



**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA
NACIONAL**

Educadora de educadores

EXTENSIÓN DE LA DERIVADA DE ORDEN NATURAL A UN ORDEN REAL

Jhon Cristian Mina Ladino

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ
2021



**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA
NACIONAL**

Educadora de educadores

EXTENSIÓN DE LA DERIVADA DE ORDEN NATURAL A UN ORDEN REAL

Jhon Cristian Mina Ladino
Cédula de ciudadanía: 1023034362
Código estudiantil: 2017140049

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para obtener el
Título de Licenciado en Matemáticas

Director: Jorge Edgar Páez Ortigón

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ
2021

Tabla de contenido

Índice de figuras	IV
Agradecimientos	V
Dedicatoria	VII
Justificación	1
Introducción	2
1. Funciones Especiales	4
1.1. Transformada de Laplace	4
1.2. Función Gamma	10
1.2.1. Propiedades Básicas	10
1.2.2. Función Gamma como producto Infinito	12
1.2.3. Formulas exactas y aproximaciones de la función gamma	14
1.3. Función Beta	16
2. Derivada de orden natural	20
2.1. Definición de derivada	20
2.2. Generalización del orden de la derivada	27
2.3. Reglas de derivación	31

2.4. Derivadas de orden natural de funciones trigonométricas	62
2.5. Derivadas de orden natural de algunas funciones trascendentales	70
3. Derivada de orden entero	75
3.1. Definición de derivada de orden entero	75
3.2. Forma integral de la derivada de orden entero	84
3.3. Conexión y sentido	97
3.3.1. Teorema de leibniz	97
3.4. Integral Semilla	100
3.5. Integral repetida de Cauchy	103
4. Derivada de orden real	106
4.1. Derivada de orden real negativa	106
4.2. Derivada de orden real	109
4.3. Derivada Caputo-Fabrizio	113
5. Creación pagina web "Derivative Calculus"	116
5.1. Componentes básicas de almacenamiento en la nube y dirección web	117
5.2. Componentes técnicos	118
5.3. Componentes accesibles	119
5.4. Uso de aplicativos	119
Conclusiones	121
A. Demostraciones capitulo 1	123

B. Demostraciones capitulo 2	131
C. Demostraciones capitulo 3	168
D. Demostraciones capitulo 4	175
Referencias	185

Índice de figuras

2.1. Imagen de la definición de derivada en x por derecha	21
2.2. Imagen de la definición de derivada en x por izquierda	23
2.3. Imagen de la definición de derivada bilateral de Riemman en x	25
2.4. Derivada de $f(x) = x$	31
2.5. Imagen de la derivada de orden 6 de la función $f(x) = x^{12}$	39
2.6. Imagen de la derivada de orden 6 de la función $m(n) = 2n^{-3}$	41
2.7. Imagen de la derivada de orden 4 de la función $h(x) = \frac{e}{\pi}x^9 + \sqrt{\frac{2}{3}}x^5 - \frac{1}{\sqrt{3}}x^7$	44
2.8. Gráfica de la función $h(x) = (x^5 + \pi)(x^4 - 19)$ y su derivada de orden 3 $h^{(3)}(x) = 504x^6$	46
2.9. Imagen de la derivada de orden 3 de la función $\frac{x^6}{x^4+1}$	61
2.10. Imagen de la tercera derivada de la función secante	70
5.1. Logo rectangular	118
5.2. Logo cuadrado	118
5.3. Aplicativos	119

Agradecimientos

Agradezco principalmente a **DIOS** por su apoyo incondicional en cada paso por la vida, por forjar un camino direccionado hacia las matemáticas.

A mis padres Jorge Mina y Vitelvina Ladino, por ser la fuerza que apoya mis sueños, quienes estuvieron en momentos fructíferos y momentos difíciles.

A mi asesor de trabajo de grado Jorge Paéz por ser la persona que confió en mi y mis capacidades, por apoyarme en los primeros pasos de investigación y lograr proyectar en mi un futuro como investigador en matemáticas.

A mis profesores Luis Barriga que direccionó mi vida hacia las matemáticas, al profesor Camilo Sua, William Jimenez y al profesor Benjamín Sarmiento por brindarme esa inspiración en la investigación matemática relacionada con la programación, al profesor Luis Espitia y al profesor Orlando Aya por ayudarme a generar capacidades sumamente importantes en el cálculo, que como resultado hicieron posible este gran trabajo, al profesor Alberto Donado y al profesor Luis Guayambuco que me apoyaron a tener confianza en las matemáticas basándome en las demostraciones y deducciones.

A Jeimmy Amado por siempre apoyarme, animarme, en los momentos exitosos como el 5° encuentro de integrales, por no dejarme desfallecer en los momentos difíciles y por el apoyo incondicional en mi vida social y académica.

A José Luis Guevara por aportarme en la estructuración en $\text{\LaTeX}$ para este documento y sus sugerencias para la mejora del mismo. Además por instruirme en los conocimientos básicos de SageMath y $\text{\LaTeX}$. Gracias a su amistad he logrado mejorar y ampliar mis conocimientos matemáticos, que en gran parte se deben a esas reuniones ocasionales en la universidad y en la biblioteca.

A todos mis amigos por brindarme esos espacios de alegría, pasión e ideas para formarme como un verdadero profesional, como una persona con pensamientos críticos en la vida cotidiana y académica.

Dedicatoria

Este trabajo de grado esta dedicado a mi madre **Vitelvina Ladino Cortes** quien con su amor, paciencia, esfuerzo y cariño me han permitido llegar a cumplir un sueño mas, inculcando en mi el ejemplo de luchar con esfuerzo y valentía por ser el mejor y a la vez el mas humilde. Además de recordarme el apoyo y compañía incondicional que siempre **DIOS** me brinda.

Justificación

Actualmente se cuenta con algunas definiciones formales de derivada de orden real, propuestas y mejoradas por algunos matemáticos como Oliver Heaviside (1850- 1925), Marcel Riesz (1886- 1969) y Michele Caputo (1962-). Pierantozzi (2006) menciona que estas definiciones formales llevaron a que matemáticos del siglo XX logaran aplicaciones en varias disciplinas y temas relacionados con viscoelasticidad, difusión de ondas y crecimiento tumoral, entre otras.

Ahora bien, lo que se espera en el trabajo de grado es realizar una generalización del orden de la derivada y hacer una extensión del orden natural al orden real, por medio del estudio y análisis de las definiciones de la derivada de orden natural y entera. Además, se pretende realizar una indagación del operador difero-integral y las propiedades que surgen en la derivada de orden real. Por otra parte, se aspira exponer algunas aplicaciones de estas derivadas en otras ciencias o en las matemáticas.

El proceso de calcular derivadas de orden real con funciones especiales o derivadas de orden demasiado grande hace complejo la evaluación de dicha derivada, ya que muy pocas de las funciones a las que se aplica este operador difero-integral tienen soluciones en funciones elementales, por lo que se privilegia el trabajo bajo aproximaciones; por ello se espera presentar un aplicativo en el que se puedan calcular estas derivadas, bien sea de manera numérica o analítica, con una representación gráfica del problema.

Introducción

Dios hace aritmética.

Karl Friedrich Gauss

El presente trabajo tiene por objetivo extender la derivada de orden natural a un orden real y estudiar algunas de sus propiedades básicas. Para esta construcción el documento contiene cuatro capítulos titulados: Funciones especiales, Derivada de orden natural, Derivada de orden entero y Derivada de orden real. Estos incluyen definiciones, teoremas y corolarios los cuales están enumerados según el capítulo, luego se exponen algunas conclusiones sobre el trabajo, seguido de ello se presentan las demostraciones de los teoremas mas relevantes de cada capítulo como anexos. Para que sea de ayuda al lector de este documento se presentan hipervínculos (Capítulo [A](#)) de color azul para movilizarse con facilidad en el documento con un solo clic, estos están destinados para capítulos, secciones, apéndices, ecuaciones, teoremas, definiciones y demostraciones.

Capítulo 1 contiene los requisitos básicos para trabajar la derivada de orden real, por ello se presenta la transformada de Laplace la cual da paso a la definición integral de la función gamma, siendo esta la extensión de la función factorial en el conjunto de los números naturales al conjunto de los números reales, en este capítulo también se presentan algunas de las propiedades que son de utilidad al momento de calcular algunas derivadas. Dentro de algunas propiedades importantes se exhibe la relación de la función gamma y la función beta.

Capítulo 2 se presenta algunas definiciones de derivada por medio del límite y a partir de una de estas definiciones se generaliza el orden de la derivada de una función en el conjunto de

los naturales. Posteriormente se encuentran algunas reglas de derivación generalizadas como las reglas de la suma, producto, cociente y para concluir el capítulo se presentan derivadas de orden natural de algunas funciones trigonométricas y transcendentales.

Capítulo 3 contiene la definición de derivada de orden entero negativo de una función, que se obtiene de la generalización dada en el capítulo 2. Posteriormente se presenta el sentido matemático de la derivada de orden entero negativo.

Finalmente el capítulo 4 contiene la derivada de orden real negativa haciendo uso de lo encontrado en los capítulos anteriores. A partir de esta extensión se presentan las definiciones de derivada de orden real positivo propuestas por Caputo, ahora bien esta definición presenta dificultades para calcular algunas derivadas, como alternativa se exhibe la definición de Caputo-Fabrizio.

Capítulo 1

Requisitos para trabajar en la derivada de orden real

Si yo me despertara después de
haber dormido durante mil años,
mi primera pregunta sería: ¿Ha
sido demostrada la hipótesis de
Riemann?

David Hilbert

En este capítulo se presentan funciones más utilizadas en el cálculo de derivadas de orden real

1.1. Transformada de Laplace

En esta sección se dará a conocer una de las herramientas más importantes del cálculo, además de ser una de las funciones más usadas para la solución de ecuaciones diferenciales.

Definición 1.1 (Transformada de Laplace). *Dada $f(x)$ una función definida para $x > 0$*

entonces

$$\mathcal{L}[f(x)](s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} f(t) dt$$

con $s > 0$

Ejemplo 1.1. Encontrar la transformada de Laplace de la función $f(x) = 1$

Solución:

Aplicando la definición 1.1 a la función $f(x) = 1$

$$\mathcal{L}[1](s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot 1 dt$$

simplificando

$$\mathcal{L}[1](s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt$$

calculando la integral

$$\mathcal{L}[1](s) = - \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{e^{-st}}{s} \Big|_0^b$$

calculando los limites

$$\mathcal{L}[1](s) = - \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{-sb}}{s} - \frac{1}{s} \right)$$

calculando el limite

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[1](s) &= - \left(-\frac{1}{s} \right) \\ \mathcal{L}[1](s) &= \frac{1}{s} \end{aligned}$$

La transformada de Laplace cumple con la propiedad de linealidad y se enuncia en el siguiente teorema

Teorema 1.1 (Linealidad Laplace). *La transformada de laplace es una operación lineal*

$$\mathcal{L}[\alpha f(x) \pm \beta g(x)](s) = \alpha \mathcal{L}[f(x)](s) \pm \beta \mathcal{L}[g(x)](s)$$

La demostración del teorema 1.1 se encuentra en el Apéndice A como demostración A.1

Ejemplo 1.2. Sea $h(x) = ax + b$ calcular

$$\mathcal{L}[h(x)](s)$$

con $a, b \in \mathbb{R}$

Solución:

Aplicando el teorema 1.1

$$\mathcal{L}[ax + b](s) = a\mathcal{L}[x](s) + b\mathcal{L}[1](s)$$

en el ejemplo 1.1 se calculo el Laplace de la función $f(x) = 1$

$$\mathcal{L}[ax + b](s) = a \int_0^{\infty} e^{-st}(t)dt + \frac{b}{s}$$

integrando por partes

$$\mathcal{L}[ax + b](s) = - \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{ae^{-st}(t)}{s} \Big|_0^b + \frac{a}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt + \frac{b}{s}$$

evaluando el limite y calculando la integral

$$\mathcal{L}[ax + b](s) = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{a}{s} \cdot \frac{e^{-st}}{s} \Big|_0^b + \frac{b}{s}$$

evaluando limites

$$\mathcal{L}[ax + b](s) = \frac{a}{s^2} + \frac{b}{s}$$

Teorema 1.2 (Existencia transformada de Laplace). *Sea $f(x)$ una función integrable, definida en un intervalo y satisfice*

$$|f(x)| \leq Me^{\alpha x} \quad , \quad \forall x \geq 0$$

donde M y α son constantes. Entonces la transformada de Laplace de $f(x)$ existe $\forall s > \alpha$

La demostración del teorema 1.2 se encuentra en el Apéndice A como demostración A.2 existe un teorema que involucra la derivada y la transformada de Laplace

Teorema 1.3 (Transformada de Laplace y derivada). *Si $f(x)$ satisface el teorema 1.2 entonces*

$$\mathcal{L}[f'(x)](s) = s\mathcal{L}[f(x)](s) - f(0)$$

La demostración del teorema 1.3 se encuentra en el Apéndice A como demostración A.3

Sin embargo el teorema 1.3 se puede generalizar en los naturales de la siguiente manera

Teorema 1.4 (Transformada de laplace y derivada generalizado). *Si $n \in \mathbb{N}$ y $f(x)$ satisface*

el teorema 1.2 entonces

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(x)](s) = s^n \mathcal{L}[f(x)](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} f^{(k)}(0)$$

La demostración del teorema 1.4 se encuentra en el Apéndice A como demostración A.4

Ejemplo 1.3. Dada la ecuación diferencial

$$y'' - x = 0$$

encontrar su solución con las condiciones iniciales

$$y(0) = 0$$

$$y'(0) = 0$$

Solución:

Aplicando transformada de Laplace a la ecuación diferencial se tiene:

$$\mathcal{L}[y'' - x](s) = \mathcal{L}[0](s)$$

por el teorema 1.1

$$\mathcal{L}[y''](s) - \mathcal{L}[x](s) = \mathcal{L}[0](s)$$

la transformada de Laplace de la función cero es cero

$$\mathcal{L}[y''](s) - \mathcal{L}[x](s) = 0$$

aplicando el teorema 1.4 y calculando la transformada de Laplace de la función $f(x) = x$

$$s^2 \mathcal{L}[y](s) - sy(0) - y'(0) - \frac{1}{s^2} = 0$$

aplicando las condiciones iniciales

$$s^2 \mathcal{L}[y](s) - \frac{1}{s^2} = 0$$

despejando

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{1}{s^4}$$

calculando el Laplace inversa

$$y = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^4} \right\} (x)$$

reescribiendo

$$y = \frac{1}{6} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{6}{s^{3+1}} \right\} (x)$$

logrando evidenciar que la transformada inversa de $3/(s^{3+1})$ es x^3

$$y = \frac{1}{6} x^3$$

siendo esta la solución a la ecuación diferencial

1.2. Función Gamma

La función Gamma es importante en el cálculo de derivadas de orden no real y en otros ámbitos de las matemáticas. Por ello se introduce algunas nociones básicas y propiedades para un posterior uso.

Esta función proviene de la transformada de Laplace con $s = 1$ de la función $f(x) = x^{\alpha-1}$ conociendo que $\alpha > 0$ para que dicha integral converja

Definición 1.2 (Función gamma integral).

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \alpha > 0$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$

1.2.1. Propiedades Básicas

Dada la definición 1.2 calculada en $\alpha + 1$

$$\Gamma(\alpha + 1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha} dt$$

integrando por partes

$$\Gamma(\alpha + 1) = -t^{\alpha} e^{-t} \Big|_0^{\infty} + \alpha \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt$$

evaluando límites

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt$$

aplicando la definición 1.2

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$$

así obteniendo la siguiente propiedad

Propiedad 1.1.

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha), \alpha > 0$$

Uno de los resultados más importantes sobre la función gamma es la generalización del factorial. Dada la función $\Gamma(n + 1)$ con $n \in \mathbb{N}$ y $n + 1 > 0$.

Por la propiedad 1.1

$$\Gamma(n + 1) = n \Gamma(n)$$

aplicando la propiedad 1.1

$$\Gamma(n + 1) = n(n - 1) \Gamma(n - 1)$$

volviendo aplicar la propiedad 1.1

$$\Gamma(n + 1) = n(n - 1)(n - 2) \Gamma(n - 2)$$

$$\vdots$$

$$\Gamma(n + 1) = n(n - 1)(n - 2) \cdots \Gamma(1)$$

usando la definición 1.2

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)(n-2) \cdots \int_0^\infty e^{-t} t^{n-1} dt$$

simplificando

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)(n-2) \cdots \int_0^\infty e^{-t} dt$$

calculando la integral

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot \left[-e^{-t} \right]_0^\infty$$

evaluando limites

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1$$

obteniendo la siguiente propiedad

Propiedad 1.2 (Función gamma y la función factorial). Si $n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(n+1) = n! , \quad n+1 > 0$$

1.2.2. Función Gamma como producto Infinito

Una de las definiciones conocidas de la función Gamma la propuso Euler como producto infinito y se deducirá como sigue.

Partiendo de la definición 1.2

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt$$

reescribiendo la función e^{-t} a su forma de limite

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{\alpha-1} dt$$

como $n \rightarrow \infty$ y el limite superior de la integral también se saca el limite y se hace dependiente de n el limite superior de la integral

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{\alpha-1} dt$$

haciendo la sustitución $w = t/n$ con $dw = dt/n$ con limites de integración $[0, n]_t = [0, 1]_w$

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\alpha} \int_0^1 (1 - w)^n w^{\alpha-1} dw$$

integrando por partes

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\alpha} n}{\alpha} \int_0^1 (1 - w)^{n-1} w^{\alpha} dw$$

volviendo a integrar por partes

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\alpha} n(n-1)}{\alpha(\alpha+1)} \int_0^1 (1 - w)^{n-2} w^{\alpha+1} dw$$

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\alpha} n(n-1) \cdots 2 \cdot 1}{\alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+n)}$$

reescribiendo

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{\alpha + 1} \right) \cdots \left(\frac{1}{\alpha + n} \right)$$

amplificando

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{\alpha + 1} \right) \cdots \left(\frac{1}{\alpha + n} \right) \frac{2^\alpha}{1^\alpha} \cdots \frac{n^\alpha}{(n-1)^\alpha}$$

reescribiendo

$$\Gamma(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1} \right)^\alpha \left(1 + \frac{\alpha}{1} \right)^{-1} \cdots \left(1 + \frac{1}{n} \right)^\alpha \left(1 + \frac{\alpha}{n} \right)^{-1}$$

escribiendo en notación de productoria y calculando el limite

Definición 1.3 (Función gamma como producto infinito (Formula de Euler)).

$$\Gamma(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k} \right)^\alpha \left(1 + \frac{\alpha}{k} \right)^{-1}$$

1.2.3. Formulas exactas y aproximaciones de la función gamma

Existen formulas y propiedades con valores exactos de la función gamma que facilitan los cálculos. Una de las conocidas es la de inversos.

Propiedad 1.3 (Gamma inversos). Si $n, p \in \mathbb{N} - \{0\}$ entonces

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{p}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{p}\right) \frac{(pn - (p-1))! \cdots!}{p^n}$$

Sin embargo la propiedad 1.3 es poco usada ya que es dependiente de $\Gamma(1/p)$, pero

existe una propiedad llamada gamma medios y se enuncia como sigue.

Propiedad 1.4 (Gamma medios).

Si $n \in \mathbb{N}$ entonces

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$$

Si $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ entonces

$$\Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right) = \frac{(-4)^{n-1} n! \sqrt{\pi}}{(2n)!}$$

La propiedad 1.4 facilita calcular algunas integrales no elementales definidas

Ejemplo 1.4. Calcular la integral de $f(x) = e^{-x^2}$ en el intervalo $[0, \infty)$

Solución: haciendo la sustitución $t = x^2$ con $dt = 2x dx$ y los limites $[0, \infty)_x = [0, \infty)_t$

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-t} t^{-1/2} dt$$

reescribiendo

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-t} t^{1/2-1} dt$$

aplicando la definición 1.2

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

reescribiendo

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2} + 0\right)$$

aplicando la propiedad 1.4

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4^0 \cdot 1} \sqrt{\pi}$$

simplificando

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

También existe la forma trigonométrica para valores exactos de la función gamma

Propiedad 1.5 (Forma trigonométrica). Si $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\alpha\pi)}$$

1.3. Función Beta

La función mas cercana a la función gamma es la función beta y también esta definida por una integral como sigue

Definición 1.4 (Función beta). Si $\alpha, \mu \in \mathbb{R}^+$

$$\mathcal{B}(\alpha, \mu) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\mu-1} dt$$

Esta definición se puede transformar realizando algunas sustituciones dependiendo que

tipo de integral se desee. Sin embargo existe la relación mas conocida con la función gamma. Para ello se deducirá partiendo del producto de la función gamma de α y μ

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu) = \int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}dt \int_0^\infty e^{-t}t^{\mu-1}dt$$

cambio de variable en la segunda integral $u = t$ con $du = dt$

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu) = \int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}dt \int_0^\infty e^{-u}u^{\mu-1}du$$

Ingresando la integral dentro

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu) = \int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1} \int_0^\infty e^{-u}u^{\mu-1}du dt$$

haciendo la sustitución $u = ty$ con $du = tdy$ y limites $[0, \infty)_t = [0, \infty)_y$

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu) = \int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1} \int_0^\infty e^{-ty}(ty)^{\mu-1}tdy dt$$

reescribiendo

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu) = \int_0^\infty t^{\alpha+\mu-1} \int_0^\infty e^{-t(y+1)}y^{\mu-1}dy dt$$

reescribiendo

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu) = \int_0^\infty y^{\mu-1} \int_0^\infty e^{-t(y+1)}t^{\alpha+\mu-1}dt dy$$

haciendo la sustitución $t = w/(y + 1)$ diferenciando $dt = dw/(y + 1)$ cambiando los limites de integración $[0, \infty)_t = [0, \infty)_w$

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu) = \int_0^\infty \frac{y^{\mu-1}}{(y+1)^{\alpha+\mu}} \int_0^\infty e^{-w} w^{\alpha+\mu-1} dw dy$$

haciendo la sustitución $w = t$ diferenciando $dw = dt$ cambiando los limites de integración $[0, \infty)_w = [0, \infty)_t$ y haciendo la sustitución $p = y/(1 - y)$ diferenciando $dp = dy/(1 - y)^2$ cambiando los limites de integración $[0, \infty)_y = [0, 1]_p$

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu) = \int_0^\infty p^{\mu-1} (1-p)^{\alpha-1} \int_0^\infty e^{-w} w^{\alpha+\mu-1} dw dp$$

sacando la integral y aplicando la definición 1.2

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu) = \int_0^\infty p^{\mu-1} (1-p)^{\alpha-1} dp \Gamma(\alpha + \mu)$$

haciendo la sustitución $p = 1 - t$ diferenciando $dp = -dt$ cambiando los limites de integración $[0, 1]_p = [0, 1]_t$

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} (1-t)^{\mu-1} dt \Gamma(\alpha + \mu)$$

aplicando la definición 1.4

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu) = \mathcal{B}(\alpha, \mu) \Gamma(\alpha + \mu)$$

despejando a la función beta

$$\mathcal{B}(\alpha, \mu) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\alpha + \mu)}$$

llegando a la siguiente propiedad

Propiedad 1.6 (Función beta y función gamma). *Si $\alpha, \mu \in \mathbb{R}^+$*

$$\mathcal{B}(\alpha, \mu) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\alpha + \mu)}$$

La deducción de la propiedad 1.6 se obtiene la siguiente propiedad

Propiedad 1.7 (La función beta es reflexiva). *Si $\alpha, \mu \in \mathbb{R}^+$*

$$\mathcal{B}(\alpha, \mu) = \mathcal{B}(\mu, \alpha)$$

2

Generalizando el orden de la derivada a los naturales

Los matemáticos nacen, no se hacen.

Henri Poincaré

En este capítulo se presentará la construcción de la derivada de orden natural, algunas de sus propiedades, aplicaciones en las matemáticas y en otras ciencias.

2.1. Definición de derivada

Una de las operaciones más importantes del cálculo es la derivada de una función $f(x)$, que también es una función $f'(x)$ y esta a su vez proporciona la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en un punto $(x, f(x))$.

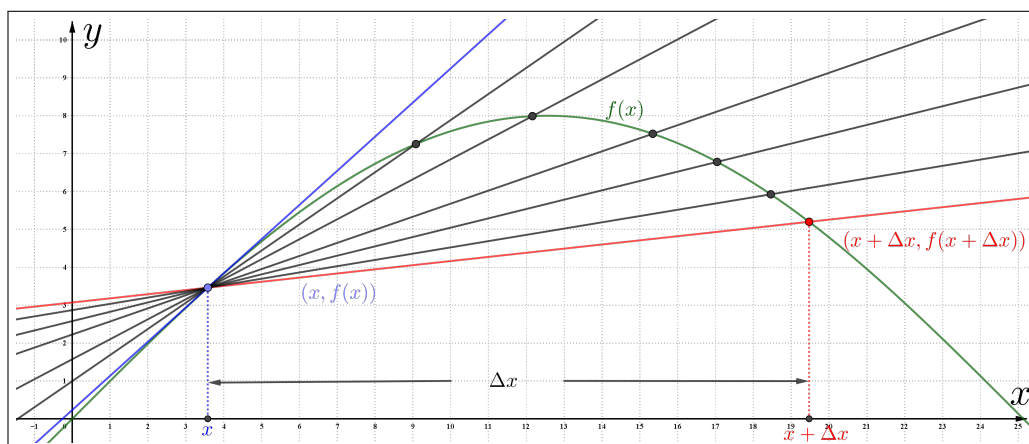


Figura 2.1: Imagen de la definición de derivada en x por derecha

Definición 2.1 (Derivada unilateral por derecha). La derivada usual de la función o derivada unilateral por derecha $f(x)$ con respecto a la variable x , es la función $f'(x)$ cuyo valor en x es

$$\frac{d}{dx} f(x) = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad \Delta x > 0$$

vale resaltar que esta definición se cumple siempre y cuando el limite exista.

Ahora se presenta un ejemplo aplicando la definición 2.1.

Ejemplo 2.1. Derivar

$$f(x) = x^2$$

Solución

Aquí se tiene $f(x) = x^2$ y aplicando la definición 2.1

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

desarrollando el cuadrado

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

simplificando x^2

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

factorizando y simplificando Δx

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x)$$

ahora evaluando el limite

$$f'(x) = 2x$$

Siendo $2x$ la derivada unilateral por izquierda de x^2 .

Como se observa en la imagen [2.1](#) que a medida que $\Delta x \rightarrow 0$ este se acerca a x por la derecha, ahora que sucede si se toma un Δx pero a la izquierda de x .

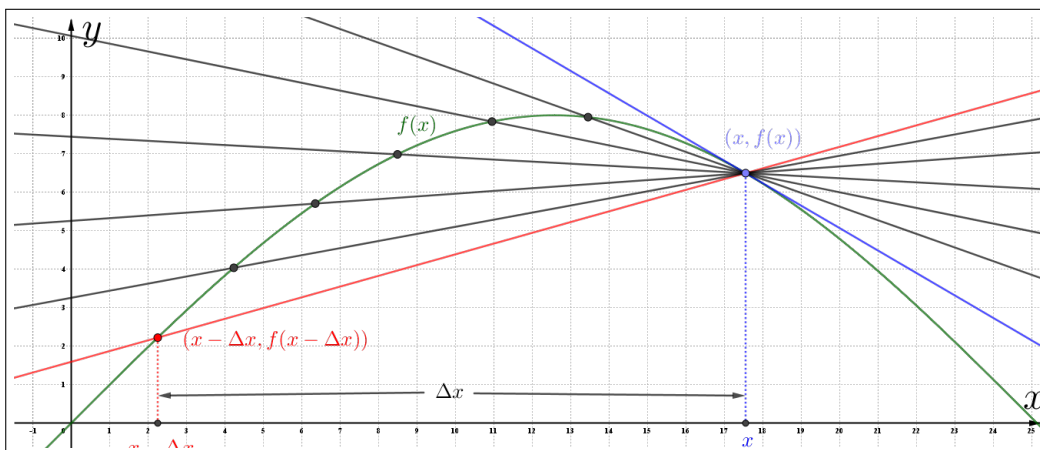


Figura 2.2: Imagen de la definición de derivada en x por izquierda

Definición 2.2 (Derivada unilateral por izquierda). La derivada unilateral por izquierda de la función $f(x)$ con respecto a la variable x , es la función $f'(x)$ cuyo valor en x es

$$\frac{d}{dx}f(x) = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x}, \quad \Delta x > 0$$

vale resaltar que esta definición se cumple siempre y cuando el limite exista.

Ahora se presentará el ejemplo 2.1 aplicando la definición 2.2

Ejemplo 2.2. Derivar

$$f(x) = x^2$$

Solución

Aquí se tiene $f(x) = x^2$ y aplicando la definición 2.2

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 - (x - \Delta x)^2}{\Delta x}$$

desarrollando el cuadrado

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x^2 + 2x\Delta x - (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

simplificando x^2

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x - (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

factorizando y simplificando Δx

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x - \Delta x)$$

ahora evaluando el limite

$$f'(x) = 2x$$

Siendo $2x$ la derivada unilateral por izquierda de x^2 e igual al resultado del ejemplo [2.1](#).

La definición de derivada unilateral por izquierda y unilateral por derecha se acostumbra a notar $f'_-(x)$ y $f'_+(x)$ respectivamente. Sin embargo hay una definición que no toma una sola lateral sino las dos y esta fue estudiada por el matemático Bernhard Riemann(1826-1866).

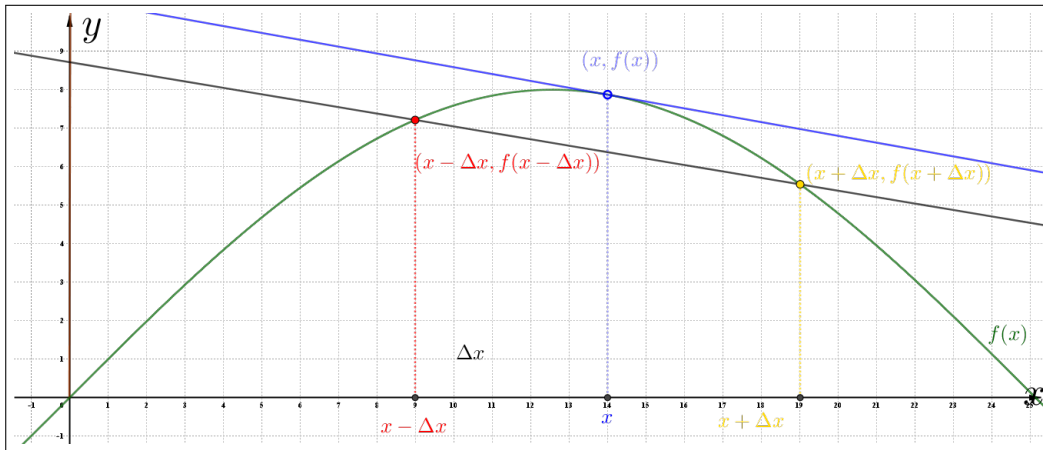


Figura 2.3: Imagen de la definición de derivada bilateral de Riemman en x

Definición 2.3 (Derivada bilateral de Riemman). La derivada bilateral de la función $f(x)$ con respecto a la variable x , es la función $f'(x)$ cuyo valor en x es

$$\frac{d}{dx}f(x) = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x}, \quad \Delta x > 0$$

vale resaltar que esta definición se cumple siempre y cuando el limite exista.

Ahora se presentará el ejemplo 2.1 y 2.2 aplicando la definición 2.3.

Ejemplo 2.3. Derivar

$$f(x) = x^2$$

Solución

Aquí se tiene $f(x) = x^2$ y aplicando la definición 2.3

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - (x - \Delta x)^2}{2\Delta x}$$

Desarrollando los binomios cuadrados

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 + 2x\Delta x - (\Delta x)^2}{2\Delta x}$$

simplificando términos semejantes y simplificando en el denominador

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4x\Delta x}{2\Delta x}$$

simplificando Δx , constantes y evaluando el limite

$$f'(x) = 2x$$

Siendo $2x$ la derivada bilateral de Riemman de x^2 e igual al resultado del ejemplo [2.1](#) y [2.2](#).

2.2. Generalización del orden de la derivada

En esta sección se abordará la generalización del orden de la derivada en los naturales. La definición de derivada 2.2 se conoce como derivada de orden uno o primera derivada de la función $f(x)$, ahora se calculará la segunda derivada $f^{(2)}(x)$ o $f''(x)$ de la función $f(x)$, haciendo uso de la definición 2.2.

$$g(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} \quad (2.1)$$

si se calcula la derivada $g'(x)$ de la función $g(x)$ se obtiene

$$f^{(2)}(x) = \frac{d^2}{dx^2}f(x) = \frac{d}{dx}g(x) \quad (2.2)$$

ahora calculando la derivada de $g(x)$ aplicando la definición de derivada 2.2

$$\frac{d}{dx}g(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(x - \Delta x)}{\Delta x} \quad (2.3)$$

sustituyendo (2.1) en (2.3) se obtiene

$$\frac{d}{dx}g(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x - \Delta x) - f(x - 2\Delta x)}{\Delta x}}{\Delta x}$$

usando propiedades de los limites y sumando

$$\frac{d}{dx}g(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2f(x - \Delta x) + f(x - 2\Delta x)}{(\Delta x)^2} \quad (2.4)$$

sustituyendo (2.4) en (2.2) se tiene que

$$f^{(2)}(x) = \frac{d^2}{dx^2}f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2f(x - \Delta x) + f(x - 2\Delta x)}{(\Delta x)^2} \quad (2.5)$$

ahora se toma como ejemplo la anterior deducción para encontrar la tercera derivada $f^{(3)}(x)$, tomando (2.5) como una función $h(x)$

$$h(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2f(x - \Delta x) + f(x - 2\Delta x)}{(\Delta x)^2} \quad (2.6)$$

si se calcula la derivada $h'(x)$ de la función $h(x)$ se obtiene

$$f^{(3)}(x) = \frac{d^2}{dx^2}g(x) = \frac{d}{dx}h(x) \quad (2.7)$$

ahora calculando la derivada de $h(x)$ aplicando la definición de derivada 2.2

$$\frac{d}{dx}h(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(x - \Delta x)}{\Delta x} \quad (2.8)$$

teniendo en cuenta las ecuaciones (2.8) y (2.7) se obtiene

$$\frac{d}{dx}h(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2f(x - \Delta x) + f(x - 2\Delta x)}{(\Delta x)^2} - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x - \Delta x) - 2f(x - 2\Delta x) + f(x - 3\Delta x)}{(\Delta x)^2}}{\Delta x}$$

usando propiedades de los limites, simplificando y realizando producto de extremos se tiene

$$\frac{d}{dx}h(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 3f(x - \Delta x) + 3f(x - 2\Delta x) - f(x - 3\Delta x)}{(\Delta x)^3} \quad (2.9)$$

sustituyendo la igualdad (2.9) en (2.7)

$$f^{(3)}(x) = \frac{d^2}{dx^2}g(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 3f(x - \Delta x) + 3f(x - 2\Delta x) - f(x - 3\Delta x)}{(\Delta x)^3} \quad (2.10)$$

teniendo en cuenta los resultados obtenidos y agrupando las igualdades (2.1), (2.5) y (2.10)

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x}$$

$$f^{(2)}(x) = \frac{d^2}{dx^2}f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2f(x - \Delta x) + f(x - 2\Delta x)}{(\Delta x)^2}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{d^3}{dx^3}f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 3f(x - \Delta x) + 3f(x - 2\Delta x) - f(x - 3\Delta x)}{(\Delta x)^3}$$

Ahora se encontrará la derivada n-ésima, denotada $f^{(n)}(x)$, de la función $f(x)$ donde $n \in \mathbb{N}$. Observando detalladamente las igualdades anteriores se observa los siguientes patrones:

1. En el numerador de la fracción dentro del limite los signos se alternan

$$1, -1, \dots, (-1)^k$$

2. En el numerador de la fracción dentro del limite los coeficientes que toma son los números combinatorios en el mismo orden del triangulo de Pascal

$$\binom{n}{k}$$

3. En el numerador de la fracción dentro del limite en el interior de los paréntesis donde están siendo evaluadas las funciones se tiene

$$f(x - k\Delta x)$$

En conclusión se tiene que:

$$f^{(n)}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta x)^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(x - k(\Delta x))$$

Teorema 2.1 (Derivada de orden natural). *La derivada n -ésima de la función $f(x)$ con respecto a la variable x es la función $f^{(n)}$ cuyo valor en x es*

$$f^{(n)}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta x)^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(x - k(\Delta x)) \quad (2.11)$$

siempre y cuando el limite exista.

La demostración del teorema 2.1 se encuentra en el apéndice B como demostración B.1.

Ejemplo 2.4. Calcular $f'(x)$ aplicando el teorema 2.1 de la función

$$f(x) = x$$

Solución

Aplicando el teorema 2.1 a la función $f(x) = x$ se obtiene

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \sum_{k=0}^1 (-1)^k \binom{1}{k} (x - k(\Delta x))$$

Aplicando propiedades de las sumatorias

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Delta x} \sum_{k=0}^1 (-1)^k \binom{1}{k} x - \frac{1}{\Delta x} \sum_{k=0}^1 (-1)^k \binom{1}{k} k(\Delta x) \right) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(x \left(\frac{1}{\Delta x} \sum_{k=0}^1 (-1)^k \binom{1}{k} \right) - \sum_{k=0}^1 (-1)^k \binom{1}{k} k \right) \end{aligned}$$

Dado que $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} f'(x) &= - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^1 (-1)^k \binom{1}{k} k \\ &= - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (-1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

en la gráfica 2.4 se encuentra la función $f(x) = x$ y su derivada $f'(x) = 1$

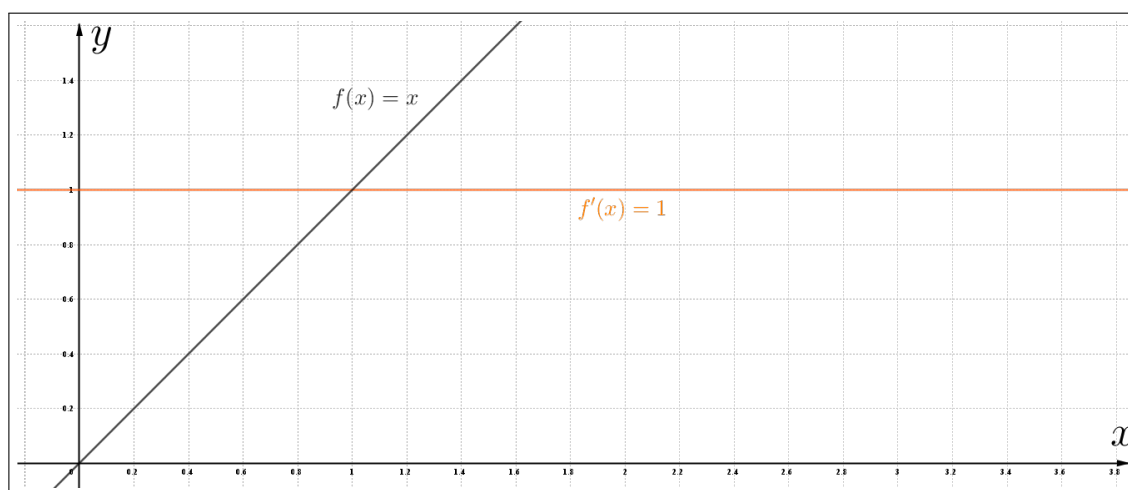


Figura 2.4: Derivada de $f(x) = x$

2.3. Reglas de derivación

En esta sección se encontraran algunas reglas de derivación que pueden ser útiles al calcular las derivadas de algunas funciones sin tener que aplicar el teorema 2.1 de manera directa.

Teorema 2.2 (Derivada de orden natural de una constante). *Si una función real tiene un valor*

constante $f(x) = c$, entonces

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} c, & \text{si } n = 0 \\ 0, & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

donde $n \in \mathbb{N}$ y $c \in \mathbb{R}$

La demostración del teorema 2.2 se encuentra en el apéndice B como demostración B.2.

Ejemplo 2.5. Calcular la derivada octava $f^{(8)}(x)$ de $f(x) = \frac{e}{\pi}$

Solución

Como $f(x)$ es una función constante se puede aplicar el teorema 2.2 y teniendo en cuenta que $n = 8$ siendo $n > 0$ entonces

$$f^{(8)}(x) = 0$$

Ejemplo 2.6. Calcular $f^{(0)}(x)$ de

$$f(x) = e + \pi$$

Solución

Como la suma de constantes es constante la $e + \pi$ es constante en consecuencia $f(x)$ es una función constante, por lo tanto se puede aplicar el teorema 2.2 y teniendo en cuenta que $n = 0$ entonces

$$f^{(0)}(x) = f(x) = e + \pi$$

Uno de los teoremas mas importantes de la sección es la función potencia $f(x) = x^p$ para ello realizaremos el proceso de generalización para calcular la derivada $f^{(n)}(x)$. Sea la función $f(x) = x^p$ donde $p \in \mathbb{N}$, su primera derivada o derivada de orden uno de la función $f(x)$ se calcula de la siguiente manera

Por el teorema 2.1 aplicado a la función $f(x) = x^p$ se tiene la primera derivada

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \sum_{k=0}^1 (-1)^k \binom{1}{k} (x - k(\Delta x))^p$$

expandiendo la suma

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^p - (x - k\Delta x)^p}{\Delta x}$$

Por el teorema de binomio se puede expandir $(x - k\Delta x)^p$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^p - \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} (-1)^i x^{p-i} (\Delta x)^i}{\Delta x}$$

sacando el termino para $i = 0$ de la sumatoria

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^p - x^p - \sum_{i=1}^p \binom{p}{i} (-1)^i x^{p-i} (\Delta x)^i}{\Delta x}$$

simplificando términos semejantes y reescribiendo

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{\Delta x} \sum_{i=1}^p \binom{p}{i} (-1)^i x^{p-i} (\Delta x)^i$$

ingresando $\frac{-1}{\Delta x}$ en la sumatoria

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^p \binom{p}{i} (-1)^{i-1} x^{p-i} (\Delta x)^{i-1}$$

sacando el termino para $i = 1$ de la sumatoria

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\binom{p}{1} x^{p-1} + \sum_{i=2}^p \binom{p}{i} (-1)^{i-1} x^{p-i} (\Delta x)^{i-1} \right]$$

como el limite de una suma es la suma de los limites siempre y cuando exista el limite podemos separar como sigue

$$f'(x) = \binom{p}{1}x^{p-1} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=2}^p \binom{p}{i}(-1)^{i-1}x^{p-i}(\Delta x)^{i-1}$$

como $i \geq 2$ y $\Delta x \rightarrow 0$ entonces $(\Delta x)^{i-1} \rightarrow 0$, por lo tanto la sumatoria tiende a 0

$$f'(x) = \binom{p}{1}x^{p-1} + 0$$

finalmente la primera derivada de $f(x) = x^p$ es

$$f'(x) = \binom{p}{1}x^{p-1}$$

Ahora para calcular la segunda derivada o para $n = 2$

$$f^{(2)}(x) = \frac{d}{dx}(f'(x))$$

se sabe que la derivada de $f(x) = x^p$ es $f'(x) = \binom{p}{1}x^{p-1}$ y remplazando en el anterior paso

$$f^{(2)}(x) = \frac{d}{dx} \left(\binom{p}{1}x^{p-1} \right)$$

aplicando el teorema [2.1](#)

$$f^{(2)}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \sum_{k=0}^1 (-1)^k \binom{1}{k} \binom{p}{1} (x - k(\Delta x))^{p-1}$$

sacando $\binom{p}{1}$ de la sumatoria

$$f^{(2)}(x) = \binom{p}{1} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \sum_{k=0}^1 (-1)^k \binom{1}{k} (x - k(\Delta x))^{p-1}$$

expandiendo la suma

$$f^{(2)}(x) = \binom{p}{1} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^{p-1} - (x - k\Delta x)^{p-1}}{\Delta x}$$

Por el teorema de binomio se puede expandir $(x - k\Delta x)^{p-1}$

$$f^{(2)}(x) = \binom{p}{1} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^p - \sum_{i=0}^{p-1} \binom{p-1}{i} (-1)^i x^{p-i-1} (\Delta x)^i}{\Delta x}$$

sacando el termino para $i = 0$ de la sumatoria

$$f^{(2)}(x) = \binom{p}{1} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^{p-1} - x^{p-1} - \sum_{i=1}^{p-1} \binom{p-1}{i} (-1)^i x^{p-i-1} (\Delta x)^i}{\Delta x}$$

simplificando términos semejantes y reescribiendo

$$f^{(2)}(x) = \binom{p}{1} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{\Delta x} \sum_{i=1}^{p-1} \binom{p-1}{i} (-1)^i x^{p-i-1} (\Delta x)^i$$

ingresando $\frac{-1}{\Delta x}$ en la sumatoria

$$f^{(2)}(x) = \binom{p}{1} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{p-1} \binom{p-1}{i} (-1)^{i-1} x^{p-i-1} (\Delta x)^{i-1}$$

sacando el termino para $i = 1$ de la sumatoria

$$f^{(2)}(x) = \binom{p}{1} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\binom{p-1}{1} x^{p-1} + \sum_{i=2}^{p-1} \binom{p-1}{i} (-1)^{i-1} x^{p-i-1} (\Delta x)^{i-1} \right]$$

como el limite de una suma es la suma de los limites siempre y cuando exista el limite podemos separar como sigue

$$f^{(2)}(x) = \binom{p}{1} \binom{p-1}{1} x^{p-2} + \binom{p}{1} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=2}^{p-1} \binom{p}{i} (-1)^{i-1} x^{p-i-1} (\Delta x)^{i-1}$$

como $i \geq 2$ y $\Delta x \rightarrow 0$ entonces $(\Delta x)^{i-1} \rightarrow 0$, por lo tanto la sumatoria tiende a 0

$$f^{(2)}(x) = \binom{p}{1} \binom{p-1}{1} x^{p-2} + 0$$

finalmente la deriva de de orden $n = 2$ de $f(x) = x^p$ es

$$f^{(2)}(x) = \binom{p}{1} \binom{p-1}{1} x^{p-2}$$

Teniendo en cuenta las derivadas para $n = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \binom{p}{1} x^{p-1} \\ f^{(2)}(x) &= \binom{p}{1} \binom{p-1}{1} x^{p-2} \end{aligned}$$

y si se continúa haciendo se logra que

$$\begin{aligned} f^{(3)}(x) &= \binom{p}{1} \binom{p-1}{1} \binom{p-2}{1} x^{p-3} \\ f^{(4)}(x) &= \binom{p}{1} \binom{p-1}{1} \binom{p-2}{1} \binom{p-3}{1} x^{p-4} \end{aligned}$$

así obteniendo la generalización para $n \in \mathbb{N}$

$$f^{(n)}(x) = \binom{p}{1} \binom{p-1}{1} \binom{p-2}{1} \binom{p-3}{1} \dots \binom{p-n}{1} x^{p-n}$$

simplificando y desarrollando los binomios

$$f^{(n)}(x) = p(p-1)(p-2) \cdots (p-n+1)x^{p-n}$$

completando el factorial

$$f^{(n)}(x) = \frac{p(p-1)(p-2) \cdots (p-n+1)(p-n)(p-n-1)(p-n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(p-n)(p-n-1)(p-n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1} x^{p-n}$$

ahora en el numerador se tiene el factorial de p y en el denominador el factorial de $p-n$, así obteniendo la derivada de orden natural para x^p donde $0 \leq n \leq p$

$$f^{(n)}(x) = \frac{p!}{(p-n)!} x^{p-n}$$

este resultado se encuentra demostrado en el apéndice B como demostración B.3. Sin embargo cuando $n \geq p$ la derivada de $f(x) = x^p$ su derivada es cero, ya que, la derivada de orden p de esta función es $p!$ y como la derivada es de mayor orden esta se anulará, para observar la demostración mas detallada esta se encuentra en el apéndice B como demostración B.3.

Finalmente se obtiene el siguiente teorema con los dos últimos resultados obtenidos al calcular la derivada de orden natural de la función $f(x) = x^p$.

Teorema 2.3 (Derivada de orden natural de función potencia). *Si $f(x)$ es una función potencia $f(x) = x^p$ entonces*

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \frac{p!}{(p-n)!} x^{p-n}, & \text{si } 0 \leq n \leq p \\ 0 & , \text{ si } n > p \end{cases}$$

donde $n \in \mathbb{N}$ y $p \in \mathbb{N}$

La demostración del teorema 2.3 se encuentra en el apéndice B como demostración B.3 .

Aquí se presentan dos demostraciones una por inducción y otra a partir del teorema 2.1

Ejemplo 2.7. Calcular $f^{(6)}(x)$ aplicando el teorema 2.3 de la función

$$f(x) = x^{12}$$

Solución

como $f(x) = x^{12}$ entonces es una función potencia donde la potencia es $p = 12$, así se usará el teorema 2.3 para calcular la derivada de orden $n = 6$

$$f^{(6)}(x) = \frac{d^6}{d^6x}(x^{12})$$

aplicando el teorema 2.3 con $n = 6$ y $p = 12$

$$f^{(6)}(x) = \frac{12!}{(12-6)!}x^{12-6}$$

simplificando

$$f^{(6)}(x) = \frac{12!}{6!}x^6$$

resolviendo factoriales

$$f^{(6)}(x) = 665280x^6$$

finalmente la derivada de orden 6 de la función $f(x) = x^{12}$ es

$$f^{(6)}(x) = 665280x^6$$

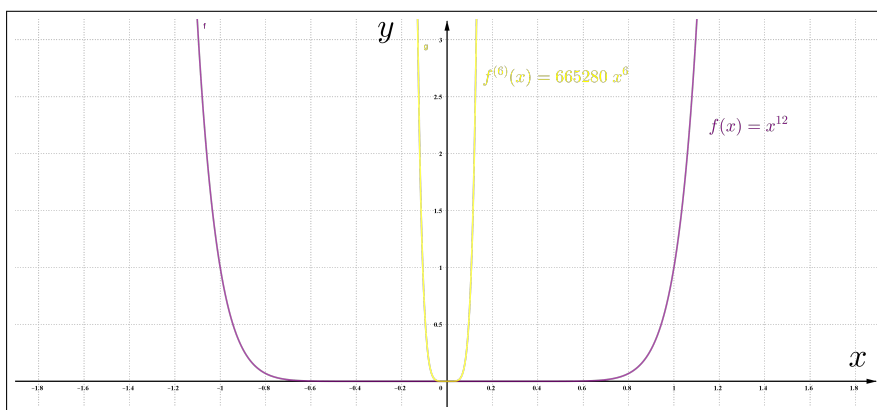


Figura 2.5: Imagen de la derivada de orden 6 de la función $f(x) = x^{12}$

Ejemplo 2.8. Calcular $f^{(n)}(x)$ aplicando el teorema 2.3 de la función

$$f(x) = x^{n+1}$$

donde $n \in \mathbb{N}$

Solución

como $f(x) = x^{n+1}$ entonces es una función potencia donde la potencia es $p = n + 1$, así se usará el teorema 2.3 para calcular la derivada de orden n

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{d^n x} (x^{n+1})$$

aplicando el teorema 2.3 con n y $p = n + 1$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(n+1)!}{(n+1-n)!} x^{n+1-n}$$

simplificando

$$f^{(n)}(x) = (n+1)!x$$

finalmente la derivada de orden n de la función $f(x) = x^{n+1}$ es

$$f^{(n)}(x) = (n+1)!x$$

Teorema 2.4 (Derivada de orden natural de función potencia negativa). *Si p es un entero positivo y $x \neq 0$, entonces*

$$\frac{d^n}{dx^n} \left(x^{-p} \right) = (-1)^n \frac{(p+n-1)!}{(p-1)!} x^{-(p+n)}$$

donde $n \in \mathbb{N}$

La demostración del teorema 2.4 se encuentra en el apéndice B como demostración B.4. Donde presenta una demostración por inducción.

Ejemplo 2.9. Calcular la derivada de orden 6 de la función

$$m(n) = \frac{2}{n^3}$$

en $n = 2$

Solución

Aplicando el teorema 2.4 a la función $m(n) = 2n^{-3}$

$$m^{(6)}(n) = (-1)^6 \frac{(3+6-1)!}{(3-1)!} n^{-(3+6)}$$

reescribiendo

$$m^{(6)}(n) = \frac{8!}{2!}n^{-9}$$

simplificando

$$m^{(6)}(n) = 20160n^{-9} = \frac{20160}{n^9}$$

ahora evaluando en $n = 2$

$$m^{(6)}(2) = \frac{20160}{(2)^9} = \frac{20160}{512} = \frac{315}{8}$$

en la figura 2.6 la gráfica de la función $m(n) = 2n^{-3}$ y $m^{(6)}(n)$.

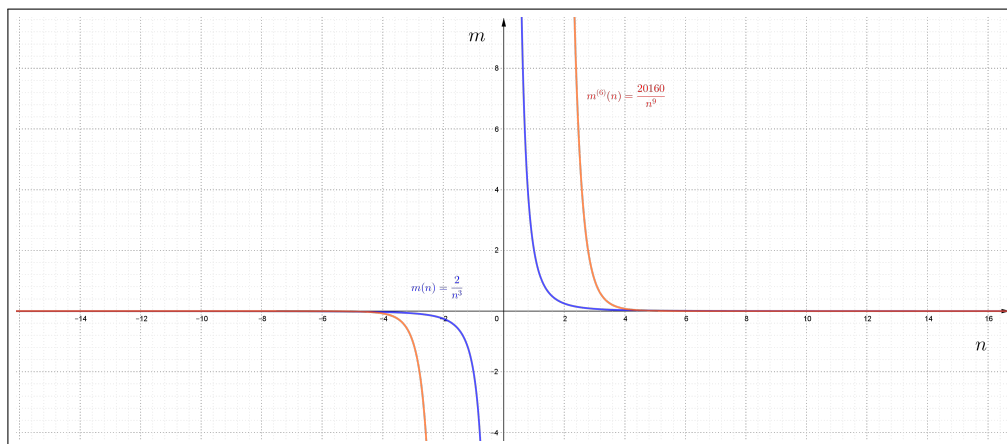


Figura 2.6: Imagen de la derivada de orden 6 de la función $m(n) = 2n^{-3}$

Teorema 2.5 (Derivada de una suma y múltiplos constantes). *Si f y g son diferenciables de x en cualquier orden con α y β constantes, entonces*

$$\frac{d^n}{dx^n}(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha f^{(n)}(x) + \beta g^{(n)}(x)$$

donde $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

La demostración del teorema 2.5 se encuentra en apéndice B como demostración B.5

Ejemplo 2.10. Calcular $P^{(n)}(u)$ aplicando el teorema 2.5 de la función

$$P(u) = a_0 + a_1u + a_2u^2 + \cdots + a_mu^m = \sum_{i=0}^m a_iu^i$$

donde $m \in \mathbb{N}$ y $m \geq n$

Solución

se debe calcular

$$P^{(n)}(u) = \frac{d^n}{du^n} \left(\sum_{i=0}^m a_iu^i \right)$$

por el teorema 2.5 se puede ingresar $\frac{d^n}{du^n}$ en la sumatoria

$$P^{(n)}(u) = \sum_{i=0}^m a_i \frac{d^n}{du^n} (u^i)$$

como i esta en el intervalo $0 \leq i \leq m$ y como $m \geq n$ se separa la sumatoria en dos, así dividiendo el intervalo

$$P^{(n)}(u) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \frac{d^n}{du^n} (u^i) + \sum_{i=n}^m a_i \frac{d^n}{du^n} (u^i)$$

en la primera sumatoria $i \leq n$, se aplica la segunda parte de la derivada de orden n del teorema 2.3 y en la segunda sumatoria $i \geq n$ se aplica la primera parte de la derivada de orden n del teorema 2.3

$$P^{(n)}(u) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(0) + \sum_{i=n}^m a_i \frac{i!}{(i-n)!} u^{i-n}$$

así la primera sumatoria se anula por tener un 0 como múltiplo manteniéndose la segunda sumatoria

$$P^{(n)}(u) = \sum_{i=n}^m a_i \frac{i!}{(i-n)!} u^{i-n}$$

finalmente $P^{(n)}(u)$ de $P(x) = \sum_{i=0}^m a_i u^i$ es

$$P^{(n)}(u) = \sum_{i=n}^m \frac{i!}{(i-n)!} a_i u^{i-n}$$

Ejemplo 2.11. Calcular $h^{(4)}(x)$ aplicando el teorema 2.5 de la función

$$h(x) = \frac{e}{\pi} x^9 + \sqrt{\frac{2}{3}} x^5 - \frac{1}{\sqrt{3}} x^7$$

Solución

Se debe calcular

$$h^{(4)}(x) = \frac{d^4}{dx^4} \left(\frac{e}{\pi} x^9 + \sqrt{\frac{2}{3}} x^5 - \frac{1}{\sqrt{3}} x^7 \right)$$

por el teorema 2.5 se puede calcular la derivada de cada termino

$$h^{(4)}(x) = \frac{d^4}{dx^4} \left(\frac{e}{\pi} x^9 \right) + \frac{d^4}{dx^4} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} x^5 \right) - \frac{d^4}{dx^4} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} x^7 \right)$$

por el teorema 2.5 se pueden sacar las constantes de las derivadas en cada termino

$$h^{(4)}(x) = \left(\frac{e}{\pi} \right) \frac{d^4}{dx^4} (x^9) + \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \right) \frac{d^4}{dx^4} (x^5) - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \frac{d^4}{dx^4} (x^7)$$

en cada terminando calculando la derivada de una potencia usando teorema 2.3

$$h^{(4)}(x) = \left(\frac{e}{\pi} \right) \left(\frac{9!}{5!} \right) x^5 + \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \right) \left(\frac{5!}{1!} \right) x - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left(\frac{7!}{3!} \right) x^3$$

finalmente la derivada $h^{(4)}(x)$ de $h(x)$ es

$$h^{(4)}(x) = \frac{3024e}{\pi} x^5 + 120\sqrt{\frac{2}{3}} x - \frac{840}{\sqrt{3}} x^3$$

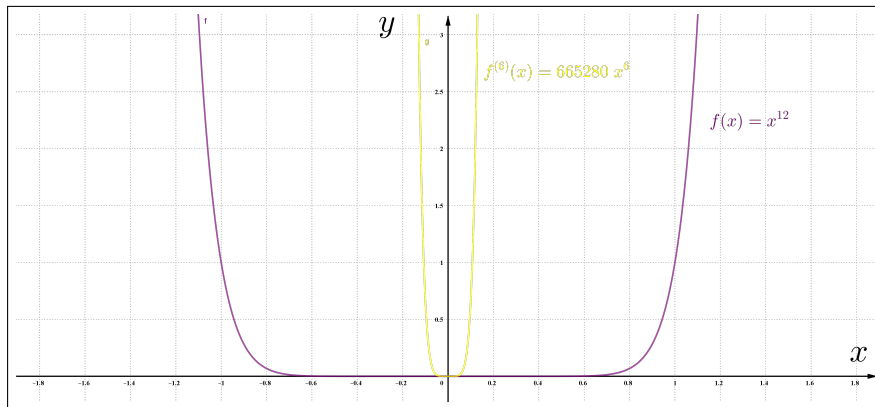


Figura 2.7: Imagen de la derivada de orden 4 de la función $h(x) = \frac{e}{\pi} x^9 + \sqrt{\frac{2}{3}} x^5 - \frac{1}{\sqrt{3}} x^7$

Como el teorema 2.5 garantiza que la derivada de una suma es la suma de sus derivada para cualquier orden n , en el producto *no* se cumple que la derivada de un producto es el

producto de las derivadas, esto lo asegura el siguiente teorema

Teorema 2.6 (Derivada de orden natural de un producto). *Si f y g son diferenciables en cualquier orden en x , entonces también lo es su producto y*

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n}(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$$

siendo $n \in \mathbb{N}$

La demostración del teorema 2.6 se encuentra en apéndice B como demostración B.6

Ejemplo 2.12. Calcular la derivada de orden 3 de la función $h(x) = (x^5 + \pi)(x^4 - 19)$

Solución

Primero se identifica las funciones $f(x)$ y $g(x)$ de la función $h(x)$

$$f(x) = x^5 + \pi$$

$$g(x) = x^4 - 19$$

ahora usando el teorema 2.3 se puede calcular las derivadas de orden superior de las funciones que se encuentran dentro de la sumatoria

$$f^{(k)}(x) = \frac{5!}{(5-k)!}x^{5-k}$$

$$g^{(3-k)}(x) = \frac{4!}{(4-3+k)!}x^{4-3+k} = \frac{4!}{(1+k)!}x^{1+k}$$

teniendo en cuenta la información antes presentada se aplica el teorema 2.6

$$h^{(3)}(x) = \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} \left(\frac{5!}{(5-k)!}x^{5-k} \right) \left(\frac{4!}{(1+k)!}x^{1+k} \right)$$

organizando factores

$$h^{(3)}(x) = \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} \frac{5!}{(5-k)!} \cdot \frac{4!}{(1+k)!} x^{5-k} \cdot x^{1+k}$$

simplificando

$$h^{(3)}(x) = \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} \frac{5!4!}{(5-k)!(1+k)!} x^6$$

expandiendo la sumatoria

$$h^{(3)}(x) = (24 + 180 + 240 + 60)x^6$$

simplificando

$$h^{(3)}(x) = 504x^6$$

siendo $h^{(3)} = 504x^6$ la derivada de orden 3 de la función $h(x) = (x^5 + \pi)(x^4 - 19)$, se puede evidenciar el gráfico 2.8 las dos funciones

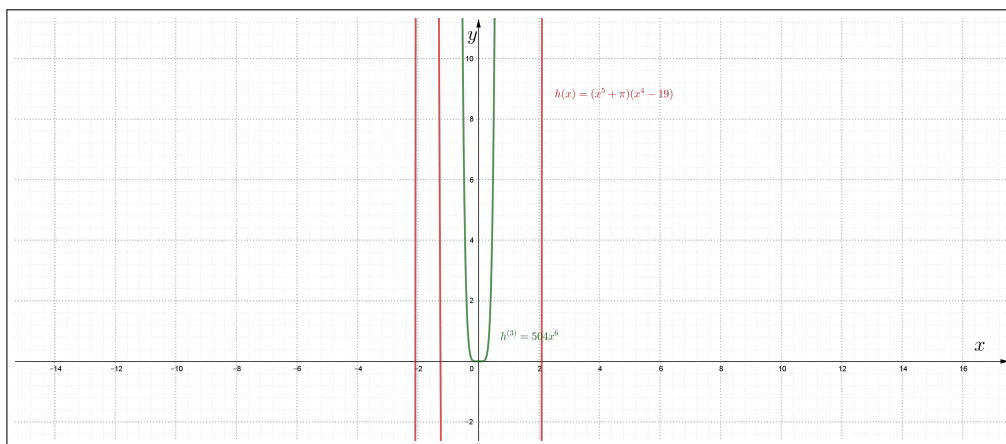


Figura 2.8: Gráfica de la función $h(x) = (x^5 + \pi)(x^4 - 19)$ y su derivada de orden 3 $h^{(3)}(x) = 504x^6$

Usualmente en los libros de cálculo se continua con el teorema para calcular la derivada de un cociente pero en este caso se dará prioridad a la derivada de orden natural de una función compuesta.

Teorema 2.7 (Derivada de orden natural de una función compuesta "Fórmula de Faà di Bruno"). Si $f(u)$ es diferenciable en cualquier orden en el punto $u = g(x)$, y $g(x)$ es diferenciable en cualquier orden en x , entonces la función $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ es diferenciable en cualquier orden en x , y

$$\frac{d^n}{dx^n} f(g(x)) = \sum \frac{n!}{m_1! 1!^{m_1} m_2! 2!^{m_2} \dots m_n! n!^{m_n}} \cdot f^{(m_1+m_2+\dots+m_n)}(g(x)) \cdot \prod_{j=1}^n \left(g^{(j)}(x) \right)^{m_j}$$

donde

$$1 \cdot m_1 + 2 \cdot m_2 + \dots + n \cdot m_n = n$$

también se puede obtener la forma compacta con los polinomios de Bell

$$\frac{d^n}{dx^n} f(g(x)) = \sum_{k=1}^n f^{(k)}(g(x)) \cdot B_{n,k}(g^{(1)}(x), g^{(2)}(x), \dots, g^{(n-k+1)}(x))$$

La demostración de este teorema se puede encontrar en el documento de (Karlheinz, 2005)

Ejemplo 2.13. Encontrar la derivada de orden 5 de la función $f(g(x))$

$$(f \circ g)^{(5)}(x)$$

Solución

Antes de comenzar aplicar el teorema 2.7 se debe conocer los valores necesarios m_i . Con $n = 5$ aun no se conocen los valores $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ y además que cumplan la ecuación

$1 \cdot m_1 + 2 \cdot m_2 + \cdots + n \cdot m_n = n$, para encontrar estos valores primero se tomara una lista de 5 elementos $A^\# = (5)$ ya que $n = 5$

$$A = [a, a, a, a, a]$$

Segundo, se encuentran la particiones distintas que hay en la lista A

$$A_1 = A = [a, a, a, a, a]$$

$$A_2 = [[a, a], [a, a, a]]$$

$$A_3 = [[a], [a, a, a, a]]$$

$$A_4 = [[a, a], [a, a], [a]]$$

$$A_5 = [[a], [a], [a, a, a]]$$

$$A_6 = [[a], [a], [a], [a, a]]$$

$$A_7 = [[a], [a], [a], [a], [a]]$$

Luego se toma la cantidad de elementos de cada lista

$$A_1^\# = A^\# = (5)$$

$$A_2^\# = ([a, a]^\#, [a, a, a]^\#) = (2, 3)$$

$$A_3^\# = ([a]^\#, [a, a, a, a]^\#) = (1, 4)$$

$$A_4^\# = ([a, a]^\#, [a, a]^\#, [a]^\#) = (2, 2, 1)$$

$$A_5^\# = ([a]^\#, [a]^\#, [a, a, a]^\#) = (1, 1, 3)$$

$$A_6^\# = ([a]^\#, [a]^\#, [a]^\#, [a, a]^\#) = (1, 1, 1, 2)$$

$$A_7^\# = ([a]^\#, [a]^\#, [a]^\#, [a]^\#, [a]^\#) = (1, 1, 1, 1, 1)$$

en seguida se toma como referencia la siguiente lista sabiendo el valor de n

$$M_n = (m_1, m_2, m_3, \dots, m_j, \dots, m_n)$$

donde m_j es la cantidad de veces que aparece el número j en la lista $A_m^\#$

$$M_1 = (m_1, m_2, m_3, m_4, m_5) = (0, 0, 0, 0, 1)$$

$$M_2 = (m_1, m_2, m_3, m_4, m_5) = (0, 1, 1, 0, 0)$$

$$M_3 = (m_1, m_2, m_3, m_4, m_5) = (1, 0, 0, 1, 0)$$

$$M_4 = (m_1, m_2, m_3, m_4, m_5) = (1, 2, 0, 0, 0)$$

$$M_5 = (m_1, m_2, m_3, m_4, m_5) = (2, 0, 1, 0, 0)$$

$$M_6 = (m_1, m_2, m_3, m_4, m_5) = (3, 1, 0, 0, 0)$$

$$M_7 = (m_1, m_2, m_3, m_4, m_5) = (5, 0, 0, 0, 0)$$

finalmente teniendo las soluciones para la ecuación

$$1 \cdot m_1 + 2 \cdot m_2 + 3 \cdot m_3 + 4 \cdot m_4 + 5 \cdot m_5 = 5$$

teniendo todos los datos se da comienzo aplicar el teorema 2.7, vale resaltar que cada termino de la sumatoria se obtiene de evaluar cada lista M_j

$$\sum H(M_j)$$

con $j = 1, 2, 3, 4, 5$, ahora se obtiene los términos

1. Para $M_1 = (m_1, m_2, m_3, m_4, m_5) = (0, 0, 0, 0, 1)$

$$H(M_1) = \frac{5!}{0!(1!^0)0!(2!^0)0!(3!^0)0!(4!^0)1!(5!^1)} f^{(0+0+0+0+1)}(g(x)) \cdot \prod_{j=1}^5 \left(g^{(j)}(x) \right)^{m_j}$$

$$H(M_1) = \frac{5!}{5!} f^{(1)}(g(x)) g^{(5)}(x)$$

$$H(M_1) = f^{(1)}(g(x)) g^{(5)}(x)$$

2. Para $M_2 = (m_1, m_2, m_3, m_4, m_5) = (0, 1, 1, 0, 0)$

$$H(M_2) = \frac{5!}{0!(1!^0)1!(2!^1)1!(3!^1)0!(4!^0)0!(5!^0)} f^{(0+1+1+0+0)}(g(x)) \cdot \prod_{j=1}^5 \left(g^{(j)}(x) \right)^{m_j}$$

$$H(M_2) = \frac{5!}{2!3!} f^{(2)}(g(x)) g^{(2)}(x) g^{(3)}(x)$$

$$H(M_2) = 10 f^{(2)}(g(x)) g^{(2)}(x) g^{(3)}(x)$$

3. Para $M_3 = (m_1, m_2, m_3, m_4, m_5) = (1, 0, 0, 1, 0)$

$$H(M_3) = \frac{5!}{1!(1!^1)0!(2!^0)0!(3!^0)1!(4!^1)0!(5!^0)} f^{(1+0+0+1+0)}(g(x)) \cdot \prod_{j=1}^5 \left(g^{(j)}(x) \right)^{m_j}$$

$$H(M_3) = \frac{5!}{1!4!} f^{(2)}(g(x)) g^{(2)}(x) g^{(3)}(x)$$

$$H(M_3) = 5 f^{(2)}(g(x)) g^{(1)}(x) g^{(4)}(x)$$

4. Para $M_4 = (m_1, m_2, m_3, m_4, m_5) = (1, 2, 0, 0, 0)$

$$H(M_4) = \frac{5!}{1!(1!^1)2!(2!^2)0!(3!^0)0!(4!^0)0!(5!^0)} f^{(1+2+0+0+0)}(g(x)) \cdot \prod_{j=1}^5 \left(g^{(j)}(x) \right)^{m_j}$$

$$H(M_4) = \frac{5!}{2!(2!)^2} f^{(3)}(g(x)) g^{(1)}(x) (g^{(2)}(x))^2$$

$$H(M_4) = 15 f^{(3)}(g(x)) g^{(1)}(x) (g^{(2)}(x))^2$$

5. Para $M_5 = (m_1, m_2, m_3, m_4, m_5) = (2, 0, 1, 0, 0)$

$$H(M_5) = \frac{5!}{2!(1!^2)0!(2!^0)1!(3!^1)0!(4!^0)0!(5!^0)} f^{(2+0+1+0+0)}(g(x)) \cdot \prod_{j=1}^5 \left(g^{(j)}(x) \right)^{m_j}$$

$$H(M_5) = \frac{5!}{2!3!} f^{(3)}(g(x))(g^{(1)}(x))^2 g^{(3)}(x)$$

$$H(M_5) = 10 f^{(3)}(g(x))(g^{(1)}(x))^2 g^{(3)}(x)$$

6. Para $M_6 = (m_1, m_2, m_3, m_4, m_5) = (3, 1, 0, 0, 0)$

$$H(M_6) = \frac{5!}{3!(1!^3)1!(2!^1)0!(3!^0)0!(4!^0)0!(5!^0)} f^{(3+1+0+0+0)}(g(x)) \cdot \prod_{j=1}^5 \left(g^{(j)}(x) \right)^{m_j}$$

$$H(M_6) = \frac{5!}{3!3!} f^{(4)}(g(x))(g^{(1)}(x))^3 g^{(2)}(x)$$

$$H(M_6) = 10 f^{(4)}(g(x))(g^{(1)}(x))^3 g^{(2)}(x)$$

7. Para $M_7 = (m_1, m_2, m_3, m_4, m_5) = (5, 0, 0, 0, 0)$

$$H(M_7) = \frac{5!}{5!(1!^5)0!(2!^0)0!(3!^0)0!(4!^0)0!(5!^0)} f^{(5+1+0+0+0)}(g(x)) \cdot \prod_{j=1}^5 \left(g^{(j)}(x) \right)^{m_j}$$

$$H(M_7) = \frac{5!}{5!} f^{(5)}(g(x))(g^{(1)}(x))^5$$

$$H(M_7) = f^{(5)}(g(x))(g^{(1)}(x))^5$$

Finalmente $(f \circ g)^{(5)}(x)$ de $(f \circ g)(x)$ es

$$\begin{aligned}
(f \circ g)^{(5)}(x) &= \sum H(M_n) \\
&= H(M_1) + H(M_2) + H(M_3) + H(M_4) + H(M_5) + H(M_6) + H(M_7) \\
&= f^{(1)}(g(x))g^{(5)}(x) + 10f^{(2)}(g(x))g^{(2)}(x)g^{(3)}(x) + 5f^{(2)}(g(x))g^{(1)}(x)g^{(4)}(x) \\
&\quad + 15f^{(3)}(g(x))g^{(1)}(x)(g^{(2)}(x))^2 + 10f^{(3)}(g(x))(g^{(1)}(x))^2g^{(3)}(x) \\
&\quad + 10f^{(4)}(g(x))(g^{(1)}(x))^3g^{(2)}(x) + f^{(5)}(g(x))(g^{(1)}(x))^5
\end{aligned}$$

Así como la derivada de orden natural de un producto no es el producto de sus derivadas de orden natural, la derivada de orden natural de un cociente no es el cociente de sus derivadas de orden natural.

Teorema 2.8 (Derivada de orden natural de un cociente). *Si $f = f(x)$ y $g = g(x)$ son diferenciables en cualquier orden en x , y si $g(x) \neq 0$, entonces el cociente $f(x)/g(x)$ es diferenciable en cualquier orden en x y*

$$\frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{f}{g} \right) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} \sum \frac{(-1)^{\phi_{n-k}} \phi_{n-k}! (n-k)!}{m_1! \cdots m_{n-k}!} g^{-[\phi_{n-k}+1]} \prod_{i=1}^{n-k} \left(\frac{g^{(i)}}{i!} \right)^{m_i}$$

donde

$$\phi_{n-k} = \sum_{i=1}^{n-k} m_i$$

con

$$\sum_{i=1}^{n-k} (i \cdot m_i) = n - k$$

La demostración de este teorema 2.8 se encuentra en el apéndice B como demostración B.7

Corolario 2.1 (Derivada de orden natural de un cociente con numerador 1). *Si $g = g(x)$*

es diferenciable en cualquier orden en x , y si $g(x) \neq 0$, entonces el cociente $1/g(x)$ es diferenciable en cualquier orden en x y

$$(g^{-1})^{(n)} = \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{1}{g} \right) = \sum \frac{(-1)^{\phi_n} \phi_n! n!}{m_1! \cdots m_n!} g^{-(\phi_n+1]} \prod_{i=1}^n \left(\frac{g^{(i)}}{i!} \right)^{m_i}$$

donde

$$\phi_n = \sum_{i=1}^n m_i$$

con

$$\sum_{i=1}^n (i \cdot m_i) = n$$

Ejemplo 2.14. Calcular la derivada de orden 3 de

$$h(x) = \frac{x^6}{x^4 + 1}$$

Solución

Identificando que $h(x)$ es el cociente de las funciones

$$f(x) = x^6$$

$$g(x) = x^4 + 1$$

siendo

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

ahora aplicando el teorema 2.8 para $h = f/g$

$$\frac{d^3 h}{dx^3} = \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} (x^6)^{(k)} \sum \frac{(-1)^{\phi_{3-k}} \phi_{3-k}! (3-k)!}{m_1! \cdots m_{3-k}!} (x^4 + 1)^{-(\phi_{3-k}+1]} \prod_{i=1}^{3-k} \left(\frac{(x^4 + 1)^{(i)}}{i!} \right)^{m_i}$$

Hasta el momento se tiene ya calculada la derivada de orden 3 de la función pero la esencia es desarrollar la sumatoria para ello se calculara los terminos de la sumatoria de afuera hacia dentro

Para $k = 0$

$$\begin{aligned} T_0 &= \binom{3}{0} (x^6)^{(0)} \sum \frac{(-1)^{\phi_3-0} \phi_{3-0}! (3-0)!}{m_1! \cdots m_{3-0}!} (x^4 + 1)^{-[\phi_{3-0}+1]} \prod_{i=1}^{3-0} \left(\frac{(x^4 + 1)^{(i)}}{i!} \right)^{m_i} \\ &= x^6 \sum \frac{(-1)^{\phi_3} \phi_3! (3)!}{m_1! m_2! m_3!} (x^4 + 1)^{-[\phi_3+1]} \prod_{i=1}^3 \left(\frac{(x^4 + 1)^{(i)}}{i!} \right)^{m_i} \end{aligned}$$

ahora se encontraran los términos de la sumatoria discreta como en el ejemplo [2.13](#)

1. Primera tupla $(m_1, m_2, m_3) = (3, 0, 0)$ y verificando que cumpla la condición del teorema [2.8](#)

$$\sum_{i=1}^3 (i \cdot m_i) = 1 \cdot m_1 + 2 \cdot m_2 + 3 \cdot m_3 = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 3$$

cumple con la condición, ahora se encuentra el valor de ϕ_3

$$\phi_3 = \sum_{i=1}^3 m_i = m_1 + m_2 + m_3 = 3 + 0 + 0 = 3$$

teniendo todos los datos se evalúa en la sumatoria discreta

$$\begin{aligned} g_{0,1} &= \frac{(-1)^3 3! 3!}{3!} (x^4 + 1)^{-4} \left[\frac{(x^4 + 1)^{(1)}}{1!} \right]^3 \left[\frac{(x^4 + 1)^{(2)}}{2!} \right]^0 \left[\frac{(x^4 + 1)^{(3)}}{3!} \right]^0 \\ &= \frac{-6}{(x^4 + 1)^4} \left[\frac{(x^4 + 1)^{(1)}}{1!} \right]^3 \\ &= \frac{-6}{(x^4 + 1)^4} (4x^3)^3 \\ &= -\frac{384x^9}{(x^4 + 1)^4} \end{aligned}$$

finalmente

$$g_{0,1} = -\frac{384x^9}{(x^4 + 1)^4}$$

2. Segunda tupla $(m_1, m_2, m_3) = (1, 1, 0)$ y verificando que cumpla la condición del teorema 2.8

$$\sum_{i=1}^3 (i \cdot m_i) = 1 \cdot m_1 + 2 \cdot m_2 + 3 \cdot m_3 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 3$$

cumple con la condición, ahora se encuentra el valor de ϕ_3

$$\phi_3 = \sum_{i=1}^3 m_i = m_1 + m_2 + m_3 = 1 + 1 + 0 = 2$$

teniendo todos los datos se evalúa en la sumatoria discreta

$$\begin{aligned} g_{0,2} &= \frac{(-1)^2 2! 3!}{1! 1!} (x^4 + 1)^{-3} \left[\frac{(x^4 + 1)^{(1)}}{1!} \right]^1 \left[\frac{(x^4 + 1)^{(2)}}{2!} \right]^1 \left[\frac{(x^4 + 1)^{(3)}}{3!} \right]^0 \\ &= \frac{12}{(x^4 + 1)^3} \left[\frac{(x^4 + 1)^{(1)}}{1!} \right]^1 \left[\frac{(x^4 + 1)^{(2)}}{2!} \right]^1 \\ &= \frac{12}{(x^4 + 1)^3} (4x^3)^1 \left(\frac{12x^2}{2} \right)^1 \\ &= \frac{12}{(x^4 + 1)^3} (4x^3)(6x^2) \\ &= \frac{288x^5}{(x^4 + 1)^3} \end{aligned}$$

finalmente

$$g_{0,2} = \frac{288x^5}{(x^4 + 1)^3}$$

3. Tercera tupla $(m_1, m_2, m_3) = (0, 0, 1)$ y verificando que cumpla la condición del teo-

rema 2.8

$$\sum_{i=1}^3 (i \cdot m_i) = 1 \cdot m_1 + 2 \cdot m_2 + 3 \cdot m_3 = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 3$$

cumple con la condición, ahora se encuentra el valor de ϕ_3

$$\phi_3 = \sum_{i=1}^3 m_i = m_1 + m_2 + m_3 = 0 + 0 + 1 = 1$$

teniendo todos los datos se evalúa en la sumatoria discreta

$$\begin{aligned} g_{0,3} &= \frac{(-1)^1 1! 3!}{0! 0! 1!} (x^4 + 1)^{-2} \left[\frac{(x^4 + 1)^{(1)}}{1!} \right]^0 \left[\frac{(x^4 + 1)^{(2)}}{2!} \right]^0 \left[\frac{(x^4 + 1)^{(3)}}{3!} \right]^1 \\ &= \frac{-6}{(x^4 + 1)^2} \left[\frac{(x^4 + 1)^{(3)}}{3!} \right]^1 \\ &= -\frac{6}{(x^4 + 1)^2} \left(\frac{24x}{6} \right)^1 \\ &= -\frac{24x}{(x^4 + 1)^2} \end{aligned}$$

finalmente

$$g_{0,3} = -\frac{24x}{(x^4 + 1)^2}$$

Ahora se tiene que

$$\begin{aligned} T_0 &= x^6 (g_{0,1} + g_{0,2} + g_{0,3}) \\ &= x^6 \left(-\frac{384x^9}{(x^4 + 1)^4} + \frac{288x^5}{(x^4 + 1)^3} - \frac{24x}{(x^4 + 1)^2} \right) \\ &= -\frac{384x^{15}}{(x^4 + 1)^4} + \frac{288x^{11}}{(x^4 + 1)^3} - \frac{24x^7}{(x^4 + 1)^2} \end{aligned}$$

Así teniendo el termino T_0 para $k = 0$

$$T_0 = -\frac{384x^{15}}{(x^4 + 1)^4} + \frac{288x^{11}}{(x^4 + 1)^3} - \frac{24x^7}{(x^4 + 1)^2}$$

Para $k = 1$

$$\begin{aligned} T_1 &= \binom{3}{1} (x^6)^{(1)} \sum \frac{(-1)^{\phi_{3-1}} \phi_{3-1}! (3-1)!}{m_1! \cdots m_{3-1}!} (x^4 + 1)^{-[\phi_{3-1}+1]} \prod_{i=1}^{3-1} \left(\frac{(x^4 + 1)^{(i)}}{i!} \right)^{m_i} \\ &= 3 \cdot 6x^5 \sum \frac{(-1)^{\phi_2} \phi_2! (2)!}{m_1! m_2!} (x^4 + 1)^{-[\phi_2+1]} \prod_{i=1}^2 \left(\frac{(x^4 + 1)^{(i)}}{i!} \right)^{m_i} \\ &= 18x^5 \sum \frac{(-1)^{\phi_2} \phi_2! (2)!}{m_1! m_2!} (x^4 + 1)^{-[\phi_2+1]} \prod_{i=1}^2 \left(\frac{(x^4 + 1)^{(i)}}{i!} \right)^{m_i} \end{aligned}$$

ahora se encontraran los términos de la sumatoria discreta como en el ejemplo [2.13](#)

1. Primera tupla $(m_1, m_2) = (2, 0)$ y verificando que cumpla la condición del teorema [2.8](#)

$$\sum_{i=1}^2 (i \cdot m_i) = 1 \cdot m_1 + 2 \cdot m_2 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 = 2$$

cumple con la condición, ahora se encuentra el valor de ϕ_2

$$\phi_2 = \sum_{i=1}^2 m_i = m_1 + m_2 = 2 + 0 = 2$$

teniendo todos los datos se evalúa en la sumatoria discreta

$$\begin{aligned}
 g_{1,1} &= \frac{(-1)^2 2! 2!}{2!} (x^4 + 1)^{-3} \left[\frac{(x^4 + 1)^{(1)}}{1!} \right]^2 \left[\frac{(x^4 + 1)^{(2)}}{2!} \right]^0 \\
 &= \frac{2}{(x^4 + 1)^3} \left[\frac{(x^4 + 1)^{(1)}}{1!} \right]^2 \\
 &= \frac{2}{(x^4 + 1)^3} (4x^3)^2 \\
 &= \frac{32x^6}{(x^4 + 1)^3}
 \end{aligned}$$

finalmente

$$g_{1,1} = \frac{32x^6}{(x^4 + 1)^3}$$

2. Segunda tupla $(m_1, m_2) = (0, 1)$ y verificando que cumpla la condición del teorema

2.8

$$\sum_{i=1}^2 (i \cdot m_i) = 1 \cdot m_1 + 2 \cdot m_2 = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2$$

cumple con la condición, ahora se encuentra el valor de ϕ_2

$$\phi_2 = \sum_{i=1}^2 m_i = m_1 + m_2 = 0 + 1 = 1$$

teniendo todos los datos se evalúa en la sumatoria discreta

$$\begin{aligned}
 g_{1,2} &= \frac{(-1)^1 1! 2!}{0! 1!} (x^4 + 1)^{-2} \left[\frac{(x^4 + 1)^{(1)}}{1!} \right]^0 \left[\frac{(x^4 + 1)^{(2)}}{2!} \right]^1 \\
 &= -\frac{2}{(x^4 + 1)^2} \left[\frac{(x^4 + 1)^{(2)}}{2} \right]^1 \\
 &= -\frac{2}{(x^4 + 1)^3} \left(\frac{12x^2}{2} \right) \\
 &= -\frac{12x^2}{(x^4 + 1)^2}
 \end{aligned}$$

finalmente

$$g_{1,2} = -\frac{12x^2}{(x^4 + 1)^2}$$

Ahora se tiene que

$$\begin{aligned} T_1 &= 18x^5(g_{1,1} + g_{1,2}) \\ &= 18x^5 \left(\frac{32x^6}{(x^4 + 1)^3} - \frac{12x^2}{(x^4 + 1)^2} \right) \\ &= \frac{576x^{11}}{(x^4 + 1)^3} - \frac{216x^7}{(x^4 + 1)^2} \end{aligned}$$

Así teniendo el termino T_1 para $k = 1$

$$T_1 = \frac{576x^{11}}{(x^4 + 1)^3} - \frac{216x^7}{(x^4 + 1)^2}$$

Para $k = 2$

$$\begin{aligned} T_2 &= \binom{3}{2} (x^6)^{(2)} \sum \frac{(-1)^{\phi_3-2} \phi_{3-2}! (3-2)!}{m_1! \cdots m_{3-2}!} (x^4 + 1)^{-[\phi_{3-2}+1]} \prod_{i=1}^{3-2} \left(\frac{(x^4 + 1)^{(i)}}{i!} \right)^{m_i} \\ &= 3 \cdot 30x^4 \sum \frac{(-1)^{\phi_1} \phi_1! 1!}{m_1!} (x^4 + 1)^{-[\phi_1+1]} \prod_{i=1}^1 \left(\frac{(x^4 + 1)^{(i)}}{i!} \right)^{m_i} \\ &= 90x^4 \sum \frac{(-1)^{\phi_1} \phi_1! 1!}{m_1!} (x^4 + 1)^{-[\phi_1+1]} \prod_{i=1}^1 \left(\frac{(x^4 + 1)^{(i)}}{i!} \right)^{m_i} \end{aligned}$$

ahora se encontraran los términos de la sumatoria discreta como en el ejemplo 2.13, siendo como solución la tupla $(m_1) = (1)$ así $m_1 = 1$.

Verificando que cumpla la condición del teorema 2.8

$$\sum_{i=1}^1 (i \cdot m_i) = 1 \cdot m_1 = 1 \cdot 1 = 1$$

cumple con la condición, ahora se encuentra el valor de ϕ_1

$$\phi_1 = \sum_{i=1}^1 m_i = m_1 = 1$$

teniendo todos los datos se evalúa en la sumatoria discreta

$$\begin{aligned} T_2 &= 90x^4 \sum \frac{(-1)^1 1! 1!}{1!} (x^4 + 1)^{-2} \left[\frac{(x^4 + 1)^{(1)}}{1!} \right]^1 \\ &= -\frac{90x^4}{(x^4 + 1)^2} (4x^3) \\ &= -\frac{360x^7}{(x^4 + 1)^2} \end{aligned}$$

Así teniendo el termino T_2 para $k = 2$

$$T_2 = -\frac{360x^7}{(x^4 + 1)^2}$$

Para $k = 3$

$$\begin{aligned} T_3 &= \binom{3}{3} (x^6)^{(3)} (x^4 + 1)^{(0)} \\ &= 120x^3 (x^4 + 1) \\ &= 120x^7 + 120x^3 \end{aligned}$$

finalmente

$$T_3 = 120x^7 + 120x^3$$

Ahora la derivada de orden 3 de la función $h(x)$ es la suma de T_0, T_1, T_2 y T_3

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^6}{x^4 + 1} \right)^{(3)} &= \frac{d^3 h(x)}{dx^3} \\ &= T_0 + T_1 + T_2 + T_3 \\ &= -\frac{384x^{15}}{(x^4 + 1)^4} + \frac{288x^{11}}{(x^4 + 1)^3} - \frac{24x^7}{(x^4 + 1)^2} + \frac{576x^{11}}{(x^4 + 1)^3} \\ &\quad - \frac{216x^7}{(x^4 + 1)^2} - \frac{360x^7}{(x^4 + 1)^2} + 120x^7 + 120x^3 \\ &= -\frac{384x^{15}}{(x^4 + 1)^4} + \frac{864x^{11}}{(x^4 + 1)^3} - \frac{600x^7}{(x^4 + 1)^2} + \frac{120x^3}{x^4 + 1} \end{aligned}$$

Finalmente se obtiene la derivada de orden 3 para la función $h(x)$

$$\left(\frac{x^6}{x^4 + 1} \right)^{(3)} = -\frac{384x^{15}}{(x^4 + 1)^4} + \frac{864x^{11}}{(x^4 + 1)^3} - \frac{600x^7}{(x^4 + 1)^2} + \frac{120x^3}{x^4 + 1}$$

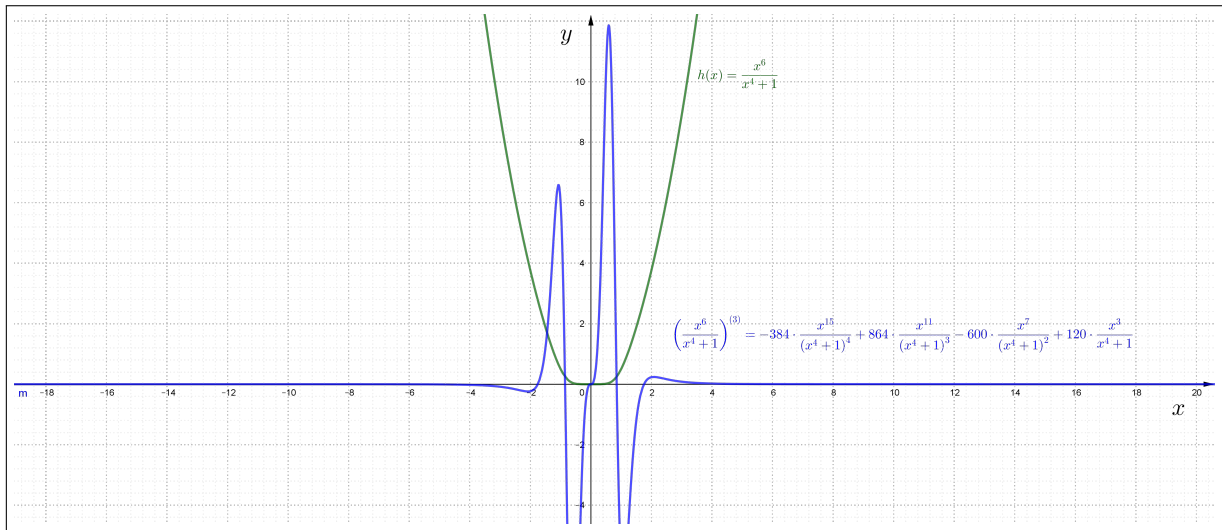


Figura 2.9: Imagen de la derivada de orden 3 de la función $\frac{x^6}{x^4+1}$

2.4. Derivadas de orden natural de funciones trigonométricas

En esta sección se mostrara las derivadas de orden natural de las seis funciones trigonométricas básicas.

Teorema 2.9 (Derivada de orden natural de la función seno). *Sea $f(x) = \text{sen}(x)$ entonces*

$$\frac{d^n}{dx^n}(\text{sen}(x)) = \text{sen}\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

La demostración del teorema 2.9 se encuentra en el apéndice B como demostración B.8

Ejemplo 2.15. Calcular

$$f^{(100)}(x)$$

de la función $f(x) = \text{sen}(x)$

Solución

Por el teorema 2.9 la derivada de orden 100 de la función seno es

$$f^{(100)}(x) = \text{sen}\left(x + \frac{100\pi}{2}\right)$$

Ahora simplificando

$$f^{(100)}(x) = \operatorname{sen}(x + 50\pi)$$

$$f^{(100)}(x) = \operatorname{sen}(x)\cos(50\pi) + \operatorname{sen}(50\pi)\cos(x)$$

$$f^{(100)}(x) = \operatorname{sen}(x) \cdot 1 + 0$$

$$f^{(100)}(x) = \operatorname{sen}(x)$$

finalmente la derivada de orden 100 de la función seno simplificada es

$$f^{(100)}(x) = \operatorname{sen}(x)$$

Teorema 2.10 (Derivada de orden natural de la función coseno). *sea $f(x) = \cos(x)$ entonces*

$$\frac{d^n}{dx^n}(\cos(x)) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

La demostración del teorema 2.10 se encuentra en el apéndice B como demostración B.9

Ejemplo 2.16. Si $f(x) = \cos(x)$ entonces

$$f^{(2m)}(x) = (-1)^m f(x)$$

$$f^{(2m+1)}(x) = (-1)^{m+1} \operatorname{sen}(x)$$

con $m \in \mathbb{N}$

Solución

Parte 1:

Como $m \in \mathbb{N}$ entonces $2m \in \mathbb{N}$ y por el teorema 2.10 se tiene que

$$f^{(2m)}(x) = \cos\left(x + \frac{2m\pi}{2}\right)$$

$$f^{(2m)}(x) = \cos(x + m\pi)$$

$$f^{(2m)}(x) = \cos(x)\cos(m\pi) - \sin(x)\sin(m\pi)$$

$$f^{(2m)}(x) = \cos(x)\cos(m\pi)$$

$$f^{(2m)}(x) = (-1)^m \cos(x)$$

finalmente

$$f^{(2m)}(x) = (-1)^m f(x)$$

Parte 2:

Como $m \in \mathbb{N}$ entonces $(2m + 1) \in \mathbb{N}$ y por el teorema 2.10 se tiene que

$$f^{(2m+1)}(x) = \cos\left(x + \frac{(2m+1)\pi}{2}\right)$$

$$f^{(2m+1)}(x) = \cos\left(x + m\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f^{(2m+1)}(x) = -\sin(x + m\pi)$$

$$f^{(2m+1)}(x) = -\sin(x)\cos(m\pi) - \sin(m\pi)\cos(x)$$

$$f^{(2m+1)}(x) = -(-1)^m \sin(x)$$

$$f^{(2m+1)}(x) = (-1)^{m+1} \sin(x)$$

finalmente

$$f^{(2m+1)}(x) = (-1)^{m+1} f(x)$$

Teorema 2.11 (Derivada de orden natural de la función tangente y cotangente).

Sea $f_0 = tg(x)$ y $f_1 = ctg(x)$ entonces

$$\frac{d^n f_0}{dx^n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \operatorname{sen} \left(x + \frac{k\pi}{2} \right) \sum a_{n-k} (\cos(x))^{-[\phi_{n-k}+1]} \prod_{i=1}^{n-k} \left(\frac{1}{i!} \cos \left(x + \frac{i\pi}{2} \right) \right)^{m_i}$$

$$\frac{d^n f_1}{dx^n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos \left(x + \frac{k\pi}{2} \right) \sum a_{n-k} (\operatorname{sen}(x))^{-[\phi_{n-k}+1]} \prod_{i=1}^{n-k} \left(\frac{1}{i!} \operatorname{sen} \left(x + \frac{i\pi}{2} \right) \right)^{m_i}$$

donde

$$a_{n-k} = \frac{(-1)^{\phi_{n-k}} \phi_{n-k}! (n-k)!}{m_1! \cdots m_{n-k}!}$$

$$\phi_{n-k} = \sum_{i=1}^{n-k} m_i$$

con

$$\sum_{i=1}^{n-k} (i \cdot m_i) = n - k$$

La demostración del teorema 2.11 se encuentra en el apéndice B como demostración

B.10

Corolario 2.2. Sea $f_2 = \sec(x)$ y $f_3 = \csc(x)$ entonces

$$\frac{d^n f_2}{dx^n} = \sum a_n (\cos(x))^{-[\phi_n+1]} \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{i!} \cos \left(x + \frac{i\pi}{2} \right) \right)^{m_i}$$

$$\frac{d^n f_3}{dx^n} = \sum a_n (\operatorname{sen}(x))^{-[\phi_n+1]} \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{i!} \operatorname{sen} \left(x + \frac{i\pi}{2} \right) \right)^{m_i}$$

donde

$$a_n = \frac{(-1)^{\phi_n} \phi_n! (n)!}{m_1! \cdots m_n!}$$

$$\phi_n = \sum_{i=1}^n m_i$$

con

$$\sum_{i=1}^n (i \cdot m_i) = n$$

Ejemplo 2.17. Calcular la derivada de orden 3 de la función $p(v) = \sec(v)$

Solución

$$\frac{d^3}{dx^3}(\sec(v)) = \sum a_3 (\cos(x))^{-[\phi_3+1]} \prod_{i=1}^3 \left(\frac{1}{i!} \cos \left(x + \frac{i\pi}{2} \right) \right)^{m_i}$$

donde

$$a_3 = \frac{(-1)^{\phi_3} \phi_3! 3!}{m_1! m_2! m_3!}$$

$$\phi_3 = \sum_{i=1}^3 m_i$$

con

$$\sum_{i=1}^3 (i \cdot m_i) = 3$$

desarrollando la sumatoria como en el ejemplo 2.13 se tiene

1. Para la primera tupla $(m_1, m_2, m_3) = (3, 0, 0)$

$$\phi_3 = \sum_{i=1}^3 m_i = 3$$

$$a_3 = \frac{(-1)^3 3! 3!}{3! 0! 0!} = -\frac{3!}{1} = -6$$

ahora se calculara el termino T_0 de la sumatoria

$$T_0 = a_3 (\cos(x))^{-[\phi_3+1]} \left[\frac{1}{1!} \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \right]^{m_1} \left[\frac{1}{2!} \cos \left(x + \frac{2\pi}{2} \right) \right]^{m_2} \left[\frac{1}{3!} \cos \left(x + \frac{3\pi}{2} \right) \right]^{m_3}$$

reemplazando

$$T_0 = -6 (\cos(x))^{-4} \left[\frac{1}{1!} \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \right]^3$$

simplificando

$$T_0 = -6 \sec^4(x) \left[\cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \right]^3$$

$$T_0 = -6 \sec^4(x) (-\sin(x))^3$$

$$T_0 = 6 \sec^4(x) \sin^3(x)$$

$$T_0 = 6 \sec(x) \tan^3(x)$$

siendo el termino 0 de la sumatoria

$$T_0 = 6 \sec(x) \tan^3(x)$$

2. Para la segunda tupla $(m_1, m_2, m_3) = (1, 1, 0)$

$$\phi_3 = \sum_{i=1}^3 m_i = 2$$

$$a_3 = \frac{(-1)^2 2! 3!}{1! 1! 0!} = \frac{2! 3!}{1} = 12$$

ahora se calculara el termino T_1 de la sumatoria

$$T_1 = a_3 (\cos(x))^{-(\phi_3+1)} \left[\frac{1}{1!} \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \right]^{m_1} \left[\frac{1}{2!} \cos \left(x + \frac{2\pi}{2} \right) \right]^{m_2} \left[\frac{1}{3!} \cos \left(x + \frac{3\pi}{2} \right) \right]^{m_3}$$

reemplazando

$$T_1 = 12 (\cos(x))^{-3} \left[\frac{1}{1!} \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \right]^1 \left[\frac{1}{2!} \cos \left(x + \frac{2\pi}{2} \right) \right]^1$$

simplificando

$$T_1 = 12 \sec^3(x) (-\sin(x)) \left(-\frac{1}{2} \cos(x) \right)$$

$$T_1 = 6 \sec^3(x) (-\sin(x)) (-\cos(x))$$

$$T_1 = 6 \sec^2(x) \sin(x)$$

$$T_1 = 6 \sec(x) \tan(x)$$

siendo el termino 1 de la sumatoria

$$T_1 = 6 \sec(x) \tan(x)$$

3. Para la tercera tupla $(m_1, m_2, m_3) = (0, 0, 1)$

$$\phi_3 = \sum_{i=1}^3 m_i = 1$$

$$a_3 = \frac{(-1)^1 1! 3!}{0! 0! 1!} = -\frac{3!}{1} = -6$$

ahora se calculara el termino T_2 de la sumatoria

$$T_2 = a_3 (\cos(x))^{-[\phi_3+1]} \left[\frac{1}{1!} \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \right]^{m_1} \left[\frac{1}{2!} \cos \left(x + \frac{2\pi}{2} \right) \right]^{m_2} \left[\frac{1}{3!} \cos \left(x + \frac{3\pi}{2} \right) \right]^{m_3}$$

reemplazando

$$T_2 = -6(\cos(x))^{-2} \left[\frac{1}{3!} \cos \left(x + \frac{3\pi}{2} \right) \right]^1$$

simplificando

$$T_2 = -6 \sec^2(x) \left[\frac{1}{6} \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \right]^3$$

$$T_2 = -\sec^2(x) \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$T_2 = \sec^2(x) \sin(x) \sin \left(\frac{3\pi}{2} \right)$$

$$T_2 = -\sec^2(x) \sin(x)$$

$$T_2 = -\sec(x) \tan(x)$$

siendo el termino 2 de la sumatoria

$$T_2 = -\sec(x) \tan(x)$$

sumando los términos T_0, T_1, T_2

$$\begin{aligned}\frac{d^3}{dx^3}(\sec(x)) &= T_0 + T_1 + T_2 \\ &= 6\sec(x)\operatorname{tg}^3(x) + 6\sec(x)\operatorname{tg}(x) - \sec(x)\operatorname{tg}(x) \\ &= 6\sec(x)\operatorname{tg}^3(x) + 5\sec(x)\operatorname{tg}(x)\end{aligned}$$

Finalmente

$$\frac{d^3 p}{dx^3} = p^{(3)}(x) = 6\sec(x)\operatorname{tg}^3(x) + 5\sec(x)\operatorname{tg}(x)$$

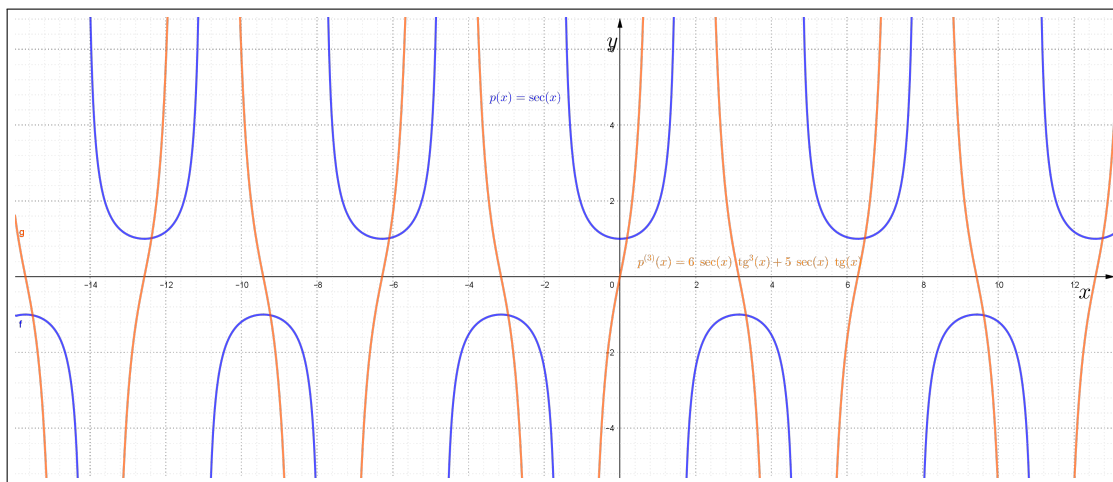


Figura 2.10: Imagen de la tercera derivada de la función secante

2.5. Derivadas de orden natural de algunas funciones trascendentales

En esta sección se encontraran las derivadas de orden natural de las funciones trascendentales a^x y $\log_b(x)$

Teorema 2.12 (Derivada de orden natural de la función a^{bx}). Si $a > 0$ y $b > 0$ entonces

$$\frac{d^n}{dx^n} (a^{bx}) = (a^{bx})^{(n)} = (b \ln(a))^n a^{bx}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

La demostración del teorema 2.12 se encuentra en el apéndice B como demostración B.11

Ejemplo 2.18. Calcular la derivada de orden n de la

$$f_0(x) = \sinh(x)$$

$$f_1(x) = \cosh(x)$$

Solución

Primero se expresa $f_0 = \sinh(x)$ en términos de la función e^x y e^{-x}

$$\frac{d^n}{dx^n} (\sinh(x)) = \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)$$

aplicando el teorema 2.5 de la derivada de una suma y múltiplos constantes

$$\frac{d^n}{dx^n} (\sinh(x)) = \frac{1}{2} \cdot \frac{d^n}{dx^n} (e^x) - \frac{1}{2} \cdot \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x})$$

aplicando el teorema 2.12

$$\frac{d^n}{dx^n} (\sinh(x)) = \frac{1}{2} ((\ln(e))^n e^x) - \frac{1}{2} ((-\ln(e))^n e^{-x})$$

simplificando se obtiene que

$$\frac{d^n}{dx^n} (\sinh(x)) = \frac{e^x + (-1)^{n+1} e^{-x}}{2}$$

Luego se expresa $f_1 = \cosh(x)$ en términos de la función e^x y e^{-x}

$$\frac{d^n}{dx^n} (\cosh(x)) = \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)$$

aplicando el teorema 2.5 de la derivada de una suma y múltiplos constantes

$$\frac{d^n}{dx^n} (\cosh(x)) = \frac{1}{2} \cdot \frac{d^n}{dx^n} (e^x) + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x})$$

aplicando el teorema 2.12

$$\frac{d^n}{dx^n} (\cosh(x)) = \frac{1}{2} ((\ln(e))^n e^x) + \frac{1}{2} ((-\ln(e))^n e^{-x})$$

simplificando se obtiene que

$$\frac{d^n}{dx^n} (\cosh(x)) = \frac{e^x + (-1)^n e^{-x}}{2}$$

Concluyendo que

$$\begin{aligned} \frac{d^n f_0}{dx^n} &= \frac{d^n}{dx^n} (\sinh(x)) = \frac{e^x + (-1)^{n+1} e^{-x}}{2} \\ \frac{d^n f_1}{dx^n} &= \frac{d^n}{dx^n} (\cosh(x)) = \frac{e^x + (-1)^n e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

Teorema 2.13 (Derivada de orden natural de la función logaritmo). Si $b > 0$ entonces

$$\frac{d^n}{dx^n} \log_b(x) = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)! x^{-n}}{\ln(b)}, \quad \forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$$

La demostración del teorema 2.13 se encuentra en el apéndice B como demostración B.12

Ejemplo 2.19. Calcular la derivada de orden $n!$ de

$$f(x) = \log_{m!}(x)$$

donde $n, m \in \mathbb{N}$

Solución

Aplicando el teorema 2.13 a la función $f(x)$

$$\begin{aligned} \frac{d^{n!} f(x)}{dx^{n!}} &= \frac{d^{n!}}{dx^{n!}} (\log_{m!}(x)) \\ \frac{d^{n!} f(x)}{dx^{n!}} &= \frac{(-1)^{n!-1} (n! - 1)! x^{-n!}}{\ln(m!)} \end{aligned}$$

reescribiendo

$$\frac{d^{n!} f(x)}{dx^{n!}} = \frac{(-1)^{n!-1} (n! - 1)! x^{-n!}}{\sum_{i=1}^m \ln(i)}$$

como $n!$ factorial es par ya que $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdots n = 2 \cdot k$ se tiene

$$\frac{d^{n!} f(x)}{dx^{n!}} = - \frac{(n! - 1)! x^{-n!}}{\sum_{i=1}^m \ln(i)}$$

reescribiendo

$$\frac{d^{n!} f(x)}{dx^{n!}} = - \left(\sum_{i=1}^m \ln(i) \right)^{-1} (n! - 1)! x^{-n!}$$

finalmente

$$\frac{d^{n!} f(x)}{dx^{n!}} = - \left(x^{n!} \sum_{i=1}^m \ln(i) \right)^{-1} (n! - 1)!$$

3

Generalizando el orden de la derivada a los enteros

Todas las verdades de las matemáticas están vinculadas entre si.

Adrien-Marie Legendre

En este capítulo se encuentra la conexión entre la derivada de orden natural con la derivada de orden entero y la noción de derivada de orden negativo.

3.1. Definición de derivada de orden entero

Generalizando el teorema [2.1](#) donde el parámetro n es libre y remplazándolo por el parámetro m obteniendo lo siguiente

$$f^{(m)}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta x)^m} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{m}{k} f(x - k(\Delta x)) \quad (3.1)$$

claramente se obtiene el teorema 2.1 haciendo que $m \rightarrow n$

$$\begin{aligned}\lim_{m \rightarrow n} f^{(m)}(x) &= \lim_{m \rightarrow n} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta x)^m} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{m}{k} f(x - k(\Delta x)) \\ \lim_{m \rightarrow n} f^{(m)}(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow n} \frac{1}{(\Delta x)^m} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{m}{k} f(x - k(\Delta x)) \\ \lim_{m \rightarrow n} f^{(m)}(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow n} \frac{1}{(\Delta x)^m} \lim_{m \rightarrow n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{m}{k} f(x - k(\Delta x)) \\ \lim_{m \rightarrow n} f^{(m)}(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta x)^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(x - k(\Delta x))\end{aligned}$$

finalmente

$$\lim_{m \rightarrow n} f^{(m)}(x) = f^{(n)}(x)$$

Ahora a partir de la ecuación (3.1) se puede definir la derivada de orden negativo $\mathbb{Z}^- \cup \{0\}$

1. Haciendo que $m \rightarrow -p$ donde $p \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\lim_{m \rightarrow -p} f^{(m)}(x) &= \lim_{m \rightarrow -p} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^{-m} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{m}{k} f(x - k(\Delta x)) \\ f^{(-p)}(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^p \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{-p}{k} f(x - k(\Delta x))\end{aligned}$$

siendo en el intervalo cerrado $[a, x]$ se tomara a Δx como

$$\Delta x = \frac{x - a}{n}$$

2. Ahora analizando $\binom{-p}{k}$ se tiene

$$\begin{aligned}\binom{-p}{k} &= \frac{-p(-p-1)(-p-2)\cdots(-p-k+1)}{k!} \\ \binom{-p}{k} &= (-1)^k \cdot \frac{p(p+1)(p+2)\cdots(p+k-1)}{k!} \\ \binom{-p}{k} &= (-1)^k \cdot \frac{(p-1)!p(p+1)(p+2)\cdots(p+k-1)}{k!(p-1)!} \\ \binom{-p}{k} &= (-1)^k \cdot \frac{(p+k-1)!}{k!(p-1)!} \\ \binom{-p}{k} &= (-1)^k \cdot \frac{p(p+k-1)!}{k!p!} \\ \binom{-p}{k} &= (-1)^k \left\{ \begin{matrix} p \\ k \end{matrix} \right\}\end{aligned}$$

donde

$$\left\{ \begin{matrix} p \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{p(p+k-1)!}{k!p!} \quad (3.2)$$

3. Tomando en cuenta el el ítem 1 y el ítem 2 se puede trabajar sobre la definición de derivada de orden entero

$$\begin{aligned}f^{(-p)}(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^p \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{-p}{k} f(x - k(\Delta x)) \\ f^{(-p)}(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^p \sum_{k=0}^n (-1)^k (-1)^k \left\{ \begin{matrix} p \\ k \end{matrix} \right\} f(x - k(\Delta x)) \\ f^{(-p)}(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^p \sum_{k=0}^n (-1)^{2k} \left\{ \begin{matrix} p \\ k \end{matrix} \right\} f(x - k(\Delta x))\end{aligned}$$

se sabe que $(-1)^{2k} = 1$

$$f^{(-p)}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^p \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} p \\ k \end{matrix} \right\} f(x - k(\Delta x))$$

finalmente obteniendo que

$$f^{(-p)}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^p \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} p \\ k \end{matrix} \right\} f(x - k(\Delta x)) \quad (3.3)$$

Ahora bien se conoce muchas notaciones de derivada como

$$\frac{d}{dx} \xrightarrow{\text{en otro orden}} \frac{d^n}{dx^n} \quad (3.4)$$

$$y' \xrightarrow{\text{en otro orden}} y^{(q)} \quad (3.5)$$

$$\dot{y} \xrightarrow{\text{en otro orden}} \ddot{y} \quad (3.6)$$

$$D \xrightarrow{\text{en otro orden}} D^p \quad (3.7)$$

$${}_a D_t \xrightarrow{\text{en otro orden}} {}_a D_t^m \quad (3.8)$$

Se logra evidenciar que la notación (3.4) se puede generalizar a otro orden y menciona con respecto a que variable de esta derivando, pero no menciona el intervalo de derivación, en la segunda notación (3.5) mas conocida como la notación de Leibniz, se puede generalizar a cualquier orden pero no se conoce con respecto a que variable se puede derivar ni tampoco su intervalo de derivación, la tercera notación (3.6) mas conocida como la notación de Newton, es similar e incluso peor que la de Leibniz ya que no se puede generalizar a un orden real. La notación (3.7) es una de las mas usadas con la notación (3.8) en el cálculo fraccionario, son muy similares la diferencia es que en una se presenta el intervalo de derivación, mientras que la otra no, siendo la notación (3.8) la mas óptima de todas, sin embargo la notación del intervalo es muy incomoda al momento de realizar cálculos o escritos con ella, por esta razón se creará la siguiente notación propia de este documento.

Notación 3.1 (Notación de derivada Mina). *Notación para la derivada una función f , tomando A como región o intervalo y p el orden*

$$\mathcal{D}_{A,x}^p f, \mathcal{D}_A^p f$$

Forma simplificada: *Siendo I el intervalo de derivación y p el orden de la derivada*

$$\mathcal{D}_I^p f, \mathcal{D}_{[a,b]}^p f, \mathcal{D}_{(a,b)}^p f, \mathcal{D}_{(a,b]}^p f, \mathcal{D}_{[a,b)}^p f$$

Forma extendida: *Siendo I el intervalo de derivación y p el orden de la derivada*

$$\mathcal{D}_{I,x}^p f, \mathcal{D}_{[a,b],x}^p f, \mathcal{D}_{(a,b),x}^p f, \mathcal{D}_{(a,b],x}^p f, \mathcal{D}_{[a,b),x}^p f$$

Derivadas de línea o de flujo: *Siendo C el camino de derivación negativa y p el orden*

$$\mathcal{D}_C^{-p} f,$$

en el caso de las derivadas de flujo se considera la misma notación anterior agregando una flecha en la parte redonda de la letra "D"

Teniendo en cuenta la notación anterior se tiene la definición de derivada de orden entero como sigue

Definición 3.1 (Derivada de orden entero). *La derivada de orden p donde $p \in \mathbb{Z}$ de la función*

$f(x)$ con respecto a la variable x es

Si $p > 0$ entonces

$$\mathcal{D}_{[a, x]}^{-p} f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^p \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} p \\ k \end{matrix} \right\} f(x - k\Delta x)$$

donde

$$\left\{ \begin{matrix} p \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{p(p+k-1)!}{k!p!} = (-1)^{-k} \binom{-p}{k}$$

$$\Delta x = \frac{x-a}{n}$$

Si $p > 0$ entonces

$$\mathcal{D}_{[a, x]}^p f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta x)^p} \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{p}{k} f(x - k\Delta x)$$

siempre que el limite exista

Ahora se presenta un ejemplo usando la definici3n [3.1](#)

Ejemplo 3.1. Calcular

$$\mathcal{D}_{[a, x]}^{-1}(x^\alpha)$$

siendo $\alpha \in \mathbb{R}$

Solución:

Aplicando la definición 3.1 a la función $f(x) = x^\alpha$

$$\mathcal{D}_{[a, x]}^{-1}(x^\alpha) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^1 \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} 1 \\ k \end{matrix} \right\} (x - k\Delta x)^\alpha$$

calculando $\left\{ \begin{matrix} 1 \\ k \end{matrix} \right\}$

$$\mathcal{D}_{[a, x]}^{-1}(x^\alpha) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x \sum_{k=0}^n \frac{1(1+k-1)!}{k!1!} (x - k\Delta x)^\alpha$$

$$\mathcal{D}_{[a, x]}^{-1}(x^\alpha) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x \sum_{k=0}^n \frac{k!}{k!} (x - k\Delta x)^\alpha$$

$$\mathcal{D}_{[a, x]}^{-1}(x^\alpha) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x \sum_{k=0}^n \frac{k!}{k!} (x - k\Delta x)^\alpha$$

como Δx no depende del parametro de la sumatoria

$$\mathcal{D}_{[a, x]}^{-1}(x^\alpha) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^n (x - k\Delta x)^\alpha \Delta x$$

Ahora bien, como se evidencia en la anterior ecuación es una sumatoria de Riemann por izquierda

$$\mathcal{D}_{[a, x]}^{-1}(x^\alpha) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^n (c_k)^\alpha \Delta x \quad (3.9)$$

con

$$P = \{x, x - \Delta x, \dots, x - k\Delta x, \dots, a\} \quad , \quad c_k = x - k\Delta x \quad , \quad \Delta x = \frac{x - a}{n} \quad (3.10)$$

siendo P una partición. Sin embargo esta partición lineal (3.10) no es útil y no facilita los cálculos de esta sumatoria, por lo tanto se usará una partición polinómica

$$P = \{aq^0, aq^1, \dots, aq^{k-1}, aq^k, \dots, aq^n\}$$

cumpléndose que

$$c_k = aq^k \quad (3.11)$$

$$\Delta x = aq^k - aq^{k-1} \quad (3.12)$$

$$aq^n = x \quad (3.13)$$

Formulando la sumatoria y remplazando las ecuaciones (3.11) y (3.12) en la ecuación (3.9)

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{[a, x]}^{-1}(x^\alpha) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (aq^k)^\alpha (aq^k - aq^{k-1}) \\ \mathcal{D}_{[a, x]}^{-1}(x^\alpha) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a^\alpha \sum_{k=0}^n (q^k)^\alpha (aq^k - aq^{k-1}) \\ \mathcal{D}_{[a, x]}^{-1}(x^\alpha) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\alpha+1} \sum_{k=0}^n (q^k)^{\alpha+1} \left(1 - \frac{1}{q}\right) \\ \mathcal{D}_{[a, x]}^{-1}(x^\alpha) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{\alpha+1}(q-1)}{q} \sum_{k=0}^n (q^k)^{\alpha+1} \\ \mathcal{D}_{[a, x]}^{-1}(x^\alpha) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{\alpha+1}(q-1)}{q} \sum_{k=0}^n (q^{\alpha+1})^k \end{aligned}$$

se sabe que $\sum_{k=0}^n r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$ aplicando este hecho

$$\mathcal{D}_{[a, x]}^{-1}(x^\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{\alpha+1}(q-1)}{q} \left(\frac{1 - (q^{\alpha+1})^{n+1}}{1 - (q^{\alpha+1})} \right)$$

Como $aq^k = x$ despejando se tiene que $q = \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$ y sustituyendo $r = \frac{x}{a}$ se obtiene

$$\mathcal{D}_{[a, x]}^{-1}(x^\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{\alpha+1}(r^{\frac{1}{n}} - 1)}{r^{\frac{1}{n}}} \left(\frac{1 - r^{(\alpha+1)(1+\frac{1}{n})}}{1 - r^{\frac{\alpha+1}{n}}} \right)$$

para calcular el limite se sustituye $u = \frac{1}{n}$ si $n \rightarrow \infty$ entonces $u \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{[a, x]}^{-1}(x^\alpha) &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{a^{\alpha+1}(r^u - 1)}{r^u} \left(\frac{1 - r^{(\alpha+1)(1+u)}}{1 - r^{(\alpha+1)u}} \right) \\ \mathcal{D}_{[a, x]}^{-1}(x^\alpha) &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{a^{\alpha+1}(r^u - 1)}{r^u} \left(\frac{1 - r^{\alpha+\alpha u+1+u}}{1 - r^{\alpha u+u}} \right) \\ \mathcal{D}_{[a, x]}^{-1}(x^\alpha) &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{a^{\alpha+1}(r^u - r^{\alpha+\alpha u+1+2u} - 1 + r^{\alpha+\alpha u+1+u})}{r^u - r^{\alpha u+2u}} \end{aligned}$$

Como el limite es de la forma $\frac{0}{0}$ se aplica la regla de L'Hopital

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{[a, x]}^{-1}(x^\alpha) &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{a^{\alpha+1}(r^u - r^{\alpha+\alpha u+1+2u}(\alpha+2) + (\alpha+1)r^{\alpha+(\alpha+1)u+1})}{(r^u - (\alpha+2)r^{\alpha u+2u})} \\ \mathcal{D}_{[a, x]}^{-1}(x^\alpha) &= \frac{a^{\alpha+1}(1 - (\alpha+2)r^{\alpha+1} + (\alpha+1)r^{\alpha+1})}{1 - \alpha + 2} \\ \mathcal{D}_{[a, x]}^{-1}(x^\alpha) &= \frac{a^{\alpha+1}(1 - r^{\alpha+1})}{1 - \alpha - 2} \end{aligned}$$

Remplazando $r = \frac{x}{a}$ se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{[a, x]}^{-1}(x^\alpha) &= \frac{a^{\alpha+1} \left(1 - \frac{x^{\alpha+1}}{a^{\alpha+1}} \right)}{-(\alpha+1)} \\ \mathcal{D}_{[a, x]}^{-1}(x^\alpha) &= - \frac{a^{\alpha+1} \left(1 - \frac{x^{\alpha+1}}{a^{\alpha+1}} \right)}{\alpha+1} \\ \mathcal{D}_{[a, x]}^{-1}(x^\alpha) &= - \frac{a^{\alpha+1} - x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \\ \mathcal{D}_{[a, x]}^{-1}(x^\alpha) &= \frac{x^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha+1} \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\mathcal{D}_{[a,x]}^{-1}(x^\alpha) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (3.14)$$

3.2. Forma integral de la derivada de orden entero

Es hermoso ver como se puede calcular la derivada de orden -1 de la función x^α en la anterior sección. Sin embargo se puede observar que calcular la derivada de un orden superior negativo puede ser complicado, por ello se observa la definición 3.1 y en el ejemplo 3.1 que la sumatoria toma forma de la sumatoria de Riemann, por lo que se tiene el siguiente teorema.

Teorema 3.1 (Derivada de orden entero negativo). *Si $p > 0$ y $f(x)$ es integrable en el intervalo $[a, x]$*

$$\mathcal{D}_{[a,x]}^{-p}f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^p \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} p \\ k \end{matrix} \right\} f(x - k\Delta x) = \frac{1}{(p-1)!} \int_a^x (x-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau$$

donde

$$\left\{ \begin{matrix} p \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{p(p+k-1)!}{k!p!} = (-1)^{-k} \binom{-p}{k}$$

$$\Delta x = \frac{x-a}{n}$$

Demostración:

Como se puede observar se tiene tres miembros en las igualdades del teorema 3.1 donde el primer miembro es igual al segundo miembro por la definición 3.1, el tercer miembro es igual al primer miembro de la igualdad siempre y cuando sea igual al segundo miembro por

transitividad de la igualdad. Concluyendo que se debe demostrar la igualdad entre el segundo miembro y el tercer miembro de la igualdad.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^p \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} p \\ k \end{matrix} \right\} f(x - k\Delta x) = \frac{1}{(p-1)!} \int_a^x (x - \tau)^{p-1} f(\tau) d\tau \quad (3.15)$$

Esta demostración se realizará por inducción

Paso 1: Para $p = 1$ se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^1 \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} 1 \\ k \end{matrix} \right\} f(x - k\Delta x) &= \frac{1}{(1-1)!} \int_a^x (x - \tau)^{1-1} f(\tau) d\tau \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^1 \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} 1 \\ k \end{matrix} \right\} f(x - k\Delta x) &= \frac{1}{1} \int_a^x (x - \tau)^0 f(\tau) d\tau \end{aligned}$$

simplificando el segundo miembro

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^1 \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} 1 \\ k \end{matrix} \right\} f(x - k\Delta x) = \int_a^x f(\tau) d\tau$$

ingresando Δx en la sumatoria ya que no depende del parámetro

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} p \\ k \end{matrix} \right\} f(x - k\Delta x) \Delta x = \int_a^x f(\tau) d\tau$$

calculando $\left\{ \begin{matrix} p \\ k \end{matrix} \right\}$

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^n \frac{1 \cdot (1 + k - 1)!}{k!1!} f(x - k\Delta x) \Delta x &= \int_a^x f(\tau) d\tau \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^n \frac{k!}{k!} f(x - k\Delta x) \Delta x &= \int_a^x f(\tau) d\tau \end{aligned}$$

simplificando

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^n f(x - k\Delta x) \Delta x = \int_a^x f(\tau) d\tau$$

por definición de sumatoria de Riemann por derecha

$$\int_a^x f(y) dy = \int_a^x f(\tau) d\tau$$

haciendo $y = \tau$ con $dy = d\tau$

$$\int_a^x f(\tau) d\tau = \int_a^x f(\tau) d\tau$$

por lo tanto se cumple para $p = 1$

Paso 2: Ahora para $p = m$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^m \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \right\} f(x - k\Delta x) = \frac{1}{(m-1)!} \int_a^x (x - \tau)^{m-1} f(\tau) d\tau$$

Hipótesis de inducción

Paso 3: Para $p = m + 1$, si se cumple para m debe cumplirse para el sucesor que es $m + 1$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^{m+1} \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} m+1 \\ k \end{matrix} \right\} f(x - k\Delta x) = \frac{1}{m!} \int_a^x (x - \tau)^m f(\tau) d\tau \quad (3.16)$$

en este paso se debe partir de un miembro de la igualdad (3.16) y llegar al otro miembro usando la hipótesis de inducción, en este caso se comenzará desde el miembro izquierdo y se llegará al miembro derecho.

Para simplificar se hace la siguiente sustitución

$$\phi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^{m+1} \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} m+1 \\ k \end{matrix} \right\} f(x - k\Delta x) \quad (3.17)$$

partiendo de la igualdad 3.17

$$\phi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^{m+1} \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} m+1 \\ k \end{matrix} \right\} f(x - k\Delta x)$$

por el teorema fundamental del calculo

$$\phi = \frac{d}{dx} \int_a^x \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^{m+1} \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} m+1 \\ k \end{matrix} \right\} f(w - k\Delta x) \right) dw$$

por propiedades de la integración se ingresa la integral en la sumatoria

$$\phi = \frac{d}{dx} \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^{m+1} \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} m+1 \\ k \end{matrix} \right\} \int_a^x f(w - k\Delta x) dw \right)$$

haciendo la sustitución $y = w - k\Delta x \rightarrow dy = dw$, el limite superior $y(x) = x - k\Delta x$ y el limite inferior $y(a) = a - k\Delta x$ al ser una constante cada vez que $\Delta x \rightarrow 0$ el limite inferior $y(a) \rightarrow a$ por lo tanto si perder generalidad se tiene

$$\phi = \frac{d}{dx} \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^{m+1} \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} m+1 \\ k \end{matrix} \right\} \int_a^{x-k\Delta x} f(y) dy \right)$$

derivando usando la definición 2.2 de derivada unilateral por izquierda

$$\begin{aligned} \phi &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^{m+1} \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} m+1 \\ k \end{matrix} \right\} \int_a^{x-k\Delta x} f(y) dy \right. \\ &\quad \left. - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^{m+1} \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} m+1 \\ k \end{matrix} \right\} \int_a^{x-(k+1)\Delta x} f(y) dy \right) \end{aligned}$$

aplicando propiedades de los limites

$$\begin{aligned}\phi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} & \left((\Delta x)^m \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} m+1 \\ k \end{matrix} \right\} \int_a^{x-k\Delta x} f(y) dy \right. \\ & \left. - (\Delta x)^m \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} m+1 \\ k \end{matrix} \right\} \int_a^{x-(k+1)\Delta x} f(y) dy \right)\end{aligned}$$

sabiendo que $\left\{ \begin{matrix} m+1 \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} m+1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}$ y sustituyendo en la primera sumatoria

$$\begin{aligned}\phi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} & \left((\Delta x)^m \sum_{k=0}^n \left(\left\{ \begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} m+1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} \right) \int_a^{x-k\Delta x} f(y) dy \right. \\ & \left. - (\Delta x)^m \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} m+1 \\ k \end{matrix} \right\} \int_a^{x-(k+1)\Delta x} f(y) dy \right)\end{aligned}$$

aplicando la propiedad de linealidad de las sumatorias

$$\begin{aligned}\phi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} & \left((\Delta x)^m \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \right\} \int_a^{x-k\Delta x} f(y) dy \right. \\ & + (\Delta x)^m \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} m+1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} \int_a^{x-k\Delta x} f(y) dy \\ & \left. - (\Delta x)^m \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} m+1 \\ k \end{matrix} \right\} \int_a^{x-(k+1)\Delta x} f(y) dy \right)\end{aligned}$$

indexando la tercera sumatoria

$$\begin{aligned}\phi = & \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left((\Delta x)^m \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \right\} \int_a^{x-k\Delta x} f(y) dy \right. \\ & + (\Delta x)^m \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} m+1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} \int_a^{x-k\Delta x} f(y) dy \\ & \left. - (\Delta x)^m \sum_{k=1}^{n+1} \left\{ \begin{matrix} m+1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} \int_a^{x-k\Delta x} f(y) dy \right)\end{aligned}$$

sacando el primer termino de la segunda sumatoria y el termino $n+1$ de la tercera sumatoria

$$\begin{aligned}\phi = & \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left((\Delta x)^m \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \right\} \int_a^{x-k\Delta x} f(y) dy \right. \\ & + (\Delta x)^m \left\{ \begin{matrix} m+1 \\ -1 \end{matrix} \right\} \int_a^x f(y) dy + (\Delta x)^m \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{matrix} m+1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} \int_a^{x-k\Delta x} f(y) dy \\ & \left. - (\Delta x)^m \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{matrix} m+1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} \int_a^{x-k\Delta x} f(y) dy - (\Delta x)^m \left\{ \begin{matrix} m+1 \\ n \end{matrix} \right\} \int_a^{x-(n+1)\Delta x} f(y) dy \right)\end{aligned}$$

simplificando la segunda sumatoria con la tercera por ser terminos semejantes

$$\begin{aligned}\phi = & \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left((\Delta x)^m \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \right\} \int_a^{x-k\Delta x} f(y) dy \right. \\ & + (\Delta x)^m \left\{ \begin{matrix} m+1 \\ -1 \end{matrix} \right\} \int_a^x f(y) dy \\ & \left. - (\Delta x)^m \left\{ \begin{matrix} m+1 \\ n \end{matrix} \right\} \int_a^{x-(n+1)\Delta x} f(y) dy \right)\end{aligned}$$

calculando $\left\{ \begin{matrix} m+1 \\ b \end{matrix} \right\}$ cuando $b \rightarrow -1$

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow -1} \left\{ \begin{matrix} m+1 \\ b \end{matrix} \right\} &= \lim_{b \rightarrow -1} \frac{(b+1)(m+1-b-1)}{m!(b+1)!} \\ \left\{ \begin{matrix} m+1 \\ -1 \end{matrix} \right\} &= \frac{(-1+1)(m+1-1-1)}{m!(-1+1)!} \\ \left\{ \begin{matrix} m+1 \\ -1 \end{matrix} \right\} &= \frac{0 \cdot (m-1)!}{m!} \\ \left\{ \begin{matrix} m+1 \\ -1 \end{matrix} \right\} &= 0 \end{aligned}$$

quedando el segundo termino eliminado de ϕ

$$\begin{aligned} \phi &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left((\Delta x)^m \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \right\} \int_a^{x-k\Delta x} f(y) dy \right. \\ &\quad \left. - (\Delta x)^m \left\{ \begin{matrix} m+1 \\ n \end{matrix} \right\} \int_a^{x-(n+1)\Delta x} f(y) dy \right) \end{aligned}$$

por la linealidad del limite se distribuye en cada uno de los términos

$$\begin{aligned} \phi &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^m \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \right\} \int_a^{x-k\Delta x} f(y) dy \\ &\quad - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^m \left\{ \begin{matrix} m+1 \\ n \end{matrix} \right\} \int_a^{x-(n+1)\Delta x} f(y) dy \end{aligned}$$

reemplazando $\Delta x = \frac{x-a}{n}$ en el segundo termino en el limite superior de la integral

$$\begin{aligned}
\phi &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^m \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \right\} \int_a^{x-k\Delta x} f(y) dy \\
&\quad - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^m \left\{ \begin{matrix} m+1 \\ n \end{matrix} \right\} \int_a^{x-(n+1)\frac{x-a}{n}} f(y) dy \\
\phi &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^m \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \right\} \int_a^{x-k\Delta x} f(y) dy \\
&\quad - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^m \left\{ \begin{matrix} m+1 \\ n \end{matrix} \right\} \int_a^{x-x+a-\frac{x-a}{n}} f(y) dy \\
\phi &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^m \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \right\} \int_a^{x-k\Delta x} f(y) dy \\
&\quad - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^m \left\{ \begin{matrix} m+1 \\ n \end{matrix} \right\} \int_a^{a-\Delta x} f(y) dy
\end{aligned}$$

calculando el limite en el segundo termino

$$\begin{aligned}
\phi &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^m \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \right\} \int_a^{x-k\Delta x} f(y) dy \\
&\quad (0)^m - \left\{ \begin{matrix} m+1 \\ n \end{matrix} \right\} \int_a^a f(y) dy
\end{aligned}$$

simplificando, sabiendo que la integral se anula en el segundo termino

$$\phi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^m \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \right\} \int_a^{x-k\Delta x} f(y) dy$$

por el teorema fundamental del calculo

$$\phi = \frac{d}{dx} \int_a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^m \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \right\} \int_a^{x-k\Delta x} f(y) dy dx$$

como el limite no depende de la variable de integración o derivación se puede sacar de la integral y derivada

$$\phi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{d}{dx} \int_a^x (\Delta x)^m \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \right\} \int_a^{x-k\Delta x} f(y) dy dx$$

calculando la derivada de una integral

$$\begin{aligned} \phi &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \int_a^x \frac{d}{dx} \left((\Delta x)^m \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \right\} \int_a^{x-k\Delta x} f(y) dy \right) dx \\ &\quad - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^m \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \right\} \int_a^{x-k\Delta x} f(y) dy \end{aligned}$$

calculando el limite del segundo termino, además cambia el limite, ya que $n \rightarrow \infty$ si $\Delta x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \phi &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \int_a^x \frac{d}{dx} \left((\Delta x)^m \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \right\} \int_a^{x-k\Delta x} f(y) dy \right) dx \\ &\quad - \lim_{n \rightarrow \infty} 0^m \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \right\} \int_a^a f(y) dy \end{aligned}$$

como la integral se anula y el factor externo se anula entonces el termino se anula

$$\phi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \int_a^x \frac{d}{dx} \left((\Delta x)^m \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \right\} \int_a^{x-k\Delta x} f(y) dy \right) dx$$

por propiedades de la derivación y las sumatorias

$$\phi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \int_a^x (\Delta x)^m \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \right\} \frac{d}{dx} \left(\int_a^{x-k\Delta x} f(y) dy \right) dx$$

aplicando el teorema fundamental del cálculo dentro de la sumatoria

$$\phi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \int_a^x (\Delta x)^m \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \right\} f(x - k\Delta x) dx$$

ingresando el limite dentro de la integral

$$\phi = \int_a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^m \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \right\} f(x - k\Delta x) dx$$

por hipótesis de inducción

$$\phi = \int_a^x \frac{1}{(m-1)!} \int_a^x (x-\tau)^{m-1} f(\tau) d\tau dx$$

sacando las constantes de la integral y agrupando el interior

$$\phi = \frac{1}{(m-1)!} \int_a^x \left(\int_a^x (x-\tau)^{m-1} f(\tau) d\tau \right) dx$$

integrando por partes la integral del interior

$$\phi = \frac{1}{(m-1)!} \int_a^x -\frac{(x-\tau)^m f(\tau)}{m} \Big|_a^x - \frac{1}{m} \int_a^x (x-\tau)^m f'(\tau) d\tau dx$$

sacando $1/m$ de la integral

$$\phi = \frac{1}{m!} \int_a^x -(x-\tau)^m f(\tau) \Big|_a^x + \int_a^x (x-\tau)^m f'(\tau) d\tau dx$$

evaluando los limites

$$\phi = \frac{1}{m!} \int_a^x (x-a)^m f(a) + \frac{1}{m} \int_a^x (x-\tau)^m f'(\tau) d\tau dx$$

distribuyendo la integral

$$\phi = \frac{1}{m!} \left[\int_a^x (x-a)^m f(a) dx + \int_a^x \int_a^x (x-\tau)^m f'(\tau) d\tau dx \right]$$

calculando la primera integral

$$\phi = \frac{1}{m!} \left[\left. \frac{(x-a)^{m+1}}{m+1} f(a) \right|_a^x + \int_a^x \int_a^x (x-\tau)^m f'(\tau) d\tau dx \right]$$

evaluando los limites

$$\phi = \frac{1}{m!} \left[\frac{(x-a)^{m+1}}{m+1} f(a) + \int_a^x \int_a^x (x-\tau)^m f'(\tau) d\tau dx \right]$$

por propiedades de las integrales dobles se pueden interponer, ademas de reescribir la integral doble

$$\phi = \frac{1}{m!} \left[\frac{(x-a)^{m+1}}{m+1} f(a) + \int_a^x f'(\tau) \int_a^x (x-\tau)^m dx d\tau \right]$$

Integrando por partes la integral cuya variable de integración es τ

$$\phi = \frac{1}{m!} \left[\left. \frac{(x-a)^{m+1}}{m+1} f(a) + f(\tau) \int_a^x (x-\tau)^m dx \right|_a^x - \int_a^x f(\tau) \frac{d}{d\tau} \left(\int_a^x (x-\tau)^m dx \right) d\tau \right]$$

derivando la integral

$$\phi = \frac{1}{m!} \left[\left. \frac{(x-a)^{m+1}}{m+1} f(a) + f(\tau) \int_a^x (x-\tau)^m dx \right|_a^x - \int_a^x f(\tau) [-(x-\tau)^m] d\tau \right]$$

calculando la primera integral y sacando términos constantes de la segunda

$$\phi = \frac{1}{m!} \left[\left. \frac{(x-a)^{m+1}}{m+1} f(a) + f(\tau) \frac{(x-\tau)^{m+1}}{m+1} \right|_a^x + \int_a^x f(\tau) (x-\tau)^m d\tau \right]$$

evaluando límites en el segundo término

$$\phi = \frac{1}{m!} \left[\frac{(x-a)^{m+1}}{m+1} f(a) - f(a) \frac{(x-a)^{m+1}}{m+1} + \int_a^x f(\tau)(x-\tau)^m d\tau \right]$$

eliminando términos semejantes

$$\phi = \frac{1}{m!} \int_a^x f(\tau)(x-\tau)^m d\tau$$

reescribiendo la integral

$$\phi = \frac{1}{m!} \int_a^x (x-\tau)^m f(\tau) d\tau$$

finalmente se reemplaza el valor de ϕ según la ecuación 3.17

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^{m+1} \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} m+1 \\ k \end{matrix} \right\} f(x-k\Delta x) = \frac{1}{m!} \int_a^x (x-\tau)^m f(\tau) d\tau$$

Así quedando demostrado. ■

Ejemplo 3.2. Calcular

$$\mathcal{D}_{[2,3]}^{-2}(5)$$

solución:

Aplicando el teorema 3.1 a la función $f(x) = 5$

$$\mathcal{D}_{[2,3]}^{-2}(5) = \frac{1}{2} \int_2^3 (3-\tau)^2 \cdot 5 d\tau$$

sacando constantes de la integral

$$\mathcal{D}_{[2,3]}^{-2}(5) = \frac{5}{2} \int_2^3 (3 - \tau)^2 d\tau$$

haciendo la sustitución $u = 3 - \tau$ donde $du = -d\tau$

$$\mathcal{D}_{[2,3]}^{-2}(5) = -\frac{5}{2} \int_1^0 u^2 du$$

aplicando propiedades de la integral definida

$$\mathcal{D}_{[2,3]}^{-2}(5) = \frac{5}{2} \int_0^1 u^2 du$$

calculando la integral

$$\mathcal{D}_{[2,3]}^{-2}(5) = \frac{5}{2} \cdot \frac{u^3}{3} \Big|_0^1$$

evaluando los limites

$$\mathcal{D}_{[2,3]}^{-2}(5) = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{3}$$

simplificando

$$\mathcal{D}_{[2,3]}^{-2}(5) = \frac{5}{6}$$

3.3. Conexión y sentido

En esta sección se dará sentido matemático a la derivada de orden entero negativo para ello se deben tener en cuenta aspectos importantes como:

1. Teorema de Leibniz
2. Integral Semilla
3. Integral repetida de Cauchy

3.3.1. Teorema de leibniz

El Teorema de Leibniz es una generalización del segundo teorema fundamental del cálculo creado por Gottfried Wilhelm Leibniz.

Teorema 3.2 (Teorema de Leibniz). *Sea $f(x, \tau)$ una función tal que, tanto $f(x, \tau)$ y su derivada parcial $f_x(x, \tau)$ son continuas en x y τ en alguna región (x, τ) , incluyendo $a(x) \leq \tau \leq b(x), x_0 \leq x \leq x_1$ suponga también que las funciones $a(x)$ y $b(x)$ son continuas y sus derivadas en $x_0 \leq x \leq x_1$. Entonces para $x_0 \leq x \leq x_1$.*

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, \tau) d\tau = f(x, b(x)) \cdot \frac{d}{dx} b(x) - f(x, a(x)) \cdot \frac{d}{dx} a(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, \tau) d\tau$$

La demostración del teorema 3.2 se encuentra en el Apéndice C como demostración C.1

Ejemplo 3.3. Calcular

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1 + \cos(y)\cos(x))}{\cos(x)} dx \quad , \forall y \in \mathbb{R}$$

No es una integral sencilla de calcular, se pueden usar técnicas como integrar por partes y luego solucionar una integral trigonométrica siendo este último paso complejo, ya que, se cuenta con un parámetro en el interior y es y . Sin embargo, se puede usar el teorema de Leibniz para calcular esta integral. Primero se encontrará un valor inicial haciendo que $y = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1 + \cos(\frac{\pi}{2}) \cos(x))}{\cos(x)} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1)}{\cos(x)} dx \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1 + \cos(\frac{\pi}{2}) \cos(x))}{\cos(x)} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0 dx\end{aligned}$$

quedando que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1 + \cos(\frac{\pi}{2}) \cos(x))}{\cos(x)} dx = 0 \quad (3.18)$$

Se deriva la integral con respecto a y

$$I(y) = \frac{d}{dy} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1 + \cos(y) \cos(x))}{\cos(x)} dx$$

luego aplicando el teorema de Leibniz

$$I(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\ln(1 + \cos(y) \cos(x))}{\cos(x)} \right) dx$$

Calculando derivada

$$I(y) = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(y)}{1 + \cos(y) \cos(x)} dx$$

aplicando identidades trigonométricas de ángulos dobles

$$I(y) = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(y)}{\left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \right) + \cos(y) \left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \right)} dx$$

sacando constates y aplicando identidades trigonométricas de ángulos medios se tiene

$$I(y) = -\frac{\text{sen}(y)}{1 - \cos(y)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{1+\cos(y)}{1-\cos(y)} + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} dx$$

usando identidades de ángulos dobles en el denominador y amplificando por 2

$$I(y) = -\frac{2\text{sen}(y)}{1 - \cos(y)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{\cos^2\left(\frac{y}{2}\right)}{\text{sen}^2\left(\frac{y}{2}\right)} + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} dx$$

usando una identidad trigonométrica fundamental en el denominador

$$I(y) = -\frac{2\text{sen}(y)}{1 - \cos(y)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cot^2\left(\frac{y}{2}\right) + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} dx$$

reescribiendo el factor de la integral

$$I(y) = -2\cot\left(\frac{y}{2}\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cot^2\left(\frac{y}{2}\right) + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} dx$$

haciendo la sustitución $u = \tan(x/2)$ entonces $du = \frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$

$$I(y) = -2\cot\left(\frac{y}{2}\right) \int_0^1 \frac{dx}{\cot^2\left(\frac{y}{2}\right) + u^2}$$

calculando la integral

$$I(y) = -2\cot^{-1}\left(\cot\left(\frac{y}{2}\right) u\right) \Big|_0^1$$

evaluando limites

$$I(y) = -y$$

Finalmente,

$$\frac{d}{dy} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1 + \cos(y)\cos(x))}{\cos(x)} dx = -y$$

integrando ambos lados

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1 + \cos(y)\cos(x))}{\cos(x)} dx = C - \frac{y^2}{2} \quad (3.19)$$

haciendo que $y = \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1 + \cos(\frac{\pi}{2})\cos(x))}{\cos(x)} dx = C - \frac{\pi^2}{8}$$

aplicando el valor inicial de la ecuación (3.18)

$$0 = C - \frac{\pi^2}{8}$$

despejando C

$$C = \frac{\pi^2}{8}$$

sustituyendo el valor de C en la ecuación (3.19)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1 + \cos(y)\cos(x))}{\cos(x)} dx = \frac{\pi^2}{8} - \frac{y^2}{2} \quad (3.20)$$

Así, queda calculada la integral

3.4. Integral Semilla

En esta sección se creará una función integral y un teorema que facilitará la deducción del teorema de Leibniz.

Sea

$$h_m(x) = \int_a^x (x - \tau)^m f(\tau) d\tau$$

donde $m \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{R}$

Ahora bien, a partir de esta función se obtiene un resultado muy importante relacionado con la función $h_m(x)$.

Teorema 3.3 (Teorema VitelSAC). *Sea $f(\tau)$ continua en el intervalo $[a, x]$ se tiene que*

$$k \int_a^x h_{k-1}(x) dx = h_k(x)$$

donde $k \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{R}$

Demostración:

Sea

$$\begin{aligned} h_{k-1}(x) &= \int_a^x (x - \tau)^{k-1} f(\tau) d\tau \\ h_{k-1}(x) &= \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{(x - \tau)^k}{k} \right) f(\tau) d\tau \end{aligned}$$

sumando un 0

$$h_{k-1}(x) = \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{(x - \tau)^k}{k} \right) f(\tau) d\tau + 0$$

reescribiendo el 0 y restando un 0

$$h_{k-1}(x) = \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{(x - \tau)^k}{k} \right) f(\tau) d\tau + \frac{(x - x)^k}{k} f(x) \frac{dx}{dx} - 0$$

reescribiendo un 0

$$h_{k-1}(x) = \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{(x-\tau)^k}{k} \right) f(\tau) d\tau + \frac{(x-x)^k}{k} f(x) \frac{dx}{dx} - \frac{(x-a)^k}{k} f(a) \frac{da}{dx}$$

Usando el teorema 3.2 se tiene que

$$h_{k-1}(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{(x-\tau)^k}{k} f(\tau) d\tau$$

Ahora

$$\begin{aligned} h_{k-1}(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{k} \int_a^x (x-\tau)^k f(\tau) d\tau \right) \\ &= \frac{1}{k} \frac{d}{dx} \left(\int_a^x (x-\tau)^k f(\tau) d\tau + k \int_a^x h_{k-1}(x) d\tau \right) \end{aligned}$$

Despejando

$$k h_{k-1}(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_a^x (x-\tau)^k f(\tau) d\tau + k \int_a^x h_{k-1}(x) d\tau \right)$$

integrando ambos miembros

$$\int_a^x k h_{k-1}(x) dx = \int_a^x (x-\tau)^k f(\tau) d\tau + k \int_a^x h_{k-1}(x) d\tau$$

aplicando propiedades de la igualdad

$$k \int_a^x h_{k-1}(x) dx - k \int_a^x h_{k-1}(x) d\tau = \int_a^x (x-\tau)^k f(\tau) d\tau$$

se anula la segunda integral del primer miembro de la igualdad por propiedades de la integración

$$k \int_a^x h_{k-1}(x) dx = \int_a^x (x - \tau)^k f(\tau) d\tau$$

Finalmente se tiene que

$$k \int_a^x h_{k-1}(x) dx = h_k(x) \quad (3.21)$$

Así queda demostrado

■

3.5. Integral repetida de Cauchy

Uno de los resultados mas importantes para interpretar matemáticamente la derivada de orden entero negativo es el teorema de la integral repetida de Cauchy, ya que presenta una conexión con el teorema 3.1. Usando estos dos teoremas se llega a concluir que integrar p veces una función es la derivada de orden $-p$ de una función.

Deducción:

Usando el teorema 3.3 con $k = p - 1$ se tiene que

$$(p - 1) \int_a^x h_{p-2}(x) dx = h_{p-1}(x)$$

haciendo nuevamente de la ecuación (5.6)

$$(p-1) \int_a^x (p-2) \int_a^x h_{p-3}(x) dx dx = h_{p-1}(x)$$

$$(p-1)(p-2) \int_a^x \int_a^x h_{p-3}(x) dx dx = h_{p-1}(x)$$

Si se sigue repitiendo este proceso se obtiene

$$(p-1)(p-2) \cdots 2 \cdot 1 \int_a^x \int_a^x \cdots \int_a^x h_0(x) dx dx \cdots dx dx = h_{p-1}(x)$$

$$(p-1)! \int_a^x \int_a^x \cdots \int_a^x \int_a^x f(x) dx dx dx \cdots dx dx = h_{p-1}(x)$$

simplificando y pasando el factorial al miembro derecho

$$\int_a^x \int_a^x \cdots \int_a^x \int_a^x f(x) dx dx \cdots dx dx = \frac{1}{(p-1)!} \int_a^x (x-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau \quad (3.22)$$

Teorema 3.4 (Integral repetida de Cauchy). *Sea f una función continua en el intervalo $[a, x]$ entonces*

$$\int_a^x \int_a^x \cdots \int_a^x \int_a^x f(x) dx dx \cdots dx dx = \frac{1}{(p-1)!} \int_a^x (x-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau$$

$p \text{ veces}$

con $p \in \mathbb{N}$

La demostración del teorema 3.4 se encuentra en el Apéndice C como demostración C.2

Ejemplo 3.4. Calcular

$$\mathcal{D}_{[0,4]}^{-2}(x)$$

Solución:

usando el teorema 3.4

$$\mathcal{D}_{[0,x]}^{-2}(x) = \int_0^x \int_0^x x dx dx$$

resolviendo la integral del interior

$$\mathcal{D}_{[0,x]}^{-2}(x) = \int_0^x \frac{x^2}{2} \Big|_0^x dx$$

evaluando limites

$$\mathcal{D}_{[0,x]}^{-2}(x) = \int_0^x \frac{x^2}{2} dx$$

volviendo a evaluar la integral

$$\mathcal{D}_{[0,x]}^{-2}(x) = \frac{x^3}{6} \Big|_0^x$$

evaluando limites

$$\mathcal{D}_{[0,x]}^{-2}(x) = \frac{x^3}{6}$$

4

Generalizando el orden de la derivada a los reales

Matemáticos, de pie sobre los
hombros de los demás.

Karl Friedrich Gauss

En el presente capítulo se presenta la derivada de orden real desde la definición de Caputo, Caputo-Fabrizio y algunas de sus propiedades básicas

4.1. Derivada de orden real negativa

Como se logró evidenciar en el capítulo 3, la derivada de orden entero negativo se puede definir por medio del límite, sin embargo se buscó un método mas eficiente para calcular esta derivada, con la creación del teorema 3.1, siguiendo esta idea se extenderá la derivada de orden entero negativo a la derivada de orden real negativa.

Dada la siguiente igualdad

$$\mathcal{D}_{[a,x]}^{-p}f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^p \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} p \\ k \end{matrix} \right\} f(x - k\Delta x) = \frac{1}{(p-1)!} \int_a^x (x-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau$$

se logra identificar que el parámetro $p \in \mathbb{Z}^+$ es libre, brindando la opción de generalizar a un número real $\alpha \in \mathbb{R}^+$, sabiendo que la función gamma es la generalización de la función factorial

$$(\alpha - 1)! = \Gamma(\alpha)$$

se obtiene el siguiente teorema

Teorema 4.1 (Derivada de orden real negativo).

$$\mathcal{D}_{[a,x]}^{-\alpha} f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^\alpha \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ k \end{matrix} \right\} f(x - k\Delta x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau$$

La demostración del teorema 4.1 se encuentra en el Apéndice D como demostración D.1

Ejemplo 4.1. Calcular $\mathcal{D}_{[a,x]}^{-(n+1/2)} f(x)$ de la función

$$f(x) = k$$

donde $k, a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$

Solución:

Usando el teorema 4.1

$$\mathcal{D}_{[a,x]}^{-(n+\frac{1}{2})} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n + \frac{1}{2})} \int_a^x (x - \tau)^{n-\frac{1}{2}} k d\tau$$

reescribiendo y aplicando propiedades de la integral

$$\mathcal{D}_{[a,x]}^{-(n+\frac{1}{2})} f(x) = \frac{k}{\Gamma(n + \frac{1}{2})} \int_a^x (x - \tau)^{n-\frac{1}{2}} d\tau$$

calculando la integral

$$\mathcal{D}_{[a,x]}^{-(n+\frac{1}{2})} f(x) = -\frac{k}{(n+\frac{1}{2}) \Gamma(n+\frac{1}{2})} (x-\tau)^{n+\frac{1}{2}} \Big|_a^x$$

calculando la función gamma y evaluando los limites

$$\mathcal{D}_{[a,x]}^{-(n+\frac{1}{2})} f(x) = -\frac{k}{(n+\frac{1}{2}) \cdot \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{4^n n!}} (x-a)^{n+\frac{1}{2}}$$

reescribiendo

$$\mathcal{D}_{[a,x]}^{-(n+\frac{1}{2})} f(x) = -\frac{k 4^{n+1} n!}{2(2n+1)(2n)! \sqrt{\pi}} (x-a)^{n+\frac{1}{2}}$$

aplicando propiedades de los factoriales

$$\mathcal{D}_{[a,x]}^{-(n+\frac{1}{2})} f(x) = -\frac{k 4^{n+1} n!}{2(2n+1)! \sqrt{\pi}} (x-a)^{n+\frac{1}{2}}$$

La propiedad mas importante de la derivada de orden real negativo es la composición de derivadas

Teorema 4.2 (Composición de derivadas).

$$\mathcal{D}_{[a,x]}^{-\alpha} \left(\mathcal{D}_{[a,x]}^{-\beta} f(x) \right) = \mathcal{D}_{[a,x]}^{-(\alpha+\beta)} f(x)$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$

La demostración del teorema 4.2 se encuentra en el Apéndice D como demostración D.2

4.2. Derivada de orden real

En la sección anterior se logró evidenciar que es posible calcular derivadas de orden real negativo. Sin embargo falta conocer las derivadas de orden real positivo a partir de las definiciones de la propuesta realizada por Caputo, dada la propuesta hecha por (Podlubny, 1998a, page 79) y lo construido en el documento se deduce de la siguiente manera.

Si $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y $m \in \mathbb{N}$ se puede escribir como

$$\alpha = -(m - \alpha) + m \quad (4.1)$$

donde $0 < m - 1 < \alpha < m$

Remplazando la formula 4.1

$$\mathcal{D}_{[a, x]}^{\alpha} f(x) = \mathcal{D}_{[a, x]}^{-(m-\alpha)+m} f(x)$$

tomando como composición de derivadas

$$\mathcal{D}_{[a, x]}^{\alpha} f(x) = \mathcal{D}_{[a, x]}^{-(m-\alpha)} \left(\mathcal{D}_{[a, x]}^m f(x) \right)$$

sabiendo que haciendo una sustitución $g(x) = \mathcal{D}_{[a, x]}^m f(x)$

$$\mathcal{D}_{[a, x]}^{\alpha} f(x) = \mathcal{D}_{[a, x]}^{-(m-\alpha)} g(x)$$

aplicando el teorema 3.1 de la derivada de orden real negativo

$$\mathcal{D}_{[a, x]}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_a^x (x - \tau)^{m-\alpha-1} g(\tau) d\tau$$

reescribiendo

$$\mathcal{D}_{[a, x]}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_a^x [(x - \tau)^{-1}]^{\alpha - m + 1} g(\tau) d\tau$$

dando forma

$$\mathcal{D}_{[a, x]}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_a^x \frac{g(\tau)}{(x - \tau)^{\alpha - m + 1}} d\tau$$

reemplazando el valor de $g(\tau)$

$$\mathcal{D}_{[a, x]}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_a^x \frac{1}{(x - \tau)^{\alpha - m + 1}} \mathcal{D}_{[a, \tau]}^m f(\tau) d\tau$$

Así teniendo la definición de derivada de Caputo

Definición 4.1 (Derivada de Caputo). *La derivada de orden α de la función $f(x)$ esta dada por*

$$\mathcal{D}_{[a, x]}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_a^x \frac{1}{(x - \tau)^{\alpha - m + 1}} \mathcal{D}_{[a, \tau]}^m f(\tau) d\tau$$

donde $0 < m - 1 < \alpha < m$ con $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y $\alpha \in \mathbb{N}$

Algunas veces se nota la derivada de Caputo con una C en la parte superior izquierda

$${}_a^C \mathcal{D}_x^{\alpha} f(x)$$

Ejemplo 4.2. Si $f(x) = (x - a)^{\beta}$ calcular

$$\mathcal{D}_{[a, x]}^{\alpha} f(x)$$

donde $\alpha, \beta, a \in \mathbb{R}^+$ y $\alpha < \beta$

Solución:

Aplicando la derivada de Caputo

$$\mathcal{D}_{[a,x]}^{\alpha} (x-a)^{\beta} = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x \frac{1}{(x-\tau)^{\alpha-m+1}} \mathcal{D}_{[a,\tau]}^m (\tau-a)^{\beta} d\tau$$

aplicando el teorema 2.3 generalizando la potencia del polinomio a los $\mathbb{R}^+$

$$\mathcal{D}_{[a,x]}^{\alpha} (x-a)^{\beta} = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x \frac{(\tau-a)^{\beta-m}}{(x-\tau)^{\alpha-m+1}} \cdot \frac{\beta!}{(\beta-m)!} d\tau$$

aplicando la propiedad 1.2, ya que, $\beta \in \mathbb{R}^+$

$$\mathcal{D}_{[a,x]}^{\alpha} (x-a)^{\beta} = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x \frac{(\tau-a)^{\beta-m}}{(x-\tau)^{\alpha-m+1}} \cdot \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-m+1)} d\tau$$

sacando las funciones que no dependen de la variable de integración y reescribiendo la integral

$$\mathcal{D}_{[a,x]}^{\alpha} (x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-m+1)\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x (x-\tau)^{m-\alpha-1} (\tau-a)^{\beta-m} d\tau$$

haciendo la sustitución $\tau - a = u(x-a)$ con diferenciales $d\tau = (x-a)du$ y cambiando limites $[a, x]_{\tau} = [0, 1]_u$

$$\mathcal{D}_{[a,x]}^{\alpha} (x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-m+1)\Gamma(m-\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{m-\alpha-1} (x-a)^{m-\alpha-1} (u(x-a))^{\beta-m} (x-a) du$$

reescribiendo y sacando funciones que no dependen de la variable de integración

$$\mathcal{D}_{[a,x]}^{\alpha} (x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)(x-a)^{\beta-\alpha}}{\Gamma(\beta-m+1)\Gamma(m-\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{m-\alpha-1} u^{\beta-m} du$$

volviendo a reescribir

$$\mathcal{D}_{[a,x]}^{\alpha} (x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)(x-a)^{\beta-\alpha}}{\Gamma(\beta-m+1)\Gamma(m-\alpha)} \int_0^1 u^{(\beta-m+1)-1} (1-u)^{(m-\alpha)-1} du$$

aplicando la definición 1.4 de la función beta

$$\mathcal{D}_{[a,x]}^{\alpha} (x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)(x-a)^{\beta-\alpha}}{\Gamma(\beta-m+1)\Gamma(m-\alpha)} \mathcal{B}(\beta-m+1, m-\alpha)$$

aplicando la propiedad 1.6 que relaciona la función gamma con la función beta

$$\mathcal{D}_{[a,x]}^{\alpha} (x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)(x-a)^{\beta-\alpha}}{\Gamma(\beta-m+1)\Gamma(m-\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\beta-m+1)\Gamma(m-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}$$

simplificando se tiene

$$\mathcal{D}_{[a,x]}^{\alpha} (x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (x-a)^{\beta-\alpha}$$

Dada la definición 4.1 de la derivada de Caputo y los teorema presentados en el capitulo 2 surgen propiedades importantes como la linealidad de la derivada de orden real

Propiedad 4.1 (Derivada de orden real de una suma y múltiplos constantes). *Si f y g son diferenciables en x de orden m , con α y β constantes, entonces*

$$\mathcal{D}_{[a,x]}^{\mu} (\alpha f(x) \pm \beta g(x)) = \alpha \mathcal{D}_{[a,x]}^{\mu} f(x) \pm \beta \mathcal{D}_{[a,x]}^{\mu} g(x)$$

donde $\forall \alpha, \beta, \mu \in \mathbb{R}$

Propiedad 4.2 (Derivada de orden real de un producto). *Si f y g son diferenciables en x de*

orden m , entonces

$$\mathcal{D}_{[a, x]}^{\mu}(f \cdot g)(x) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \mathcal{D}_{[a, x]}^{-(m-\mu)} (f^{(k)}(x)g^{(m-k)}(x))$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$ y $\mu < m$

Propiedad 4.3 (Derivada de orden real de una función compuesta). *Si $f(u)$ es diferenciable en cualquier orden en el punto $u = g(x)$, y $g(x)$ es diferenciable en cualquier orden en x , entonces la derivada de orden μ de la función $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ es*

$$\mathcal{D}_{[a, x]}^{\mu} f(g(x)) = \sum \frac{m!}{k_1!1!^{k_1} k_2!2!^{k_2} \dots k_m!m!^{k_m}} \mathcal{D}_{[a, x]}^{-(m-\mu)} \left(f^{(k_1+k_2+\dots+k_m)}(g(x)) \cdot \prod_{j=1}^m \left(g^{(j)}(x) \right)^{k_j} \right)$$

donde

$$1 \cdot k_1 + 2 \cdot k_2 + \dots + k \cdot k_m = m$$

$$\mu \in \mathbb{R}$$

$$\mu < m$$

La demostración de las propiedades 4.1, 4.2 y 4.3 se encuentran en el Apéndice D como demostraciones D.3, D.4 y D.5

4.3. Derivada Caputo-Fabrizio

Si se observa fijamente la derivada de Caputo

$$\mathcal{D}_{[a, x]}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_a^x \frac{1}{(x - \tau)^{\alpha-m+1}} \mathcal{D}_{[a, \tau]}^m f(\tau) d\tau \quad (4.2)$$

tiene dificultades al calcularse para funciones trigonométricas y exponenciales, ya que al reemplazarse estas funciones y calcular sus derivadas de orden natural genera una función trigonométrica mas compleja, obteniendo una integral del producto entre una función potencia y una función trigonométrica produciendo una integral no elemental. Por lo tanto se propone la siguiente definición

Definición 4.2 (Derivada de orden real de Caputo-Fabrizio).

$$\mathcal{D}_{[a,x]}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{1-\alpha} \int_a^x e^{-\frac{\alpha(x-\tau)}{1-\alpha}} \mathcal{D}_{[a,\tau]}^m f(\tau) d\tau$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $m \in \mathbb{N}$ y $m-1 < \alpha < m$

Ejemplo 4.3. Calcular la siguiente derivada con la definición de Caputo-Fabrizio

$$\mathcal{D}_{[a,x]}^{\alpha} (\text{sen}(x))$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y $b, c \in \mathbb{R}$

Solución:

Aplicando la definición 4.2

$$\mathcal{D}_{[a,x]}^{\alpha} \text{sen}(x) = \frac{1}{1-\alpha} \int_a^x e^{-\frac{\alpha(x-\tau)}{1-\alpha}} \mathcal{D}_{[a,\tau]}^m (\text{sen}(\tau)) d\tau$$

calculando al derivada de orden m usando el teorema 2.9

$$\mathcal{D}_{[a,x]}^{\alpha} \text{sen}(x) = \frac{1}{1-\alpha} \int_a^x e^{-\frac{\alpha(x-\tau)}{1-\alpha}} \text{sen} \left(\tau + \frac{m\pi}{2} \right) d\tau$$

haciendo la sustitución $u = \tau + m\pi/2$ con diferenciales $du = d\tau$ con limites en la integral

$$[a, x]_{\tau} = [a + m\pi/2, x + m\pi/2]_u$$

$$\mathcal{D}_{[a, x]}^{\alpha} \text{sen}(x) = \frac{1}{1 - \alpha} \int_{a + \frac{m\pi}{2}}^{x + \frac{m\pi}{2}} e^{-\frac{\alpha(x-u+\frac{m\pi}{2})}{1-\alpha}} \text{sen}(u) du$$

reescribiendo

$$\mathcal{D}_{[a, x]}^{\alpha} \text{sen}(x) = \frac{1}{1 - \alpha} \cdot e^{-\frac{\alpha(x+\frac{m\pi}{2})}{1-\alpha}} \cdot \int_{a + \frac{m\pi}{2}}^{x + \frac{m\pi}{2}} e^{\frac{\alpha u}{1-\alpha}} \text{sen}(u) du$$

calculando la integral, integrando por partes dos veces, ya que esta integral es cíclica se tiene

$$\mathcal{D}_{[a, x]}^{\alpha} \text{sen}(x) = \frac{1}{1 - \alpha} \cdot e^{-\frac{\alpha(x+\frac{m\pi}{2})}{1-\alpha}} \cdot \frac{e^{\frac{\alpha u}{1-\alpha}}}{\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2 + 1} \left(\frac{\alpha}{1 - \alpha} \text{sen}(u) - \cos(u) \right) \Bigg|_{a + \frac{m\pi}{2}}^{x + \frac{m\pi}{2}}$$

reescribiendo

$$\mathcal{D}_{[a, x]}^{\alpha} \text{sen}(x) = \frac{1 - \alpha}{\alpha^2 + (1 - \alpha)^2} \cdot e^{-\frac{\alpha(x+\frac{m\pi}{2})}{1-\alpha}} \left(\frac{\alpha}{1 - \alpha} \text{sen}(u) - \cos(u) \right) \Bigg|_{a + \frac{m\pi}{2}}^{x + \frac{m\pi}{2}}$$

evaluando limites

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{[a, x]}^{\alpha} \text{sen}(x) &= \frac{1 - \alpha}{\alpha^2 + (1 - \alpha)^2} \left(\frac{\alpha}{1 - \alpha} \text{sen} \left(x + \frac{m\pi}{2} \right) - \cos \left(x + \frac{m\pi}{2} \right) \right) \\ &\quad - \frac{1 - \alpha}{\alpha^2 + (1 - \alpha)^2} \cdot e^{-\frac{\alpha(x-a)}{1-\alpha}} \left(\frac{\alpha}{1 - \alpha} \text{sen} \left(a + \frac{m\pi}{2} \right) - \cos \left(a + \frac{m\pi}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

5

Creación pagina web "Derivative Calculus"

La esencia de las matemáticas
reside en su libertad.

Georg Cantor

Como uno de los resultados relevantes del trabajo es la **CREACIÓN**¹ de Derivative Calculus, una página creada con el objetivo generar comunidad y de usar herramientas tecnológicas en la investigación matemática, con el fin de brindar soluciones a problemas que se puedan automatizar por medio de software matemático.

Esta pagina tiene el objetivo de generar comunidad abriendo paso a la derivada de orden real y posteriores estudios, donde la comunidad académica tiene la oportunidad de comunicar conocimiento por medio de ella y realizar simulaciones por medio de software matemático involucrando nuevas tecnologías en cálculo simbólico y numérico (SageMath).

Dentro de la creación de la pagina web se han creado redes sociales con la intención de hacer visible todas las ventajas que tiene una pagina web exclusiva para las derivadas. Para ello se tuvieron en cuenta redes sociales como Facebook con el nombre de "@Derivativ-

¹Cuya autoria es del autor de este documento (Jhon Mina "[I](#)")

Calculus". Otra de las ventajas mas importantes de una cuenta en Facebook es que se puede difundir información académica por medio de grupos privados y abiertos.

Ahora bien, para la construcción de esta pagina web se tuvieron en cuenta las siguientes componentes

5.1. Componentes básicas de almacenamiento en la nube y dirección web

La pagina web como identidad:

1. Nombre único: Derivative Calculus, un nombre sencillo de buscar en cualquier buscador web como Google, Bing y Yahoo.
2. Slogan: "La revolución de la derivada"
3. Dominio: www.derivativecalculus.com, una dirección web internacional con terminación en ".com" la cual brinda mayor visibilidad en la página en algunos buscadores, contando con el nombre estricto de la pagina web.
4. Correos: servicio@derivativecalculus.com, dadas las condiciones del Hosting se pueden tener mas de 100 correos los cuales son exclusivos de la pagina web con el dominio de la pagina web.
5. Logo rectangular: Se presenta un logo rectangular para la pagina web ubicándose en la vista del ordenador, este logo traduce letra a letra el nombre de "Derivative Calculus " del abecedario griego.



Figura 5.1: Logo rectangular

6. Logo cuadrado: Se presenta un logo cuadrado para la vista móvil, la cual tiene una "D" estilizada con una "f" de función,

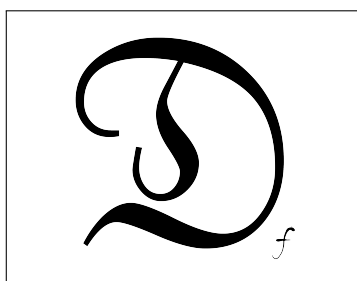


Figura 5.2: Logo cuadrado

5.2. Componentes técnicos

La pagina web tiene las siguientes componentes técnicas

1. Una pagina 100 % online, solo se requiere ingresar la dirección URL desde cualquier navegador (www.derivativecalculus.com)
2. Sistema operativo: Desde cualquier sistema operativo con conexión a internet.
3. Dispositivos: En cualquier dispositivo que tenga conexión a internet.
4. Hosting: Hostinger, un almacenamiento en la nube **No** gratuito.
5. Tiempo mínimo de funcionalidad: 2 años con posible renovación.

6. Software usado: Wordpress, SageMath y QuickLatex

5.3. Componentes accesibles

1. Aplicativos con entrada en lenguaje maquina y salida en notación matemática.

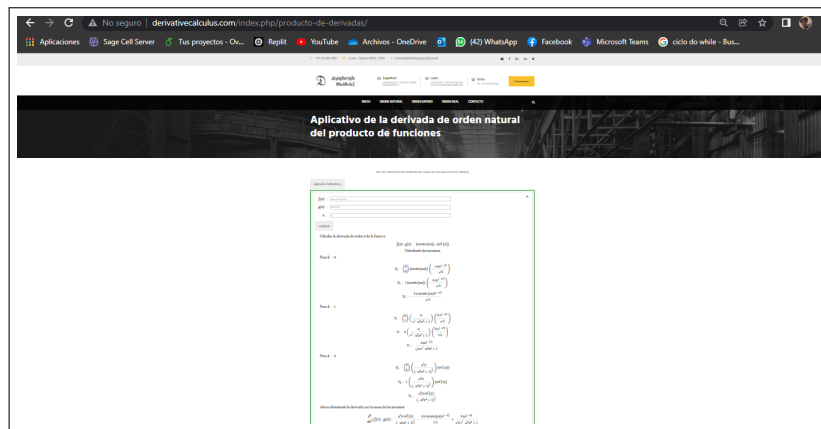


Figura 5.3: Aplicativos

2. Blog con presentación en notación matemática y comentarios en notación $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ generando notación matemática (No disponible)
3. Paginas y subpaginas
4. Pagina de contacto

5.4. Uso de aplicativos

Para el uso de cualquier aplicativo se debe tener en cuenta la siguiente información :

1. El ingreso de funciones en lenguaje maquina teniendo en cuenta el manual de funciones aceptadas por SageMath, este se puede encontrar en la pagina de Derivative Calculus o en la siguiente URL <http://derivativecalculus.com/wp-content/uploads/2022/02/Comandos.pdf>. Una de las grandes ventajas es el uso de funciones especiales como la función error $erf(x)$ y funciones básicas como $asin(a * x)$.
2. Una de las ventajas mas relevantes de los aplicativos creados es el uso de parámetros, ya que se pueden ingresar funciones como $f(x) = ax^2 + bx + c$ o $g(x) = arcos(e^{ax^2+bc+c})$ donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Vale resaltar que la pagina web se esta actualizando cada momento por parte del autor, con espera de posibles colaboradores en un futuro, bien sea para mejoras o incorporación de nuevas actualizaciones de software.

Conclusiones

La derivada de orden natural de una función es el punto de partida para lograr la derivada de orden real positiva de Caputo, por ello se debe tener en cuenta las reglas de derivación generalizadas, cuyo orden sea en los naturales.

Además, la derivada de orden natural de una función por medio del límite abre paso a la definición de derivada de orden entero negativo de una función, ya que, esta toma la misma forma de la sumatorias de Riemman para integrales, al tomar esta silueta se puede definir la derivada de orden entero negativo como una integral.

Así mismo, al obtener el resultado de Leibniz y la forma integral de la derivada de orden entero negativo, se logra adquirir un sentido matemático de la derivada, indicando que el orden entero negativo es la integración sucesiva de la función.

Sobre la notación de la derivada en el trabajo se propone un estilo de notación mas compacta y organizada que la propuesta por otros autores la cual menciona datos relevantes como el orden de la derivada, región de derivación, variable de derivación y una letra especial para dicha derivada.

Acerca de la derivada de orden real de una función se puede empezar a definir con la derivada de orden entero negativo, ya que, depende de la función gamma y dado que la función se puede extender a los reales se logra obtener la derivada de orden real negativo, ahora bien si se desea calcular la derivada de orden real positivo, basta con calcular la compuesta de derivadas, donde salen a relucir diferentes derivadas como la derivada de orden real positivo

de Riemann-Liouville y Caputo,

$${}^{RL}\mathcal{D}_{[a,x]}^m \left(\mathcal{D}_{[a,x]}^\alpha f(x) \right) \neq {}^C\mathcal{D}_{[a,x]}^\alpha \left(\mathcal{D}_{[a,x]}^m f(x) \right) \quad (5.1)$$

en este documento se trabajó la derivada de Caputo, sin embargo la derivada de Caputo presenta dificultades al calcularse en funciones trigonométricas y otras, ya que, el núcleo de la integral lo impide y como propuesta a estas derivadas de orden real positivo de funciones trigonométricas se tiene la derivada de Caputo-Fabrizio.

La creación de este trabajo permite visualizar el alcance que puede tener una noción conocida como la derivada en el cálculo, generando la sensación de construir conocimiento. Además permite conocer el proceso de investigación matemática que han realizado autores, resaltando el esfuerzo para lograr demostraciones de teoremas y generación de definiciones para esta rama de las matemáticas.

Dentro de la investigación realizada en la bibliografía, no se logró evidenciar páginas web con software matemático incorporado que estuvieran enfocadas en la divulgación de conocimiento relacionado con las derivadas. Dando solución a este problema se creó Derivative Calculus.

La creación de páginas web enfocadas a las matemáticas presentan algunas dificultades en la notación matemática, bien sea, para la presentación de información por parte del autor, como la comunicación por parte del usuario, por ello se usó una herramienta universal en notación matemática como lo es $\text{\LaTeX}$.

Apéndice A

Demostraciones capitulo 1

Demostrar da vida a mundos
increíbles en los cuales, afirmar en
matemáticas no es poca cosa.

Jhon Mina y José Luis Guevara

En este capitulo se realizaran las demostraciones del capitulo 2

Demostración A.1 (Teorema 1.1, Linealidad Laplace). *La transformada de Laplace es una operación lineal*

$$\mathcal{L}[\alpha f(x) \pm \beta g(x)](s) = \alpha \mathcal{L}[f(x)](s) \pm \beta \mathcal{L}[g(x)](s)$$

Esta demostración se hará partiendo del miembro derecho de la igualdad llegando al segundo miembro. Dada la definición 1.1 se tiene

$$\mathcal{L}[\alpha f(x) \pm \beta g(x)](s) = \int_0^{\infty} e^{-st} [\alpha f(t) \pm \beta g(t)] dt$$

dentro de la integral aplicando la distributiva respecto a la suma y/o resta en el interior de la integral

$$\mathcal{L}[\alpha f(x) \pm \beta g(x)](s) = \int_0^{\infty} [e^{-st} \alpha f(t) \pm e^{-st} \beta g(t)] dt$$

por la linealidad de la integral se reparte la integral

$$\mathcal{L}[\alpha f(x) \pm \beta g(x)](s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \alpha f(t) dt \pm \int_0^{\infty} e^{-st} \beta g(t) dt$$

sacando constantes

$$\mathcal{L}[\alpha f(x) \pm \beta g(x)](s) = \alpha \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \pm \beta \int_0^{\infty} e^{-st} g(t) dt$$

aplicando la definición [1.1](#)

$$\mathcal{L}[\alpha f(x) \pm \beta g(x)](s) = \alpha \mathcal{L}[f(x)](s) \pm \beta \mathcal{L}[g(x)](s)$$

Así, quedando demostrado el teorema de la linealidad de la transformada de Laplace

■

Demostración A.2 (Teorema [1.2](#), Existencia transformada de Laplace). *Sea $f(t)$ una función integrable, definida en un intervalo y satisface*

$$|f(t)| \leq M e^{\alpha t}, \quad \forall t \geq 0$$

donde M y α son constantes. Entonces la transformada de Laplace de $f(t)$ existe $\forall s > \alpha$

Calculando la integral de $|f(t)e^{-st}|$ en el intervalo $0 < t < b$ y aplicando la propiedad del valor absoluto

$$\int_0^b |f(t)e^{-st}| dt = \int_0^b |f(t)|e^{-st} dt$$

aplicando la hipótesis del teorema

$$\int_0^b |f(t)e^{-st}| dt \leq \int_0^b Me^{\alpha t}e^{-st} dt$$

sacando constantes y reescribiendo

$$\int_0^b |f(t)e^{-st}| dt \leq M \int_0^b e^{-(s-\alpha)t} dt$$

calculando la integral

$$\int_0^b |f(t)e^{-st}| dt \leq -\frac{M}{s-\alpha} e^{-(s-\alpha)t} \Big|_0^b$$

evaluando los limites de integración

$$\int_0^b |f(t)e^{-st}| dt \leq \frac{M}{s-\alpha} [1 - e^{-(s-\alpha)b}]$$

teniendo que $s > \alpha$ y haciendo que $b \rightarrow \infty$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b |f(t)e^{-st}| dt \leq \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{M}{s-\alpha} [1 - e^{-(s-\alpha)b}]$$

calculando el limite

$$\int_0^\infty |f(t)e^{-st}| dt \leq \frac{M}{s-\alpha}$$

Así, quedando demostrado el teorema de la existencia de la transformada de Laplace

■

Demostración A.3 (Teorema 1.3, Transformada de Laplace y derivada). *Si $f(x)$ satisface el teorema 1.2 entonces*

$$\mathcal{L}[f'(x)](s) = s\mathcal{L}[f(x)](s) - f(0)$$

Por definición 1.1 se tiene

$$\mathcal{L}[f'(x)](s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt$$

integrando por partes el miembro derecho

$$\mathcal{L}[f'(x)](s) = e^{-st} f(t) \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

evaluando los limites de integración

$$\mathcal{L}[f'(x)](s) = -f(0) + s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

reescribiendo

$$\mathcal{L}[f'(x)](s) = s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt - f(0)$$

por definición de transformada de Laplace

$$\mathcal{L}[f'(x)](s) = s\mathcal{L}[f(x)](s) - f(0)$$

Así, quedando demostrado el teorema de la transformada de Laplace y la derivada

■

Demostración A.4 (Teorema 1.4, Transformada de Laplace y derivada generalizado). Si

$n \in \mathbb{N}$ entonces y $f(x)$ satisface el teorema 1.2 entonces

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(x)](s) = s^n \mathcal{L}[f(x)](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} f^{(k)}(0)$$

Este teorema se demostrará por inducción

Paso 1: Para $n = 1$ se tiene

$$\mathcal{L}[f^{(1)}(x)](s) = s^1 \mathcal{L}[f(x)](s) - \sum_{k=0}^{1-1} s^{1-1-k} f^{(k)}(0)$$

simplificando

$$\mathcal{L}[f'(x)](s) = s^1 \mathcal{L}[f(x)](s) - \sum_{k=0}^0 s^{-k} f^{(k)}(0)$$

aplicando el teorema 1.3 en el miembro izquierdo y desarrollando el miembro derecho de la igualdad

$$s\mathcal{L}[f(x)](s) - f(0) = s\mathcal{L}[f(x)](s) - s^0 f^{(0)}(0)$$

simplificando

$$s\mathcal{L}[f(x)](s) - f(0) = s\mathcal{L}[f(x)](s) - f(0)$$

cumpliéndose así para $n = 1$.

Paso 2: Ahora para $n = m$

$$\mathcal{L}[f^{(m)}(x)](s) = s^m \mathcal{L}[f(x)](s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-1-k} f^{(k)}(0)$$

Hipótesis de inducción

Paso 3: Para $n = m + 1$, si se cumple para m debe cumplirse para el sucesor que es $m + 1$

$$\mathcal{L}[f^{(m+1)}(x)](s) = s^{m+1} \mathcal{L}[f(x)](s) - \sum_{k=0}^m s^{m-k} f^{(k)}(0) \quad (\text{A.1})$$

en te paso se debe partir de un miembro de la igualdad (A.1) y llegar al otro miembro usando la hipótesis de inducción, en este caso se comenzará desde el miembro izquierdo y se llegará al miembro derecho.

Aplicando la definición 1.1

$$\mathcal{L}[f^{(m+1)}(x)](s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f^{(m+1)}(t) dt$$

Integrando por partes

$$\mathcal{L}[f^{(m+1)}(x)](s) = e^{-st} f^{(m)}(t) \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} f^{(m)}(t) dt$$

evaluando limites

$$\mathcal{L}[f^{(m+1)}(x)](s) = -f^{(m)}(0) + s \int_0^{\infty} e^{-st} f^{(m)}(t) dt$$

reescribiendo

$$\mathcal{L}[f^{(m+1)}(x)](s) = s \int_0^\infty e^{-st} f^{(m)}(t) dt - f^{(m)}(0)$$

aplicando la definición 1.1

$$\mathcal{L}[f^{(m+1)}(x)](s) = s\mathcal{L}[f^{(m)}(x)](s) - f^{(m)}(0)$$

aplicando la hipótesis

$$\mathcal{L}[f^{(m+1)}(x)](s) = s \left(s^m \mathcal{L}[f(x)](s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-1-k} f^{(k)}(0) \right) - f^{(m)}(0)$$

aplicando la distributiva con respecto a la suma

$$\mathcal{L}[f^{(m+1)}(x)](s) = s^{m+1} \mathcal{L}[f(x)](s) - s \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-1-k} f^{(k)}(0) - f^{(m)}(0)$$

aplicando propiedades de la sumatoria

$$\mathcal{L}[f^{(m+1)}(x)](s) = s^{m+1} \mathcal{L}[f(x)](s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k} f^{(k)}(0) - s^{m-m} f^{(m)}(0)$$

ingresando el termino $m - \text{esimo}$ en la sumatoria

$$\mathcal{L}[f^{(m+1)}(x)](s) = s^{m+1} \mathcal{L}[f(x)](s) - \sum_{k=0}^m s^{m-k} f^{(k)}(0)$$

Así, quedando demostrado el teorema de la transformada de Laplace y la derivada generalizado

■

Apéndice B

Demostraciones capitulo 2

¿Cómo es posible un error en las matemáticas?

Henri Poincare

En este capitulo se realizaran las demostraciones del capitulo 3

Demostración B.1 (Teorema 2.1, derivada de orden natural). *La derivada n -ésima de la función $f(x)$ con respecto a la variable x es la función $f^{(n)}$ cuyo valor en x es*

$$f^{(n)}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta x)^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(x - k(\Delta x))$$

siempre y cuando el limite exista.

Demostración

Este teorema se demostrará por inducción

Paso 1: Para $n = 0$ se tiene

$$\begin{aligned}
 f^{(0)}(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta x)^0} \sum_{k=0}^0 (-1)^k \binom{0}{k} f(x - k\Delta x) \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta x)^0} (-1)^0 \binom{0}{0} f(x - 0\Delta x) \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1 \cdot 1 \cdot f(x) \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x) \\
 &= f(x)
 \end{aligned}$$

cumpléndose así para $n = 0$.

Paso 2: Ahora para $n = m$

$$f^{(m)}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta x)^m} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} f(x - k\Delta x)$$

Hipótesis de inducción

Paso 3: Para $n = m + 1$, si se cumple para m debe cumplirse para el sucesor que es $m + 1$

$$f^{(m+1)}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta x)^{m+1}} \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^k \binom{m+1}{k} f(x - k\Delta x) \quad (\text{B.1})$$

en te paso se debe partir de un miembro de la igualdad (B.1) y llegar al otro miembro usando la hipótesis de inducción, en este caso se comenzará desde el miembro izquierdo y se llegará

al miembro derecho.

$$\begin{aligned}
 f^{(m+1)}(x) &= \frac{d^{(m+1)}f(x)}{dx^{(m+1)}} \\
 &= \frac{d^{(1+m)}f(x)}{dx^{(1+m)}} \\
 &= \frac{d}{dx} \left(\frac{d^m f(x)}{dx^m} \right) \\
 &= \frac{d}{dx} (f^{(m)}(x))
 \end{aligned}$$

Aplicando la definición de derivada unilateral por izquierda [2.2](#)

$$f^{(m+1)}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} (f^{(m)}(x) - f^{(m)}(x - \Delta x)) \quad (\text{B.2})$$

Analizando el interior del paréntesis $f^{(m)}(x) - f^{(m)}(x - \Delta x)$

1. $f^{(m)}(x - \Delta x)$ Aplicando la hipótesis de inducción y evaluando la $f^{(m)}(x)$ en $x - \Delta x$.

$$\begin{aligned}
 f^{(m)}(x - \Delta x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta x)^m} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} f(x - \Delta x - k\Delta x) \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta x)^m} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} f(x - (k+1)\Delta x)
 \end{aligned}$$

Indexando la sumatoria se tiene que

$$f^{(m)}(x - \Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta x)^m} \sum_{k=1}^{m+1} (-1)^{k-1} \binom{m}{k-1} f(x - k\Delta x)$$

Sacando el ultimo termino de la sumatoria

$$f^{(m)}(x - \Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{(\Delta x)^m} \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \binom{m}{k-1} f(x - k\Delta x) + (-1)^m f(x - (m+1)\Delta x) \right]$$

2. $f^{(m)}(x)$

$$\begin{aligned} f^{(m)}(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta x)^m} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} f(x - k\Delta x) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta x)^m} \left[f(x) + \sum_{k=1}^m (-1)^k \binom{m}{k} f(x - k\Delta x) \right] \end{aligned}$$

3. $\phi = f^{(m)}(x) - f^{(m)}(x - \Delta x)$

$$\begin{aligned} \phi &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta x)^m} \left[f(x) + \sum_{k=1}^m (-1)^k \left(\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} \right) f(x - k\Delta x) \right. \\ &\quad \left. - (-1)^m f(x - (m+1)\Delta x) \right] \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta x)^m} \left[f(x) + \sum_{k=1}^m (-1)^k \binom{m+1}{k} f(x - k\Delta x) \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{m+1} f(x - (m+1)\Delta x) \right] \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta x)^m} \left[\binom{m+1}{0} f(x) + \sum_{k=1}^m (-1)^k \binom{m+1}{k} f(x - k\Delta x) \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{m+1} \binom{m+1}{m+1} f(x - (m+1)\Delta x) \right] \end{aligned}$$

Agregando los términos a la sumatoria

$$f^{(m)}(x) - f^{(m)}(x - \Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta x)^m} \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^k \binom{m+1}{k} f(x - k\Delta x) \quad (\text{B.3})$$

Remplazando (B.3) en (B.2)

$$f^{(m+1)}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left[\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta x)^m} \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^k \binom{m+1}{k} f(x - k\Delta x) \right]$$

Finalmente se obtiene

$$f^{(m+1)}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta x)^{m+1}} \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^k \binom{m+1}{k} f(x - k\Delta x)$$

■

Demostración B.2 (Teorema 2.2, derivada de orden natural de una constante). *Si una función real tiene un valor constante $f(x) = c$, entonces*

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} c, & \text{si } n = 0 \\ 0, & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

donde $n \in \mathbb{N}$ y $c \in \mathbb{R}$

Demostración

Aplicando el teorema 2.1 a la función $f(x) = c$

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta x)^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(x - k(\Delta x)) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta x)^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} c \\ &= c \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta x)^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \\ &= c \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta x)^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k (1)^{n-k} \binom{n}{k} \end{aligned}$$

usando el binomio de newton

$$\begin{aligned}
 &= c \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta x)^n} (-1 + 1)^n \\
 &= c \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta x)^n} (0)^n \\
 &= c \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{(\Delta x)^n} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

■

Demostración B.3 (Teorema 2.3 Derivada de orden natural de función potencia). Si $f(x)$ es una función potencia $f(x) = x^p$ entonces

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \frac{p!}{(p-n)!} x^{p-n} , & \text{si } 0 \leq n \leq p \\ 0 & , \text{si } n > p \end{cases}$$

donde $n \in \mathbb{N}$ y $p \in \mathbb{N}$

Demostración 1

La primera parte (para $0 \leq n \leq p$) del teorema 2.3 se demostrará por inducción

Paso 1: Para $n = 0$ se tiene

$$\begin{aligned}
 f^{(0)}(x) &= \frac{p!}{(p-0)!} x^{p-0} \\
 &= \frac{p!}{p!} x^p \\
 &= x^p \\
 &= f(x)
 \end{aligned}$$

cumpléndose así para $n = 0$

Paso 2: Ahora para $n = m$

$$f^{(m)}(x) = \frac{p!}{(p-m)!} x^{p-m}$$

Hipótesis de inducción

Paso 3: Para $n = m + 1$, si se cumple para m debe cumplirse para el sucesor que es $m + 1$

$$f^{(m+1)}(x) = \frac{p!}{(p-m-1)!} x^{p-m-1} \quad (\text{B.4})$$

en te paso se debe partir de un miembro de la igualdad (B.4) y llegar al otro miembro usando la hipótesis de inducción, en este caso se comenzará desde el miembro izquierdo y se llegará al miembro derecho.

$$f^{(m+1)}(x) = f^{(1+m)}(x)$$

después de aplicar la conmutativa en el orden de la derivada, se procede separa las derivada

$$f^{(m+1)}(x) = \frac{d}{dx} \left(f^{(m)}(x) \right)$$

por hipótesis de inducción se tiene la derivada de orden m

$$f^{(m+1)}(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{p!}{(p-m)!} x^{p-m} \right)$$

sacando de la derivada las constantes

$$f^{(m+1)}(x) = \frac{p!}{(p-m)!} \frac{d}{dx} (x^{p-m})$$

aplicando el teorema 2.1 con $n = 1$ a la función x^{p-m}

$$f^{(m+1)}(x) = \frac{p!}{(p-m)!} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \sum_{k=0}^1 (-1)^k \binom{1}{k} (x - k(\Delta x))^{p-m}$$

expandiendo la suma

$$f^{(m+1)}(x) = \frac{p!}{(p-m)!} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^p - (x - k\Delta x)^{p-m}}{\Delta x}$$

Por el teorema de binomio se puede expandir $(x - k\Delta x)^{p-m}$

$$f^{(m+1)}(x) = \frac{p!}{(p-m)!} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^{p-m} - \sum_{i=0}^{p-m} \binom{p-m}{i} (-1)^i x^{p-m-i} (\Delta x)^i}{\Delta x}$$

sacando el termino para $i = 0$ de la sumatoria

$$f^{(m+1)}(x) = \frac{p!}{(p-m)!} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^{p-m} - x^{p-m} - \sum_{i=1}^{p-m} \binom{p-m}{i} (-1)^i x^{p-m-i} (\Delta x)^i}{\Delta x}$$

simplificando términos semejantes y reescribiendo

$$f^{(m+1)}(x) = \frac{p!}{(p-m)!} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{\Delta x} \sum_{i=1}^{p-m} \binom{p-m}{i} (-1)^i x^{p-m-i} (\Delta x)^i$$

ingresando $\frac{-1}{\Delta x}$ en la sumatoria

$$f^{(m+1)}(x) = \frac{p!}{(p-m)!} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{p-m} \binom{p-m}{i} (-1)^{i-1} x^{p-m-i} (\Delta x)^{i-1}$$

sacando el termino para $i = 1$ de la sumatoria

$$f^{(m+1)}(x) = \frac{p!}{(p-m)!} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\binom{p-m}{1} x^{p-m-1} + \sum_{i=2}^{p-m} \binom{p-m}{i} (-1)^{i-1} x^{p-m-i} (\Delta x)^{i-1} \right]$$

como el limite de una suma es la suma de los limites siempre y cuando exista el limite podemos separar como sigue

$$f^{(m+1)}(x) = \frac{p!}{(p-m)!} \binom{p-m}{1} x^{p-m-1} + \frac{p!}{(p-m)!} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=2}^{p-m} \binom{p-m}{i} (-1)^{i-1} x^{p-m-i} (\Delta x)^{i-1}$$

como $i \geq 2$ y $\Delta x \rightarrow 0$ entonces $(\Delta x)^{i-1} \rightarrow 0$, por lo tanto la sumatoria tiende a 0

$$f^{(m+1)}(x) = \frac{p!}{(p-m)!} \binom{p-m}{1} x^{p-m-1} + 0$$

sacando un termino del factorial que se encuentra en el denominador y desarrollando la combinatoria

$$f^{(m+1)}(x) = \frac{p!(p-m)}{(p-m-1)!(p-m)} x^{p-m-1}$$

simplificando

$$f^{(m+1)}(x) = \frac{p!}{(p-m-1)!} x^{p-m-1}$$

quedando demostrada la primera parte del teorema 2.3. La demostración de la segunda parte (para $n \geq p$) es mas sencilla teniendo la primera parte del teorema 2.3.

Siendo $n \geq p$ se puede escribir n como $n = m + p$ donde $m \in \mathbb{N}$, así calculando la derivada de $f^{(n)}(x)$ de $f(x) = x^p$ como sigue

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= f^{(m+p)}(x) \\ f^{(n)}(x) &= \frac{d^m}{dx^m} (f^{(p)}(x)) \end{aligned}$$

calculando la derivada de orden p según la generalización anterior se tiene

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^m}{dx^m} \left(\frac{p!}{(p-p)!} x^{p-p} \right)$$

simplificando

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^m}{dx^m} (p!)$$

como $p!$ es una constante por el teorema 2.2 su derivada de orden m es 0

$$f^{(n)}(x) = 0$$

quedando así demostrado el teorema 2.3

■

Demostración 2

La primera parte (para $0 \leq n \leq p$) del teorema 2.3 se demostrará a partir del teorema 2.1.

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} (x^p)$$

aplicando el teorema 2.3

$$f^{(n)}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta x)^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (x - k\Delta x)^p$$

reescribiendo y usando el binomio de newton para reescribir $(x - k\Delta x)^p$

$$f^{(n)}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x^{-n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} x^{p-i} (k\Delta x)^i (-1)^i$$

uniendo las sumatorias para obtener una sumatoria doble

$$f^{(n)}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x^{-n} \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^p (-1)^k \binom{n}{k} \binom{p}{i} x^{p-i} (k\Delta x)^i (-1)^i$$

intercambiando las sumatorias

$$f^{(n)}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x^{-n} \sum_{i=0}^p \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{p}{i} x^{p-i} (k\Delta x)^i (-1)^i$$

ingresando Δx^{-n} al interior de la sumatoria doble

$$f^{(n)}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=0}^p \sum_{k=0}^n \Delta x^{-n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{p}{i} x^{p-i} (k\Delta x)^i (-1)^i$$

agrupando términos semejantes

$$f^{(n)}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=0}^p \sum_{k=0}^n (-1)^{k-i} \Delta x^{i-n} \binom{n}{k} \binom{p}{i} k^i x^{p-i}$$

sacando de la primera sumatoria el termino $i = 0$

$$f^{(n)}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\sum_{i=1}^p \sum_{k=0}^n (-1)^{k-i} \Delta x^{i-n} \binom{n}{k} \binom{p}{i} k^i x^{p-i} + \sum_{k=0}^n (-1)^k \Delta x^{-n} \binom{n}{k} \binom{p}{0} x^p \right]$$

reescribiendo la segunda sumatoria

$$f^{(n)}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\sum_{i=1}^p \sum_{k=0}^n (-1)^{k-i} \Delta x^{i-n} \binom{n}{k} \binom{p}{i} k^i x^{p-i} + \Delta x^{-n} \binom{p}{0} x^p \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} 1^{n-k} \right]$$

calculando la segunda sumatoria

$$f^{(n)}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\sum_{i=1}^p \sum_{k=0}^n (-1)^{k-i} \Delta x^{i-n} \binom{n}{k} \binom{p}{i} k^i x^{p-i} + \Delta x^{-n} \binom{p}{0} x^p (1-1)^n \right]$$

como para $k = 0$ y $i = 0$ la sumatoria doble se anula se comienza la sumatoria doble en $(i, k) = (1, 1)$

$$f^{(n)}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^n (-1)^{k-i} \Delta x^{i-n} \binom{n}{k} \binom{p}{i} k^i x^{p-i}$$

como $p \geq n$ se separa el parámetro i en tres intervalos

$$0 \leq i \leq n-1$$

$$n = 1$$

$$n+1 \leq i \leq p$$

así obteniendo tres sumatorias

$$f^{(n)}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-i} \Delta x^{i-n} \binom{n}{k} \binom{p}{i} k^i x^{p-i} + \sum_{k=1}^n (-1)^{k-n} \Delta x^{n-n} \binom{n}{k} \binom{p}{n} k^n x^{p-n} + \sum_{i=n+1}^p \sum_{k=1}^n (-1)^{k-i} \Delta x^{i-n} \binom{n}{k} \binom{p}{i} k^i x^{p-i} \right]$$

el limite de una suma es la suma de los limites

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-i} \Delta x^{i-n} \binom{n}{k} \binom{p}{i} k^i x^{p-i} \\
&+ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-n} \Delta x^{n-n} \binom{n}{k} \binom{p}{n} k^n x^{p-n} \\
&+ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=n+1}^p \sum_{k=1}^n (-1)^{k-i} \Delta x^{i-n} \binom{n}{k} \binom{p}{i} k^i x^{p-i}
\end{aligned}$$

Ahora analizando las tres sumatorias

$$\begin{aligned}
\phi &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-i} \Delta x^{i-n} \binom{n}{k} \binom{p}{i} k^i x^{p-i} \\
\theta &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-n} \Delta x^{n-n} \binom{n}{k} \binom{p}{n} k^n x^{p-n} \\
\alpha &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=n+1}^p \sum_{k=1}^n (-1)^{k-i} \Delta x^{i-n} \binom{n}{k} \binom{p}{i} k^i x^{p-i}
\end{aligned}$$

1. Analizando ϕ : Como la sumatoria doble es alternante y los términos son iguales de 2 en 2 la suma total de los términos es igual a 0

$$\begin{aligned}
\phi &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-i} \Delta x^{i-n} \binom{n}{k} \binom{p}{i} k^i x^{p-i} \\
\phi &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 \\
\phi &= 0
\end{aligned}$$

2. Analizando θ : Sacando los términos de la sumatoria que no dependen de parámetro k

$$\theta = \binom{p}{n} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x^{n-n} x^{p-n} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-n} \binom{n}{k} k^n$$

simplificando y evaluando el limite

$$\theta = \binom{p}{n} x^{p-n} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-n} \binom{n}{k} k^n$$

como $\sum_{k=1}^n (-1)^{k-n} \binom{n}{k} k^n = n!$

$$\theta = \binom{p}{n} x^{p-n} n!$$

desarrollando el binomio

$$\theta = \frac{p!}{n!(p-n)!} n! x^{p-n}$$

simplificando

$$\theta = \frac{p!}{(p-n)!} x^{p-n}$$

3. Analizando α :

$$\alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=n+1}^p \sum_{k=1}^n (-1)^{k-i} \Delta x^{i-n} \binom{n}{k} \binom{p}{i} k^i x^{p-i}$$

ingresando el limite a la sumatoria

$$\alpha = \sum_{i=n+1}^p \sum_{k=1}^n \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (-1)^{k-i} \binom{n}{k} \Delta x^{i-n} \binom{p}{i} k^i x^{p-i}$$

Como $i \geq n+1$ entonces $i \geq n$ por lo tanto cuando $\Delta x \rightarrow 0$ también $\Delta x^{i-n} \rightarrow 0$

$$\alpha = \sum_{i=n+1}^p \sum_{k=1}^n (-1)^{k-i} (0) \binom{n}{k} \binom{p}{i} k^i x^{p-i}$$

así

$$\alpha = 0$$

conociendo ϕ, θ y α se tiene

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \phi + \theta + \alpha \\ f^{(n)}(x) &= 0 + \frac{p!}{(p-n)!} x^{p-n} + 0 \\ f^{(n)}(x) &= \frac{p!}{(p-n)!} x^{p-n} \end{aligned}$$

quedando demostrada la primera parte del teorema 2.3. La demostración de la segunda parte (para $n \geq p$) se encuentra en la demostración 1 de la demostración del teorema B.3.

■

Demostración B.4 (Teorema 2.4). *Si p es un entero positivo y $x \neq 0$, entonces*

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^{-p}) = (-1)^n \frac{(p+n-1)!}{(p-1)!} x^{-(p+n)}$$

donde $n \in \mathbb{N}$

Demostración

Este teorema se demostrará por inducción

Paso 1: Para $n = 0$ se tiene

$$\frac{d^0}{dx^0}(x^{-p}) = (-1)^0 \frac{(p+0-1)!}{(p-1)!} x^{-(p+0)}$$

simplificando

$$\frac{d^0}{dx^0}(x^{-p}) = 1 \cdot \frac{(p-1)!}{(p-1)!} x^{-p}$$

como $(p-1)! \neq 0$ se puede simplificar

$$\frac{d^0}{dx^0}(x^{-p}) = x^{-p}$$

cumpléndose así para $n = 0$

Paso 2: Ahora para $n = m$

$$\frac{d^m}{dx^m}(x^{-p}) = (-1)^m \frac{(p+m-1)!}{(p-1)!} x^{-(p+m)}$$

Hipótesis de inducción

Paso 3: Para $n = m + 1$, si se cumple para m debe cumplirse para el sucesor que es $m + 1$

$$\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}(x^{-p}) = (-1)^{m+1} \frac{(p+m)!}{(p-1)!} x^{-(p+m+1)} \quad (\text{B.5})$$

en te paso se debe partir de un miembro de la igualdad (B.5) y llegar al otro miembro usando la hipótesis de inducción, en este caso se comenzará desde el miembro izquierdo y se llegará al miembro derecho.

$$\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}(x^{-p}) = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^m}{dx^m}(x^{-p}) \right)$$

aplicando la hipótesis de inducción del paso 2

$$\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}(x^{-p}) = \frac{d}{dx} \left((-1)^m \frac{(p+m-1)!}{(p-1)!} x^{-(p+m)} \right)$$

sacando los múltiplos constantes de la derivada de primer orden

$$\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}(x^{-p}) = (-1)^m \frac{(p+m-1)!}{(p-1)!} \cdot \frac{d}{dx}(x^{-(p+m)})$$

calculado la derivada

$$\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}(x^{-p}) = (-1)^m \frac{(p+m-1)!}{(p-1)!} \cdot (-1)^1 (p+m) x^{-(p+m)-1}$$

reescribiendo

$$\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}(x^{-p}) = (-1)^{m+1} \frac{(p+m-1)!(p+m)}{(p-1)!} x^{-(p+m+1)}$$

simplificando

$$\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}(x^{-p}) = (-1)^{m+1} \frac{(p+m)!}{(p-1)!} x^{-(p+m+1)}$$

quedando así demostrado el teorema 2.4

■

Demostración B.5 (Teorema 2.5 Derivada de una suma y múltiplos constantes). Si f y g son diferenciables de x en cualquier orden con α y β constantes, entonces

$$\frac{d^n}{dx^n}(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha f^{(n)}(x) + \beta g^{(n)}(x)$$

donde $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Demostración

Esta demostración se realizará a partir del teorema 2.1

sea h la suma de las funciones con los múltiplos constantes

$$h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$$

aplicando el teorema 2.1 a la función h siendo $h^{(n)}(x)$ la deriva de orden n

$$h^{(n)}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta x)^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} h(x - k\Delta x)$$

ahora evaluando $x - k\Delta x$ en $h(x)$

$$h^{(n)}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta x)^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} [\alpha f(x - k\Delta x) + \beta g(x - k\Delta x)]$$

separando la suma

$$h^{(n)}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{(\Delta x)^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \alpha f(x - k\Delta x) + \right. \\ \left. \frac{1}{(\Delta x)^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \beta g(x - k\Delta x) \right]$$

el limite de una suma es la suma de los limites

$$h^{(n)}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta x)^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \alpha f(x - k\Delta x) + \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta x)^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \beta g(x - k\Delta x)$$

por propiedades de las sumatorias y de los limites se sacan las constantes α y β de las sumatorias y los limites correspondientes ya que son constantes

$$h^{(n)}(x) = \alpha \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta x)^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(x - k\Delta x) + \\ \beta \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta x)^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} g(x - k\Delta x)$$

por el teorema 2.1 se tiene que

$$f^{(n)}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta x)^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(x - k\Delta x) \\ g^{(n)}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta x)^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} g(x - k\Delta x)$$

sustituyendo

$$h^{(n)}(x) = \alpha f^{(n)}(x) + \beta g^{(n)}(x)$$

finalmente remplazando $h^{(n)}(x)$ se tiene

$$\frac{d^n}{dx^n}(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha f^{(n)}(x) + \beta g^{(n)}(x)$$

quedando así demostrado el teorema 2.5

■

Demostración B.6 (Teorema 2.6, derivada de orden natural de un producto). Si f y g son

diferenciables en cualquier orden en x , entonces también lo es su producto y

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n}(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$$

siendo $n \in \mathbb{N}$

Demostración

Esta demostración se realizará por inducción

Paso 1: Para $n = 0$ se tiene

$$(f \cdot g)^{(0)}(x) = \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} f^{(k)}(x)g^{(0-k)}(x)$$

expandiendo la sumatoria

$$= \binom{0}{0} f^{(0)}(x)g^{(0)}(x)$$

reescribiendo

$$= f(x)g(x)$$

por lo tanto se cumple para $n = 0$

Paso 2: Ahora para $n = m$

$$(f \cdot g)^{(m)}(x) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} f^{(k)}(x)g^{(m-k)}(x)$$

Hipótesis de inducción

Paso 3: Para $n = m + 1$, si se cumple para m debe cumplirse para el sucesor que es $m + 1$

$$(f \cdot g)^{(m+1)}(x) = \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} f^{(k)}(x) g^{(m+1-k)}(x) \quad (\text{B.6})$$

en te paso se debe partir de un miembro de la igualdad (B.6) y llegar al otro miembro usando la hipótesis de inducción, en este caso se comenzará desde el miembro izquierdo y se llegará al miembro derecho.

$$(f \cdot g)^{(m+1)}(x) = \frac{d}{dx} \left((f \cdot g)^{(m)}(x) \right)$$

aplicando la hipótesis de inducción

$$(f \cdot g)^{(m+1)}(x) = \frac{d}{dx} \left(\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} f^{(k)}(x) g^{(m-k)}(x) \right)$$

usando el teorema 2.5 de suma y múltiplos constantes para ingresar dentro de la sumatoria el operador

$$(f \cdot g)^{(m+1)}(x) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{d}{dx} (f^{(k)}(x) g^{(m-k)}(x))$$

calculando la derivada entre dos funciones

$$(f \cdot g)^{(m+1)}(x) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (f^{(k+1)}(x) g^{(m-k)}(x) + f^{(k)}(x) g^{(m+1-k)}(x))$$

separando sumatorias

$$(f \cdot g)^{(m+1)}(x) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} f^{(k+1)}(x) g^{(m-k)}(x) + \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} f^{(k)}(x) g^{(m+1-k)}(x)$$

indexando la primera sumatoria

$$(f \cdot g)^{(m+1)}(x) = \sum_{k=1}^m \binom{m}{k-1} f^{(k)}(x) g^{(m+1-k)}(x) + \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} f^{(k)}(x) g^{(m+1-k)}(x)$$

sacando el primer termino de la segunda sumatoria

$$(f \cdot g)^{(m+1)}(x) = \sum_{k=1}^{m+1} \binom{m}{k-1} f^{(k)}(x) g^{(m+1-k)}(x) + f(x) g^{(m+1)}(x) + \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} f^{(k)}(x) g^{(m+1-k)}(x)$$

sacado el termino $m + 1$ de la primera sumatoria

$$(f \cdot g)^{(m+1)}(x) = \sum_{k=1}^m \binom{m}{k-1} f^{(k)}(x) g^{(m+1-k)}(x) + \binom{m}{m+1-1} f^{(m+1)}(x) g^{(m+1-(m+1))}(x) + f(x) g^{(m+1)}(x) + \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} f^{(k)}(x) g^{(m+1-k)}(x)$$

simplificando

$$(f \cdot g)^{(m+1)}(x) = \sum_{k=1}^m \binom{m}{k-1} f^{(k)}(x) g^{(m+1-k)}(x) + f^{(m+1)}(x) g(x) + f(x) g^{(m+1)}(x) + \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} f^{(k)}(x) g^{(m+1-k)}(x)$$

sumando las dos sumatorias

$$(f \cdot g)^{(m+1)}(x) = \sum_{k=1}^m \left(\binom{m}{k-1} + \binom{m}{k} \right) f^{(k)}(x) g^{(m+1-k)}(x) + f^{(m+1)}(x) g(x) + f(x) g^{(m+1)}(x)$$

sumando los dos binomiales

$$(f \cdot g)^{(m+1)}(x) = \sum_{k=1}^m \binom{m+1}{k} f^{(k)}(x) g^{(m+1-k)}(x) + f^{(m+1)}(x) g(x) + f(x) g^{(m+1)}(x)$$

como $f(x)g^{(m+1)}(x)$ es el termino en la posición $k = 0$, entonces se elimina este termino y se comienza la sumatoria en $k = 0$

$$(f \cdot g)^{(m+1)}(x) = \sum_{k=0}^m \binom{m+1}{k} f^{(k)}(x) g^{(m+1-k)}(x) + f^{(m+1)}(x) g(x)$$

como $f^{(m+1)}(x)g(x)$ es el termino en la posición $k = m + 1$, entonces se elimina y se ubica como limite superior de la sumatoria $m + 1$

$$(f \cdot g)^{(m+1)}(x) = \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} f^{(k)}(x) g^{(m+1-k)}(x)$$

cumpléndose para $n = m + 1$, así quedando demostrado

■

Demostración B.7 (Teorema 2.8, derivada de orden natural de un cociente). *Si $f = f(x)$ y $g = g(x)$ son diferenciables en cualquier orden en x , y si $g(x) \neq 0$, entonces el cociente $f(x)/g(x)$ es diferenciable en cualquier orden en x y*

$$\frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{f}{g} \right) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} \sum \frac{(-1)^{\phi_{n-k}} \phi_{n-k}! (n-k)!}{m_1! \cdots m_{n-k}!} g^{-[\phi_{n-k}+1]} \prod_{i=1}^{n-k} \left(\frac{g^{(i)}}{i!} \right)^{m_i}$$

donde

$$\phi_{n-k} = \sum_{i=1}^{n-k} m_i$$

con

$$\sum_{i=1}^{n-k} (i \cdot m_i) = n - k$$

Demostración

Aplicando el operador $\frac{d^n}{dx^n}$ al cociente f/g se tiene

$$\frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{f}{g} \right)$$

como $g \neq 0$ se puede reescribir el cociente como un producto

$$\frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{d^n}{dx^n} \left(f \cdot \frac{1}{g} \right)$$

aplicando el teorema 2.6 que se refiere a la derivada de un producto

$$\frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{f}{g} \right) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} \left(\frac{1}{g} \right)^{(n-k)} \quad (\text{B.7})$$

Ahora para encontrar $(g^{-1})^{(n-k)}$ se debe aplicar el teorema 2.7

$$\frac{d^n}{dx^n} p(g(x)) = \sum \frac{n!}{m_1! 1!^{m_1} m_2! 2!^{m_2} \dots m_n! n!^{m_n}} \cdot p^{(m_1+m_2+\dots+m_n)}(g(x)) \cdot \prod_{i=1}^n \left(g^{(i)}(x) \right)^{m_i}$$

pero se debe conocer la derivada de orden ϕ_{n-k} donde $\phi_{n-k} = m_1 + \dots + m_{n-k}$ de la

función $p(x) = x^{-1}$ que por el teorema 2.4 es

$$\begin{aligned} p^{(\phi_{n-k})}(x) &= (-1)^{\phi_{n-k}} \frac{(1 - \phi_{n-k} - 1)!}{(1 - 1)!} x^{-[\phi_{n-k}+1]} \\ &= (-1)^{\phi_{n-k}} \phi_{n-k}! x^{-[\phi_{n-k}+1]} \end{aligned}$$

y evaluando en $p(x)$ en g finalmente se tiene que

$$p^{(\phi_{n-k})}(g) = (-1)^{\phi_{n-k}} \phi_{n-k}! g^{-[\phi_{n-k}+1]} \quad (\text{B.8})$$

Ahora bien se tienen todos los datos y se aplica el teorema 2.7 con la ecuación (B.8) ,
obteniendo

$$(g^{-1})^{(n-k)} = \sum \frac{(n-k)!}{m_1! 1!^{m_1} \dots m_{n-k}! (n-k)!^{m_{n-k}}} (-1)^{\phi_{n-k}} \phi_{n-k}! g^{-[\phi_{n-k}+1]} \prod_{i=1}^{n-k} \left(g^{(i)}(x) \right)^{m_i}$$

reescribiendo

$$(g^{-1})^{(n-k)} = \sum \frac{(-1)^{\phi_{n-k}} \phi_{n-k}! (n-k)!}{m_1! 1!^{m_1} \dots m_{n-k}! (n-k)!^{m_{n-k}}} g^{-[\phi_{n-k}+1]} \prod_{i=1}^{n-k} \left(g^{(i)}(x) \right)^{m_i}$$

volviendo a reescribir se tiene

$$(g^{-1})^{(n-k)} = \sum \frac{(-1)^{\phi_{n-k}} \phi_{n-k}! (n-k)!}{m_1! \dots m_{n-k}!} g^{-[\phi_{n-k}+1]} \prod_{i=1}^{n-k} \left(\frac{g^{(i)}}{i!} \right)^{m_i} \quad (\text{B.9})$$

Remplazando la ecuación (B.9) en la ecuación (B.7) Se obtiene

$$\frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{f}{g} \right) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} \sum \frac{(-1)^{\phi_{n-k}} \phi_{n-k}! (n-k)!}{m_1! \dots m_{n-k}!} g^{-[\phi_{n-k}+1]} \prod_{i=1}^{n-k} \left(\frac{g^{(i)}}{i!} \right)^{m_i}$$

quedando demostrado el teorema 2.8



Demostración B.8 (Teorema 2.9, derivada de orden natural de la función seno). Sea

$f(x) = \text{sen}(x)$ entonces

$$\frac{d^n}{dx^n} (\text{sen}(x)) = \text{sen} \left(x + \frac{n\pi}{2} \right)$$

$\forall n \in \mathbb{N}$

Demostración

Esta demostración se realizará por inducción

Paso 1: Para $n = 0$ se tiene

$$\frac{d^0}{dx^0} (\text{sen}(x)) = \text{sen} \left(x + \frac{0 \cdot \pi}{2} \right)$$

simplificando

$$\frac{d^0}{dx^0} (\text{sen}(x)) = \text{sen}(x)$$

por lo tanto se cumple para $n = 0$

Paso 2: Ahora para $n = m$

$$\frac{d^m}{dx^m} (\text{sen}(x)) = \text{sen} \left(x + \frac{m\pi}{2} \right)$$

Hipótesis de inducción

Paso 3: Para $n = m + 1$, si se cumple para m debe cumplirse para el sucesor que es $m + 1$

$$\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} (\text{sen}(x)) = \text{sen} \left(x + \frac{(m+1)\pi}{2} \right) \quad (\text{B.10})$$

en te paso se debe partir de un miembro de la igualdad (B.10) y llegar al otro miembro usando la hipótesis de inducción, en este caso se comenzará desde el miembro izquierdo y se llegará al miembro derecho.

$$\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} (\text{sen}(x)) = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^m}{dx^m} (\text{sen}(x)) \right)$$

aplicando la *Hipótesis de inducción*

$$\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} (\text{sen}(x)) = \frac{d}{dx} \left(\text{sen} \left(x + \frac{m\pi}{2} \right) \right)$$

calculando la derivada de orden 1 la función $\text{sen}(x)$

$$\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} (\text{sen}(x)) = \cos \left(x + \frac{m\pi}{2} \right)$$

por la identidad $\cos(\theta) = \text{sen}(\theta + \pi/2)$ y con $\theta = x + m\pi/2$ se tiene

$$\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} (\text{sen}(x)) = \text{sen} \left(x + \frac{m\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right)$$

sumando terminos semejantes

$$\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} (\text{sen}(x)) = \text{sen} \left(x + \frac{m\pi + \pi}{2} \right)$$

agrupando en el interior de la función seno

$$\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} (\text{sen}(x)) = \text{sen} \left(x + \frac{(m+1)\pi}{2} \right)$$

cumpléndose para $n = m + 1$, así quedando demostrado



Demostración B.9 (Teorema 2.10, derivada de orden natural de la función coseno). Sea

$f(x) = \cos(x)$ entonces

$$\frac{d^n}{dx^n} (\cos(x)) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$\forall n \in \mathbb{N}$

Demostración

Esta demostración se realizará por inducción

Paso 1: Para $n = 0$ se tiene

$$\frac{d^0}{dx^0} (\cos(x)) = \cos\left(x + \frac{0 \cdot \pi}{2}\right)$$

simplificando

$$\frac{d^0}{dx^0} (\cos(x)) = \cos(x)$$

por lo tanto se cumple para $n = 0$

Paso 2: Ahora para $n = m$

$$\frac{d^m}{dx^m} (\cos(x)) = \cos\left(x + \frac{m\pi}{2}\right)$$

Hipótesis de inducción

Paso 3: Para $n = m + 1$, si se cumple para m debe cumplirse para el sucesor que es $m + 1$

$$\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} (\cos(x)) = \cos\left(x + \frac{(m+1)\pi}{2}\right) \quad (\text{B.11})$$

en te paso se debe partir de un miembro de la igualdad (B.11) y llegar al otro miembro usando la hipótesis de inducción, en este caso se comenzará desde el miembro izquierdo y se llegará al miembro derecho.

$$\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} (\cos(x)) = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^m}{dx^m} (\cos(x)) \right)$$

aplicando la *Hipótesis de inducción*

$$\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} (\cos(x)) = \frac{d}{dx} \left(\cos \left(x + \frac{m\pi}{2} \right) \right)$$

calculando la derivada de orden 1 la función $\sin(x)$

$$\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} (\cos(x)) = -\sin \left(x + \frac{m\pi}{2} \right)$$

por la identidad $\sin(\theta) = -\cos(\theta + \pi/2)$ y con $\theta = x + m\pi/2$ se tiene

$$\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} (\cos(x)) = \cos \left(x + \frac{m\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right)$$

sumando terminos semejantes

$$\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} (\cos(x)) = \cos \left(x + \frac{m\pi + \pi}{2} \right)$$

agrupando en el interior de la función seno

$$\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} (\cos(x)) = \cos \left(x + \frac{(m+1)\pi}{2} \right)$$

cumpléndose para $n = m + 1$, así quedando demostrado



Demostración B.10 (Teorema 2.11, derivada de orden natural de la función tangente y cotangente). Sea $f_0 = tg(x)$ y $f_1 = ctg(x)$ entonces

$$\frac{d^n f_0}{dx^n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \operatorname{sen} \left(x + \frac{k\pi}{2} \right) \sum a_{n-k} (\cos(x))^{-[\phi_{n-k}+1]} \prod_{i=1}^{n-k} \left(\frac{1}{i!} \cos \left(x + \frac{i\pi}{2} \right) \right)^{m_i}$$

$$\frac{d^n f_1}{dx^n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos \left(x + \frac{k\pi}{2} \right) \sum a_{n-k} (\operatorname{sen}(x))^{-[\phi_{n-k}+1]} \prod_{i=1}^{n-k} \left(\frac{1}{i!} \operatorname{sen} \left(x + \frac{i\pi}{2} \right) \right)^{m_i}$$

donde

$$a_{n-k} = \frac{(-1)^{\phi_{n-k}} \phi_{n-k}! (n-k)!}{m_1! \cdots m_{n-k}!}$$

$$\phi_{n-k} = \sum_{i=1}^{n-k} m_i$$

con

$$\sum_{i=1}^{n-k} (i \cdot m_i) = n - k$$

Demostración

Parte 1 :

Esta demostración se se hará usando el teorema 2.8 que se refiere a la derivada de orden natural de un cociente, para ello se debe expresar la tangente como un cociente

$$f_0 = tg(x) = \left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \right)$$

finalmente la derivada de orden natural de la función tangente es la derivada de orden natural

del cociente entre el seno y el coseno

$$\frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{\text{sen}(x)}{\text{cos}(x)} \right)$$

para calcular esta derivada, se usa el teorema 2.8 aplicado a la función $f_0 = \text{tg}(x)$

$$\begin{aligned} \frac{d^n f_0}{dx^n} &= \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{\text{sen}(x)}{\text{cos}(x)} \right) \\ \frac{d^n f_0}{dx^n} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\text{sen}(x))^{(k)} \sum \frac{(-1)^{\phi_{n-k}} \phi_{n-k}! (n-k)!}{m_1! \cdots m_{n-k}!} (\text{cos}(x))^{-[\phi_{n-k}+1]} \cdots \\ &\quad \cdots \prod_{i=1}^{n-k} \left(\frac{1}{i!} (\text{cos}(x))^{(i)} \right)^{m_i} \end{aligned}$$

con ϕ_{n-k}

$$\phi_{n-k} = \sum_{i=1}^{n-k} m_i$$

con

$$\sum_{i=1}^{n-k} (i \cdot m_i) = n - k$$

para simplificar la notación de la expresión se hace la sustitución

$$a_{n-k} = \frac{(-1)^{\phi_{n-k}} \phi_{n-k}! (n-k)!}{m_1! \cdots m_{n-k}!}$$

obteniendo

$$\frac{d^n f_0}{dx^n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\text{sen}(x))^{(k)} \sum a_{n-k} (\text{cos}(x))^{-[\phi_{n-k}+1]} \prod_{i=1}^{n-k} \left(\frac{1}{i!} (\text{cos}(x))^{(i)} \right)^{m_i}$$

por el teorema 2.9 se tiene que $(\text{sen}(x))^{(k)} = \text{sen}(x + k\pi/2)$

$$\frac{d^n f_0}{dx^n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \text{sen} \left(x + \frac{k\pi}{2} \right) \sum a_{n-k} (\cos(x))^{-[\phi_{n-k}+1]} \prod_{i=1}^{n-k} \left(\frac{1}{i!} (\cos(x))^{(i)} \right)^{m_i}$$

por el teorema 2.10 se tiene que $(\cos(x))^i = \cos(x + i\pi/2)$

$$\frac{d^n f_0}{dx^n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \text{sen} \left(x + \frac{k\pi}{2} \right) \sum a_{n-k} (\cos(x))^{-[\phi_{n-k}+1]} \prod_{i=1}^{n-k} \left(\frac{1}{i!} \cos \left(x + \frac{i\pi}{2} \right) \right)^{m_i}$$

Parte 2 :

Esta demostración se se hará usando el teorema 2.8 que se refiere a la derivada de orden natural de un cociente, para ello se debe expresar la cotangente como un cociente

$$f_1 = \text{ctg}(x) = \left(\frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)} \right)$$

finalmente la derivada de orden natural de la función cotangente es la derivada de orden natural del cociente entre el coseno y el seno

$$\frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)} \right)$$

para calcular esta derivada, se usa el teorema 2.8 aplicado a la función $f_1 = \text{ctg}(x)$

$$\begin{aligned} \frac{d^n f_1}{dx^n} &= \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)} \right) \\ \frac{d^n f_1}{dx^n} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\cos(x))^{(k)} \sum \frac{(-1)^{\phi_{n-k}} \phi_{n-k}! (n-k)!}{m_1! \cdots m_{n-k}!} (\text{sen}(x))^{-[\phi_{n-k}+1]} \cdots \\ &\quad \cdots \prod_{i=1}^{n-k} \left(\frac{1}{i!} (\text{sen}(x))^{(i)} \right)^{m_i} \end{aligned}$$

con ϕ_{n-k}

$$\phi_{n-k} = \sum_{i=1}^{n-k} m_i$$

con

$$\sum_{i=1}^{n-k} (i \cdot m_i) = n - k$$

para simplificar la notación de la expresión se hace la sustitución

$$a_{n-k} = \frac{(-1)^{\phi_{n-k}} \phi_{n-k}! (n-k)!}{m_1! \cdots m_{n-k}!}$$

obteniendo

$$\frac{d^n f_1}{dx^n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\cos(x))^{(k)} \sum a_{n-k} (\operatorname{sen}(x))^{-[\phi_{n-k}+1]} \prod_{i=1}^{n-k} \left(\frac{1}{i!} (\operatorname{sen}(x))^{(i)} \right)^{m_i}$$

por el teorema 2.10 se tiene que $(\cos(x))^{(k)} = \cos(x + k\pi/2)$

$$\frac{d^n f_1}{dx^n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos \left(x + \frac{k\pi}{2} \right) \sum a_{n-k} (\operatorname{sen}(x))^{-[\phi_{n-k}+1]} \prod_{i=1}^{n-k} \left(\frac{1}{i!} (\operatorname{sen}(x))^{(i)} \right)^{m_i}$$

por el teorema 2.9 se tiene que $(\operatorname{sen}(x))^i = \operatorname{sen}(x + i\pi/2)$

$$\frac{d^n f_1}{dx^n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos \left(x + \frac{k\pi}{2} \right) \sum a_{n-k} (\operatorname{sen}(x))^{-[\phi_{n-k}+1]} \prod_{i=1}^{n-k} \left(\frac{1}{i!} \operatorname{sen} \left(x + \frac{i\pi}{2} \right) \right)^{m_i}$$

Quedando demostrado

■

Demostración B.11 (Teorema 2.12, derivada de orden natural de la función exponencial).

Si $a > 0$ y $b > 0$ entonces

$$\frac{d^n}{dx^n} (a^{bx}) = (a^{bx})^{(n)} = (b \ln(a))^n a^{bx}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$

Demostración:

Esta demostración se realizará por inducción

Paso 1: Para $n = 0$ se tiene

$$\frac{d^0}{dx^0} (a^{bx}) = (b \ln(a))^0 a^{bx}$$

simplificando

$$\frac{d^0}{dx^0} (a^{bx}) = a^{bx}$$

por lo tanto se cumple para $n = 0$

Paso 2: Ahora para $n = m$

$$\frac{d^m}{dx^m} (a^{bx}) = (a^{bx})^{(m)} = (b \ln(a))^m a^{bx}$$

Hipótesis de inducción

Paso 3: Para $n = m + 1$, si se cumple para m debe cumplirse para el sucesor que es $m + 1$

$$\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} (a^{bx}) = (a^{bx})^{(m+1)} = (b \ln(a))^{m+1} a^{bx} \quad (\text{B.12})$$

en este paso se debe partir de un miembro de la igualdad (B.12) y llegar al otro miembro usando la hipótesis de inducción, en este caso se comenzará desde el miembro izquierdo y se llegará al miembro derecho.

$$\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} (a^{bx}) = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^m}{dx^m} a^{bx} \right)$$

aplicando la hipótesis de inducción

$$\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} (a^{bx}) = \frac{d}{dx} ((\ln(a))^m a^{bx})$$

sacando las constantes

$$\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} (a^{bx}) = (\ln(a))^m \frac{d}{dx} (a^{bx})$$

calculando la derivada

$$\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} (a^{bx}) = (\ln(a))^m \cdot \ln(a) a^{bx}$$

simplificando

$$\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} (a^{bx}) = (a^{bx})^{(m+1)} = (\ln(a))^{m+1} a^{bx}$$

cumpliéndose para $n = m + 1$, así quedando demostrado

■

Demostración B.12 (Teorema 2.13, derivada de orden natural de la función logaritmo). Si

$b > 0$ entonces

$$\frac{d^n}{dx^n} \log_b(x) = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)! x^{-n}}{\ln(b)}, \quad \forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$$

Demostración:

$$\frac{d^n}{dx^n} \log_b(x) = \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{\ln(x)}{\ln(b)} \right)$$

sacando las constantes

$$\frac{d^n}{dx^n} \log_b(x) = \frac{1}{\ln(b)} \cdot \frac{d^n}{dx^n} (\ln(x))$$

reescribiendo

$$\frac{d^n}{dx^n} \log_b(x) = \frac{1}{\ln(b)} \cdot \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(\frac{d}{dx} \ln(x) \right)$$

calculando la derivada

$$\frac{d^n}{dx^n} \log_b(x) = \frac{1}{\ln(b)} \cdot \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^{-1})$$

aplicando el teorema [2.4](#)

$$\frac{d^n}{dx^n} \log_b(x) = \frac{1}{\ln(b)} \cdot (-1)^{n-1} \frac{(1+n-1-1)!}{(1-1)!} x^{-(1+n-1)}$$

simplificando

$$\frac{d^n}{dx^n} \log_b(x) = \frac{1}{\ln(b)} \cdot (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(0)!} x^{-n}$$

reescribir

$$\frac{d^n}{dx^n} \log_b(x) = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)! x^{-n}}{\ln(b)}$$

Así quedando demostrado.



Apéndice C

Demostraciones capitulo 3

Las matemáticas consisten en
demostrar las cosas más obvias de
la forma menos obvia.

George Polye

En este capitulo se realizaran las demostraciones del capitulo 4

Demostración C.1 (Teorema 3.2, Teorema de leibniz). *Sea $f(x, \tau)$ una función tal que, tanto $f(x, \tau)$ y su derivada parcial $f_x(x, \tau)$ son continuas en x y τ en alguna región (x, τ) , incluyendo $a(x) \leq \tau \leq b(x), x_0 \leq x \leq x_1$ suponga también que las funciones $a(x)$ y $b(x)$ son continuas y sus derivadas en $x_0 \leq x \leq x_1$. Entonces para $x_0 \leq x \leq x_1$.*

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, \tau) d\tau = f(x, b(x)) \cdot \frac{d}{dx} b(x) - f(x, a(x)) \cdot \frac{d}{dx} a(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, \tau) d\tau$$

Demostración:

Sea

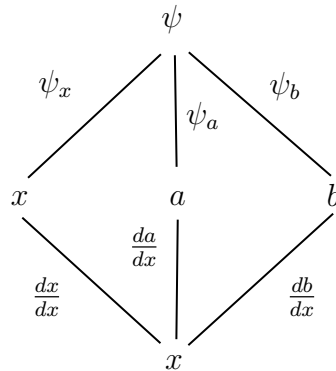
$$\psi(x, a, b) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, \tau) d\tau$$

ahora lo que realmente exige el teorema es calcular la derivada de $\psi(x, a, b)$ con respecto a

x , donde $a = a(x)$ y $b = b(x)$

$$\frac{d}{dx}\psi(x, a, b)$$

para ello se usara la regla de la cadena en variables



De acuerdo al diagrama de árbol se puede evidenciar cual seria la derivada

$$\frac{d}{dx}\psi(x, a, b) = \frac{\partial\psi(x, a, b)}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial\psi(x, a, b)}{\partial a} \cdot \frac{da(x)}{dx} + \frac{\partial\psi(x, a, b)}{\partial b} \cdot \frac{db(x)}{dx}$$

Simplificando

$$\frac{d}{dx}\psi(x, a, b) = \frac{\partial\psi(x, a, b)}{\partial x} + \frac{\partial\psi(x, a, b)}{\partial a} \cdot \frac{da(x)}{dx} + \frac{\partial\psi(x, a, b)}{\partial b} \cdot \frac{db(x)}{dx} \quad (C.1)$$

Revisando de manera individual las derivadas parciales presentadas en el miembro derecho de la ecuación (C.1)

$$1. \frac{\partial\psi}{\partial b}$$

Por el teorema fundamental del calculo se tiene que:

$$\frac{d}{dx} \int_k^x f(x, \tau) d\tau = f(x, \tau) \quad ; k = constante$$

Teniendo en cuenta lo anterior se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial b} &= \frac{\partial}{\partial b} \int_a^b f(x, \tau) d\tau \\ &= f(x, b) \\ &= f(x, b(x))\end{aligned}$$

finalmente obteniendo

$$\frac{\partial \psi}{\partial b} = f(x, b(x)) \quad (\text{C.2})$$

$$2. \quad \frac{\partial \psi}{\partial a}$$

Por el teorema fundamental del calculo se tiene que:

$$\frac{d}{dx} \int_x^k f(x, \tau) d\tau = -f(x, \tau) \quad ; k = \text{constante}$$

Teniendo en cuenta lo anterior se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial a} &= \frac{\partial}{\partial a} \int_a^b f(x, \tau) d\tau \\ &= -f(x, a) \\ &= -f(x, a(x))\end{aligned}$$

finalmente obteniendo

$$\frac{\partial \psi}{\partial a} = -f(x, a(x)) \quad (\text{C.3})$$

$$3. \quad \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Por el teorema fundamental del calculo se tiene que:

$$\frac{d}{dx} \int_n^k f(x, \tau) d\tau = \int_n^k \frac{d}{dx} f(x, \tau) d\tau \quad ; n, k \text{ constantes}$$

Teniendo en cuenta lo anterior se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \int_a^b f(x, \tau) d\tau \\ &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x, \tau) d\tau \end{aligned}$$

finalmente obteniendo

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x, \tau) d\tau \quad (\text{C.4})$$

Ahora remplazando las ecuaciones (C.2), (C.3) y (C.4) en la ecuación (C.1) se tiene

$$\frac{d}{dx} \psi(x, a, b) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x, \tau) d\tau - f(x, a(x)) \frac{da(x)}{dx} + f(x, b(x)) \cdot \frac{db(x)}{dx}$$

Organizando y simplificando se obtiene que

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, \tau) d\tau = f(x, b(x)) \cdot \frac{d}{dx} b(x) - f(x, a(x)) \cdot \frac{d}{dx} a(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, \tau) dt \quad (\text{C.5})$$

Así, quedando demostrado el teorema de Leibniz. ■

Demostración C.2 (Teorema 3.4, Integral repetida de Cauchy). *Sea f una función continua*

en el intervalo $[a, x]$ entonces

$$\int_a^x \int_a^x \cdots \int_a^x \int_a^x f(x) dx dx \cdots dx dx = \frac{1}{(p-1)!} \int_a^x (x-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau$$

$p \text{ veces}$

con $p \in \mathbb{N}$

Este teorema se demostrará por inducción

Paso 1: Para $p = 1$ se tiene

$$\int_a^x f(x) dx = \frac{1}{(1-1)!} \int_a^x (x-\tau)^{1-1} f(\tau) d\tau$$

simplificando

$$\int_a^x f(x) dx = \int_a^x f(\tau) d\tau$$

cambio de variable de integración

$$\int_a^x f(x) dx = \int_a^x f(x) dx$$

cumpliéndose así para $p = 1$.

Paso 2: Ahora para $p = m$

$$\int_a^x \int_a^x \cdots \int_a^x \int_a^x f(x) dx dx \cdots dx dx = \frac{1}{(m-1)!} \int_a^x (x-\tau)^{m-1} f(\tau) d\tau$$

$m \text{ veces}$

Hipótesis de inducción

Paso 3: Para $p = m + 1$, si se cumple para m debe cumplirse para el sucesor que es $m + 1$

$$\int_a^x \int_a^x \cdots \int_a^x \int_a^x f(x) dx dx \cdots dx dx = \frac{1}{m!} \int_a^x (x - \tau)^m f(\tau) d\tau \quad (\text{C.6})$$

$m+1$ veces

en te paso se debe partir de un miembro de la igualdad (C.6) y llegar al otro miembro usando la hipótesis de inducción, en este caso se comenzará desde el miembro izquierdo y se llegará al miembro derecho.

$$\int_a^x \int_a^x \cdots \int_a^x \int_a^x f(x) dx dx \cdots dx dx = \int_a^x \left(\int_a^x \int_a^x \cdots \int_a^x \int_a^x f(x) dx dx \cdots dx dx \right) dx$$

$m+1$ veces

aplicando la hipótesis de inducción

$$\int_a^x \int_a^x \cdots \int_a^x \int_a^x f(x) dx dx \cdots dx dx = \int_a^x \left(\frac{1}{(m-1)!} \int_a^x (x - \tau)^{m-1} f(\tau) d\tau \right) dx$$

$m+1$ veces

amplificando por m

$$\int_a^x \int_a^x \cdots \int_a^x \int_a^x f(x) dx dx \cdots dx dx = \int_a^x \left(\frac{m}{m!} \int_a^x (x - \tau)^{m-1} f(\tau) d\tau \right) dx$$

$m+1$ veces

aplicando propiedades de las integrales definidas

$$\int_a^x \int_a^x \cdots \int_a^x \int_a^x f(x) dx dx \cdots dx dx = \frac{1}{m!} \int_a^x \left(\int_a^x m(x - \tau)^{m-1} f(\tau) d\tau \right) dx$$

$m+1$ veces

reescribiendo

$$\begin{aligned}\int_a^x \int_a^x \cdots \int_a^x \int_a^x f(x) dx dx \cdots dx dx &= \frac{1}{m!} \int_a^x \left(\int_a^x \frac{\partial}{\partial x} [(x - \tau)^m f(\tau)] d\tau \right) dx \\ \int_a^x \int_a^x \cdots \int_a^x \int_a^x f(x) dx dx \cdots dx dx &= \frac{1}{m!} \int_a^x \left(0 + \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} [(x - \tau)^m f(\tau)] d\tau \right) dx\end{aligned}$$

reescribiendo

$$\int_a^x \int_a^x \cdots \int_a^x \int_a^x f(x) dx dx \cdots dx dx = \frac{1}{m!} \int_a^x \left((x - x)^m f(x) + \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} [(x - \tau)^m f(\tau)] d\tau \right) dx$$

por el teorema [3.2](#)

$$\int_a^x \int_a^x \cdots \int_a^x \int_a^x f(x) dx dx \cdots dx dx = \frac{1}{m!} \int_a^x \frac{d}{dx} \left(\int_a^x (x - \tau)^m f(\tau) d\tau \right) dx$$

por el teorema fundamental del calculo

$$\int_a^x \int_a^x \cdots \int_a^x \int_a^x f(x) dx dx \cdots dx dx = \frac{1}{m!} \left(\int_a^x (x - \tau)^m f(\tau) d\tau - \int_a^a (a - \tau)^m f(\tau) d\tau \right)$$

la segunda integral se anula ya que el limite superior es igual al limite inferior

$$\int_a^x \int_a^x \cdots \int_a^x \int_a^x f(x) dx dx \cdots dx dx = \frac{1}{m!} \int_a^x (x - \tau)^m f(\tau) d\tau$$

Así, quedando demostrado el teorema de la integral repetida de Cauchy.

■

Apéndice D

Demostraciones capitulo 4

Ninguna investigación humana
puede ser llamada verdadera
ciencia si no puede ser demostrada
matemáticamente.

Leonardo da Vinci

En este capitulo se realizaran las demostraciones del capitulo 5

Demostración D.1 (Teorema 4.1, Derivada de orden real negativo).

$$\mathcal{D}_{[a, x]}^{-\alpha} f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^\alpha \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ k \end{matrix} \right\} f(x - k\Delta x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau$$

Para demostrar este teorema se garantizará la existencia del limite.

Se tiene

$$\mathcal{D}_{[a, x]}^{-\alpha} f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^\alpha \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ k \end{matrix} \right\} f(x - k\Delta x)$$

ingresando Δx en la sumatoria

$$\mathcal{D}_{[a, x]}^{-\alpha} f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ k \end{matrix} \right\} (\Delta x)^\alpha f(x - k\Delta x)$$

reescribiendo

$$\mathcal{D}_{[a,x]}^{-\alpha} f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k^{\alpha-1}} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ k \end{matrix} \right\} (k\Delta x)^{\alpha-1} (\Delta x) f(x - k\Delta x)$$

cambiando el limite y dejando en términos del parámetro n

$$\mathcal{D}_{[a,x]}^{-\alpha} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k^{\alpha-1}} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ k \end{matrix} \right\} \left(k \cdot \frac{x-a}{n} \right)^{\alpha-1} \left(\frac{x-a}{n} \right) f \left(x - k \cdot \frac{x-a}{n} \right)$$

amplificando con $\Gamma(\alpha)$

$$\mathcal{D}_{[a,x]}^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(\alpha)}{k^{\alpha-1}} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ k \end{matrix} \right\} \left(k \cdot \frac{x-a}{n} \right)^{\alpha-1} \left(\frac{x-a}{n} \right) f \left(x - k \cdot \frac{x-a}{n} \right)$$

Ahora bien para garantizar el teorema se debe cumplir que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(\alpha)}{k^{\alpha-1}} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ k \end{matrix} \right\} = 1 \quad (\text{D.1})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left(k \cdot \frac{x-a}{n} \right)^{\alpha-1} \left(\frac{x-a}{n} \right) f \left(x - k \cdot \frac{x-a}{n} \right) , \text{ converge a un valor} \quad (\text{D.2})$$

Evalutando el limite [D.1](#) y por la definición de $\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ k \end{matrix} \right\}$ en el teorema [3.1](#)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(\alpha)}{k^{\alpha-1}} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ k \end{matrix} \right\} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(\alpha)}{k^{\alpha-1}} \cdot \frac{\alpha \Gamma(\alpha + k)}{\Gamma(k+1) \Gamma(\alpha+1)}$$

aplicando propiedades de los limites

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(\alpha)}{k^{\alpha-1}} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{\alpha \Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(\alpha+k)}{k^{\alpha-1} \Gamma(k+1)}$$

evaluando el limite

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(\alpha)}{k^{\alpha-1}} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{\alpha \Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)} \cdot 1$$

aplicando la propiedad 1.1 de la función gamma

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(\alpha)}{k^{\alpha-1}} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)}$$

simplificando

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(\alpha)}{k^{\alpha-1}} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ k \end{matrix} \right\} = 1$$

ahora bien se cumple la condición (D.1) lo que indica que cada vez que $k \rightarrow \infty$ el factor tiende a 1, sin embargo se debe garantizar que la sumatoria (D.2) converja a la integral deseada. Para ello se da forma de sumatoria de Riemman

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left(k \cdot \frac{x-a}{n} \right)^{\alpha-1} \left(\frac{x-a}{n} \right) f \left(x - k \cdot \frac{x-a}{n} \right) &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left(k \cdot \frac{x-a}{n} \right)^{\alpha-1} f \left(x - k \cdot \frac{x-a}{n} \right) \left(\frac{x-a}{n} \right) \end{aligned}$$

así por la sumatoria de Riemman por izquierda esta sumatoria converge a la siguiente integral

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left(k \cdot \frac{x-a}{n} \right)^{\alpha-1} \left(\frac{x-a}{n} \right) f \left(x - k \cdot \frac{x-a}{n} \right) &= \\ &= \int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Ahora que converge la sumatoria y el limite del factor tiende a uno cada vez que $k \rightarrow \infty$,

conociendo que la sumatoria esta acotada se escribe de la siguiente manera

$$\mathcal{D}_{[a,x]}^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(\alpha)}{k^{\alpha-1}} \left\{ \frac{\alpha}{k} \right\} \left(k \cdot \frac{x-a}{n} \right)^{\alpha-1} \left(\frac{x-a}{n} \right) f \left(x - k \cdot \frac{x-a}{n} \right)$$

Dadas las condiciones (D.1) y (D.2)

$$\mathcal{D}_{[a,x]}^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot 1 \cdot \int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau$$

simplificando

$$\mathcal{D}_{[a,x]}^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau$$

Así, quedando demostrado el teorema de la derivada de orden real negativo.

■

Demostración D.2 (Teorema 4.2, Composición de derivadas).

$$\mathcal{D}_{[a,x]}^{-\alpha} \left(\mathcal{D}_{[a,x]}^{-\beta} f(x) \right) = \mathcal{D}_{[a,x]}^{-(\alpha+\beta)} f(x)$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$

Para esta demostración se partirá del miembro izquierdo y se llegará al miembro derecho.

Aplicando el teorema 3.1

$$\mathcal{D}_{[a,x]}^{-\alpha} \left(\mathcal{D}_{[a,x]}^{-\beta} f(x) \right) = \mathcal{D}_{[a,x]}^{-\alpha} \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-\tau)^{\beta-1} f(\tau) d\tau \right)$$

volviendo aplicar el teorema 3.1

$$\mathcal{D}_{[a,x]}^{-\alpha} \left(\mathcal{D}_{[a,x]}^{-\beta} f(x) \right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1} \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^\tau (\tau-w)^{\beta-1} f(w) dw \right) d\tau$$

escribiendo como integral doble

$$\mathcal{D}_{[a,x]}^{-\alpha} \left(\mathcal{D}_{[a,x]}^{-\beta} f(x) \right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \int_a^\tau (x-\tau)^{\alpha-1} (\tau-w)^{\beta-1} f(w) dw d\tau$$

cambiando el orden de integración

$$\mathcal{D}_{[a,x]}^{-\alpha} \left(\mathcal{D}_{[a,x]}^{-\beta} f(x) \right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \int_w^x (x-\tau)^{\alpha-1} (\tau-w)^{\beta-1} f(w) d\tau dw$$

sacando $f(w)$ de la integral del interior

$$\mathcal{D}_{[a,x]}^{-\alpha} \left(\mathcal{D}_{[a,x]}^{-\beta} f(x) \right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(w) \left(\int_w^x (x-\tau)^{\alpha-1} (\tau-w)^{\beta-1} d\tau \right) dw$$

haciendo la sustitución $u = \frac{\tau-w}{x-w}$ con diferenciales $(x-w)du = d\tau$ y cambiando limites

$$[w, x]_\tau = [0, 1]_u$$

$$\mathcal{D}_{[a,x]}^{-\alpha} \left(\mathcal{D}_{[a,x]}^{-\beta} f(x) \right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(w) \left(\int_0^1 (x-w)^{\alpha-1} (u(x-w))^{\beta-1} (x-w) du \right) dw$$

sabiendo que $\tau = u(x-w) + w$ sustituyendo se tiene $x-\tau = (x-w)(1-u)$

$$\mathcal{D}_{[a,x]}^{-\alpha} \left(\mathcal{D}_{[a,x]}^{-\beta} f(x) \right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(w) \left(\int_0^1 (x-w)^{\alpha+\beta-1} u^{\beta-1} (1-u)^{\alpha-1} du \right) dw$$

sacando valores que no dependen de la integral del interior

$$\mathcal{D}_{[a,x]}^{-\alpha} \left(\mathcal{D}_{[a,x]}^{-\beta} f(x) \right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-w)^{\alpha+\beta-1} f(w) \left(\int_0^1 u^{\beta-1} (1-u)^{\alpha-1} du \right) dw$$

Dada la definición 1.4 de la función beta

$$\mathcal{D}_{[a,x]}^{-\alpha} \left(\mathcal{D}_{[a,x]}^{-\beta} f(x) \right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-w)^{\alpha+\beta-1} f(w) \mathcal{B}(\alpha, \beta) dw$$

sacando como factor la función beta

$$\mathcal{D}_{[a,x]}^{-\alpha} \left(\mathcal{D}_{[a,x]}^{-\beta} f(x) \right) = \frac{\mathcal{B}(\alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-w)^{\alpha+\beta-1} f(w) dw$$

aplicando la propiedad 1.6 que relaciona la función beta y la función gamma

$$\mathcal{D}_{[a,x]}^{-\alpha} \left(\mathcal{D}_{[a,x]}^{-\beta} f(x) \right) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-w)^{\alpha+\beta-1} f(w) dw$$

simplificando y haciendo cambio de variable en la integral

$$\mathcal{D}_{[a,x]}^{-\alpha} \left(\mathcal{D}_{[a,x]}^{-\beta} f(x) \right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x (x-\tau)^{\alpha+\beta-1} f(\tau) d\tau$$

aplicando el teorema 3.1

$$\mathcal{D}_{[a,x]}^{-\alpha} \left(\mathcal{D}_{[a,x]}^{-\beta} f(x) \right) = \mathcal{D}_{[a,x]}^{-(\alpha+\beta)} f(x)$$

Así, quedando demostrado el teorema de composición de derivadas de orden real negativo. ■

Demostración D.3 (Propiedad 4.1, Derivada de orden real de una suma y múltiplos)

constantes). Si f y g son diferenciables en x de orden m , con α y β constantes, entonces

$$\mathcal{D}_{[a,x]}^{\mu}(\alpha f(x) \pm \beta g(x)) = \alpha \mathcal{D}_{[a,x]}^{\mu} f(x) \pm \beta \mathcal{D}_{[a,x]}^{\mu} g(x)$$

donde $\forall \alpha, \beta, \mu \in \mathbb{R}$

Aplicando la definición 4.1 siendo la derivada de Caputo

$$\mathcal{D}_{[a,x]}^{\mu}(\alpha f(x) \pm \beta g(x)) = \frac{1}{\Gamma(m-\mu)} \int_a^x \frac{1}{(x-\tau)^{\mu-m+1}} \mathcal{D}_{[a,x]}^m(\alpha f(\tau) \pm \beta g(\tau)) d\tau$$

por el teorema 2.5 de la derivada de orden natural de una suma y múltiplos constantes

$$\mathcal{D}_{[a,x]}^{\mu}(\alpha f(x) \pm \beta g(x)) = \frac{1}{\Gamma(m-\mu)} \int_a^x \frac{1}{(x-\tau)^{\mu-m+1}} \left(\alpha \mathcal{D}_{[a,x]}^m f(\tau) \pm \beta \mathcal{D}_{[a,x]}^m g(\tau) \right) d\tau$$

aplicando distributiva del producto con respecto a la suma y luego aplicando la propiedad de linealidad de la integral

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{[a,x]}^{\mu}(\alpha f(x) \pm \beta g(x)) &= \frac{\alpha}{\Gamma(m-\mu)} \int_a^x \frac{1}{(x-\tau)^{\mu-m+1}} \mathcal{D}_{[a,x]}^m f(\tau) d\tau \\ &\quad \pm \frac{\beta}{\Gamma(m-\mu)} \int_a^x \frac{1}{(x-\tau)^{\mu-m+1}} \mathcal{D}_{[a,x]}^m g(\tau) d\tau \end{aligned}$$

finalmente aplicando la definición 4.1

$$\mathcal{D}_{[a,x]}^{\mu}(\alpha f(x) \pm \beta g(x)) = \alpha \mathcal{D}_{[a,x]}^{\mu} f(x) \pm \beta \mathcal{D}_{[a,x]}^{\mu} g(x)$$

Así, quedando demostrada la propiedad de la derivada de orden real de una suma y múltiplos constantes.

■

Demostración D.4 (Propiedad 4.2, Derivada de orden real de un producto). Si f y g son diferenciables en x de orden m , entonces

$$\mathcal{D}_{[a,x]}^{\mu}(f \cdot g)(x) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \mathcal{D}_{[a,x]}^{-(m-\mu)} (f^{(k)}(x)g^{(m-k)}(x))$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$ y $\mu < m$

Aplicando la definición 4.1 siendo la derivada de Caputo

$$\mathcal{D}_{[a,x]}^{\mu}(f \cdot g)(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\mu)} \int_a^x \frac{1}{(x-\tau)^{\mu-m+1}} \mathcal{D}_{[a,x]}^m (f(\tau)g(\tau))d\tau$$

aplicando el teorema 2.6 de la derivada de orden natural de un producto

$$\mathcal{D}_{[a,x]}^{\mu}(f \cdot g)(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\mu)} \int_a^x \frac{1}{(x-\tau)^{\mu-m+1}} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} f^{(k)}(\tau)g^{(m-k)}(\tau)d\tau$$

aplicando propiedades de las sumatorias

$$\mathcal{D}_{[a,x]}^{\mu}(f \cdot g)(x) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{1}{\Gamma(m-\mu)} \int_a^x \frac{1}{(x-\tau)^{\mu-m+1}} f^{(k)}(\tau)g^{(m-k)}(\tau)d\tau$$

aplicando el teorema 4.1

$$\mathcal{D}_{[a,x]}^{\mu}(f \cdot g)(x) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \mathcal{D}_{[a,x]}^{-(m-\mu)} (f^{(k)}(x)g^{(m-k)}(x))$$

Así, quedando demostrada la propiedad de la derivada de orden real de un producto.

■

Demostración D.5 (Propiedad 4.3, Derivada de orden real de una función compuesta). Si

$f(u)$ es diferenciable en cualquier orden en el punto $u = g(x)$, y $g(x)$ es diferenciable en cualquier orden en x , entonces la derivada de orden μ de la función $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ es

$$\mathcal{D}_{[a, x]}^{\mu} f(g(x)) = \sum \frac{m!}{k_1! 1!^{k_1} k_2! 2!^{k_2} \dots k_m! m!^{k_m}} \mathcal{D}_{[a, x]}^{-(m-\mu)} \left(f^{(k_1+k_2+\dots+k_m)}(g(x)) \cdot \prod_{j=1}^m \left(g^{(j)}(x) \right)^{k_j} \right)$$

donde

$$1 \cdot k_1 + 2 \cdot k_2 + \dots + k \cdot k_m = m$$

$$\mu \in \mathbb{R}$$

$$\mu < m$$

Aplicando la definición 4.1 siendo la derivada de Caputo

$$\mathcal{D}_{[a, x]}^{\mu} f(g(x)) = \frac{1}{\Gamma(m-\mu)} \int_a^x \frac{1}{(x-\tau)^{\mu-m+1}} \mathcal{D}_{[a, x]}^m f(g(\tau)) d\tau$$

aplicando el teorema 2.7 de la derivada de orden natural de una función compuesta, para

simplificar la notación $\phi = \mathcal{D}_{[a, x]}^{\mu} f(g(x))$

$$\phi = \frac{1}{\Gamma(m-\mu)} \int_a^x \frac{1}{(x-\tau)^{\mu-m+1}} \sum \frac{m!}{k_1! 1!^{k_1} k_2! 2!^{k_2} \dots k_m! m!^{k_m}} f^{(k_1+k_2+\dots+k_m)}(g(\tau)) \cdot \prod_{j=1}^m \left(g^{(j)}(\tau) \right)^{k_j} d\tau$$

aplicando propiedades de las sumatorias

$$\phi = \sum \frac{m!}{k_1! 1!^{k_1} k_2! 2!^{k_2} \dots k_m! m!^{k_m}} \frac{1}{\Gamma(m-\mu)} \int_a^x \frac{1}{(x-\tau)^{\mu-m+1}} f^{(k_1+k_2+\dots+k_m)}(g(\tau)) \cdot \prod_{j=1}^m \left(g^{(j)}(\tau) \right)^{k_j} d\tau$$

aplicando la definición 4.1 y reemplazando $\phi = \mathcal{D}_{[a, x]}^{\mu} f(g(x))$

$$\mathcal{D}_{[a, x]}^{\mu} f(g(x)) = \sum \frac{m!}{k_1! 1!^{k_1} k_2! 2!^{k_2} \dots k_m! m!^{k_m}} \mathcal{D}_{[a, x]}^{-(m-\mu)} \left(f^{(k_1+k_2+\dots+k_m)}(g(x)) \cdot \prod_{j=1}^m \left(g^{(j)}(x) \right)^{k_j} \right)$$

Así, quedando demostrada la propiedad de la derivada de orden real de una función compuesta.

■

Referencias

- Anastassiou. (2021). *Generalized Fractional Calculus*. Springer Publishing.
- Anastassiou & Argyros. (2015). *Intelligent Numerical Methods: Applications to Fractional Calculus (Studies in Computational Intelligence Book 624) (English Edition)* (1st ed. 2016). Springer.
- Angarita Cervantes. (2004). DOS FUNCIONES EULERIANAS. En Barrios Bustillo (Ed.), *Memorias XV Encuentro de Geometría y III de Aritmética* (pp. 407-410). Universidad Pedagógica Nacional.
- Annaby & Mansour. (2012). *Q-Fractional Calculus and Equations: 2056* (2012 ed.). Springer.
- Apostol. (1992). *Cálculus*. Reverté.
- Apostol. (1990). *Calculus. I*. Reverté.
- Bashirov, Kurpinar & Özyapıcı. (2008). Multiplicative calculus and its applications. *ScienceDirect*, 337.
<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022247X07003824>
- Clark. (1999). *Dictionary of Analysis, Calculus, and Differential Equations* (1.^a ed.). CRC Press. <https://epdf.pub/dictionary-of-analysis-calculus-and-differential-equationsfd55be10b1b90855c588d5efeeffa0c019754.html>
- Courant & John. (2012). *Introduction to Calculus and Analysis, Vol. 1 (Classics in Mathematics) (English Edition)* (1999.^a ed.). Springer.
- Courant & Mansour. (2020). *¿Qué son las matemáticas?. Conceptos y métodos fundamentales* (1.^a ed.). Fondo de Cultura Económica.

- Das. (2014). *Functional Fractional Calculus* (2nd 2011 ed.). Springer.
- given-i=G. (2011, 23 de junio). *Calcular la derivada de una integral*.
<https://www.gaussianos.com/calcular-la-derivada-de-una-integral/>
- given-i=L. (2020). *Calculo Ii De Varias Variables* (9.^a ed.). MCGRAW HILL
 EDDUCATION.
- Guzman Cabrera, Guía-Calderón, Rosales-García, González-Parada & Álvarez-Jaime.
 (2015). The differential and integral fractional calculus and its applications. *Acta
 Universitaria*, 25(2), 20-27. <https://doi.org/10.15174/au.2015.688>
- Herrmann. (2011). *Fractional Calculus: An Introduction for Physicists* (Illustrated). World
 Scientific Publishing Company.
- Karlheinz. (2005). A short proof of the formula of Faa di Bruno. *Elemente der Mathematik*,
 1-2. <https://ems.press/content/serial-article-files/499>
- Kubica, Ryszewska & Yamamoto. (2020). *Time-Fractional Differential Equations: A
 Theoretical Introduction* (2020 ed.). Springer.
- Mainardi. (2018). *Fractional Calculus: Theory and Applications*. Mdpi AG.
- Milici, Drăgănescu & Machado. (2018). *Introduction to Fractional Differential Equations
 (Nonlinear Systems and Complexity Book 25) (English Edition)* (1.^a ed.). Springer.
- Ortigueira. (2011). *Fractional Calculus for Scientists and Engineers (Lecture Notes in
 Electrical Engineering Book 84) (English Edition)* (2011.^a ed.). Springer.
- Podlubny. (1998a). *Fractional Differential Equations*. Elsevier Gezondheidszorg.
- Podlubny. (1998b). *Fractional differential equations, volume 198: An introduction to
 fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution
 and some of their applications* (Illustrated). Academic Press.
- Sabatier, Agrawal & Machado. (2007). *Advances in Fractional Calculus*. Springer
 Publishing.
- Sage para estudiantes. (2000). <http://www.sage-para-estudiantes.com/>

- Salehi, Schiesser & Chairman. (2017). *Numerical Integration of Space Fractional Partial Differential Equations: Vol 2 - Applications from Classical Integer Pdes*. Morgan & Claypool.
- Sánchez Muñoz. (2011). Historias de matemáticas génesis y desarrollo del cálculo fraccional. *Pensamiento Matemático*, G(12).
http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/revistapm/revista_impresa/numero_1/genesis_y_desarrollo_del_calculo_fraccional.pdf
- Sauchelli & Laboret. (2007, 13 de octubre). *CÁLCULO FRACCIONAL APLICADO A CONTROL AUTOMÁTICO*. Consultado el 23 de octubre de 2020, desde
https://www.researchgate.net/publication/228350370_CALCULO_FRACCIONAL_APLICADO_A_CONTROL_AUTOMATICO
- Singh, Kumar, Dutta, Baleanu & Purohit. (2020). *Mathematical Modelling, Applied Analysis and Computation: Icmmaac 2018, Jaipur, India, July 6-8: 272* (2019 ed.). Springer.
- Spivak, Sala & Camó. (2019). *Calculus* (3.^a ed.). Reverte.
- Srivastava. (2020). *Integral Transformations, Operational Calculus and Their Applications*. Mdpi AG.
- Stein & Shakarchi. (2005). *Real Analysis: Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces* (First Edition). Princeton University Press.
- Thomas, Weir, Hass & Giordano. (2004). *Thomas' Calculus* (Ed. rev.). Addison-Wesley.
- Umarov. (2016). *Introduction to Fractional and Pseudo-Differential Equations with Singular Symbols: 41* (Softcover Reprint of the Original 1st 2015 ed.). Springer.
- Zhou. (2014). *Basic Theory of Fractional Differential Equations* (1.^a ed.). World Scientific Publishing Company.