UNA PROPUESTA DE ENSEÑANZA PARA LA SOLUCIÓN DE INECUACIONES POR EL MÉTODO GRÁFICO, A TRAVÉS DEL SOFTWARE GEOGEBRA

JINA PAOLA TRIANA GARCÍA
MARÍA ALEJANDRA MORENO CHAVARRO

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C., COLOMBÍA
2013

UNA PROPUESTA DE ENSEÑANZA PARA LASOLUCIÓN DE INECUACIONES POR EL MÉTODO GRÁFICO, A TRAVÉS DEL SOFTWARE GEOGEBRA

Por:

JINA PAOLA TRIANA GARCÍA
MARÍA ALEJANDRA MORENO CHAVARRO

Trabajo de grado entregado para optar por el título de
Especialista en Educación Matemática

Asesor:
ALBERTO DONADO NÚÑEZ
Profesor Departamento de Matemáticas

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C., COLOMBÍA
2013

"Para todos los efectos, declaramos que el presente trabajo es original y de nuestra total autoría; en aquellos casos en los cuales he requerido del trabajo de otros autores o investigadores, he dado los respectivos créditos"

Nota de aceptación

Presidente del Jurado

Jurado

Jurado

Bogotá, Noviembre 2013

Dedico este trabajo principalmente a Dios, a mis padres por ser el pilar más importante de mi vida, por demostrarme siempre su cariño, su apoyo incondicional y a Edwin por su compañía y por su colaboración en las diferentes fases de este proceso de formación.

Paola

A Dios, mi familia, familiares y Oscar por apoyarme incondicionalmente.

Alejandra

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos de manera especial a los profesores que nos acompañaron durante la especialización por todas sus enseñanzas y aportes para nuestra vida profesional.

A nuestro asesor Gil Alberto Donado Núñez, quien ha hecho posible la elaboración de este proyecto, por sus innumerables comentarios para mejorar nuestra propuesta, por su infinita paciencia para explicarnos y apoyarnos durante la construcción y análisis del presente trabajo.

A al colegio Cooperativo Unión Social de Bogotá, especialmente a las estudiantes de grado once, por su colaboración para poder llevar a cabo nuestro trabajo.

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ACTA DE EVALUACION DE TESIS DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado ***"Una propuesta de enseñanza para la solución de inecuaciones por el método gráfico, a través del software GeoGebra"*** Presentado por los estudiantes:

Jina Paola Triana 2013182031
María Alejandra Moreno Chavarro - 2013182015

Como requisito parcial para optar al título de **Especialización en Educación Matemática**, analizado el proceso seguido por los estudiantes en la elaboración del Trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigno la calificación de **Aprobado** con **42** puntos.

Observaciones:

En constancia se firma a los 10 días del mes de diciembre de 2013.

JURADOS

Director(a) del Trabajo: Profesor(a) *ALBERTO DONADO*

Jurado:

Profesor(a) *OSCAR MOLINA JAIME*

1.Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Una propuesta de enseñanza para la solución de inecuaciones por el método gráfico, a través del software GeoGebra
Autor(es)	TRIANA García Jina Paola Moreno Chavarro María Alejandra
Director	Alberto Donado Núñez
Publicación	Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional, 2013. 83 páginas.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	Argumentación, inecuaciones, tecnología, GeoGebra, representaciones

2.Descripción

La presente propuesta se enfoca en observar e identificar cómo un grupo de estudiantes de grado once del colegio Cooperativo Unión Social de Bogotá genera argumentación en las diferentes formas de representar la solución de inecuaciones (Alvarenga 2006) en un ambiente de carácter social y cultural basado en la participación de las estudiantes en su experiencia matemática a través de las actividades diseñadas por el profesor y en la interacción social gestionada por el profesor con el interés particular de llevar a las estudiantes a la oportunidad de desarrollar formas de argumentar (Toulmin 1958).

Con base en esto, se diseñó una propuesta que contempló el concepto de la solución de inecuaciones desde diferentes representaciones como: la representación tabular y gráfica de inecuaciones, por medio de la utilización de papel y lápiz y el uso del software GeoGebra

También contempló la interacción social gestionada por el profesor con el interés particular de llevar a los estudiantes a la argumentación de acuerdo a su nivel.

Este proceso se evidenciara el análisis de cada uno de los ítems de la actividad con la triangulación de la información de distintas fuentes: la guía de las estudiantes y videos del trabajo en grupo. Como datos se tomaran las transcripciones del video y las guías solucionadas por las estudiantes.

Esa información fue analizada a la luz de los referentes teóricos Toulmin (2003), Duval (1999), Hernández (2013), lo que permitió proponer una propuesta de enseñanza para la solución de las inecuaciones de funciones empleando el uso de intervalos y el manejo de inecuaciones, generados en un ambiente de carácter social y cultural basado en la participación de las estudiantes que les permite llegar a crear argumentos sobre su experiencia matemática de acuerdo a su nivel.

3.Fuentes

ALSON P (1989). *Acerca de la enseñanza de inecuaciones de una variable*. Suma 2.

ALVARENGA Karly (2006). Inecuaciones: un análisis de las construcciones mentales de estudiantes universitarios. *Instituto Politécnico Nacional Centro de Investigación En Ciencias Aplicadas y Tecnología Avanzada.*

BARBOSA, Alvarenga, Karly. (2003). *La enseñanza de inecuaciones desde el punto de vista de la teoría APOE.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, noviembre, 199-219.

COLLINS, A., Joseph, D., Bielaczye, K. (2004) *Desing Research: theorical and methodological issues.* En: *The journal of the learning sciences*, No. 13, pp. 15-42

Duval R. (1999). Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Traducción Myriam Vega.

HERNÁNDEZ C. (2013) *Consideraciones para el uso del GeoGebra en ecuaciones, inecuaciones, sistemas y funciones. Números.* Revista de Didáctica de las matemáticas, Volumen 82, marzo, 115-129.

MARIOTTI, M.A. (2000). Introduction to proof: the mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics, 44, 25 - 53.*

Swokowski, E, (1981) Algebra y trigonometría con geometría analítica, *Editorial Iberoamericana, México.*

THOMAIDIS, & Tzanakis, C. (2007). *The notion of historical "parallelism" revisited: historical evolution and students' conception of the order relation on the number line*. Educational Studies in Mathematics, 66(2), 165-183.

TOULMIN (1958). *The use of arguments*. Cambridge: University Press.

TOULMIN, S. (2007). *Los usos de la argumentación.* Ediciones Península, Barcelona.

RADFORD, L. (2006). *Elementos de Una Teoría Cultural de la Objetivación.* Relime. (número especial) 103-129

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL (2013). *Propuesta de énfasis cohorte 2013.* Especialización en educación matemática

http://maralboran.org/wikipedia/index.php/Inecuaciones_(4%C2%BAESO-B)

4.Contenidos

El siguiente trabajo está dividido en 6 capítulos.
El primer capítulo hace referencia al planteamiento del problema, precisamos el planteamiento del problema, el objetivo general y específicos propuestos para el proyecto.
En el segundo capítulo se encuentra la metodología y como está diseñada la propuesta teniendo en cuenta a Collins (2004).
En el tercer capítulo se encuentra el marco de referencia, donde se escribe de las dificultades que se encuentran en la solución de inecuaciones; luego la referencia de las desigualdades, representaciones semióticas, el modelo de Toulmin, y el uso de las herramientas tecnológicas.
El cuarto capítulo tabla del diseño de la propuesta, en este encontramos cada una de las actividades propuestas para llevar a cabo el proyecto.
El quinto capítulo se encuentra el análisis del experimento, este hace referencia a la aplicación de las actividades y los resultados obtenidos en cada una de ellas.
El sexto capítulo hace referencia al análisis de resultados en cada una de las actividades y las conclusiones obtenidas en la implementación del proyecto.

5.Metodología

La población objeto de este proyecto de grado, son estudiantes de grado once entre 15 y 16 años, se proponen instrumentos de recolección de la información como:
Recolección de información obtenida en las hojas guías de las actividades propuestas a las estudiantes y la entrevista informal donde el docente utilizó la mayéutica.
Captura de videos de la pantalla de la herramienta tecnológica, para nuestro caso GeoGebra.

El proyecto de grado está fundamentado en:
Collins (2004) indica que este tipo de investigaciones son enunciadas como "experimentos de diseño" o "investigaciones de diseño";

Por consiguiente, se adoptan en la propuesta las siguientes fases:

Modificar el diseño

Uno de los objetivos de la investigación del diseño es mejorar la forma como un diseño funciona en la práctica (Collins, 2004). Se puede ver elementos no usados o que entorpecen el proceso, para ello es necesario:

- Identificar elementos del diseño que no están trabajando.
- Describir las razones para hacer las modificaciones.
- Cada modificación se inicia es una nueva etapa para la evaluación de la propuestas.

Collins (2004) enuncia varios aspectos asociados a un diseño eficaz. Para este proyecto se tomaran en cuenta los siguientes:

- Marco teórico.
- Recursos: Software (GeoGebra). Libros de texto.
- Personales: Procesos explicativos donde se ponga en jugo la argumentación (guía del estudiante, procesos de comunicación, visualización en el software).
- Sesiones; dos sesiones la primera de dos horas para solucionar la primera parte

del diseño de la propuestas y una hora para las segunda parte de la propuesta.

- Guías de estudiante: Se diseñaran guías, en la que el proceso explicativo permita dar relevancia al desarrolló y creación de argumentos en el análisis de la interpretación de las representaciones de la solución de inecuaciones, a través de la observación de las representaciones tabulares de algunas funciones y en la aplicación de las funciones para la solución de inecuaciones en software (GeoGebra), para el análisis de los diferentes tipos de gráficos que se puedan obtener.

6.Conclusiones

Se diseñó una propuesta con el fin de proponer una actividad que permita que los estudiantes desarrollen argumentos en su discurso de las diferentes representaciones de la solución de inecuaciones, para ser aplicada en una grupo de estudiantes de grado once, donde se priorizó el uso de herramientas tecnológicas como el software de GeoGebra y la interacción social para la construcción y validación de los argumentos que propone las estudiantes.

En el proceso de argumentación sobre la representación de las soluciones de las inecuaciones, no solo es necesario los recursos como hoja y lápiz, también la interacción social que se da en la participación de las estudiantes dirigida a la argumentación de la solución de las inecuaciones y de manera trascendental el profesor, quien, a partir de las actividades que propone y diseña promueve este proceso, por último resaltar la importación de las herramientas tecnológicas en estas actividades matemática que promueven en las estudiantes el proceso de argumentación a través de analizar, interpretar, comprar y comunicar.

Es necesario la transformación del problema en un lenguaje propio y comprensible, la utilización de las diferentes representaciones de la solución de las inecuaciones que permitió que el grupo de estudiantes de grado once instaurara un lenguaje común y un repertorio compartido sobre la diferentes representaciones de la solución de las inecuaciones asociado a su experiencia y no sistemático desde una sola representación como la algebraica

El uso del GeoGebra como mediador en las actividades, permite que las estudiantes logren tener una mejor visualización de los ejercicios propuestos, pues es a partir del uso del GeoGebra que las estudiantes logran dar la mayoría de argumentos.

Este trabajo fue relevante para el colegio Cooperativo Unión Social de Bogotá, debido a que la estudiantes estaban acostumbradas al uso del tablero solamente, para las estudiantes fue algo novedoso ver un programa en el que se pudiera graficar las funciones y poder interpretar la solución de las inecuaciones, aunque es necesario

aceptar que estas propuesta permite que las estudiantes aproximen sus respuestas más no que sus resultados sean exactos.

Elaborado por:	Jina Paola Triana García María Alejandra Moreno Chavarro
Revisado por:	Alberto Donado Núñez

Fecha de elaboración del Resumen:	10	12	2013

TABLA DE CONTENIDO

TABLA DE FIGURAS

Pág.

TABLA DE TABLAS

Pág.

TABLA DE ANEXOS

Pág.

INTRODUCCIÓN

El siguiente trabajo de grado se titula "una propuesta de enseñanza para la solución de inecuaciones por el método gráfico, a través del software GeoGebra"; busca generar nuevas estrategias de enseñanza, para que las estudiantes de grado once tengan mayor oportunidad de realizar argumentos pertinentes, al solucionar de diferentes maneras los problemas de inecuaciones ya sea usando papel y lápiz o mediante la representación en GeoGebra.

En esta propuesta se han realizado dos actividades, la primera aborda la solución de inecuaciones, con la aplicación de problemas usando el concepto de desigualdad en el conjunto de los números naturales y racionales positivos, de la comparación tabular de la solución de inecuaciones utilizando el concepto de función y el análisis de la representación gráfica de dos funciones para la solución de inecuaciones

La segunda aborda una guía que contiene una tabla que deben las estudiantes diligenciar, por medio de la visualización y el análisis de la representación de funciones a través del software GeoGebra, que le permite al estudiante determinar cuándo una función $f(x)$ está por encima de otra función $g(x)$, $f(x) \geq g(x)$ o por debajo $g(x)$, $f(x) \leq g(x)$ de otra, encontrando los intervalos en donde se presenta alguna de estas situaciones.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 JUSTIFICACIÓN

Como docentes en el área de matemáticas, hemos observado en nuestra práctica docente la dificultad que presentan los estudiantes de grado once en el aprendizaje del concepto de inecuaciones, por tal motivo se hace necesario diseñar actividades para que el estudiante pueda desarrollar la solución de inecuaciones desde diferentes representaciones, en la que le permita llegar a realizar diferentes análisis como lo son: operaciones con valores numéricos y variables y hallar el conjunto de soluciones desde la gráfica. Se tuvo en cuenta lo que dice Alvarenga (2003), quien afirma, que se deben proponer actividades de inecuaciones en la que no solo se involucre la resolución algebraica sino también la resolución gráfica.

Por lo tanto la propuesta diseñada busca que los estudiantes logren desarrollar y verificar las actividades realizadas por medio de la argumentación, utilizado: diferentes representaciones de la solución de inecuaciones y de artefactos como el papel y lápiz y de las herramientas tecnológicas, en este caso el software GeoGebra; se toma como referencia a Hernández (2013) quien afirma que la herramienta de GeoGebra permite justificar los procedimientos y resultados de los contenidos de cualquier área de conocimiento.

1.2 PROBLEMA

Se plantea en el documento de la especialización en educación matemática para el 2013 que se plantará como abreviación EEM 2013 un reto para los estudiantes que es cualificar y ampliar su mirada sobre el quehacer matemático e identificar lo que caracteriza la actividad matemática, especialmente en lo correspondiente a los procesos de argumentación.

Por lo tanto la siguiente propuesta se presenta un diseño que propone actividades para estudiantes de grado once sobre el aprendizaje de la solución de inecuaciones por el método grafico a través del software GeoGebra, que permiten que las estudiantes amplíen su visión sobre las matemáticas y además, desarrollen habilidades argumentativa con el uso y apropiación de recursos tecnológicos, ya que éstos permiten también el desarrollo de habilidades argumentativas (EEM 2013).

En este sentido, la argumentación y prueba contribuye a la formación integral de un docente, por lo tanto consideramos que la argumentación es un objetivo primordial de la educación matemática que permite que los estudiantes establezcan un sistema coherente de relaciones entre las ideas de certeza y validez.

Una de las dificultades en el momento del aprendizaje en los estudiantes de grado once, es la solución de las inecuaciones, ya que usualmente este concepto es enseñado tradicionalmente a través de representaciones algebraicas (Alvarenga 2006) por lo cual los estudiantes realizan la solución de las inecuaciones de una manera sistemática pero no comprenden el verdadero sentido.

Por lo tanto es necesario que en la enseñanza de las soluciones de las inecuaciones se empleen diferentes representaciones de estas, entonces la complejidad del problema del concepto de inecuaciones se facilita su aprendizaje en el uso del lenguaje ordinario, oral y escrito, símbolos específicos, representaciones gráficas, objetos materiales, etc.

Además nos interesa analizar los diversos argumentos que surgen al presentarle al estudiante diferentes representaciones de la solución de inecuaciones (situaciones-problemas, procedimientos, conceptos, proposiciones, argumentaciones, teorías, etc.)

Así esta propuesta busca estrategias mediadas por el software GeoGebra que ayuden a la argumentación de la solución inecuaciones por un método gráfico usando diferentes representaciones como la tabular, situaciones problemas, uso de intervalos, funciones y desigualdades

En la especialización en educación matemática, el campo de estudio de los procesos de argumentación y prueba, tiene como carácter el desarrollo de habilidades argumentativas que cobra una especial relevancia en la adquisición de competencias matemáticas básicas.

1.3 OBJETIVO GENERAL

Diseñar una propuesta de enseñanza en la solución de inecuaciones, implementando herramientas tecnológicas que permita argumentar cada uno de los procedimientos que realiza cada estudiante.

1.3.1 Objetivos específicos

- Hacer uso del software GeoGebra como herramienta, para formular y verificar las conjeturas y afirmaciones que los estudiantes realizan en las actividades sobre inecuaciones propuestas en el aula de clase.
- Diseñar actividades para un grupo de estudiantes de grado once, en el que las estudiantes puedan identificar los procesos tales como: percibir, analizar, representar, comparar, crear, interpretar y comunicar; en la solución de inecuaciones.
- Facilitar el proceso de comparación de la representación tabular a la gráfica del conjunto solución de las inecuaciones.

2. MARCO DE REFERENCIA

Para nadie es secreto, que las inecuaciones están presentes en varias áreas del conocimiento; desde luego en las mismas matemáticas, ingenierías, economía, arquitectura, entre otras.

En el diseño de esta propuesta, se abordará el tema de inecuaciones con expresiones racionales en los conjuntos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$.

Diseñar una propuesta de enseñanza – aprendizaje de este concepto proporciona una oportunidad de observar diversas representaciones que se pueden emplear para solucionar inecuaciones, las cuales exigen que varias nociones matemáticas sean relacionadas y aplicadas coherentemente. Entre estas nociones tenemos la estructura de orden de los números reales, la factorización polinomial, interpretación de raíces, funciones, correspondencia 1 a 1 de los números reales con los puntos de una recta, ecuaciones, gráficos y análisis gráfico de funciones, relaciones de implicación y equivalencia. Para el diseño de estas actividades, se tuvo como referente a Barbosa, Alvarenga, Karly (2003) quienes afirman: "Es necesario proponer actividades, basadas en el esquema de inecuación, que involucran la interpretación y la resolución no solo algebraicas, valorando el análisis de las implicaciones y equivalencias, sino también resoluciones gráficas que propicien el pensamiento flexible" (p.218).

El estudio de las inecuaciones en los colegios normalmente se inicia en el bachillerato con la resolución de inecuaciones lineales y cuadráticas, la mayoría de su enseñanza se convierte solo en la resolución de problemas que se fija en la manipulación algebraica como lo afirma Garrote, M.; Hidalgo, M. J. y Blanco, L. J (2004), al igual Karly B(2003) y Alvarenga (2006) hace notar la limitación que tienen estas técnicas de resolución de inecuaciones que se enseñan tradicionalmente, que obstaculizan las construcciones mentales de los estudiantes.

Este concepto de inecuaciones, permite la solución para el cálculo diferencial de problemas de optimización, el análisis numérico y estudios de funciones.

Para la resoluciones de gráficas que propicien el pensamiento flexible se va a tener en cuenta el uso de herramientas tecnológicas, Hernández (2013) afirma: "El GeoGebra, convenientemente utilizado, permite profundizar en Fundamentos de la matemática escolar pues permite integrar, comprender y utilizar, con facilidad y rapidez, contenidos de distintas áreas para justificar procedimientos y resultados" (p.1). Así en esta propuesta se busca realizar actividades que permitan el aprendizaje del concepto de inecuaciones haciendo uso de diferentes registros semióticos, fundamentada principalmente en el análisis de los registros haciendo uso de herramientas tecnológicas.

Los registros de representaciones semióticas de los que el desarrollo o el enriquecimiento acompañaron el progreso y la extensión de las matemáticas [...] constituyen de una determinada manera estructuras cognoscitivas secundarias. A diferencia de las estructuras cognoscitivas primarias que responden a las funciones cognoscitivas fundamentales que obran a partir del nacimiento, su apropiación por los individuos constituye uno de los mayores objetivos educativos de los que están en juego en la transmisión cultural. Pero esta apropiación no basta. Es su coordinación la que es decisiva. Ya que todo acto de pensamiento depende de la sinergia entre el funcionamiento de varios sistemas productores de representaciones, incluso cuando se moviliza explícitamente un único sistema para producir o transformar las representaciones. (Duval (sf) p. 34)

2.1 DESIGUALDADES

2.1.1 Definición de desigualdades

Una desigualdad es el enunciado de que dos cantidades o expresiones no son iguales. Puede ser el caso que una cantidad sea menor que (<), menor o igual a (≤), mayor que (>) o mayor o igual que (≥) otra cantidad. Swokowski, E, (1981, p110)

2.1.2 Resolución de desigualdades. Inecuaciones

El concepto de desigualdades ha sido utilizado en el transcurso de la historia como las expresiones que indica el orden de las cantidades. En los números reales una cantidad es mayor o menor que otra, se dice que una cantidad a es mayor que otra b cuando la diferencia de $a - b$ es positiva y se dice que una cantidad a es menor que otra b cuando la diferencia de $a - b$ es negativa.

Para la solución de las desigualdades se puede utilizar un método algorítmico con la aplicación de las propiedades de las desigualdades y otra posibilidad es el método gráfico, teniendo en cuenta la analogía que de una desigualdad resulta cuando el signo de igual en una ecuación se reemplaza con un signo de menor que ($<$), mayor que ($>$), menor o igual que ($\leq$) y mayor o igual que ($\geq$).

Para graficar una desigualdad se puede seguir los siguientes pasos para una desigualdad de una variable;

1. Se dibuja la recta numérica.

2. Si el signo de la desigualdad es $\geq$ o $\leq$ sobre la recta numérica se realiza un circulo negro y si el signo de la desigualdad es $>$ o $<$ sobre la recta numérica se realiza un circulo claro
3. Se dibuja una flecha hacia la derecha si el signo de la desigualdad es $>$ o $\geq$ y Se dibuja una flecha hacia la izquierda si el signo de la desigualdad es $<$ o $\leq$

Ejemplo: Resuelva la desigualdad $x - 4 > 7$ y grafique la solución

$$x - 4 > 7$$
$$x - 4 + 4 > 7 + 4$$
$$x > 11$$

La solución es todos los números reales mayores que once.

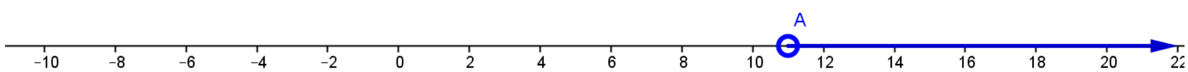


Figura 1: Recta numérica

Para graficar una desigualdad se puede seguir los siguientes pasos para una desigualdad de dos variables;

1. Reemplace el símbolo de la desigualdad con un signo de igualdad (solo es para graficar)
2. Dibuje la gráfica de la ecuación del paso 1. Si la desigualdad original tiene el símbolo $\geq$ o$\leq$, dibuje la gráfica con una línea continua ya que los valores de la ecuación se deben tener en cuenta. Si la desigualdad original tenía el símbolo $>$ o $<$ se dibuja la gráfica de la ecuación por medio de una línea punteada.
3. Seleccione cualquier punto que no esté en la recta y determine si este punto es una solución para la desigualdad original. Si el punto seleccionado es una solución, sombree la región en el lado de la recta que contenga este punto. Si el punto seleccionado no satisface la desigualdad, sombree la región en el lado de la recta que no contiene a este punto.

Por ejemplo: Graficar la desigualdad $y < 2x - 4$

Primero se grafica la ecuación $y = 2x - 4$. Como la desigualdad original tiene un signo de menor que,<, utilizamos una línea punteada al dibujar la gráfica. La línea punteada indica que los puntos de esta recta no son soluciones para la desigualdad $y < 2x - 4$

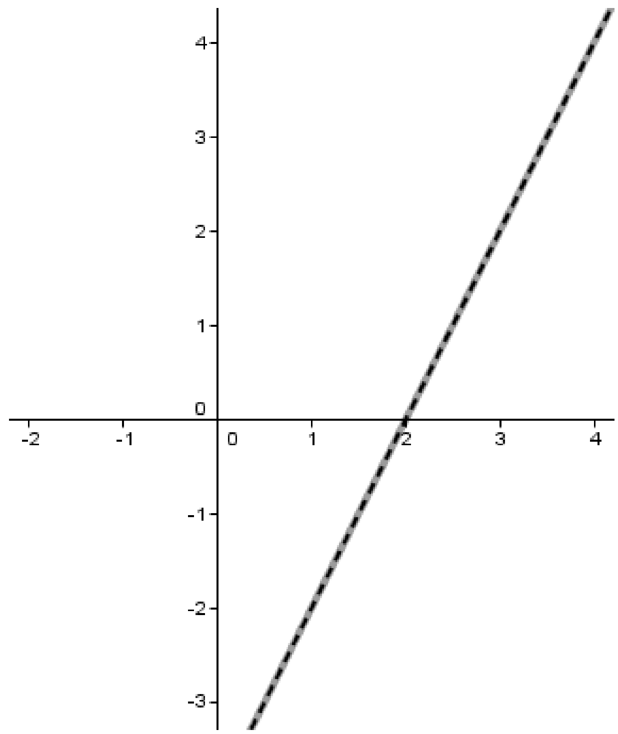


Figura 2: Plano cartesiano

Luego se selecciona un punto que no se encuentre en la recta y se determina si este punto satisface la desigualdad. Con frecuencia el punto más sencillo de usar es el origen $(0,0)$ en la comprobación se utiliza el símbolo $\overset{?}{<}$ hasta que se determine si la proposición es verdadera o falsa.

$$y < 2x - 4$$
$$0 \overset{?}{<} 2(0) - 4$$
$$0 \overset{?}{<} 0 - 4$$
$$0 \overset{?}{<} -4 \quad \text{Falsa}$$

Como 0 no es menor que -4 el punto $(0,0)$ no satisface la desigualdad. Por tanto la solución será todos los puntos en el lado opuesto de la recta.

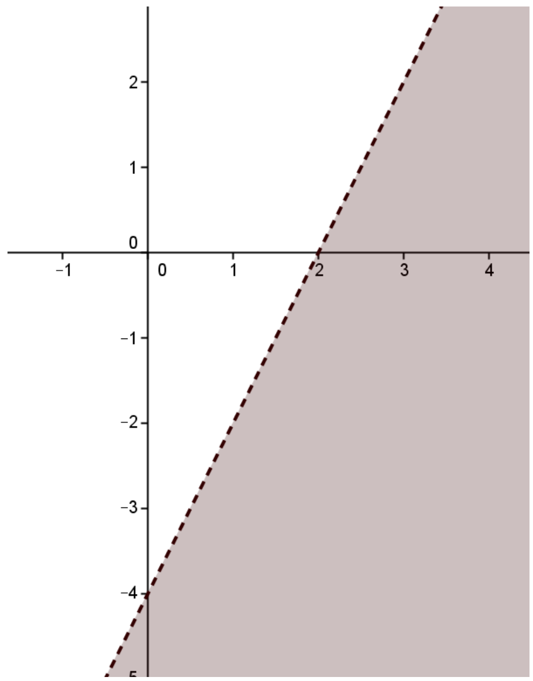


Figura 3: Plano sombreado

Una inecuación es una desigualdad en la que hay una o más cantidades desconocidas (incógnitas) y que solo se verifica para determinados valores de las incógnitas.

Para resolver una inecuación es hallar los valores de las incógnitas que satisfacen la inecuación, los principios en que basa la resolución de las inecuaciones son en las propiedades de las desigualdades.

Dos desigualdades que tienen exactamente el mismo conjunto solución son llamadas desigualdades equivalentes.

Como en las ecuaciones, un método para resolver una desigualdad es reemplazarla por una serie de desigualdades equivalentes, hasta que se obtenga una desigualdad con una solución obvia, tal como $x<3$. Obtenemos desigualdades equivalentes aplicando algunas de las operaciones que se usaron para encontrar ecuaciones equivalentes. Sullivan M, (1997)

2.2 EL SISTEMA DE REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS

Como lo afirma Toulmin (2007a, p. 140), en los conceptos científicos es necesario tener en cuenta tres aspectos diferentes de complejidad para el espacio educativo que son, el lenguaje, las técnicas de representación y los procedimientos de aplicación de la ciencia, al igual que él, Radford (2006a, p. 1, citado en Rojas

(2009, p. 6))afirma que *“diversos investigadores en la actualidad reconocen cada vez más que, dada la generalidad de los objetos matemáticos, la actividad matemática es, ante todo, una actividad simbólica”.* ,Por lo tano según Duval toda actividad matemática implica el uso de representaciones semióticas, debido a que los objetos estudiados no son accesibles al sujeto a través de un contacto directo, sino a partir de representaciones particulares del mismo, destacando cualidades del objeto a su vez señala que las representaciones contienen tres polos constitutivos:

- El objeto representado.
- El contenido de la representación, es decir, lo que una representación particular presenta del objeto.
- La forma de la representación, es decir, su modalidad de registro.

Señala que la comprensión en matemáticas se genera a partir de transformaciones que se realizan sobre el registro de un sistema de representación semiótica. Estas transformaciones son de dos tipos: *los tratamientos y las conversiones.*

La primera es la transformación de una representación en otra representación del mismo registro, así pues una transformación es directamente interna en un registro (Duval 1999).

La segunda es una transformación de la representación del objeto de un registro semiótico de salida en una representación del mismo objeto en registro semiótico de llegada. “La característica de la conversión es conservar la referencia del mismo objeto (objeto en el sentido estricto, situación…), pero sin conservar la explicitación las mismas propiedades de ese objeto” (Duval 1999 p. 45).

Estas características de los conceptos se refieren a aquellos aspectos simbólicos de la explicación científica una de las formas en las que una generación trasmite a otra el contenido de la ciencia, una enculturación. *“Un enfoque de la explicación basados en los procedimientos facilita la comprensión del proceso histórico por el cual los conceptos se trasmiten de una generación a las siguiente”* (Toulmin, 2007).

Este proceso supone un aprendizaje del elemento primario que debe ser aprendido, probado, aplicado, criticado y cambiado–es el repertorio de técnicas, procedimientos y habilidades intelectuales y métodos de representación que se emplean para dar explicaciones de sucesos y fenómenos dentro del ámbito de la ciencia involucrada. De ahí la importancia del lenguaje y la argumentación en la enseñanza de las ciencias.

2.3 ARGUMENTACIÓN

El modelo primitivo de argumentación de Toulmin se basa en tres componentes básicos denominados datos, afirmaciones y garantes; de manera resumida, el modelo se basa en hechos dados (los datos), de los que ya se ha establecido plenamente su validez y a partir de los cuales obtenemos conclusiones (las afirmaciones), sustentando este paso de datos a afirmaciones a partir de proposiciones (garantes) que funcionan como puente entre ellos (Toulmin 2003).

2.4 USO DE HERRAMIENTAS TECNOLÓGICAS

Como se asocian a las desigualdades funciones, se utilizará el software GeoGebra para graficarlas y proponer actividades en las que ellas puedan proponer el conjunto solución.

Teniendo en cuenta las formas de representar el conjunto solución de una inecuación a través de la representación gráfica de las soluciones de las inecuaciones que se van a desarrollar en la propuesta se empleara el GeoGebra.

En comparación con el mundo clásico de figuras de papel y lápiz, la novedad de un entorno dinámico consiste en la posibilidad directa de la manipulación de sus figuras y su visualización, teniendo en cuenta que se concibe en términos del sistema de la lógica de la geometría euclidiana. La dinámica del programa GeoGebra, tiene la función de arrastrar, conserva su lógica intrínseca, es decir, la lógica de su construcción; los elementos de una figura están relacionados en una jerarquía de propiedades, y esta jerarquía corresponde a una relación de condicionalidad lógica. Mariotti, M.A. (2000).

Algunos autores hablan directamente de la idea de la mediación de artefactos en el aula, como lo es el software dinámico que está relacionado con la posibilidad de crear una comunicación entre el profesor y el alumno en base a un lenguaje común, la potencialidad de este software GeoGebra está relacionada con la construcción de los significados matemáticos como lo es las inecuaciones, que pueden ser percibidas por los alumnos a través de la interacción con el programa. Mariotti, M.A. (2000).

En general, el medio ambiente que se construye por medio de la utilización del software dinámico ofrece un complejo sistema de señales para apoyar el proceso de mediación entre el concepto y el estudiante, ya que puede ser realizado en las actividades sociales de la clase.

El hecho de que un comando se activa actuando sobre una etiqueta, identificado por el "nombre" de una propiedad geométrica, determina el uso de un signo que funciona como control y como organizador de acciones relacionadas con la tarea, es decir, procedimientos de construcción. Por otra parte, el hecho de que los comandos disponibles pueden reconocerse como propiedades teóricas, que corresponden a los axiomas o teoremas de una teoría, hace que el procedimiento en sí mismo permita emplear teoremas y que el estudiante los utilice. Mariotti, M.A. (2000).

Los alumnos autónomamente crean y utilizan propiedades del software GeoGebra, que permiten una evolución en su discurso en el momento de la construcción y solución de las actividades, realizando diferentes procesos como el de conjeturación, comunicación, demostración, sistematizar pruebas como deducción formal, que se les da sentido y valor. Mariotti, M.A. (2000).

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores y además de que estamos interesados en graficar funciones para encontrar conjunto solución de una desigualdad, utilizaremos le software GeoGebra para diseñar algunas de las actividades propuestas en el trabajo.

3. METODOLOGÍA

La metodología que vamos a utilizar para nuestro proyecto, se identifica con Collins (2004) quien indica que este tipo de investigaciones son enunciadas como “experimentos de diseño” o “investigaciones de diseño”; este enfoque de un perfeccionamiento progresivo en el diseño, consiste en colocar una primera versión de un diseño en el mundo para ver cómo funciona, sugiriendo que los investigadores documenten sus diseños en detalle, registrando todos los cambios importantes en el diseño. Estos cambios de diseño marcan las fronteras entre las fases y dotan de credibilidad de las decisiones de diseño y la calidad de las lecciones aprendidas de la investigación.

Por consiguiente, se adoptan en la propuesta las siguientes fases:

Modificar el diseño

Uno de los objetivos de la investigación del diseño es mejorar la forma como un diseño funciona en la práctica (Collins, 2004). Se puede ver elementos no usados o que entorpecen el proceso, para ello es necesario:

- Identificar elementos del diseño que no están trabajando.
- Describir las razones para hacer las modificaciones.
- Cada modificación se inicia es una nueva etapa para la evaluación de la propuestas.

Collins (2004) enuncia varios aspectos asociados a un diseño eficaz. Para este proyecto se tomara en cuenta los siguientes:

- Marco teórico.
- Recursos: Software (GeoGebra). Libros de matemáticas grado once.
- Personales: Procesos explicativos donde se ponga en jugo la argumentación (guía del estudiante, procesos de comunicación, visualización en el software)
- Sesiones: dos sesiones. La primera de dos horas para solucionar la primera parte del diseño de la propuesta y una hora para la segunda parte de la propuesta.

- Guías de estudiante: Se diseñaran guías, en la que el proceso explicativo permita dar relevancia al desarrolló y creación de argumentos en el análisis de la interpretación de las representaciones de la solución de inecuaciones, a través de la observación de las representaciones tabulares de algunas funciones y en la aplicación de las funciones para la solución de inecuaciones en software (GeoGebra), para el análisis de los diferentes tipos de gráficos que se puedan obtener.

Por otra parte expone una serie de variables dependientes e independientes, sobre el control y análisis de este diseño, entre la cuales se destacan (para esta propuesta)

- Las variables de aprendizaje: por ejemplo, disposiciones, conceptos previos y estrategias de aprendizaje.
- Las variables del sistema: la facilidad de la visualización y el análisis por parte de los estudiantes.
- Apoyo técnico: por ejemplo, las guías y el computador

3.1 PRESENTACIÓN DE INFORME SOBRE LA INVESTIGACIÓN DEL DISEÑO

Para presentar el informe de los resultados obtenidos en esta propuesta, se tendrá en cuanta la solución de las guías en las sesiones propuestas y se pedirá a las estudiantes que consignen los procedimientos realizados en cada una de las actividades, esto con el objetivo de lograr percibir y analizar los argumentos que realizan cada una de ellas.

Para el análisis de las guías de las dos actividades y el video de la segunda actividad tomaremos a Toulmin (2003), quien plantea el modelo en el cual analizaremos nuestro trabajo.

Una vez hecho el análisis, se realizará las conclusiones sobre los argumentos que generaron cada uno de los puntos de la actividad detallando los aspectos a mejorar.

4. DISEÑO DE LA PROPUESTA

4.1 INTRODUCCIÓN A LAS INECUACIONES

ACTIVIDAD 1

Recursos: Guías de la actividad propuesta
Tiempo: 2 horas

Ejercicio 1

4.1.1 Buscando soluciones en los naturales

Objetivo: Permitir que el estudiante realice un conteo en los números naturales que le proporcionen dos posibles soluciones del problema, teniendo en cuenta las condiciones estipuladas.

Objetivos específicos: Que el estudiante efectué diferentes conteos a través de una tabla, para que se pueda cumplir la condición que propone el problema en los números naturales y que le permita establecer de una manera empírica la inecuación $(2x + x \leq 7)$

Lea detenidamente cada uno de los siguientes puntos y luego resuelva:

1. En un laboratorio se sabe que el doble del número de científicas más el número de científicos es menor o igual que siete. ¿Cuántas combinaciones posibles de científicos y científicas hay en el laboratorio?
Tomado de: http://maralboran.org/wikipedia/index.php/Inecuaciones_(4%C2%BAESO-B)

Tabla 1. Científicos.

Cantidad Hombres	**Cantidad mujeres**

Ejercicio 2

4.1.2 Soluciones con números racionales positivos

Objetivo: Permitir que el estudiante pueda explorar con los números racionales, los distintos pesos que pueden tener las maletas y que cumplan con las condiciones dadas, a través de una representación tabular.

Objetivos específicos: Teniendo en cuenta el contexto del problema, el estudiante determina los diferentes pesos que puede tener las maletas rojas, para completar la tabla, de esta manera puede establecer empíricamente la inecuación $(x + y + 10 \leq 24)$ utilizando los números racionales, y poder obtener seis posibles soluciones, aunque estos no son los únicos resultados que se pueden encontrar.

Un hombre va de viaje. La compañía aérea dónde viajará, le permite facturar equipajes de máximo 24 kg. El viajero ha facturado una maleta que pesa 10kg y dos bolsas de diferente peso.
Tomado de: http://maralboran.org/wikipedia/index.php/Inecuaciones_(4%C2%BAESO-B)

Figura 4: Balanza

Figura 5: Persona

Complete la tabla con los posibles valores para cada una de las bolsas.

Tabla 2. *Viajero.*

Bolsa roja 1	**Bolsa roja 2**	**Bolsa azul**	**Total**
	3	10	
3,5		10	
	7	10	
2.5		10	
		10	
		10	

4.2 ANÁLISIS TABULAR DE LAS SOLUCIONES DE LAS INECUACIONES.

4.2.1 Análisis de funciones teniendo en cuenta la variable

Ejercicio 3

Objetivo: *Análisis de tablas.* Completar la tabla teniendo en cuenta las funciones dadas, a través de procesos aritméticos, identificando características de la tabla como lo es; hacer comparaciones entre las columnas, establecer el análisis de datos de las tablas en el conjunto de los números enteros, realizar inferencias de los datos en el conjunto de los números racionales.

Objetivos específicos: Construir la tabla teniendo en cuenta las funciones dadas y los posibles valores para x, a través de la solución fácil de los algoritmos, al completar la tabla puede identificar que existen algunas características como; cuando $x = 1$ los datos obtenidos son los mismos para las dos funciones, luego de esto procede a solucionar las preguntas.

2. Construye la siguiente tabla con los valores de las siguientes funciones las expresiones $h(x) = x - 4$ e $i(x) = 3x - 6$, para números enteros entre *–5 y 5*.

Tabla 3. *Funciones.*

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{h(x) = x - 4}$	$\mathbf{i(x) = 3x - 6}$
-5		
-4		
-3		
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		
4		
5		

a) ¿Para cuáles valores de la tabla tenemos $h(x) = x - 4$ es menor o igual $i(x) = 3x - 6$?

b) La tabla puede sugerir una respuesta a la pregunta: ¿Para cuál conjunto de números reales se cumple que $x - 4 \leq 3x - 6$? ¿Cuál es la respuesta? Justifique.

c) Si *x* = *0.99*, entonces se cumple $x - 4 \leq 3x - 6$. ¿Esta afirmación es verdadera (V) o falsa (F)?
d) Si *x* = *1* entonces se cumple $x - 4 \leq 3x - 6$. ¿Esta afirmación es verdadera (V) o falsa (F)?
e) Si *x* = *1,01* entonces se cumple $x - 4 \leq 3x - 6$. ¿Esta afirmación es verdadera (V) o falsa (F)?
f) Tome un valor positivo para cuando *x* toma valores relativamente grandes y determine si se cumple $x - 4 \leq 3x - 6$.
g) ¿para qué números se cumple en los reales la inecuación? Justifique

4.2.2 Análisis de gráficas en un mismo plano de la solución de las inecuaciones.

Ejercicio 4

Objetivo: *Análisis de gráficas.* Por medio de una gráfica que representa dos funciones de diferente grado, el estudiante puede hacer procesos de analizar, representar, comparar, interpretar y comunicar la solución de diferentes preguntas que hacen referencia a las gráficas mostradas.

3. Dados los gráficos de las funciones *f y g,* encuentre y colorea la región de la gráfica donde $f(x)$ está por encima de $g(x)$.

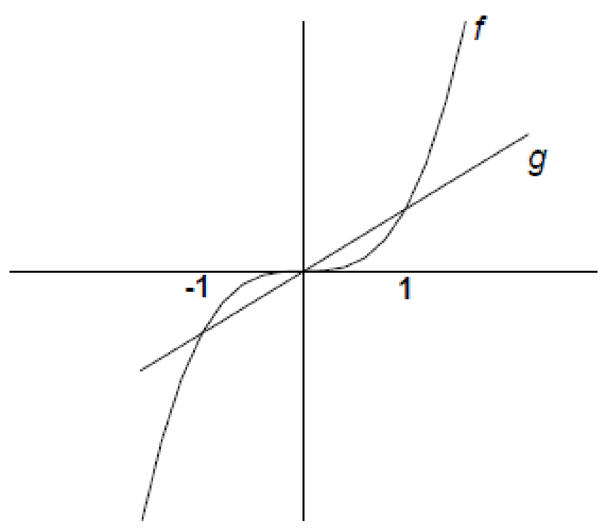


Figura 6: Funciones

Teniendo en cuenta lo obtenido responda las siguientes preguntas

a) ¿Cuántas regiones quedaron coloreadas?
b) ¿Determine las coordenadas de los puntos donde *f* y *g* se interseca?

c) Por cada punto de intersección entre *f* y *g*, trace una recta vertical que pase por dicho punto.
d) ¿En cuántas partes quedó dividido el eje *x*?
e) ¿En cuáles de estas divisiones se encuentran las regiones coloreadas?
f) Escriba en dónde inicia y finaliza para el eje *x* esta regiones coloreadas.
g) Escribir en forma de intervalos las regiones coloreadas.
h) ¿Para cuales valores de x se cumple que $f(x) > g(x)$?

4.3 RECURSO TECNOLÓGICO EN LA SOLUCIÓN DE INECUACIONES

ACTIVIDAD 2

Recursos: Guías de la actividad propuesta
Software GeoGebra
Tiempo: 2 horas

Objetivo

Realizar un análisis sobre los resultados que se obtiene en el software

1. En el programa Geogebra, grafique cada una de las funciones que se encuentran en la guía, complete la tabla y escriba las respuestas en forma de intervalo.

Tabla 4. *Gráficas de GeoGebra.*

Función $\boldsymbol{f(x)}$	**Función $\boldsymbol{g(x)}$**	**Para que valores de $\boldsymbol{x}$ se cumple que $\boldsymbol{f(x) < g(x)}$**	**Para que valores de $\boldsymbol{x}$ se cumple que $\boldsymbol{f(x) > g(x)}$**
$\boldsymbol{f(x) = x^3}$	$g(x) = x + 1$		
$\boldsymbol{f(x) = x^6 - 4}$	$g(x) = -x^4$		
$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x - 1}}$	$g(x) = x^2 - 2$		

5. ANÁLISIS DEL EXPERIMENTO

El diseño de experimentos es una forma de llevar a cabo la aplicación formativa de la propuesta, que se establecen en entornos de enseñanza a partir de métodos experimentales para la mejora de las prácticas educativas.

Los cambios del diseño marcan fronteras entre las fases y dotan de credibilidad y calidad las lecciones aprendidas. Por lo tanto el siguiente diseño está estructurado para generar un ambiente de aprendizaje y comunicación.

Diseño del experimento de la actividad 1

Población*:* esta primera actividad buscaba que las estudiantes se relacionaran con las diferentes representaciones de la solución de inecuaciones. La actividad se aplicó a un total de 25 estudiantes de grado once, con edades entre los 15 y 17 años, cuyos conocimientos previos son los números reales, funciones, límites y derivadas; la metodología que usualmente se utiliza es la tradicional.

Recursos: Guía del estudiante y hoja para solucionar.

Interacción Social: Trabajo en el aula con el profesor:

Se realizó la implementación de la actividad 1 en las tres primeras horas de clase, una estudiante leía cada punto de la actividad, para interpretar y analizar la solución de cada uno de los puntos planteados de manera individual y grupal, lo cual promovió el debate en salón de clase sobre la validación de cada una de las soluciones de la actividad propuestas por las estudiantes.

Las normas sociales que se establecieron en esta clase fueron:

- Participación.
- Respetar la palabra de los compañeros de clase.
- Buena actitud para la realización del trabajo en grupo.
- Desarrollar la guía en la hoja de solución.

Rol del profesor

Según Toulmin (2007) es parte fundamental en el proceso de aprendizaje la validez de las proposiciones, esta debe ser establecida para garantizar efectivamente la conclusión, es decir que en el espacio de educaciones necesario establecer la garantía de los argumentos, esta puede surgir al responder los estudiantes preguntas ¿Cómo llegamos acá? ¿Qué tenemos? Finalmente la conclusión puede construirse como la respuesta a la pregunta ¿qué se está tratando de probar? Así a partir de tres preguntas diferentes los alumnos están en condiciones de argumentar de acuerdo con la secuencia de pensamiento: a partir de lo que tenemos, qué se quiere probar y cómo podemos hacerlo, o también qué se quiere probar, a partir de lo que tenemos y cómo podemos hacerlo.

Así, el profesor actúo como orientador, gestor instruido, y guio el proceso de los estudiantes por medio de preguntas que generaran posibles argumentos dentro en cada una de las actividades propuestas

.

6. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DE LA APLICACIÓN DE LA PROPUESTA

Análisis del primer punto

El enunciado de situaciones del contexto cotidiano de las estudiantes permite que apliquen el concepto de inecuaciones para solucionarlas de manera intuitiva.

Teniendo en cuenta el enunciado, que les daba a conocer una situación que tenía una condición específica, las estudiantes pudieron completar la tabla teniendo en cuenta que hay el doble de las mujeres científica que de científicos, es decir, que con esta actividad las estudiantes pueden pasar una situación en un lenguaje escrito a un lenguaje aritmético que cumpla con las misma condiciones, Según Duval (1999) la utilización en paralelo de representaciones diferentes, favorecería la comprensión de los estudiantes.

Para solucionar esta situación las estudiantes realizaron un conteo en los números naturales, tal y como se muestra en la siguiente tabla.

Cantidad Hombres	Cantidad mujeres
2	4
1.	2

Teniendo en cuenta Toulmin (2007) en esta actividad se puede evidenciar algunos aspectos señalados en nuestro marco teórico como importantes, que se refiere a que se debe integrar la complejidad del concepto científico que son; el lenguaje que se desarrolla en las desigualdades que hacen referencia al orden de cantidades por medio de la comparación, algunas técnicas de las representaciones discursivas producidas en un lenguaje, es decir, aquéllas de las que la organización interna depende de normas sintácticas, y las representaciones no discursivas que utilizan las propiedades aritméticas con referente a las desigualdades. Duval (1999)

El primer aspecto son las técnicas de las representaciones discursivas producidas en un lenguaje, en las que se evidencian los cambios de representación del lenguaje aritmético, el uso paralelo de distintos tipos de representaciones permite volver más accesible el concepto de desigualdades en este primer punto de la actividad que permiten que las estudiantes den las explicaciones de los hechos abordados dentro del ejercicio.

El segundo aspecto son los procedimientos de aplicación, en el que se relaciona, como el estudiante aplica los aspectos simbólicos del concepto de inecuación a una situación del mundo real.

Por lo cual las estudiantes en el desarrollo de la actividad, pudieron plantear posibles soluciones a la cantidad de científicos y científicas que se podían encontrar en el laboratorio, sus argumentos se basaban en tres posibles soluciones que son; dos hombres y cuatro mujeres, un hombre y dos mujeres, ningún hombre y una mujer.

En la solución ningún hombre y una mujer, las estudiantes hacen un proceso explicativo de que no pueden existir hombres, y que podría ser otra solución, pero se evidencia un problema en el que ellas sustentan que el doble de que no exista hombres es uno, por lo tanto hay una científica.

Se identifica que existe una dificultad en el enunciado, ya que no está estipulado que debe existir al menos un hombre científico, este argumento fue socializado durante clase qué permitió ver las diferentes interpretaciones que pueden surgir al desarrollarlo, pues no siempre es la que propone el profesor; los estudiantes sustentaban, que como en la situación no explicitaba la cantidad inicial de científicos y científicas, ellas podían colocar el número que cumpliera la condición dada, evidenciando diferentes argumentos, ya que están dando una variedad de soluciones teniendo en cuenta las condiciones dadas.

Las estudiantes por medio de esta situación pudieron realizar los siguientes procesos:

- Análisis del enunciado para poder completar la tabla teniendo en cuenta las condiciones para hacerlo.
- representaciones discursivas producidas en un lenguaje y las representaciones no discursivas
- Comparan los resultados obtenidos de las distintas columnas hallando otros posibles resultados no contemplados por el profesor.
- Comunican que las posibles soluciones son dos hombres y cuatro mujeres o un hombre y dos mujeres en su proceso utilizando intuitivamente el concepto de las desigualdades.

En las posibles respuestas que surgen en la interpretación de esta actividad, se pudo evidenciar diferentes argumentos, pues las afirmaciones que realizan las estudiantes resultan ser verdaderas cuando su garante es la condición establecida.

En la solución se presenta que puede haber ningún hombre y una mujer, en la actividad de enumeración, para establecer el doble de cero en la correspondencia termino a término entre una serie numérica, las estudiantes son capaces de establecer el doble de 1, 2 pero al establecer esta relación con el cero hay una dificultad ligada al conteo y la concepto del doble de un número.

Ya que la relación *doble que* implica la noción de que uno de estos números debe ser mayor que el otro, no igual, promovió que las estudiantes relacionaran:

$$Numero \quad \rightarrow Doble\ del\ numero$$

1	2
2	4
3	6

Y concluyeran que:

$$Numero \quad \rightarrow Doble\ del\ numero$$

0	1

Sin tener en cuenta la naturaleza del concepto del cero y la relación *doble que*, para este número.

Teniendo en cuenta lo anterior podemos evidenciar el siguiente argumento:

DATO

El doble del número de científicas más el número de científicos es menor o igual que siete son;

Cantidad Hombres	Cantidad mujeres
2	4
1.	2

AFIRMACIÓN

Las posibles soluciones son dos hombres y cuatro mujeres o un hombre y dos mujeres

GARANTE

Para que las estudiantes pudieran llegar a esta afirmación de los datos, creemos que el análisis que las estudiantes realizaron sobre este ejercicio, es que la sumatoria de cada una de las filas es menor que 7 además que la cantidad de los hombre es la mitad de las mujeres por lo tanto cumple con la condición del problema que dice que el número de científicas es el doble del números de científicos

Análisis del segundo punto

El desarrollo de actividades que tienen diversas soluciones les permitieron a las estudiantes a través de la comunicación entre sus compañeras evidenciar las infinitas soluciones que tienen algunos ejercicios que implican el concepto de inecuaciones.

En esta actividad se evidencio que 18 estudiantes que es el equivalente al 72% que desarrollaron la actividad, pudieron resolver esta actividad tratando de aproximar su resultados al peso de 24 kilogramos y 7 de las estudiantes equivalente al 28%, resolvieron la actividad igualando siempre a 24 kilogramos, con estos resultados se puede identificar que el 72% de las estudiantes en el momento de solucionar la actividad pusieron en práctica el concepto de inecuaciones, evidenciando que hay una variable que puede ser modificada teniendo en cuenta las condiciones del problema y por este motivo pueden encontrar infinitas respuestas, mientras que el otro 28% de las estudiantes usaron el concepto de igualdad en el momento de completar la tabla, por lo tanto no hay una variedad en la solución, teniendo siempre una única solución en cada fila, como se puede observar en la siguiente imagen.

Bolsa roja 1	Bolsa roja 2	Bolsa azul	Total
11	3	10	24
3,5	10,5	10	24
7	7	10	24
2.5	11,5	10	24
4	10	10	24
9	5	10	24

Las estudiantes pudieron pasar de una situación de una representación discursiva producida en un lenguaje a las representaciones no discursivas que utilizan las propiedades de las desigualdades enfocada a las inecuaciones ya que hay una cantidad desconocida y que solo se verifica para determinados valores, completando una tabla con los posibles resultados. Obteniendo que el 72% de las estudiantes la completan haciendo referencia a la condición menor e igual teniendo en cuenta el conjunto numérico racional; como se muestra en la siguiente tabla.

Bolsa roja 1	Bolsa roja 2	Bolsa azul	Total
2.5	3	10	15,5
3,5	5	10	18,5
1,5	7	10	18,5
2.5	9	10	21,5
3,5	10	10	23,5
1,5	12	10	23,5

Y el 28% de las estudiantes desarrollaron este ejercicio completando el peso de cada bolsa a 24, haciendo uso de los números racionales de tal forma que se pudiera completar con la condición de 24 kg y hacen uso del concepto de igualdad.

En este ejercicio, se puede evidenciar diferentes aspectos de complejidad que señala Toulmin (2007), el primero es el lenguaje matemático que se utiliza para introducir las inecuaciones como es la búsqueda de valores de una cantidad desconocida que permita cumplir con la condición de menor o igual que 24 kg, la segunda son las técnicas de representación discursivas producidas en un lenguaje al tránsito de las representaciones no discursivas que permiten hallar los valores de la cantidad desconocida que satisfacen la inecuación intuitiva que propone la situación y la tercera son los procedimientos que se aplican para solucionarla, que son aquellos principios en que se basa la resolución de la inecuación que es en las propiedades de las desigualdades como se evidencia en la siguiente tabla para cada fila. Teniendo en cuenta que es un situación problema de la cotidianidad de las estudiantes.

Bolsa roja 1	Bolsa roja 2	Bolsa Azul	Total
x	3	10	$x+3+10 \leq 24$
3,5	x	10	$3{,}5+x+10 \leq 24$
x	7	10	$x+7+10 \leq 24$
2,5	x	10	$2{,}5+x+10 \leq 24$
x	y	10	$x+y+10 \leq 24$
x	y	10	$x+y+10 \leq 24$

Las estudiantes logran hacer un proceso de conjeturación al poder dar diferentes posibles resultados al completar la tabla y de esta manera, aunque no todas estas conjeturas eran verdaderas, buscan desarrollar habilidades de razonamiento en la actividad propuesta sobre inecuaciones algunas las conjeturas encontradas fueron:

Bolsa roja 1	Bolsa roja 2	Bolsa azul	Total
11	3	10	24
3,5	10.5	10	24
7	7	10	24
2.5	11.5	10	24
23	1	10	24
12	12	10	24

En esta tabla se puede evidenciar una afirmación falsa.

Bolsa roja 1	Bolsa roja 2	Bolsa azul	Total
11	3	10	24 Kg
3,5	10,5	10	24 Kg
2	7	10	19 Kg
2.5	11,5	10	24 Kg
4	3	10	17 Kg
4	10	10	24 Kg

En esta tabla se evidencia diferentes afirmaciones teniendo en cuenta la condición menor o igual que 24 kg y sus resultados están dados en el conjunto numérico de los naturales

Bolsa roja 1	Bolsa roja 2	Bolsa azul	Total
11	3	10	24.
3,5	10,5	10	24.
8	7	10	24.
2.5	11,5.	10	24
9	10	10	24.
5	9.	10	24.

En esta tabla se evidencia diferentes afirmaciones teniendo en cuenta la condición igual a 24 kg y sus resultados están dados en el conjunto numérico de los naturales (Distintas a las anteriores tablas).

Bolsa roja 1	Bolsa roja 2	Bolsa azul	Total
11	3	10	24
3,5	10,5	10	24
7	7	10	24
2.5	11,5	10	24
4	10	10	24
6	8	10	24

En esta tabla se evidencia diferentes afirmaciones teniendo en cuenta la condición igual a 24 kg y sus resultados están dados en el conjunto numérico de los naturales (Distintas a las anteriores tablas).

Bolsa roja 1	Bolsa roja 2	Bolsa azul	Total
2.5	3	10	15.5
3,5	5	10	18,5
1,5	7	10	18,5
2.5	9	10	21,5
3,5	10	10	23,5
1,5	12	10	23,5

En esta tabla se evidencia diferentes afirmaciones teniendo en cuenta la condición menor a 24 kg y sus resultados están dados en el conjunto numérico de los racionales y sus cantidades desconocidas están dadas en los números naturales y racionales (Distintas a las anteriores tablas).

Bolsa roja 1	Bolsa roja 2	Bolsa azul	Total
11	3	10	24 kg
3,5	10.5.	10	24 kg
2.	7	10	19 kg
2.5	11.5	10	24. kg
4	3	10	17 kg
4	10	10	24 kg.

En esta tabla se evidencia diferentes afirmaciones teniendo en cuenta la condición menor o igual a 24 kg y sus resultados están dados en el conjunto numérico de los naturales y sus cantidades desconocidas están dadas en los números naturales y racionales (Distintas a las anteriores tablas).

Bolsa roja 1	Bolsa roja 2	Bolsa azul	Total
11	3	10	24
3,5	10,5	10	24
7	7	10	24
2.5	11,5	10	24
4	10	10	24
9	5	10	24

En esta tabla se evidencia diferentes afirmaciones teniendo en cuenta la condición igual a 24 kg y sus resultados están dados en el conjunto numérico de los naturales aunque en algunas de las cantidades desconocidas se hace uso de los números racionales (Distintas a las anteriores tablas).

Bolsa roja 1	Bolsa roja 2	Bolsa azul	Total
11.	3	10	24.
3,5	2	10	15,5
8	7	10	24.
2.5	5.	10	17,5
4	10	10	24
3	5	10	18

En esta tabla se evidencia diferentes afirmaciones teniendo en cuenta la condición menor o igual a 24 kg y sus resultados están dados en el conjunto numérico de los racionales y sus cantidades desconocidas están dadas en los números naturales (Distintas a las anteriores tablas).

Las argumentaciones en esta actividad, surgen cuando ellas logran encontrar varias posibilidades de resultado en el peso de las maletas, no todas colocaron los mismos valores, y su sustentación era que como debía ser menor o igual a 24, habían infinitas posibilidades teniendo en cuenta los números racionales para el peso de cada una de las maletas; aquí las estudiantes logran percibir regularidades y relaciones al tratar de dar posibles resultados que cumplieran la condición dada, sus explicaciones hacen referencia al concepto de inecuaciones, cuando se podían resolver aproximándose o completando el peso de 24 kilogramos.

Las estudiantes por medio de esta situación pudieron realizar los siguientes procesos:

- Análisis del enunciado para poder completar la tabla teniendo en cuenta las condiciones para hacerlo, es decir que el peso de las tres maletas no pueden superar los 24 kilogramos.

- Representaciones producidas en un lenguaje matemático al tránsito de las representaciones no discursivas que permiten hallar los valores de la cantidad desconocida que satisfacen la inecuación intuitiva que propone la situación.

- Comparan los resultados obtenidos de las distintas columnas y los resultados obtenidos por sus compañeras, lo que les permitió comprender que existen infinitas soluciones para esta situación.

- Comunican las distintas soluciones encontradas y la validez de estas a través de sus argumentos de que todas sus posibilidades cumplen la condición menor o igual que 24.

Teniendo en cuenta lo anterior y la socialización en clase podemos evidenciar el siguiente argumento:

DATO
En el momento en que las estudiantes socializaron sus respuestas.

Bolsa roja 1	Bolsa roja 2	Bolsa azul	Total
11	3	10	24
3,5	10.5	10	24
7	7	10	24
2.5	11.5	10	24
23	1	10	24
12	12	10	24

Bolsa roja 1	Bolsa roja 2	Bolsa azul	Total
11	3	10	24 Kg
3,5	10,5	10	24 Kg
2	7	10	19 Kg
2.5	11,5	10	24 Kg
4	3	10	17 Kg
4	10	10	24 Kg

Bolsa roja 1	Bolsa roja 2	Bolsa azul	Total
11	3	10	24
3,5	10,5	10	24
7	7	10	24
2.5	11,5	10	24
4	10	10	24
9	5	10	24

Bolsa roja 1	Bolsa roja 2	Bolsa azul	Total
11	3	10	24.
3,5	10,5	10	24.
8	7	10	24.
2.5	11,5.	10	24
4	10	10	24.
5	9.	10	24.

Bolsa roja 1	Bolsa roja 2	Bolsa azul	Total
11	3	10	24
3,5	10,5	10	24
7	7	10	24
2.5	11,5	10	24
4	10	10	24
6	8	10	24

Bolsa roja 1	Bolsa roja 2	Bolsa azul	Total
11	3	10	24
3,5	2	10	15,5
8	7	10	24
2.5	5	10	17,5
4	10	10	24
3	5	10	18

AFIRMACIÓN

Existen infinitas soluciones.

GARANTE

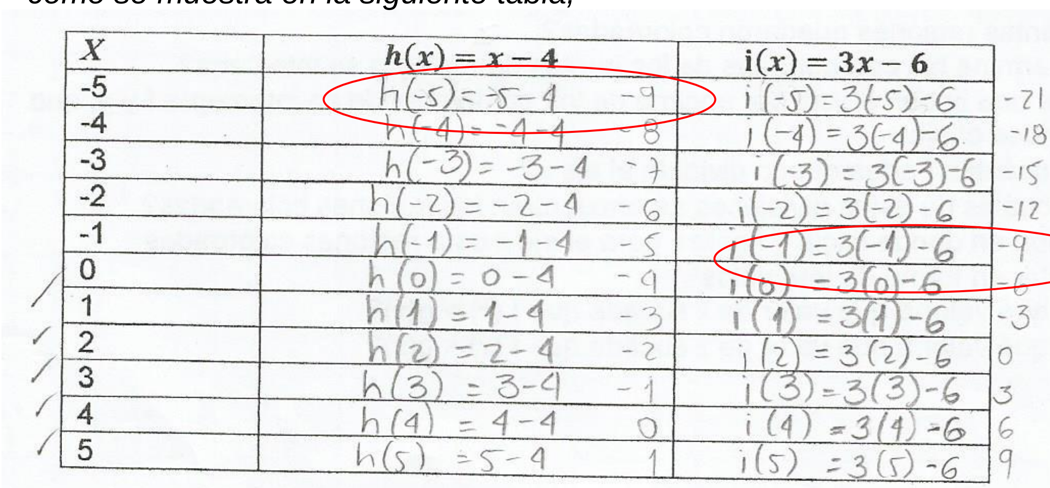
Para que las estudiantes pudieran evidenciar las infinitas soluciones de este punto, desde la observación realizada en clase, surgió en la socialización de las respuestas de cada una de las estudiantes donde ellas evidenciaron que cada una había solucionado de diferentes formas esta tabla y que todas estas posibles soluciones son válidas, ya que si suman cada uno de los datos numéricos de las filas de las tablas, esta sumatoria daba menor o igual que 24 y cumplía con la condición del problema.

Análisis del tercer punto

El análisis de inecuaciones por medio de funciones en un registro tabular permitió a las estudiantes realizaran conversiones y trasformaciones de representaciones para validar sus procesos utilizando conceptos previos.

Teniendo en cuenta la tabla, las estudiantes la completaron de acuerdo a las funciones y a los valores de manera fácil, ya que el proceso aritmético era de operaciones básicas, luego de esto las estudiantes dieron solución a las preguntas que le exigían un análisis de la representación tabular.

Al inicio de la actividad se tuvieron algunos inconvenientes, debido que en el enunciado ¿Para cuáles valores de esta tabla tenemos $h(x) = x - 4$ es menor o igual $i(x) = 3x - 6$?; las estudiantes observaron los resultados obtenidos en las dos columnas, sin tener en cuenta la fila a la que pertenecían esos resultados *tal como se muestra en la siguiente tabla;*



X	$h(x) = x - 4$		$i(x) = 3x - 6$	
-5	h(-5) = -5-4	-9	i(-5) = 3(-5)-6	-21
-4	h(-4) = -4-4	-8	i(-4) = 3(-4)-6	-18
-3	h(-3) = -3-4	-7	i(-3) = 3(-3)-6	-15
-2	h(-2) = -2-4	-6	i(-2) = 3(-2)-6	-12
-1	h(-1) = -1-4	-5	i(-1) = 3(-1)-6	-9
0	h(0) = 0-4	-4	i(0) = 3(0)-6	-6
1	h(1) = 1-4	-3	i(1) = 3(1)-6	-3
2	h(2) = 2-4	-2	i(2) = 3(2)-6	0
3	h(3) = 3-4	-1	i(3) = 3(3)-6	3
4	h(4) = 4-4	0	i(4) = 3(4)-6	6
5	h(5) = 5-4	1	i(5) = 3(5)-6	9

Como se puede apreciar, en este caso las estudiantes compararon los resultados de la primera columna cuando *x* valía -5 en $h(x) = x - 4$ con la tercera columna cuando *x* valía -1 en $i(x) = 3x - 6$; sin tener en cuenta la primera columna para la comparación.

El docente al ver esta dificultad, interviene en la socialización realizando preguntas ¿En ese momento las dos funciones son iguales o los resultados de las ecuaciones de las funciones son iguales? ¿Qué significa gráficamente que dos funciones son iguales? ¿Al graficar las dos funciones en la parte que señalan -9 se cruzan las gráficas? De esta manera entre las estudiantes y el docente se explica de qué forma se deben comparar los resultados de las funciones teniendo en cuenta la variable *x,* ya que no es lo mismo comparar las dos funciones cuando *x* valía -5 en $h(x)$ y en $i(x)$ y cuando *x* valía -1 en $h(x)$ y en $i(x)$, de esta forma las estudiantes logran desarrollar este punto.

Luego de esto continuaron solucionando las preguntas, sobre la interpretación tabular justificándolas, y ya comparaban las funciones como se ve en la siguiente imagen:

X	$h(x) = x - 4$		$i(x) = 3x - 6$	
-5	h(-5) = -5 - 4	-9	i(-5) = 3(-5) - 6	-21
-4	h(-4) = -4 - 4	-8	i(-4) = 3(-4) - 6	-18
-3	h(-3) = -3 - 4	-7	i(-3) = 3(-3) - 6	-15
-2	h(-2) = -2 - 4	-6	i(-2) = 3(-2) - 6	-12
-1	h(-1) = -1 - 4	-5	i(-1) = 3(-1) - 6	-9
0	h(0) = 0 - 4	-4	i(0) = 3(0) - 6	-6
1	h(1) = 1 - 4	-3	i(1) = 3(1) - 6	-3
2	h(2) = 2 - 4	-2	i(2) = 3(2) - 6	0
3	h(3) = 3 - 4	-1	i(3) = 3(3) - 6	3
4	h(4) = 4 - 4	0	i(4) = 3(4) - 6	6
5	h(5) = 5 - 4	1	i(5) = 3(5) - 6	9

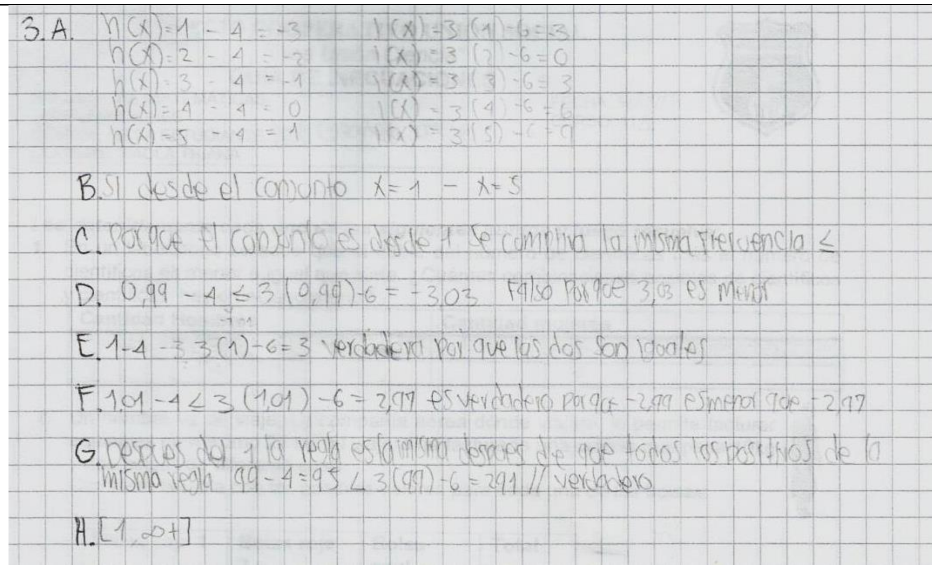
Al realizar correctamente las comparaciones entre las funciones, las estudiantes por medio de la representación tabular pudieron realizar los siguientes procesos:

- Análisis de la tabla en el momento de completarla y responder cada una de las preguntas.

Con respecto al completar la tabla, las estudiantes la solucionaron de la siguiente manera

X	$h(x) = x - 4$	$i(x) = 3x - 6$
-5	-5 - 4 = 9	3(-5) - 6 = -21
-4	-4 - 4 = -8	3(-4) - 6 = -18
-3	-3 - 4 = -7	3(-3) - 6 = -15
-2	-2 - 4 = -6	3(-2) - 6 = -12
-1	-1 - 4 = -5	3(-1) - 6 = -9
0	0 - 4 = 4	3(0) - 6 = -6
1	1 - 4 = 3	3(1) - 6 = -3
2	2 - 4 = 2	3(2) - 6 = 0
3	3 - 4 = 1	3(3) - 6 = 3
4	4 - 4 = 0	3(4) - 6 = 6
5	5 - 4 = 1	3(5) - 6 = 9

Los análisis que realizaron sobre la tabla para resolver las preguntas fueron


3.A. $h(x)=1-4=-3$ $i(x)=3(1)-6=-3$
$h(x)=2-4=-2$ $i(x)=3(2)-6=0$
$h(x)=3-4=-1$ $i(x)=3(3)-6=3$
$h(x)=4-4=0$ $i(x)=3(4)-6=6$
$h(x)=5-4=1$ $i(x)=3(5)-6=9$

B. Si desde el conjunto $x=1$ – $x+5$

C. Porque el conjunto es desde 1 se cumple la misma frecuencia $\leq$

D. $0,99-4 \leq 3(0,99)-6=-3,03$ Falso Porque 3,03 es Menor

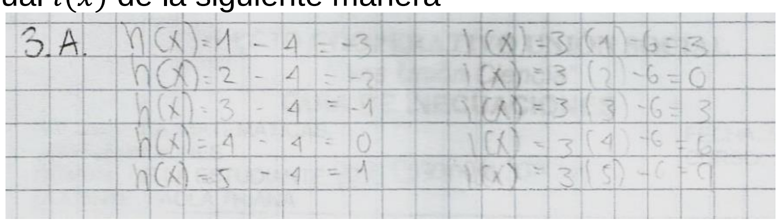
E. $1-4 \leq 3(1)-6=3$ verdadero por que los dos son iguales

F. $1,01-4 \leq 3(1,01)-6=2,97$ es verdadero porque $-2,99$ es menor que $-2,97$

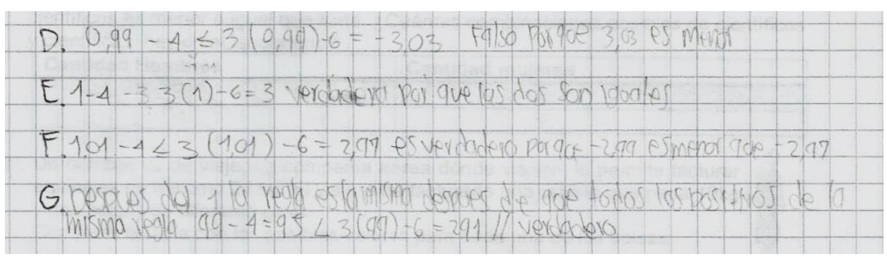
G. despues del 1 la regla es la misma despues de que todos los positivos de la misma regla $99-4=95 \leq 3(99)-6=291$ // verdadero

H. $[1, \infty+]$

La estudiante completa la tabla e identifica para que valores de $h(x)$ es menor o igual $i(x)$ de la siguiente manera


3.A. $h(x)=1-4=-3$ $i(x)=3(1)-6=-3$
$h(x)=2-4=-2$ $i(x)=3(2)-6=0$
$h(x)=3-4=-1$ $i(x)=3(3)-6=3$
$h(x)=4-4=0$ $i(x)=3(4)-6=6$
$h(x)=5-4=1$ $i(x)=3(5)-6=9$

Teniendo en cuenta un determinada cantidad puede justificar si esta cumple con la condición de que $h(x)$ es menor o igual $i(x)$ haciendo uso de las propiedades de las desigualdades

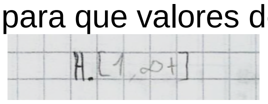

D. $0,99-4 \leq 3(0,99)-6=-3,03$ Falso Porque 3,03 es Menor

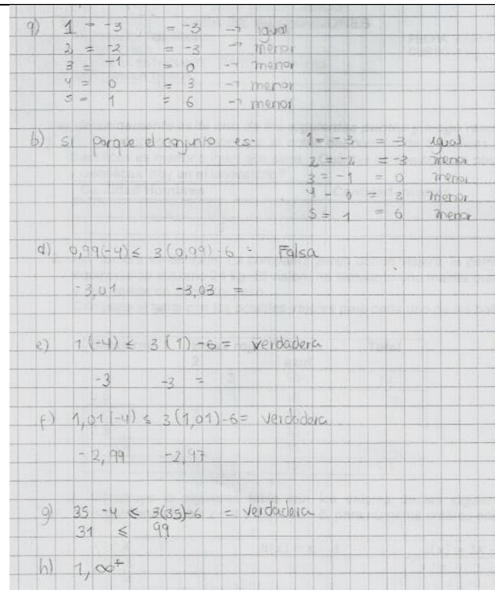
E. $1-4 \leq 3(1)-6=3$ verdadero por que los dos son iguales

F. $1,01-4 \leq 3(1,01)-6=2,97$ es verdadero porque $-2,99$ es menor que $-2,97$

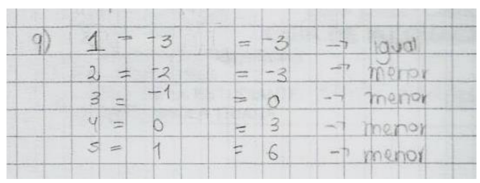
G. despues del 1 la regla es la misma despues de que todos los positivos de la misma regla $99-4=95 \leq 3(99)-6=291$ // verdadero

Teniendo en cuanta los resultados de la tabla y las anteriores preguntas la estudiante puede identificar para que valores de la inecuación se cumple

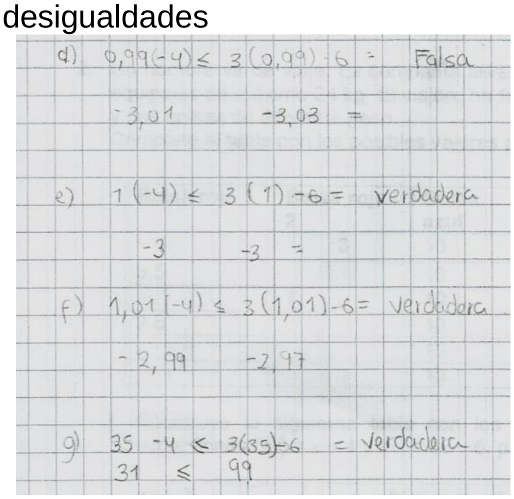

H. $[1, \infty+]$


a) 1 = -3 = -3 → igual
2 = -2 = -3 → menor
3 = -1 = 0 → menor
4 = 0 = 3 → menor
5 = 1 = 6 → menor
b) si porque el conjunto es: 1 = -3 = -3 igual
2 = -2 = -3 menor
3 = -1 = 0 menor
4 = 0 = 3 menor
5 = 1 = 6 menor
d) 0,99(-4) ≤ 3(0,99)-6 = Falsa
-3,01 -3,03 =
e) 1(-4) ≤ 3(1)-6 = verdadera
-3 -3 =
f) 1,01(-4) ≤ 3(1,01)-6 = verdadera
-2,99 -2,97
g) 35 -4 ≤ 3(35)-6 = verdadera
31 ≤ 99
h) 1, ∞+

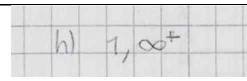
La estudiante teniendo en cuenta la competición de la tabla, la estudiante puede comparar los resultados obtenidos que cumpla con la condición de que $h(x)$ es menor o igual $i(x)$


a) 1 = -3 = -3 → igual
2 = -2 = -3 → menor
3 = -1 = 0 → menor
4 = 0 = 3 → menor
5 = 1 = 6 → menor

Teniendo en cuenta un determinada cantidad puede justificar si esta cumple con la condición de que $h(x)$ es menor o igual $i(x)$ haciendo uso de las propiedades de las desigualdades

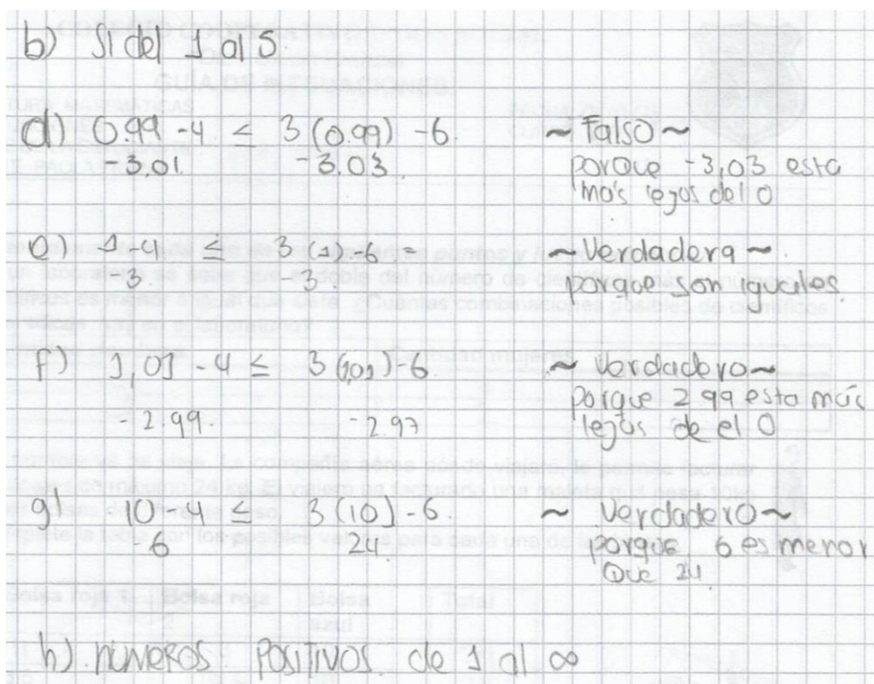

d) 0,99(-4) ≤ 3(0,99)-6 = Falsa
-3,01 -3,03 =
e) 1(-4) ≤ 3(1)-6 = verdadera
-3 -3 =
f) 1,01(-4) ≤ 3(1,01)-6 = verdadera
-2,99 -2,97
g) 35 -4 ≤ 3(35)-6 = verdadera
31 ≤ 99

Teniendo en cuanta los resultados de la tabla y las anteriores preguntas la estudiante puede identificar para que valores de la inecuación se cumple



h) 1, ∞+

- Representaciones en la tabla, realizan transformaciones de la tabla para interpretar las nociones de función, por medio de la solución de las ecuaciones teniendo en cuenta el valor de *x* en cada fila de la tabla para sustituir este valor en las dos funciones y hallar el resultado a través de un proceso algebraico, luego interpretar el concepto de inecuaciones desde un conocimiento previo como lo es funciones. Realizaron conversiones de la representación tabular a una representación algebraica a través del manejo de desigualdades apropiadamente para comprobar sus conclusiones, por ultimo escribieron las respuestas a las preguntas es decir sus inferencias a través de procesos explicativos en un lenguaje verbal para las estudiantes. (Duval 1999). Cada una de las preguntas promovía diferentes representaciones como la de pasar de la tabla al lenguaje algebraico y de este a la representación por medio de los intervalos; como se puede observar en el siguiente cuadro.



b) Si del 1 al 5

d) 0.99 - 4 ≤ 3 (0.99) - 6 ~ Falso ~
-3.01 -3.03 porque -3,03 esta más lejos del 0

e) 1 - 4 ≤ 3 (1) - 6 = ~ Verdadera ~
-3 -3 porque son iguales

f) 1,01 - 4 ≤ 3 (1,01) - 6 ~ Verdadero ~
-2.99 -2.97 porque 2.99 esta más lejos de el 0

g) 10 - 4 ≤ 3 (10) - 6 ~ Verdadero ~
6 24 porque 6 es menor que 24

h) números positivos de 1 al ∞

Las estudiantes probaron sus argumentos a través de sus procedimientos y habilidades algorítmicas como la destreza en la solución de desigualdades, comparando los resultados obtenidos en los diferentes conjuntos numéricos (enteros y racionales).

- Comparan los resultados obtenidos de las distintas representaciones de las inecuaciones, como la representación tabular, la algebraica, el lenguaje natural y representación a través de intervalos, para llegar a una solución a las preguntas realizadas.

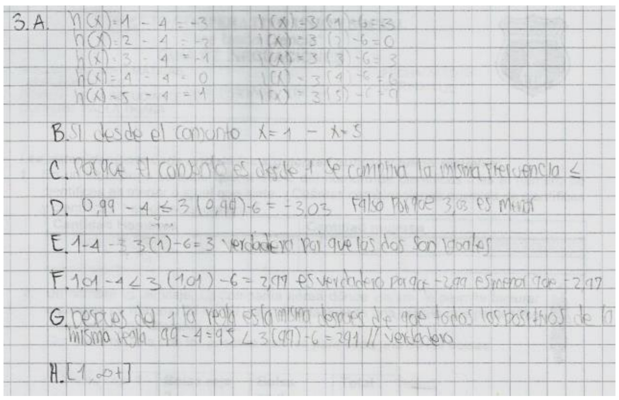
- Comunican sus procesos en la representación tabular y matemática a través de desigualdades y sus conclusiones en distintas representaciones como método de sustentación de las soluciones que proponen.

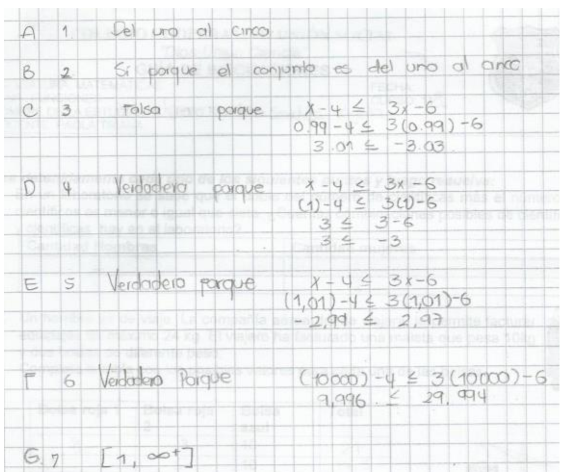
Según Toulmin (2007) los procedimientos de aplicación comprenden el reconocimiento de situaciones a las que son apropiadas estas actividades simbólicas, que en este caso es el manejo de las propiedades de las desigualdades para solucionar inecuaciones. Además en el aprendizaje de una ciencia, el aprendiz debe aprender también dónde aplicar los aspectos simbólicos de los conceptos, a construir modelos que se relacionen con el contexto que hace referencia al proceso que realizo cada una de las estudiantes para dar solución a las preguntas establecidas.

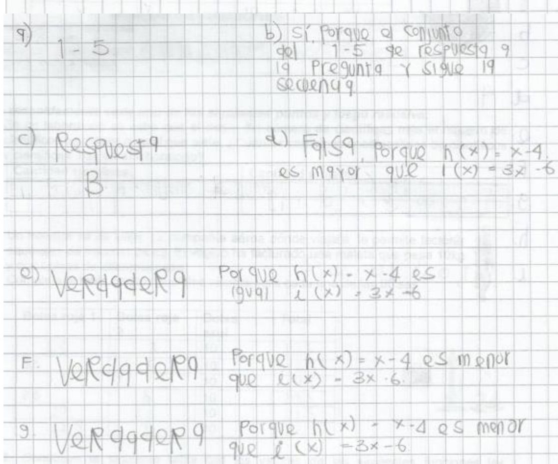
Teniendo en cuenta lo anterior y la socialización en clase podemos evidenciar el siguiente argumento:

DATO

Al momento de completar la tabla y solucionar cada pregunta

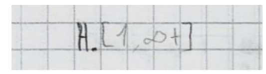

3.A. h(x) = 1 - 4 = -3 i(x) = 3(1) - 6 = -3
h(x) = 2 - 4 = -2 i(x) = 3(2) - 6 = 0
h(x) = 3 - 4 = -1 i(x) = 3(3) - 6 = 3
h(x) = 4 - 4 = 0 i(x) = 3(4) - 6 = 6
h(x) = 5 - 4 = 1 i(x) = 3(5) - 6 = 9
B. Si desde el conjunto x = 1 - x = 5
C. Porque el conjunto es desde 1 se cumplía la misma frecuencia ≤
D. 0,99 - 4 ≤ 3(0,99) - 6 = -3,03 Falso porque 3,03 es menor
E. 1 - 4 = 3(1) - 6 = 3 verdadero porque los dos son iguales
F. 1,01 - 4 ≤ 3(1,01) - 6 = 2,97 es verdadero porque -2,99 es menor que -2,97
G. Despues del 1 la regla es la misma despues de que todos los positivos de la misma regla 99 - 4 = 95 ≤ 3(99) - 6 = 291 // verdadero
H. [1, ∞+]


A 1 Del uno al cinco
B 2 Si porque el conjunto es del uno al cinco
C 3 Falso porque x - 4 ≤ 3x - 6
0.99 - 4 ≤ 3(0.99) - 6
3.01 ≤ -3.03
D 4 Verdadero porque x - 4 ≤ 3x - 6
(1) - 4 ≤ 3(1) - 6
3 ≤ 3 - 6
3 ≤ -3
E 5 Verdadero porque x - 4 ≤ 3x - 6
(1,01) - 4 ≤ 3(1,01) - 6
-2,99 ≤ 2,97
F 6 Verdadero Porque (10000) - 4 ≤ 3(10000) - 6
9,996 ≤ 29,994
G 7 [1, ∞+]


a) 1 - 5
b) Si porque el conjunto del 1 - 5 de respuesta a la pregunta y sigue la secuencia
c) Respuesta B
d) Falsa porque h(x) = x - 4 es mayor que i(x) = 3x - 6
e) Verdadera porque h(x) = x - 4 es igual i(x) = 3x - 6
F. Verdadera Porque h(x) = x - 4 es menor que i(x) = 3x - 6
g. Verdadera Porque h(x) = x - 4 es menor que i(x) = 3x - 6

AFIRMACIÓN

$h(x) = x - 4$ Es menor o igual $i(x) = 3x - 6$ cuando:


H. [1, ∞+]

$En\ el\ intervalo [1, \infty)$

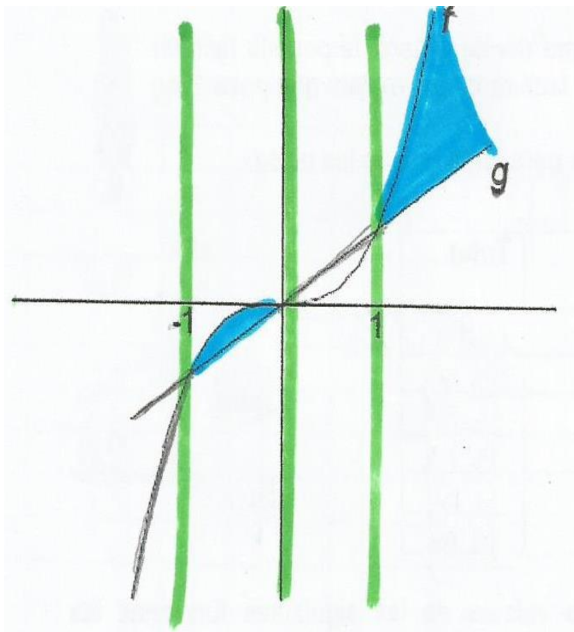
GARANTE

Teniendo en cuenta los datos obtenidos en las tablas y las preguntas realizadas por las estudiantes, se puede inferir que las estudiantes visualizaron que al poner números de valores grandes siempre se iba a cumplir la condición de la inecuación y si se tomaban números que se aproximaban a 1 como 0,99 no cumplían con la condición

Análisis cuarto punto

Las representaciones gráficas permitieron que las estudiantes realizaran procesos de analizar, representar, comparar, interpretar y comunicar entorno al concepto de inecuaciones de manera fácil y comprensible para ellas, logrando argumentar su proceso explicativo.

De acuerdo con la gráfica presentada a las estudiantes, en la cual se graficaron dos funciones y ellas debían identificar cuando una función era mayor que la otra, teniendo en cuenta las preguntas que se le realizaban.



Teniendo en cuenta esto, la mayoría de las estudiantes desarrolló el procedimiento que se muestra a continuación:

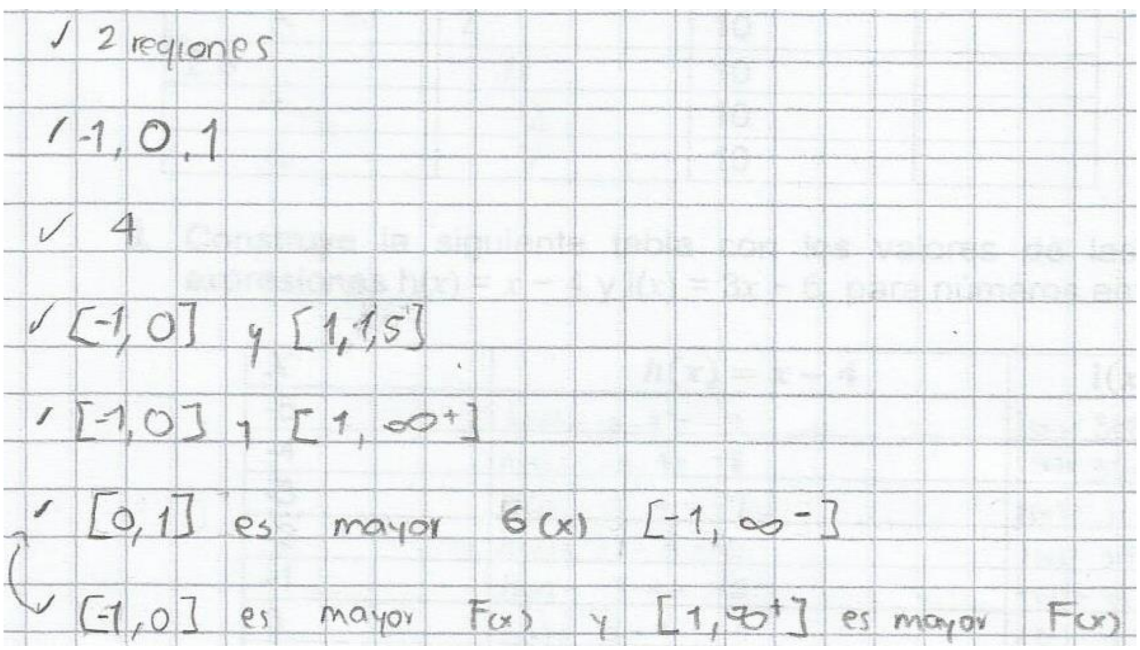
Se evidencia que las estudiantes identifican cuando una función está encima de otra y pueden colorearlas, también reconocen los puntos de intersección entre las dos gráficas y construyen perpendiculares al eje *x* que pasan por estos puntos para determinar los intervalos donde la función cumple la condición de estar por encima.

Durante el desarrollo de esta actividad se evidenció que las estudiantes por medio de la representación gráfica pudieron realizar los siguientes procesos:

- Análisis de las gráficas en el momento de realizar las construcciones de las perpendiculares en el eje *x* y de responder cada una de las preguntas.

- Representaciones en los gráficos dados, realizan transformaciones de las gráficas para interpretar las nociones de inecuaciones por medio de construcciones nuevas e interpretación de las gráficas, resaltando de otro color cuando $f(x)$ está por encima de $g(x)$. Realizaron conversiones de la representación gráfica a una representación aritmética identificado la cantidad de regiones que se divide la gráfica, el uso de la recta numérica para reconocer los intervalos en que quedó dividida la gráfica y el manejo de intervalos apropiadamente para comprobar sus conclusiones, por ultimo escribieron las respuestas a las preguntas a través de procesos explicativos en un lenguaje verbal para las estudiantes.(Duval 1999)

Para este punto de la actividad, se realizaron algunas preguntas a las estudiantes, que tenían que ver con la comparación de las funciones y la noción de intervalos. Una de las soluciones más generales por las estudiantes encontradas fue:



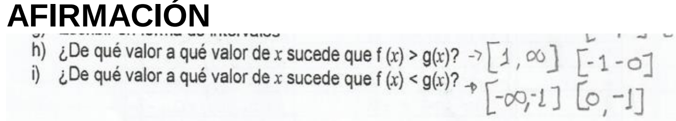
A partir del desarrollo de las estudiantes se puede identificar que encuentran las regiones donde se cumple que *f (x)* está por encima de $g(x)$es decir $f(x) > g(x)$, aplicando conceptos intuitivo de las inecuaciones y el manejo de intervalos en su solución, además la noción de puntos de intercepción entre dos gráficas, es decir, cuando $f(x) = g(x)$, en el manejo de los intervalos se observa que las estudiantes representan la distancia entre dos punto que se encuentran en el eje *x* y cumplen la condición $f(x) > g(x)$, que hace referencia a las regiones coloreadas de las funciones.

- Comparan los resultados obtenidos de las distintas representaciones de las inecuaciones (gráficas y matemáticas) para llegar a una solución a las preguntas realizadas.
- Comunican sus procesos y sus conclusiones en distintas representaciones como método de sustentación de las soluciones que proponen.
- Las estudiantes muestran manejo de los intervalos e identifican cuando es cerrado y cuando no lo es.

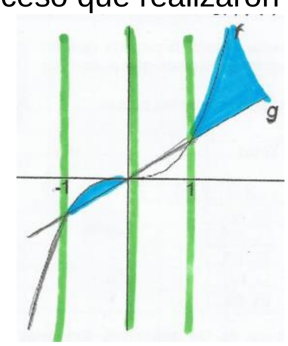
Según Toulmin (2007) el proceso de explicación basado en procedimiento como se realizó en este punto de la actividad, que la estudiantes para comunicar sus ideas realizan distintos procesos, facilita la comprensión de conceptos matemáticos, este proceso supone un aprendizaje, a través de ciertas habilidades explicativas trasmitidas en el repertorio de técnicas, procedimientos y habilidades intelectuales y métodos de representación que se emplean para dar explicaciones de sucesos.

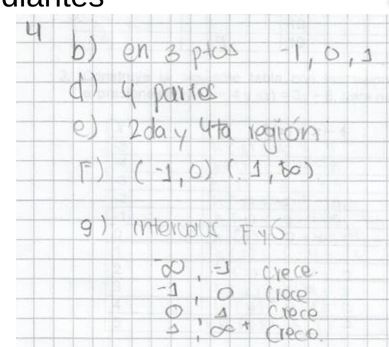
Teniendo en cuenta lo anterior y la socialización en clase podemos evidenciar el siguiente argumento:

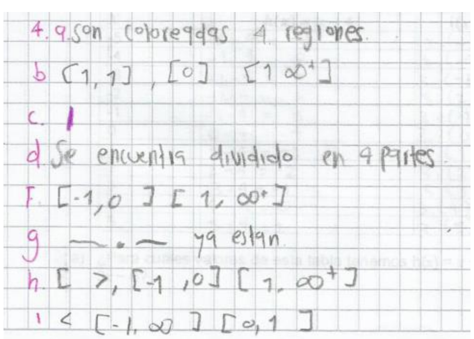
AFIRMACIÓN

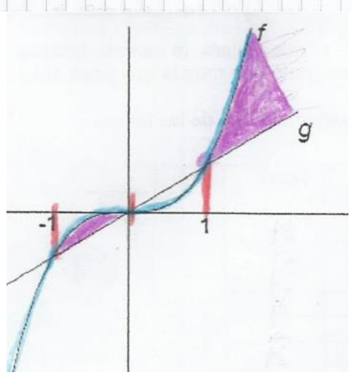

h) ¿De qué valor a qué valor de x sucede que f (x) > g(x)? -> [1, ∞] [-1 - 0]
i) ¿De qué valor a qué valor de x sucede que f (x) < g(x)? -> [-∞,-1] [0, -1]

DATO
El proceso que realizaron las estudiantes









GARANTE
Teniendo en cuenta lo realizado por las estudiantes, se puede identificar que por medio de las gráficas dadas, ellas pudieron colorear las regiones donde la función $f(x)$ está por encima de $g(x)$, es decir cuando $f(x) > g(x)$ interpretando que estar por encima hace referencias a la función que tiene los valores del eje *y* mayor que la otra en un mismo punto para el eje *x*, e identifican los puntos de intersección de las dos funciones son cuando se cruzan las gráficas.

Resultados Generales

1. La actividad permitió que las estudiantes realizaran procesos de analizar, representar, comparar, interpretar y comunicar al momento de solucionarla que contribuyo al desarrollo de habilidades enfocadas al concepto de inecuación y el proceso de argumentación en las estudiantes.
2. Las estudiantes muestran destrezas en la interpretación de lo que es un intervalo.
3. Con las actividades propuestas, se sugiere hacer cambios en los dos primeros puntos, debido a que se hace importante poder generar nuevas preguntas enriquecedoras en la argumentación

Diseño del experimento de la actividad 2

La segunda actividad buscaba que las estudiantes se relacionaran con las diferentes representaciones de la solución de inecuaciones utilizando herramientas tecnologías como lo es el software GeoGebra.

Población*:*
La población eran las estudiantes de grado once del colegio Cooperativo Unión social de Bogotá

Muestra:
Se realizó un grupo de cinco estudiantes de grado once del colegio Cooperativo Unión social de Bogotá

Recursos: Guía del estudiante y un computador con el programa GeoGebra.

Interacción Social

Trabajo en el aula con el profesor:

Se realizó en una hora de clase, y se solucionó de manera grupal, una estudiante leía, entre las demás estudiantes interpretaban, luego solucionaban el punto visualizando las gráficas que mostraba GeoGebra, por medio del análisis, la comparación y la intersección de las dos gráficas, para luego completar la tabla haciendo uso de intervalos.

Las normas sociales que se establecieron en esta clase comprendieron:

- Participación.
- Respetar la palabra de los compañeros de clase.
- Estar con la actitud adecuada para la realización del trabajo en grupo.
- Trabajar en la guía y en la hoja de solución.

Descripción de la actividad

Se seleccionaron cinco niñas voluntarias de grado once del colegio Cooperativo Unión Social para solucionar la actividad y se reunieron en un salón desocupado.

La profesora inicio haciendo una retroalimentación de la actividad realizada anteriormente y les entrego la guía que debía ser diligenciada por cada una, luego de esto, una estudiante leyó lo que se debía hacer en la actividad.

Para la solución de cada una de las columnas se les mostraba a las estudiantes las dos graficas de las funciones dadas en el software GeoGebra de diferente color para que fueran fáciles de distinguir.

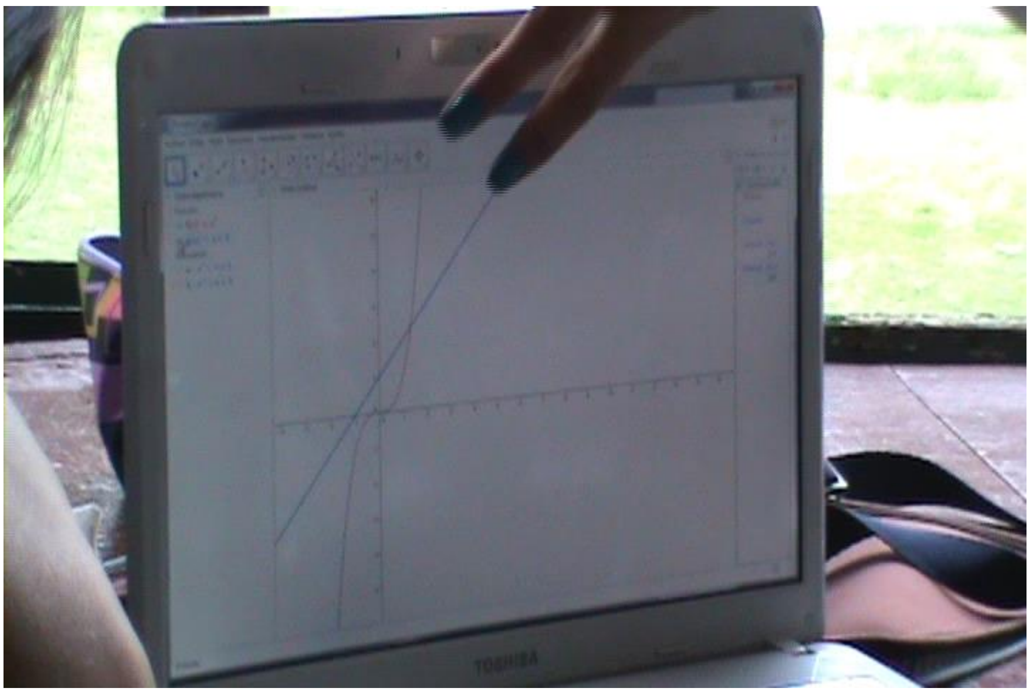
Entonces las estudiantes empezaban a completar la tabla teniendo en cuenta el análisis que hacían sobre la representaciones gráficas de las funciones, que le permitía encontrar la solución a las inecuaciones propuestas, en seguida de esto exponían y comparaban con sus compañeras las soluciones, de esta manera se aceptaba cada una de las soluciones propuestas por las estudiantes a través de la validación de cada uno de los argumentos que se daban por medio de la validez de su prueba.

Análisis de la segunda parte

El uso de herramientas tecnológicas permite que las estudiantes realicen un proceso explicativo generando argumentos desde diferentes procesos como el análisis de gráficas, el manejo de intervalos y variables, realizando procesos para validar su discurso a través de las herramientas del GeoGebra.

Análisis:

Se inicia desarrollando la primera fila de la tabla, para esto se realiza las gráficas en GeoGebra.



Se grafica $f(x) = x^3$ de color rojo y $g(x) = x + 1$ de color azul, luego de esto se resuelve la segunda columna que es identificar cuándo $f(x) < g(x)$, para resolverlo las estudiantes se remiten a identificar cuando $f(x)$ está por debajo de $g(x)$.
A lo que respondieron;

> ***Estudiante dos:*** *entre cero a dos está por debajo*
> ***Docente:*** *¿están de acuerdo?*
> ***Estudiante uno:*** *si, porque esta hacia abajo*
> ***Estudiante dos:*** *está entre dos y tres*
> ***Estudiante uno:*** *no, profesora; esta entre cero y tres*
> ***Docente:*** *me podrían mostrar en GeoGebra ¿cuándo está por debajo?*

En este proceso de explicación para completar la tabla se evidencia la importancia de la validez de los garantes que respaldan la afirmación, ya que al principio la respuesta fue $Entre\ 0\ y\ 2$, pero cuando la profesora pregunta *¿están de acuerdo?* Promueve en las estudiantes otra forma de validar su afirmación, evidenciando que no es solamente entre cero y dos.

Entonces se modifica su primera afirmación por $Entre\ 0\ y\ 3$, y para sustentar esta respuesta la docente le pide que muestren esta solución en la gráfica.

Se puede observar que las estudiantes dan a conocer diferentes conjeturas para las respuestas de esta primera fila, pues algunas no identificaban con claridad cuáles eran los puntos en los que estaban por arriba o por debajo.

Función *f*	**Función *g***	**Para que valores de x se cumple que** $f(x) < g(x)$
$f(x) = x^3$	$f(x) = x + 1$	[0,+2]=Y [0,0.5] x [0,-1]Y [0,0.5]x

Las estudiantes realizaron conversiones entre el análisis de la representación gráfica que le mostraba GeoGebra en una representación en intervalos para completar la tabla de manera simbólica.

Relacionaron el punto de intersección con el eje *x* con los intervalos en los que la gráfica podía estar por debajo de esta manera sustentaban de sus respuesta. Luego de esto la docente realizó el punto de intersección entre las dos gráficas.

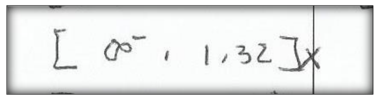
> ***Docente:*** *vamos a hacer el punto de intersección. Y luego una recta para saber desde donde se corta, ¿cuál es la intersección?*
> ***Estudiante uno:*** *hacia la derecha*
> ***Estudiante dos:*** *hacia la izquierda*

La docente al trazar la recta que era perpendicular al eje *x* que pasa por el punto de intersección entre las dos gráficas, e identificar ¿cuál de estas dos parte mostraba cuando la grafica $f(x)$ es menor que $g(x)$, o cuando $f(x)$ está por debajo de $g(x)$? Algunos estudiantes no lograban entender cuál era la que servía.

> ***Docente:*** *¿cuál es el intervalo?*

Estudiante uno: *va desde 1,32 hasta el lado izquierdo*
Estudiante dos: *desde 1,32 hasta menos infinito*
Docente: *entonces, ¿GeoGebra que parte está coloreando?*
Estudiante uno: *la parte que está por debajo*
Estudiante dos: *entonces la otra parte es la que está por encima*

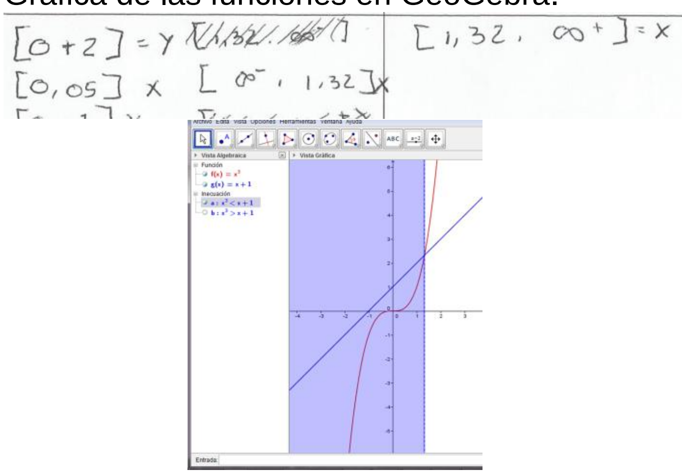
Las estudiantes primero usaron un lenguaje informal para describir el intervalo donde $f(x)$ es menor que $g(x)$, que era "*va desde 1,32 hasta el lado izquierdo"* pero luego pudieron usar un lenguaje matemático para dar sus respuestas *desde "1,32 hasta menos infinito"*



Las estudiantes logran hacer cambios de representación, en este caso pasan de lo gráfico a completar la tabla que se encuentra en la guía, a través del análisis de las gráficas de GeoGebra identificando los intervalos en el que se cumple la condición de $f(x) < g(x)$ para poder escribirlas por medio de intervalos.

Análisis según Toulmin

DATO
Gráfica de las funciones en GeoGebra.



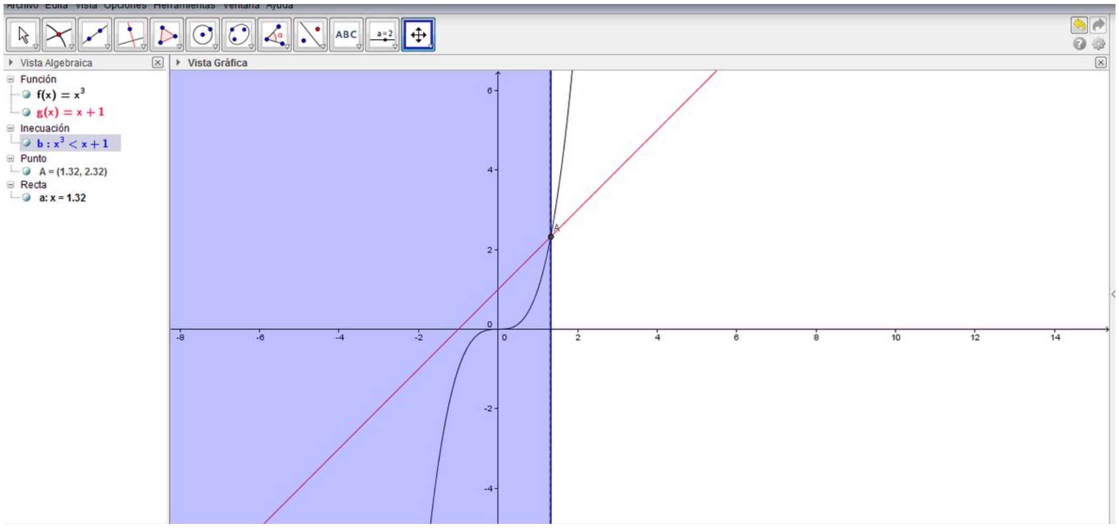
AFIRMACIÓN

$$f(x) < g(x)$$
$$sucede\ en\ el\ (-\infty, 1.3)$$
$$f(x) > g(x)$$
$$sucede\ en\ el\ (1.3, \infty)$$

GARANTE

Teniendo en cuenta lo observado durante el desarrollo de esta actividad se evidenció que las estudiantes al observar las gráficas en Geogebra, podian identificar los intervalos en dónde una de las funciones está por encima de la otra, interpretando que estar encima significa que para un valor mayor en el eje *y* un mismo valor del je *x* la funcion toma valores mayores en el eje *y para le mismo valor de x* que la otro función en el mismo punto del eje *x* y viceversa para la función que esta por debajo.

Las estudiantes, observando la gráfica, logran percibir cuando el programa sombrea las funciones, cuando es mayor o menor en los intervalos.



Las estudiantes logran identificar cuando una función es mayor o menor que otra, cuando las actividades de desigualdades son mediadas por el software GeoGebra, debido a que este programa facilita la visualización al graficar las funciones y cuando estas al ser representadas como un conjunto de desigualdades se logra precisar los puntos de corte y los intervalos en que las función es menor o mayor que otra.

Segundo punto

Análisis:

De acuerdo a las observaciones en el video, se puede evidenciar que las estudiantes a medida que se les va colocando funciones para comparar, las estudiantes logran ganar destrezas cuando una función es mayor o menor que otra;

> ***Docente:*** *para que valores de x se cumple que la función “rojita... por decirlo así”... es menor que la azul*
> ***Estudiante uno:*** *la roja es menor que la azul cuando está aquí (señala GeoGebra)*
> ***Docente:*** *(señala GeoGebra) ¿aquí en esta parte es menor o mayor?*
>
> ***Estudiante uno:*** *la rojita es mayor que la azul*
> ***Docente:*** *como escribirían el intervalo*
> ***Estudiante dos:*** *de 0 a 1,26*

Como se muestra en parte de la relatoría las estudiantes logran percibir cuando las funciones son mayores o menores de una manera más rápida y precisa ayudadas por el zoom del GeoGebra; también logran hallar la imagen y construir tablas con los intervalos como la siguiente:

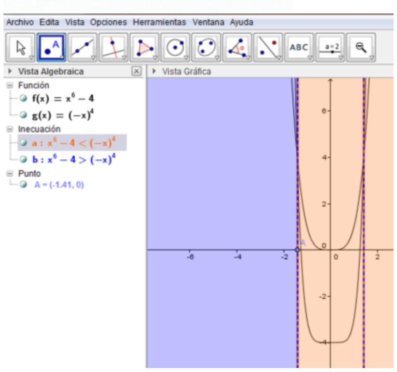
$f(x) = x^6 - 4$	$f(x) = -x^4$	[0, 0.5] x ~~[∞⁺ 1,26] = x~~ [-1,26 ∞⁺] = x [∞⁺, 1,26] = x	[∞⁻, -1,26]

Como se puede observar, las estudiantes dan diferentes valores a los intervalos en el que la función es mayor o menor; sin embargo pueden ver como al hacer puntos de intersección se logra identificar mejor los puntos; este tipo de percepción hace que las estudiantes logren argumentar sobre los intervalos que se pueden encontrar en las diferentes funciones y puedan evidenciar la solución de las inecuaciones a través del análisis de funciones.

Análisis según Toulmin (2003)

DATO
Gráficas de funciones en GeoGebra

[∞⁺ 1,26] = x
[-1,26 , ∞⁺] = x
[∞⁻, -1,26] = x



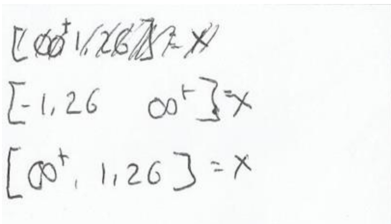
AFIRMACIÓN

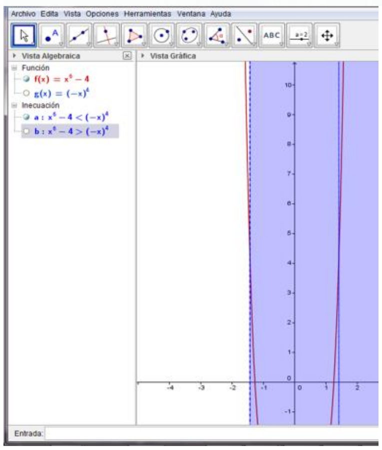
$f(x) < g(x)$
$sucede\ en\ el\ (-1.26, \infty)$
$f(x) > g(x)$
$sucede\ en\ el\ (-\infty, -1.26)$

GARANTE
Para desarrollar este punto de la actividad, las estudiantes por medio de la visualización de las dos gráficas logran percibir cuando una de las funciones es mayor que otra, ellas observan cuando una esta por encima de la otra y de esta manera identifican la función. interpretando que estar encima es la función que tiene los valores para el eje *y* mayores que la otro función en el mismo punto del eje *x* y viceversa para la función que esta por debajo

DATO

Gráficas de funciones en GeoGebra

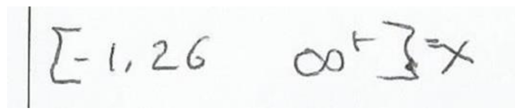




AFIRMACIÓN

En el intervalo $[-1.26, \infty]$ $f(x) < g(x)$

GARANTE



Las 5 estudiantes al poder observar cada una de las funciones que se graficaron en GeoGebra, le sañalan a la docente en el software los posibles intervalos en que una de estas funciones puede estar por encima de la otra e identifican los intervalos, al hacer esta observación y detallar con el zoom del software, pueden escribir el valor aproximado del intervalo en el que una de las funciones es mayor que la otra, además lo pueden validar esta afirmación al momento de escribir la inecuación en GeoGebra encontrando la parte sombreada por el programa

Tercer punto

Función $\boldsymbol{f(x)}$	**Función** $\boldsymbol{g(x)}$	**Para que valores de** $\boldsymbol{x}$ **se cumple que** $\boldsymbol{f(x) < g(x)}$	**Para que valores de** $\boldsymbol{x}$ **se cumple que** $\boldsymbol{f(x) > g(x)}$
$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x-1}}$	$g(x) = x^2 - 2$		

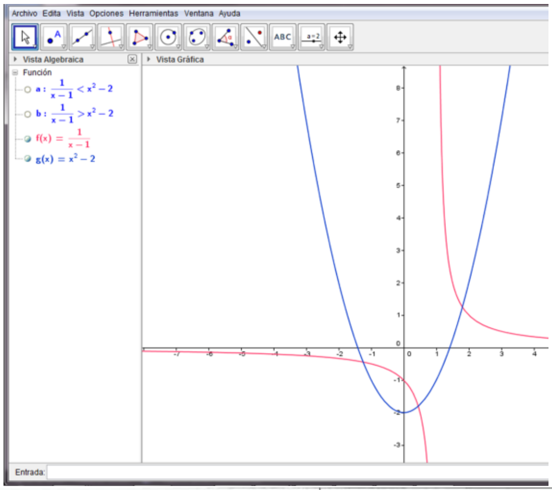
Análisis:

Al realizar la comparación entre estas dos funciones, las estudiantes al comienzo creen que lo que esta graficado son parábolas, sin embargo la docente aclara que solamente una de las funciones es parábola; las estudiantes lanzan diferentes tipos de respuesta para identificar los intervalos en los que una de las funciones puede ser mayor o menor que la otra; luego piden a la docente que por favor con ayuda del GeoGebra, se sombree las partes de los intervalos, pero al hacer estos se dan cuenta que no sombrea nada, la docente explica que esto se debe a que los intervalos son cerrados.

Análisis según Toulmin (2003)

DATO

Gráficas de funciones en GeoGebra



[∞ , -1,25] = x	[0,45 1,25] = x
[0, 1,8] = x	~~[1,8 / 0,48]~~
	[0,45 1,8]
	[-1,25 , 0,45] = x

AFIRMACIÓN

$$f(x) < g(x)$$

$$sucede\ en\ el\ (-\infty,-1.25] \cup (0.45,1) \cup (1.8,\infty)$$

$$f(x) > g(x)$$

$$sucede\ en\ el\ (-1.25, 0.45) \cup (1, 1{,}25)$$

GARANTE

Durante la realización de este punto de la actividad, las estudiantes logran percibir que el programa Geogebra no colorea las zonas de los intervalos, entonces surgen preguntas acerca de ¿cómo en las anteriores si coloreaba? y en esta no, al intentar buscar respuesta, las estudiantes se percatan de que los intervalos dónde se encuentran estas funciones por enciama o debajo es la unión de dos o tres intervalos y que muy seguramente el programa no lo lograba colorear por esta característica.

> ***Estudiante uno:*** *profe ¿por qué no se deja sombrear como las otras funciones?*
> ***Docente:*** *porque es un intervalo cerrado*

Las estudiantes logran hacer cambios de representación entre la parte gráfica y la tabular; logran entender con más facilidad cuales son los intervalos abiertos y cerrados.

Su interpretación es más precisa y observan que ya no solamente las inecuaciones se resuelven algebraicamente, sino que la comprensión de esta se puede hacer mejor por medio gráfico, pues pueden percibir cuándo los intervalos de una función son mayores que los de otra y cómo estos cambian de acuerdo a los puntos de intersección entre las mismas.

Resultados generales

- Las estudiantes reconocieron la importancia de la implementación del software GeoGebra para comprender la solución de las inecuaciones desde el análisis de representaciones gráficas de dos funciones.
- Las estudiantes no solamente utilizan el software para observar las gráficas y poder completar las tablas, sino además juega el papel importante que permite validar sus resultados.
- Las estudiantes evidencian que el software es una herramienta que facilita el proceso de aprendizaje pero que tiene ciertos impedimentos al graficarse las inecuaciones de ciertas funciones, por este motivo ellas evidencian que es esencial aprender a solucionarlas de forma gráfica, tabular y algebraicamente.
- Las estudiantes tienen en cuenta las gráficas que realiza el software, para poder completar la tabla, utilizando diferentes representaciones como lo son; la representación gráfica, la representación numérica y el lenguaje natural.
- Esta actividad permitió que las estudiantes buscaran evidencias y razones para las posibles respuestas a la actividad, promoviendo un proceso explicativo sustentado por medio de las distintas representaciones y que construyeran distintas afirmaciones de las soluciones para completar la tabla.
- Con la actividad, se logran aprendizajes del primer objetivo.
- Las estudiantes identifican los intervalos acertadamente por medio del zoom.
-

7. REDISEÑO DEL EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA

Es importante considerar cuando algunos elementos del diseño no están funcionando como debería ser en pro del desarrollo del diseño, por tanto, se debe analizar porque no están funcionando y cuál debe ser su mejora. (Collins et al 2004, p 34)

Acorde con lo anterior se presentaran los cambios sobre los elementos constitutivos del diseño.

ACTIVIDAD 1

Punto 1

Mejora: Se debe redactar mejor el enunciado de tal forma que su interpretación sea una solo y se debe aumentar una columna, ya que su solución no es solamente dos.

Punto final

En un laboratorio se sabe que hay el doble de científicas que de científicos. Si el número de científicas más el número de científicos es menor o igual que siete. ¿Cuántas combinaciones posibles de científicos y científicas hay en el laboratorio?

Cantidad Hombres	Cantidad mujeres

Punto 2.
Mejora: Se debe realizar preguntas que permita que la actividad genere más procesos de aprendizaje y comunicación.

Punto final

Bolsa roja 1	Bolsa roja 2	Bolsa azul	Total
	16	10	
3,5		10	
		10	10
2.5		10	
8	3	10	
		10	

Punto 3.
Mejora: Se debe redactar mejor la pregunta g).

Punto final

¿Para qué números se cumple en los reales la $x - 4 \leq 3x - 6$? Justifique

ACTIVIDAD 2

Los cambios que se realizaran en esta actividad están basado en la población, ya que con grupos de cinco estudiantes, no se evidencio un proceso explicativo de cada una sino solamente de dos de las estudiantes, por lo tanto se recomienda que la actividad se realice con grupos de tres estudiantes.

8. CONCLUSIONES

Se diseñó una propuesta con el fin de proponer una actividad que permita que las estudiantes desarrollen argumentación en su discurso de las diferentes representaciones de la solución de inecuaciones, para ser aplicada en una grupo de estudiantes de grado once, donde se priorizó el uso de herramientas tecnológicas como el software de GeoGebra y la interacción social para la construcción y validación de los argumentos que propone las estudiantes.

Se analizaron y evaluaron las variables que influyen en el desarrollo de un experimento previamente diseñado que promueva la argumentación en la enseñanza de las inecuaciones, como lo fueron los enunciados de los diferentes puntos de la actividad 1; con el fin de rediseñarlo para optimizar los procesos de percibir, analizar, interpretar, comprar y comunicar las diferentes representaciones de las soluciones de las inecuaciones que promueven la participación de las estudiantes en la argumentación.

El proceso de argumentación en matemáticas permite identificar los procesos de participación, percibir, analizar, representar, comparar, crear, interpretar y comunicar; en la solución de inecuaciones cuando se interactúan en estas, el estudiante, el problema y el profesor, es necesario reflexionar sobre el papel de cada uno de estos, para la comprensión del proceso de argumentación.

Es necesario la transformación del problema en un lenguaje propio y comprensible, la utilización de las diferentes representaciones de la solución de las inecuaciones que permitió que el grupo de estudiantes de grado once instaurara un lenguaje común y un repertorio compartido sobre la diferentes representaciones de la solución de las inecuaciones asociado a su experiencia y no sistemático desde una sola representación como la algebraica

En el proceso de argumentación sobre la representación de las soluciones de las inecuaciones, no solo es necesario los recursos como hoja y lápiz, también la interacción social que se da en la participación de las estudiantes dirigida a la argumentación de la solución de las inecuaciones y de manera trascendental el profesor, quien, a partir de las actividades que propone y diseña promueve este proceso, por último resaltar la importación de las herramientas tecnológicas en estas actividades matemática que promueven en las estudiantes el proceso de argumentación a través de analizar, interpretar, comprar y comunicar.

Para lograr que la estudiantes amplíen su conceptos sobre las inecuaciones a través de la argumentación, es necesario hacer, pensar, hablar y participar a la estudiantes, sin embargo, estas están asociadas a las condiciones de las guías proporcionadas, tanto en la representación de la solución de las inecuaciones haciendo uso de papel y lápiz como de herramientas tecnológicas GeoGebra para la validación de sus argumentos.

Los procesos de argumentación de las soluciones de las inecuaciones, se dio por medio del uso de diferentes representaciones, en las que se tuvieron en cuenta el objeto representado, el contenido de la representación y su modalidad de registro.

Entre las representaciones usadas se realizaron procesos de tratamiento y conversión que dieron sentido a las diferentes representaciones de la solución de inecuaciones, así como una aproximación a nuevos significados de las inecuaciones para el nivel de las estudiantes no visto solamente las representaciones algebraicas sino con diversas representaciones.

Se evidencia la importancia de los procesos de argumentación en el aula, debido que por medio de estos procesos las estudiantes dan una posibilidad de diversas soluciones, basadas desde sus interpretaciones, no necesariamente son correctas pero buscan métodos para validarlas, además interactúan con sus compañeras para llegar a una respuesta común correcta.

El uso del GeoGebra como mediador en las actividades, permite que las estudiantes logren tener una mejor visualización de los ejercicios propuestos, pues es a partir del uso del GeoGebra que las estudiantes logran dar la mayoría de argumentos.

Este trabajo fue relevante para el colegio Cooperativo Unión Social de Bogotá, debido a que la estudiantes estaban acostumbradas al uso del tablero solamente, para las estudiantes fue algo novedoso ver un programa en el que se pudiera graficar las funciones y poder interpretar la solución de las inecuaciones, aunque es necesario aceptar que estas propuesta permite que las estudiantes aproximen sus respuestas más no que sus resultados sean exactos.

BIBLIOGRAFÍA

ALSON P (1989). *Acerca de la enseñanza de inecuaciones de una variable*. Suma 2.

ALVARENGA Karly (2006). Inecuaciones: un análisis de las construcciones mentales de estudiantes universitarios. *Instituto Politécnico Nacional Centro de Investigación En Ciencias Aplicadas y Tecnología Avanzada.*

BARBOSA, Alvarenga, Karly. (2003). *La enseñanza de inecuaciones desde el punto de vista de la teoría APOE.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, noviembre, 199-219.

COLLINS, A., Joseph, D., Bielaczye, K. (2004) *Desing Research: theorical and methodological issues.* En: *The journal of the learning sciences*, No. 13, pp. 15-42

DUVAL R. (1999). Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Traducción Myriam Vega.

HERNÁNDEZ C. (2013) *Consideraciones para el uso del GeoGebra en ecuaciones, inecuaciones, sistemas y funciones. Números.* Revista de Didáctica de las matemáticas, Volumen 82, marzo, 115-129.

MARIOTTI, M.A. (2000). Introduction to proof: the mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics, 44, 25 - 53.*

SWOKOWSKI, E, (1981) Algebra y trigonometría con geometría analítica, *Editorial Iberoamericana, México.*

THOMAIDIS, & Tzanakis, C. (2007). *The notion of historical "parallelism" revisited: historical evolution and students' conception of the order relation on the number line*. Educational Studies in Mathematics, 66(2), 165-183.

TOULMIN (1958). *The use of arguments*. Cambridge: UniversityPress.

TOULMIN, S. (2007). *Los usos de la argumentación.* Ediciones Península, Barcelona.

RADFORD, L. (2006). *Elementos de Una Teoría Cultural de la Objetivación.* Relime. (número especial) 103-129

http://maralboran.org/wikipedia/index.php/Inecuaciones_(4%C2%BAESO-B)

ANEXOS

Anexo A. ***Actividad I presentada a las estudiantes.***

	COLEGIO COOPERATIVO UNIÓN SOCIAL GUÍA DE TRABAJO __________ PERIODO	**Bogotá,** ___________ ___________ _____ **2013**

ASIGNATURA ____________________ DOCENTE________________________
TEMA: _______________ ESTUDIANTE: ______________________GRADO:____

ACTIVIDAD 1

Lea detenidamente cada uno de los siguientes puntos y luego resuelva:

1. En un laboratorio se sabe que el doble del número de científicas más el número de científicos es menor o igual que siete. ¿Cuántas combinaciones posibles de científicos y científicas hay en el laboratorio?

Cantidad Hombres	Cantidad mujeres

2. Un hombre va de viaje. La compañía aérea dónde viajará, le permite facturar equipajes de máximo 24 kg. El viajero ha facturado una maleta que pesa 10kg y dos bolsas de diferente peso.

Complete la tabla con los posibles valores para cada una de las bolsas.

Bolsa roja 1	Bolsa roja 2	Bolsa azul	Total
	3	10	
3,5		10	
	7	10	
2.5		10	
		10	
		10	

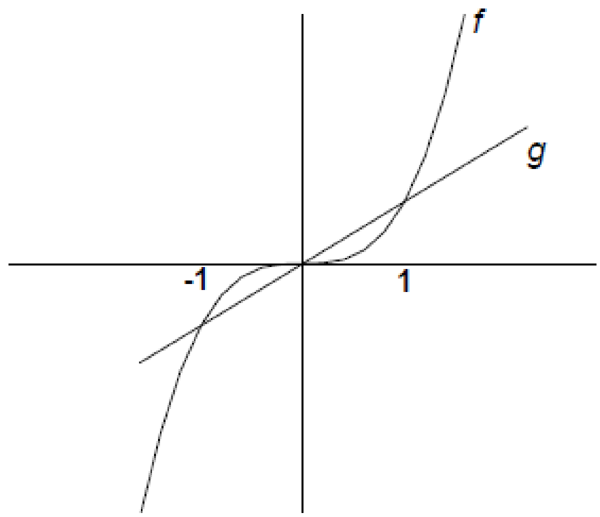
3. Construye la siguiente tabla con los valores de las siguientes funciones las expresiones $h(x) = x - 4$ e $i(x) = 3x - 6$, para números enterosentre *–5 y 5*.

X	$\boldsymbol{h(x) = x - 4}$	$\mathbf{i}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{3}\boldsymbol{x} - \mathbf{6}$
-5		
-4		
-3		
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		
4		
5		

h) ¿Para cuáles valores de esta tabla tenemos $h(x) = x - 4$ es menor o igual $i(x) = 3x - 6$?
i) La tabla puede sugerir una respuesta a la pregunta: ¿Para cuál conjunto de números reales se cumple que $x - 4 \leq 3x - 6$? ¿Cuál es la respuesta? Justifique.
j) Si *x = 0.99*, entonces se cumple $x - 4 \leq 3x - 6$. ¿Esta afirmación es verdadera (V) o falsa (F)?
k) Si *x = 1* entonces se cumple $x - 4 \leq 3x - 6$. ¿Esta afirmación es verdadera (V) o falsa (F)?
l) Si *x = 1,01* entonces se cumple $x - 4 \leq 3x - 6$. ¿Esta afirmación es verdadera (V) o falsa (F)?
m) Tome un valor positivo para cuando x toma valores relativamente grandes y determine si se cumple $x - 4 \leq 3x - 6$.

n) ¿Para qué números se cumple en los reales la $\text{desigualdad}\, x-4 \leq 3x-6$? Justifique

4. Dados los gráficos de las funciones *f y g,* encuentre y colorea la región o zona donde *f (x)* está por encima de *g($f(x)$x).*



Teniendo en cuenta lo obtenido responda las siguientes preguntas:

a) ¿Cuántas regiones quedaron coloreadas?
b) ¿Determine las coordenadas de los puntos donde *f* y *g* se interseca?
c) Por cada punto de intersección entre *f* y *g*, trace una recta vertical que pase por dicho punto.
d) ¿En cuántas partes quedó dividido el eje *x*?
e) ¿En cuáles de estas divisiones se encuentran las regiones coloreadas?
f) Escriba en dónde inicia y finaliza para el eje *x* esta regiones coloreadas.
g) Escribir en forma de intervalos las regiones coloreadas.
h) ¿Para cuales valores de x se cumple que $f(x) > g(x)$?

Anexo B. ***Actividad II presentada a las estudiantes.***

	COLEGIO COOPERATIVO UNIÓN SOCIAL GUÍA DE TRABAJO __________ PERIODO	**Bogotá,** ______________________ ____ **2013**

ASIGNATURA ________________________________ **DOCENTE**____
TEMA: _______________________________________**ESTUDIANTE:**___________________________**GRADO:**_________

ACTIVIDAD 2

Función $f(x)$	Función $g(x)$	Para que valores de x se cumple que $f(x) < g(x)$	Para que valores de x se cumple que $f(x) > g(x)$
$f(x) = x^3$	$g(x) = x + 1$		
$f(x) = x^6 - 4$	$g(x) = -x^4$		
$f(x) = \frac{1}{x-1}$	$g(x) = x^2 - 2$		

Anexo C. ***Transcripción de la actividad II.***

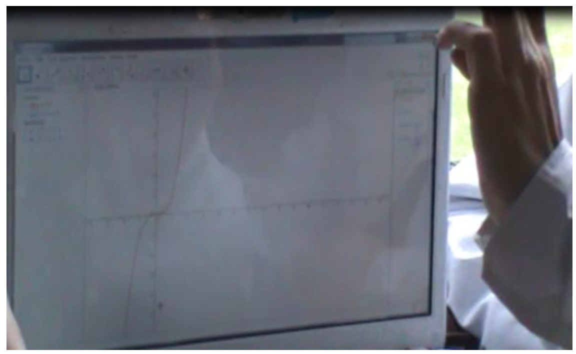
RELATORÍA SEGUNDA PARTE

Primer punto

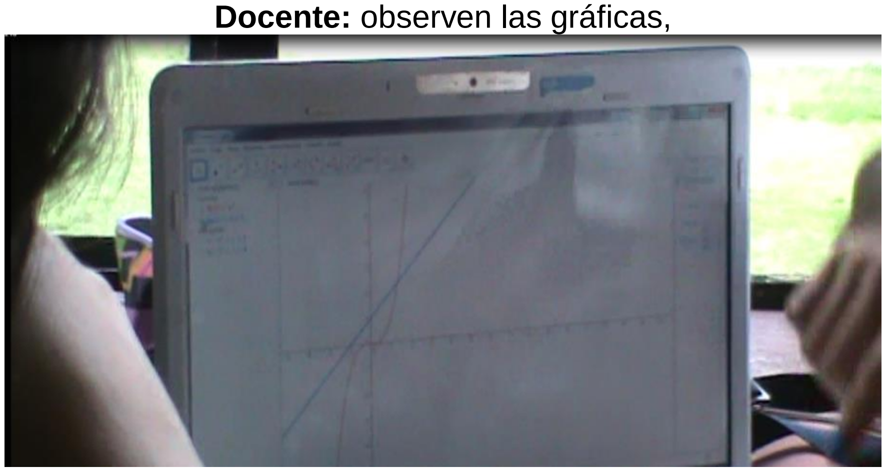
Docente: ustedes van observar cómo mediante el programa de GeoGebra se pueden ver las gráficas de diferentes funciones; les entregaré la guía para esta actividad…. ¿Qué pueden observar?

Estudiante uno: En la primera columna dice que cuando $f(x)\ es\ menor\ que\ g(x)$

Docente: entonces lo que vamos a hacer en GeoGebra es graficar las funciones y ustedes van a observar…



Estudiante uno: debemos graficar la primera función que es $f(x) = x^3$
Estudiante dos: pero también debemos graficar $f(x) = x + 1$
Docente: observen las gráficas,

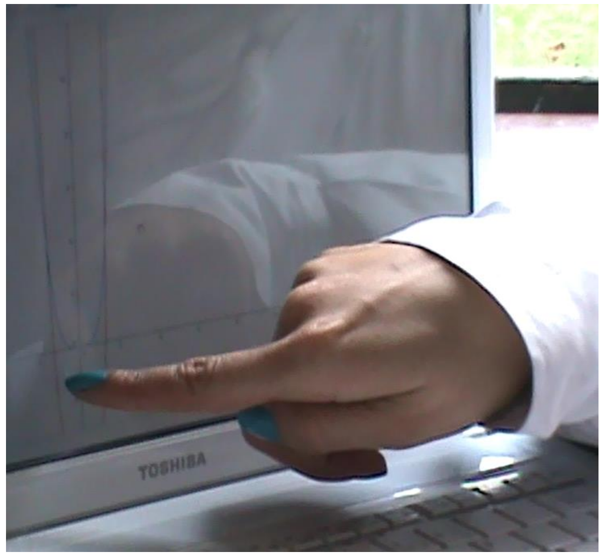


¿En qué valores de *x* se puede decir que $f(x)$ está por arriba o por debajo?

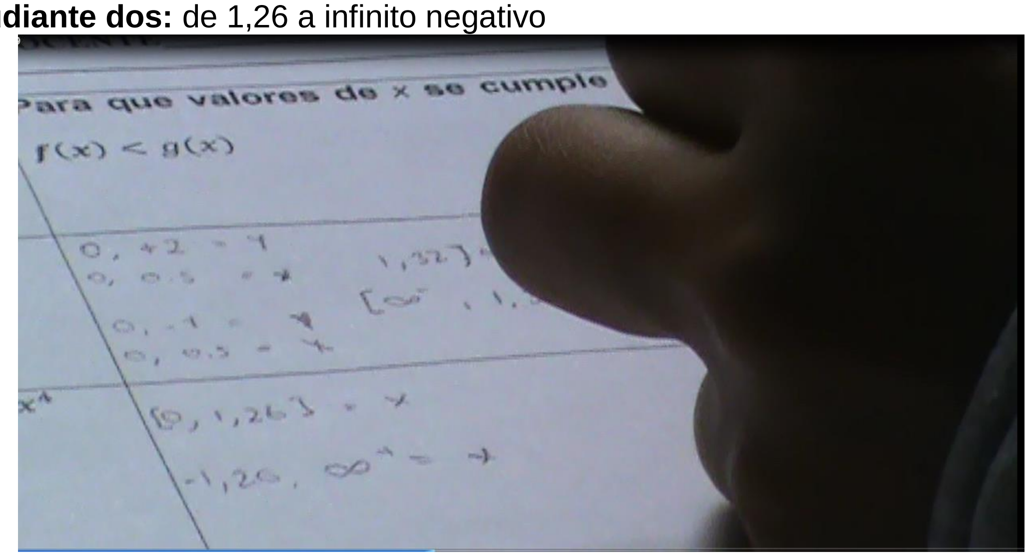
Estudiante uno: puede estar por debajo
Estudiante dos: está por debajo, x^3 está por debajo.
Docente: y ¿en qué momento está por debajo?
Estudiante dos: de cero a dos está por debajo

Docente: ¿están de acuerdo?
Estudiante uno: si, porque esta hacia abajo
Estudiante dos: está entre dos y tres
Estudiante uno: no, profesora; esta entre cero y tres
Docente: me podrían mostrar en GeoGebra ¿cuándo está por debajo?
Estudiante dos: profe, entonces es de 0 a 3,5, porque si lo tomamos de 3,5 a dos positivo quedaría muy largo.
Docente: bueno… y en *x* ¿cuándo está por debajo?
Estudiante dos: está por debajo de 1,5
Estudiante uno: no, de 0 a 1,5
Estudiante dos: no, 0 a 1, 3 porque este es el eje *x y este el eje y (señala pantalla computador)*
Docente: ¿qué colocarían?
Estudiante uno: de 0 a 0,5
Estudiante dos: el punto donde se unen es donde se dividen
Docente: vamos a hacer el punto de intersección. Y luego una recta para saber desde donde se corta, ¿cuál es la intersección?
Estudiante uno: hacia la derecha
Estudiante dos: hacia la izquierda
Docente: ¿cuál es el intervalo?
Estudiante uno: va desde 1,32 hasta el lado izquierdo
Estudiante dos: desde 1,32 hasta menos infinito
Docente: entonces, ¿GeoGebra que parte está coloreando?
Estudiante uno: la parte que está por debajo
Estudiante dos; entonces la otra parte es la que está por encima
De esta manera queda claro, cuando una función está por debajo o por encima y cómo GeoGebra hace más fácil interpretar los intervalos.
Docente: ahora pasemos a la siguiente columna; ¿que observamos?
Estudiante uno: que es mayor la gráfica roja que el azul en la parte de arriba
Docente: ¿dónde es mayor?
Estudiante dos: de menos 1 a infinito positivo
Docente: y ¿cuándo *f* va a ser mayor?
Estudiante uno: de 1,26 a infinito negativo

Segundo punto
Para este ejercicio la docente de nuevo muestra en GeoGebra las funciones.
Estudiante uno: la función roja es una parábola.
Docente: parece, pero no es una parábola; entonces muestra la otra función.
Estudiante dos: entonces esa tampoco es una parábola.
Docente: para que valores de *x* se cumple que la función “rojita... por decirlo así”... es menor que la azul
Estudiante uno: la roja es menor que la azul cuando está aquí (señala GeoGebra)
Docente: (señala GeoGebra) aquí en esta parte es menor o mayor



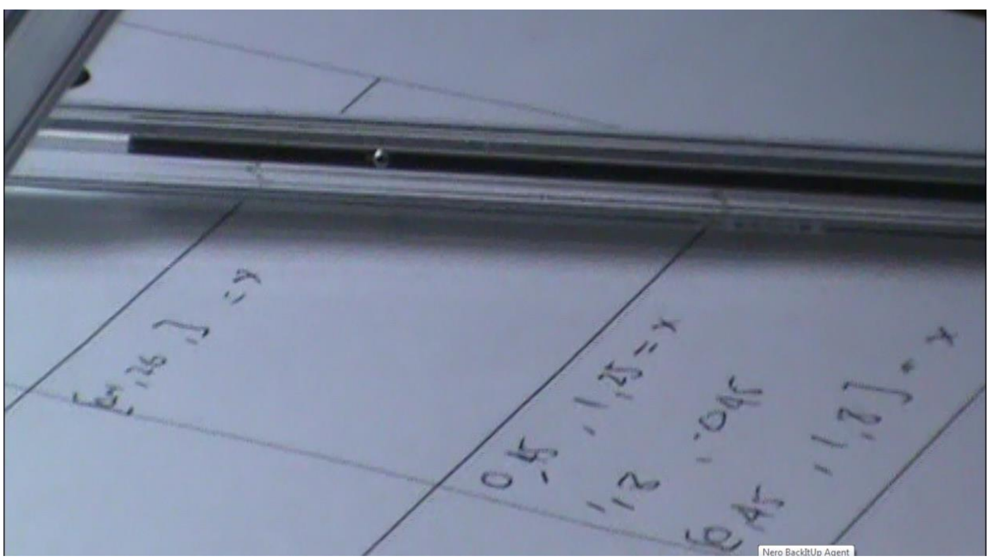
Estudiante dos: es menor hacia abajo, y mayor de cero a arriba
Docente: en que parte ustedes podrían decir ¿qué es mayor o menor?
Estudiante uno: profe pon por favor el punto de intersección
Docente: (realiza punto de intersección)
Estudiante dos: de 1,26 a 0
Docente: quien es mayor en estas partes (señala)
Estudiante uno: la rojita es mayor que la azul
Docente: como escribirían el intervalo
Estudiante dos: de 0 a 1,26
Docente: ¿en qué momento la roja va a ser menor, GeoGebra les selecciona esto, esta correcta la información?
Estudiante uno: no, porque solo analizamos solo lo de afuera; entonces sería menor de -1,26 a infinito positivo.
Docente: ¿cuándo va hacer mayor?
Estudiante dos: de 1,26 a infinito negativo



Docente: si señora.

Tercer punto

Docente: la primera función es una racional, y la otra es un parábola que es la azul… teniendo en cuenta eso, cuando la función roja, va a ser menor que la *g*
Estudiante uno: de -1,5 a infinito negativo
Docente: les hago los puntos de intersección
Estudiantes: si profe
Docente: (realiza puntos de intersección)
Estudiante dos: de -1,5 a infinito negativo, va a ser menor y de -1,8 a 0 va a ser mayor
Estudiante uno: no, sería de 0 a 1,8
Docente: no se deja sombrear
Estudiante uno: profe ¿por qué no se deja sombrear como las otras funciones?
Docente: porque es un intervalo cerrado
Estudiante uno: profe, la falencia será GeoGebra porque no nos sombrea los puntos negativos
Docente: ¿cuándo la función azul es menor que rojo?
Estudiante dos: de cero a -1,25
Estudiante uno: e 0,45 a 1,8



Docente: recuerdan los primeros temas que vimos al comienzo del año, que eran con los casos de factorización?
Estudiantes: si
Docente: ese tema es el mismo que estamos haciendo hoy, ¿cómo les parece?
Estudiante: es mucho mejor con GeoGebra.