiento de dichos objetos , es necesario un trabajo extra de investigación en el cual se estudie y comprenda el sentido de éstos dentro del documento que se esté leyendo.

   Otra competencia profesional desarrollada con el trabajo en cuestión fue el uso adecuado de las herramientas informáticas. Actualmente se cuenta con innumerables editores de texto que ofrecen agilidad y eficacia a la hora de elaborar un documento, sin embargo es poco común que los estudiantes universitarios contemos con el conocimiento adecuado para el uso de éstos; la mayoría de alumnos y lo digo basada en mi experiencia durante la Licenciatura hacemos uso de Word de forma errada, dando un uso inadecuado a sus herramientas; si bien el tiempo no permitió el dominio total de este editor, por lo menos se creó conciencia de la necesidad como profesionales de contar con este tipo de conocimiento.

Continuando con las competencias adquiridas durante este estudio, logré “colocarme las gafas” que me permitieron una visión de las matemáticas de otra forma; por ejemplo, no ver el error solo como error sino como un marco equivocado para resolver el problema que se planteé, esto a través de la observación del proceso del estudiante; es decir, a través del estudio de la Historia de las Matemáticas se despliega en el docente en formación un deseo analítico por los procesos matemáticos, el cual le permite apreciar los detalles considerados como irrelevantes o erróneos y observarlos como ese eslabón que le permite al estudiante replantearse sus ideas y poder entender cómo modificarlas en pro de alcanzar la construcción ideal de un concepto.

Por otra parte una competencia importante es la de descentrarse, es decir aprender a contextualizarse y pensar como el autor, de forma puntual Euclides, para poder entender lo que él quería decir. Es necesario leer la Historia no como un simple relato, por el contrario el lector debe sumergirse en la época y momento en que suceden los acontecimientos, puesto que solo así logrará una interpretación más “fiel” de lo que el autor quería expresar.

La competencia anterior vista desde el campo profesional desarrolla la capacidad de escucha, permitiendo entender al estudiante.

Regresando a los planteamientos iniciales del para qué del estudio, mi respuesta es: para transformar la enseñanza de las matemáticas, ya que pienso que una persona no puede dar algo de lo cual no tiene, trasladando esto a las Matemáticas la comparación es válida, ya que un docente que no cuente con el conocimiento integral de las Matemáticas difícilmente podrá proponer caminos nuevos y diferentes para el abordaje de la enseñanza de las mismas; éste tan solo repetirá el único libreto que se sabe y se convertirá en obstáculo para el crecimiento académico de sus estudiantes.

La Historia de las Matemáticas es una fuente de recursos para la enseñanza, al proveer problemas interesantes que lleven a que el estudiante por medio de su estudio aborde un tema en particular, lo interesante es que el aprendizaje se logrará a través de la investigación y el descubrimiento y no se tomarán conceptos literales de un libro, sin tan siquiera darle sentido a lo que está plasmado en éste.

Otro instrumento adquirido con el estudio de la Historia de las Matemáticas hace referencia a la manera en que éstas son enseñadas; el docente que durante su formación estudió parte de la Historia de las Matemáticas, seguramente intentará promover en sus estudiantes un pensamiento mas analítico y propositivo a través de prácticas de enseñanza no convencionales que incorporen un acercamiento a la historia de los objetos matemáticos. Es de gran relevancia contar con la habilidad de identificar el momento adecuado en el que la historia cumplirá una función mediadora entre el objeto y el aprendizaje del estudiante; pues de lo contrario se convertirá en obstáculo, impidiendo que el estudiante logre capturar el verdadero significado del objeto matemático.

Por último, pero no menos importante, la Historia de las Matemáticas ayuda a dar valor a la labor del docente, al reconocer que éste debe mantener sus conocimientos en constante renovación y al comprender que la labor docente ayuda a construir Matemáticas a partir de una necesidad de enseñarlas, siendo este un proceso recíproco entre la Historia y el educador.

5 CONCLUSIONES

Inicialmente hare mención de aquellas conclusiones teóricas que resalto del estudio llevado a cabo.

En primer lugar el estudio de la teoría euclidiana de la proporción amplió mi conjunto de saberes matemáticos, por ejemplo, mi definición de razón cambió; paso de ser la representación de un número fraccionario a entender que su esencia radica en la relación presente entre los tamaños de las magnitudes implicadas en la misma. A su vez, me permitió entender la importancia que recae en dicha teoría al ser ésta una de las más utilizadas y mencionadas en el campo de la demostración y el razonamiento deductivo, su estudio demando de mí exigencias cognitivas para poder interpretar y entender aquellos argumentos que se expresaban con un lenguaje matemático aun no abordado.

Por otra parte, la discusión principal de este documento se centra en el uso que de la teoría de las proporciones de Euclides hizo el matemático alemán Julius W. R. Dedekind en su construcción de los números reales. Historiadores actuales como Leo Corry y Wilbur Knorr han sido seducidos por el estudio de los argumentos en pro y en contra de esta tesis histórica llegando a afirmar que sí es posible establecer una equivalencia entre ambas teorías, pero que a su vez éstas presentan divergencias que deben ser establecidas y aclaradas.

Algunas afirmaciones de dicha equivalencia son:

“Existe una correspondencia exacta, casi una coincidencia, entre la definición euclídia de identidad de razones y la teoría moderna, debida a Dedekind, de los números irracionales” (Heath, 1926, p. 124).

“Como es bien sabido, las definiciones euclidianas son un equivalente de la técnica de Dedekind (a través de «cortes» en los racionales) para investigar la propiedad de los números reales” (Knorr, 1992, p.3)

Por su parte las divergencias hacen alusión en primer lugar al principio de continuidad, el cual no se encuentra presente en la teoría de las proporciones de Euclides, debido a las condiciones del dominio de las razones de magnitudes euclidianas.

En segundo lugar se encuentran las discusiones abordadas a raíz de la idea de número, ya que el concepto griego de número es diferente al concepto actual de número abstracto, es por esto que la comparación de la teoría de Euclides y Dedekind es vista por Corry como falta de sentido.

Por lo anterior afirmo que no existe tal equivalencia entre la teoría de las proporciones de Euclides y la teoría de los números reales de Dedekind; simplemente algunos elementos del primero se pueden encontrar presentes en la teoría de Dedekind, por ejemplo la relación entre la definición 5 del Libro V y la definición de cortadura presente en la teoría de la construcción de los números reales.

En este punto es de importancia no dejar de lado las cartas entre Dedekind y Lipschitz, quienes a pesar de estar en desacuerdo con sus planteamientos, sostuvieron conversaciones con alta calidad académica y personal, en donde se reconoce la postura del otro y se refuta con respeto y argumentos sólidos.

Es de admirar y tomar como ejemplo este tipo de “discusión” ya que no sería utópico pensar en que en nuestro espacio actual del mundo académico y en especial del mundo de educadores fuera posible “discutir” de esa manera, desarrollando un fino sentido de escucha y aportando de los conocimientos que se tienen para la constitución y validación de las creaciones matemáticas del otro; así se estaría aportando a la construcción de una matemática libre de limitantes como, fronteras, profesiones, razas, etc. y aún más, pensamientos envidiosos.

En cuanto a las conclusiones de la experiencia vivida durante el estudio, de forma inicial diré que la Historia de las Matemáticas es esa máquina del tiempo que permite conectarnos con el pasado, tener la oportunidad de explorarlo, indagarlo, entenderlo e inclusive tomar cosas de él que cambien o modifiquen el presente.

Desde el punto de vista de la enseñanza, si bien hay incertidumbre en el aspecto didáctico del abordaje de las Matemáticas a través de la historia, por lo menos a través de ésta se puede obtener mayor conocimiento de un objeto matemático para así saber qué estrategias serían adecuadas en los diferentes momentos de la enseñanza.

El docente de matemáticas debe dotar de sentido a su profesión, entendiendo cuál es la racionalidad de los temas que se enseñan, cuál es la esencia de éstos, cuáles son las finalidades de su estudio, etc.; de esta forma se tendrá claro que estos no son estáticos e inmodificables. Por tanto sus formas tampoco van a ser únicas porque dependerán de las prácticas o quehaceres de los matemáticos, los docentes y por supuesto los estudiantes, en un momento o tiempo determinado.

Por otra parte hay que confrontarnos acerca del impulso que mueve la teoría, ¿Cuál es el objetivo de crear nueva teoría?, ¿Por qué esta puede cambiar?, ¿Para qué y cuándo se debe modificar? Todos estos interrogantes por supuesto deben ser contestados bajo la perspectiva de la Matemática y su enseñanza y desde nuestra misión como educadores. Con esto será posible replantear, modificar o construir las prácticas educativas de ésta.

Es claro que las discusiones históricas promueven la conciencia del profesor de Matemáticas acerca de la naturaleza de los objetos con los que trabaja, entonces es necesaria la inclusión de la Historia de las Matemáticas en el conocimiento del educador, ya que éste debe reconocer el sentido o necesidad con o para el cual aborda un determinado contenido matemático; si desde el docente no se da respuesta a estas cuestiones mucho menos se podrá pretender que el estudiante se cuestione acerca de las mismas y, peor aún, tenga apreciaciones positivas acerca del estudio de las Matemáticas.

De forma particular se debe dotar de sentido el estudio de los números reales en la escuela, ya que a pesar de que se trabaje con estos sin haber construido el conjunto, es necesario que el docente tenga determinado el objetivo para el cual los usa.

Desde la educación universitaria para la formación de profesores de Matemáticas se debe indagar acerca de la necesidad, si es que existe de la fundamentación del dominio de los números reales; desde mi punto de vista sí creo necesaria la construcción del sistema de números reales pero desde la historia de éstos, ya que fue evidente el aprendizaje que se consigue cuando se estudia la construcción original de dicho sistema; de otro modo lo que se está haciendo es replicando los pasos finales que quedaron de toda una trayectoria histórica de dicho proceso de construcción.

Por último en cuanto al por qué estudiar la Historia de las Matemáticas, estoy de acuerdo con el profesor Guacaneme, sencillamente porque estas son un legado de la humanidad y como tal está conformado por rastros de sentimientos y deseos que han motivado su evolución, por tanto, ¿si se desconoce el pasado, como se pretende entender el presente? Si lo que se hace en la educación es transcripción de ideas ¿qué se podrá aportar a dicho legado?

BIBLIOGRAFÍA

Corry, L. (1994). La teoría de las proporciones de Eudoxio interpretada por Dedekind. *MATHESIS* , 1-24.

Cousquer, E. (1994). *De la théorie des proportions à la théorie des nombres réels.* Université de Caen - Cherbourg.

Dedekind, R. (1872). Creación de los números irracionales. En R. Dedekind, *Continuidad y Números Irracionales* (págs. 6-10). Traducción y comentarios por J. Bares y J. Climent.

Dedekind, R. (1872). De las cartas a R. Lipschitz. En R. Dedekind, *Continuidad y números irracionales* (págs. 15-25). Traducción y comentarios por J. Bares y J. Climent.

Guacaneme, E. (2011). La Historia de las Matemáticas en la educación de un profesor: razones e intenciones. *XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática (CIAEM)*, (págs. 1-11). Recife, Brasil.

Guacaneme, E. (2012). Teoría euclidiana de la proporción en la construcción d elos números reales ¿un ansunto útil para un profesor? *Revista Tecné, Epistemé y Didaxis* , 113 - 131.

Knorr, W. (1992). De exhaución a cortaduras: primeras etapas de la teoría griega de las proporciones. *revista Mathesis 8* , 1-11.

ANEXO Nº1. Traducción

A continuación se presenta la traducción realizada por la docente en formación, para el estudio del documento “De la teoría de las proporciones a la teoría de los números reales”.

DE LA TEORÍA DE LAS PROPORCIONES A LA TEORÍA DE LOS NÚMEROS REALES

Por Eliane Cousquer, Laboratorio LAMIA

1. UN PROBLEMA DE LA ENSEÑANZA

1.1 ¿Qué es un número real?

Cuestionémonos en qué momento un estudiante encuentra la respuesta a la pregunta: ¿Qué es lo que es un número real? En la primaria, se descubren los enteros, los decimales y las fracciones. En el colegio, se descubren los números relativos, y la calculadora se convierte en el recurso constante desde que se trate de actividades numéricas, hasta el punto de hacer, algunas veces, olvidar los conocimientos anteriores. ¿Acaso 13/7 es un número para un alumno de colegio, o es el signo de un cálculo para efectuar en la calculadora, el cual da 1,8571429? Después de haber visto a los estudiantes de Capes de matemáticas utilizar su calculadora para responder si a la pregunta: ¿Acaso 13/7 es un decimal?, "yo no dudo de la respuesta a la pregunta anterior".

Es pertinente mencionar que los programas en sí mismos son bastante cuestionables. Desde su primera aparición, el número $\sqrt{2}$ es presentado como lo que uno obtiene pulsando sobre la tecla 2 y $\sqrt{\quad}$ de la calculadora. Lo cual explica perfectamente el proceso de los estudiantes, que queriendo utilizar el inverso del teorema de Pitágoras, comprueban en sus calculadoras que el cuadrado de la hipotenusa es aproximadamente igual a la suma de los cuadrados de los lados.

La definición de los números reales, y la pregunta de la irracionalidad de los números es algo no dicho que atraviesa toda la educación secundaria. Anteriormente, en el primer año de universidad, los números reales fueron construidos, ya sea por el método de los cortes de Dedekind, o por las secuencias de Cauchy según el método de Cantor. A continuación, las propiedades de los números reales fueron demostradas y todos los cálculos con los radicales justificados. Hoy en día estas preguntas fueron abandonadas por ser tan difíciles para los estudiantes del primer ciclo de universidad, y la construcción de los números reales no es más que un hecho en cualquier lugar. Así que la crítica de Lebesgue alrededor de 1910 dirigida a la enseñanza secundaria en su libro “la medida de la grandeza” (p18), es válida para todos los programas escolares y universitarios.

1.2 Punto de vista de Lebesgue

« ... Mi principal crítica es sobre lo que nosotros decimos, o más bien sobre lo que no decimos del tema de los números irracionales.

En las clases más altas de la enseñanza secundaria, como en las más bajas, no hablamos de números irracionales solo por omisión. Repetimos lo que está ya claro en el espíritu para enseñar a los alumnos a formularlo en palabras; no tratamos de precisar lo que se mantuvo más que vago, aunque sea lo que más les sirvió después de cuatro años y que, sin embargo, jamás se habló: el número racional o irracional. Lo encontramos en todas partes; por todas partes evitamos hablar mucho sobre ello. En aritmética, con motivo de la medida de magnitudes tomamos la comparación de las longitudes, pero extendida solo a los casos de conmensurabilidad. Los otros, se saltan de mayor a menor habilidad. Nos entregamos también en un auténtico juego de manos con motivo de los valores aproximados. No podemos hablar sólo de los valores aproximados de los números racionales, porque es sólo de números racionales que hablamos; o, para ellos, estas aproximaciones son infinitamente menos interesantes que otros números. Sin embargo, no existen de alguna manera; es muy simple, vamos hablar de los valores aproximados que no se acercaran para nada»

La pregunta de la irracionalidad y la definición de los números reales está en el centro de las críticas de Lebesgue, que sigue siendo relevante: podemos preguntarnos qué sentido tienen los avances en el análisis, si esta pregunta se retrae, como actualmente.

1.3 Mi práctica docente

En mis clases, pude constatar que los estudiantes de maestría se apoyaban en preguntas simples acerca de los números, pero también las construcciones de los números reales vivamente les interesaban y les aportaban una iluminación importante sobre la enseñanza en el futuro. Sus dificultades me llevaron a reflexionar sobre el conjunto de cursos de enseñanza sobre los números y a comprobar su incoherencia. Mi creencia es que desde la última gran reforma de matemáticas, dicha reforma de matemáticas modernas, fue procedida por los programas de los colegios y las escuelas, a los ajustes locales sucesivos, aligeramientos por aquí, modificaciones por allá y conjuntos que no fueron discutidos. En la educación superior, somos preparados de la misma forma para la llegada de nuevos estudiantes. Algunas preguntas se suponen conocidas y en un momento dado, sin haber sido jamás enseñadas. Los ejemplos más notables en Lille concernientes a los números reales, las estructuras de cociente, y la integral de Riemann en ocasiones eludida en el primer año, y definido por los estudiantes de maestría como un caso particular de la integral de Lebesgue. En el primer año el campo de los números reales es introducido de modo axiomático, con la ayuda por ejemplo del axioma del límite superior o su equivalente. No hay nada malo en términos de rigor formal.

Uno puede preguntarse si este método es satisfactorio y enriquecedor para los estudiantes. Pero, después de todo, también cabe considerar que con la práctica numérica adquirida por los estudiantes y sus calculadoras, estas construcciones y las justificaciones de los números reales sean poco necesarias.

Vamos a seguir el curso de la historia de la pregunta de la irracionalidad y los números reales, con el fin de comprender la elaboración del concepto de número real y aclarar por medio de esta historia nuestro cuestionario. La dificultad que encontramos es la siguiente: a raíz del descubrimiento de la irracionalidad, para hacer las demostraciones rigurosas concernientes a lo que ahora llamamos la medición de las magnitudes, los griegos han desarrollado una teoría geométrica llamada la teoría de las proporciones, que utiliza las relaciones geométricas de magnitudes. Reconocer que estos informes son los números, es un proceso que duró dos mil años. ¿Cómo puede esto interesarnos directamente para la enseñanza? Un estudiante puede con su calculadora sólo acercarse a cantidades aproximadas. ¿Es tan claro para él que son los números? Por supuesto, los profesores lo dicen, pero ¿es tan evidente cuando vemos las dificultades que esta pregunta plantea a los matemáticos de los siglos pasados?.

2. EL DESCUBRIMIENTO DE LA IRRACIONALIDAD

Los números son responsables de dos actividades, el conteo y la medida. Eso que ha puesto en la civilización griega el problema de lo discreto y lo continuo. Las otras civilizaciones antiguas, ya que tenían desarrolladas matemáticas compuestas de numerosos resultados geométricos y numéricos, no dejaron muestras de reflexiones sobre estos temas.

2.1 Las civilizaciones antiguas

La civilización Babilónica: Civilización antigua la más avanzada en matemáticas, disponiendo de un sistema de notación numérica muy bueno en base sesenta. Nosotros hemos encontrado cálculos de raíces cuadradas extremamente precisos, con la ayuda de un algoritmo llamado más tarde algoritmo de Héron, pero nosotros no hemos encontrado ninguna muestra de distinción entre racionales e irracionales. La sola distinción que es hecha es esa entre números expresados estrictamente en base 60 y números ‘’que no existen’’ o que son remplazados por un valor aproximado, sin dar explicaciones.

La civilización egipcia: En matemáticas permanecieron muy dependientes de un sistema de números poco adaptado con escritura de partes fraccionadas con la ayuda de ‘’fracciones egipcias’’ de numerador 1, sistema limitado y poco eficiente.

La civilización griega: Es la heredera en matemáticas de esas civilizaciones. Los griegos han dispuesto de un sistema de notación literal con ayuda de las letras del alfabeto, tomando el número 10 como básico. Aunque limitado en el plano de la escritura de grandes números, este sistema fue utilizado para la notación de números paralelamente a la utilización de un ábaco para las operaciones. Para notar las partes fraccionarias, los griegos tenían recursos, ya fuera con las fracciones egipcias o con la utilización de sesenteavos adaptados a su notación con las letras. Más tarde una notación de fracciones a la ayuda de pareja de enteros apareció. Todos los cálculos prácticos estaban diseñados bajo el término de *logística* para los griegos y considerados como una actividad reservada a los artesanos y mercaderes. La "parte noble" de las actividades numéricas, concerniendo las reflexiones sobre la naturaleza de los números relevada de la actividad de matemáticos y estando diseñada bajo el nombre de aritmética. En los textos de matemáticos de la época clásica la noción de número recubre exactamente esa del número entero natural. Más tarde, en el final del periodo clásico donde estaban los matemáticos como Arquímedes, Herón y Diofanto, la noción de número englobaba también esa de fracción.

2.2 El descubrimiento de la irracionalidad

En la escuela pitagórica son desarrolladas las técnicas de demostración iniciadas por Tales. El número entero juega un papel en la filosofía pitagórica. "Todo es un número”. No se han clasificado los trazos escritos de su obra, pero se sabe que muchas demostraciones en geometría han sido hechas en esta escuela suponiendo que dos longitudes cualesquiera siendo conmensurables, es decir que la relación de dos longitudes se convierte en una relación de dos enteros.

El descubrimiento de la irracionalidad, probablemente apropósito de la diagonal y del lado del cuadrado alteraría su filosofía. Se conocen dos demostraciones de esta irracionalidad. Una de ellas es nombrada por Aristóteles como "La demostración por el par y el impar", es decir que si la diagonal era conmensurable en el lado uno podría demostrar que un mismo número era a la vez par e impar.

La otra demostración utiliza un método llamado "antipairesis" o sustracción reciproca. Esta es esencialmente la del algoritmo de Euclides aplicada a las longitudes. Esta distingue del caso conmensurable donde el algoritmo es finito y el caso inconmensurable donde el algoritmo no termina; desde los orígenes, la noción de irracionalidad es asociada a un proceso infinito.

2.3 La naturaleza de lo continuo, la naturaleza de lo infinito

En el final del siglo quinto AC, un debate sobre la naturaleza de lo continuo dividía diferentes escuelas filosóficas griegas. Una línea era indefinidamente divisible, o era ella constituida de líneas no separadas? el mismo problema para el tiempo, las áreas y los volúmenes.

Contra las tendencias de dos escuelas, partiendo de líneas indivisibles o partiendo del continuo infinitamente divisible, Zenon de Elea avanzo cuarenta paradojas de las cuales cuatro nos han sido conservadas por Aristóteles. Ellas ponen en duda el uso de lo infinito y mejoraron los debates de los filósofos por largo tiempo.

Aristóteles estableció un teorema de lo infinito, teoría que hará autoridad durante dos mil años. Aristóteles aplica al infinito su distinción entre la existencia en acto y la existencia en potencia. El muestra que el único uso del infinito que tiene utilidad para el matemático es el infinito en potencia o infinito potencial, como posibilidad de crecimiento (por ejemplo la posibilidad de dividir toda longitud). Un tamaño no es infinito. *El infinito no es eso afuera en donde no hay nada, pero al contrario es eso afuera donde hay siempre algo.* El infinito es entonces asociado o incluido, indeterminado y a una connotación negativa. Todo el rigor matemático de los griegos se ejerció para eliminar el recurso al infinito en el razonamiento matemático.

Esto tiene una gran importancia para nuestros propósitos. Si la relación de dos tamaños inconmensurables no pueden ser definidos como la relación dedos enteros, como definirlo? Nosotros hemos clasificado trazos de una primera definición de esa relación como la sucesión infinita de cantidades que aparecen en el proceso de antipairesis, definición inaceptable, si el infinito es evitado en matemáticas. La solución será encontrada por Eudoxio y expuesta en el libro cinco de los elementos de Euclides que trata de relaciones y tamaños.

3. LA MEDICIÓN DE MAGNITUDES EN GRIEGO

3.1 La medición de las Magnitudes de Euclides

Las magnitudes El término magnitud no es definido en ninguna parte en Euclides. Por el contexto, comprendemos que se trata de longitudes, de áreas, de volúmenes, de ángulos, de arcos de círculo, pero sin poner detrás de estos términos de nociones numéricas. Los solos números utilizados son los enteros. El término medir es empleado en el sentido siguiente: una magnitud mide otra de la misma clase si la segunda se obtiene yuxtaponiendo un entero multiplicado por la primera.. La operación asociada es pues una operación de yuxtaposición, de longitudes puestas a continuación, de superficies planas, de volúmenes.

Criterios de igualdad Una herramienta esencial es el criterio de igualdad de las magnitudes. Estas son puramente geométricas. Para segmentos, ángulos y arcos, es posible poner en coincidencia. Para los triángulos, los tres casos de igualdad muestran que la igualdad de tres elementos, cotas y ángulos escogidos adecuadamente lleva a la igualdad de los otros tres elementos y a la igualdad de los triángulos. Comprendemos que esta igualdad de triángulos designe lo que llamamos igualdad de las áreas de los triángulos, (pero utilizando aquí una noción numérica que no existe en el caso de Euclides), la lectura de la declaración de la proposición 37 del libro 1 de los Elementos Euclides: triángulos con la misma base y entre las mismas paralelas son iguales. Esto muestra que esta noción de triángulos planos es una correspondencia puramente geométrica de nuestra noción numérica de igualdad de áreas de triángulos. Las igualdades de otras figuras planas son mostradas por procedimientos de recorte. Nociones análogas son tan desarrolladas para los volúmenes: ejemplo, los paralelepípedos con la misma basa entre los mismos planes paralelos son planos.

Cuadraturas y mediciones de volumen Los problemas de cuadratura (respectivamente curbatura) designa la construcción la regla y el compás de un cuadrado (respectivamente un cubo), igual a una superficie dada (respectivamente un volumen dado). Los más célebres de estos problemas conciernen a cuadratura del círculo y la duplicación del cubo, los problemas que encontrarán su solución en el siglo XIX, cuando la imposibilidad de tales construcciones se muestra en el contexto de la teoría de los números.

La noción de cuadratura asociar un número con una magnitud y una unidad no existe en griego. No encontramos pues en Euclides ninguna fórmula de cálculo de superficies o de volúmenes, aunque los numerosos problemas de cuadratura y de curbatura sean tratados. En calidad de ilustración de este punto demos el teorema de Pitágoras que figura al fin del libro 1. Tiene que comprender así: el cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo puede ser descompuesto en dos rectángulos "planos" respectivamente a los cuadrados construidos sobre los lados del ángulo recto.

El método de área. Este método consiste en pasar de demostrar igualdades de líneas, por igualdades de áreas. Se utiliza ampliamente por Euclides. Del mismo modo, la demostración de relaciones iguales entre líneas se demostrará utilizando las relaciones entre las superficies. Más tarde se le criticó por los matemáticos como Port Royal sin respetar el verdadero orden de la naturaleza, que según ellos predominan en cantidades y longitudes, superficies y volúmenes y piden no acudir, contrariamente a Euclides, a superficies para demostrar teoremas sobre longitudes.

Las operaciones sobre las magnitudes. Las operaciones de Yuxtaposición implican magnitudes del mismo tipo homogéneo llamado por los griegos, y dan un resultado similar. Esta yuxtaposición no se registra como una adición. En cambio, explícitamente deducimos de eso una multiplicación de los tamaños por los enteros, obtenida mediante la repetición de la operación de yuxtaposición de magnitudes iguales.

Una multiplicación de magnitudes existe de modo limitado: el producto de dos longitudes da el rectángulo construido sobre estas dos longitudes. El producto de tres longitudes da el paralelepípedo rectángulo construido sobre estas tres longitudes. El producto de más de tres longitudes pues no tiene sentido. Lo mismo para el producto de dos áreas, o de una longitud y de un volumen, o de una área y de un volumen, etc...

Designamos bajo el nombre de álgebra geométrica griega, toda una serie de problemas que figuran en el libro dos y el libro seis de los Elementos de Euclides, que son exprimidos y resueltos geométricamente, y que podemos asociar ahora con identidades notables, o con resoluciones de ecuaciones de segundo grado, refiriéndose en números, pero que en el libro griego no tienen nada numérico.

3.2 La teoría de las razones de magnitudes de Eudoxio y Euclides

Longitud de las magnitudes en el libro quinto de los Elementos. Las primeras definiciones del libro cinco se refieren en las razones (o informes) de tamaños y sobre las proporciones (igualdad de razones). Podemos establecer una razón sólo entre dos tamaños homogéneos, (definición 3), que además verifican una propiedad designada ahora bajo el nombre de axioma de Arquímedes (definición 4: los tamaños que son multiplicados deben de superarse mutuamente, es decir que no se puede establecer una razón entra A y B si existen dos enteros n y p tales que nA> b y pB> A).

Una proporción es una identidad de razones, (definición 5). En notaciones modernas, la definición 6 da un criterio de igualdad de razones: A es a B como C es a D si, para todos los enteros n y p posibles:

- Si $nA>pB$ entonces $nC>pD$
- Si $nA = pB$ entonces $nC = pD$
- Si $nA<pB$ entonces $nC<pD$

La definición 6 es una definición operatoria, en el sentido que efectivamente interviene en las demostraciones, por ejemplo para mostrar que triángulos entre las mismas paralelas son entre ellos como sus bases, propuesta que servirá para establecer el teorema que los manuales franceses designan bajo el nombre de teorema de Thales.

Lo mismo es definida una relación de orden entre las razones. En consecuencia del libro cinco están establecidas por relaciones sobre las proporciones; hay que observar que prácticamente no se obra sobre estas razones. Sólo una composición (producto) limitada al cuadrado de una razón (llamado razón doble, definición 10) y al cubo de una razón (llamada razón triplicada, definición 11) figura. Un solo teorema del libro seis (proposición 18) utiliza una composición de razones, en ninguna parte definida: paralelogramo equiángulo tienen entre ellos una razón compuesta de las apreciadas.

Una laguna de los Elementos concierne a la existencia de la cuarta proporcional a tres tamaños, abundantemente utilizada por Euclides para superficies y volúmenes en el libro 12 y demostrada solamente en el caso de longitudes.

Medición de cantidades y el método de exhaución. Todos los teoremas que para nosotros dependen de la medida de los tamaños, las superficies y los volúmenes, serán expresados en el lenguaje de las proporciones en el libro12. La mayor parte de estos teoremas surge en una forma similar a la siguiente: Proposición 2, los círculos son entre sí como el cuadrado de su diámetro. La demostración se hace por una reducción doble a lo absurdo, llamada más tarde método de exhaución. Para mostrar que *A/B = C/D*, se muestra que *A/B*> *C/D* es imposible y que *A/B* <*C/D* es imposible; deducimos de eso la igualdad de las razones. La herramienta utilizada para estas demostraciones por lo absurdo es el teorema 1 del libro 10 que dice que: Son propuestos dos tamaños desiguales, si se suprime de la más grande una parte más grande que su mitad, si suprime además una parte más grande que su mitad, y si hace siempre la misma cosa, quedará un tamaño cierto que será más pequeño que el más pequeño de los tamaños propuestos.

La teoría de las razones entre magnitudes proporciona un procedimiento para demostraciones rigurosas de geometría. Sigue siendo la referencia esencial para dos mil años. Es la única manera encontrada por los griegos para tratar en un marco geométrico la cuestión de las razones de las magnitudes inconmensurables.

3.3 Las aproximaciones de irracionales

Es importante observar que el término de irracional designa para nosotros un número irracional. Es por la razón que hablamos de irracionales para indicar que esta noción no tiene en griegos nada numérico y se queda en un marco geométrico.

La teoría de las razones de magnitudes fue un instrumento notable en las manos de Arquimedes para demostrar rigurosamente cuadraturas y curbaturas que había encontrado utilizando analogías mecánicas. En particular mostró marcos célebres de la razón del área del círculo al cuadrado del radio. Otros matemáticos como Herón, desarrollaron cálculos de valores acercados a cantidades irracionales.

Paralelamente desarrollada esta teoría de las razones de magnitudes en el libro cinco para las magnitudes y en los libros 7, 8, 9 de aritmética para las razones de números, abastece un desarrollo de la logística, abasteciendo de teoremas Aplicables a las fracciones, lo que explica el ensanche de la noción de número a las fracciones, a los finales del período clásico de la matemática griega.

3.4Proclo, sobre las razones

Concluiremos esta parte dedicada al problema de la irracionalidad en matemática griega por citaciones de Proclus extraídas del " comentario sobre el libro 1 de los Elementos de Euclides " (prólogo página 51). Los cálculos numéricos desarrollados plantearon la cuestión: ¿qué hacen estas razones de naturaleza geométrica que se pueden encuadrar, acercarse por números?

El hecho de que las razones siempre racional pertenece a la aritmética sola, y no totalmente a la geometría, porque existen también unas razones irracionales allí dónde hay división al infinito, hay también un irracional...

En cuanto a los teoremas que son comunes de ellos, uno se transporta de la geometría en la aritmética, otros, al contrario de la aritmética en la geometría; por fin otros, los que les son destinados de la misma manera por matemático entera, les interesan las dos. Es en efecto de esa manera la permutación, las inversiones, las composiciones y las divisiones de informes son comunes de ambas ciencias; Que la aritmética es la primera en considerar las cosas conmensurables; qué la geometría las considere después de haber tomado la aritmética como el modelo, y establece por ahí hasta que las cosas conmensurables todas son las que tienen entre ellas la razón de un número a número, porque la conmensurabilidad existe primordialmente en los números. Porque por todas partes dónde hay número hay también un conmensurable y por todas partes dónde hay un conmensurable, hay también un número.

4. LAS CONTRIBUCIONES DE LOS MATEMÁTICOS ÁRABES

4.1Reflexiones sobre la teoría de las proporciones

Sabemos que los matemáticos árabes han trabajado sobre el texto de Euclides, en particular la teoría de las proporciones y la teoría de las paralelas. Tenemos un ejemplo con el trabajo de Omar Khayyam (1048-1123), donde trata de definir la igualdad de dos relaciones.

(Siendo dados) cuatro tamaños (tales que) la primera sea igual al segundo y la tercera igual al cuarto, o bien (tal que) la primera sea una parte del segundo, y tercera la misma parte del cuarto, o bien (tal que) la primera o partes del segundo y la tercera estas mismas partes del cuarto, entonces la razón de la primera al segundo necesariamente está como la razón de la tercera a la cuarta, y este razón es numérica.

Este párrafo enumera pues los casos siguientes de igualdad de razones:

- $A = B$ y $C = D$
- $A = B/n$ y $C = D/n$
- $A = pB/n$ y $C = pD/n$

Para concluir que en este caso $A/B = C/D$ (en lenguaje moderno). Anotemos bien la conclusión: esta razón es numérica.

Si las (magnitudes) no están según estas tres formas y qué, cuando se suprime del segundo todas los múltiplos de la primera (contenidos en el segundo) hasta que quede un residuo inferior a la primera, y tan de la misma manera, cuando se suprime del cuarto todos los múltiplos del tercero hasta que quede un residuo inferior al tercero, y si el número de múltiplos de la primera contenido en el segundo es igual en total de múltiplos de la tercera (contenido) en el cuarto. Y si después de (esto), se suprime (de la primera) todos los múltiplos del residuo del segundo con relación a la primera, de tal modo que queda un residuo inferior al residuo del segundo, y tal modo que con la misma (manera), se suprime (del tercero) todos los múltiplos del residuo del cuarto con relación al tercero hasta que quede un residuo inferior al residuo del cuarto, y tal modo que entonces el número de múltiplos residuo del segundo es igual en total de múltiplos residuo del cuarto;...Y si, cuando de la misma manera, se suprime todos los múltiplos de los residuos sucesivamente unos de otros, como lo mostramos, el número de los residuos de la primera y del segundo es igual al número correspondiente del tercero y del cuarto, (y esto) indefinidamente, entonces la razón de la primera al segundo estará, necesariamente, como la razón del tercero al cuarto. Y es esto la razón verdadera para el tipo geométrico de las magnitudes).

Este texto es extraído de la Segunda Epístola sobre las proporciones, de la idea de proporcionalidad y de su sentido verdadero". (Traducción por Ahmed Djebbar). Vemos aquí describir en palabras el algoritmo de Euclides aplicado sobre los tamaños; la definición de la igualdad de las razones pues es dada por la igualdad, a todos los estadios de los cocientes. Vemos oponer este tipo de razones a los precedentes, como razones de tipo geométrico. Es allí la definición pré-Eudoxiana de razón con la ayuda de la continuación de los cocientes en el proceso de antipairesis.

4.2 Desarrollo del álgebra

No vamos a desarrollar este punto, la invención del álgebra fue una contribución esencial de árabes; designando a lo desconocido, con una palabra " la cosa ",

utilizando su "cuadrado", los árabes aclararon la resolución de la ecuación de segundo grado, distinguiendo diferentes casos, ya que utilizaban sólo 11 de los coeficientes positivos. El algébrista italiano del Renacimiento resolvieron las ecuaciones del tercero y del cuarto grado. Paralelamente comienza en Europa el desarrollo del simbolismo algébrico cuya unificación será muy larga a realizar.
Esta álgebra y sus desarrollos en Europa desempeñan también un papel en el desarrollo de la noción de número real, trayendo un cálculo uniforme, que la puerta desconocida sobre números (racionales) o sobre los tamaños.

4.3La invención de la coma decimal

Esta invención hecha en diferentes épocas por Al Samawal y por Al Kashi, en particular, no parece haber desempeñado un papel importante que importa en las matemáticas árabes. Sin embargo, conduce a una graduación sobre los números, la graduación tan fina que se quiere, y se permite comparaciones entre números mucho más fácil que por el uso de las representaciones fraccionarias. Redescubrimiento de los decimales en Europa a finales del decimosexto siglo por Stevin, será seguido por su uso generalizado en las mesas de cálculos en particular las tablas de logaritmos. Tiene una importancia considerable como la unificación del campo numérico.

5. PROCESO DE NUMERIZACIÓN DE LAS RAZONES

Nosotros vamos a indicar brevemente algunas etapas del gran proceso histórico que condujo a los matemáticos a considerar las razones geométricas como números.

5.1 Las operaciones sobre las razones y las magnitudes

Oresme. El primer desarrollo importante sobre la teoría de las razonesfue aportado por el trabajo de Oresme escrito entre 1351 y 1360, titulado: "De proportionibus proportionum" Este escrito desarrollo las operaciones sobre las razones:

- Sumar, restar, dividir, aumentar, disminuir
- Desarrollo de la composición de razones (producto), de razones de razones estudio del carácter racional o no de razones de fracciones.
- La afirmación que las razones se comportan como las magnitudes continuas: entre dos razones diferentes, es posible de insertar tantas medias como uno quiera, una fracción es divisible al infinito.

Viète (1540-1603) escrita en 1591 "In artem analyticen Isagoge" describió en matemáticas una nueva arte, la analítica (de hecho el algebra), como proceso de descubrimiento de verdades matemáticas. Esta nueva algebra es tan aritmética como geométrica, y describe una teoría general de las proporciones. Ella distingue la lógica numérica de la lógica espaciosa (Cálculo sobre los tamaños y los números desconocidos, las especies). De las teorías griegas, Viète conserva la ley de los homogéneos: Solo se puede sumar o restar los tamaños homogéneos. El producto de dos tamaños homogéneos o no, da un tamaño de otra dimensión. Así como la división de tamaños es definida en referencia a la noción griega de aplicación de una fracción sobre otra. La jerarquía de tamaños no se limita a las longitudes, superficies y volúmenes, sino que comprende tamaños de dimensiones como 4,5,6... Así como Diophante lo había ya hecho. Es esto que lo autoriza a mostrar que cuatro magnitudes son proporcionales si y solamente si el producto de los medios es igual al de los extremos, y estableció una relación entre la escritura de ecuaciones y esa de las proporciones. Viète muestra cómo plantear un problema en una ecuación, como transformar esta ecuación para pasar a una forma canónica que dará la solución y como explotar numéricamente estos resultados.

5.2 Representar los tamaños por longitudes

Descartes "Las reglas para la dirección del espíritu" y la "geometría" muestran las concepciones de Descartes sobre el álgebra, la geometría y las matemáticas. Él busca una matemática universal, que no puede ser representada y concebida simbólicamente. El algebra es una teoría general de la proporciones y de las ecuaciones, de donde los objetivos adquieren primero sus características y luego el campo numérico, pero de la cual los objetos simbólicos se identifican con los objetos de el mundo físico. Esta matemática universal identifica el algebra concebida comologística simbólica, con la geometría interpretada por primera vez como ciencia simbólica.

Uno de los aportes esenciales de Descartes es la ruptura de la ley de la homogeneidad. Descartes muestra que todos los resultados de operaciones sobre los tamaños, una vez escogida una unidad de medida, pueden ser representados por longitudes. Primer paso esencial: Las relaciones geométricas, los productos, las superficies, los volúmenes pueden ser representadas por longitudes. La parte derecha representa todos los resultados de los cálculos. Esta geometría de descartes es un algebra de longitudes.

Aunque él no se pronunció claramente, sobre la naturaleza de la relación geométrica (es un número o no?) o más bien (en mi conocimiento) aunque el mantiene la distinción entre numero y razón geométrica, el avance sobre el plano de la numerización de las razones es importante.

5.3 Encontrar una mejor definición de razones

Arnault. En su tratado de geometría "nuevos elementos de geometría" segundo libro sobre la teoría de proporciones (1667), (página 23) Arnauld da una nueva definición de las razones y las proporciones, más cercana, como lo remarca R. Bkouche, de la práctica de la medida que la definición Euclidiana. Aquí, contrariamente al texto Euclidiano, la teoría de proporciones se sitúa en los capítulos preliminares del curso de geometría.

La forma de la cual un tamaño es contenido en otro que nosotros hemos llamado razón, tiene aun dos opciones. Una es cuando el tamaño o alguna de sus *alícuotas es contenida un número de veces preciso en la otra, lo cual se llama razón exacta o razón de número a número, porque todos los números tienen entre ellos esta razón aproximándose más o menos a la unidad para uno de sus alícuotas que es contenida precisamente tantas veces en todo otro número que ese sea.*

Los tamaños que tienen entre ellos este tipo de razón de número a número son llamados conmensurables, porque ellos tienen alguna alícuota que les sirve de medida común. La otra manera según la cual un tamaño es contenido en otro, es cuando el no encuentra ningún alícuota que sea precisamente contenida en la otra. De manera que los dos tienen infinitas alícuotas y medidas y no hay ninguna que mida precisamente ninguno de los dos tamaños, pero ese que mide precisamente el primero no medirá jamás precisamente el segundo y ese que mide de manera precisa el segundo no medirá jamás de manera precisa el primero. Esta razón se llama irracional y los tamaños que tienen entre ellos ese tipo de razones se llaman inconmensurables, porque ellos no tienen entre ellos ninguna medida común.

Para la definición de una proporción, dos definiciones son necesarias, la primera concierne a la igualdad de razones de número a número.

Luego que la razón de un antecedente en su consecuente es igual a esa de un otro antecedente en un otro consecuente, esta igualdad de razones se llama proporción.

A continuación la segunda:

Dos razones son llamadas iguales cuando todas las alícuotas paralelas de los antecedentes son cada una igualmente contenidas en cada consecuente.

Que significa esta segunda definición, con nuestras notaciones? se tendrá $A/B=C/D$ si tomando las alícuotas paralelas de los antecedentes, es decir partiendo *A* y *C* por el mismo entero, uno obtiene que las alícuotas son cada una igualmente contenidas en *B* y *D*, es decir que $p.\ A/n < B < (p+1).\ A/n$ y $p.C/n < D < (p+1).C/n$. Uno ve que este proceso es el proceso práctico de medida utilizando las alícuotas de los antecedentes como unidad.

Los nuevos elementos de geometría de Arnault se convirtieron en una referencia importante durante más de un siglo.

5.4 Las razones son números?

Stévin Independientemente de su trabajo "La Disme" donde el descubre los decimales, Stevin (1548-1620) es interesante para la toma de posiciones muy modernas sobre la naturaleza de los números y las magnitudes, rompiendo totalmente con la tradición. Sus tesis desarrolladas en "Tratado de los magnitudes inconmensurables" (Aritmética 1585)son reconocidas.

- *Que la unidad es número*
- *Que cualquier número puede ser número cuadrado, cubico, etc*
- *Que cualquier raíz es un número*
- *Que no hay ningún número absurdo, irracional, irregular, inexplicable o irracional.*

Numerosos matemáticos participaron en ese tipo de discusión. El número entero definido por Euclides como múltiplo de la unidad por definición misma. El estatus del cero poseía también un problema. Pascal se pronuncio también en "El espíritu de la geometría" sobre ese tema, demostrando que la unidad es un número pero que el cero no lo es.

La originalidad de Stevin es manifiesta por su posición sobre los números y los tamaños "La comunidad y la similitud entre tamaños y números es tan universal que ellas parecen casi idénticas " Los números son para él una estructura continua y no una estructura discreta: "un número no es un punto cantidad discontinua". El diferencia numero aritmético (sin adjetivo de tamaño) y numero geométrico, pero todo es llamado número.

Esta posición no pudo ser justificada y partía de una toma de posición, de un acto de fe que fue violentamente combatida por los matemáticos de Por-Royal, en particular. Esta teoría no logro convencer a esos que permanecían en el pensamiento de Euclides.

Newton En su libro publicado en 1707 "Aritmética Universal" Newton responde sin ninguna ambigüedad por la afirmación:

"Por número entenderemos, no tanto el conjunto de unidades como la relación abstracta de cualquier magnitud hacia otra magnitud del mismo género, tomada por nosotros como unidad. Los números los hay de tres tipos: entero, fraccionario e irracional. El numero entero es aquello que se mide con unidades; el fraccionario, con partes múltiples de la unidad; los números irracionales no son conmensurables con la unidad."

D'Alembert. El artículo de la enciclopedia Diferot D'Alembert da en el articulo número una definición yuxtapuesta de puntos de vista contradictorios: multiplicidad de unidades en el primer parágrafo, relación abstracta de una cantidad en una otra según Newton en el segundo, en un tercer parágrafo, según la definición de Wolf, esta que tiene la misma relación con la unidad que una línea recta, con un regreso a continuación del articulo en la noción Euclidiana de multiplicidad de unidades.

Para comprender, es interesante de dirigirse a los "Ensayos sobre los elementos de la filosofía natural" , de D'Alembert (1759), pagina 328, donde el desarrolla su punto de vista.

... La palabra medida en matemáticas, encierra la idea de una relación explícitamente expresada. Aunque hay relaciones que ofrecen más de dificultades que las otras, sea por presentar la noción de una manera bien completa, sea por demostrarla de manera rigurosa: Esas son las relaciones de cantidades inconmensurables.

Se dice por ejemplo que la diagonal del cuadrado es a su lado como la raíz cuadrada de 2 es a 1; para tener una idea completa de la verdad que esta preposición expresa, se debe remarcar que no hay punto de la raíz cuadrada del numero 2, y por consecuencia de la relación propiamente dicha entre esta raíz y la *unidad, y por tanto propiamente dicho entre la diagonal y el lado de un cuadrado, y finalmente de la igualdad de sus relaciones, porque no hay punto propiamente de igualdad entre las relaciones que no existen. pero se debe remarcar al mismo tiempo, que si uno no puede encontrar un numero que multiplicado por el mismo produzca dos , uno puede encontrar números que multiplicados por si mismos den un número tan cercano a 2 que uno lo desee sea por encima o por debajo.....*

Esta facilidad que se tiene de representar las relaciones inconmensurables, no por números exactos, sino por números aproximándose tan cerca como una quiera, sin nunca exprimir rigurosamente esas relaciones. Es por esto que los matemáticos tenían entendido la denominación de número de las relaciones como inconmensurables, porque ella no les pertenecía que impropiamente, porque las palabras número y numerar suponen una designación exacta y precisa, así que las relaciones no son susceptibles. También el solo habla de dos clases de números, los números enteros y los números quebrados o fracciones....

De acá es posible ver, que si las relaciones inconmensurables son miradas como números, es por la razón que aunque ellos no son números propiamente hablando, no sirve de nada, por así decir, que ellos no lo sean realmente ,porque la diferencia de una relación inconmensurable con un numero propiamente dicho, puede ser también tan pequeña como una quiera.

Legendre. La práctica de Legendre es clara. En su libro "Elementos de geometría" aparecido por primera vez en 1794, el desarrolla el *verdadero sentido de las proporciones* en el libro 3.

Si uno tiene la proposición A: B:: C:D , se sabe que el producto de extremos A.D es igual al producto de los medios B.C.

Esta verdad es incontestable para los números; lo es también para los tamaños cualquieras, viendo que ellos se expresan, o que uno los imagina expresados en números; y es eso que uno puede siempre suponer: por ejemplo si A, B, C, D son líneas, uno puede imaginar que una de esas cuatro líneas o una quinta, sirve a todas en medida común y sea tomado como unidad ; entonces, A,B,C,D representan cada una cierto número de unidades, entero o quebrado, *conmensurable o no inconmensurable, y la proporción entre las líneas A,B,C,D se convierten en una proporción de números.*

5.5 Argand y las relaciones de tamaños dirigidos

Se sabe que los números negativos y los números imaginarios, están en uso después del renacimiento y pusieron problemas a los matemáticos problemas formidables. Queriendo extender a esos números o cantidades todas las reglas validas para todos los números enteros o fraccionarios, algunas contradicciones aparecieron: dificultades con los logaritmos de números complejos. El problema de la justificación del uso de esas cantidades estuvo propuesta hasta el siglo diecinueve. Dos opciones de teorías fueron propuestas: una de naturaleza geométrica por un cierto número de matemáticos poco conocidos como Argand, Warren, Mourrey consiste en extender a los tamaños dirigidos la teoría de proporciones, asociando a la idea de relación una idea de ángulo; la otra o las otras teorías, elaborados por matemáticos más conocidos como Gauss, Hamilton, Cauchy, son justificaciones de naturaleza algebraica.

La ultima extensión de la teoría de las proporciones vista entonces ael día, algunas decenas antes del momento donde, por el descubrimiento de geometrías no Euclidianas, los matemáticos tomaron conciencia que los fundamentos de las matemáticas no podían ser garantizados tomando como base la verdad de la geometría Euclidiana. El problema de los fundamentos del análisis fue expuesto. En ese proceso, la teoría de proporciones va a ser abandonada en el perfil de una construcción de los números reales a partir de números racionales.

5.6 La aritmetización del análisis

Después un largo periodo de desarrollo donde los resultados obtenidos en los diversos sectores de la mecánica y la física lograron mostrar el fondo de los métodos empleados en el análisis, con Cauchy en particular el problema de fundar el análisis sobre las bases rigurosas se convirtió en una preocupación importante, en particular para las necesidades del la enseñanza .

Bolzano hacia 1871 emprendió una crítica de las demostraciones geométricas empleadas para demostrar un teorema como el teorema de los valores intermediarios, *hay una falta intolerable contra el buen método que consiste en querer deducir las verdades matemáticas pura (o generales) (es decir de la aritmética, del algebra o el análisis, de las consideraciones que pertenecen a una parte aplicada (o especial), a saber la geometría.* El rechaza también el recurso en las consideraciones de movimiento o tiempo.

Numerosos matemáticos fueron en esta época forzados a justificar los teoremas fundamentales del análisis, demostrando primero las propiedades de los numero, o más bien haciendo una construcción explicita de esos números a partir de números racionales supuestos conocidos en ese primer momento.

Nosotros no describiremos los diferentes modos de construcción de los reales a partir de los racionales, lo que para mí, es el objeto de un próximo trabajo. Mi objetivo en este artículo fue simplemente de mostrar que los números reales han propuesto diferentes preguntas durante la historia. Estas preguntas, en los términos mismos donde los matemáticos se las propusieron, son interesantes, porque no hay duda que los estudiantes pueden proponérselas más o menos en los mismos términos.

6. ¿QUÉ HACER EN EDUCACIÓN?

Si las construcciones de los números reales han estado abandonadas a principios del primer ciclo universitario, es porque efectivamente, estas no pudieron pasar.

Resulta imposible definir los reales por las sucesiones de Cauchy, a los estudiantes que tienen un mal momento a habituarse a los razonamientos con los $\in \eta$. La construcción por los cortes sería posible si los estudiantes hubiesen tenido la costumbre de hacer los razonamientos de más de dos líneas...

Está seguro que en la situación actual, hay que reforzar la formación del maestro sobre esta cuestión porque el dilema es el siguiente: debemos en el curso de los estudios secundarios desarrollar entre los alumnos una intuición justa de los números, estando en la imposibilidad de aportar justificaciones completas. Si el maestro es bastante formado, si tiene ideas claras sobre esta cuestión, a cada etapa puede hacer progresar a los alumnos. Pero, ¿qué puede un profesor que tiene ideas vagas o francamente falsas, como ciertos estudiantes de Capas que veo cada año. Puede sólo reproducir esta confusión al nivel de sus alumnos.

¿Qué pasa con la enseñanza del análisis en el que converge a las cosas que no hemos definido como $\sqrt{2}$ o que sólo se puede aproximar? Cómo, cuando la enseñanza es tan incoherente, hacer otra cosa analiza que pasar de una actividad al otro, sin saber demasiado lo que se hace, ni por qué lo hace? Comprobamos siempre que la idea principal sobre las consecuencias de los estudiantes de primer año de Deug llegando a la universidad, es que es muy duro y que no comprenden allí nada. En cuanto a la definición de los límites, hay que comenzar a corregir la utilizada en los programas.

Pensamos en Irem de Lila que para salir de esta situación, haría falta que Irem desarrollaran un trabajo vertical de reflexión sobre diferentes nociones, a los cursos de los ciclos primario, colegio, liceo, y una enseñanza superior. La cuestión de la enseñanza de los números es una de estas cuestiones, que reúne la cuestión de la enseñanza del análisis, el objeto de malestar para la mayoría de los profesores de terminal a los que conozco. Esta enseñanza debe ser repensada teniendo en cuenta el uso actual de las calculadoras, pero sin eludir actualmente como toda cuestión teórica.

¿Cuál es el significado de un cálculo exacto de un cálculo aproximado? El diseño de los números reales, la medición de magnitudes, la enseñanza de análisis es el resultado de un proceso histórico, que debemos considerar. Cómo restaurar la coherencia entre lo numérico y geométrico entre el modo digital y el análisis en la enseñanza? Es necesario iniciar un proceso de reflexión que se centra en la coherencia vertical del aprendizaje.