



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL  
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

**MODIFICACIONES DE LA DEFINICIÓN DE  
 $\sigma$ -ÁLGEBRA UTILIZANDO LOS 16  
CONECTORES LÓGICOS**

Trabajo de grado presentado ante el Departamento de Matemáticas  
de la Universidad Pedagógica Nacional como requisito para optar por  
el título de Licenciado en Matemáticas

---

Escrito por: Lizeth Andrea Ruiz Carranza  
Asesorado por: William Alfredo Jiménez Gómez

# AGRADECIMIENTOS

*A mis padres, Olga y Luis, por su apoyo incondicional en el largo camino que fue la búsqueda de mi vocación. Gracias por impulsarme siempre a hacer lo que amo, a no conformarme con dedicar mi vida a cumplir expectativas de los demás, a buscar ser feliz con lo que hago, pero sobre todas las cosas, gracias por enseñarme a luchar sin desfallecer, sin importar el tiempo o el esfuerzo que sea necesario para alcanzar mis objetivos. Los amo mucho, ustedes son mi inspiración.*

*A mis abuelos, Julio y Stella, por ser mis segundos padres, por todos sus cuidados y atenciones. Claramente mi vida sin ustedes no sería la misma. Soy afortunada al haber podido crecer junto a ustedes, gracias por siempre estar ahí para mí.*

*A mis hermanas, Lina y Johanna, por ser esa voz de aliento que necesité en los momentos en los que creí que no lo lograría. Por su complicidad y amistad, por las risas y lágrimas que hemos podido compartir durante todos estos años y por ser mujeres fuertes y valientes con las que siempre podré contar.*

*A mi esposo, Franky, por ser mi consejero, mi más grande respaldo y apoyo, mi confidente y en algunas veces mi maestro. Por supuesto, también debo agradecerte por darme las más bellas, largas, profundas y a veces dolorosas conversaciones. He aprendido mucho de mí misma a tu lado*

*A mi amiga, Derly, mi compañera de estudio, de lucha, de traspasada, de tinto entre clases... mi compañera de vida en estos años de carrera. Espero que la vida no permita tener muchos años más de amistad.*

*A mi asesor, profe William, por ser una inspiración, un modelo a seguir, pero sobre todo, por ser ese amigo que supo apoyarme cuando lo necesité. Espero llegar a ser al menos la mitad de buen profesor que eres tú.*

## **Dedicado a:**

*A tí, Tomás, hijo querido. No te doy las gracias porque ser profesora fue mi sueño antes de saber que existirías, pero a tí te dedico el camino que tome mi vida a partir de este momento.*



**FORMATO**

**RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE**

**Código: FOR020GIB**

**Versión: 01**

**Fecha de Aprobación: 10-10-2012**

**Página 1 de 3**

**1. Información General**

<b>Tipo de documento</b>	Trabajo de grado
<b>Acceso al documento</b>	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
<b>Título del documento</b>	Modificaciones de la definición de $\sigma$ –álgebra utilizando los 16 conectores lógicos
<b>Autor(es)</b>	Ruiz Carranza, Lizeth Andrea
<b>Director</b>	Jiménez Gómez, William Alfredo
<b>Publicación</b>	Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional, 2018. 60 p.
<b>Unidad Patrocinante</b>	Universidad Pedagógica Nacional.
<b>Palabras Claves</b>	$\sigma$ –ÁLGEBRA, LÓGICA, CONECTORES LÓGICOS, DEFINICIONES, PROBABILIDAD.

**2. Descripción**

Este trabajo de grado surge de un problema estudiado durante el año 2017 en el seminario de álgebra del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, que se asocia directamente con los realizados desde el año 2010 en el marco de algunos espacios académicos de la Universidad y del Instituto Pedagógico Nacional, y cuyos resultados fueron llevados como ponencias a diversos eventos nacionales e internacionales. Para la elaboración de dichos trabajos se realizaron exploraciones sobre los conectores lógicos de Peirce y las implicaciones que pueden generar en algunas teorías matemáticas al utilizarlos para modificar ciertas definiciones. La definición de  $\sigma$  –álgebra en la formalización de la Probabilidad es un concepto muy importante ya que afecta directamente conceptos como espacio medible y espacio de probabilidad. Se propuso entonces realizar una variación de la definición de  $\sigma$  –álgebra al utilizar los 16 conectores lógicos de Peirce para modificar la segunda condición de la definición. Utilizando el lenguaje simbólico, se puede escribir la segunda condición de la definición de la siguiente manera:  $A \in S \rightarrow A^c \in S$ . Por lo tanto, se obtienen diferentes versiones de esta proposición compuesta al remplazar en ella el símbolo  $\rightarrow$  por el de otro conector.

**3. Fuentes**

- Morera, J. F., Hurtado, C., Jiménez, W. (2012). Una propuesta alternativa para la enseñanza de la teoría de conjuntos.
- Muñoz, J. M. (2003). Topología básica (No. 11). Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.
- Blanco, L. (2004). Probabilidad. Universidad Nacional de Colombia.

Duarte, D., Daza, A., Translateur, E., Jiménez, W. (2010). Algunas consideraciones sobre los 16 conectivos lógicos analizadas por estudiantes talentosos en Matemáticas. En memorias IX ENMES (Paipa, Boyacá).

Ruiz, L., Gutiérrez, D., Gutiérrez, C., Malagón, A. (2015). Estudio de la variación de algunas definiciones de teoría de conjuntos al utilizar conectivos lógicos no usuales. En memorias X IEMEEM (Duitama, Boyacá).

#### 4. Contenidos

El presente trabajo consolida los resultados de la exploración realizada de la siguiente manera:

- En una primera sección se establece un marco de referencia en el que se presenta información teórica sobre lógica y los conectores lógicos de Pierce, adicionalmente se resumen algunos conceptos básicos de la probabilidad. En esta sección también se encuentran los principales resultados de estudios previos realizados en torno a los 16 conectores lógicos y que fueron utilizados en el desarrollo de la exploración.
- En la segunda sección se presentan los resultados encontrados al realizar la primera exploración de las modificaciones de la definición de  $\sigma$ -álgebra tomando espacios muestrales de dos y tres elementos.
- En la tercera sección se realiza un proceso de generalización de la regularidad encontrada en la sección anterior por medio del estudio de las tablas de verdad de los conectores y las definiciones generadas por cada uno de ellos.
- Se finaliza el trabajo presentando algunas conclusiones relacionadas con el proceso de exploración y los resultados encontrados en ella.

#### 5. Metodología

El tipo de trabajo realizado fue exploratorio partiendo de casos sencillos e intentando buscar la generalización. Una vez se identificó la definición que se quería estudiar fue necesario no solamente lograr una comprensión completa del concepto, si no la relación que guarda con otras definiciones de la teoría de la probabilidad. Posteriormente, se realizó una búsqueda y estudio de los trabajos realizados que se relacionan con lógica y, de manera muy especial, con los conectores de Pierce. La comprensión de los trabajos anteriores fue fundamental para la apropiación de las características y propiedades de cada una de las tablas de verdad de los conectores no usuales y cómo usarlas para comprender las nuevas definiciones que se generaban. Luego, al tomar espacios muestrales de dos y tres elementos se tuvo que realizar el ejercicio manual de detectar los conjuntos de interés, posibles candidatos a convertirse en  $\sigma$ -álgebra. Finalmente, estos resultados fueron los insumos para el proceso de categorización de los conectores y las relaciones que existen entre los conjuntos de  $\sigma$ -álgebra que originan.

#### 6. Conclusiones

- Al realizar el mapeo de los estudios previos realizados en torno a los conectores de Pierce, fue sencillo poder establecer que la notación más apropiada para abordar la exploración que se planteó es la notación binaria adoptada por Duarte, Daza, Translateur y Jiménez (2010). Esto se debe a que al asignar a cada conector un número decimal que corresponde a la notación binaria del valor de verdad que toma la proposición compuesta, se desliga al conector de la simbología y lo que representa y se da prioridad a las combinaciones de valores de verdad que lo originan, esto facilita el trabajo ya que no es necesario memorizar las reglas de relación de cada conector.
- Cuando se establecen las definiciones formales es necesario recurrir a la expresión binaria del conector para poder interpretar la condición en lenguaje simbólico, sin embargo, al verbalizar la

condición para generar la definición completa si se tuvo en cuenta la interpretación en lenguaje natural de los conectores usuales.

- Con respecto a la exploración con los conjuntos finitos resultó de gran importancia realizar la programación del Excel utilizando las equivalencias lógicas reportadas en el marco de referencia. Pese a que los conjuntos fueron solamente de dos y tres elementos, el hecho de que los conjuntos de interés resultaran ser elementos de  $\wp(\wp(\Omega))$  hizo que el trabajo manual requerido fuera excesivo. El poder generar una herramienta para verificar con cada uno de los conjuntos candidatos las 16 definiciones modificadas fue una de las actividades más importantes para poder llegar a los resultados de manera más eficiente.
- En cuanto a mi formación como docente, realizar este tipo de trabajo exploratorio contribuyó a que lograra ver un concepto de maneras diversas y que mi mente se forzara a trabajarlo de maneras no usuales. Creo que es clave para un profesor el poder entender un concepto, proceso u objeto propio de la matemática de maneras más amplias para que en el proceso de transmitir ese conocimiento a otras personas tenga más herramientas y pueda tomar decisiones más acertadas.

<b>Elaborado por:</b>	Ruiz Carranza, Lizeth Andrea
<b>Revisado por:</b>	Jiménez Gómez, William Alfredo

<b>Fecha de elaboración del Resumen:</b>	4	12	2018
--	---	----	------



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA  
NACIONAL

*Educadora de educadores*

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

## ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Presentados y **aprobados** el documento escrito y la sustentación del Trabajo de Grado, en el tipo Monografía, titulado: **“Modificación de la definición de  $\sigma$  - Álgebra utilizando los 16 conectores lógicos.”**, elaborado por la estudiante:

***Lizeth Andrea Ruíz Carranza - código 2014240055 - cédula 1016039930***

Como requisito parcial para optar al título de **Licenciado en Matemáticas**, el jurado evaluador asigna **46** puntos al mismo.

Sugerencia de Distinción: Ninguna  Meritoria  Laureada

En constancia se firma a los 04 días del mes de diciembre de 2018.

Director del Trabajo: Profesor

  
WILLIAM ALFREDO JIMÉNEZ GÓMEZ

Jurado: Profesor

  
ALBERTO DONADO NÚÑEZ

# Índice

<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>2</b>
<b>OBJETIVOS</b>	<b>2</b>
<b>METODOLOGÍA</b>	<b>2</b>
<b>1. MARCO DE REFERENCIA</b>	<b>9</b>
1.1. Lógica . . . . .	9
1.1.1. Conectores de Peirce . . . . .	10
1.1.2. Primeros estudios en el IPN . . . . .	11
1.1.3. Estudios realizados en el DMA . . . . .	13
1.1.4. Trabajo del Seminario de álgebra . . . . .	18
1.2. Probabilidad . . . . .	19
<b>2. PRIMERAS EXPLORACIONES</b>	<b>22</b>
2.1. Modificaciones de la definición . . . . .	22
2.2. Espacio muestral de dos elementos . . . . .	22
2.3. Espacio muestral de tres elementos . . . . .	29
<b>3. GENERALIZACIÓN</b>	<b>40</b>
3.1. Conectores 10, 11, 12, 13, 14 y 15 . . . . .	40
3.1.1. Conector 10 . . . . .	40
3.1.2. Conector 11 . . . . .	41
3.1.3. Conector 12 . . . . .	42
3.1.4. Conector 13 . . . . .	43
3.1.5. Conector 14 . . . . .	43
3.1.6. Conector 15 . . . . .	44
3.2. Conectores 3, 5 y 7 . . . . .	45
3.2.1. Conector 3 . . . . .	45
3.2.2. Conector 5 . . . . .	46
3.2.3. Conector 7 . . . . .	46
3.3. Conector 9 . . . . .	47
3.4. Conectores 2, 4 y 6 . . . . .	48
3.4.1. Conector 2 . . . . .	48
3.4.2. Conector 4 . . . . .	49
3.4.3. Conector 6 . . . . .	50
3.5. Conector 1 . . . . .	51
3.6. Conector 8 . . . . .	52
3.7. Conector 0 . . . . .	53
3.8. Diagrama de Hasse . . . . .	53
<b>4. CONCLUSIONES</b>	<b>55</b>
<b>5. BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>56</b>

## Índice de figuras

1.	Ejemplo de subconjuntos con la contención usual . . . . .	14
2.	Operaciones usuales entre conjuntos . . . . .	16
3.	Operaciones no usuales entre conjuntos . . . . .	17
4.	Diagrama de Hasse de las operaciones entre conjuntos . . . . .	18
5.	Excel con las relaciones binarias para los conectores lógicos . . . . .	27
6.	Diagrama de Hasse de los conjuntos de $\sigma$ -álgebra generados por los conectores lógicos . . . . .	28
7.	Excel con las relaciones binarias para los conectores lógicos . . . . .	36
8.	Diagrama de Hasse de los conjuntos de $\sigma$ -álgebra generados por los conectores lógicos . . . . .	39
9.	Diagrama de Hasse corregido de los conjuntos de $\sigma$ -álgebra generados por los conectores lógicos . . . . .	54

# Índice de tablas

1.	Conector $\wedge$ . . . . .	10
2.	Conector $\vee$ . . . . .	10
3.	Conector $\rightarrow$ . . . . .	10
4.	Conector $\leftrightarrow$ . . . . .	10
5.	Conector $\underline{\vee}$ . . . . .	10
6.	Conector $\sim$ . . . . .	10
7.	Conector $\leftarrow$ . . . . .	10
8.	Conector $-\circ$ . . . . .	10
9.	Conector $\circ-$ . . . . .	10
10.	Conector $\otimes$ . . . . .	10
11.	Conector $*$ . . . . .	10
12.	Conector $\pi_1$ . . . . .	10
13.	Conector $\pi_2$ . . . . .	11
14.	Conector $ $ . . . . .	11
15.	Conector $\downarrow$ . . . . .	11
16.	Conector $\top$ . . . . .	11
17.	Conector $\perp$ . . . . .	11
18.	Cambio de notación . . . . .	12
19.	Notación binaria para todos los conectores lógicos . . . . .	12
20.	Equivalencias lógicas . . . . .	13
22.	Definición de contenencia para cada conector lógico . . . . .	15
23.	Valores de verdad de las diferentes combinaciones de $p_S$ y $q_S$ . . . . .	24
24.	Valores de verdad de las diferentes combinaciones de $p_S$ y $q_S$ al relacionarlas por medio del conector 1 . . . . .	25
25.	Valores de verdad de las diferentes combinaciones de $p_S$ y $q_S$ al relacionarlas por medio del conector 8 . . . . .	25
26.	Tablas de verdad de las diferentes combinaciones de $p_S$ y $q_S$ para cada conector . . . . .	26
27.	Valores de verdad de las diferentes combinaciones de $p_S$ y $q_S$ . . . . .	33
28.	Valores de verdad de las diferentes combinaciones de $p_S$ y $q_S$ al relacionarlas por medio del conector 8 . . . . .	34
29.	Valores de verdad de las diferentes combinaciones de $p_S$ y $q_S$ al relacionarlas por medio del conector 1 . . . . .	34
30.	Tablas de verdad de las diferentes combinaciones de $p$ y $q$ para cada conector . . . . .	35
31.	Tablas de verdad de los conectores 10 al 15 . . . . .	40
32.	Tablas de verdad de los conectores 3, 5 y 7 . . . . .	45
33.	Tabla de verdad del conector 9 . . . . .	47
34.	Tablas de verdad de los conectores 2, 4 y 6 . . . . .	48
35.	Tabla de verdad del conector 1 . . . . .	51
36.	Tabla de verdad del conector 8 . . . . .	52
37.	Tabla de verdad del conector 0 . . . . .	53

---

---

## INTRODUCCIÓN

---

Este trabajo de grado surge de un problema estudiado durante el año 2017 en el seminario de álgebra del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, que se asocia directamente con los realizados desde el año 2010 en el marco de algunos espacios académicos de la Universidad y del Instituto Pedagógico Nacional, y cuyos resultados fueron llevados como ponencias a diversos eventos nacionales e internacionales.

Para la elaboración de dichos trabajos se realizaron exploraciones sobre los conectores lógicos de Peirce y las implicaciones que pueden generar en algunas teorías matemáticas al utilizarlos para modificar ciertas definiciones.

El problema estudiado en el seminario de álgebra durante el transcurso del semestre 2017-II está relacionado con la Topología y consiste en modificar las condiciones por las cuales determinado conjunto se puede considerar una topología. Según Muñoz (2003) dado un conjunto  $X$ ,  $\tau$  un subconjunto de  $\wp(X)$  es una topología de  $X$  si y solo si cumplen las siguientes condiciones:

- i.  $X \in \tau$  y  $\emptyset \in \tau$
- ii. Si  $A \in \tau$  y  $B \in \tau$  entonces  $A \cap B \in \tau$
- iii. Si  $A_i$  con  $i \in I$  una familia indexada de conjuntos tal que  $A_i \in \tau$  para todo  $i \in I$ , entonces  $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$

La modificación que se realizó fue utilizar las operaciones generadas por los conectores lógicos no usuales en lugar de la intersección de la segunda condición. Se ha realizado una exploración con conjuntos de dos y tres elementos y algunos de los resultados se llevaron a una ponencia en el XIII Encuentro Internacional de Matemática (EIMAT).

Una definición similar existe en el campo de la probabilidad: la  $\sigma$ -álgebra. Dado los resultados obtenidos con el estudio de las modificaciones del concepto de Topología, se propone realizar una exploración similar con la definición de  $\sigma$ -álgebra. Un espacio muestral  $\Omega$  es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio. Según Blanco (2004) dado un espacio muestral  $\Omega \neq \emptyset$ ,  $S$  un subconjunto de  $\wp(\Omega)$  es una  $\sigma$ -álgebra si y solo si cumple las siguientes condiciones:

- i.  $\Omega \in S$
- ii. Si  $A \in S$  entonces  $A^c \in S$

- iii. Si  $A_i$  con  $i \in I$  una familia indexada de conjuntos tal que  $A_i \in S$  para todo  $i \in I$ , entonces  $\bigcup_{i \in I} A_i \in S$

La definición de  $\sigma$ -álgebra en la formalización de la Probabilidad es un concepto muy importante ya que afecta directamente conceptos como espacio medible y espacio de probabilidad. Se propuso entonces realizar una variación de la definición de  $\sigma$ -álgebra al utilizar los 16 conectores lógicos de Peirce para modificar la segunda condición de la definición.

Utilizando el lenguaje simbólico, se puede escribir la segunda condición de la definición de la siguiente manera:

$$A \in S \rightarrow A^c \in S$$

Por lo tanto, se obtienen diferentes versiones de esta proposición compuesta al reemplazar en ella el símbolo  $\rightarrow$  por el de otro conector.

El presente trabajo consolida los resultados de la exploración realizada de la siguiente manera:

- En una primera sección se establece un marco de referencia en el que se presenta información teórica sobre lógica y los conectores lógicos de Pierce, adicionalmente se resumen algunos conceptos básicos de la probabilidad. En esta sección también se encuentran los principales resultados de estudios previos realizados en torno a los 16 conectores lógicos y que fueron utilizados en el desarrollo de la exploración.
- En la segunda sección se presentan los resultados encontrados al realizar la primera exploración de las modificaciones de la definición de  $\sigma$ -álgebra tomando espacios muestrales de dos y tres elementos.
- En la tercera sección se realiza un proceso de generalización de la regularidad encontrada en la sección anterior por medio del estudio de las tablas de verdad de los conectores y las definiciones generadas por cada uno de ellos.
- Se finaliza el trabajo presentando algunas conclusiones relacionadas con el proceso de exploración y los resultados encontrados en ella.

---

---

## OBJETIVOS

---

### Objetivo General:

Realizar modificaciones de la definición de  $\sigma$ -álgebra utilizando los 16 conectores lógicos y estudiar las implicaciones que tiene con otros conceptos de la probabilidad.

### Objetivos específicos:

- Consultar material bibliográfico relacionado con los conectores lógicos de Peirce y con los trabajos previos realizados con ellos.
- Construir las modificaciones generadas al utilizar los conectores lógicos de Peirce y estudiar las  $\sigma$ -álgebras obtenidas en conjuntos numerables finitos.
- Buscar regularidades que permita relacionar los diferentes conjuntos obtenidos y plantear generalizaciones que se puedan extender a conjuntos numerables infinitos, y si es posible, a conjuntos no enumerables.
- Generar argumentos o demostraciones que validen la generalización planteada.
- Utilizar diferentes herramientas tecnológicas que permitan extender los resultados obtenidos o estudiar espacios muestrales diferentes a los establecidos en el documento.

---

---

## METODOLOGÍA

---

El tipo de trabajo realizado fue exploratorio partiendo de casos sencillos e intentando buscar la generalización. Una vez se identificó la definición que se quería estudiar fue necesario no solamente lograr una comprensión completa del concepto, si no la relación que guarda con otras definiciones de la teoría de la probabilidad.

Posteriormente, se realizó una búsqueda y estudio de los trabajos realizados que se relacionan con lógica y, de manera muy especial, con los conectores de Pierce.

La comprensión de los trabajos anteriores fue fundamental para la apropiación de las características y propiedades de cada una de las tablas de verdad de los conectores no usuales y cómo usarlas para comprender las nuevas definiciones que se generaban.

Luego, al tomar espacios muestrales de dos y tres elementos se tuvo que realizar el ejercicio manual de detectar los conjuntos de interés, posibles candidatos a convertirse en  $\sigma$ -álgebra.

Finalmente, estos resultados fueron los insumos para el proceso de categorización de los conectores y las relaciones que existen entre los conjuntos de  $\sigma$ -álgebra que originan.

---

---

# 1. MARCO DE REFERENCIA

---

## 1.1. Lógica

La lógica en matemáticas se ocupa de los procesos y formas del razonamiento dentro de la disciplina. Aristóteles (384-322 a.C.), uno de los primeros filósofos y matemáticos de la historia, afirmaba que la lógica se trata de la ciencia de la demostración.

Aristóteles consideraba que el gran aporte de la lógica era la formulación de las reglas necesarias para construir verdades a través de un proceso deductivo, es decir, secuencias de argumentos conectados de tal forma que nadie pudiera dudar de la veracidad de la conclusión.

Se considera a Aristóteles como el padre de la lógica formal debido a que las formas de razonamiento que abstrajo se pueden traducir en un lenguaje simbólico universal. Este lenguaje simbólico, junto con las reglas que con él se utilizan, fueron los cimientos en los cuales se comenzaron a construir las principales teorías matemáticas.

La elegancia del lenguaje logicista fue protagonista en la década de 1930 y hasta mediados de 1970, cuando un colectivo de matemáticos franceses se dieron a la tarea de exponer de manera sistemática y rigurosa las nociones y herramientas básicas de las matemáticas utilizando el lenguaje conjuntista, que en su esencia es lógica simbólica.

Como herencia de estos trabajos, muchos de los conceptos y teoremas de las matemáticas y sus principales teorías se pueden expresar por medio de proposiciones y conectores lógicos que las relacionan.

Una proposición es una oración que puede ser falsa o verdadera pero no ambas a la vez, un conector lógico establece una relación entre dos proposiciones por medio de la asignación de un nuevo valor de verdad de acuerdo a la naturaleza de lo que representa el conector en sí mismo dentro de la lógica aristotélica.

De manera usual en la escuela se enseñan las famosas tablas de verdad correspondientes a cuatro conectivos lógicos: la conjunción, la disyunción, la implicación y la bicondicional, acompañados de la negación y, de manera un poco menos común, de la disyunción exclusiva.

$p$	$\wedge$	$q$
$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$
$F$	$F$	$V$
$F$	$F$	$F$

Tabla 1: Conector  $\wedge$ 

$p$	$\vee$	$q$
$V$	$V$	$V$
$V$	$V$	$F$
$F$	$V$	$V$
$F$	$F$	$F$

Tabla 2: Conector  $\vee$ 

$p$	$\rightarrow$	$q$
$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$
$F$	$V$	$V$
$F$	$V$	$F$

Tabla 3: Conector  $\rightarrow$ 

$p$	$\leftrightarrow$	$q$
$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$
$F$	$F$	$V$
$F$	$V$	$F$

Tabla 4: Conector  $\leftrightarrow$ 

$p$	$\underline{\vee}$	$q$
$V$	$F$	$V$
$V$	$V$	$F$
$F$	$V$	$V$
$F$	$F$	$F$

Tabla 5: Conector  $\underline{\vee}$ 

$p$	$\sim$
$V$	$F$
$F$	$V$

Tabla 6: Conector  $\sim$ 

Nuestro primer acercamiento a la lógica matemática consiste, principalmente, en memorizar estas tablas como reglas por medio de las cuales se pueden relacionar proposiciones.

### 1.1.1. Conectores de Peirce

Teniendo dos proposiciones con sus posibles combinaciones de valores de verdad, en realidad se pueden encontrar 16 tablas. Cada una de las tablas estaría definiendo, por lo tanto, un conector lógico distinto con una interpretación propia. Las tablas de verdad faltantes son las siguientes:

$p$	$\leftarrow$	$q$
$V$	$V$	$V$
$V$	$V$	$F$
$F$	$F$	$V$
$F$	$V$	$F$

Tabla 7: Conector  $\leftarrow$ 

$p$	$-\circ$	$q$
$V$	$F$	$V$
$V$	$V$	$F$
$F$	$F$	$V$
$F$	$F$	$F$

Tabla 8: Conector  $-\circ$ 

$p$	$\circ-$	$q$
$V$	$F$	$V$
$V$	$V$	$F$
$F$	$F$	$V$
$F$	$F$	$F$

Tabla 9: Conector  $\circ-$ 

$p$	$\otimes$	$q$
$V$	$F$	$V$
$V$	$F$	$F$
$F$	$V$	$V$
$F$	$V$	$F$

Tabla 10: Conector  $\otimes$ 

$p$	$*$	$q$
$V$	$F$	$V$
$V$	$V$	$F$
$F$	$F$	$V$
$F$	$V$	$F$

Tabla 11: Conector  $*$ 

$p$	$\pi_1$	$q$
$V$	$V$	$V$
$V$	$V$	$F$
$F$	$F$	$V$
$F$	$F$	$F$

Tabla 12: Conector  $\pi_1$

$p$	$\pi_2$	$q$
$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$
$F$	$V$	$V$
$F$	$F$	$F$

Tabla 13: Conector  $\pi_2$ 

$p$	$ $	$q$
$V$	$F$	$V$
$V$	$V$	$F$
$F$	$V$	$V$
$F$	$V$	$F$

Tabla 14: Conector  $|$ 

$p$	$\downarrow$	$q$
$V$	$F$	$V$
$V$	$F$	$F$
$F$	$F$	$V$
$F$	$V$	$F$

Tabla 15: Conector  $\downarrow$ 

$p$	$\top$	$q$
$V$	$V$	$V$
$V$	$V$	$F$
$F$	$V$	$V$
$F$	$V$	$F$

Tabla 16: Conector  $\top$ 

$p$	$\perp$	$q$
$V$	$F$	$V$
$V$	$F$	$F$
$F$	$F$	$V$
$F$	$F$	$F$

Tabla 17: Conector  $\perp$ 

En este punto, se descarta la negación como conector lógico debido a que se está definiendo de manera implícita que los conectores, necesariamente, establecen una relación binaria. En este sentido, la negación se puede describir má bien como un "modificador".

Desde al año 2012 se han realizado algunas exploraciones y estudios en torno a los conectores lógicos no usuales, las relaciones que existen entre ellos y los usuales, y las implicaciones de su uso en diferentes campos de las matemáticas.

### 1.1.2. Primeros estudios en el IPN

Un estudio realizado por estudiantes talentosos del Instituto Pedagógico Nacional sobre los conectores lógicos hacia el año 2010, deja como resultado algunas consideraciones muy interesantes sobre los mismos.

En su estudio, Duarte, Daza, Translateur y Jiménez (2010), los estudiantes realizaron un cambio de notación de los conectores lógicos de la siguiente manera: considerando que se trata de una lógica proposicional bivalente, se comenzó a dar un tratamiento numérico a los valores de verdad empleando como base el sistema numérico binario.

Hasta el momento, se ha trabajado con  $V$  para indicar que una proposición es verdadera y  $F$  para indicar que es falsa, se decide entonces que se asignará 0 a afirmaciones verdaderas y 1 a las falsas.

Adicionalmente, se contempló que al utilizar notación binaria para asociar los valores de verdad que se obtienen al relacionar dos proposiciones por medio de un conector lógico, se obtiene también una nueva forma de representar el conector sin recurrir a la representación simbólica usual. Veamos un ejemplo:

$p$	$\vee$	$q$
$V$	$V$	$V$
$V$	$V$	$F$
$F$	$V$	$V$
$F$	$F$	$F$

 $\implies$ 

$p$	$1$	$q$
$0$	$0$	$0$
$0$	$0$	$1$
$1$	$0$	$0$
$1$	$1$	$1$

Tabla 18: Cambio de notación

En el caso anterior, vemos cómo los valores de la columna central forman el número binario 0001, que en número decimal representa el número 1. De esta manera, se puede asociar cada tabla de verdad con un número binario entre el 0000 y el 1111 que corresponde a los números del 0 al 15 en el sistema decimal.

Finalmente, después de realizar todos los cambios de notación, se obtiene lo siguiente:

		$\top$	$\vee$	$\leftarrow$	$\pi_1$	$\rightarrow$	$\pi_2$	$\leftrightarrow$	$\wedge$	$ $	$\underline{\vee}$	$*$	$\circ-$	$\otimes$	$-o$	$\downarrow$	$\perp$
$p$	$q$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Tabla 19: Notación binaria para todos los conectores lógicos

Durante el desarrollo del presente trabajo se utilizará la notación anterior para comodidad del lector.

Uno de los resultados más importantes de las exploraciones realizadas por los estudiantes del IPN fue encontrar que cualquiera de los conectores lógicos no usuales puede expresarse por medio de combinaciones de los conectores usuales.

Se establecieron, en dicho estudio, equivalencias lógicas entre los conectores no usuales y varias combinaciones distintas de los usuales por medio de la elaboración de tautologías, incluso, para algunos casos se logró utilizar solamente un conector y la negación.

Conector	Expresión equivalente	Notación usual
$p \ 0 \ q$	$(p \ 1 \ q) \ 1 \ \sim q$	$(p \vee q) \vee \sim p$
$p \ 1 \ q$	$p \ 1 \ q$	$p \vee q$
$p \ 2 \ q$	$p \ 1 \ q \ \sim q$	$p \vee \sim q$
$p \ 3 \ q$	$p$	$p$
$p \ 4 \ q$	$\sim p \ 1 \ q$	$\sim p \vee q$
$p \ 5 \ q$	$q$	$q$
$p \ 6 \ q$	$(p \ 4 \ q) \ 7 \ (q \ 4 \ p)$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
$p \ 7 \ q$	$\sim p \ 1 \ \sim q$	$\sim p \vee \sim q$
$p \ 8 \ q$	$\sim (p \ 7 \ q)$	$\sim (p \wedge q)$
$p \ 9 \ q$	$\sim (p \ 6 \ q)$	$\sim (p \leftrightarrow q)$
$p \ 10 \ q$	$\sim q$	$\sim q$
$p \ 11 \ q$	$\sim (p \ 4 \ q)$	$\sim (p \rightarrow q)$
$p \ 12 \ q$	$\sim p$	$\sim p$
$p \ 13 \ q$	$\sim (p \ 1 \ \sim q)$	$\sim (p \vee \sim q)$
$p \ 14 \ q$	$\sim (p \ 1 \ q)$	$\sim (p \vee q)$
$p \ 15 \ q$	$\sim ((p \ 1 \ q) \ 1 \ \sim q)$	$\sim ((p \vee q) \vee \sim p)$

Tabla 20: Equivalencias lógicas

El resultado anterior será particularmente importante en el desarrollo de las primeras exploraciones con conjuntos numerables finitos.

### 1.1.3. Estudios realizados en el DMA

Por otra parte, en una indagación realizada por Ruiz, Gutiérrez, Gutiérrez y Malagón (2015) se emplearon los 16 conectivos y sus respectivas tablas de verdad para replantear algunas definiciones de la teoría de conjuntos y se analizó el comportamiento que tendrían bajo las nuevas condiciones establecidas. Los casos puntuales que se trataron son el de la contención y las operaciones entre conjuntos.

En el caso de la contención se partió de la definición usual: Se dice que  $A$  es un subconjunto de  $B$  o que  $A$  está contenido en  $B$ , si todo elemento de  $A$  es un elemento de  $B$ . Formalmente se denota esta relación como  $A \subseteq B$  y se define de la siguiente manera

$$A \subseteq B \longleftrightarrow (\forall x \in X) (x \in A \longrightarrow x \in B)$$

Donde  $X$  es el conjunto de referencia. Cuando  $A$  no está contenido en  $B$  se denota  $A \not\subseteq B$ . Realizando el cambio de simbología:

$$A \subseteq B \longleftrightarrow (\forall x \in X) (x \in A \quad 4 \quad x \in B)$$

Tal como se observa en la definición, la contención de conjuntos está directamente

relacionada con la implicación, esto se debe a que al plantear la definición con este conectivo hay una correspondencia natural de lo que intuitivamente se entiende por subconjunto.

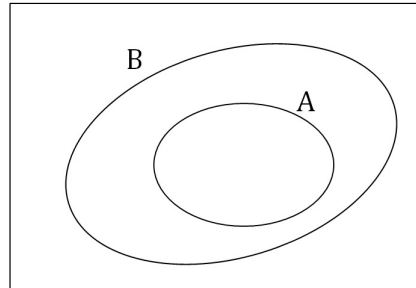


Figura 1: Ejemplo de subconjuntos con la contención usual

De la manera en la que se plantea la definición usual de subconjunto, se debe cumplir que la implicación descrita para los conjuntos dados es siempre verdadera para todo elemento en el conjunto referencia.

En la figura anterior se observa la representación intuitiva de un conjunto  $A$  que se encuentra contenido en  $B$ , y se diferencian en ella 3 regiones bien definidas: La región donde se encuentran los elementos de  $A$ , La región donde se encuentran los elementos de  $B$  que no están en  $A$  y la región en donde se encuentran los elementos que no pertenecen a ninguno de los dos conjuntos.

Tomando la condicional expuesta en la definición, si seleccionamos un elemento de la primera región mencionada se va a obtener que dicho elemento pertenece a  $A$  y también pertenece a  $B$ , como antecedente y consecuente son verdaderos la implicación es verdadera y la definición funciona en este caso.

De manera análoga se estudia la siguiente región del diagrama: Se selecciona un elemento y se observa que no está en  $A$  pero que si pertenece a  $B$ , como según la tabla de verdad una proposición falsa relacionado bajo la implicación con una proposición verdadera resulta ser verdadera, se tiene que también en este caso la definición funciona.

Finalmente, si se toma un elemento que no pertenece a ninguno de los dos conjuntos también se tendría una implicación verdadera, debido a que las dos proposiciones son falsas. Como en todos los posibles casos la implicación resulta ser verdadera, esta es una representación adecuada de la situación  $A \subseteq B$ .

Al utilizar los 16 conectores, se generaron las siguientes definiciones:

Conector	Definición de Contenenencia
0	$A \subseteq_0 B \leftrightarrow (\forall x \in X) (x \in A \rightarrow x \in B)$
1	$A \subseteq_1 B \leftrightarrow (\forall x \in X) (x \in A \rightarrow x \in B)$
2	$A \subseteq_2 B \leftrightarrow (\forall x \in X) (x \in A \rightarrow x \in B)$
3	$A \subseteq_3 B \leftrightarrow (\forall x \in X) (x \in A \rightarrow x \in B)$
4	$A \subseteq_4 B \leftrightarrow (\forall x \in X) (x \in A \rightarrow x \in B)$
5	$A \subseteq_5 B \leftrightarrow (\forall x \in X) (x \in A \rightarrow x \in B)$
6	$A \subseteq_6 B \leftrightarrow (\forall x \in X) (x \in A \rightarrow x \in B)$
7	$A \subseteq_7 B \leftrightarrow (\forall x \in X) (x \in A \rightarrow x \in B)$
8	$A \subseteq_8 B \leftrightarrow (\forall x \in X) (x \in A \rightarrow x \in B)$
8	$A \subseteq_8 B \leftrightarrow (\forall x \in X) (x \in A \rightarrow x \in B)$
9	$A \subseteq_9 B \leftrightarrow (\forall x \in X) (x \in A \rightarrow x \in B)$
10	$A \subseteq_{10} B \leftrightarrow (\forall x \in X) (x \in A \rightarrow x \in B)$
11	$A \subseteq_{11} B \leftrightarrow (\forall x \in X) (x \in A \rightarrow x \in B)$
12	$A \subseteq_{12} B \leftrightarrow (\forall x \in X) (x \in A \rightarrow x \in B)$
13	$A \subseteq_{13} B \leftrightarrow (\forall x \in X) (x \in A \rightarrow x \in B)$
14	$A \subseteq_{14} B \leftrightarrow (\forall x \in X) (x \in A \rightarrow x \in B)$
15	$A \subseteq_{15} B \leftrightarrow (\forall x \in X) (x \in A \rightarrow x \in B)$

Tabla 22: Definición de contenenencia para cada conector lógico

Una definición que se desprende directamente de subconjunto es la del conjunto formado por los subconjuntos de un conjunto dado: el conjunto partes. De acuerdo con las características del conjunto partes que se generaba al identificar los subconjuntos de acuerdo a cada definición, se realizó una categorización de los conectores lógicos.

Continuando con la indagación, Ruiz, Gutiérrez, Gutiérrez y Malagón (2015) plantearon nuevas operaciones entre conjuntos generadas por los conectores lógicos imitando la definición de la unión, la intersección, la diferencia y la diferencia simétrica de conjuntos que se realizan empleando la conjunción, la disyunción, la diferencia y el o exclusivo respectivamente.

Sea  $X$  el conjunto de referencia. Dados dos conjuntos  $A$  y  $B$  subconjuntos usuales de  $X$  se definen las siguientes operaciones entre ellos:

- **Unión:**  $A \cup B = \{x \in X \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$
- **Intersección:**  $A \cap B = \{x \in X \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$
- **Diferencia:**  $A - B = \{x \in X \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$
- **Diferencia Simétrica:**  $A \Delta B = \{x \in X \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$

Utilizando la notación que se adoptó para desarrollar el presente trabajo, las definiciones y la notación de las operaciones usuales entre conjuntos son las siguientes:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Unión} & \implies A_1B = \{x \in X \mid (x \in A) \vee (x \in B)\} \\
 \text{Intersección} & \implies A_7B = \{x \in X \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\} \\
 \text{Diferencia} & \implies A_{11}B = \{x \in X \mid (x \in A) \wedge \neg(x \in B)\} \\
 \text{Diferencia simétrica} & \implies A_9B = \{x \in X \mid (x \in A) \oplus (x \in B)\}
 \end{array}$$

Imitando las operaciones usuales entre conjuntos se definieron nuevas operaciones recurriendo nuevamente a los conectivos lógicos faltantes. A continuación se presentan de manera gráfica en conjuntos  $A$  y  $B$  arbitrarios los diagramas de venn correspondientes a el conjunto resultante al realizar cada operación entre ellos. Para las operaciones usuales:

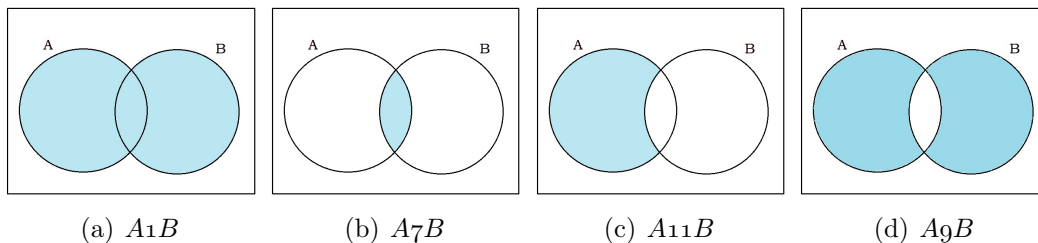


Figura 2: Operaciones usuales entre conjuntos

Para las operaciones no usuales:

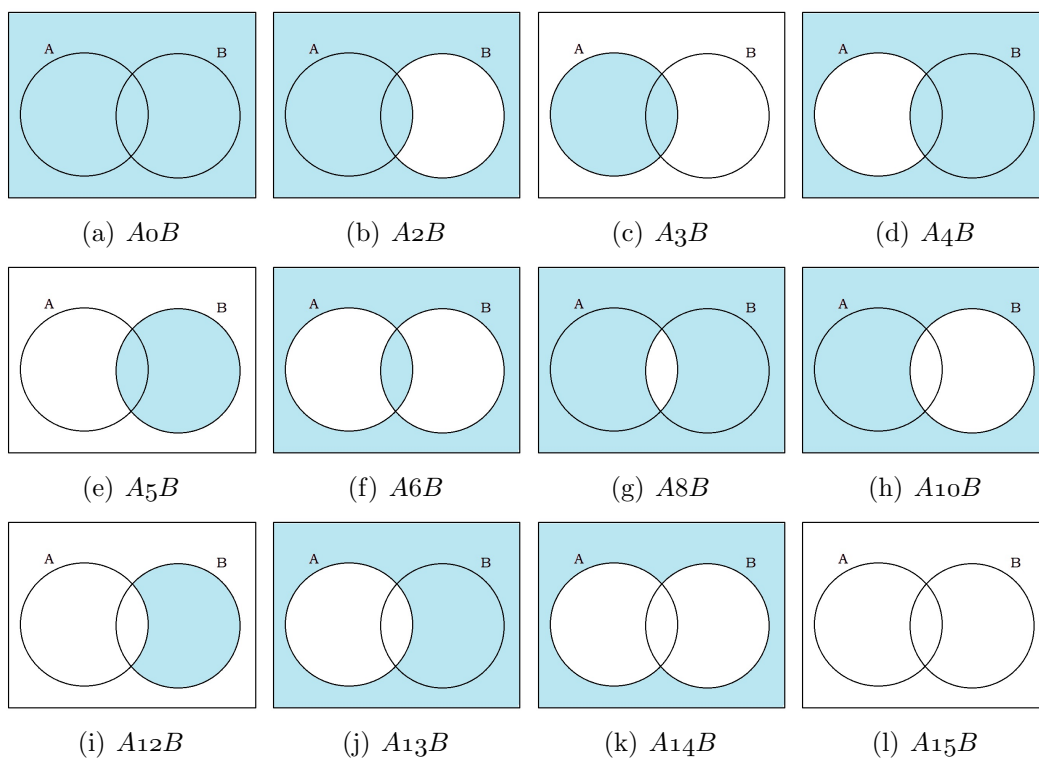


Figura 3: Operaciones no usuales entre conjuntos

Se sabe que la contención usual define una relación de orden sobre las partes usuales de un conjunto, teniendo en cuenta que los conjuntos generados a partir de las operaciones definidas anteriormente resultan ser subconjuntos de  $X$ , podemos encontrar un orden entre ellas empleando la contención. La relación encontrada se presenta en el siguiente Diagrama de Hasse:

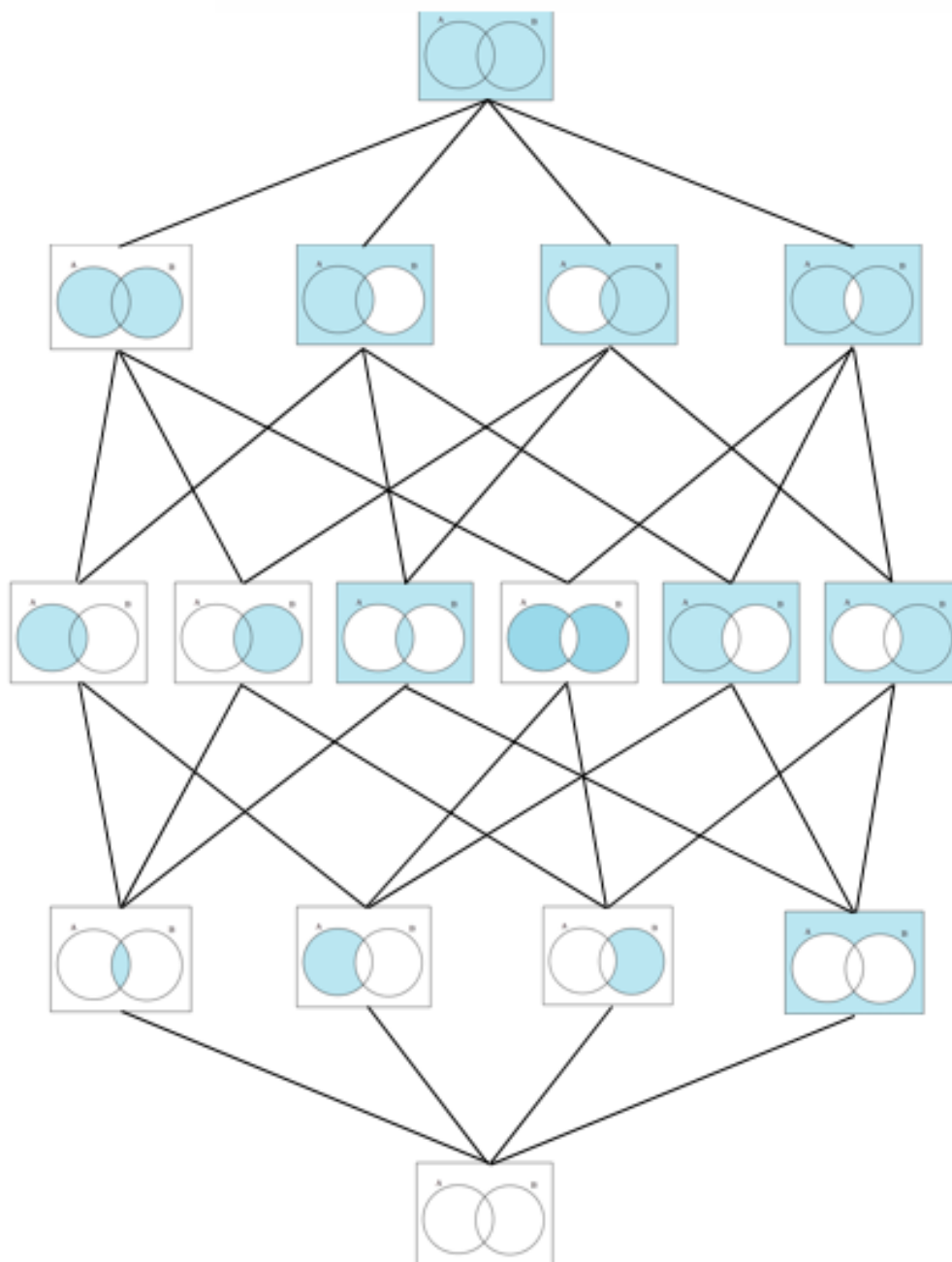


Figura 4: Diagrama de Hasse de las operaciones entre conjuntos

#### 1.1.4. Trabajo del Seminario de álgebra

El problema estudiado en el seminario de álgebra durante el transcurso del semestre 2017-II está relacionado con la Topología y consiste en modificar las condiciones por las cuales determinado conjunto se puede considerar una topología. Según Muñoz (2003)

**Definición 1 (Topología)**

Dado un conjunto  $X$ ,  $\tau$  un subconjunto de  $\wp(X)$  es una topología de  $X$  si y solo si cumplen las siguientes condiciones:

- i.  $X \in \tau$  y  $\emptyset \in \tau$
- ii. Si  $A \in \tau$  y  $B \in \tau$  entonces  $A \cap B \in \tau$
- iii. Si  $A_i$  con  $i \in I$  una familia indexada de conjuntos tal que  $A_i \in \tau$  para todo  $i \in I$ , entonces  $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$

La modificación que se realizó fue utilizar las operaciones generadas por los conectores lógicos no usuales en lugar de la intersección de la segunda condición. Se ha realizado una exploración con conjuntos de dos y tres elementos y algunos de los resultados se llevaron a una ponencia en el XIII Encuentro Internacional de Matemática (EIMAT). Los avances presentados consistieron en una primera selección de las topologías cuando se tomaban conjuntos de dos y tres elementos.

## 1.2. Probabilidad

La probabilidad es una de las teorías matemáticas más importantes en la actualidad debido a que, además de contar con un cuerpo teórico importante y una gran riqueza matemática, es la que tiene más variedad de aplicaciones. Los campos en los que la teoría de la probabilidad puede ser utilizada incluyen la genética, la ecología, las finanzas, la demografía, las comunicaciones, etc. Según Blanco (2004) la probabilidad *conjuga las distintas teorías matemáticas: álgebra, ecuaciones diferenciales, análisis funcional con un solo fin: tratar de entender el mundo en el que vivimos.*

Para establecer la definición de probabilidad y medida de probabilidad es necesario hablar de algunos conceptos básicos:

- **Experimento aleatorio:** Un experimento aleatorio es un evento o suceso del cual no podemos determinar su resultado previamente, pero si podemos determinar sus posibles resultados.
- **Espacio muestral:** Es el conjunto  $\Omega$  de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio. Cada uno de los elementos de  $\Omega$  es llamado punto muestral y suele denotarse como  $\omega$ . Si el conjunto  $\Omega$  es un conjunto finito o enumerable, se dice que el experimento aleatorio y su espacio muestral son **discretos**.
- **Evento:** Es un subconjunto del espacio muestral sobre el que se puede determinar el *chance* de ocurrencia. El conjunto de subconjuntos sobre los cuales se

puede definir su ocurrencia dentro del evento debe tener estructura de  $\sigma$ -álgebra.

Según Blanco (2004) dado un espacio muestral  $\Omega \neq \emptyset$ , un subconjunto  $\mathfrak{S}$  de  $\wp(\Omega)$  es una  $\sigma$ -álgebra si y solo si cumple las siguientes condiciones:

- i.  $\Omega \in \mathfrak{S}$
- ii. Si  $A \in \mathfrak{S}$  entonces  $A^c \in \mathfrak{S}$
- iii. Si  $A_i$  con  $i \in I$  una familia indexada de conjuntos tal que  $A_i \in \mathfrak{S}$  para todo  $i \in I$ , entonces  $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathfrak{S}$

Se concluye entonces que todo elemento de una  $\sigma$ -álgebra es un evento. A partir de la definición de  $\sigma$ -álgebra se definen los eventos:

- **Evento seguro:** Es el evento asociado a  $\Omega$ . Se denomina evento seguro porque su probabilidad de ocurrencia es uno.
- **Evento imposible:** Es el evento asociado a  $\emptyset$ . Se denomina evento imposible porque su probabilidad de ocurrencia es cero.
- **Evento elemental:** Es un evento de la forma  $\{\omega\}$  donde  $\omega \in \Omega$ .

Se sabe que un evento  $A$  ocurre, cuando al realizar el experimento aleatorio uno de los posibles resultados (elementos del espacio muestral  $\Omega$ ) es un elemento del conjunto  $A$ . Por lo tanto, si se tienen  $A$  y  $B$  eventos de un experimento aleatorio, entonces:

- $A \cup B$  es un evento que ocurre si y solo si  $A$  ocurre,  $B$  ocurre o ambos ocurren.
- $A \cap B$  es un evento que ocurre si y solo si  $A$  y  $B$  ocurren.
- $A^c$  es un evento que ocurre si y solo si  $A$  no ocurre.
- $A - B$  es un evento que ocurre si y solo si  $A$  ocurre y  $B$  no ocurre.

La definición de evento no es la única que depende de la estructura de  $\sigma$ -álgebra. Algunas de las definiciones importantes en la teoría de la probabilidad que involucran  $\sigma$ -álgebra son las siguientes:

- **Espacio medible:** Un espacio medible es la dupla  $(\Omega, \mathfrak{S})$  donde  $\Omega$  es el espacio muestral de un experimento aleatorio y  $\mathfrak{S}$  una  $\sigma$ -álgebra sobre  $\Omega$ .

- **Función de probabilidad:** Una función de valor real  $P$  definida sobre la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{S}$  de un espacio muestral  $\Omega$ , es una función de probabilidad si y solo si:

- i.  $P(A) \geq 0$  para cualquier  $A \in \mathfrak{S}$
- ii.  $P(\Omega) = 1$
- iii. Si  $A_1, A_2, \dots$  son elementos de  $\wp$  tal que  $A_i \cap A_j = \emptyset$  para todo  $i \neq j$ , entonces

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

- **Espacio de probabilidad:** Se llama espacio de probabilidad a la tripla  $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$  Un espacio de probabilidad cuenta con las siguientes propiedades:

- i.  $P(\emptyset) = 0$
- ii. Si  $A, B \in \mathfrak{S}$  y  $A \cap B = \emptyset$  entonces  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- iii.  $P(A^c) = 1 - P(A)$
- iv. Si  $A \subseteq B$  entonces  $P(A) \leq P(B)$  y  $P(B - A) = P(B) - P(A)$ . En particular se tiene que  $P(A) \leq 1$  para todo  $A \in \mathfrak{S}$
- v.  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- vi. Sea  $(A_n)_n$  una sucesión creciente de elementos de  $\mathfrak{S}$ , esto es  $A_n \in \mathfrak{S}$  y  $A_n \subseteq A_{n+1}$  para todo  $n$ , entonces

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

donde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

- vii. Sea  $(A_n)_n$  una sucesión decreciente de elementos de  $\mathfrak{S}$ , esto es  $A_n \in \mathfrak{S}$  y  $A_n \supseteq A_{n+1}$  para todo  $n$ , entonces

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

donde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

---

---

## 2. PRIMERAS EXPLORACIONES

---

### 2.1. Modificaciones de la definición

Tomando la definición de Blanco (2004),

**Definición 2 ( $\sigma$ -álgebra)**

Dado un espacio muestral  $\Omega \neq \emptyset$ , un subconjunto  $\mathfrak{S}$  de  $\wp(\Omega)$  es una  $\sigma$ -álgebra si y solo si cumple las siguientes condiciones:

- i.  $\Omega \in \mathfrak{S}$
- ii. Si  $A \in \mathfrak{S}$  entonces  $A^c \in \mathfrak{S}$
- iii. Si  $A_i$  con  $i \in I$  una familia indexada de conjuntos tal que  $A_i \in \mathfrak{S}$  para todo  $i \in I$ , entonces  $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathfrak{S}$

Se decidió utilizar la segunda condición para realizar la modificación de la definición.

La segunda condición de la definición establece que dado un conjunto en la  $\sigma$ -álgebra su complemento también está en la  $\sigma$ -álgebra. Escrito en lenguaje simbólico, se tiene

$$A \in \mathfrak{S} \rightarrow A^c \in \mathfrak{S}$$

Con el cambio de notación, la expresión se transforma en la siguiente

$$A \in \mathfrak{S} \quad \& \quad A^c \in \mathfrak{S}$$

Así pues, las modificaciones surgieron de reemplazar el conector cuatro por los otros conectores y estudiar el valor de verdad que tomaba la proposición para cada uno de los conjuntos de interés.

### 2.2. Espacio muestral de dos elementos

Se realizó una primera exploración utilizando un espacio muestral  $\Omega$  con dos elementos. Dado  $\Omega = \{a, b\}$  se tiene el conjunto de partes de  $\Omega$  conformado por todos

sus subconjuntos propios.

$$\wp(\Omega) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \Omega\}$$

Los conjuntos con estructura de  $\sigma$ -álgebra son combinaciones de elementos de  $\wp(\Omega)$ , por lo tanto son elementos de  $\wp(\wp(\Omega))$ , para este caso:

$$\begin{aligned} \wp(\wp(\Omega)) = & \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{a\}\}, \{\{b\}\}, \{\Omega\}, \{\emptyset, \{a\}\}, \{\emptyset, \{b\}\}, \{\emptyset, \Omega\}, \\ & \{\{a\}, \{b\}\}, \{\{a\}, \Omega\}, \{\{b\}, \Omega\}, \{\emptyset, \{a\}, \{b\}\}, \{\emptyset, \{a\}, \Omega\}, \\ & \{\emptyset, \{b\}, \Omega\}, \{\{a\}, \{b\}, \Omega\}, \wp(\Omega)\} \end{aligned}$$

Se tomaron elementos  $S$  de  $\wp(\wp(\Omega))$  de tal forma que se cumplieran las condiciones uno y tres de la definición de  $\sigma$ -álgebra. Esto quiere decir que se realizó un primer filtro en el que se seleccionaron los conjuntos  $S$  de  $\wp(\wp(\Omega))$  en los que se encuentra  $\Omega$  como uno de los elementos, posteriormente se verificó cuales de ellos son cerrados para la unión.

Los conjuntos que se estudiaron, ya que cumplen las dos características expuestas anteriormente, son los siguientes:

1.  $\{\Omega\}$
2.  $\{\{a\}, \Omega\}$
3.  $\{\{b\}, \Omega\}$
4.  $\{\emptyset, \Omega\}$
5.  $\{\{a\}, \{b\}, \Omega\}$
6.  $\{\emptyset, \{a\}, \Omega\}$
7.  $\{\emptyset, \{b\}, \Omega\}$
8.  $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \Omega\}$

Se utilizaron los 16 conectores lógicos para modificar la segunda condición de la definición y determinar si cada uno de los subconjuntos tenía una estructura de  $\sigma$ -álgebra bajo estas nuevas definiciones.

Para realizar la verificación de los conjuntos que cumplían o no cada una de las definiciones modificadas había que determinar en qué ocasiones se obtenían tautologías a partir de construir las tablas de verdad que relacionaran las proposiciones de la forma

$$p_S = A \in S$$

$$q_S = A^c \in S$$

Donde  $A$  es un elemento de  $\wp(\Omega)$  y  $S$  es alguno de los ocho subconjuntos  $S$  de  $\wp(\wp(\Omega))$  que son candidatos a ser  $\sigma$ -álgebra. El subíndice  $S$  indica que el valor de verdad de la proposición depende del  $S$  que se seleccione. Vamos un ejemplo:

Se sabe que el conjunto  $\wp(\Omega)$  tiene cuatro elementos de los que se forman dos parejas en las que un conjunto es complemento del otro y viceversa, por lo tanto, el listado de todas las posibles proposiciones  $p$  y  $q$  para un subconjunto  $S$  de  $\wp(\Omega)$  es

- $p_S = \emptyset \in S$  ,  $q_S = \Omega \in S$
- $p_S = \{a\} \in S$  ,  $q_S = \{b\} \in S$
- $p_S = \{b\} \in S$  ,  $q_S = \{a\} \in S$
- $p_S = \Omega \in S$  ,  $q_S = \emptyset \in S$

Ahora, tomado como  $S$  al conjunto  $\{\emptyset, \{b\}, \Omega\}$ , las proposiciones toman los siguientes valores de verdad

$p_S$	$q_S$	$\implies$	$p_S$	$q_S$
$\emptyset \in S$	$\Omega \in S$		0	0
$\{a\} \in S$	$\{b\} \in S$		1	0
$\{b\} \in S$	$\{a\} \in S$		0	1
$\Omega \in S$	$\emptyset \in S$		0	0

Tabla 23: Valores de verdad de las diferentes combinaciones de  $p_S$  y  $q_S$

Una vez construida la tabla de los valores de verdad del listado de proposiciones con respecto a al subconjunto  $S$ , hay que ver con cuales de los conectores lógicos obtenemos tautologías. Por ejemplo, para la relación que se establece a partir del conector 1, solo se obtiene falso cuando las dos proposiciones son falsas, es decir, cuándo se relacionan dos valores de verdad 1.

Debido a que ninguna de las combinaciones de valores de verdad fue simultáneamente falsa, entonces todos los valores resultantes son verdaderos. Esto va a suceder con cualquier conjunto  $S$  en el que no esté ninguna pareja de subconjuntos complementarios simultáneamente. A continuación se presenta la tabla de verdad correspondiente:

$p$	1	$q$
0	0	0
0	0	1
1	0	0
1	1	1

 $\implies$ 

$p_S$	1	$q_S$
0	0	0
1	0	0
0	0	1
0	0	0

Tabla 24: Valores de verdad de las diferentes combinaciones de  $p_S$  y  $q_S$  al relacionarlas por medio del conector 1

Sin embargo, al realizar el mismo ejercicio con el conector 8 se obtiene lo siguiente:

$p$	8	$q$
0	1	0
0	0	1
1	0	0
1	0	1

 $\implies$ 

$p_S$	8	$q_S$
0	1	0
1	0	0
0	0	1
0	1	0

Tabla 25: Valores de verdad de las diferentes combinaciones de  $p_S$  y  $q_S$  al relacionarlas por medio del conector 8

A continuación se muestran las tablas de verdad obtenidas con cada conector:

$p_S$	0	$q_S$
0	0	0
1	0	0
0	0	1
0	0	0

$p_S$	1	$q_S$
0	0	0
1	0	0
0	0	1
0	0	0

$p_S$	2	$q_S$
0	0	0
1	1	0
0	0	1
0	0	0

$p_S$	3	$q_S$
0	0	0
1	1	0
0	0	1
0	0	0

$p_S$	4	$q_S$
0	0	0
1	0	0
0	1	1
0	0	0

$p_S$	5	$q_S$
0	0	0
1	0	0
0	1	1
0	0	0

$p_S$	6	$q_S$
0	0	0
1	1	0
0	1	1
0	0	0

$p_S$	7	$q_S$
0	0	0
1	1	0
0	1	1
0	0	0

$p_S$	8	$q_S$
0	1	0
1	0	0
0	0	1
0	1	0

$p_S$	9	$q_S$
0	1	0
1	0	0
0	0	1
0	1	0

$p_S$	10	$q_S$
0	1	0
1	1	0
0	0	1
0	1	0

$p_S$	11	$q_S$
0	1	0
1	1	0
0	0	1
0	1	0

$p_S$	12	$q_S$
0	1	0
1	0	0
0	1	1
0	1	0

$p_S$	13	$q_S$
0	1	0
1	0	0
0	1	1
0	1	0

$p_S$	14	$q_S$
0	1	0
1	1	0
0	1	1
0	1	0

$p_S$	15	$q_S$
0	1	0
1	1	0
0	1	1
0	1	0

Tabla 26: Tablas de verdad de las diferentes combinaciones de  $p_S$  y  $q_S$  para cada conector

Basta con observar las tablas de verdad obtenidas para determinar que el subconjunto  $S = \{\emptyset, \{b\}, \Omega\}$  resulta ser una  $\sigma$ -álgebra bajo las definiciones generadas por los conectores 0 y 1, debido a que son las únicas en las que se generaron tautologías.

En este punto, utilizando uno de los resultados expuestos por Duarte, Daza, Translateur y Jiménez (2010) se emplearon las equivalencias lógicas de cada conector no usual en términos de los conectores usuales para elaborar tablas condicionales en Excel que permitieran obtener de manera mucho más rápida las tablas de verdad de los 16 conectores al cambiar las combinaciones de valores de verdad de las proposiciones  $p$  y  $q$  dependiendo del subconjunto  $S$  seleccionado.

5	p	q	p	q	Valor
2 elementos	Omega	Vacío	0	0	0
	a	b	1	0	0
	b	a	0	1	1
	Vacío	Omega	0	0	0

Figura 5: Excel con las relaciones binarias para los conectores lógicos

Al realizar el ejercicio de revisión completo, se obtuvo como resultado inmediato la clasificación de los subconjuntos que resultaban ser  $\sigma$ -álgebra según la definición generada por cada conector. A demás los conectores lógicos, a su vez, podían agruparse dependiendo a los conjuntos de  $\sigma$ -álgebra que generaban ya que se repetían.

Para efectos de lectura se utilizará una notación especial para hablar del conjunto generado por uno o varios conectores lógicos, dependiendo del caso. Por lo tanto, el conjunto de  $\sigma$ -álgebras generado, por ejemplo, por el conector 1 se notará como  $\langle 1 \rangle$ . Así mismo, para hablar de las  $\sigma$ -álgebra que generan cada conector utilizaremos como subíndice el número del conector, por ejemplo, un conjunto que resulte ser  $\sigma$ -álgebra con el conector 1, será denominada una  $\sigma_1$ -álgebra.

Los resultados de la exploración arrojaron que:

- Para los conectores 3, 5 y 7 el único subconjunto que cumple la condición modificada es el de  $\wp(\Omega)$

$$\langle 3, 5, 7 \rangle = \{\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \Omega\}\}$$

- Para los conectores 2 y 6 los conjuntos que resultan ser  $\sigma$ -álgebra son los mismos que lo son usando el conector original (conector 4) que son la trivial y  $\wp(\Omega)$

$$\langle 2, 4, 6 \rangle = \{\{\emptyset, \Omega\}, \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \Omega\}\}$$

- Para el conector 9 resultaron ser *sigma*-álgebra los subconjuntos conformados por el espacio muestral y uno de los conjuntos unitarios

$$\langle 9 \rangle = \{\{\{a\}, \Omega\}, \{\{b\}, \Omega\}\}$$

- Para el conector 8, además de las dos anteriores, el subconjunto cuyo único elemento es el espacio muestral

$$\langle 8 \rangle = \{\{\Omega\}, \{\{a\}, \Omega\}, \{\{b\}, \Omega\}\}$$

- Para el conector 1, todos los conjuntos excepto  $\{\Omega\}$  y  $\{\emptyset, \{\Omega\}\}$  son  $\sigma$ -álgebra

$$\langle 1 \rangle = \{\{\{a\}, \Omega\}, \{\{b\}, \Omega\}, \{\{a\}, \{b\}, \Omega\}, \{\emptyset, \{a\}, \Omega\}, \{\emptyset, \{b\}, \Omega\}, \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \Omega\}\}$$

- Para los conectores 10 al 15 ninguno de los subconjuntos contemplados resulta tener una estructura de  $\sigma$ -álgebra, mientras que para el conector cero todos lo son.

$$\langle 10, 11, 12, 13, 14, 15 \rangle = \emptyset$$

$$\langle 0 \rangle = \{ \{ \Omega \}, \{ \{ a \}, \Omega \}, \{ \{ b \}, \Omega \}, \{ \emptyset, \{ \Omega \} \}, \{ \{ a \}, \{ b \}, \Omega \}, \\ \{ \emptyset, \{ a \}, \Omega \}, \{ \emptyset, \{ b \}, \Omega \}, \{ \emptyset, \{ a \}, \{ b \}, \Omega \} \}$$

Estudiando los conjuntos de las  $\sigma$ -álgebra generados por cada conector se observa que se puede establecer una relación de orden entre los mismo al utilizar la contención.

Se sabe que el conjunto vacío está contenido en todos los conjuntos así que el conjunto  $\langle 10, 11, 12, 13, 14, 15 \rangle$  se encuentra contenido, en particular, en los conjuntos  $\langle 3, 5, 7 \rangle$  y  $\langle 9 \rangle$  que solo están conformados por dos  $\sigma$ -álgebra. El conjunto  $\langle 3, 5, 7 \rangle$ , a su vez, está contenido en los conjuntos  $\langle 2, 4, 6 \rangle$  y  $\langle 1 \rangle$ , mientras que por su parte, el conjunto  $\langle 9 \rangle$  está contenido en  $\langle 1 \rangle$  y en  $\langle 8 \rangle$ . Finalmente, el conjunto  $\langle 0 \rangle$ , que hace de veces de conjunto universal de referencia, ya que contiene todos los subconjuntos  $S$  que inicialmente fueron seleccionados, contiene a todos los conjuntos generados por todos los conectores lógicos.

La información anterior fue organizada en el siguiente diagrama de Hasse:

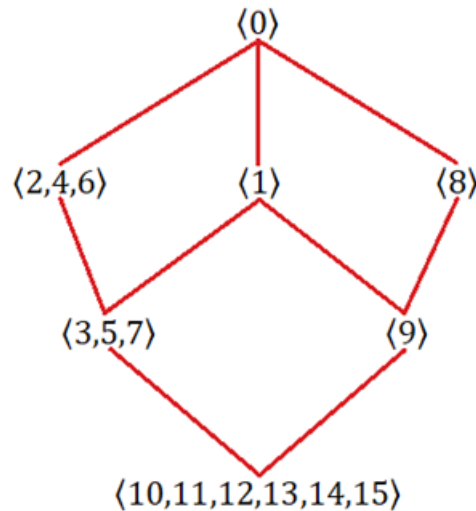


Figura 6: Diagrama de Hasse de los conjuntos de  $\sigma$ -álgebra generados por los conectores lógicos

El siguiente paso en la indagación fue verificar que esta relación se cumple al tomar un espacio muestral de tres elementos

### 2.3. Espacio muestral de tres elementos

Dado  $\Omega = \{a, b, c\}$  se tiene el conjunto de partes de  $\Omega$  conformado por todos sus subconjuntos propios.

$$\wp(\Omega) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega\}$$

Al igual que en el caso anterior, los conjuntos que tienen estructura de  $\sigma$ -álgebra son combinaciones de elementos de  $\wp(\Omega)$ , por lo tanto son elementos de  $\wp(\wp(\Omega))$ , para este caso, se sabe que el conjunto de  $\wp(\wp(\Omega))$  tiene 256 elementos, por lo tanto no se escribirá el conjunto en extenso.

Nuevamente se tomaron subconjuntos de  $\wp(\Omega)$  de tal forma que se cumplieran las condiciones uno y tres de la definición de  $\sigma$ -álgebra. Los subconjuntos que se estudiaron fueron ochenta y ocho y, al igual que en el caso anterior, se utilizaron los 16 conectores lógicos para modificar la segunda condición de la definición y determinar si cada uno de los subconjuntos tenía una estructura de  $\sigma$ -álgebra bajo estas nuevas definiciones.

Los conjuntos que se estudiaron, ya que cumplen las dos características expuestas anteriormente, son los siguientes:

1.  $\{\Omega\}$
2.  $\{\{a\}, \Omega\}$
3.  $\{\{b\}, \Omega\}$
4.  $\{\{c\}, \Omega\}$
5.  $\{\{a, b\}, \Omega\}$
6.  $\{\{a, c\}, \Omega\}$
7.  $\{\{b, c\}, \Omega\}$
8.  $\{\emptyset, \Omega\}$
9.  $\{\{a\}, \{a, b\}, \Omega\}$
10.  $\{\{a\}, \{a, c\}, \Omega\}$
11.  $\{\{a\}, \{b, c\}, \Omega\}$
12.  $\{\emptyset, \{a\}, \Omega\}$
13.  $\{\{b\}, \{a, b\}, \Omega\}$
14.  $\{\{b\}, \{a, c\}, \Omega\}$
15.  $\{\{b\}, \{b, c\}, \Omega\}$

16.  $\{\emptyset, \{b\}, \Omega\}$
17.  $\{\{c\}, \{a, b\}, \Omega\}$
18.  $\{\{c\}, \{a, c\}, \Omega\}$
19.  $\{\{c\}, \{b, c\}, \Omega\}$
20.  $\{\emptyset, \{c\}, \Omega\}$
21.  $\{\{a, b\}, \{a, c\}, \Omega\}$
22.  $\{\{a, b\}, \{b, c\}, \Omega\}$
23.  $\{\emptyset, \{a, b\}, \Omega\}$
24.  $\{\{a, c\}, \{b, c\}, \Omega\}$
25.  $\{\emptyset, \{a, c\}, \Omega\}$
26.  $\{\emptyset, \{a, b\}, \Omega\}$
27.  $\{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \Omega\}$
28.  $\{\{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \Omega\}$
29.  $\{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \Omega\}$
30.  $\{\{a\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \Omega\}$
31.  $\{\{a\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega\}$
32.  $\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \Omega\}$
33.  $\{\emptyset, \{a\}, \{a, c\}, \Omega\}$
34.  $\{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \Omega\}$
35.  $\{\{b\}, \{c\}, \{b, c\}, \Omega\}$
36.  $\{\{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \Omega\}$
37.  $\{\{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \Omega\}$
38.  $\{\{b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega\}$
39.  $\{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}, \Omega\}$
40.  $\{\emptyset, \{b\}, \{a, c\}, \Omega\}$
41.  $\{\emptyset, \{b\}, \{b, c\}, \Omega\}$
42.  $\{\{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \Omega\}$
43.  $\{\{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \Omega\}$

44.  $\{\{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega\}$
45.  $\{\emptyset, \{c\}, \{a, b\}, \Omega\}$
46.  $\{\emptyset, \{c\}, \{a, c\}, \Omega\}$
47.  $\{\emptyset, \{c\}, \{b, c\}, \Omega\}$
48.  $\{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega\}$
49.  $\{\emptyset, \{a, b\}, \{a, c\}, \Omega\}$
50.  $\{\emptyset, \{a, b\}, \{b, c\}, \Omega\}$
51.  $\{\emptyset, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega\}$
52.  $\{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \Omega\}$
53.  $\{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \Omega\}$
54.  $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \Omega\}$
55.  $\{\{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \Omega\}$
56.  $\{\{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \Omega\}$
57.  $\{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \Omega\}$
58.  $\{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega\}$
59.  $\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \Omega\}$
60.  $\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \Omega\}$
61.  $\{\emptyset, \{a\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega\}$
62.  $\{\{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \Omega\}$
63.  $\{\{a\}, \{b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega\}$
64.  $\{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}, \Omega\}$
65.  $\{\{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega\}$
66.  $\{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \Omega\}$
67.  $\{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \Omega\}$
68.  $\{\emptyset, \{b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega\}$
69.  $\{\{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega\}$
70.  $\{\emptyset, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \Omega\}$
71.  $\{\emptyset, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \Omega\}$

72.  $\{\emptyset, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega\}$
73.  $\{\emptyset, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega\}$
74.  $\{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega\}$
75.  $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \Omega\}$
76.  $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \Omega\}$
77.  $\{\{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega\}$
78.  $\{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \Omega\}$
79.  $\{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \Omega\}$
80.  $\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega\}$
81.  $\{\{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega\}$
82.  $\{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \Omega\}$
83.  $\{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega\}$
84.  $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega\}$
85.  $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega\}$
86.  $\{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega\}$
87.  $\{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega\}$
88.  $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega\}$

Siguiendo el mismo procedimiento, era necesario verificar para cada uno de los ochenta y ocho subconjuntos candidatos con cuáles de los conectores lógicos se obtenía tautología al relacionar las proposiciones  $p_S$  y  $q_S$ .

En esta ocasión, el conjunto  $\wp(\Omega)$  tiene ocho elementos que conforman cuatro parejas de conjuntos que son mutuamente complementarios, por lo tanto, el listado de todas las posibles proposiciones  $p$  y  $q$  para un subconjunto  $S$  de  $\wp(\Omega)$  es:

- $p_S = \emptyset \in S$  ,  $q_S = \Omega \in S$
- $p_S = \{a\} \in S$  ,  $q_S = \{b, c\} \in S$
- $p_S = \{b\} \in S$  ,  $q_S = \{a, c\} \in S$
- $p_S = \{c\} \in S$  ,  $q_S = \{a, b\} \in S$
- $p_S = \{a, b\} \in S$  ,  $q_S = \{c\} \in S$
- $p_S = \{a, c\} \in S$  ,  $q_S = \{b\} \in S$

- $p_S = \{b, c\} \in S$  ,  $q_S = \{a\} \in S$
- $p_S = \Omega \in S$  ,  $q_S = \emptyset \in S$

El subíndice  $S$  indica que el valor de verdad de la proposición depende del  $S$  que se seleccione. Vamos un ejemplo: Tomado como  $S$  al conjunto  $\{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \Omega\}$ , las proposiciones toman los siguientes valores de verdad

$p_S$	$q_S$
$\emptyset \in S$	$\Omega \in S$
$\{a\} \in S$	$\{b, c\} \in S$
$\{b\} \in S$	$\{a, c\} \in S$
$\{c\} \in S$	$\{a, b\} \in S$
$\{a, b\} \in S$	$\{c\} \in S$
$\{a, c\} \in S$	$\{b\} \in S$
$\{b, c\} \in S$	$\{a\} \in S$
$\Omega \in S$	$\emptyset \in S$

 $\implies$ 

$p_S$	$q_S$
0	1
1	0
1	1
0	1
1	0
1	1
0	1
1	0

Tabla 27: Valores de verdad de las diferentes combinaciones de  $p_S$  y  $q_S$

Si se toma, con estos valores de verdad, la relación del conector  $\wedge$  da como resultado una tautología. En este caso, para la relación que se establece a partir del conector  $\wedge$ , solo se obtiene falso cuando las dos proposiciones son verdaderas, es decir, cuando se relacionan dos valores de verdad 0.

Debido a que ninguna de las combinaciones de valores de verdad resultantes fue simultáneamente verdadera, entonces todos los valores resultantes son verdaderos. Esto va a suceder con cualquier conjunto  $S$  en el que no esté ninguna pareja de subconjuntos complementarios.

La tabla resultante se muestra a continuación:

$p$	$\&$	$q$
0	1	0
0	0	1
1	0	0
1	0	1

 $\implies$ 

$p_S$	$\&$	$q_S$
0	0	1
1	0	0
1	0	1
0	0	1
1	0	0
1	0	1
0	0	1
1	0	0

Tabla 28: Valores de verdad de las diferentes combinaciones de  $p_S$  y  $q_S$  al relacionarlas por medio del conector  $\&$

Sin embargo, al realizar el mismo ejercicio con el conector  $\vee$  se obtiene lo siguiente:

$p$	$\vee$	$q$
0	0	0
0	0	1
1	0	0
1	1	1

 $\implies$ 

$p_S$	$\vee$	$q_S$
0	0	1
1	0	0
1	1	1
0	0	1
1	0	0
1	1	1
0	0	1
1	0	0

Tabla 29: Valores de verdad de las diferentes combinaciones de  $p_S$  y  $q_S$  al relacionarlas por medio del conector  $\vee$

A continuación se muestran las tablas de verdad obtenidas con cada conector:

$p_S$	0	$q_S$
0	0	1
1	0	0
1	0	1
0	0	1
1	0	0
1	0	1
0	0	1
1	0	0

$p_S$	1	$q_S$
0	0	1
1	0	0
1	1	1
0	0	1
1	0	0
1	1	1
0	0	1
1	0	0

$p_S$	2	$q_S$
0	0	1
1	1	0
1	0	1
0	0	1
1	1	0
1	0	1
0	0	1
1	1	0

$p_S$	3	$q_S$
0	0	1
1	1	0
1	1	1
0	0	1
1	1	0
1	1	1
0	0	1
1	1	0

$p_S$	4	$q_S$
0	1	1
1	0	0
1	0	1
0	1	1
1	0	0
1	0	1
0	1	1
1	0	0

$p_S$	5	$q_S$
0	1	1
1	0	0
1	1	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1
0	1	1
1	0	0

$p_S$	6	$q_S$
0	1	1
1	1	0
1	0	1
0	1	1
1	1	0
1	0	1
0	1	1
1	1	0

$p_S$	7	$q_S$
0	1	1
1	1	0
1	1	1
0	1	1
1	1	0
1	1	1
0	1	1
1	1	0

$p_S$	8	$q_S$
0	0	1
1	0	0
1	0	1
0	0	1
1	0	0
1	0	1
0	0	1
1	0	0

$p_S$	9	$q_S$
0	0	1
1	0	0
1	1	1
0	0	1
1	0	0
1	1	1
0	0	1
1	0	0

$p_S$	10	$q_S$
0	0	1
1	1	0
1	0	1
0	0	1
1	1	0
1	0	1
0	0	1
1	1	0

$p_S$	11	$q_S$
0	0	1
1	1	0
1	1	1
0	0	1
1	1	0
1	1	1
0	0	1
1	1	0

$p_S$	12	$q_S$
0	1	1
1	0	0
1	0	1
0	1	1
1	0	0
1	0	1
0	1	1
1	0	0

$p_S$	13	$q_S$
0	1	1
1	0	0
1	1	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1
0	1	1
1	0	0

$p_S$	14	$q_S$
0	1	1
1	1	0
1	0	1
0	1	1
1	1	0
1	0	1
0	1	1
1	1	0

$p_S$	15	$q_S$
0	1	1
1	1	0
1	1	1
0	1	1
1	1	0
1	1	1
0	1	1
1	1	0

Tabla 30: Tablas de verdad de las diferentes combinaciones de  $p$  y  $q$  para cada conector

Basta con observar las tablas de verdad obtenidas para determinar que el subconjunto  $S = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \Omega\}$  resulta ser una  $\sigma$ -álgebra bajo la definición generada por el conector 8, debido a que es la única en la que se generó tautología.

Se emplearon nuevamente las tablas condicionales en Excel que permitieran obtener de manera mucho más rápida las tablas de verdad de los 16 conectores al cambiar las combinaciones de valores de verdad de las proposiciones  $p_S$  y  $q_S$  dependiendo del subconjunto  $S$  seleccionado.

5	p	q	p	q	Valor
2 elementos	Omega	Vacío	0	0	0
	a	b	1	0	0
	b	a	0	1	1
	Vacío	Omega	0	0	0
3 elementos	Omega	Vacío	0	1	1
	a	b,c	0	0	0
	b	a,c	0	0	0
	c	a,b	0	0	0
	a,b	c	0	0	0
	a,c	b	0	0	0
	b,c	a	0	0	0
	Vacío	Omega	1	0	0

Figura 7: Excel con las relaciones binarias para los conectores lógicos

Utilizando las tablas condicionales generadas para la exploración anterior, nuevamente se establecieron categorías de acuerdo a los conjuntos de  $\sigma$ -álgebra que genera cada uno de los conectores. Los resultados de la exploración arrojaron que:

- Para los conectores 3, 5 y 7 el único subconjunto que cumple la condición modificada es el de  $\wp(\Omega)$

$$\langle 3, 5, 7 \rangle = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega\}$$

- Para los conectores 2 y 6 los conjuntos que resultan ser  $\sigma$ -álgebra son los mismos que lo son usando el conector original (conector 4):

$$\langle 2, 4, 6 \rangle = \{\{\emptyset, \Omega\}, \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \Omega\}, \{\emptyset, \{b\}, \{a, c\}, \Omega\}, \{\emptyset, \{c\}, \{a, b\}, \Omega\}, \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega\}\}$$

- Para el conector 9 resultaron ser  $\sigma$ -álgebra los subconjuntos conformados por el espacio muestral y una tripla de elementos de  $\wp(\Omega)$  en la que máximo hay

dos conjuntos unitarios

$$\langle 9 \rangle = \{ \{ \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \Omega \}, \{ \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \Omega \}, \{ \{b\}, \{c\}, \{b, c\}, \Omega \}, \\ \{ \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \Omega \}, \{ \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \Omega \}, \{ \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega \}, \\ \{ \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega \} \}$$

- Para el conector 8, además de las dos anteriores, el subconjunto cuyo único elemento es el espacio muestral, los conjuntos conformados por el espacio muestral y otro elemento de  $\wp(\Omega)$ , y los conjuntos conformados por  $\Omega$  y otro par de elementos de  $\wp(\Omega)$  que no son disyuntos entre sí

$$\langle 8 \rangle = \{ \{ \Omega \}, \{ \{a\}, \Omega \}, \{ \{b\}, \Omega \}, \{ \{c\}, \Omega \}, \{ \{a, b\}, \Omega \}, \{ \{a, c\}, \Omega \}, \\ \{ \{b, c\}, \Omega \}, \{ \{a\}, \{a, b\}, \Omega \}, \{ \{a\}, \{a, c\}, \Omega \}, \{ \{b\}, \{a, b\}, \Omega \}, \\ \{ \{b\}, \{b, c\}, \Omega \}, \{ \{c\}, \{a, c\}, \Omega \}, \{ \{c\}, \{b, c\}, \Omega \}, \{ \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \Omega \}, \\ \{ \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \Omega \}, \{ \{b\}, \{c\}, \{b, c\}, \Omega \}, \{ \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \Omega \}, \\ \{ \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \Omega \}, \{ \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega \}, \{ \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega \} \}$$

- Para el conector 1, a los conjuntos obtenidos para el conector 9, se le adicionan todos los candidatos  $S$  conformados por 5, 6 y 7 elementos de  $\wp(\Omega)$  y  $\wp(\Omega)$

$$\langle 1 \rangle = \{ \{ \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \Omega \}, \{ \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \Omega \}, \{ \{b\}, \{c\}, \{b, c\}, \Omega \}, \\ \{ \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \Omega \}, \{ \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \Omega \}, \{ \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega \}, \\ \{ \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega \}, \{ \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \Omega \}, \\ \{ \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \Omega \}, \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \Omega \}, \\ \{ \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \Omega \}, \{ \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \Omega \}, \\ \{ \emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \Omega \}, \{ \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega \}, \\ \{ \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \Omega \}, \{ \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \Omega \}, \\ \{ \emptyset, \{a\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega \}, \{ \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \Omega \}, \\ \{ \{a\}, \{b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega \}, \{ \emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}, \Omega \}, \\ \{ \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega \}, \{ \emptyset, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \Omega \}, \\ \{ \emptyset, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \Omega \}, \{ \emptyset, \{b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega \}, \\ \{ \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega \}, \{ \emptyset, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \Omega \}, \\ \{ \emptyset, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \Omega \}, \{ \emptyset, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega \}, \\ \{ \emptyset, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega \}, \{ \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega \}, \\ \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \Omega \}, \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \Omega \}, \\ \{ \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega \}, \{ \emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \Omega \}, \\ \{ \emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \Omega \}, \{ \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega \}, \\ \{ \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega \}, \{ \emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \Omega \}, \\ \{ \emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega \}, \{ \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega \}, \\ \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega \}, \\ \{ \emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega \}, \\ \{ \emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega \}, \\ \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega \} \}$$

- Para los conectores 10 al 15 ninguno de los subconjuntos contemplados resulta tener una estructura de  $\sigma$ -álgebra, mientras que para el conector cero todos lo son.

$$\langle 10, 11, 12, 13, 14, 15 \rangle = \emptyset$$

$$\begin{aligned} \langle 0 \rangle = & \{ \{ \Omega \}, \{ \{ a \}, \Omega \}, \{ \{ b \}, \Omega \}, \{ \{ c \}, \Omega \}, \{ \{ a, b \}, \Omega \}, \{ \{ a, c \}, \Omega \}, \{ \{ b, c \}, \Omega \}, \\ & \{ \emptyset, \Omega \}, \{ \{ a \}, \{ a, b \}, \Omega \}, \{ \{ a \}, \{ a, c \}, \Omega \}, \{ \{ a \}, \{ b, c \}, \Omega \}, \{ \emptyset, \{ a \}, \Omega \}, \\ & \{ \{ b \}, \{ a, b \}, \Omega \}, \{ \{ b \}, \{ a, c \}, \Omega \}, \{ \{ b \}, \{ b, c \}, \Omega \}, \{ \emptyset, \{ b \}, \Omega \}, \\ & \{ \{ c \}, \{ a, b \}, \Omega \}, \{ \{ c \}, \{ a, c \}, \Omega \}, \{ \{ c \}, \{ b, c \}, \Omega \}, \{ \emptyset, \{ c \}, \Omega \}, \\ & \{ \{ a, b \}, \{ a, c \}, \Omega \}, \{ \{ a, b \}, \{ b, c \}, \Omega \}, \{ \emptyset, \{ a, b \}, \Omega \}, \{ \{ a, c \}, \{ b, c \}, \Omega \}, \\ & \{ \emptyset, \{ a, c \}, \Omega \}, \{ \emptyset, \{ a, b \}, \Omega \}, \{ \{ a \}, \{ b \}, \{ a, b \}, \Omega \}, \{ \{ a \}, \{ c \}, \{ a, c \}, \Omega \}, \\ & \{ \{ a \}, \{ a, b \}, \{ a, c \}, \Omega \}, \{ \{ a \}, \{ a, b \}, \{ b, c \}, \Omega \}, \{ \{ a \}, \{ a, c \}, \{ b, c \}, \Omega \}, \\ & \{ \emptyset, \{ a \}, \{ a, b \}, \Omega \}, \{ \emptyset, \{ a \}, \{ a, c \}, \Omega \}, \{ \emptyset, \{ a \}, \{ b, c \}, \Omega \}, \\ & \{ \{ b \}, \{ c \}, \{ b, c \}, \Omega \}, \{ \{ b \}, \{ a, b \}, \{ a, c \}, \Omega \}, \{ \{ b \}, \{ a, b \}, \{ b, c \}, \Omega \}, \\ & \{ \{ b \}, \{ a, c \}, \{ b, c \}, \Omega \}, \{ \emptyset, \{ b \}, \{ a, b \}, \Omega \}, \{ \emptyset, \{ b \}, \{ a, c \}, \Omega \}, \\ & \{ \emptyset, \{ b \}, \{ b, c \}, \Omega \}, \{ \{ c \}, \{ a, b \}, \{ a, c \}, \Omega \}, \{ \{ c \}, \{ a, b \}, \{ b, c \}, \Omega \}, \\ & \{ \{ c \}, \{ a, c \}, \{ b, c \}, \Omega \}, \{ \emptyset, \{ c \}, \{ a, b \}, \Omega \}, \{ \emptyset, \{ c \}, \{ a, c \}, \Omega \}, \\ & \{ \emptyset, \{ c \}, \{ b, c \}, \Omega \}, \{ \{ a, b \}, \{ a, c \}, \{ b, c \}, \Omega \}, \{ \emptyset, \{ a, b \}, \{ a, c \}, \Omega \}, \\ & \{ \emptyset, \{ a, b \}, \{ b, c \}, \Omega \}, \{ \emptyset, \{ a, c \}, \{ b, c \}, \Omega \}, \{ \{ a \}, \{ b \}, \{ a, b \}, \{ a, c \}, \Omega \}, \\ & \{ \{ a \}, \{ b \}, \{ a, b \}, \{ b, c \}, \Omega \}, \{ \emptyset, \{ a \}, \{ b \}, \{ a, b \}, \Omega \}, \\ & \{ \{ a \}, \{ c \}, \{ a, b \}, \{ a, c \}, \Omega \}, \{ \{ a \}, \{ c \}, \{ a, b \}, \{ b, c \}, \Omega \}, \\ & \{ \emptyset, \{ a \}, \{ c \}, \{ a, c \}, \Omega \}, \{ \{ a \}, \{ a, b \}, \{ a, c \}, \{ b, c \}, \Omega \}, \\ & \{ \emptyset, \{ a \}, \{ a, b \}, \{ a, c \}, \Omega \}, \{ \emptyset, \{ a \}, \{ a, b \}, \{ b, c \}, \Omega \}, \\ & \{ \emptyset, \{ a \}, \{ a, c \}, \{ b, c \}, \Omega \}, \{ \{ b \}, \{ c \}, \{ a, b \}, \{ b, c \}, \Omega \}, \\ & \{ \{ a \}, \{ b \}, \{ a, c \}, \{ b, c \}, \Omega \}, \{ \emptyset, \{ b \}, \{ c \}, \{ b, c \}, \Omega \}, \\ & \{ \{ b \}, \{ a, b \}, \{ a, c \}, \{ b, c \}, \Omega \}, \{ \emptyset, \{ b \}, \{ a, b \}, \{ a, c \}, \Omega \}, \\ & \{ \emptyset, \{ b \}, \{ a, b \}, \{ b, c \}, \Omega \}, \{ \emptyset, \{ b \}, \{ a, c \}, \{ b, c \}, \Omega \}, \\ & \{ \{ c \}, \{ a, b \}, \{ a, c \}, \{ b, c \}, \Omega \}, \{ \emptyset, \{ c \}, \{ a, b \}, \{ a, c \}, \Omega \}, \\ & \{ \emptyset, \{ c \}, \{ a, b \}, \{ b, c \}, \Omega \}, \{ \emptyset, \{ c \}, \{ a, c \}, \{ b, c \}, \Omega \}, \\ & \{ \emptyset, \{ a, b \}, \{ a, c \}, \{ b, c \}, \Omega \}, \{ \{ a \}, \{ b \}, \{ a, b \}, \{ a, c \}, \{ b, c \}, \Omega \}, \\ & \{ \emptyset, \{ a \}, \{ b \}, \{ a, b \}, \{ a, c \}, \Omega \}, \{ \emptyset, \{ a \}, \{ b \}, \{ a, b \}, \{ b, c \}, \Omega \}, \\ & \{ \{ a \}, \{ c \}, \{ a, b \}, \{ a, c \}, \{ b, c \}, \Omega \}, \{ \emptyset, \{ a \}, \{ c \}, \{ a, b \}, \{ a, c \}, \Omega \}, \\ & \{ \emptyset, \{ a \}, \{ c \}, \{ a, b \}, \{ b, c \}, \Omega \}, \{ \emptyset, \{ a \}, \{ a, b \}, \{ a, c \}, \{ b, c \}, \Omega \}, \\ & \{ \{ b \}, \{ c \}, \{ a, b \}, \{ a, c \}, \{ b, c \}, \Omega \}, \{ \emptyset, \{ b \}, \{ c \}, \{ a, b \}, \{ b, c \}, \Omega \}, \\ & \{ \emptyset, \{ b \}, \{ c \}, \{ a, c \}, \{ b, c \}, \Omega \}, \{ \{ a \}, \{ b \}, \{ c \}, \{ a, b \}, \{ a, c \}, \{ b, c \}, \Omega \}, \\ & \{ \emptyset, \{ a \}, \{ b \}, \{ a, b \}, \{ a, c \}, \{ b, c \}, \Omega \}, \\ & \{ \emptyset, \{ a \}, \{ c \}, \{ a, b \}, \{ a, c \}, \{ b, c \}, \Omega \}, \\ & \{ \emptyset, \{ b \}, \{ c \}, \{ a, b \}, \{ a, c \}, \{ b, c \}, \Omega \}, \\ & \{ \emptyset, \{ a \}, \{ b \}, \{ c \}, \{ a, b \}, \{ a, c \}, \{ b, c \}, \Omega \} \} \end{aligned}$$

Al observar las relaciones entre estos conjuntos, se puede determinar que nuevamente se obtiene el diagrama de hasse que se obtuvo con el caso del espacio muestral de dos elementos

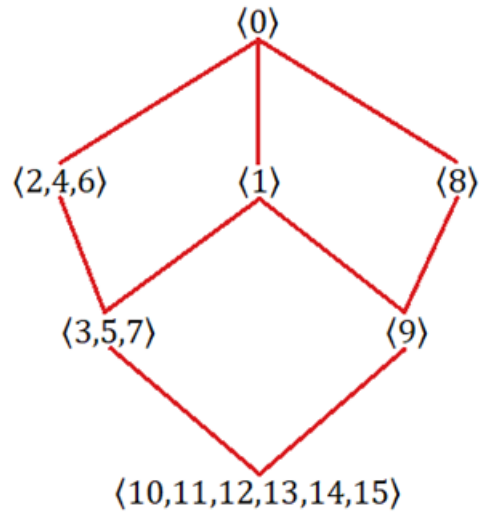


Figura 8: Diagrama de Hasse de los conjuntos de  $\sigma$ -álgebra generados por los conectores lógicos

---

---

### 3. GENERALIZACIÓN

---

Ya se que se había logrado establecer un patrón de relación que cumplen los conjuntos de  $\sigma$ -álgebras, el siguiente paso era poder realizar una generalización sobre este patrón demostrando que se cumple, inicialmente para cualquier conjunto finito o enumerable y posteriormente para conjuntos no enumerables.

Para poder realizar este proceso, era necesario estudiar las nuevas definiciones, ya no por la expresión simbólica generada por el conector lógico, si no por la estructura de la tabla de verdad, es decir, establecer para cada conector cuáles serían las condiciones que reemplazarían la segunda en la definición, al describir cuál es la relación entre un conjunto  $A$  en la  $\sigma$ -álgebra y su complemento.

Se tomará como referencia la categorización realizada en la sección anterior.

#### 3.1. Conectores 10, 11, 12, 13, 14 y 15

Recordemos las tablas de verdad de estos seis conectores:

$p$	10	$q$
0	1	0
1	0	0
0	1	1
1	0	1

$p$	11	$q$
0	1	0
1	0	0
0	1	1
1	1	1

$p$	12	$q$
0	1	0
1	1	0
0	0	1
1	0	1

$p$	13	$q$
0	1	0
1	1	0
0	0	1
1	1	1

$p$	14	$q$
0	1	0
1	1	0
0	1	1
1	0	1

$p$	15	$q$
0	1	0
1	1	0
0	1	1
1	1	1

Tabla 31: Tablas de verdad de los conectores 10 al 15

##### 3.1.1. Conector 10

Observando la tabla de verdad de este conector se puede establecer que se obtiene verdad cuando la segunda proposición es falsa, en este caso, no importa el valor de verdad de la proposición  $p$ . Esto quiere decir que para cualquier conjunto  $A$  de

$\wp(\Omega)$ , sin importar si está o no en  $S$ ,  $A^c$  no podría estar en el conjunto. En lenguaje simbólico:

$$\forall(A \in \wp(\Omega))(A^c \notin S)$$

Escrito en lenguaje natural, la definición completa de  $\sigma$ -álgebra utilizando este conector sería la siguiente:

**Definición 3 ( $\sigma_{10}$ -álgebra)**

Dado un espacio muestral  $\Omega \neq \emptyset$ ,  $S$  un subconjunto de  $\wp(\Omega)$  es una  $\sigma_{10}$ -álgebra si y solo si cumple las siguientes condiciones:

- i.  $\Omega \in S$
- ii. Para todo  $A \in \wp(\Omega)$  entonces  $A^c \notin S$
- iii. Si  $A_i$  con  $i \in I$  una familia indexada de conjuntos tal que  $A_i \in S$  para todo  $i \in I$ , entonces  $\bigcup_{i \in I} A_i \in S$

Es fácil notar que ninguno de los conjuntos  $S$  cumplirá la segunda condición ya que cualquiera de los conjuntos que la conforman son el complemento de otro conjunto en  $\wp(\Omega)$ . Veamos un ejemplo: Tomando  $S = \{\emptyset, \{a\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega\}$  se tiene que si tomamos como conjunto  $A$  al elemento  $\{a, c\}$  que se encuentra en  $S$ , su complemento, que sería  $\{b\}$ , no pertenece a  $S$ , por lo tanto los valores de verdad de las proposiciones  $p_S$  y  $q_S$  serán 0 y 1 y como consecuencia, al relacionarlas por medio del conector 10 se obtendrá que la condición es verdadera.

Sin embargo, si se toma como conjunto  $A$  al elemento  $\{b\}$  que no se encuentra en  $S$  los valores de  $p_S$  y  $q_S$  se invierten ya que el complemento de  $A$  esta vez si se encuentra en el conjunto de referencia  $S$ , por lo tanto la condición para este caso resulta ser falsa. Se concluye, finalmente, que el conjunto  $S$  no es una  $\sigma_{10}$ -álgebra.

Este razonamiento permite concluir que ninguno de los 88 conjuntos  $S$  que son candidatos resulta ser  $\sigma_{10}$ -álgebra.

### 3.1.2. Conector 11

En el caso de este conector, solo se obtiene verdadero al relacionar una proposición verdadera con una falsa, es decir, para un elemento  $A$  que pertenece a un conjunto candidato  $S$ , no se puede tener que su complemento esté en  $S$ . En lenguaje simbólico:

$$\forall(A \in S)(A^c \notin S)$$

Escrito en lenguaje natural, la definición completa de  $\sigma$ -álgebra utilizando este conector sería la siguiente:

**Definición 4** ( $\sigma_{11}$ -álgebra)

Dado un espacio muestral  $\Omega \neq \emptyset$ ,  $S$  un subconjunto de  $\wp(\Omega)$  es una  $\sigma_{11}$ -álgebra si y solo si cumple las siguientes condición:

- i.  $\Omega \in S$
- ii. Para todo  $A \in S$  entonces  $A^c \notin S$
- iii. Si  $A_i$  con  $i \in I$  una familia indexada de conjuntos tal que  $A_i \in S$  para todo  $i \in I$ , entonces  $\bigcup_{i \in I} A_i \in S$

Esta vez, la interpretación es mucho más simple con respecto a la definición de  $\sigma_{10}$ , ya que a única manera en la que podría obtenerse una tautología es si para cada conjunto  $S$  nunca están contenidos simultáneamente el conjunto  $A$  y  $A^c$ . Esto resulta ser imposible porque cada conjunto puede verse como el complemento de algún conjunto en  $\wp(\wp(\Omega))$ , por lo cual ninguno de los conjuntos  $S$  puede cumplir la definición.

**3.1.3. Conector 12**

Observando la tabla de verdad de este conector, para que la condición sea verdadera, la proposición  $p_S$  tiene que ser falsa siempre. En lenguaje simbólico:

$$\forall(A \in \wp(\wp(\Omega)))(A \notin S)$$

Escrito en lenguaje natural, la definición completa de  $\sigma$ -álgebra utilizando este conector sería la siguiente:

**Definición 5** ( $\sigma_{12}$ -álgebra)

Dado un espacio muestral  $\Omega \neq \emptyset$ ,  $S$  un subconjunto de  $\wp(\Omega)$  es una  $\sigma_{12}$ -álgebra si y solo si cumple las siguientes condición:

- i.  $\Omega \in S$
- ii. Para todo  $A \in \wp(\wp(\Omega))$  entonces  $A \notin S$
- iii. Si  $A_i$  con  $i \in I$  una familia indexada de conjuntos tal que  $A_i \in S$  para todo  $i \in I$ , entonces  $\bigcup_{i \in I} A_i \in S$

Es claro, al leer la definición, que no tiene sentido utilizar este conector. El conjunto  $S$  no puede ser vacío debido a que la condición uno de la definición nos garantiza que

a menos esté contenido en él  $\Omega$ . Por lo tanto, ninguna de las 88 opciones cumpliría esta condición.

### 3.1.4. Conector 13

En este caso, la condición se plantea de la siguiente manera:

$$\forall(A \in \wp(\wp(\Omega)))(A \notin S \wedge A^c \notin S)$$

Escrito en lenguaje natural, la definición completa de  $\sigma$ -álgebra utilizando este conector sería la siguiente:

#### Definición 6 ( $\sigma_{13}$ -álgebra)

Dado un espacio muestral  $\Omega \neq \emptyset$ ,  $S$  un subconjunto de  $\wp(\Omega)$  es una  $\sigma_{13}$ -álgebra si y solo si cumple las siguientes condición:

- i.  $\Omega \in S$
- ii. Para todo  $A \in \wp(\wp(\Omega))$  entonces  $A \notin S$  y  $A^c \notin S$
- iii. Si  $A_i$  con  $i \in I$  una familia indexada de conjuntos tal que  $A_i \in S$  para todo  $i \in I$ , entonces  $\bigcup_{i \in I} A_i \in S$

Si nos fijamos en la definición anterior, la condición dos resulta ser mucho más restrictiva en el sentido en que el conjunto  $A$  siempre debe pertenecer a  $S$ , sin embargo, el argumento resulta ser el mismo y por lo tanto tampoco hay conjuntos que se cataloguen como  $\sigma_{12}$ -álgebra.

### 3.1.5. Conector 14

Este conector solo genera valores de verdadero cuando las dos proposiciones son falsas, simbólicamente esto se traduce en la expresión

$$\forall(A \notin S)(A^c \notin S)$$

Escrito en lenguaje natural, la definición completa de  $\sigma$ -álgebra utilizando este conector sería la siguiente:

**Definición 7** ( $\sigma_{14}$ -álgebra)

Dado un espacio muestral  $\Omega \neq \emptyset$ ,  $S$  un subconjunto de  $\wp(\Omega)$  es una  $\sigma_{14}$ -álgebra si y solo si cumple las siguientes condición:

- i.  $\Omega \in S$
- ii. Para todo  $A \in S$  entonces  $A^c \notin S$
- iii. Si  $A_i$  con  $i \in I$  una familia indexada de conjuntos tal que  $A_i \in S$  para todo  $i \in I$ , entonces  $\bigcup_{i \in I} A_i \in S$

Se concluye, al igual que en los casos anteriores, que ningún conjunto  $S$  es  $\sigma$ -álgebra bajo esta definición.

**3.1.6. Conector 15**

Este último conector de esta categoría es un caso trivial ya que cualquier combinación de valores de verdad de las proposiciones  $p_S$  y  $q_S$  será falsa, esto quiere decir que la condición que se plantee utilizando este conector nunca podrá ser cumplida por ningún conjunto  $S$ , por lo tanto la definición sería la siguiente:

**Definición 8** ( $\sigma_{15}$ -álgebra)

Dado un espacio muestral  $\Omega \neq \emptyset$ ,  $S$  un subconjunto de  $\wp(\Omega)$  es una  $\sigma_{15}$ -álgebra si y solo si cumple las siguientes condición:

- i.  $\Omega \in S$
- ii. Para todo  $A \in \wp(\Omega)$  entonces  $A \in S$  y  $A \notin S$
- iii. Si  $A_i$  con  $i \in I$  una familia indexada de conjuntos tal que  $A_i \in S$  para todo  $i \in I$ , entonces  $\bigcup_{i \in I} A_i \in S$

Debido a que la segunda condición siempre será falsa, puede escribirse cualquier expresión que resulte falsa en cualquier circunstancia y cualquier conjunto. Al igual que los conectores 10 al 14, el conector 15 no genera ninguna  $\sigma$ -álgebra.

Ya que el argumento utilizado en la sección anterior para relacionar los conjuntos generados con las nuevas condiciones de cada una de las definiciones, está relacionado con la estructura de la tabla de verdad del conector y no con el número de

elementos del espacio muestral, se puede afirmar que es válido para cualquier espacio muestral y cualquier elemento de  $\wp(\wp(\Omega))$ , luego, si se modifica la definición utilizando los conectores 10, 11, 12, 13, 14 o 15 no se obtendría ninguna  $\sigma$ -álgebra.

### 3.2. Conectores 3, 5 y 7

Recordemos las tablas de verdad de estos tres conectores:

$p$	3	$q$
0	0	0
1	0	0
0	1	1
1	1	1

$p$	5	$q$
0	0	0
1	1	0
0	0	1
1	1	1

$p$	7	$q$
0	0	0
1	1	0
0	1	1
1	1	1

Tabla 32: Tablas de verdad de los conectores 3, 5 y 7

#### 3.2.1. Conector 3

La tabla de verdad de este conector muestra que la relación entre las dos proposiciones resulta ser verdadera siempre y cuando la proposición  $p_S$  sea verdadera, en este sentido se concluye que si se tiene que  $A$  es un elemento de  $S$ , el conjunto  $S$  es un  $\sigma_3$ -álgebra sin importar si el complemento del conjunto  $A$  se encuentra o no. simbólicamente esto se traduce en la expresión

$$\forall(A \in \wp(\wp(\Omega)))(A \in S)$$

Escrito en lenguaje natural, la definición completa de  $\sigma$ -álgebra utilizando este conector sería la siguiente:

#### Definición 9 ( $\sigma_3$ -álgebra)

Dado un espacio muestral  $\Omega \neq \emptyset$ ,  $S$  un subconjunto de  $\wp(\Omega)$  es una  $\sigma_3$ -álgebra si y solo si cumple las siguientes condición:

- i.  $\Omega \in S$
- ii. Para todo  $A \in \wp(\Omega)$  entonces  $A \in S$
- iii. Si  $A_i$  con  $i \in I$  una familia indexada de conjuntos tal que  $A_i \in S$  para todo  $i \in I$ , entonces  $\bigcup_{i \in I} A_i \in S$

En este caso, como todo conjunto  $A$  que se seleccione debe ser elemento de  $S$ , el único conjunto que puede ser  $\sigma_3$ -álgebra es precisamente  $\wp(\Omega)$ .

**3.2.2. Conector 5**

Con respecto al conector anterior, este conector funciona de manera similar pero en sentido contrario: La relación resulta verdadera siempre y cuando la proposición  $q_S$  sea verdadera, en otras palabras, al seleccionar un conjunto  $A$  de  $\wp(\Omega)$ , su complemento siempre debe pertenecer a  $S$ . En lenguaje simbólico:

$$\forall(A \in \wp(\Omega))(A^c \in S)$$

Escrito en lenguaje natural, la definición completa de  $\sigma$ -álgebra utilizando este conector sería la siguiente:

**Definición 10 ( $\sigma_5$ -álgebra)**

Dado un espacio muestral  $\Omega \neq \emptyset$ ,  $S$  un subconjunto de  $\wp(\Omega)$  es una  $\sigma_5$ -álgebra si y solo si cumple las siguientes condición:

- i.  $\Omega \in S$
- ii. Para todo  $A \in \wp(\Omega)$  entonces  $A^c \in S$
- iii. Si  $A_i$  con  $i \in I$  una familia indexada de conjuntos tal que  $A_i \in S$  para todo  $i \in I$ , entonces  $\bigcup_{i \in I} A_i \in S$

Debido a que todo elemento de  $\wp(\Omega)$  puede escribirse como un complemento de otro de los subconjuntos del espacio muestral, entonces todos los elementos de  $\wp(\Omega)$  deben pertenecer a  $S$  y por lo tanto el conjunto  $\wp(\Omega)$  es la única  $\sigma_5$  que se genera.

**3.2.3. Conector 7**

La condición que se establece para este conector es la siguiente:

$$\forall(A \in \wp(\Omega))(A \in S \wedge A^c \in S)$$

Escrito en lenguaje natural, la definición completa de  $\sigma$ -álgebra utilizando este conector sería la siguiente:

**Definición 11** ( $\sigma_7$ -álgebra)

Dado un espacio muestral  $\Omega \neq \emptyset$ ,  $S$  un subconjunto de  $\wp(\Omega)$  es una  $\sigma_7$ -álgebra si y solo si cumple las siguientes condición:

- i.  $\Omega \in S$
- ii. Para todo  $A \in \wp(\Omega)$  entonces  $A \in S$  y  $A^c \in S$
- iii. Si  $A_i$  con  $i \in I$  una familia indexada de conjuntos tal que  $A_i \in S$  para todo  $i \in I$ , entonces  $\bigcup_{i \in I} A_i \in S$

Como la condición que se establece es que tanto  $A$  como su complemento deben estar siempre en  $S$ , el único conjunto que lo cumple es  $\wp(\Omega)$ .

**3.3. Conector 9**

Recordemos la tabla de verdad de este conector:

$p$	$9$	$q$
0	1	0
1	0	0
0	0	1
1	1	1

Tabla 33: Tabla de verdad del conector 9

Este conector tiene la característica de que siempre es verdadero cuando los valores de verdad de las dos proposiciones que se relacionan son opuestos, es decir, en términos de las proposiciones  $p_S$  y  $q_S$  se traduce a que una debe ser falsa cuando la otra es verdadera y viceversa. Por lo tanto, para cualquier elemento  $A$  de  $\wp(\Omega)$  si  $A$  pertenece a  $S$ ,  $A^c$  no, mientras que si  $A$  no pertenece a  $S$ ,  $A^c$  si deberá estar en  $S$ . En lenguaje simbólico

$$\forall (A \in \wp(\Omega)) ((A \in S \wedge A^c \notin S) \vee (A \notin S \wedge A^c \in S))$$

Escrito en lenguaje natural, la definición completa de  $\sigma$ -álgebra utilizando este conector sería la siguiente:

**Definición 12** ( $\sigma_9$ -álgebra)

Dado un espacio muestral  $\Omega \neq \emptyset$ ,  $S$  un subconjunto de  $\wp(\Omega)$  es una  $\sigma_9$ -álgebra si y solo si cumple las siguientes condición:

- i.  $\Omega \in S$
- ii. Para todo  $A \in \wp(\Omega)$  entonces  $A \in S$  y  $A^c \notin S$ , o,  $A \notin S$  y  $A^c \in S$
- iii. Si  $A_i$  con  $i \in I$  una familia indexada de conjuntos tal que  $A_i \in S$  para todo  $i \in I$ , entonces  $\bigcup_{i \in I} A_i \in S$

**3.4. Conectores 2, 4 y 6**

Recordemos las tablas de verdad de estos tres conectores:

$p$	2	$q$
0	0	0
1	0	0
0	1	1
1	0	1

$p$	4	$q$
0	0	0
1	1	0
0	0	1
1	0	1

$p$	6	$q$
0	0	0
1	1	0
0	1	1
1	0	1

Tabla 34: Tablas de verdad de los conectores 2, 4 y 6

**3.4.1. Conector 2**

Observando la tabla de verdad de este conector se puede establecer que se obtiene falso solamente cuando la proposición  $p_S$  es falsa mientras que la proposición  $q_S$  es verdadera esto quiere decir que no puede pasar que para el conjunto  $A$ . En lenguaje simbólico:

$$\forall(A \in \wp(\Omega))((A \in S) \vee (A \notin S \wedge A^c \notin S))$$

Escrito en lenguaje natural, la definición completa de  $\sigma$ -álgebra utilizando este conector sería la siguiente:

**Definición 13** ( $\sigma_2$ -álgebra)

Dado un espacio muestral  $\Omega \neq \emptyset$ ,  $S$  un subconjunto de  $\wp(\Omega)$  es una  $\sigma_2$ -álgebra si y solo si cumple las siguientes condiciones:

- i.  $\Omega \in S$
- ii. Para todo  $A \in \wp(\Omega)$  entonces  $A \in S$  o,  $A \notin S$  y  $A^c \notin S$
- iii. Si  $A_i$  con  $i \in I$  una familia indexada de conjuntos tal que  $A_i \in S$  para todo  $i \in I$ , entonces  $\bigcup_{i \in I} A_i \in S$

Es fácil notar que un conjunto  $S$  cumplirá la segunda condición si no están contenidos en él parejas de conjuntos que sean mutuamente complementarios. Veamos un ejemplo: Si  $S = \{\emptyset, \{a\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega\}$  se tiene que si tomamos como conjunto  $A$  al elemento  $\{b, c\}$  que se encuentra en  $S$ , su complemento, que sería  $\{a\}$ , pertenece a  $S$ , por lo tanto los valores de verdad de las proposiciones  $p_S$  y  $q_S$  serán 0 y 0, como consecuencia, al relacionarlas por medio del conector 2 se obtendrá que la condición es falsa.

En cambio, si se toma  $S = \{\emptyset, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega\}$  y al conjunto  $A = \{a, c\}$ , su complemento no es un elemento del conjunto  $S$ , luego los valores de verdad de  $p_S$  y  $q_S$  serían 0 y 1, y en este caso la proposición sería verdadera. Realizando el ejercicio con todos los posibles conjuntos  $A$  de  $\wp(\Omega)$ , se concluye que hay una tautología. Por lo tanto,  $S$  es una  $\sigma_2$ -álgebra.

**3.4.2. Conector 4**

Este conector, a diferencia del anterior, arroja falso solo cuando la  $p_S$  toma el valor de verdadero y  $q_S$  de falso, esto es, cuando al tomar un conjunto  $A$  de  $\wp(\Omega)$  pertenece a  $S$  y su complemento no. En lenguaje simbólico

$$\forall(A \in \wp(\Omega))((A \notin S) \vee (A \in S \wedge A^c \notin S))$$

Escrito en lenguaje natural, la definición completa de  $\sigma$ -álgebra utilizando este conector sería la siguiente:

**Definición 14** ( $\sigma_4$ -álgebra)

Dado un espacio muestral  $\Omega \neq \emptyset$ ,  $S$  un subconjunto de  $\wp(\Omega)$  es una  $\sigma_4$ -álgebra si y solo si cumple las siguientes condiciones:

- i.  $\Omega \in S$
- ii. Para todo  $A \in \wp(\Omega)$  entonces  $A \notin S$  o,  $A \in S$  y  $A^c \notin S$
- iii. Si  $A_i$  con  $i \in I$  una familia indexada de conjuntos tal que  $A_i \in S$  para todo  $i \in I$ , entonces  $\bigcup_{i \in I} A_i \in S$

Como ya se ha mencionado anteriormente, cualquier conjunto  $A$  de  $\wp(\Omega)$  es el complemento de otro conjunto de  $\wp(\Omega)$ , por lo tanto, esta condición resulta ser lógicamente equivalente a la condición establecida por el conector 2, de tal manera que estas dos definiciones generarán las mismas  $\sigma$ -álgebra. Debido a que esta es, de hecho, la definición usual, tanto el conector dos como el conector cuatro están generando las  $\sigma$ -álgebra usuales del espacio muestral.

**3.4.3. Conector 6**

Este conector corresponde a la negación del conector nueve, esto quiere decir que la condición que se debe establecer para esta definición debe ser que para todo conjunto  $A$  en  $\wp(\Omega)$  tanto el como su complemento deben estar simultáneamente en  $S$  o no estar ninguno de los dos. En lenguaje simbólico

$$\forall(A \in \wp(\Omega))((A \in S \wedge A^c \in S) \vee (A \notin S \wedge A^c \notin S))$$

Escrito en lenguaje natural, la definición completa de  $\sigma$ -álgebra utilizando este conector sería la siguiente:

**Definición 15** ( $\sigma_6$ -álgebra)

Dado un espacio muestral  $\Omega \neq \emptyset$ ,  $S$  un subconjunto de  $\wp(\Omega)$  es una  $\sigma_6$ -álgebra si y solo si cumple las siguientes condiciones:

- i.  $\Omega \in S$
- ii. Para todo  $A \in \wp(\Omega)$  entonces  $A \in S$  y  $A^c \in S$  o,  $A \notin S$  y  $A^c \notin S$
- iii. Si  $A_i$  con  $i \in I$  una familia indexada de conjuntos tal que  $A_i \in S$  para todo  $i \in I$ , entonces  $\bigcup_{i \in I} A_i \in S$

La condición que se logra establecer a partir de las características de la tabla de verdad del conector, resulta ser la conjunción de las condiciones de los conectores 2 y 4, en este sentido, es natural pensar que el conjunto de  $\sigma_6$ -álgebra será el resultado de la intersección de las  $\sigma_2$ -álgebra y las  $\sigma_4$ -álgebra. Sabemos, del análisis realizado anteriormente, que estos dos conjuntos poseen los mismos elementos debido a que sus definiciones son lógicamente equivalente, por lo tanto, el conector 6 generará también las mismas  $\sigma$ -álgebra.

Adicionalmente, se tiene que  $\wp(\Omega)$  es una de las  $\sigma$ -álgebra triviales de un espacio muestral  $\Omega$ , por lo tanto, es una  $\sigma$ -álgebra para los conectores 2, 4 y 6. De esta manera se concluye que el generado por los conectores 3, 5 y 7 está contenido en el conjunto generado por los conectores 2, 4 y 6.

### 3.5. Conector 1

Recordemos la tabla de verdad de este conector:

$p$	1	$q$
0	0	0
1	0	0
0	0	1
1	1	1

Tabla 35: Tabla de verdad del conector 1

Al relacionar dos proposiciones por medio de este conector solo se obtiene una falacia si las dos proposiciones son falsas, utilizando el lenguaje simbólico:

$$\forall (A \in \wp(\Omega)) ((A \in S \wedge A^c \in S) \vee (A \notin S \wedge A^c \notin S)) \vee ((A \in S \wedge A^c \notin S))$$

Escrito en lenguaje natural, la definición completa de  $\sigma$ -álgebra utilizando este conector sería la siguiente:

#### Definición 16 ( $\sigma_1$ -álgebra)

Dado un espacio muestral  $\Omega \neq \emptyset$ ,  $S$  un subconjunto de  $\wp(\Omega)$  es una  $\sigma_8$ -álgebra si y solo si cumple las siguientes condiciones:

- i.  $\Omega \in S$
- ii. Para todo  $A \in \wp(\Omega)$  entonces  $A \in S$  y  $A^c \in S$ , o  $A \notin S$  y  $A^c \notin S$ , o  $A \in S$  y  $A^c \notin S$
- iii. Si  $A_i$  con  $i \in I$  una familia indexada de conjuntos tal que  $A_i \in S$  para todo  $i \in I$ , entonces  $\bigcup_{i \in I} A_i \in S$

La condición que se establece para este conector es mucho más amplia que en los casos anteriores, no es necesario que el complemento de  $A$  se encuentre contenido en el conjunto  $S$ , por ejemplo, una  $\sigma_1$ -álgebra para el espacio muestral de tres elementos el conjunto  $\{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \Omega\}$ .

### 3.6. Conector 8

Recordemos la tabla de verdad de este conector:

$p$	$8$	$q$
0	1	0
1	0	0
0	0	1
1	0	1

Tabla 36: Tabla de verdad del conector 8

Este conector es la negación del conector 1, por lo tanto solo se hace falso cuando las dos proposiciones son verdaderas, utilizando el lenguaje simbólico:

$$\forall(A \in \wp(\Omega))((A \in S \wedge A^c \notin S) \vee (A \notin S \wedge A^c \in S)) \vee ((A \notin S \wedge A^c \notin S))$$

Escrito en lenguaje natural, la definición completa de  $\sigma$ -álgebra utilizando este conector sería la siguiente:

#### Definición 17 ( $\sigma_8$ -álgebra)

Dado un espacio muestral  $\Omega \neq \emptyset$ ,  $S$  un subconjunto de  $\wp(\Omega)$  es una  $\sigma_8$ -álgebra si y solo si cumple las siguientes condiciones:

- i.  $\Omega \in S$
- ii. Para todo  $A \in \wp(\Omega)$  entonces  $A \in S$  y  $A^c \notin S$ , o  $A \notin S$  y  $A^c \in S$ , o  $A \notin S$  y  $A^c \notin S$
- iii. Si  $A_i$  con  $i \in I$  una familia indexada de conjuntos tal que  $A_i \in S$  para todo  $i \in I$ , entonces  $\bigcup_{i \in I} A_i \in S$

Lograr una caracterización de las  $\sigma_1$ -álgebra y de las  $\sigma_8$ -álgebra no fue posible ya que los conjuntos son muy diversos. El conjunto de las  $\sigma$ -álgebra generadas por el conector 8 es, después del generado por 0, el más numeroso. De los 88 candidatos, 23 cumplieron la condición de la definición.

### 3.7. Conector 0

Recordemos la tabla de verdad de este conector:

$p$	0	$q$
0	0	0
1	0	0
0	0	1
1	0	1

Tabla 37: Tabla de verdad del conector 0

Este último conector es el otro caso trivial ya que, esta vez, cualquier combinación de valores de verdad de las proposiciones  $p_S$  y  $q_S$  será verdadera, esto quiere decir que la condición que se plantee utilizando este conector la cumplirá cualquier conjunto  $S$  de  $\wp(\wp(\Omega))$ , por lo tanto la definición sería la siguiente:

#### Definición 18 ( $\sigma_0$ -álgebra)

Dado un espacio muestral  $\Omega \neq \emptyset$ ,  $S$  un subconjunto de  $\wp(\Omega)$  es una  $\sigma_0$ -álgebra si y solo si cumple las siguientes condición:

- i.  $\Omega \in S$
- ii. Para todo  $A \in \wp(\Omega)$  entonces  $A \in S$  y  $A \notin S$
- iii. Si  $A_i$  con  $i \in I$  una familia indexada de conjuntos tal que  $A_i \in S$  para todo  $i \in I$ , entonces  $\bigcup_{i \in I} A_i \in S$

Debido a que la segunda condición siempre será verdadera los 88 conjuntos resultan ser  $\sigma_0$ -álgebra, ya que no se agrega ningún filtro adicional a los dos utilizados en la primera selección de elementos de  $\wp(\wp(\Omega))$ .

### 3.8. Diagrama de Hasse

Estudiando las diferentes definiciones que se generaron, en especial, la verbalización de la condición dos de cada una de ellas, se puede observar que la explicación del diagrama de Hasse encontrado en las exploraciones con espacios muestrales de dos y tres elementos es bastante sencilla.

En primera instancia, se sabe que para los conectores 10, 11, 12, 13, 14 y 15 la definición de  $\sigma$ -álgebra no la cumple ningún de los conjuntos seleccionado por medio de los dos filtros realizados, es decir, este conjunto será siempre vacío. El vacío

como conjunto siempre se encuentra contenido en los demás conjuntos. En particular, estará contenido en el conjunto de  $\sigma$ -álgebra generado por el conector 9 y por los conectores 3, 5 y 7. Por lo tanto

$$\langle 10, 11, 12, 13, 14, 15 \rangle \subseteq \langle 3, 5, 7 \rangle \quad \langle 10, 11, 12, 13, 14, 15 \rangle \subseteq \langle 9 \rangle$$

El conjunto  $\langle 3, 5, 7 \rangle$ , a su vez, está contenido en los conjuntos  $\langle 2, 4, 6 \rangle$  y  $\langle 1 \rangle$ , mientras que por su parte, el conjunto  $\langle 9 \rangle$  está contenido en  $\langle 1 \rangle$  y en  $\langle 8 \rangle$ . Finalmente, el conjunto  $\langle 0 \rangle$ , que hace de veces de conjunto universal de referencia, ya que contiene todos los subconjuntos  $S$  que inicialmente fueron seleccionados, contiene a todos los conjuntos generados por todos los conectores lógicos.

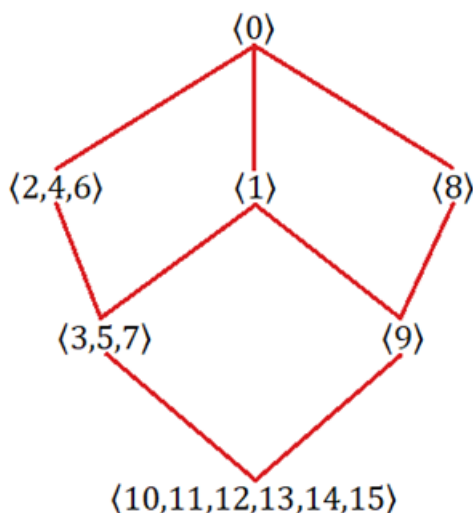


Figura 9: Diagrama de Hasse corregido de los conjuntos de  $\sigma$ -álgebra generados por los conectores lógicos

---

---

## 4. CONCLUSIONES

---

- Al realizar el mapeo de los estudios previos realizados en torno a los conectores de Pierce, fue sencillo poder establecer que la notación mas apropiada para abordar la exploración que se planteó es la notación binaria adoptada por Duarte, Daza, Translateur y Jiménez (2010). Esto se debe a que al asignar a cada conector un número decimal que corresponde a la notación binaria del valor de verdad que toma la proposición compuesta, se desliga al conector de la simbología y lo que representa y se da prioridad a las combinaciones de valores de verdad que lo originan, esto facilita el trabajo ya que no es necesario memorizar las reglas de relación de cada conector.
- Cuando se establecen las definiciones formales es necesario recurrir a la expresión binaria del conector para poder interpretar la condición en lenguaje simbólico, sin embargo, al verbalizar la condición para generar la definición completa si se tuvo en cuenta la interpretación en lenguaje natural de los conectores usuales.
- Con respecto a la exploración con los conjuntos finitos resultó de gran importancia realizar la programación del Excel utilizando las equivalencias lógicas reportadas en el marco de referencia. Pese a que los conjuntos fueron solamente de dos y tres elementos, el hecho de que los conjuntos de interés resultaran ser elementos de  $\wp(\wp(\Omega))$  hizo que el trabajo manual requerido fuera excesivo. El poder generar una herramienta para verificar con cada uno de los conjuntos candidatos las 16 definiciones modificadas fue una de las actividades más importantes para poder llegar a los resultados de manera más eficiente.
- En cuanto a mi formación como docente, realizar este tipo de trabajo exploratorio contribuyó a que lograra ver un concepto de maneras diversas y que mi mente se forzara a trabajarlo de maneras no usuales. Creo que es clave para un profesor el poder entender un concepto, proceso u objeto propio de la matemática de maneras más amplias para que en el proceso de transmitir ese conocimiento a otras personas tenga más herramientas y pueda tomar decisiones más acertadas.

---

---

## 5. BIBLIOGRAFÍA

---

### Referencias

- [1] Morera, J. F., Hurtado, C., Jiménez, W. (2012). Una propuesta alternativa para la enseñanza de la teoría de conjuntos.
- [2] Muñoz, J. M. (2003). Topología básica (No. 11). Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.
- [3] Blanco, L. (2004). Probabilidad. Universidad Nacional de Colombia.
- [4] Duarte, D., Daza, A., Translateur, E., Jiménez, W. (2010). Algunas consideraciones sobre los 16 conectivos lógicos analizadas por estudiantes talentosos en Matemáticas. En memorias IX ENMES (Paipa, Boyacá).
- [5] Ruiz, L., Gutiérrez, D., Gutiérrez, C., Malagón, A. (2015). Estudio de la variación de algunas definiciones de teoría de conjuntos al utilizar conectivos lógicos no usuales. En memorias X IEMEEM (Duitama, Boyacá).