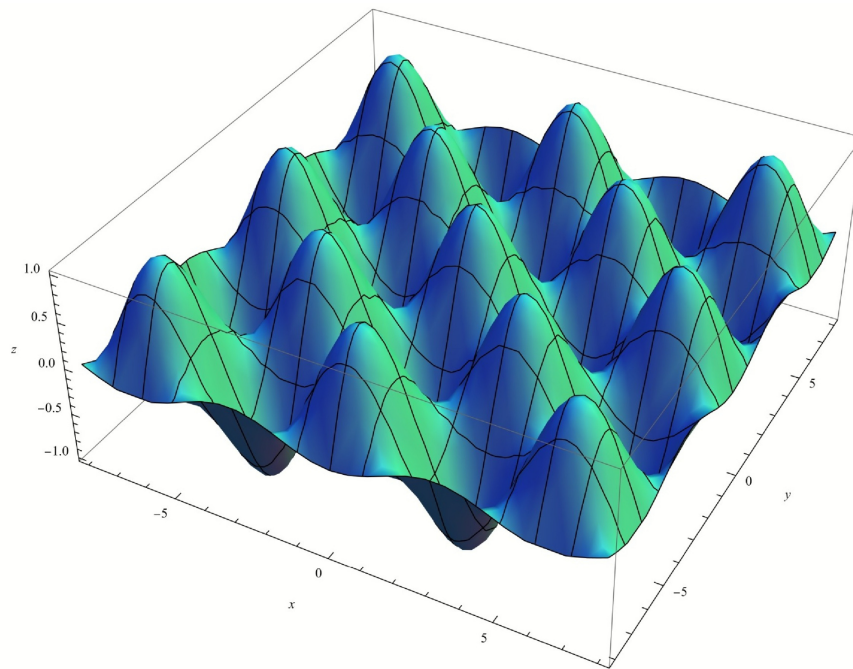


Análisis físico y geométrico de un modelo de universo realista a través de Inniverse



Julian Stiven Beltran Niño

Universidad Pedagógica Nacional
Facultad de Ciencia y Tecnología, Departamento de Física
Bogotá, D.C, Colombia
2025

Análisis físico y geométrico de un modelo de universo realista a través de Inniverse

Julian Stiven Beltran Niño

Tesis o trabajo de grado presentada(o) como requisito parcial para optar al título de:
Licenciado en Física

Director(a):
M.Sc. Yesid Javier Cruz Bonilla

Línea de Investigación:
Enseñanza de la Física y su relación física-matemática
Semillero de Investigación:
Semillero Estudiantil de Investigación en Física-Matemática

Universidad Pedagógica Nacional
Facultad de Ciencia y Tecnología, Departamento de Física
Bogotá, D.C, Colombia
2025

Dedicatoria

Dedico este trabajo a mi madre, Aurora Niño, motor de mis sueños y apoyo incondicional en cada paso de este largo camino. Gracias por ser mi inspiración constante y el mejor modelo a seguir como ser humano.

Soy malo, y eso es bueno. Yo jamás seré bueno, y eso no es malo. No hay nadie que quiera ser, además de mí.

Ralph, el demoledor.

Agradecimientos

Agradezco de todo corazón a mi asesor, el profesor Yesid Javier Cruz Bonilla, del Departamento de Física de la Universidad Pedagógica Nacional. Gracias por su disposición constante, por compartir su conocimiento y por guiarme con sabiduría en la construcción de este trabajo. Valoro profundamente que siempre me brindara palabras de aliento y que me tratara como a un par académico. Para mí fue un honor haber trabajado a su lado; gracias por ver en mí un potencial que ni siquiera yo mismo lograba reconocer.

Índice de figuras

1-1	Principio de equivalencia	6
1-2	Principio de covarianza	6
1-3	Curvatura del espacio-tiempo	7
1-4	Radiación de fondo cósmico de Microondas	15
2-1	Homogeneidad e isotropía en 2D.	18
2-2	Principio de Weyl	18
2-3	Geometrías del modeló cosmológico estándar	19
2-4	Inhomogeneidad e isotropía	24
2-5	Modeló de Lemaitre-Tolman-Bondi	25
3-1	Estructura base de la interfaz INNIVERSE	31
3-2	Estructura de la seccion de Graficación de la interfaz INNIVERSE	32
3-3	Modeló de distribución de densidad de materia-energía	34
3-4	Modelos geométricos a estufiar	34
3-5	Gráficos modelo geométrico 1	40
3-6	Gráficos modelo geométrico 2	40
3-7	Gráficos modelo geométrico 3	41

Índice de tablas

3-1	Comparación detallada de las coordenadas en las métricas FLRW y LTB.	29
3-2	Fases para la construcción de INNIVERSE	33
3-3	Parámetros de los modelos cosmológicos según su curvatura y geometría para $t = 0$	42
3-4	Parámetros de los modelos cosmológicos según su curvatura y geometría para $t = 5$	42
3-5	Parámetros de los modelos cosmológicos según su curvatura y geometría para $t = 10$	43
3-6	Parámetros de los modelos cosmológicos según su curvatura y geometría para $t = 13, 8$	43
3-7	Análisis cualitativo del comportamiento de los parámetros cosmológicos.	44

Índice general

Agradecimientos	IV
Lista de figuras	V
Lista de tablas	VII
Introducción	1
1 Capítulo 1	5
1.1 Teoría de la Relatividad General	5
1.1.1 Ecuaciones de campo de Einstein	7
1.2 Pruebas observacionales	11
1.2.1 Deflexión de la luz	11
1.2.2 Corrimiento al rojo	12
1.2.3 Big Bang	12
1.2.4 Radiación de Fondo Cósmico de Microondas	13
2 Capítulo 2	17
2.1 Modelos Cosmológicos	17
2.1.1 Modelo Cosmológico Estándar	19
2.1.2 Modelo cosmológico inhomogéneo e isotrópico	22
3 Capítulo 3	28
3.1 Comparativo de Modelos cosmológicos	28
3.2 Creación de INNIVERSE	30
3.2.1 Fases de la construcción de INNIVERSE	33
3.2.2 Modelos a trabajar	33
3.2.3 Graficación de los parámetros cosmológicos para los diferentes modelos	35
3.2.4 Cálculo numérico de los parámetros cosmológicos	38
3.2.5 Resultados de los modelos estudiados	40
3.2.6 Análisis de los datos obtenidos	44
4 Reflexiones finales y conclusiones	46
5 Bibliografía	48

Índice general

IX

6 Anexos

52

Introducción

Este trabajo busca acercar al lector a su contexto cosmológico, en este caso, con el estudio de la dinámica del universo, considerando la teoría general de la relatividad propuesta por Albert Einstein en 1915, sus ecuaciones de campo junto a cada uno de los elementos que las componen y dos modelos cosmológicos. El primero hace referencia a los modelos ideales, siendo la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, que bajo el principio cosmológico y el principio de Weyl se presenta como una solución exacta a las ecuaciones de campo y modela al universo como un gas ideal, siendo fiel al comportamiento de muchas etapas de este.

No obstante, se tiene la radiación de fondo cósmico de microondas que, si bien a grandes escalas muestra un universo homogéneo e isotrópico, a nivel local se tiene todo lo opuesto; en esta se aprecian una serie de anisotropías que exhiben una variación en la densidad de materia-energía en la etapa más temprana que se tiene del universo. Por esta razón, una métrica como la de Lemaître-Tolman-Bondi busca incorporar estas variaciones en dicha radiación de fondo cósmico desde su construcción, ya que se tiene en cuenta la variación en la coordenada radial. Siendo este, junto con la modelación del universo como polvo, las diferencias más notorias con el modelo cosmológico estándar. Es en este sentido que el presente trabajo busca estudiar la evolución de un universo con dichas características, al analizar la métrica de Lemaître-Tolman-Bondi y como los diferentes parámetros asociados a la dinámica del universo indican su evolución.

De esta manera, se proponen tres modelos a trabajar con diferentes geometrías que describen el espacio-tiempo. La primera es la conocida silla de montar; la segunda es la forma de un toroide o dona; y la tercera geometría se asemeja a una cubeta de huevos. La distribución de materia-energía es la misma para los tres modelos geométricos; no obstante, la función que describe la curvatura si varía en función de los diferentes modelos.

Para analizar la dinámica de los modelos propuestos, se tomó una serie de datos de los parámetros cosmológicos en los tiempos establecidos, diferenciando los tipos de curvatura en el aplicativo Inniverse. Encontrando que, con una distribución de materia que decrece de forma exponencial, el factor de escala siempre se comporta de manera creciente, lo que muestra que todas las geometrías estudiadas modelan universos abiertos, acordes con su geometría. Otro aspecto a considerar es que algunas funciones restringen una curvatura positiva, es decir, desde la forma de las funciones que describen la geometría del espacio-tiempo se tienen restricciones de curvatura, siendo congruentes con dichas formas y su posible evolución.

Problema y objetivos del trabajo de grado

Planteamiento del problema

Actualmente, los procesos de enseñanza aprendizaje se ven ligados directamente a los contextos en los cuales se encuentra inmerso el estudiante, contextos tales como el cultural, social, político, económico, histórico, etc. Sin embargo, en pocas ocasiones se tiene presente el contexto cosmológico, aun cuando es más cercano al interés del estudiante en relación con otros. Entendiendo que el contexto cosmológico se refiere a la relación del hombre con los planetas, las estrellas, los cometas, los asteroides, los agujeros negros y las galaxias, es decir, con todas las partes que lo conforman y, por ende, con el universo en su totalidad.

Así pues, se ve relevante revisar los espacios académicos ofrecidos por la Licenciatura en Física de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN), en los que se tiene el contexto cosmológico como eje fundamental o problémico en los tópicos de Relatividad General y Agujeros Negros y Cosmología; espacios académicos que se ofertan en el ciclo de profundización, y que, como su nombre lo indica, buscan ahondar en temas referentes a la caracterización de la dinámica del universo para determinar las temáticas que se abordan. En Relatividad General se dota de los conocimientos tanto físicos como matemáticos para la comprensión de dicha evolución, y en Agujeros Negros Y Cosmología se realiza un énfasis en el estudio de los agujeros negros, trabajando lo anteriormente mencionado de forma clásica; es decir, se abordan las temáticas con el algebra y calculo tensorial clásico. Por otro lado, se tiene la electiva de todo programa titulada Astronomía General, donde se abordan distintas temáticas con énfasis en la evolución estelar, ubicación en el espacio, cosmogonías, cosmología, etc.

En relación con los tópicos de Relatividad General, Agujeros Negros y Cosmología, así como en la electiva de Astronomía General, se aborda el modelo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker el cual determina la dinámica del universo, siendo una solución exacta a nivel cosmológico de las ecuaciones de campo de la Teoría General de la Relatividad. No obstante, este es un modelo ideal del universo que estudia su dinámica, caracterizándolo como un gas ideal, basándose en los supuestos de homogeneidad e isotropía, los cuales hacen referencia a la simetría bajo transformaciones de rotación o traslación; es decir, todos los puntos en el universo poseen las mismas propiedades y no se tiene ninguna dirección privilegiada. Asimismo, se tiene el principio de Weyl, en donde cada partícula que conforma el universo sigue una geodésica de tiempo; por ende, existe una única línea de tiempo que pasa por cada partícula en el espacio tiempo.

Ahora bien, en los trabajos de grado de la UPN, la métrica Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) es ampliamente abordada. Un ejemplo se encuentra en los trabajos de García Mesa (2014) y La Rotta (2023), quienes introducen el modelo cosmológico estándar, sus principios y una explicación de los parámetros primarios. Posteriormente, desarrollan la ecuación de campo de Einstein desde la Relatividad General, desglosando sus componentes, para finalmente presentar la métrica FLRW como una solución exacta. Dichas investigaciones trazan los lineamientos para el abordaje de la métrica en este trabajo y muestran el tratamiento de los parámetros obtenidos en diver-

sas misiones. Por otro lado, Campo (2022) estudia el modelo de universo de de Sitter mediante vectores de Killing, dejando un precedente sobre modelos alternativos; no obstante, emplea un formalismo contemporáneo que se aparta de los lineamientos clásicos que se desean abordar.

En relación con lo mencionado, la cosmología moderna hace uso de los modelos de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, siendo este un modelo ideal, no obstante, se tienen modelos realistas para describir la evolución del universo, siendo uno de estos el modelo de Lemaître-Tolman-Bondi, en el cual se tiene presente la inhomogeneidad en la evolución del universo, como se puede apreciar en la distribución de materia presente en las galaxias o por la radiación de fondo cósmico de microondas a nivel local. La CMB da cuenta de la densidad de materia en la etapa más temprana del universo de la cual se tiene conocimiento en la actualidad. Estas descripciones se realizan con base en los parámetros cosmológicos primarios, siendo estos: el parámetro de Hubble, la densidad de materia bariónica, la densidad de radiación, la densidad total de materia y la densidad de energía oscura; y los parámetros derivados que surgen de estos, de los cuales ya se tienen valores estimados por la observación de distintas misiones.

Si bien los modelos ideales presentan un amplio campo de estudio, es mediante los modelos realistas que nos acercamos en mayor medida a la realidad. Claro está que ambos modelos se encuentran ligados. Para transitar de un modelo a otro, es decir, para generar el salto del modelo cosmológico estándar a un modelo más realista, se tiene en cuenta lo expuesto en los trabajos presentados por de Orduz, Carlos Andrés (2012) y Teppa Pannia, F. A. (2016) en donde se aborda en primera instancia el modelo cosmológico estándar junto con sus consideraciones para movilizarse posteriormente a un modelo más realista que es el trabajado con la métrica de Lemaître-Tolman-Bondi, como una solución no homogénea a las ecuaciones de campo de Einstein, el primer trabajo aborda la métrica de Lemaître-Tolman-Bondi con diferentes familias de soluciones modelos y sus condiciones; el segundo trabajo presenta un paralelo en el abordaje del corrimiento al rojo trabajando desde el modelo cosmológico estándar y la métrica de Lemaître-Tolman-Bondi.

En este orden de ideas, se tiene que los modelos realistas presentan esta visión más cercana, fiel y, por ende, más asertiva del comportamiento del universo en el cual vive el estudiante; sin embargo, son escasos los experimentos, ya sean físicos o virtuales, o experiencias que acerquen al estudiante a este contexto. Así pues, se ve pertinente el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) debido a su flexibilidad, accesibilidad y amigabilidad, rompiendo barreras geográficas e incluso temporales al momento de ser usadas como herramientas para la construcción de escenarios que, mediante una representación multimodal (textos, imágenes, gráficas, ecuaciones, etc.) muestre al estudiante lo que se desea aprender.

En síntesis, se tiene en cuenta que en los tópicos de Relatividad General, Agujeros negros y cosmología, y la lectiva de Astronomía General se aborda la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker para la descripción de la dinámica de un universo ideal; es así que se plantea el estudio de un universo inhomogéneo e isotropico con el uso de la métrica de Lemaître-Tolman-Bondi mediante un análisis físico y geométrico en relación con los parámetros cosmológicos primarios para caracterizar la dinámica del universo de una forma más fiel a la realidad mediante el uso de una interfaz mediada por las TIC teniendo en cuenta las ventajas presentadas, mostrando una

alternativa para el análisis y caracterización de la dinámica del universo en espacios académicos o en semilleros de astronomía. Por lo cual surge la siguiente pregunta problema:

¿Cómo construir una interfaz para el análisis físico y geométrico de un modelo de universo inhomogéneo e isotrópico mediante el uso de la métrica de Lemaître-Tolman-Bondi para los estudiantes de la licenciatura en Física de la UPN?

Objetivos

Objetivo general

Construir, a través del uso de Python, una interfaz (INNIVERSE) que permita comprender la dinámica de un modelo de universo de Lemaître-Tolman-Bondi mediante un análisis físico y geométrico para los estudiantes de la licenciatura en Física de la UPN.

Objetivos específicos

- Realizar un análisis bibliográfico para la reconstrucción de la métrica de Lemaître-Tolman-Bondi con base en la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker.
- Recolectar el valor del parámetro de densidad de materia total y el parámetro de densidad de energía oscura de la base de datos de la misión Planck, publicados en el año 2021, para determinar el valor de la densidad total de materia y la densidad de energía oscura.
- Desarrollar por medio de Python una interfaz mediada por las TIC (INNIVERSE) que muestre la evolución de los parámetros cosmológicos de un modelo de universo de Lemaître-Tolman-Bondi.
- Analizar los datos obtenidos para el factor de escala, el factor de Hubble y los parámetros de densidad de materia total, materia oscura, curvatura, edad y tamaño del universo para el estudio de la dinámica de un modelo de universo de Lemaître-Tolman-Bondi.

1 Capítulo 1

En este capítulo se aborda parte de la relatividad general, en especial sus postulados y la construcción de las ecuaciones de campo de Einstein, desglosando y explicando cada una de sus partes, teniendo especial énfasis en el tensor de Einstein y las diferentes distribuciones de materia-energía que puede tener el tensor de energía-momento. De igual forma, se tienen en cuenta las diferentes pruebas observacionales que, desde la relatividad general, las ecuaciones de campo de Einstein y la Cosmología se busca dar explicación; estas pruebas también funcionan como test de los diferentes modelos y de cómo se construyen desde su base. Entre estas pruebas observacionales se encuentran la deflexión de la luz, el corrimiento al rojo y la radiación de fondo cósmico de microondas (CMB). Por último, se tiene la obtención de los valores de la constante de expansión de Hubble y de los diferentes parámetros (materia bariónica, radiación, energía oscura, curvatura, tiempo, etc.) de nuestro universo de forma observacional y como se hallan de forma matemática.

1.1. Teoría de la Relatividad General

La teoría de la relatividad general fue presentada en el año 1915 por el físico alemán Albert Einstein como una visión innovadora para solucionar algunos de los problemas de la época, entre ellos el de la relación entre la geometría del espacio-tiempo y la distribución de materia-energía. De esta manera, se presenta una nueva forma de estudiar la gravedad, dejando de lado la concepción de una fuerza a distancia que actúa de forma instantánea y abriendo la puerta a un nuevo campo de estudio llamado Cosmología, donde se busca explicar el origen, la evolución y el posible final del universo.

Esta teoría tomó fuerza gracias a diferentes pruebas observacionales realizadas en la época; una de ellas es la deflexión de la luz, predicha por la misma teoría y confirmada durante un eclipse total de sol, en el cual se tomaron una serie de fotografías que respaldaban los datos teóricos. Esta teoría parte de los siguientes principios:

- Principio de equivalencia: Expresa que, al estar en un marco no inercial, ya sea bajo el efecto de un campo gravitacional o en un movimiento acelerado, es imposible diferenciar uno del otro.

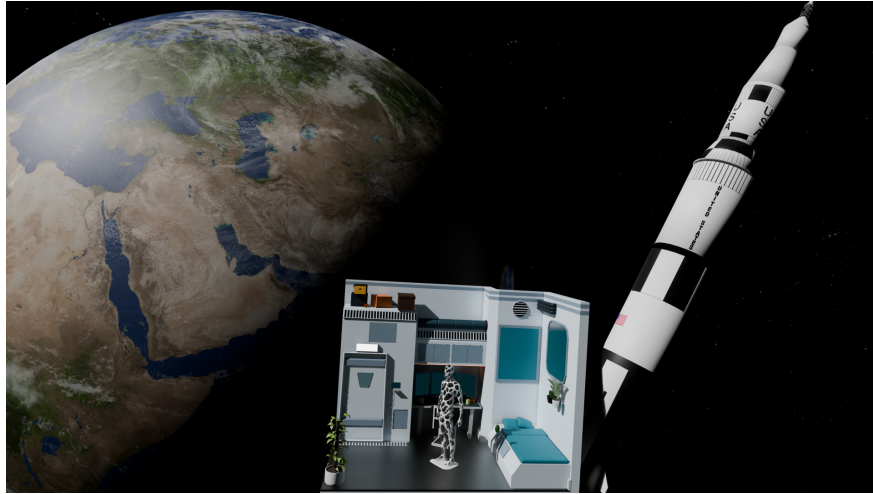


Figura 1-1: Muestra 2 posibles escenarios, en el primero se tiene la superficie terrestre (lado izquierdo) y en el segundo se muestra un movimiento de aceleración constante de un cohete (lado derecho), si se tuviera perito en un recinto cerrado, para este será imposible identificar en que escenario se encuentra a menos que salga de dicho recinto. Elaboración propia realizada mediante el software Blender.

- Principio de covarianza (extendido): Determina que las leyes de la física se cumplen en cualquier punto del espacio-tiempo de forma independiente del marco de referencia.

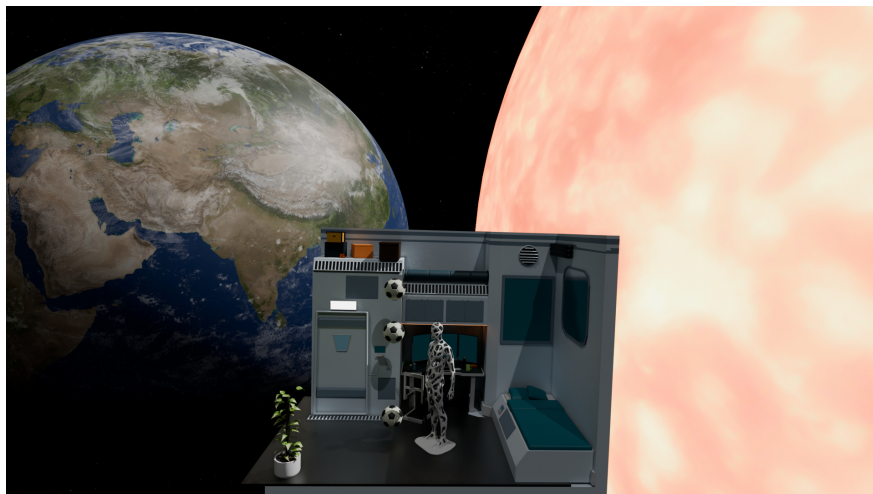


Figura 1-2: Muestra el movimiento de caída de una pelota que se encuentra en presencia de un campo gravitacional, el cual podría ser el terrestre (lado izquierdo) o el de una estrella (lado derecho), sin tener en cuenta la diferencia en el valor de la aceleración, la pelota siempre caerá hacia el centro del cuerpo celeste siguiendo las leyes de la física. Elaboración propia realizada mediante el software Blender.

- **Curvatura del espacio-tiempo:** La distribución de materia-energía afecta la estructura geométrica del espacio tiempo, como lo dijo John Wheeler: “La materia le dice al espacio-tiempo como curvarse y el espacio-tiempo le dice a la materia como moverse” (Wheeler, 1990).

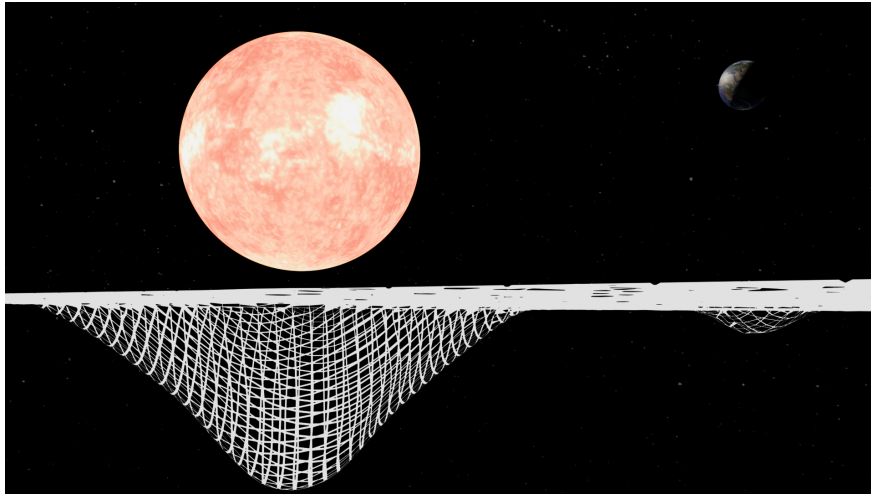


Figura 1-3: Muestra la curvatura del espacio tiempo en objetos de menor a mayor masa, siendo el cuerpo celeste con menor masa el mostrado al lado derecho y el cuerpo celeste con mayor masa el mostrado en el lado izquierdo, haciendo referencia a la tierra y el sol respectivamente. Elaboración propia realizada mediante el software Blender.

1.1.1. Ecuaciones de campo de Einstein

Dicha conexión entre la distribución de materia-energía y la curvatura del espacio-tiempo se expresa en las ecuaciones de campo de la relatividad general de la siguiente manera:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (1-1)$$

Las ecuaciones de campo de Einstein constan de 16 ecuaciones diferenciales no lineales, no homogéneas y acopladas; donde: G es la constante de Gravitación Universal, $R_{\mu\nu}$ y R representan el tensor y el escalar de Ricci respectivamente, $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico o métrica del sistema, $T_{\mu\nu}$ hace referencia al tensor Energía-Momento, Λ representa la constante cosmológica y c representa la velocidad de la luz.

Antes de continuar, es fundamental resaltar que el abordaje de este trabajo es estrictamente clásico. Si bien existen formas contemporáneas de expresar la relatividad general, las ecuaciones de campo y sus métricas mediante el álgebra y cálculo modernos, este estudio se mantiene fiel a autores primarios como Einstein, Lemaître, Tolman, Bondi, entre otros, quienes no recurren a un formalismo topológico o de variedades para abordar el espacio tiempo. Teniendo en cuenta que dicha visión es más cercana a los estudiantes del Departamento de Física, quienes constituyen

la población objetivo, es por esta razón, que todas las operaciones se realizarán bajo el algebra y cálculo tensorial clásico respondiendo a la problemática establecida.

Para llegar a esta ecuación, Einstein paso por un largo camino, lleno de errores y aciertos que lo llevaron a utilizar los espacios riemannianos como soporte geométrico para la construcción de su nueva teoría general de la relatividad. Fue en 1913 el momento en el que Einstein, con ayuda de Grossman, introdujo el elemento de línea o el tensor métrico $g_{\mu\nu}$, donde dicho tensor no solamente caracteriza el espacio tiempo, sino que también da cuenta del campo gravitacional. Por esta razón, las ecuaciones de campo se deben escribir en derivadas parciales teniendo al elemento de línea como una incógnita (Ron, 1993). Si bien las ecuaciones de campo son una de las genialidades de la época, cada uno de sus componentes juega un papel importante en la relación que tiene la geometría del espacio con la distribución de la materia-energía, de la siguiente manera:

Tensor y Escalar de Ricci

El tensor y el escalar de Ricci, o tensor y escalar de curvatura, son de vital importancia para la construcción del tensor de Einstein, ya que son los que determinan la geometría del sistema. El tensor de Ricci se define como la contracción del tensor de Riemann (Colorado Caicedo, 2018):

$$R_{\nu\gamma} = R^{\mu}_{\nu\mu\gamma} = \partial_{\mu} \Gamma^{\mu}_{\gamma\nu} - \partial_{\gamma} \Gamma^{\mu}_{\mu\nu} + \Gamma^{\mu}_{\mu\kappa} \Gamma^{\kappa}_{\gamma\nu} - \Gamma^{\mu}_{\gamma\kappa} \Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} \quad (1-2)$$

Y el escalar de Ricci se halla al multiplicar el tensor de Ricci por el tensor métrico:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (1-3)$$

El conjunto del tensor de Ricci y el escalar de Ricci da como resultado el tensor de Einstein, que ayuda a determinar la relación entre la geometría del espacio-tiempo y la presencia de materia-energía. Este se denota:

$$G^{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad (1-4)$$

Einstein construye las ecuaciones de campo basandose en este tensor y su relación con el tensor de energía-momento.

Tensor de Energía-Momento

Como se mencionó anteriormente, las ecuaciones de campo de Einstein relacionan de forma intrínseca la geometría del espacio tiempo y la distribución de materia-energía, siendo el tensor de energía-momento el que permite tal descripción:

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & S_{ij} \\ S_{ij} & \tau_{ij} \end{pmatrix} \quad (1-5)$$

ρ representa la densidad de energía, $\tau_{i=j}$ representa el estrés (presión) y los demás componentes de esta sección de la matriz representan la viscosidad o flujo de momentum, $S_{i=0;j}$ da cuenta de

la densidad de momentum y $S_{i,j=0}$ es el flujo de energía.

Este tensor abarca todo tipo de manifestación, ya sea de energía o momento y las fuerzas intrínsecas. Por esta razón, una sección del espacio-tiempo cuyo tensor de energía-momento es nulo se denomina vacío y representa una carencia de materia o radiación. Generalmente se hace uso del tensor energía momento que describe un fluido, usualmente polvo o radiación (Colorado Caicedo, 2018). Algunos de los tensores de energía-momento más utilizados son:

Fluido perfecto:

$$T_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} \varphi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -P \end{pmatrix} \quad (1-6)$$

En un fluido perfecto que se encuentra en reposo, la única fuerza que actúa en el sistema es la presión, que se denota como las fuerzas presentes perpendiculares a la superficie. No se tienen fuerzas tangenciales o de corte; esto quiere decir que el tensor de energía momento es isótropo. El fluido perfecto también se encuentra en equilibrio termodinámico, esto quiere decir que no hay intercambio de energía entre elementos cercanos.

Polvo:

$$T_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} \varphi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1-7)$$

Donde φ determina la densidad de materia, que puede representar un cumulo de galaxias o una agrupación de átomos de algún elemento que posee una velocidad despreciable, como polvo.

Gas de fotones:

$$T_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} \varphi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\varphi}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\varphi}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2\varphi}{3} \end{pmatrix} \quad (1-8)$$

Se considera un gas de fotones a una configuración en la cual el campo electromagnético varía de forma aleatoria.

Gas cargado:

$$T_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} -(\rho + \rho_{em}) & \frac{1}{c}S_x & \frac{1}{c}S_y & \frac{1}{c}S_z \\ \frac{1}{c}S_x & P + \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \frac{1}{c}S_y & \sigma_{yx} & P + \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \frac{1}{c}S_z & \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & P + \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (1-9)$$

Este tensor modela un gas cargado que se presenta como un fluido perfecto en presencia de campos magnéticos y eléctricos. Donde ρ_{em} es la densidad de energía del campo electromagnético, los términos S dan cuenta del flujo de energía y el tensor σ_{ij} , o tensor de Maxwell, da cuenta de la presión y los cortes inducidos por los campos.

Aunque se tienen diferentes distribuciones para trabajar, el tensor energía-momento utilizado en las ecuaciones de campo modela un fluido perfecto sin tener en cuenta la carga. Además, este debe cumplir una condición para poder ser usado, esta es la divergencia covariante de dicho tensor, que denota la conservación de la energía y el momento. Es decir, existe un flujo de energía-momento, mas no una fuente o una sección donde desaparece.

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu} \quad (1-10)$$

Es así como se tienen los elementos principales para la construcción de las ecuaciones de campo; no obstante, Einstein agregó una constante extra; esta es la constante cosmológica.

Constante Cosmológica

Para la consolidación final de las ecuaciones de campo y siguiendo la línea de pensamiento de la época acerca de un universo estático, estacionario o que permanecía invariante, Einstein agregó una constante a las ecuaciones de campo obtenidas hasta ese momento (García Brao, 2018):

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1-11)$$

Esta constante se denomina la constante Cosmológica; inicialmente dio cuenta de una gravitación aparentemente repulsiva que contrarrestaba la tendencia newtoniana de la materia al colapso (De las XV, 2005) y actualmente se le atribuye o da cuenta de la energía oscura:

$$\Lambda g_{\mu\nu} \quad (1-12)$$

La cual mantiene la dimensionalidad de las ecuaciones de campo debido a que esta multiplicada por el tensor métrico.

Tensor métrico

El tensor métrico nace como respuesta a la incógnita de cómo se puede mantener la distancia entre dos puntos al cambiar de sistema de referencia, de un sistema S a un sistema S' , el cual podría ser de coordenadas cartesianas a coordenadas esféricas.

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1-13)$$

$$ds^2 = dt^2 + dx^{1^2} + dx^{2^2} + dx^{3^2} \quad (1-14)$$

Por notación, el tensor métrico en el espacio de Minkowski queda de la siguiente manera:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1-15)$$

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^{1^2} - dx^{2^2} - dx^{3^2} \quad (1-16)$$

Generalmente, se mantiene el valor de la coordenada temporal positiva y los valores de las coordenadas espaciales negativas, pero también se puede encontrar en el sentido opuesto, es decir, la coordenada temporal negativa y las coordenadas espaciales positivas; esto depende de la notación utilizada.

Si bien se tienen todos los elementos para la construcción final de las ecuaciones de campo, estas y sus distintas soluciones nacen para dar explicación a ciertos fenómenos astronómicos y cosmológicos, algunos de los cuales se pueden probar de forma observacional y dar fuerza a las teorías que los modelan.

1.2. Pruebas observacionales

Las partes de las ecuaciones de campo anteriormente descritas buscan dar cuenta de la evolución del universo en su conjunto, desde su posible origen, evolución y su posible final, con base en diferentes modelos cosmológicos. De igual forma, dan cuenta de la explicación de fenómenos tales como el Corrimiento al Rojo, la Deflexión de la Luz, la Expansión del Universo, la Precesión del Perihelio de Mercurio, la Nucleosíntesis Primordial y, gracias a las Ecuaciones de Campo de Einstein y sus distintas soluciones, se predijeron objetos supermasivos como lo son los Agujeros Negros (Luis Peña, 2015). En esta sección se tratarán algunos de estos fenómenos:

1.2.1. Deflexión de la luz

La deflexión de la luz se estudió con mayor fuerza gracias al descubrimiento de la primera solución exacta a las ecuaciones de campo de Einstein, algo que el mismo Einstein creía imposible, debido a que pensaba que sus ecuaciones no eran lineales y, por ende, eran irresolubles. Pero fue Schwarzschild, quien como regalo de cumpleaños le obsequio la primera solución exacta. No obstante, este fenómeno se había estudiado en 1804 por J. Soldner, quien halló un valor similar al determinado por Einstein en 1915 del ángulo de deflexión de la luz de la radiación que pasa cerca del sol a causa de la curvatura del espacio-tiempo, lo cual fue confirmado por el astrónomo A. Eddington durante un eclipse solar en 1919 (Sendra, 2015).

En 1936, Einstein calculó la deflexión de la luz proveniente de una estrella que es afectada por otra estrella y se percató de que la luminosidad aparente se ve afectada por dicha deflexión. No fue

hasta 1937 que F. Zwicky menciona que las galaxias podrían actuar como lentes más potentes que las estrellas y que, gracias a la amplificación de la radiación, se podrían detectar galaxias lejanas que no se apreciarían de otra forma (Sendra, 2015).

1.2.2. Corrimiento al rojo

El corrimiento al rojo presenta una de las formas más eficaces de conocer la dinámica o expansión del universo, teniendo como foco de estudio a las ondas electromagnéticas que viajan por el universo desde distintas fuentes hasta nuestro planeta. Este fenómeno estudia como la expansión del universo afecta la longitud de onda de la radiación, teniendo en cuenta que, en el momento de ser emitida, el universo tenía un tamaño y , al momento de ser detectadas, el universo se ha expandido. Fue en 1914 cuando Slipher se percató del Desplazamiento al rojo de las líneas espectrales provenientes de varias galaxias, lo cual indicaba que las galaxias se alejaban. En 1929, después de un año de observación realizado en el observatorio de Mount Wilson, Hubble (1929) postuló su famosa ley de expansión: “La velocidad de recesión de cada galaxia o, equivalentemente, su desplazamiento al rojo, es proporcional a su distancia”. Esta relación se representa de la siguiente manera (Combi, 2022):

$$1 + z = \frac{\lambda_e}{\lambda_0} \quad (1-17)$$

Donde λ_e es la radiación emitida por el cuerpo observado y λ_0 es la radiación si el objeto emisor estuviera en reposo. Esta relación se puede redefinir en función del factor de escala del universo (Biswas et al., 2007):

$$1 + z = \frac{R(t_0)}{R(t_e)} \quad (1-18)$$

Obteniendo la relación de la constante de Hubble:

$$H(t) = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} \quad (1-19)$$

Teniendo esto en cuenta, entre mayor sea el corrimiento al rojo que se encuentra en la observación de la radiación proveniente de algún cuerpo celeste, más lejos está del planeta tierra, debido a que debió recorrer una distancia mayor y al universo expandirse, generó un corrimiento al rojo más pronunciado.

1.2.3. Big Bang

En 1927, George Lemaître postuló que el universo proviene de una gran explosión de una región con densidad infinita y temperaturas extremadamente altas. Esta teoría, junto a otros hallazgos de la época, llevó a descartar la teoría de un universo estático, y es en 1948 cuando G. Gamow y R. Herman, en el marco de esta teoría del Big Bang, proponen la existencia de una radiación

que permea todo el espacio y proviene de los primeros instantes del universo, denominada la radiación de fondo cósmico de microondas (Luminet, 2015).

1.2.4. Radiación de Fondo Cósmico de Microondas

Uno de los mayores desafíos en la cosmología es determinar cómo fueron los primeros instantes del universo. Para realizar la descripción de la denominada era de Planck (Fernández Cobos, 2014), es necesaria una teoría de la gravitación que permita una descripción desde la mecánica cuántica y la relatividad general, que aún es desconocida. Pasada esta era, la gravitación puede ser determinada por la ya conocida en la teoría general de la relatividad. Según el modelo estándar de partículas, durante esta era predominó un plasma de partículas relativistas. Estas teorías predicen la posibilidad de una ruptura espontánea de simetrías que dio como resultado un cambio de temperatura del orden de 10^{14} a 10^{16} GeV. Esto es lo que da pie a la etapa de la gran inflación, que se caracteriza por una expansión acelerada del factor de escala del universo.

Posteriormente, a temperaturas de 100 MeV, el universo habría experimentado una etapa de rompimiento de simetrías quirales y el confinamiento del color; de igual forma, se crearían los bariones y mesones. A temperaturas del orden de 10 a 1,1 MeV se da la etapa de la nucleosíntesis primordial (Teppa Pannia, 2016). Esta etapa da cuenta de la interacción entre partículas relativistas en estado de equilibrio y es la prueba del modelo cosmológico estándar más temprana en la evolución del universo. Una evidencia observacional que respalda esta etapa es la medición de la abundancia de elementos de núcleo ligero en el universo. Durante esta etapa, el universo estaba a muy altas temperaturas; por esta razón, se tiene una cantidad igual de protones y neutrones; y a medida que el universo se expandía y enfriaba, los nucleones se combinaban para formar deuterones que posteriormente se convertirían en la materia prima de los núcleos de Helio; fue Peebles quien, en 1960, habla sobre la producción de elementos livianos en el marco del Big Bang (De las XV, 2005).

La expansión del universo estuvo dominada por alrededor de 300.000 años después del Big Bang por la radiación, cuando la temperatura de los fotones descendió, lo que dio lugar a la formación de átomos livianos como el hidrógeno y el helio. De esta forma, los fotones se desacoplan de la materia y dan origen al fondo cósmico de microondas.

La radiación de fondo cósmico de microondas es una de las evidencias más fuertes del modelo cosmológico estándar. La radiación medida ajusta con alta precisión a la emisión de un cuerpo negro con una temperatura de 2,75 K, y presenta una distribución isotrópica. Los mapas de anisotropías en la temperatura de los fotones proveen información tanto del momento del desacople como de los efectos sufridos a lo largo de su trayectoria. La formación de estructuras a gran escala en el universo es una consecuencia del crecimiento gravitacional de pequeñas fluctuaciones en la densidad de materia sin presión y que no interactúa electromagnéticamente (Luis Peña, 2015). La expansión del universo es uno de los pilares fundamentales en la construcción del modelo cosmológico estándar y está altamente justificada por diversas observaciones. La primera de estas evidencias se dio en 1929 por E. Hubble a partir de la medición independiente de las distancias

y velocidades de recesión de galaxias próximas. Hubble se percató de que la curva de distancia contra velocidad seguía una relación lineal empírica, de donde infirió el valor de la constante de Hubble.

En la actualidad, es posible medir la constante de Hubble (Tixaire, 2005); esta posee un valor de $66,88 \text{ km/s/Mpc}$ con una precisión de aproximadamente el 10 %. Este resultado esta en consonancia con el resultado obtenido de distintas formas con el uso de diferentes procesos físicos.

Las escalas de distancias son fundamentales en el estudio del universo y su dinámica; por esta razón, se utilizan diferentes marcos de referencia. Actualmente, el más utilizado para estudiar la relación entre la distancia de luminosidad y el corrimiento al rojo de las supernovas Ia tiene su origen en sistemas binarios con estrellas enanas blancas. Teniendo en cuenta que la luminosidad máxima en una explosión de supernova tipo Ia es equiparable a la luminosidad total de la galaxia que la contiene, estos eventos se pueden apreciar a grandes distancias en términos cosmológicos. Por esta razón, la curva de luminosidad de las supernovas tipo Ia se utiliza para la determinación de diferentes parámetros, no únicamente para el de la constante de expansión de Hubble.

Gracias al estudio realizado sobre las supernovas de tipo Ia, dos grupos de científicos se percataron de que, al realizar un ajuste a los parámetros cosmológicos, se tenía un valor negativo en el parámetro de desaceleración del universo:

$$q_0 \equiv - \left(\frac{R''(t)}{R(t) H^2} \right) \quad (1-20)$$

Lo cual indica que, aunque se cree que estamos en una etapa del universo donde predomina la materia, el universo sigue en expansión acelerada (Teppa Pannia, 2016).

En la actualidad, esta curva de luminosidad de las supernovas de tipo Ia, en conjunto con otras observaciones, como la radiación de fondo cósmico de microondas, restringe el espacio de parámetros del modelo cosmológico estándar de forma congruente. Los valores inferidos modelan un universo con curvatura prácticamente nula (Reyes, 2020), es decir:

La densidad de materia bariónica (Ω_b):

$$\Omega_b \approx 0,3 \quad (1-21)$$

La densidad de radiación (Ω_r):

$$\Omega_r \approx 10^{-4} \quad (1-22)$$

La densidad de energía oscura (Ω_Λ):

$$\Omega_\Lambda \approx 0,7 \quad (1-23)$$

La constante de curvatura (Ω_k):

$$\Omega_k \approx 0 \quad (1-24)$$

Teniendo en cuenta los valores obtenidos, la dinámica del universo está siendo dominada por Ω_Λ ; es decir, el universo se encuentra en una etapa de expansión acelerada. El modelo cosmológico que estudia este tipo de evolución se denomina Λ CMD, haciendo alusión a la constante que domina en esta etapa del universo.

La radiación de fondo cósmico de microondas (CMB), o también denominada radiación fósil, da cuenta de la densidad de materia-radiación en las distintas regiones del universo, mostrando una distribución uniforme a gran escala y convirtiéndose en una de las pruebas más fuertes que respaldan el modelo cosmológico estándar. Pero a nivel local se encuentran algunas distinciones en cuanto a dicha distribución, lo cual da a conocer que se presentan fluctuaciones o regiones con una mayor densidad que sus vecindades; estos sectores son denominados anisotropías. La existencia de estas pequeñas fluctuaciones de densidad, que dejaron huella en la CMB, además de la métrica ideal de Friedmann, movimientos del observador al sistema comovil, procesos que de alguna manera afectaron a los fotones desde el momento de su emisión hasta el momento de su detección, entre otros, pudieron ser causantes de la modificación que se observa en el modelo propuesto para la CMB (Falcon, s.f.). Dichos efectos se pueden clasificar en dos ramas: la primera es la distorsión en el espectro de cuerpo negro de la CMB y la segunda opción son las anteriormente denominadas anisotropías en la temperatura de la CMB (Falcon, s.f.). De lo cual se denominan anisotropías primarias antes del desacople, también denominadas anisotropías intrínsecas o secundarias cuando ocurrieron después del desacople, o también denominadas extrínsecas.

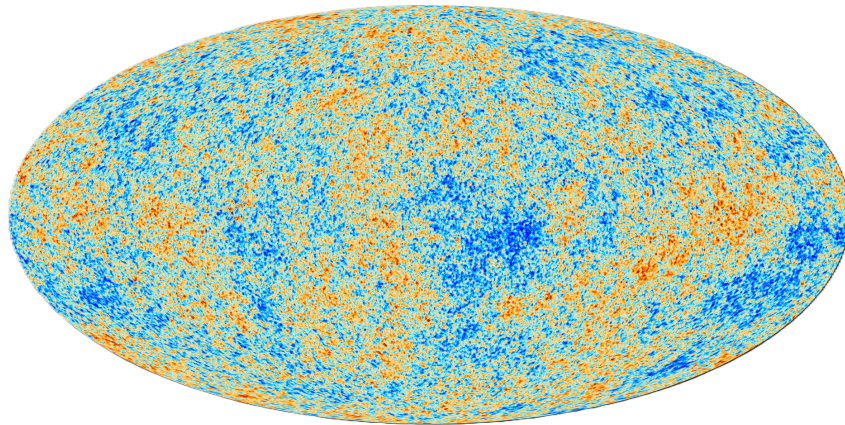


Figura 1-4: Muestra la Radiación de fondo cósmico de Microondas, es decir, la densidad de materia-energía en la etapa más temprana del universo de la cual se tiene conocimiento. (National Aeronautics and Space Administration, 2013)

En 1992, después de tres años de recolectar datos y meses de análisis, se tuvieron pruebas que mostraron la existencia de las anisotropías, las pequeñas irregularidades en la distribución espacial de la temperatura del CMB y como a partir de estas inhomogeneidades se formaron las grandes estructuras astrofísicas hoy observadas (Santos, 2007).

Los fotones liberados en el proceso del desacople de materia y radiación son los que se pueden

detectar hoy en día como la radiación de fondo cósmico de microondas. La trayectoria de estos fotones libres es desviada por las inhomogeneidades en la distribución de materia-energía del universo (perturbaciones cosmológicas) y se propagan en forma de ondas de sonido (Reyes, 2020). Teniendo en cuenta cada una de las pruebas observacionales expuestas, y que estas mismas funcionan como un test para las diferentes teorías que describen la evolución del universo, también pueden determinar la base o construcción de estas. Es decir, se pueden tener en cuenta las anisotropías en la distribución de la radiación de fondo cósmico de microondas o su homogeneidad a gran escala; esto cambia la distribución que puede tener el tensor de materia-energía o las simetrías inmersas. Lo cual se tratará con mayor cuidado en el siguiente capítulo.

2 Capítulo 2

En este capítulo se presenta la diferencia entre los modelos cosmológicos ideales y los modelos cosmológicos realistas, teniendo en cuenta el modelo cosmológico estándar como modelo ideal, ya que su construcción se basa en el principio de homogeneidad e isotropía presente en el universo a grandes escalas, también observado en la radiación de fondo cósmico de microondas a gran escala. No obstante, en este último se tiene una serie de fluctuaciones o anisotropías que, desde este modelo, se abordan como una diferencia de densidad de materia-energía al momento del gran desacople, lo que da como resultado la formación de estructuras a gran escala. Estas anisotropías también plantean la posibilidad de modelar un universo inhomogéneo, que es abordado por Lemaître en 1933, estudiado por Tolman en 1934 y Bondi en 1947, dando como resultado el modelo Lemaître-Tolman-Bondi, que da cuenta de las anisotropías al considerar un universo inhomogéneo, pero conservando su isotropía. De igual forma, se presentan las ecuaciones de Friedmann para cada modelo junto con los diferentes parámetros cosmológicos.

2.1. Modelos Cosmológicos

Los modelos cosmológicos son herramientas matemáticas y teóricas que ayudan a describir la dinámica y la topología del universo, basándose en la relatividad general, las ecuaciones de campo de Einstein y una serie de principios o postulados. Existen diferentes tipos de modelos cosmológicos: los modelos ideales y los modelos realistas. Los modelos ideales buscan dar cuenta de los fenómenos físicos inmersos en la dinámica del universo con la menor cantidad de variables posibles; el ejemplo más claro es el modelo cosmológico estándar, que se rige bajo los siguientes supuestos:

- Homogeneidad e Isotropía: Este supuesto también se denomina Principio Cosmológico y estipula que las propiedades del universo, modelado como un gas ideal, permanecen invariantes ante transformaciones de traslación y/o rotación de los marcos de referencia. Es decir, cada punto posee las mismas propiedades y no se tienen direcciones privilegiadas a gran escala.

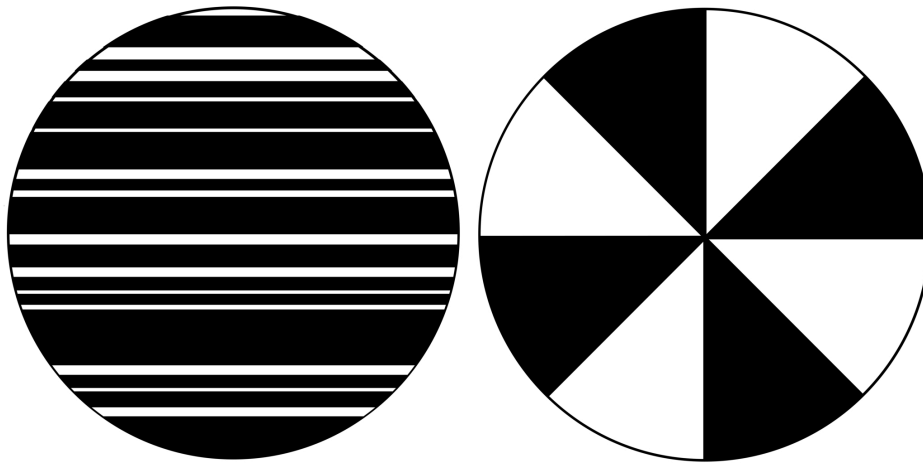


Figura 2-1: De forma alternativa en 2D, muestra la homogeneidad (lado izquierdo) y la isotropía (lado derecho), el primero da cuenta de la simetría ante transformación espacial (traslación) y el segundo de simetría ante transformación rotacional (rotación), esto es la base del del principio cosmológico de homogeneidad e isotropía. Elaboración propia mediante herramientas de procesamiento de texto.

- Principio de Weyl: Determina que a toda partícula en el Universo le pertenece una y solo una línea de mundo que describe su evolución desde el comienzo del universo hasta su posible final, siendo estos los únicos puntos en los cuales se puede interceptar dicha línea. En este modelo cosmológico, las galaxias se toman como partículas fundamentales de un fluido que permea todo el espacio y su movimiento se determina por geodésicas que respetan el principio de Weyl. Gracias a este principio se trabajan las coordenadas comoviles.

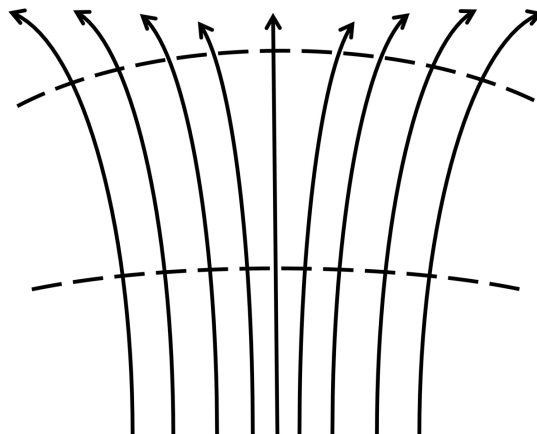


Figura 2-2: Muestra una serie de líneas de mundo o universo que evolucionan siguiendo el principio de Weyl. Con las curvas horizontales que dan cuenta de la evolución espaciotemporal, desde un t_1 a un t_2 que cuenta con una curvatura que representa la evolución espacial. Elaboración propia mediante herramientas de procesamiento de texto.

2.1.1. Modelo Cosmológico Estándar

Este modelo se construye sobre la Teoría General de la Relatividad (TGR) de Einstein y se apoya en el Big Bang, en el principio cosmológico y en el postulado de Weyl mencionados anteriormente. Del cual se tienen pruebas astrofísicas como lo son la expansión del universo y la radiación de fondo cósmico de microondas, entre otras. Con el cual se describe la dinámica del universo, la geometría y la edad; la abundancia relativa de los elementos ligeros que lo constituyen (nucleosíntesis primordial); y la formación de las estructuras a gran escala, como lo son las galaxias.

La métrica que representa el modelo cosmológico estándar es:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right] \quad (2-1)$$

Donde k representa la curvatura espacial; las coordenadas (t, r, θ, ϕ) son las coordenadas comoviles que se mantienen fijas para todos los objetos que solo tienen movimiento a causa de la expansión del Universo, y por último se tiene el parámetro adimensional $R(t)$, el cual es el factor de escala del universo y su dependencia temporal describe la expansión cosmológica.

La también denominada métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker es una solución exacta a las ecuaciones de campo de Einstein que modela el universo como un fluido perfecto; es decir, no es viscoso y, por ende, se desprecia la interacción entre las partes internas del mismo. En la cual se pueden tener las siguientes variables para la descripción del universo:

El parámetro de curvatura que da cuenta de la posible geometría del espacio-tiempo del universo, usualmente se denomina con la letra k :

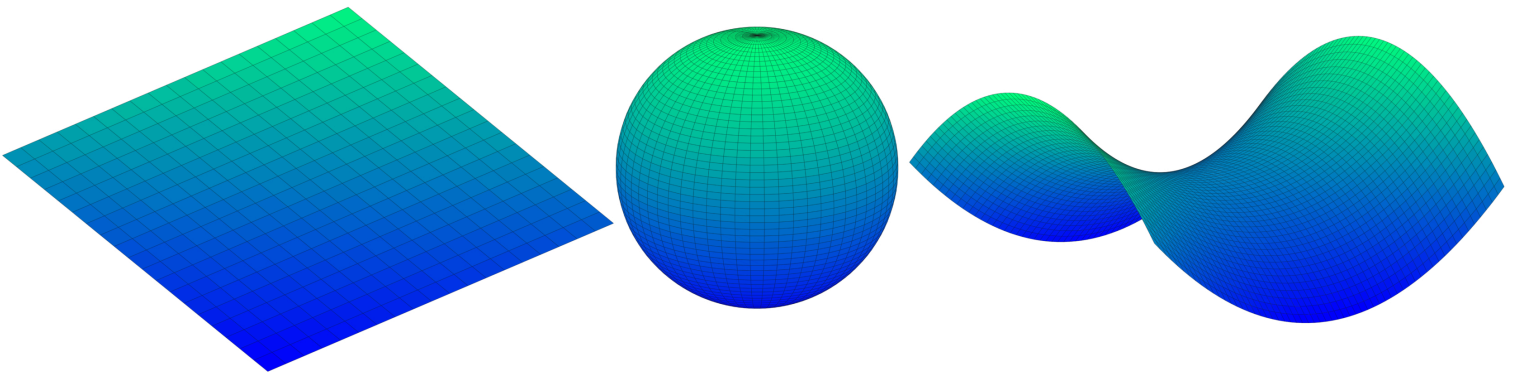


Figura 2-3: Da cuenta de las diferentes geometrías que se pueden describir desde el modelo cosmológico estándar al variar el valor del parámetro de curvatura k , teniendo al lado derecho una curvatura nula, al centro una curvatura positiva y finalmente una curvatura negativa, que se representan con un plano, una esfera y un paraboloides hiperbólico respectivamente. Elaboración propia realizada mediante el software Matlab.

$$k > 0, \quad k < 0, \quad k = 0 \quad (2-2)$$

Con $k = 0$ o $k = -1$ se tiene que el espacio es infinitamente extendido y el número de galaxias que contiene es infinito. En estos casos, la luz que llega a nosotros desde el origen del universo hasta ahora representa una fracción nula del todo del universo. Por otro lado, si $k = +1$, se tendrá un volumen finito, lo que quiere decir que existirá un número finito de galaxias y el universo observable será una fracción no nula del total.

El universo depende de la presión y la densidad de materia presentes y se relaciona por el radio y la curvatura del espacio-tiempo; en este sentido, las ecuaciones de Friedmann determinan la evolución del factor de escala, que depende de la presencia de materia-energía en el universo. Por otro lado, las ecuaciones propuestas por Alexander Friedmann bajo la teoría general de la relatividad y los postulados de la cosmología muestran la dinámica del universo en función de su contenido de materia-energía. Estas son:

Primera ecuación de Friedmann o Factor de expansión de Hubble:

$$\frac{\dot{R}(t)^2}{R(t)^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho_\Lambda + \frac{1}{3}\Lambda - \frac{k}{R(t)^2} \quad (2-3)$$

$$H(t) \equiv \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} \quad \rightarrow \quad H(t)^2 = \left(\frac{\dot{R}(t)}{R(t)} \right)^2 \quad (2-4)$$

Como se mencionó en el capítulo anterior, esta ecuación de Friedmann o el parámetro de Hubble da cuenta de la velocidad a la cual se expande el universo; de este también derivan otros parámetros, como la edad o el tamaño del universo. Cabe resaltar que, en esta forma, la primera ecuación de Friedmann relaciona la densidad de energía oscura ρ_Λ , el parámetro de curvatura k y el factor de escala $R(t)$ del universo. Para hallarlo se hace uso de la derivada temporal del factor de escala y se divide entre el factor de escala.

Segunda ecuación de Friedmann:

$$\frac{\ddot{R}(t)}{R(t)} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P) + \frac{\Lambda}{3} \quad (2-5)$$

Aunque en el desarrollo de este trabajo no se tendrá en cuenta la segunda ecuación de Friedmann, ya que no es necesaria para hallar alguno de los parámetros establecidos en este trabajo; es importante resaltar que esta da cuenta del posible final del universo al calcular la aceleración del factor de escala y, con base en su valor, se puede predecir si la expansión continuará o, por el contrario, se detendrá. De igual forma, da cuenta de la relación de la energía oscura con la explicación de la expansión acelerada del universo, en lugar de presentarse una desaceleración en la evolución de nuestro universo (Pérez, 2012).

El universo, en el marco del modelo cosmológico estándar, en la etapa más temprana de su evolución, fue dominado por radiación, para posteriormente dar pie a las etapas dominadas por la materia y, finalmente, por la materia oscura. Teniendo en cuenta que las ecuaciones de Friedman permiten realizar un análisis de estas etapas, es necesario recalcar de que parámetros dependen y como se pueden hallar:

Parámetros cosmológicos primarios

El parámetro de Hubble (H_0):

$$H \equiv \frac{\dot{R}}{R} \quad H_0 = \frac{\dot{R}(t_0)}{R(t_0)} \quad (2-6)$$

Que, como se mencionó anteriormente, da cuenta de la expansión del universo al relacionar el factor de escala y su derivada temporal.

La densidad de materia bariónica (Ω_b):

$$\Omega_b = \frac{\kappa \rho_m}{3H^2} \quad (2-7)$$

Esta constante relaciona el parámetro de Hubble y la densidad de materia que hay en una unidad de volumen en el universo; esta da cuenta de toda la materia bariónica, o materia de la que estamos hechos, contenida en el universo.

La densidad de radiación (Ω_r):

$$\Omega_r = \frac{\kappa \rho_r}{3H^2} \quad (2-8)$$

La densidad de radiación da cuenta de toda la energía en forma de radiación presente en la totalidad del universo, relacionando la constante de densidad de radiación con el parámetro de Hubble.

La densidad de energía oscura (Ω_Λ):

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2} \quad (2-9)$$

Esta constante da cuenta de la totalidad de la energía oscura del universo, al relacionar el valor de la constante cosmológica con el del parámetro de Hubble. En este sentido, el valor de esta constante da cuenta de la expansión acelerada de nuestro universo en la actualidad.

La constante de curvatura (Ω_k):

$$\Omega_k = -\frac{k}{a(t)^2 H^2} \quad (2-10)$$

Como su nombre lo indica, esta constante da cuenta de la curvatura del universo en general. Como se vio anteriormente, el valor de esta constante es prácticamente cero y, por dicha razón, se puede suponer que la geometría de nuestro universo tiene una curvatura nula a nivel global.

Con:

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4} \quad (2-11)$$

Esta constante es la misma que se utiliza en las ecuaciones de campo de Einstein, y de forma análoga, para simplificar los cálculos, el valor de la velocidad de la luz será la unidad.

Las constantes anteriormente descritas se pueden reducir de la siguiente manera:

$$\Omega_b + \Omega_r + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1 \quad (2-12)$$

Esta ecuación condensada de Friedmann da cuenta de la geometría del universo (parámetro de curvatura), la composición del universo al separar la materia y la radiación de la energía oscura, con lo cual se puede determinar el posible final del universo, teniendo en cuenta cual parámetro es mayor a los demás y, por ende, si habrá una aceleración o desaceleración en la expansión del universo. Esta forma se debe a que los parámetros cosmológicos se normalizan al dividir las diferentes densidades (materia bariónica, radiación, energía oscura y curvatura) sobre la densidad crítica; esto da cuenta del valor de densidad de materia-energía necesario para una curvatura plana. Al hacer esto, cuando se suman la totalidad de los parámetros, que representan proporciones, indican la geometría del universo con respecto a la presión crítica.

Por último, las escalas características de tiempo y distancia se expresan en términos del parámetro de Hubble:

$$t_H = \frac{1}{H}, \quad d_H = \frac{c}{H} \quad (2-13)$$

El orden de magnitud de estas cantidades se puede obtener expresando el parámetro de Hubble medido actualmente en las siguientes unidades:

$$H_0 = 100 h \text{ km/s/Mpc} \quad (2-14)$$

Con

$$h = 0,6688 \quad (2-15)$$

Teniendo en cuenta el parámetro de Hubble para nuestro universo, se propone que este surgió hace aproximadamente 13 mil millones de años, y como se mencionó, este se encontraba en un estado inicial de presión y temperatura extremadamente altas que dio pie al denominado Big Bang, a partir del cual se ha estado expandiendo de forma continua, lo que dio lugar a su enfriamiento. Esto permite reconstruir la evolución del universo en términos temporales o en términos de las temperaturas presentes durante cada una de estas etapas por las cuales atravesó el fluido cósmico.

2.1.2. Modelo cosmológico inhomogéneo e isotrópico

Para poder explicar la formación de estructuras a escalas galácticas en el modelo planteado de homogeneidad, es necesario proponer alguna forma que explique cómo se dan las pequeñas perturbaciones en la distribución de la densidad de la materia energía después del gran desacople. El tamaño de estas variaciones en la densidad de origen térmico está determinado por las anisotropías presentes en la radiación de fondo cósmico de microondas. Teniendo un espectro para las anisotropías, la formación de estructuras se puede estudiar a partir de un formalismo en el modelo homogéneo descrito en la métrica de FLRW (Pérez Sienes, 2020).

El problema del origen de las fluctuaciones radica en hallar algún mecanismo que dé como resultado dichas perturbaciones sin que sea de forma arbitraria. Una de las ideas más fuertes sobre las que se basa el modelo cosmológico estándar es la homogeneidad a gran escala, es una de las pruebas más contundentes y difíciles de confrontar con pruebas observacionales. Esta dificultad se da debido a que somos observadores situados en un único punto del espacio; de igual manera, se tiene la difícil tarea de realizar observaciones astronómicas de la evolución temporal de las variaciones espaciales.

Pero existen diferentes maneras de abordar pruebas de homogeneidad, algunas son:

1. La construcción de un modelo no homogéneo desde sus bases es una alternativa atractiva en la actualidad; un modelo basado en una solución más general desde la relatividad general presenta una diferencia marcada con respecto a los modelos FLRW mediante la observación.
2. La reconstrucción del modelo, dejando de lado la primera opción de plantear un modelo nuevo desde etapas tempranas del universo y realizar comparaciones de su evolución con la etapa actual, se proyecta en la construcción del modelo, planteando dichas observaciones como condiciones iniciales. Pero en la actualidad no se cuenta con las herramientas ideales para realizar las observaciones necesarias para el planteamiento del modelo cosmológico y, con base en estas, reconstruir el universo en su etapa inicial.

Las soluciones halladas a las ecuaciones de campo de Einstein que dan cuenta de la dinámica de un modelo de universo homogéneo e isotrópico limitan la aplicación de la teoría general de la relatividad a la descripción de nuestro universo. Teniendo en cuenta que las soluciones no homogéneas no han sido exploradas en mayor medida, a pesar de que estas presentan escenarios más complejos y menos simétricos. Por esta razón, en este trabajo se plantea el estudio de un modelo inhomogéneo e isotrópico planteado en la opción 1.

En este sentido, se tienen los modelos cosmológicos realistas, aquellos que buscan dar cuenta de un universo más parecido al nuestro; en este caso, se trabaja con el modelo de Lemaitre-Tolman-Bondi, un universo Inhomogéneo, pero que mantiene la isotropía. Es decir, se tiene una descripción realista del universo; esto, dentro del contexto del trabajo, se entiende por la visión de inhomogeneidad, pero manteniendo la isotropía en la descripción de la dinámica del universo. Entendiendo la inhomogeneidad e isotropía como (Herrera, 2021):

- Inhomogeneidad e Isotropía: Este supuesto también denomina las propiedades del Universo modelado como un gas ideal que permanece invariante ante transformaciones de rotación, pero existe una variación en las transformaciones de traslación de los marcos de referencia; es decir, cada punto posee las mismas propiedades a una distancia radial específica.

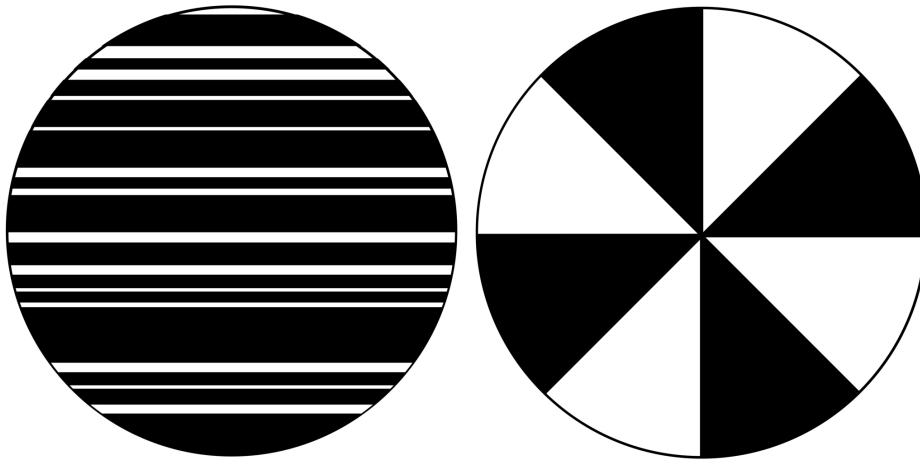


Figura 2-4: De forma alternativa en 2D, muestra la inhomogeneidad (lado izquierdo) y la isotropía (lado derecho), el primero da cuenta de la asimetría ante transformación espacial (traslación) y el segundo de simetría ante transformación rotacional (rotación), esta es la base del modelo de Lemaître-Tolman-Bondi. Elaboración propia mediante herramientas de procesamiento de texto.

El primer modelo no homogéneo como solución exacta a las ecuaciones de campo de Einstein fue hallado por Lemaitre en 1933 (Lemaître1997). Este fue estudiado por Tolman en 1934 y finalmente abordado por Bondi en 1947. Presentando diferentes formas de analizar la dinámica del universo, pero la de mayor importancia para el desarrollo de este trabajo son los modelos que trabajan la simetría esférica. Los modelos más estudiados de esta clase son los modelos de Lemaitre-Tolman-Bondi (LTB), aunque existen otros asociados a otros científicos. Para la construcción de este modelo cosmológico se tiene en cuenta:

1. El sistema es simétricamente esférico.
2. Las partículas se mueven por influencia de la gravedad y no se considera interacción electromagnética.
3. El sistema es libre de presión (se modela como polvo)
4. Se sigue el principio de Weyl.
5. La densidad de masa es finita en cada punto.

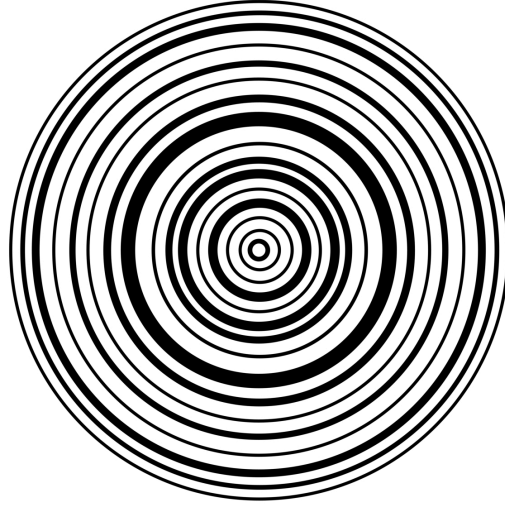


Figura 2-5: De forma alternativa en 2D, y teniendo en cuenta la simetría esférica, se muestra la inhomogeneidad e isotropía que describe el modelo de Lemaître-Tolman-Bondi. Elaboración propia mediante herramientas de procesamiento de texto.

La métrica asociada a este modelo de universo es una solución exacta a las ecuaciones de campo de Einstein con una simetría esférica y una distribución de materia-energía como polvo. Esta métrica depende de dos ecuaciones arbitrarias, lo que permite estudiar los efectos no lineales en la dinámica del universo de forma analítica y/o numérica. Este modelo cosmológico ha sido ampliamente estudiado para dar explicación a diferentes fenómenos físicos presentes en el universo sin la necesidad de recurrir a la energía oscura (GONZALEZ SANCHEZ, 2018).

Para la construcción de la métrica que describe un modelo de universo de LTB, se presenta de forma general en el anexo 3 la forma en que se puede deducir. No obstante, este proceso se puede hallar de forma más amplia en el texto escrito por Tolman (Tolman 1997), y tiene la siguiente forma:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \frac{[R']^2}{1 + 2E(r)} dr^2 - R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2-16)$$

Como se puede apreciar en la forma de la métrica, tiene un gran parecido a la del modelo cosmológico estándar, ya que ambos modelos tienen una simetría esférica y trabajan en estas mismas coordenadas. No obstante, se tienen ciertas diferencias en el factor de escala y la función que define la curvatura, que en este caso es $E(r)$ que representa la energía total y está dada en función del radio (Herrera et al., 2010) (Maqsood et al., 2022).

Por el cuarto parámetro mencionado anteriormente, se tiene el siguiente tensor de materia-energía:

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho(r, t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2-17)$$

Donde solamente se tiene en cuenta la densidad de materia $\rho(r, t)$ el cual tiene como unidades de medida J/m^3 . Debido a que se modela como polvo, no se tendría en cuenta la presión en el sistema.

Teniendo en cuenta la forma de la metrica establecida para este modelo, se tiene que, para estudiar la dinamica del universo, hay una facilidad al poder identificar las variaciones en su evolucion a nivel local, teniendo en cuenta que el parametro de curvatura presente en la primera coordenada espacial representa la energia total y, al variar en funcion del radio, se puede estudiar de manera especifica la evolucion de la inhomogeneidad en la distribucion de la densidad de materia-energia, aunque se tenga una diferencia. Es decir, analizar la evolucion de un vacio cosmico que se encuentra rodeado de secciones de alta densidad de materia-energia. Para este modelo, se tienen las siguientes ecuaciones de Friedman con las que se puede estudiar lo anteriormente mencionado. Se tendrán en cuenta las ecuaciones halladas por Orduz (2012), ya que, por practicidad, llega a una solución que facilita su estudio. No obstante, en el anexo 3 se presenta una solución diferente de una forma alternativa:

Primera ecuación de Friedmann o factor de expansión de Hubble:

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{F(r)}{R^3} + \frac{8}{3}\pi G\rho_\Lambda - \frac{k(r)}{R^2} \quad (2-18)$$

De forma análoga a las ecuaciones de Friedmann para el modelo cosmológico estándar, la primera ecuación de Friedman da cuenta de la expansión del universo, pero en este caso se tienen dos funciones arbitrarias (Orduz, 2012); la primera es $F(r)$, que da cuenta de la distribución de materia-energía en el universo, y $k(r)$, que representa el factor de curvatura, que en este caso se tiene en función del radio, teniendo en cuenta las anisotropías y como la densidad de materia-energía puede variar en función de la distancia (Tolman, 1997).

El parámetro de Hubble se expresa de la siguiente manera:

$$H(t) \equiv \frac{\dot{R}}{R} \quad (2-19)$$

Relacionando el factor de escala del universo y su derivada temporal, se obtiene el valor de la expansión del universo. Esta relación será de utilidad en secciones posteriores para la realización de diferentes análisis y la obtención de otros parámetros que dependen de este (Célérier, 2012).

Segunda ecuación de Friedmann:

$$\frac{2}{3}\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{1}{3}\frac{\ddot{R}'}{R'} = -\frac{4}{3}\pi G(\rho_b - 2\rho_\Lambda) \quad (2-20)$$

La segunda ecuación de Friedmann expresa la aceleración o desaceleración en la expansión del universo, teniendo presente que este modelo tiene en cuenta una posible diferencia de densidad materia-energía en función del radio. Con esto se puede determinar si una región en concreto se está expandiendo o contrayendo de forma local. Esta ecuación también nos ayuda en la obtención del parámetro de desaceleración que expresa el valor de la desaceleración del universo (d'Inverno, 1992).

Parámetros cosmológicos primarios:

En esta pequeña sección es necesario expresar la forma en la que se hallaran los parámetros de densidad de materia total y la densidad de materia oscura, debido a que dependen de valores observacionales y serán usados en el siguiente capítulo.

Para la obtención de estos parámetros, se tiene en cuenta:

La densidad de materia (Ω_m):

$$\Omega_m = \frac{\kappa \rho_m}{3H^2} \quad (2-21)$$

$$\rho_m = \Omega_m \rho_c \quad (2-22)$$

Para hallar el valor de la densidad de materia que se usara más adelante, se tiene en cuenta su relación entre la presión crítica y el parámetro de densidad de materia total. Se decide acoplar el parámetro de densidad de materia bariónica y de radiación para facilitar la toma de datos en el siguiente capítulo.

La constante cosmológica (Ω_Λ):

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2} \quad (2-23)$$

$$\rho_\Lambda = \Omega_\Lambda \rho_c \quad (2-24)$$

Para la obtención de la densidad de energía oscura, se tiene en cuenta la relación entre el parámetro de densidad de energía oscura y la densidad crítica del universo.

Teniendo en cuenta que la presión crítica del universo se halla con:

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (2-25)$$

Esta ecuación relaciona el parámetro de Hubble con la constante k .

Estos valores son de vital importancia para la obtención de los diferentes parámetros y el parámetro de Hubble que se llevara a cabo en el siguiente capítulo, pero no se pueden obtener de manera teórica, por lo cual se recurre a los datos observacionales que registran y compilan su valor, y mediante las relaciones matemáticas mencionadas.

3 Capítulo 3

En este capítulo se presenta un comparativo de las métricas del modelo cosmológico estándar y el modelo de universo LTB, en función de cada una de las coordenadas. De igual forma, se proponen tres modelos que cuentan con tres posibles geometrías que describen el espacio-tiempo con una distribución de materia-energía fija; la primera es la famosa silla de montar, la segunda geometría es la de una dona y, finalmente, se tiene la geometría de lo que se puede asemejar a una cubeta de huevos. Para estas tres geometrías se plantea una ecuación auxiliar para cada ecuación arbitraria que modela la curvatura del espacio-tiempo. Esto con el fin de estudiar el comportamiento de forma numérica de la dinámica del factor de escala y sus derivadas para hallar los diferentes parámetros cosmológicos, el tiempo propio, la constante de desaceleración y la distancia propia de cada modelo. Finalmente, se realiza un análisis de los datos obtenidos para dar cuenta de la dinámica de los diferentes modelos de espacio-tiempo, manteniendo una distribución de materia-energía fija.

3.1. Comparativo de Modelos cosmológicos

En esta primera parte se realiza una comparación de las componentes de la métrica del modelo cosmológico estándar y el modelo de universo LTB. Teniendo en cuenta que ambos comparten una simetría esférica y la forma base de las métricas es muy similar, gracias a que el modelo de universo LTB plantea la presencia de inhomogeneidad, se tienen unas diferencias marcadas en las secciones espaciales de las métricas y el tensor métrico, ya que este ya no varía únicamente en función del tiempo; ahora lo hace también en función del radio. No obstante, una de las diferencias más notorias es la concepción de la distribución de energía-materia, ya que en el modelo cosmológico estándar se plantea la de un fluido perfecto y, aunque el modelo LTB sigue esta línea, se decanta por la descripción en forma de polvo. Teniendo estas diferencias en mente, las métricas de los diferentes modelos son:

- Modelo Cosmológico Estándar

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \frac{R^2(t) dr^2}{1 - kr^2} - R^2(t)r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (3-1)$$

Como se ha mencionado a lo largo de este trabajo, el estudio del modelo cosmológico estándar es ampliamente abordado y da cuenta de una representación fiel de muchos de los fenómenos obser-

vados a nivel astronómico y cosmológico. Modelando el universo como un gas ideal, manteniendo una simetría esférica y siguiendo el principio cosmológico y el principio de Weyl.

- Moldeo de universo LTB

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \frac{[R'(t, r)]^2}{1 + 2E(r)} dr^2 - R(t, r)^2 d\theta^2 - R(t, r)^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (3-2)$$

La métrica de Lemaitre-Tolman-Bondi sigue la línea de la modelación ideal del universo, pero, como polvo, esto quiere decir que no tiene en cuenta la presión. En consonancia con el modelo cosmológico estándar, mantiene una simetría esférica, siguiendo el principio de Weyl, pero rompiendo el principio cosmológico; es decir, el universo modelado es isótropico, pero no homogéneo. Teniendo en cuenta las características mencionadas de cada una de las métricas a comparar, se hace necesario mencionar que ambos modelos son soluciones exactas a las ecuaciones de campo, mantienen la simetría esférica y se trabajan en estas mismas coordenadas. No obstante, se observa una diferencia en la modelación de la distribución de materia-energía. Teniendo el comparativo de cada uno de sus factores, se tiene:

Tabla 3-1: Exhibe el comparativo de las métricas estudiadas, teniendo en cuenta los factores que acompañan a cada parte de las métricas, teniendo en cuenta que ambas métricas manejan una simetría esférica.

Coordenada	Modelo FLRW	Modelo LTB	Observaciones
dt^2	c^2	c^2	La coordenada temporal se mantiene igual para ambas métricas.
dr^2	$\frac{R^2(t)}{1 - kr^2}$	$\frac{R(t, r)^2}{1 + 2E(r)}$	La primera coordenada espacial presenta la diferencia en el numerador, debido a la primera derivada del factor de escala en la métrica LTB (R'). En el denominador, el modelo estándar tiene la constante de curvatura multiplicada por la coordenada radial (kr^2), mientras que en el modelo LTB la curvatura está intrínseca en la función arbitraria $E(r)$. Aquí se considera la variación radial en la dinámica del universo.
$d\theta^2$	$R(t)^2 r^2$	$R(t, r)^2$	Caso análogo al anterior. En el modelo estándar, el factor de escala solo depende del tiempo, por lo que es necesario multiplicarlo por la coordenada radial. En cambio, el modelo LTB ya incluye la coordenada radial de forma intrínseca en su factor de escala, por lo que no requiere el término adicional.
$d\phi^2$	$R^2(t) r^2 \sin^2 \theta$	$R(t, r)^2 \sin^2 \theta$	Esta coordenada muestra una forma similar a la anterior. Dado que el modelo estándar no considera una variación radial intrínseca en su factor de escala, se compensa multiplicando por la coordenada radial para mantener la consistencia geométrica.

Cabe resaltar que el modelo de Lemaitre-Tolman-Bondi trata de explicar la expansión del universo mediante la geometría y la presencia de inhomogeneidades, ya que en este modelo no se tiene en

cuenta la presión. De igual forma, es de gran importancia mencionar que el modelo de capas que propone la métrica de LTB ofrece una descripción a nivel local del universo, teniendo en cuenta como este puede evolucionar dependiendo de la densidad de materia-energía. En esta línea de pensamiento, se plantea el estudio de la evolución de un modelo que sigue las bases del modelo LTB, pero cuenta con ciertas variaciones en la distribución de materia-energía y la geometría del espacio-tiempo.

3.2. Creación de INNIVERSE

Con un nombre llamativo se tiene la interfaz que se quiere crear; este nombre hace referencia a los modelos que se trabajaran para los diferentes analisis, es decir, los modelos inhomogeneos del universo. Uniendo las palabras en ingles de inhomogeneo (inhomogeneous) y universo (universe), nace el nombre de INNIVERSE. Esta interfaz se construye en Python, un lenguaje de programación que facilita la creación de interfaces, la solución y graficación de funciones para el análisis de datos. Esto, gracias a las librerías que se manejan al interior de este lenguaje de programación. Las librerías utilizadas para la construcción de INNIVERSE son:

- Pillow versión 10.0.0
- Matplotlib versión 3.7.0
- Numpy versión 1.24.0
- Scipy versión 1.10.0
- Pyinstaller versión 6.0.0

Con base en las librerías se establecen los requisitos mínimos para que el programa funcione de forma adecuada:

- Sistema Operativo: Windows 7 o superior (64-bit)
- Procesador: 1.0 GHz o superior
- RAM: 2 GB mínimo (4 GB recomendado)
- Espacio en disco: 500 MB libre
- Resolución de pantalla: 1024 x 768 (recomendado 1600 x 800)

Estos requisitos son soportados por los computadores que se encuentran en la sala de computo del departamento de Física de la Universidad Pedagógica Nacional.

Si bien hasta este momento se ha realizado un análisis riguroso en cuanto al desarrollo desde la relatividad general, pasando por las ecuaciones de campo y sus partes, revisando pruebas observacionales, y pasando por el modelo cosmológico estandar hasta llegar al modelo de Lemaître-Tolman-Bondi, es necesario resaltar que toda la información recopilada sirve como insumo para gran parte de la interfaz planteada, pero no para su construcción total. Para esta primera fase se tiene un orden análogo y secuencial como el abordado en el presente trabajo, contando con las siguientes secciones:

- Relatividad General
- Ecuaciones de Campo
- Pruebas Observacionales
- Modelos Cosmologicos
- Modelo Cosmologico Estandar
- Modelo Cosmologico LTB
- Comparativo entre modelos
- Graficacion

Mantener este orden en las temáticas abordadas presenta un hilo claro y progresivo en el estudio de los temas necesarios para la realización de un análisis físico y geométrico de un modelo de universo realista planteado para una segunda fase.

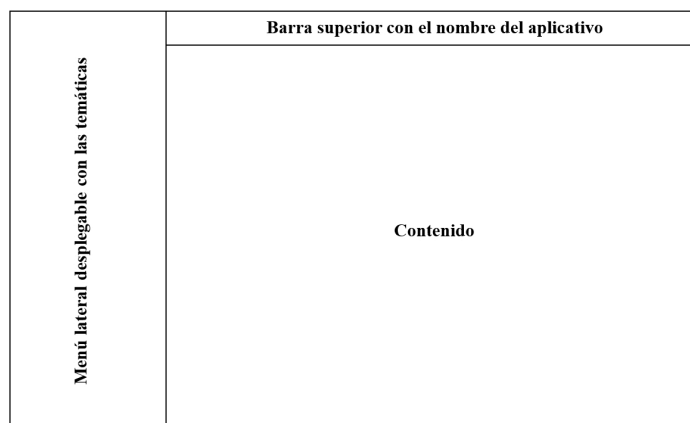


Figura 3-1: De forma ilustrativa se plantea la distribución para la construcción de la interfaz INNIVERSE. Elaboración propia mediante herramientas de procesamiento de texto.

La primera sección se centra en los postulados de la Relatividad General; la segunda se enfoca en las ecuaciones de campo de Einstein, su consolidación y cada una de sus partes; la tercera

sección muestra las pruebas observacionales o los tests que se tienen para los diferentes modelos cosmologicos; en la cuarta seccion se tienen los tipos de modelos con los cuales se estudia la dinamica del universo; la quinta sección muestra el modelo cosmologico estandar con su metrica y los diferentes parametros cosmologicos y curvaturas que se tienen para el estudio de la evolucion del universo; en la sexta sección se tiene el modelo cosmologico de Lemaître-Tolman-Bondi, con su metrica y la forma en la que se calculan los diferentes parametros cosmologicos y, finalmente, en una septima y ultima seccion se tiene el estudio de una serie de modelos definidos para la metrica de Lemaître-Tolman-Bondi que se definen en una segunda fase de la construccion de esta interfaz.

No obstante, para esta ultima seccion se tendra una distribucion especifica que muestre, en primera instancia, el modelo que se va a trabajar; esto es teniendo en cuenta la geometria del espacio tiempo y las funciones auxiliares que se establecen; posteriormente, se tendra la graficacion del comparativo de la evolucion del factor de escala para las diferentes geometrias. Después se tiene el factor de escala y su derivada para terminar con una tabla de datos que expone el valor de los diferentes parametros en los tiempos establecidos. De esta manera, con los valores obtenidos del factor de escala y su derivada se halla la constante de expansion de Hubble y con esta se halla el valor de los diferentes parametros cosmologicos.

Menú lateral desplegable con las temáticas	Barra superior con el nombre del aplicativo
	<p>Modelo a estudiar</p> <p>Ecuación que describe la geometría del espacio-tiempo.</p> <p>Funciones Auxiliares establecidas.</p> <p>Ecuación del factor de escala a estudiar.</p> <p>Modelo 3D de la geometría del espacio tiempo.</p> <p>Factor de escala para las tres geometrias posibles.</p> <p>Factor de escala para la geometría actual.</p> <p>Derivada del factor de escala para la geometría actual.</p> <p>Tabla de datos del valor de los parámetros cosmológicos para este modelo en los diferentes tiempos ($t = 0, t = 5, t = 10$ y $t = 13.5$).</p>

Figura 3-2: De forma ilustrativa se plantea la distribucion de la sección de graficación del aplicativo INNIVERSE. Elaboración propia mediante herramientas de procesamiento de texto.

Como se mencionó anteriormente, se plantea la construccion de esta interfaz siguiendo el hilo conductor establecido en este trabajo, presentando la informacion de forma ordenada y sintetica, lo cual representa gran parte de la interfaz. No obstante, para su consolidacion final se debe plantear una serie de modelos a trabajar que cuenten con una geometria del espacio-tiempo, funciones auxiliares y la determinacion del factor de escala para cada modelo; esto se condensara en la seccion final del aplicativo.

3.2.1. Fases de la construcción de INNIVERSE

Para su construcción se tuvieron en cuenta las siguientes fases que tienen en cuenta tanto la construcción del documento como la construcción de INNIVERSE:

Tabla 3-2: Muestra las fases que se llevaron a cabo para la construcción de la interfaz INNIVERSE.

Fase	Objetivo
1	Recolección de datos referentes a la Relatividad General, Ecuaciones de Campo de Einstein y sus partes, Pruebas observacionales, Tipos de modelos cosmológicos, modelo cosmológico estándar y los parámetros cosmológicos, modelo cosmológico LTB y los parámetros cosmológicos
2	Construcción de la base o cascarón de la interfaz INNIVERSE
3	Definición de los modelos a trabajar junto a la estimación del valor de la densidad de materia total y la densidad de energía oscura.
4	Construcción de la sección final de la interfaz INNIVERSE para el cálculo de los diferentes parámetros para cada modelo a estudiar.
5	Graficación y obtención de los valores para los diferentes parámetros para la realización del análisis físico y geométrico de la dinámica de los diferentes modelos.

Tal y como se muestra en la tabla se tiene un total de 5 fases, de las cuales 2 son específicamente acerca de la construcción de INNIVERSE (fase 2 y 4), las demás fases responden a la búsqueda y recopilación de información, construcción de modelos a estudiar y la interpretación de los datos obtenidos. De esta manera planteo la metodología de trabajo para la construcción final del aplicativo INNIVERSE.

Aunque la realización del análisis físico y geométrico es el objetivo principal de la creación de esta interfaz, también se tiene en cuenta que uno de los intereses es el acercamiento al contexto cosmológico de los estudiantes de la licenciatura en Física de la Universidad Pedagógica Nacional. Se tiene una serie de momentos en los cuales se ve prudente hacer uso de la interfaz INNIVERSE, de forma autónoma por el estudiante o por el docente en las asignaturas de relatividad general y agujeros negros y cosmología. Debido a que la construcción de la interfaz sigue una estructura progresiva que trata temas vistos en dichos espacios académicos. Por esta razón se sugiere usar INNIVERSE al comenzar el ciclo de profundización y tomar alguno de los cursos mencionados (Véase el anexo 5).

3.2.2. Modelos a trabajar

Para la consolidación de la fase dos de la construcción de la interfaz INNIVERSE, se establecen una serie de modelos que mantienen tanto la estructura como las bases de la construcción del modelo

LTB; es decir, se maneja la misma métrica, se mantiene la simetría esférica, la inhomogeneidad e isotropía (cada punto tiene una densidad de materia-energía finita), la concepción del tensor de energía-materia como polvo y el principio de Weyl. Sin embargo, se tienen variaciones en la distribución de materia-energía y la geometría del espacio tiempo. Se tiene una distribución de materia energía definida por la función Ae^{-r} , es decir, una densidad que decae en función del radio:

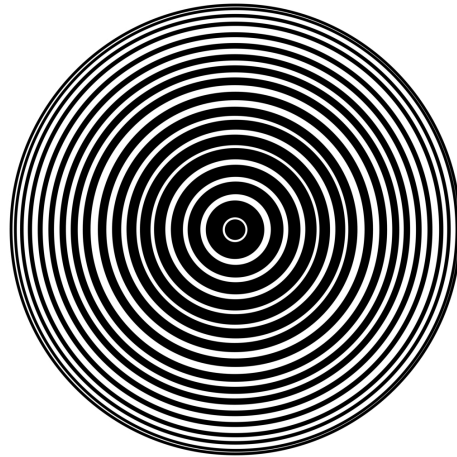


Figura 3-3: De forma alternativa en 2D, y teniendo en cuenta la simetría esférica, se muestra la inhomogeneidad e isotropía teniendo en cuenta la distribución de materia-energía establecida para los modelos a estudiar. Elaboración propia mediante herramientas de procesamiento de texto.

Con base en esta distribución de materia-energía se hará un estudio sobre el comportamiento de la evolución de tres posibles universos con una geometría del espacio-tiempo altamente ideal. Estos modelos son:

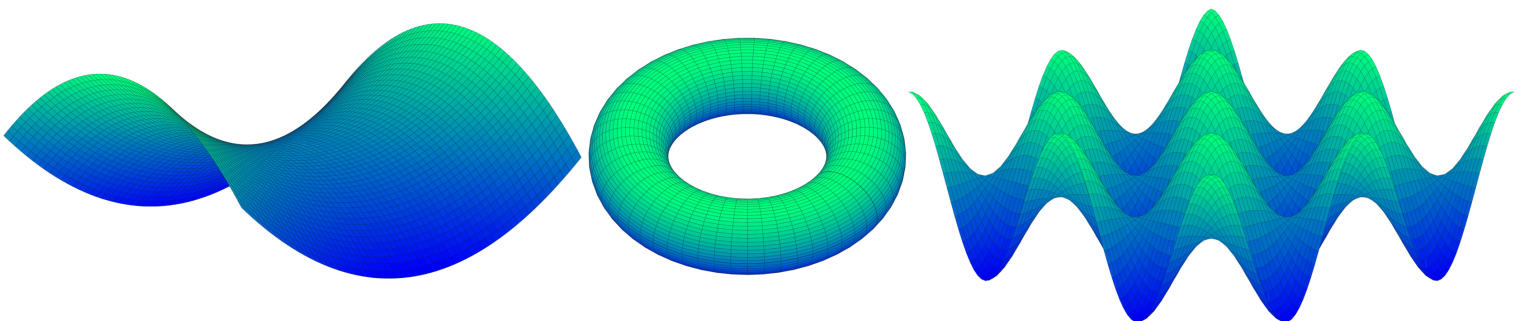


Figura 3-4: Muestra las tres geometrías a trabajar, la primera (lado izquierdo) es la famosa silla de montar, la segunda (centro) es un toroide o dona, y la tercera geometría se asemeja a una cubeta de huevos (lado izquierdo). Elaboración propia realizada mediante el software Matlab.

Para estos modelos, debido a que, por su geometría base, serán universos abiertos, esto quiere decir que, aunque la distribución muestra una disminución exponencial, la geometría del espacio tiempo se mantendrá invariante.

Con base en la distribución de materia-energía y las geometrías establecidas, se tiene la primera ecuación de Friedmann proveniente del modelo LTB:

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{F(r)}{R^3} + \frac{8}{3}\pi G\rho_\Lambda - \frac{k(r)}{R^2} \quad (3-3)$$

Como se mencionó anteriormente, esta ecuación será el eje dorsal de estudio de este trabajo, debido a que también da cuenta del parámetro de Hubble y con el cual se puede hallar el valor de los diferentes parámetros cosmológicos. De forma específica, se trabajará con la siguiente simplificación:

$$\dot{R} = \sqrt{\frac{F(r)}{R} + \frac{8}{3}\pi G\rho_\Lambda R^2 - k(r)} \quad (3-4)$$

Una vez que se tienen los modelos geométricos a estudiar y la forma de la derivada del factor de escala para este tipo de modelos, se deben definir las diferentes funciones auxiliares que den cuenta de la curvatura presente, teniendo en cuenta que estas son hipótesis geométricas con base en las diferentes geometrías. Para poder hallar el valor numérico del factor de escala y su derivada mediante métodos numéricos en la interfaz INNIVERSE, y de esta manera hallar la constante de expansión de Hubble y determinar el valor de los diferentes parámetros que ayuden en el análisis físico y geométrico de la dinámica de estos modelos.

3.2.3. Graficación de los parámetros cosmológicos para los diferentes modelos

Con base en las tres geometrías del espacio-tiempo establecidas: la primera es la silla de montar, la segunda es en forma de dona y la tercera se asemeja a una cubeta de huevos. Para cada uno de los casos se plantean ecuaciones auxiliares que dan cuenta de la geometría del espacio-tiempo y el factor de escala, teniendo en cuenta que la distribución de materia-energía es igual en los tres modelos:

Recordando que en la ecuación de la métrica a trabajar se tienen las dos funciones arbitrarias para dar cuenta de las condiciones de contorno de los casos a estudiar:

$$F(r) = Ae^{-r} \quad (3-5)$$

Representa la distribución de materia-energía que curva el espacio-tiempo en función del radio. Para este caso, la constante A será la unidad.

$$k(r) = Bf(r) \quad (3-6)$$

Representa la geometría del espacio tiempo en función del radio para los diferentes modelos, y la constante B tendrá tres posibles valores (1, -1 o 0), los cuales darán cuenta del tipo de curvatura que se podría tener; es decir, curvatura positiva, curvatura negativa o curvatura nula.

Al momento de determinar cada una de estas funciones, se tuvo en cuenta la forma particular del espacio-tiempo a trabajar, ya que la idea es que den cuenta de forma concreta, sencilla, pero precisa de la geometría del modelo seleccionado. Para cada uno de los casos, se tiene la ecuación que representa la geometría del espacio-tiempo, las funciones auxiliares de distribución de materia-energía y la ecuación de la derivada temporal del factor de escala:

Geometría 1: Modelo de silla de montar

$$z = x^2 + y^2 \quad (3-7)$$

Funciones auxiliares:

$$F(r) = e^{-r} \quad (3-8)$$

$$k(r) = Br^n \quad (3-9)$$

Se tiene en cuenta que la función $F(r)$ que describe la distribución de materia-energía ya esta establecida y la función que describe la curvatura $k(r)$ da cuenta de la geometría a estudiar. Además, se establece el valor de n como la unidad para facilitar el estudio de este modelo.

Factor de Escala:

$$\dot{R} = \sqrt{\frac{e^{-r}}{R} + \frac{8}{3}\pi G\rho_\Lambda R^2 - Br} \quad (3-10)$$

Este será el factor de escala que se estudiará al variar los valores de la constante B en los diferentes tiempos establecidos.

Geometría 2: Modelo de Dona

$$x = (R + r \cos v) \cos u, \quad y = (R + r \cos v) \sin u, \quad z = r \sin v \quad (3-11)$$

Esta ecuación describe la construcción de la geometría en 3D

Funciones auxiliares:

$$\dot{R} = \sqrt{\frac{e^{-r}}{R} + \frac{8}{3}\pi G\rho_\Lambda R^2 - Br} \quad (3-12)$$

$$k(r) = \frac{1}{r} \quad (3-13)$$

Se tiene en cuenta que la función $F(r)$ que describe la distribución de materia-energía ya esta establecida y la función que describe la curvatura $k(r)$ da cuenta de la geometría a estudiar.

Factor de Escala:

$$\dot{R} = \sqrt{\frac{e^{-r}}{R} + \frac{8}{3}\pi G\rho_{\Lambda}R^2 - \frac{B}{r}} \quad (3-14)$$

Este será el factor de escala que se estudiará al variar los valores de la constante B en los diferentes tiempos establecidos.

Geometría 3: Modelo de cubeta de huevos

$$z = \cos(x) \cos(y) \quad (3-15)$$

Esta ecuación describe la construcción de la geometría en 3D

Funciones auxiliares:

$$\dot{R} = \sqrt{\frac{e^{-r}}{R} + \frac{8}{3}\pi G\rho_{\Lambda}R^2 - Br} \quad (3-16)$$

$$k(r) = B \cos(r) \quad (3-17)$$

Se tiene en cuenta que la función $F(r)$ que describe la distribución de materia-energía ya esta establecida y la función que describe la curvatura $k(r)$ da cuenta de la geometría a estudiar.

Factor de Escala:

$$\dot{R} = \sqrt{\frac{e^{-r}}{R} + \frac{8}{3}\pi G\rho_{\Lambda}R^2 - B \cos(r)} \quad (3-18)$$

Este será el factor de escala que se estudiará al variar los valores de la constante B en los diferentes tiempos establecidos.

Se eligió cada una de estas formas geométricas para los modelos de universo debido a que son modelos abiertos, pero su geometría tiene una diferencia marcada; esto es para dar cuenta de la importancia de la geometría del espacio-tiempo y de cómo las funciones que las describen restringen la curvatura que se puede tener.

Una vez que se tienen establecidos cada uno de los modelos a trabajar, son llevados a la interfaz INNIVERSE para que, con ayuda de las diferentes librerías que facilitan la solución de ecuaciones diferenciales, su graficación y operación de los resultados, se pueda obtener el valor de los diferentes parámetros cosmológicos que permiten realizar el análisis físico y geométrico.

3.2.4. Cálculo numérico de los parámetros cosmológicos

Para el cálculo de los parámetros cosmológicos se hará uso de la interfaz INNIVERSE; no obstante, antes de poder realizar el cálculo numérico, se debe definir el valor de dos densidades; estas son: la densidad de materia total y la densidad de energía oscura. Para su calculo se hace uso del valor estimado por las observaciones astronómicas para el parametro de densidad de materia total y el parametro de densidad de energia oscura, de la misión Planck realizada en el año 2018 (Aghanim et al., 2020). Por esta razón, para este trabajo se asume que la densidad de materia total y la densidad de energía oscura para los diferentes modelos tienen el mismo valor que las obtenidas para nuestro universo.

Como se mencionó anteriormente, se asume que el modelo tiene la misma densidad de materia total que nuestro universo actual, la cual es (anexo 4):

$$\rho_m = 2,6963 \times 10^{-27} \text{ kg/m}^3 \quad (3-19)$$

Que da cuenta del contenido total de materia bariónica y radiación en una unidad de volumen del universo.

La constante de energía oscura (Ω_Λ):

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2} \quad (3-20)$$

De igual forma, se asume que el modelo tiene la misma densidad de energía oscura que nuestro universo actual, la cual es (anexo 4):

$$\rho_\Lambda = 5,7141 \times 10^{-27} \text{ kg/m}^3 \quad (3-21)$$

La cual da cuenta de la densidad de energía oscura, que representa una presión negativa y de repulsión.

También se tiene en cuenta el parámetro de curvatura (Ω_k):

$$\Omega_k = -\frac{k}{R(t)^2 H^2} \quad (3-22)$$

Que ayuda a determinar el valor de la curvatura de los diferentes modelos.

De igual forma, se ve necesario determinar la forma matemática y las unidades de medida del parámetro de Hubble para determinar las unidades de medida que se trabajaran de aquí en adelante:

$$H_0 = \frac{\dot{R}(t_0)}{R(t_0)} \approx 70 \text{ km/s/Mpc} \quad (3-23)$$

Siendo así, la unidad de medida del tiempo son los segundos y la unidad de distancia son los Mpc. Con los valores estimados para las densidades de materia total y energía oscura se tienen los elementos necesarios para realizar los calculos numericos para determinar el valor de los diferentes parametros cosmologicos. De esta forma, Inniverse presenta los valores estimados para diferentes

parámetros cosmológicos referentes a la dinámica de los modelos de universo mencionados. El aplicativo muestra el valor del factor de escala, el parámetro de Hubble, el parámetro de densidad de materia total, el parámetro de densidad de energía oscura, el parámetro de densidad de curvatura, la edad y el tamaño del universo, mostrando la escala de unidades. Todo esto sirve para la realización de los diferentes análisis para cada uno de los modelos.

Para hallar el valor del factor de escala y su derivada, se hace uso de un método numérico con el fin de mostrar una solución aproximada y, aparte, dar una pincelada de cómo se podría realizar al agregar más variables. De igual forma, se tiene en cuenta su facilidad para realizar cambios, en este caso con las funciones auxiliares que representan la densidad de materia-energía y la geometría del espacio-tiempo, abriendo la puerta a una gran posibilidad de modelos de universo a estudiar. El método utilizado es el de Runge-Kutta; este es un algoritmo numérico adaptativo que se usa para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias y presenta una ventaja debido a que tiene una variación del paso adaptativa, reduciéndolo en zonas complejas y aumentándolo en zonas estables; esto permite que sea eficiente y no requiera un gasto excesivo a nivel de componentes computacionales.

Gracias a que INNIVERSE se creó en el lenguaje de programación Python, se puede representar de forma gráfica la evolución del factor de escala y su derivada temporal; también se presenta en una tabla el valor de los parámetros cosmológicos anteriormente mencionados. Para esto, se tiene una serie de gráficas y tablas que recopilan dichos datos para los modelos mencionados que se extraen directamente de la interfaz.

3.2.5. Resultados de los modelos estudiados

Graficas para los modelos estudiados

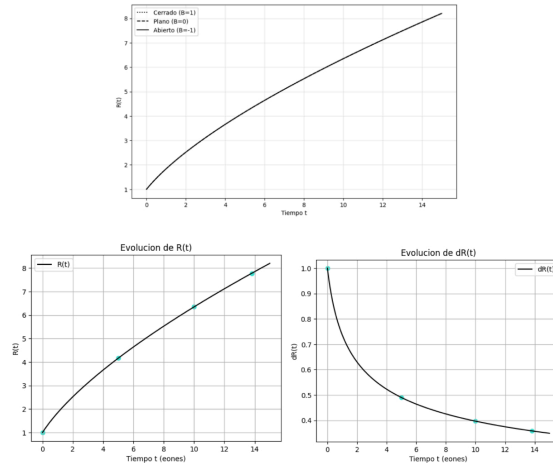


Figura 3-5: Muestra (parte superior) la evolución del factor de escala para los tres posibles valores de la función de curvatura, en la parte inferior se tiene la evolución del parámetro de escala y su derivada en función del tiempo (lado izquierdo y derecho respectivamente) con un valor de la función de curvatura positivo para la geometría 1. Elaboración propia mediante interfaz INNIVERSE.

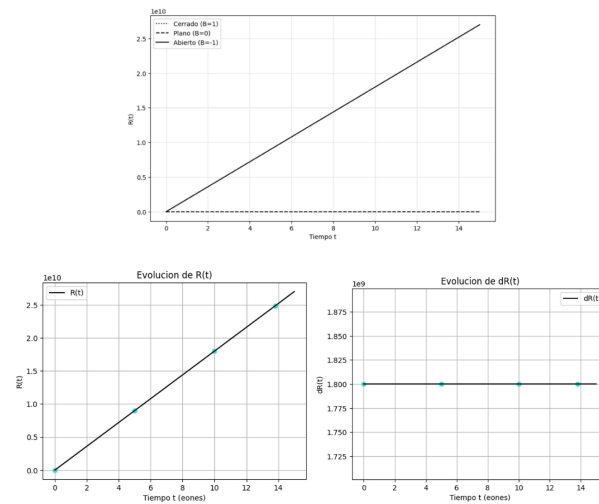


Figura 3-6: Muestra (parte superior) la evolución del factor de escala para los tres posibles valores de la función de curvatura, en la parte inferior se tiene la evolución del parámetro de escala y su derivada en función del tiempo (lado izquierdo y derecho respectivamente) con un valor de la función de curvatura positivo para la geometría 2. Elaboración propia mediante interfaz INNIVERSE.

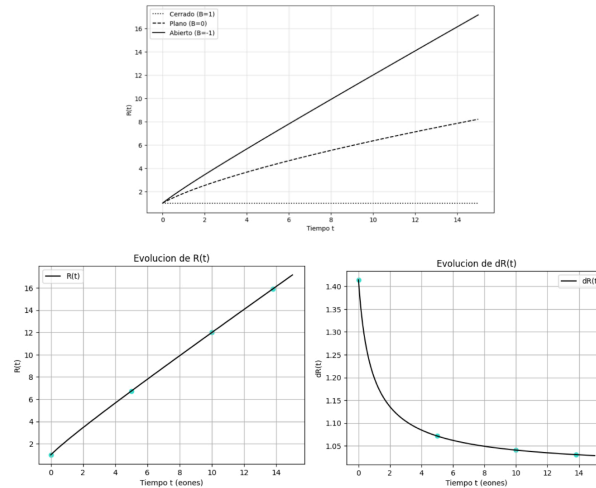


Figura 3-7: Muestra (parte superior) la evolución del factor de escala para los tres posibles valores de la función de curvatura, en la parte inferior se tiene la evolución del parámetro de escala y su derivada en función del tiempo (lado izquierdo y derecho respectivamente) con un valor de la función de curvatura negativo para la geometría 3. Elaboración propia mediante interfaz INNIVERSE.

La obtención de las gráficas se hace por medio del uso de Inniverse; este proceso utiliza un método numérico para la graficación del parámetro de escala y su derivada. Este es el método de Runge-Kutta que se usa de forma directa en Python gracias a sus diferentes librerías.

Con los valores obtenidos para el factor de escala y su derivada, se halla un estimado para los diferentes parámetros cosmológicos que dependen del parámetro de Hubble. Estos son: el parámetro de densidad de materia total, el parámetro de densidad de energía oscura, el parámetro de densidad de curvatura, la edad y el tamaño del universo para los tiempos 0, 5, 10 y 13.8. Estos datos se compilaron en las siguientes tablas:

Tablas para los diferentes modelos

Recopilación del valor de los parámetros cosmológicos primarios para los diferentes modelos en los tiempos establecidos de la interfaz INNIVERSE:

Tabla 3-3: Muestra los datos obtenidos para el factor de escala, la constante de Hubble, el parámetro de densidad de materia total, el parámetro de densidad de energía oscura, el parámetro de curvatura, la edad y el tamaño del universo; teniendo en cuenta las diferentes curvaturas que se puedan tener (positivas, negativas o nulas) para un tiempo $t=0$.

Curvatura	Modelo Geom.	$R(0)$	$H(0)$ ($\times 10^{-19}$)	Ω_m ($\times 10^3$)	Ω_Λ ($\times 10^{-13}$)	Ω_k ($\times 10^{29}$)	$t_{H(0)}$ ($\times 10^{19}$)	$D_{H(0)}$ ($\times 10^{26}$)
Positiva	1	1	3,086	0,015	0,003	-0,176	0,324	0,097
	2	-	-	-	-	-	-	-
	3	-	-	-	-	-	-	-
Nula	1	1	3,086	0,015	0,003	-0,176	0,324	0,097
	2	1	3,086	0,015	0,003	-0,176	0,324	0,097
	3	1	3,086	0,015	0,003	-0,176	0,324	0,097
Negativa	1	1	3,086	0,015	0,003	-0,176	0,324	0,097
	2	1	5555177,7	$4,885 \times 10^{-21}$	$1,080 \times 10^{-21}$	$-5,435 \times 10^{-20}$	$1,800 \times 10^{-10}$	$5,430 \times 10^{-11}$
	3	1	4,364	0,007	0,001	-0,088	0,229	0,068

Tabla 3-4: Muestra los datos obtenidos para el factor de escala, la constante de Hubble, el parámetro de densidad de materia total, el parámetro de densidad de energía oscura, el parámetro de curvatura, la edad y el tamaño del universo; teniendo en cuenta las diferentes curvaturas que se puedan tener (positivas, negativas o nulas) para un tiempo $t=5$.

Curvatura	Modelo Geom.	$R(5)$	$H(5)$ ($\times 10^{-19}$)	Ω_m ($\times 10^3$)	Ω_Λ ($\times 10^{-13}$)	Ω_k ($\times 10^{29}$)	$t_{H(5)}$ ($\times 10^{19}$)	$D_{H(5)}$ ($\times 10^{26}$)
Positiva	1	4,165	0,362	1,144	0,252	-0,733	2,754	0,826
	2	-	-	-	-	-	-	-
	3	-	-	-	-	-	-	-
Nula	1	4,165	0,362	1,144	0,252	-0,733	2,754	0,826
	2	4,165	0,362	1,144	0,252	-0,733	2,754	0,826
	3	4,165	0,362	1,144	0,252	-0,733	2,754	0,826
Negativa	1	4,165	0,362	1,144	0,252	-0,733	2,754	0,826
	2	9000612063,4	0,617	0,395	0,087	$-5,435 \cdot 10^{-20}$	1,620	0,486
	3	6,732	0,491	0,624	0,138	-0,153	2,035	0,610

Tabla 3-5: Muestra los datos obtenidos para el factor de escala, la constante de Hubble, el parámetro de densidad de materia total, el parámetro de densidad de energía oscura, el parámetro de curvatura, la edad y el tamaño del universo; teniendo en cuenta las diferentes curvaturas que se puedan tener (positivas, negativas o nulas) para un tiempo $t=10$.

Curvatura	Mod. Geom.	$R(10)$	$H(10)$ ($\times 10^{-19}$)	Ω_m ($\times 10^3$)	Ω_Λ ($\times 10^{-13}$)	Ω_k ($\times 10^{29}$)	$t_{H(10)}$ ($\times 10^{19}$)	$D_{H(10)}$ ($\times 10^{26}$)
Positiva	1	6,349	0,192	4,052	0,895	-1, 118	5,184	1,555
	2	-	-	-	-	-	-	-
	3	-	-	-	-	-	-	-
Nula	1	6,349	0,192	4,052	0,895	-1, 118	5,184	1,555
	2	6,349	0,192	4,052	0,895	-1, 118	5,184	1,555
	3	6,349	0,192	4,052	0,895	-1, 118	5,184	1,555
Negativa	1	6,349	0,192	4,052	0,895	-1, 118	5,184	1,555
	2	18001224125,9	0,308	1,583	0,350	$-5,435 \cdot 10^{-20}$	3,240	0,972
	3	11,998	0,267	2,103	0,465	-0, 162	3,735	1,120

Tabla 3-6: Muestra los datos obtenidos para el factor de escala, la constante de Hubble, el parámetro de densidad de materia total, el parámetro de densidad de energía oscura, el parámetro de curvatura, la edad y el tamaño del universo; teniendo en cuenta las diferentes curvaturas que se puedan tener (positivas, negativas o nulas) para un tiempo $t=13.8$.

Curvatura	Mod. Geom.	$R(13,8)$	$H(13,8)$ ($\times 10^{-19}$)	Ω_m ($\times 10^3$)	Ω_Λ ($\times 10^{-13}$)	Ω_k ($\times 10^{29}$)	$t_{H(13,8)}$ ($\times 10^{19}$)	$D_{H(13,8)}$ ($\times 10^{26}$)
Positiva	1	7,779	0,142	7,454	1,648	-1, 370	7,031	2,109
	2	-	-	-	-	-	-	-
	3	-	-	-	-	-	-	-
Nula	1	7,779	0,142	7,454	1,648	-1, 370	7,031	2,109
	2	7,779	0,142	7,454	1,648	-1, 370	7,031	2,109
	3	7,779	0,142	7,454	1,648	-1, 370	7,031	2,109
Negativa	1	7,779	0,142	7,454	1,648	-1, 370	7,031	2,109
	2	24841689293	0,223	3,014	0,666	$-5,435 \cdot 10^{-20}$	4,471	1,341
	3	15,933	0,199	3,781	0,836	-0, 165	5,008	1,502

Las tablas 2, 3, 4 y 5 recopilan los datos obtenidos para los diferentes modelos de universo, teniendo en cuenta las dimensiones y acoplándolas a un estándar. Esto con el fin de revisar con mayor precisión la dinámica de los diferentes parámetros en los diferentes tiempos. Ahora se tendrá una

tabla compilatoria que muestra un análisis general del comportamiento de los parámetros para cada modelo:

Tabla 3-7: Muestra un comparativo general de la evolución de los datos obtenidos para el factor de escala, la constante de Hubble, el parámetro de densidad de materia total, el parámetro de densidad de energía oscura, el parámetro de curvatura, la edad y el tamaño del universo; teniendo en cuenta las diferentes curvaturas que se puedan tener (positivas, negativas o nulas) para los diferentes tiempos, con una distancia radial fija de 1Mpc.

Mod.	R	H	Ω_m	Ω_Λ	Ω_k	t_H	d_H
1	El factor de escala para cualquiera de las curvaturas posibles crece de forma progresiva.	El parámetro de Hubble decrece de forma progresiva para cualquier tipo de curvatura.	Se observa un crecimiento progresivo en la densidad de materia para todos los tipos de curvatura.	Para los diferentes modelos se tiene un comportamiento idéntico, este parámetro crece de forma progresiva.	La constante de curvatura disminuye de forma progresiva y se mantiene negativo para las diferentes curvaturas.	La edad estimada del universo aumenta de forma considerable para los tres tipos de curvatura.	El aumento en el tamaño del universo es progresivo para cualquier tipo de curvatura.
2	Para un modelo con curvatura negativa se tiene un crecimiento abrupto de este parámetro, no obstante, para una curvatura nula se tiene un crecimiento progresivo.	Este parámetro decrece de forma progresiva tanto para una curvatura nula como para una curvatura negativa.	Se tiene un crecimiento del parámetro de forma progresiva para las curvaturas nula y negativa.	El parámetro de densidad de energía oscura crece de forma progresiva para la curvatura nula y la negativa.	La densidad de curvatura para el modelo de curvatura negativa decrece de forma abrupta y se mantiene en este valor. En curvatura nula, decrece de forma progresiva.	La edad del universo aumenta de forma progresiva para la curvatura negativa, para una curvatura nula aumenta de forma considerable.	El aumento del tamaño del universo es progresivo tanto para la curvatura nula como para la curvatura negativa.
3	El parámetro de escala crece de forma progresiva para los modelos de universo con curvatura nula y negativa.	Este parámetro decrece de forma progresiva tanto para una curvatura nula como para una curvatura negativa.	Los modelos de universo con curvatura nula y negativa presentan un crecimiento progresivo de este parámetro.	El parámetro aumenta de forma progresiva para la curvatura nula y la curvatura negativa.	El valor de este parámetro disminuye muy lentamente, en cambio con curvatura nula disminuye de forma progresiva.	La variación en la edad del universo para una curvatura negativa es sutil, en cambio para una curvatura nula es considerablemente mayor.	El tamaño del universo aumenta de forma progresiva para una curvatura nula o negativa.

3.2.6. Análisis de los datos obtenidos

Para realizar los análisis correspondientes de la evolución de diferentes parámetros cosmológicos que describen los modelos de universo escogidos, se debe tener en cuenta que las condiciones de estos modelos son altamente ideales y se utilizan valores de densidad de materia total y densidad de energía oscura de nuestro universo como base para la obtención del factor de escala y su evolución, y para hallar la densidad de materia total. En este sentido, las diferentes geometrías estudiadas muestran un aumento en el parámetro cosmológico y una disminución progresiva en el parámetro de Hubble. Esto da cuenta, como se puede apreciar en las gráficas 1, 2 y 3, del com-

portamiento creciente de la curva que describe la dinámica del parámetro de escala, lo que quiere decir que todos los modelos estudiados presentan una expansión acelerada que es congruente con su modelo geométrico de espacio-tiempo y la ecuación que lo describe. No obstante, la disminución del parámetro de Hubble se encuentra acorde con la dinámica de múltiples modelos. Esto quiere decir que, aunque el factor de escala aumente, el tamaño del universo y la rapidez o eficiencia con la que ocurre son cada vez menores en comparación con el tamaño total.

La primera geometría muestra un comportamiento idéntico en su evolución de los diferentes parámetros, el factor de escala y su derivada, sin importar el valor del parámetro geométrico. La segunda geometría, por su misma estructura, no acepta parámetros positivos o nulos por la función que la describe. La última geometría no permite un valor del parámetro geométrico positivo debido a la naturaleza de las ecuaciones. De igual forma, se observa que el valor de los diferentes parámetros es sensible al tipo de curvatura que se tiene, teniendo en cuenta que, si este factor es nulo, se tendría el primer modelo estudiado. Cabe recalcar que el mismo planteamiento de las funciones que determinan dicha geometría restringe los posibles valores de la curvatura, como se puede ver con mayor claridad en el segundo modelo a estudiar, el cual no permite una curvatura nula, ya que se indeterminaría el valor de la función y esto podría llevarnos a la posible conjetura de la creación de agujeros negros para este modelo.

Se tiene que el modelo que tiene una mayor expansión en función del valor del parámetro de escala por creces es el tercer modelo con una función de curvatura negativa; este tiene un comportamiento creciente abrupto. De igual forma, este modelo geométrico cuenta con el valor más alto del factor de escala. Por otro lado, el modelo de universo estudiado con mayor valor del parámetro de densidad de materia total y densidad de energía oscura es el primer modelo geométrico, y por ende, los demás modelos con curvatura nula. El parámetro de curvatura tiene un mayor crecimiento en el tercer modelo geométrico con curvatura nula y el menor crecimiento se encuentra en el segundo modelo con curvatura negativa. Por último, el modelo que muestra una mayor edad y tamaño del universo es el primer modelo geométrico, compartiendo estos valores con el segundo y el tercer modelo con curvatura nula; el modelo que le sigue es el tercero con curvatura nula y, finalmente, se tiene el segundo modelo con curvatura negativa.

Finalmente, se tiene que, para los diferentes modelos, los gráficos obtenidos para la derivada del parámetro de escala del universo, este disminuye de forma progresiva, pero no se tiene un valor nulo o negativo, lo cual quiere decir que siempre habrá un aumento del factor de escala y, por ende, no se tendría un caso de universo cerrado o que este dominado por la materia.

4 Reflexiones finales y conclusiones

El análisis bibliográfico realizado acerca de la métrica de Lemaître-Tolman-Bondi en las bases de datos como el Repositorio Institucional UPN, Google Scholar (Google Académico), SciELO y ScienceDirect (Elsevier) fue exhaustivo. Usando las palabras clave: modelo cosmológico LTB, métrica de Lemaître-Tolman-Bondi, cosmología inhomogénea, solución LTB de las ecuaciones de campo de Einstein, soluciones inhomogeneas a las ecuaciones de campo de Einstein, Polvo con simetría esférica, deducción de la métrica LTB, entre otras. Presento enormes dificultades debido a la escasa literatura sobre esta métrica. Aunque esta también es una solución exacta a las ecuaciones de campo de Einstein, es poco abordada. Además, la reconstrucción de la métrica y las ecuaciones de Friedmann para este modelo fue bastante complicada debido a que hay pocos trabajos que formalizan los procesos matemáticos que se llevan a cabo para la obtención de estas y las sustituciones tan precisas utilizadas para llegar a simplificaciones que a priori no son para nada evidentes.

La obtención del valor de los parámetros necesarios para hallar la densidad de materia y la densidad de energía oscura necesarios para el cálculo del parámetro de energía total y el factor de escala del universo en la literatura fue relativamente sencilla. Estos datos se usaron posteriormente para la realización de los cálculos y análisis pertinentes, lo cual facilitó la caracterización y estudio de modelos altamente ideales que se plantearon como posibles universos con una geometría específica y una distribución de materia-energía idéntica.

El desarrollo de la interfaz INNIVERSE mediante Python (versión 3.14) representó un gran reto, debido a que la versión no soporta algunas librerías antiguas o, de plano, estas son incompatibles y chocan con librerías nuevas. Por esta razón, se tuvieron problemas al llamar las imágenes que están distribuidas a lo largo de la interfaz. Para esto, se tuvo que generar un código específico que las llamara de forma directa y evitara que se rompiera el código o que no aparecieran. También se tuvieron problemas al convertir el formato de la interfaz creada en Python a uno portable (.exe) por la forma en la que se llamaban las imágenes; esto no permitía crear el archivo. Sin embargo, estos problemas se solucionaron buscando los errores en foros de Python, videos de YouTube o siguiendo las instrucciones que el mismo lenguaje de programación proporciona. De esta manera se creó la interfaz INNIVERSE como se tenía previsto y con las funciones establecidas desde un inicio.

Al hacerse la correspondiente relación de los diferentes modelos con el modelo de universo LTB, se presentaron dificultades en la construcción de las funciones auxiliares que permitían establecer la dinámica para estos modelos con las diferentes geometrías escogidas, debido a que nacen de hipótesis geométricas del comportamiento de las diferentes geometrías. Sin embargo, las funcio-

nes que se proponen en el trabajo permitieron hacer una comparación sencilla entre los modelos para hallar diferentes relaciones entre la evolución de los universos que comparten la distribución de materia-energía. Las curvas que se hallaron para los tres modelos permiten describir la evolución del parámetro de escala en función del tiempo para obtener el parámetro de Hubble, con el cual se pueden hallar los diferentes parámetros primarios, junto con la edad y el tamaño del universo de los modelos, y establecer una relación entre estos. Para los tres modelos, la evolución del parámetro de escala es creciente; esto quiere decir que el universo está en expansión acelerada. Por ende, se tienen universos inhomogéneos en expansión, siendo el segundo modelo con curvatura negativa el que ostenta el parámetro de Hubble más alto; de igual forma, también cuenta con el valor más alto para el parámetro de curvatura. En cuanto al parámetro de densidad de materia total y densidad de energía oscura, es el primer modelo el que tiene los valores más altos, junto con el valor de la edad y tamaño del universo. Para estos últimos valores, se tiene en segundo lugar al tercer modelo con curvatura negativa y en tercer puesto al segundo modelo con curvatura negativa. Esto da cuenta de la evolución de los diferentes modelos y de cómo la geometría del espacio juega un papel vital en la dinámica de los modelos trabajados. De esta forma, y como se tenía previsto, el parámetro de escala aumenta en todos los modelos, teniendo en cuenta que ninguna geometría propuesta da cuenta de un universo cerrado y que la distribución de materia-energía es decreciente.

Bibliografía

- Aghanim, N., Akrami, Y., Ashdown, M., et al. (2020). Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, 641, A6. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201833910>
- Biswas, T., Mansouri, R., & Notari, A. (2007). Non-linear structure formation and ‘apparent’ acceleration: an investigation. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2007(12), 017.
- Campo, T. D. (2022). *Análisis geométrico del modelo cosmológico de de Sitter*. <http://hdl.handle.net/20.500.12209/18271>
- Célérier, M. N. (2012). Some clarifications about Lemaître-Tolman models of the Universe used to deal with the dark energy problem. *Astronomy & Astrophysics*, 543, A71.
- Colorado Caicedo, J. A. (2018). *Soluciones exactas de las ecuaciones de campo de Einstein para modelar ondas gravitacionales tipo Einstein-Rosen*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Combi, L. (2022). *Efectos locales de la expansión cosmológica* (Tesis doctoral). Universidad Nacional de La Plata.
- DE LAS XV, S. D. T. (2005). *EPISTEMOLOGÍA E HISTORIA DE LA CIENCIA* (Tesis doctoral). Universidad Nacional de Córdoba.
- d’Inverno, R. (1992). *Introducing Einstein’s Relativity*. Oxford University Press.
- Fernández Cobos, R. (2014). *Implicaciones cosmológicas de las anisotropías de temperatura y polarización de la RFCM y la estructura a gran escala del universo*.

- García, Y. P. (2014). *Una aproximación a la formalización de un universo en expansión acelerada*. <http://hdl.handle.net/20.500.12209/2085>
- García Brao, I. (2018). *Ecuación de campo de Einstein: Desarrollo y soluciones exactas* (Trabajo de Fin de Grado). Universidad de Murcia.
- GONZALEZ SANCHEZ, J. E. (2018). *Reconstrucao Nao Paramétrica das Perturbacoes Cosmologicas*.
- Herrera, L., Di Prisco, A., & Ospino, J. (2021). Hyperbolically symmetric versions of Lemaitre–Tolman–Bondi spacetimes. *Entropy*, *23*(9), 1219.
- Herrera, L., Di Prisco, A., Ospino, J., & Carot, J. (2010). Lemaitre-Tolman-Bondi dust spacetimes: Symmetry properties and some extensions to the dissipative case. *Physical Review D*, *82*(2), 024021.
- Hubble, E. (1929). A relation between distance and radial velocity among extragalactic nebulae. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *15*(3), 168-173.
- ISIDRO, E. G. C. (2015). *MODELOS SIMPLES DE LEMAÎTRE-TOLMAN-BONDI (LTB)*.
- La, M. F. (2023). *Caracterización física y geométrica de un modelo de universo en expansión acelerada mediante el uso de parámetros cosmológicos*. <http://hdl.handle.net/20.500.12209/18818>
- Lemaître, A. G. (1997). The expanding universe. *General Relativity and Gravitation*, *29*(5), 641-680.
- Luis Peña, P. (2015). *Historia del modelo cosmológico estándar LCDM: la cosmología física tras del modelo del big bang*.

- Luminet, J. P. (2015). *Lemaître's Big Bang*. arXiv: 1503.08304.
- Maqsood, F., Yousaf, Z., & Bhatti, M. Z. (2022). Electromagnetic field and spherically symmetric dissipative fluid models. *Pramana*, 96(2), 105.
- National Aeronautics and Space Administration. (2013, 21 de marzo). *Best Map Ever of the Universe*. <https://science.nasa.gov/photojournal/best-map-ever-of-the-universe/>
- Ordúz, C. A. (2012). *Ecuación de desvío geodésico en la métrica Lemaître Tolman Bondi* (Tesis doctoral).
- Pérez, M. Z. (2012). *Probing the foundations of the standard cosmological model* (Tesis doctoral). Universidad Autónoma de Madrid.
- Pérez Sienes, L., Follana Adin, E., & Azcoiti Pérez, V. (s.f.). *Modelos cosmológicos no estándar* [Manuscrito no publicado].
- Reyes, G. C. (2020). *ENERGIA OSCURA HOLOGRAFICA* (Tesis doctoral). Universidad de Concepción.
- Ron, J. M. S. (1993). *El origen y desarrollo de la relatividad*.
- Santos, R. T. G. (2007). *Anisotropías primarias y secundarias del fondo cósmico de microondas* (Tesis doctoral). Universidad de La Laguna.
- Sendra, C. M. (2015). *Modelos cosmológicos, agujeros negros y lentes gravitatorias*. Universidad de Buenos Aires.
- Teppa Pannia, F. A. (2016). *Aplicaciones de soluciones no homogéneas de las ecuaciones de Einstein a problemas cosmológicos* (Tesis doctoral). Universidad Nacional de La Plata.

- Tixaire, A. G. (2005). La nueva cosmología: principio y fin del universo. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas*, 99(1), 113-160.
- Tolman, R. C. (1997). Effect of inhomogeneity on cosmological models. *General Relativity and Gravitation*, 29(7), 935-943.
- Wheeler, J. A. (1990). *A Journey Into Gravity and Spacetime*. Scientific American Library.

Anexos

Anexo 1 (Ecuaciones de Campo)

Partiendo de la siguiente equivalencia:

$$\vec{f} = m\vec{g} \rightarrow -m_g\vec{\nabla}\Phi \quad 1 - 1$$

Y que el potencial gravitacional se escribe como:

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho \quad 1 - 2$$

Donde G es la constante de gravitación universal y ρ representa la densidad de materia gravitacional.

Se tiene el tensor de Ricci:

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^{\lambda} = g^{\lambda\alpha}R_{\alpha\mu\lambda\nu} \quad 1 - 3$$

Se tiene la siguiente proporción entre el tensor de Ricci y el tensor de Energía-Momento:

$$R^{\mu\nu} \propto T^{\mu\nu} \quad 1 - 4$$

Por la conservación local de la Energía-Momento, se tiene la divergencia del tensor Energía-Momento:

$$\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} = 0 \quad 1 - 5$$

Las ecuaciones de campo deben tener la forma de un tensor de curvatura de dos índices, libre de divergencia que sea proporcional al tensor Energía-Momento, de la siguiente manera:

$$G^{\mu\nu} \propto T^{\mu\nu} \rightarrow \nabla_{\mu}G^{\mu\nu} = 0 \quad 1 - 6$$

Con ayuda de la identidad diferencial de Bianchi:

$$\nabla_{\lambda}R_{\alpha\beta\mu\nu} + \nabla_{\nu}R_{\alpha\beta\lambda\mu} + \nabla_{\mu}R_{\alpha\beta\nu\lambda} = 0 \quad 1 - 7$$

Se cambian λ y μ del segundo término con $R_{\alpha\beta\lambda\mu} = -R_{\alpha\beta\mu\lambda}$ y se multiplica por el tensor métrico $g^{\alpha\mu}$:

$$g^{\alpha\mu}\nabla_{\lambda}R_{\alpha\beta\mu\nu} - g^{\alpha\mu}\nabla_{\nu}R_{\alpha\beta\mu\lambda} + g^{\alpha\mu}\nabla_{\mu}R_{\alpha\beta\nu\lambda} = 0 \quad 1 - 8$$

Se reescribe la ecuación anterior teniendo en cuenta la compatibilidad métrica:

$$\begin{aligned} \nabla_{\lambda}g^{\alpha\mu} &= 0 \\ \nabla_{\lambda}g^{\alpha\mu}R_{\alpha\beta\mu\nu} - \nabla_{\nu}g^{\alpha\mu}R_{\alpha\beta\mu\lambda} + \nabla_{\mu}g^{\alpha\mu}R_{\alpha\beta\nu\lambda} &= 0 \quad 1 - 9 \end{aligned}$$

El tensor métrico eleva los índices α de cada termino y los convierte en μ , se aplica el tensor de Ricci de los dos primeros términos y en el tercero eleva el índice μ y lo convierte a α .

$$\nabla_{\lambda} R_{\beta\mu\nu}^{\mu} - \nabla_{\nu} R_{\beta\mu\lambda}^{\mu} + \nabla^{\alpha} R_{\alpha\beta\nu\lambda} = 0 \quad 1 - 10$$

Teniendo en cuenta que la contracción del primer y segundo término da como resultado el tensor de Ricci, se tiene:

$$R_{\beta\mu\nu}^{\mu} \rightarrow R_{\beta\nu}$$

$$\nabla_{\lambda} R_{\beta\nu} - \nabla_{\nu} R_{\beta\lambda} + \nabla^{\alpha} R_{\alpha\beta\nu\lambda} = 0 \quad 1 - 11$$

Multiplicando por el tensor métrico $g^{\beta\nu}$, se tiene:

$$g^{\beta\nu} \nabla_{\lambda} R_{\beta\nu} - g^{\beta\nu} \nabla_{\nu} R_{\beta\lambda} + g^{\beta\nu} \nabla^{\alpha} R_{\alpha\beta\nu\lambda} = 0$$

$$\nabla_{\lambda} g^{\beta\nu} R_{\beta\nu} - \nabla_{\nu} g^{\beta\nu} R_{\beta\lambda} + \nabla^{\alpha} g^{\beta\nu} R_{\alpha\beta\nu\lambda} = 0 \quad 1 - 12$$

Se elevan los índices β y se cambian a ν :

$$\nabla_{\lambda} R_{\nu}^{\nu} - \nabla_{\nu} R_{\lambda}^{\nu} + \nabla^{\alpha} g^{\beta\nu} R_{\alpha\beta\nu\lambda} = 0 \quad 1 - 13$$

Cambiando el orden de α y β en el tercer elemento y teniendo en cuenta que un tensor que tiene el mismo índice en el sub y el supra índice da como resultado el escalar de Ricci, se tiene:

$$\nabla_{\lambda} R - \nabla_{\nu} R_{\lambda}^{\nu} - \nabla^{\alpha} g^{\beta\nu} R_{\beta\alpha\nu\lambda} = 0 \quad 1 - 14$$

En el tercer elemento se sube β y se cambia por ν , de igual forma se contraen índices:

$$\nabla_{\lambda} R - \nabla_{\nu} R_{\lambda}^{\nu} - \nabla^{\alpha} R_{\alpha\nu\lambda}^{\nu} = 0$$

$$\nabla_{\lambda} R - \nabla_{\nu} R_{\lambda}^{\nu} - \nabla^{\alpha} R_{\alpha\lambda} = 0 \quad 1 - 15$$

Teniendo en cuenta la derivada covariante de un índice superior:

$$\nabla^{\alpha} = g^{\alpha\rho} \nabla_{\rho}$$

$$\nabla_{\lambda} R - \nabla_{\nu} R_{\lambda}^{\nu} - g^{\alpha\rho} \nabla_{\rho} R_{\alpha\lambda} = 0 \quad 1 - 16$$

Moviendo el tensor métrico y subiendo el índice α y cambiándolo por ρ :

$$\nabla_{\lambda} R - \nabla_{\nu} R_{\lambda}^{\nu} - \nabla_{\rho} g^{\alpha\rho} R_{\alpha\lambda} = 0$$

$$\nabla_{\lambda} R - \nabla_{\nu} R_{\lambda}^{\nu} - \nabla_{\rho} R_{\lambda}^{\rho} = 0 \quad 1 - 17$$

Dado que ρ es un índice, se puede re etiquetar como ν para que el segundo y tercer termino se combinen:

$$\nabla_{\lambda} R - \nabla_{\nu} R_{\lambda}^{\nu} - \nabla_{\nu} R_{\lambda}^{\nu} = 0$$

$$\nabla_{\lambda} R - 2\nabla_{\nu} R_{\lambda}^{\nu} = 0 \quad 1 - 18$$

Se multiplica por el tensor métrico $g^{\mu\lambda}$, se sube el índice λ y se cambia por μ :

$$\begin{aligned}
g^{\mu\lambda}\nabla_\lambda R - 2g^{\mu\lambda}\nabla_\nu R_\lambda^\nu &= 0 \\
\nabla_\lambda g^{\mu\lambda}R - 2\nabla_\nu g^{\mu\lambda}R_\lambda^\nu &= 0 \\
\nabla_\lambda g^{\mu\lambda}R - 2\nabla_\nu R^{\mu\nu} &= 0 \quad 1 - 19
\end{aligned}$$

Cambiando el índice λ por ν :

$$\nabla_\nu g^{\mu\nu}R - 2\nabla_\nu R^{\mu\nu} = 0 \quad 1 - 20$$

Se tiene como factor común la derivada covariante y se multiplica por $-1/2$:

$$\nabla_\nu \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R \right) = 0 \quad 1 - 21$$

Dentro de los paréntesis se tiene un tensor de curvatura libre de divergencia de dos índices denominado tensor de Einstein:

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0 \rightarrow G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R \quad 1 - 22$$

Por esta razón las ecuaciones de campo deben tener la forma:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R \propto T^{\mu\nu} \quad 1 - 23$$

Para hallar las ecuaciones de campo se debe hallar el factor de proporcionalidad, denominado k :

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = kT^{\mu\nu} \quad 1 - 24$$

Cambiando la notación a índices bajos:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = kT_{\mu\nu} \quad 1 - 25$$

Considerando el límite de campo débil Newtoniano, se tiene que debe coincidir con la ecuación de Poisson para la gravedad que es correcta para la gravedad Newtoniana:

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho \quad 1 - 26$$

En la gravedad Newtoniana la única fuente de gravedad es la masa o densidad de energía, que corresponde al componente T_{00} del tenso Energía-Momento, específicamente

$$\begin{aligned}
T_{00} &= \rho c^2 \\
T_{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 1 - 27
\end{aligned}$$

Para hallar k solo se necesita una ecuación, por lo tanto, solo es necesario revisar en los índices 00:

$$R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R = kT_{00} \quad 1 - 28$$

Se debe encontrar el tensor y escalar de Ricci en dicho límite, teniendo en cuenta:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{2\Phi}{c^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{2\Phi}{c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \frac{2\Phi}{c^2} \end{pmatrix} \quad 1 - 29$$

A partir de esta métrica se halla el tensor y escalar de Ricci, teniendo en cuenta que el único valor diferente de cero en el tensor de Energía-Momento es T_{00} , es decir, la parte espacial en el lado derecho queda igual a cero.

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = 0 \quad \rightarrow \quad R_{ij} = \frac{1}{2}g_{ij}R \quad 1 - 30$$

Si se halla el escalar de Ricci, también se puede hallar el tensor de Ricci, ya que se tiene el valor del tensor métrico. El escalar de Ricci se tiene por contracción del tensor de Ricci, esto se puede dividir en la parte 00 e ij :

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = g^{00}R_{00} + g^{ij}R_{ij}$$

Remplazando R_{ij} :

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = g^{00}R_{00} + g^{ij}\frac{1}{2}g_{ij}R \quad 1 - 31$$

Como $g^{ij}g_{ij}$ da las dimensiones del espacio trabajado, al realizar la sumatoria se tiene 1 por cada coordenada:

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = g^{00}R_{00} + \frac{1}{2}(1 + 1 + 1)R \quad \rightarrow \quad g^{00}R_{00} + \frac{3}{2}R \quad 1 - 32$$

Se opera:

$$R = g^{00}R_{00} + \frac{3}{2}R \quad \rightarrow \quad 2R - 3R = 2g^{00}R_{00} \quad \rightarrow \quad R = -2g^{00}R_{00} \quad 1 - 33$$

Con:

$$R_{\mu\nu} = \partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta - \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta \quad 1 - 34$$

Sabiendo que $2\Phi \ll c^2$, ya que, se asume un campo gravitacional débil, se desprecian términos como Φ^2/c^4 o cualquier valor $(\partial\Phi)^2/c^4$, como los dos últimos términos del tensor de Ricci:

$$\Gamma^2 = g^2(\partial g)^2 \rightarrow \frac{g^2(\partial\Phi)^2}{c^4} \quad 1 - 35$$

Teniendo esto en cuenta el tensor de Ricci queda:

$$R_{\mu\nu} \approx \partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha \quad 1 - 36$$

Las componentes 00 solo dependen del espacio y no del tiempo, se tiene que todos los términos de la forma $\partial_0 g = 0$ y $\partial_0 \Gamma = 0$:

$$R_{00} = \partial_\alpha \Gamma_{00}^\alpha - \partial_0 \Gamma_{0\alpha}^\alpha \rightarrow R_{00} = \partial_\alpha \Gamma_{00}^\alpha \rightarrow R_{00} = \partial_1 \Gamma_{00}^1 \quad 1 - 37$$

El símbolo de Christoffel para Γ_{00}^1 escritos en los términos de la métrica es:

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2} g^{i\alpha} (\partial_0 g_{\alpha 0} + \partial_0 g_{\alpha 0} - \partial_\alpha g_{00}) \rightarrow -\frac{1}{2} g^{i\alpha} \partial_\alpha g_{00} \quad 1 - 38$$

El término $\alpha = 0$ en la sumatoria es cero, ya que, $\partial_0 g_{00} = 0$, pero la parte espacial es diferente de cero, con $\alpha = j$ y $j = 1, 2, 3$:

$$\Gamma_{00}^i = -\frac{1}{2} g^{ij} \partial_j g_{00} \rightarrow \Gamma_{00}^i = -\frac{1}{2} g^{ij} \partial_j \left[-\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) \right] \quad 1 - 39$$

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2} g^{ij} \partial_j \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) \rightarrow \Gamma_{00}^i = \frac{1}{c^2} g^{ij} \partial_j \Phi \quad 1 - 40$$

Los componentes del tensor métrico g^{ij} se pueden expresar en las componentes del tensor de Minkowski η^{ij} con la diagonal (1, 1, 1), ya que todos los componentes del tensor g_{ij} son $1 - 2\Phi/c^2$ en la diagonal:

$$g^{ij} = \frac{1}{1 - \frac{2\Phi}{c^2}} \eta^{ij} \quad 1 - 41$$

Con la aproximación para un x pequeño $(1 - x)^{-1} \approx 1 + x$, ya que, $2\Phi \ll c^2$:

$$g^{ij} \approx \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) \eta^{ij} \quad 1 - 42$$

Remplazando el valor del tensor métrico, se tiene:

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{c^2} \left(\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) \eta^{ij} \right) \partial_j \Phi$$

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{c^2} \eta^{ij} \partial_j \Phi + \frac{2\Phi}{c^4} \eta^{ij} \partial_j \Phi \quad 1 - 43$$

Teniendo en cuenta que $2\Phi \ll c^4$, el segundo término de la expresión obtenida se desprecia:

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{c^2} \eta^{ij} \partial_j \Phi \quad 1 - 44$$

Operando el tensor de Minkowski, subiendo j y cambiándola por i :

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{c^2} \partial^i \Phi \quad 1 - 45$$

Obteniendo la componente 00 del tensor de Ricci:

$$R_{00} = \partial_1 \Gamma_{00}^1 \rightarrow R_{00} = \frac{1}{c^2} \partial_i \partial^i \Phi \quad 1 - 46$$

Con $\partial_i \partial^i$ como el Laplaciano $\partial_i \partial^i = \nabla^2$

$$R_{00} = \frac{1}{c^2} \nabla^2 \Phi \quad 1 - 47$$

Ahora para hallar el escalar de Ricci:

$$R = -2g^{00}R_{00} \rightarrow R = -2 \left(-\frac{1}{1 + \frac{2\Phi}{c^2}} \right) \left(\frac{1}{c^2} \nabla^2 \Phi \right) \quad 1 - 48$$

Realizando la misma aproximación, pero con signos diferentes, se tiene:

$$R = 2 \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2} \right) \left(\frac{1}{c^2} \nabla^2 \Phi \right) \rightarrow \frac{2}{c^2} \nabla^2 \Phi - \frac{4}{c^4} \nabla^2 \Phi^2 \quad 1 - 49$$

$$R = \frac{2}{c^2} \nabla^2 \Phi \quad 1 - 50$$

Por lo tanto, el límite Newtoniano en 00 en la ecuación de campo:

$$R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R = kT_{00} \quad 1 - 51$$

$$\frac{1}{c^2} \nabla^2 \Phi - \frac{1}{2} \left(-\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2} \right) \right) \left(\frac{2}{c^2} \nabla^2 \Phi \right) = k\rho c^2 \quad 1 - 52$$

$$\frac{1}{c^2} \nabla^2 \Phi + \frac{1}{c^2} \nabla^2 \Phi + \frac{2}{c^4} \nabla^2 \Phi^2 = k\rho c^2 \rightarrow \frac{2}{c^2} \nabla^2 \Phi = k\rho c^2 \quad 1 - 53$$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{2} k\rho c^4 \quad 1 - 54$$

Recordando el valor del Laplaciano del potencial gravitacional:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G\rho \quad 1 - 55$$

$$4\pi G\rho = \frac{1}{2}k\rho c^4$$

$$k = \frac{8\pi G}{c^4} \quad 1 - 56$$

Escribiendo la ecuación de campo completa:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = kT_{\mu\nu}$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad 1 - 57$$

Para agregar la constante cosmológica se debe tener en cuenta la condición de compatibilidad métrica:

$$\nabla^\mu g_{\mu\nu} = 0 \quad 1 - 58$$

Debido a que la divergencia del tensor métrico es automáticamente cero, se puede agregar una constante multiplicada por el tensor métrico y así se satisface la condición de divergencia cero de ambos lados de la ecuación de campo:

$$\nabla^\mu \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} \right) = 0 \quad 1 - 59$$

Se asume que en el límite no Newtoniano esta constante no contribuye mucho al campo gravitacional Newtoniano, por lo que se puede decir que $\Lambda \approx 0$, agregar este término no cambiara el valor de la constante de proporcionalidad k que se deriva del límite Newtoniano. Teniendo de esta manera la ecuación de campo de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad 1 - 60$$

Anexo 2 (Métrica FLRW)

Partiendo de la notación del elemento de línea:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad 2-1$$

Se tiene que para un universo homogéneo e isotrópico esta debe tener la forma:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \frac{a(t)^2}{1 - kr^2} dr^2 - a(t)^2 r^2 d\theta^2 - a(t)^2 r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad 2-2$$

Para llegar a esta métrica se parte de las coordenadas utilizadas, es decir, llegar a ellas:

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \rightarrow x^\mu = (ct, r, \theta, \varphi) \quad 2-3$$

El tensor métrico se puede escribir de la siguiente manera:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix} \quad 2-4$$

Por esta razón el elemento de línea quedaría:

$$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 + g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + g_{33}(dx^3)^2 \quad 2-5$$

$$ds^2 = g_{00}(cdt)^2 + g_{11}(dr)^2 + g_{22}(d\theta)^2 + g_{33}(d\varphi)^2 \quad 2-6$$

Teniendo en cuenta el elemento de línea de Minkowski:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^i dx_i \quad 2-7$$

Se agrega un factor que dependa del tiempo a la parte espacial:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 dx^i dx_i \quad 2-8$$

Se utilizan las coordenadas esféricas para mantener la isotropía:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 dr^2 + a(t)^2 \Sigma(r)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad 2-9$$

Con $\Sigma(r)^2$ relacionado al radio del universo, se tiene el siguiente tensor métrico:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a(t)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a(t)^2 \Sigma(r)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a(t)^2 \Sigma(r)^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad 2-10$$

Teniendo esto en cuenta, $\Sigma(r)^2$ debe tomar los siguientes valores:

$$\Sigma(r)^2 = \begin{cases} \sin^2 r & \rightarrow \text{Curvatura esferica} \\ r^2 & \rightarrow \text{Plano} \\ \sinh^2 r & \rightarrow \text{Curvatura hiperbolica} \end{cases}$$

Cambiando r por x y reemplazando:

$$g_{\mu\nu} = c^2 - a(t)^2 - a(t)^2 \Sigma(x)^2 - a(t)^2 \Sigma(x)^2 \sin^2 \theta \quad 2 - 11$$

$$\Sigma(x)^2 = \begin{cases} \sin^2 x & \rightarrow \text{Curvatura esferica} \\ x^2 & \rightarrow \text{Plano} \\ \sinh^2 x & \rightarrow \text{Curvatura hiperbolica} \end{cases}$$

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 dx^2 + a(t)^2 \Sigma(x)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad 2 - 12$$

Redefiniendo:

$$R \equiv \Sigma(x) \begin{cases} \sin x \\ x \\ \sinh x \end{cases} \rightarrow dR^2 \equiv \Sigma(x)^2 \begin{cases} \cos^2 x \\ dx^2 \\ \cosh^2 x \end{cases}$$

Caso esférico

$$R = \sin x \rightarrow dR^2 = \cos^2 x dx^2$$

$$dx^2 = \frac{dR^2}{\cos^2 x} \rightarrow \frac{dR^2}{1 - \sin^2 x} \rightarrow \frac{dR^2}{1 - R^2} \quad 2 - 13$$

Caso plano

$$R = x \rightarrow dR^2 = dx^2$$

$$dx^2 = \frac{dR^2}{1 - 0(x^2)} \rightarrow dx^2 = \frac{dR^2}{1 - 0(R^2)} \quad 2 - 14$$

Caso hiperbólico

$$R = \sinh x \rightarrow dR^2 = \cosh^2 x dx^2$$

$$dx^2 = \frac{dR^2}{\cosh^2 x} \rightarrow \frac{dR^2}{1 + \sinh^2 x} \rightarrow \frac{dR^2}{1 + R^2} \quad 2 - 15$$

Se puede definir que para los tres casos que dx^2 se puede expresar como:

$$dx^2 = \frac{dR^2}{1 - kR^2} \quad 2 - 16$$

Con k :

$$k = \begin{cases} 1 & \rightarrow \text{caso esferico } R = \sin x \\ 0 & \rightarrow \text{caso plano } R = x \\ -1 & \rightarrow \text{caso hiperbolico } R = \sinh x \end{cases}$$

Teniendo en cuenta el siguiente remplazo:

$$R \equiv \Sigma(x) \quad 2 - 17$$

El elemento de línea:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \frac{dR^2}{1 - kR^2} - a(t)^2 R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad 2 - 18$$

Y el tensor métrico:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a(t)^2}{1 - kR^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a(t)^2 R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a(t)^2 R^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad 2 - 19$$

Para hallar la primer y segunda ecuación de Friedmann se debe encontrar el tensor de Riemann, el tensor de Ricci y el escalar de Ricci. Para esto se hallan primero los símbolos de Christoffel:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_{\mu} g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu} g_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma} g_{\mu\nu}) \quad 2 - 20$$

Teniendo en cuenta que para hallar los símbolos de Christoffel se usa el tensor métrico con supra índices, sus valores son:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1 - kR^2}{a(t)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{a(t)^2 R^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{a(t)^2 R^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix} \quad 2 - 21$$

Se tiene en cuenta los valores que puede tener el tensor, ya que, para los índices que no son iguales tomara un valor de cero, se tiene en cuenta la siguiente notación para las derivadas:

$$\partial_{\mu} = \frac{\partial}{\partial X^{\mu}} \rightarrow \partial_0 = \frac{\partial}{\partial X^0} \rightarrow \partial_{ct} = \frac{\partial}{\partial X^{ct}} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \quad 2 - 22$$

Teniendo el valor de las derivadas de los elementos con respecto a cada variable del tensor:

$$\begin{aligned} \partial_0 g_{00} &= 0 & \partial_1 g_{00} &= 0 \\ \partial_0 g_{11} &= -\frac{2a(t)a'(t)}{1 - kR^2} & \partial_1 g_{11} &= -\frac{2kRa(t)^2}{(1 - kR^2)^2} \\ \partial_0 g_{22} &= -2R^2 a(t)a'(t) & \partial_1 g_{22} &= -2a(t)^2 R \\ \partial_0 g_{33} &= -2R^2 \sin^2 \theta a(t)a'(t) & \partial_1 g_{33} &= -2a(t)^2 \sin^2 \theta R \\ \partial_2 g_{00} &= 0 & \partial_2 g_{11} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_2 g_{22} &= 0 & \partial_3 g_{11} &= 0 \\
\partial_2 g_{33} &= -2a(t)^2 R^2 \sin \theta \cos \theta & \partial_3 g_{22} &= 0 \\
\partial_3 g_{00} &= 0 & \partial_3 g_{33} &= 0
\end{aligned}$$

Símbolos de Christoffel para los cuales su resultado no es nulo:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^0 &= \frac{1}{2} g^{0\sigma} (\partial_1 g_{1\sigma} + \partial_1 g_{1\sigma} - \partial_\sigma g_{11}) \\
&\quad \frac{1}{2} g^{00} (\partial_1 g_{10} + \partial_1 g_{10} - \partial_0 g_{11}) \\
\frac{1}{2} \left(- \left(- \frac{2a(t)a'(t)}{1 - kR^2} \right) \right) &= \frac{a(t)a'(t)}{1 - kR^2} \quad 2 - 23
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{22}^0 &= \frac{1}{2} g^{0\sigma} (\partial_2 g_{2\sigma} + \partial_2 g_{2\sigma} - \partial_\sigma g_{22}) \\
&\quad \frac{1}{2} g^{00} (\partial_2 g_{20} + \partial_2 g_{20} - \partial_0 g_{22}) \\
\frac{1}{2} \left(-(-2R^2 a(t)a'(t)) \right) &= R^2 a(t)a'(t) \quad 2 - 24
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{33}^0 &= \frac{1}{2} g^{0\sigma} (\partial_3 g_{3\sigma} + \partial_3 g_{3\sigma} - \partial_\sigma g_{33}) \\
&\quad \frac{1}{2} g^{00} (\partial_3 g_{30} + \partial_3 g_{30} - \partial_0 g_{33}) \\
\frac{1}{2} \left(-(-2R^2 \sin^2 \theta a(t)a'(t)) \right) &= R^2 \sin^2 \theta a(t)a'(t) \quad 2 - 25
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} g^{1\sigma} (\partial_1 g_{1\sigma} + \partial_1 g_{1\sigma} - \partial_\sigma g_{11}) \\
&\quad \frac{1}{2} g^{11} (\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11}) \\
\frac{1}{2} \left(- \frac{1 - kR^2}{a(t)^2} \right) \left(- \left(- \frac{2kRa(t)^2}{(1 - kR^2)^2} \right) \right) &= \frac{kR}{1 - kR^2} \quad 2 - 26
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2} g^{1\sigma} (\partial_2 g_{2\sigma} + \partial_2 g_{2\sigma} - \partial_\sigma g_{22}) \\
&\quad \frac{1}{2} g^{11} (\partial_2 g_{21} + \partial_2 g_{21} - \partial_1 g_{22})
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \left(-\frac{1-kR^2}{a(t)^2} \right) (-(-2a(t)^2 R)) = -(1-kR^2)R \quad 2-27$$

$$\Gamma_{33}^1 = \frac{1}{2} g^{1\sigma} (\partial_3 g_{3\sigma} + \partial_3 g_{3\sigma} - \partial_\sigma g_{33})$$

$$\frac{1}{2} g^{11} (\partial_3 g_{31} + \partial_3 g_{31} - \partial_1 g_{33})$$

$$\frac{1}{2} \left(-\frac{1-kR^2}{a(t)^2} \right) (-(-2a(t)^2 \sin^2 \theta R)) = -(1-kR^2) \sin^2 \theta R \quad 2-28$$

$$\Gamma_{10}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \partial_0 g_{11}$$

$$\frac{1}{2} \left(-\frac{1-kR^2}{a(t)^2} \right) \left(-\frac{2a(t)a'(t)}{1-kR^2} \right) = \frac{a'(t)}{a(t)} \quad 2-29$$

$$\Gamma_{33}^2 = \frac{1}{2} g^{2\sigma} (\partial_3 g_{3\sigma} + \partial_3 g_{3\sigma} - \partial_\sigma g_{33})$$

$$\frac{1}{2} g^{22} (\partial_3 g_{32} + \partial_3 g_{32} - \partial_2 g_{33})$$

$$\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{a(t)^2 R^2} \right) (-(-2a(t)^2 R^2 \sin \theta \cos \theta)) = \sin \theta \cos \theta \quad 2-30$$

$$\Gamma_{20}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \partial_0 g_{22}$$

$$\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{a(t)^2 R^2} \right) (-2R^2 a(t) a'(t)) = \frac{a'(t)}{a(t)} \quad 2-31$$

$$\Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \partial_1 g_{22}$$

$$\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{a(t)^2 R^2} \right) (-2a(t)^2 R) = \frac{1}{R} \quad 2-32$$

$$\Gamma_{30}^3 = \frac{1}{2} g^{33} \partial_0 g_{33}$$

$$\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{a(t)^2 R^2 \sin^2 \theta} \right) (-2R^2 \sin^2 \theta a(t) a'(t)) = \frac{a'(t)}{a(t)} \quad 2-33$$

$$\Gamma_{31}^3 = \frac{1}{2} g^{33} \partial_1 g_{33}$$

$$\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{a(t)^2 R^2 \sin^2 \theta} \right) (-2a(t)^2 \sin^2 \theta R) = \frac{1}{R} \quad 2-34$$

$$\Gamma_{32}^3 = \frac{1}{2} g^{33} \partial_2 g_{33}$$

$$\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{a(t)^2 R^2 \sin^2 \theta} \right) (-2a(t)^2 R^2 \sin \theta \cos \theta) = \tan \theta \quad 2 - 35$$

Para hallar el tensor de Riemann:

$$R_{\nu\sigma\gamma}^\mu = \partial_\sigma \Gamma_{\gamma\nu}^\mu - \partial_\gamma \Gamma_{\sigma\nu}^\mu + \Gamma_{\sigma\kappa}^\mu \Gamma_{\gamma\nu}^\kappa - \Gamma_{\gamma\kappa}^\mu \Gamma_{\sigma\nu}^\kappa \quad 2 - 36$$

Se tiene el temor de Ricci:

$$R_{\nu\gamma} = R_{\nu\mu\gamma}^\mu = \partial_\mu \Gamma_{\gamma\nu}^\mu - \partial_\gamma \Gamma_{\mu\nu}^\mu + \Gamma_{\mu\kappa}^\mu \Gamma_{\gamma\nu}^\kappa - \Gamma_{\gamma\kappa}^\mu \Gamma_{\mu\nu}^\kappa \quad 2 - 37$$

Para cada uno de los componentes de la diagonal:

$$R_{00} = R_{0\mu 0}^\mu = \partial_\mu \Gamma_{00}^\mu - \partial_0 \Gamma_{\mu 0}^\mu + \Gamma_{\mu\kappa}^\mu \Gamma_{00}^\kappa - \Gamma_{0\kappa}^\mu \Gamma_{\mu 0}^\kappa \quad 2 - 38$$

$$R_{00} = R_{0\mu 0}^\mu = -\partial_0 \Gamma_{\mu 0}^\mu - \Gamma_{0\kappa}^\mu \Gamma_{\mu 0}^\kappa \quad 2 - 39$$

$$R_{00} = -(\partial_0 \Gamma_{10}^1 + \partial_0 \Gamma_{20}^2 + \partial_0 \Gamma_{30}^3) - (\Gamma_{01}^1 \Gamma_{10}^1 + \Gamma_{02}^2 \Gamma_{20}^2 + \Gamma_{03}^3 \Gamma_{30}^3)$$

$$R_{00} = -\left(3\partial_0 \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right) \right) - \left(3 \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 \right)$$

$$R_{00} = -\left(3\partial_0 \left(\frac{\dot{a}(t)a(t) - a(t)^2}{a(t)^2} \right) \right) - 3 \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2$$

$$R_{00} = -3 \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} \quad 5.1.170$$

$$R_{11} = R_{1\mu 1}^\mu = \partial_\mu \Gamma_{11}^\mu - \partial_1 \Gamma_{\mu 1}^\mu + \Gamma_{\mu\kappa}^\mu \Gamma_{11}^\kappa - \Gamma_{1\kappa}^\mu \Gamma_{\mu 1}^\kappa \quad 2 - 40$$

$$R_{11} = (\partial_0 \Gamma_{11}^0 + \partial_1 \Gamma_{11}^1) - \partial_1 (\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{31}^3) + (\Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{10}^1 \Gamma_{11}^0 + \Gamma_{20}^2 \Gamma_{11}^0 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{30}^3 \Gamma_{11}^0 + \Gamma_{31}^3 \Gamma_{11}^1) - (\Gamma_{11}^0 \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{10}^1 \Gamma_{11}^0 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{13}^3 \Gamma_{31}^3)$$

$$R_{11} = \frac{\dot{a}(t)^2 + \ddot{a}(t)a(t)}{1 - kR^2} + \frac{2k}{1 - kR^2} + \frac{\dot{a}(t)^2}{1 - kR^2}$$

$$R_{11} = \frac{\ddot{a}(t)a(t) + 2\dot{a}(t)^2 + 2k}{1 - kR^2} \quad 2 - 41$$

$$R_{22} = R_{2\mu 2}^\mu = \partial_\mu \Gamma_{22}^\mu - \partial_2 \Gamma_{\mu 2}^\mu + \Gamma_{\mu\kappa}^\mu \Gamma_{22}^\kappa - \Gamma_{2\kappa}^\mu \Gamma_{\mu 2}^\kappa \quad 2 - 42$$

$$R_{22} = (\partial_0 \Gamma_{22}^0 + \partial_1 \Gamma_{22}^1) - \partial_2 \Gamma_{32}^3 + (\Gamma_{10}^1 \Gamma_{22}^0 + \Gamma_{31}^3 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{20}^2 \Gamma_{22}^0 + \Gamma_{30}^3 \Gamma_{22}^0 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1) - (\Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{23}^3 \Gamma_{32}^3 + \Gamma_{22}^0 \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{20}^2 \Gamma_{22}^0)$$

$$R_{22} = R^2 a''(t)a(t) + R^2 a'(t)^2 - 1 + 3kR^2 + \csc^2 \theta + 3R^2 a'(t)^2 - kR^2 - 2(1 - kR^2) + 2(1 - kR^2) - 2R^2 a'(t)^2 - \cot^2 \theta$$

$$R_{22} = R^2 a''(t)a(t) + 2R^2 a'(t)^2 + 2kR^2$$

$$R_{22} = R^2 (a''(t)a(t) + 2a'(t)^2 + 2k) \quad 2 - 43$$

$$R_{33} = R_{3\mu 3}^\mu = \partial_\mu \Gamma_{33}^\mu - \partial_3 \Gamma_{\mu 3}^\mu + \Gamma_{\mu\kappa}^\mu \Gamma_{33}^\kappa - \Gamma_{3\kappa}^\mu \Gamma_{\mu 3}^\kappa \quad 2 - 44$$

$$R_{33} = (\partial_0 \Gamma_{33}^0 + \partial_1 \Gamma_{33}^1 + \partial_2 \Gamma_{33}^2) + (\Gamma_{11}^1 \Gamma_{33}^1 + \Gamma_{10}^1 \Gamma_{33}^0 + \Gamma_{20}^2 \Gamma_{33}^0 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{33}^1 + \Gamma_{30}^3 \Gamma_{33}^0 + \Gamma_{31}^3 \Gamma_{33}^1 + \Gamma_{32}^3 \Gamma_{33}^2) - (\Gamma_{33}^0 \Gamma_{03}^3 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{23}^3 + \Gamma_{30}^3 \Gamma_{33}^0 + \Gamma_{31}^3 \Gamma_{33}^1 + \Gamma_{32}^3 \Gamma_{33}^2)$$

$$R_{33} = R^2 \sin^2 \theta (a''(t)a(t) + a'(t)^2) - \sin^2 \theta (1 - kR^2) + 2kR^2 \sin^2 \theta - \cos^2 \theta + \sin^2 \theta - kR^2 \sin^2 \theta + R^2 \sin^2 \theta a'(t)^2 + \cot \theta \sin \theta \cos \theta$$

$$R_{33} = R^2 \sin^2 \theta (a''(t)a(t) + a'(t)^2) + 2a'(t)^2 + 2k \quad 2 - 45$$

Teniendo las componentes del tensor de Ricci, se tiene la siguiente simplificación:

$$\Psi = a''(t)a(t) + 2a'(t)^2 + 2k \quad 2 - 46$$

$$R_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -3 \frac{a''(t)}{a(t)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Psi}{1 - kR^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Psi R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Psi R^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad 2 - 47$$

Para hallar el escalar de Ricci:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{00} R_{00} + g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33} \quad 2 - 48$$

$$R = -3 \frac{a''(t)}{a(t)} + \left(-\frac{1 - kR^2}{a(t)^2} \right) \left(\frac{\Psi}{1 - kR^2} \right) + \left(-\frac{1}{a(t)^2 R^2} \right) (\Psi R^2) + (\Psi R^2 \sin^2 \theta) \left(-\frac{1}{a(t)^2 R^2 \sin^2 \theta} \right)$$

$$R = -3 \frac{a''(t)}{a(t)} - 3 \frac{\Psi}{a(t)^2}$$

$$R = -3 \frac{a''(t)}{a(t)} - 3 \frac{a''(t)a(t) + 2a'(t)^2 + 2k}{a(t)^2}$$

$$R = -6 \left(\frac{a''(t)a(t) + a'(t)^2 + k}{a(t)^2} \right) \quad 2 - 49$$

Para hallar las ecuaciones de Friedmann de una manera más sencilla se tendrá en cuenta la forma del tensor energía-Momento:

Con subíndices:

$$T_{\mu\nu} = (\varphi + P)U_\mu U_\nu - P g_{\mu\nu} \quad 2 - 50$$

Con Índices mixtos:

$$T_\nu^\mu = (\varphi + P)U^\mu U_\nu - P \delta_\nu^\mu \quad 2 - 51$$

Con Supra índices:

$$T^{\mu\nu} = (\varphi + P)U^\mu U^\nu - P g^{\mu\nu} \quad 2 - 52$$

Se puede obtener:

$$T_\nu^\mu = g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = (\varphi + P)g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu - P g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \quad 2 - 53$$

Con el cuádrivector de velocidad teniendo en cuenta que el movimiento es con respecto al tiempo:

$$U^\mu = U_\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 2 - 54$$

$$T_0^0 = (\varphi + P)(1)(1) - P(1) = \varphi \quad 2 - 55$$

Para $\mu \neq \nu$ se tienen valores nulos debido a la cuádrivelocidad y la delta de kronecker:

$$T_0^1 = T_0^2 = T_0^3 = T_1^0 = T_1^2 = T_1^3 = T_2^0 = T_2^1 = T_2^3 = T_3^0 = T_3^1 = T_3^2 = 0 \quad 2 - 56$$

Para las componentes diferentes de cero:

$$T_1^1 = (\varphi + P)(0)(0) - P(1) = -P \quad 2 - 57$$

$$T_2^2 = (\varphi + P)(0)(0) - P(1) = -P \quad 2 - 58$$

$$T_3^3 = (\varphi + P)(0)(0) - P(1) = -P \quad 2 - 59$$

Se tiene el tensor de Energía-Momento:

$$T_\nu^\mu = \begin{pmatrix} \varphi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -P \end{pmatrix} \quad 2 - 60$$

Con φ como la densidad de energía y P representa la presión. Teniendo en cuenta la traza:

$$T_\nu^\mu = T = T_\mu^\mu = \varphi - 3P \quad 2 - 61$$

Teniendo el tensor de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad 2 - 62$$

$$G_{00} = R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R \quad 2 - 63$$

$$G_{00} = -3\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} - \frac{1}{2}\left(-6\left(\frac{\dot{a}(t)a(t) + a(t)^2 + k}{a(t)^2}\right)\right)$$

$$G_{00} = 3\left(\frac{\dot{a}(t)^2}{a(t)^2} + \frac{k}{a(t)^2}\right) \quad 2 - 64$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones de campo de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad 2 - 65$$

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \quad 2 - 66$$

Con μ y ν iguales a cero se tiene la relación de tiempo-tiempo:

$$G_{00} = 8\pi GT_{00} + \Lambda g_{00} \quad 2 - 67$$

$$3\left(\frac{\dot{a}(t)^2}{a(t)^2} + \frac{k}{a(t)^2}\right) = 8\pi G\varphi + \Lambda \quad 2 - 68$$

De donde se obtiene la primera ecuación de Friedmann:

$$\frac{\dot{a}(t)^2 + k}{a(t)^2} = \frac{8\pi G\varphi + \Lambda}{3} \quad 2 - 69$$

Para calcular la traza de una ecuación tensorial se debe multiplicar toda la ecuación por $g^{\mu\nu}$:

$$g^{\mu\nu}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right) = g^{\mu\nu}(8\pi GT_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}) \quad 2 - 70$$

$$R - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}R = 8\pi Gg^{\mu\nu}T_{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} \quad 2 - 71$$

Teniendo en cuenta que $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}$ da como resultado la dimensionalidad, esta será igual a 4; y $g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$ da la traza de la ecuación tensorial:

$$R - \frac{1}{2}DR = 8\pi GT + \Lambda D \quad 2 - 72$$

$$R - 2R = 8\pi GT + 4\Lambda$$

$$R = -8\pi GT + 4\Lambda \quad 2 - 73$$

Se multiplica la expresión obtenida por menos un medio del tensor métrico covariante:

$$-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 4\pi GT_{\mu\nu} - 2\Lambda g_{\mu\nu} \quad 2 - 74$$

Remplazando en las ecuaciones de campo:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \quad 2 - 75$$

$$R_{\mu\nu} + 4\pi GT_{\mu\nu} + 2\Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}$$

$$R_{\mu\nu} = -4\pi GT_{\mu\nu} - 2\Lambda g_{\mu\nu} + 8\pi GT_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}$$

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu} \right) - \Lambda g_{\mu\nu} \quad 2 - 76$$

Para este caso se puede utilizar los índices μ y ν en cero y el resultado será espacio-espacio:

$$R_{00} = 8\pi G \left(T_{00} - \frac{1}{2}Tg_{00} \right) - \Lambda g_{00} \quad 2 - 77$$

$$-3 \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = 8\pi G \left(\varphi - \frac{1}{2}(\varphi - 3P) \right) - \Lambda \quad 2 - 78$$

Obteniendo la segunda ecuación de Friedmann:

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4}{3}\pi G(\varphi - 3P) + \frac{\Lambda}{3} \quad 2 - 79$$

Anexo 3 (Métrica LTB)

El elemento de línea trabajado:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \frac{R'^2}{1 + 2E(r)} - R^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad 3 - 1$$

Se parte de una métrica general de espacio-tiempo que resulta ser simétrica con respecto al punto de origen, con las coordenadas (t, r, θ, φ) . Esto se da principalmente para que la métrica no cambie bajo rotaciones y no dependa de θ y φ .

$$ds^2 = A(t, r)dt^2 + B(t, r)dr^2 + C(t, r)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad 3 - 2$$

Se tiene en cuenta que t es el tiempo propio de las partículas que se mueven libremente. Todo esto da como resultado que la cuadrivelocidad:

$$U^\mu = U_\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 3 - 3$$

Y esto da como resultado:

$$g_{00} = -c^2 \quad 3 - 4$$

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + g_{rr} dr^2 + g_{\theta\theta}(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad 3 - 5$$

La componente $g_{\theta\theta}$ se define como el cuadrado de un radio físico $R(t, r)$, representando el radio de una esfera simétrica en el tiempo y la coordenada radial es la primera diferencia que se encuentra con relación a la métrica de FLRW, esta mantiene la simetría esférica y su variación con el radio presentando la inhomogeneidad.

$$g_{\theta\theta} = R(t, r) \quad 3 - 6$$

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + g_{rr} dr^2 + R(t, r)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad 3 - 7$$

Al usar las ecuaciones de Einstein y el tensor Energía-Momento del polvo $zT_{\mu\nu} = \rho U_\mu U_\nu$ da como resultado que g_{rr} debe estar relacionado con la derivada radial $\partial_r R$:

$$g_{rr} = \frac{R'^2}{1 + 2E(r)} \quad 3 - 8$$

$E(r)$ es una función arbitraria de integración que solo depende de la coordenada radial. Siendo esta la fuente de inhomogeneidad de este modelo, permitiendo saber la curvatura y como está varía en función del radio:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \frac{R'^2}{1 + 2E(r)} - R^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad 3 - 9$$

Por lo que, el tensor métrico:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R'^2}{1+2E(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad 3-10$$

Se realiza una sustitución para hallar los símbolos de Christoffel:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -X^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad 3-11$$

Teniendo en cuenta que para hallar los símbolos de Christoffel se usa el tensor métrico con supra índices, sus valores son:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{X^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{R^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix} \quad 3-12$$

Se tiene en cuenta los valores que puede tener el tensor, ya que, para los índices que no son iguales tomara un valor de cero, con la siguiente notación para las derivadas:

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial X^\mu} \rightarrow \partial_0 = \frac{\partial}{\partial X^0} \rightarrow \partial_{ct} = \frac{\partial}{\partial X^{ct}} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \quad 3-13$$

Teniendo el valor de las derivadas de los elementos con respecto a cada variable del tensor, es decir, corriendo los índices de 1 hasta 4, que representa la coordenada temporal y las tres coordenadas espaciales. Se tiene:

$$\begin{array}{ll} \partial_0 g_{00} = 0 & \partial_1 g_{00} = 0 \\ \partial_0 g_{11} = -2X\dot{X} & \partial_1 g_{11} = -2X'X \\ \partial_0 g_{22} = -2R\dot{R} & \partial_1 g_{22} = -2RR' \\ \partial_0 g_{33} = -2R\dot{R} \sin^2 \theta & \partial_1 g_{33} = -2RR' \sin^2 \theta \\ \partial_2 g_{00} = 0 & \partial_3 g_{00} = 0 \\ \partial_2 g_{11} = 0 & \partial_3 g_{11} = 0 \\ \partial_2 g_{22} = 0 & \partial_3 g_{22} = 0 \\ \partial_2 g_{33} = -2R^2 \sin \theta \cos \theta & \partial_3 g_{33} = 0 \end{array}$$

$$\Gamma_{33}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (\partial_3 g_{31} + \partial_3 g_{31} - \partial_1 g_{33}) \quad 3 - 30$$

$$\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{X^2} \right) (-(-2RR' \sin^2 \theta)) = -\frac{RR' \sin^2 \theta}{X^2} \quad 3 - 31$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (\partial_1 g_{22} + \partial_2 g_{12} - \partial_2 g_{12}) \quad 3 - 32$$

$$\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{R^2} \right) (-2RR') = \frac{R'}{R} \quad 3 - 33$$

$$\Gamma_{33}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (\partial_3 g_{32} + \partial_3 g_{32} - \partial_2 g_{33}) \quad 3 - 34$$

$$\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{R^2} \right) (-(-2R^2 \sin \theta \cos \theta)) = -\sin \theta \cos \theta \quad 3 - 35$$

$$\Gamma_{13}^3 = \frac{1}{2} g^{33} (\partial_1 g_{33} + \partial_3 g_{13} - \partial_3 g_{13}) \quad 3 - 36$$

$$\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \right) (-2RR' \sin^2 \theta) = \frac{R'}{R} \quad 3 - 37$$

$$\Gamma_{23}^3 = \frac{1}{2} g^{33} (\partial_2 g_{33} + \partial_3 g_{23} - \partial_3 g_{23}) \quad 3 - 38$$

$$\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \right) (-2R^2 \sin \theta \cos \theta) = \cot \theta \quad 3 - 39$$

Para hallar los símbolos de Christoffel se hace uso del tensor métrico covariante y su forma contravariante, esto más que ser una forma matemática o algebraica en el cálculo tensorial para elevar índices, muestra como el tensor covariante aporta información acerca de la variación de la métrica, es decir de la curvatura, y el tensor contravariante aporta una visión de proyección en la dirección (subir el índice), determinando como se comporta la curvatura en dicha dirección.

Para hallar el tensor de Riemann:

$$R_{\nu\sigma\gamma}^{\mu} = \partial_{\sigma} \Gamma_{\gamma\nu}^{\mu} - \partial_{\gamma} \Gamma_{\sigma\nu}^{\mu} + \Gamma_{\sigma\kappa}^{\mu} \Gamma_{\gamma\nu}^{\kappa} - \Gamma_{\gamma\kappa}^{\mu} \Gamma_{\sigma\nu}^{\kappa} \quad 3 - 40$$

Se tiene el tensor de Ricci:

$$R_{\nu\gamma} = R_{\nu\mu\gamma}^{\mu} = \partial_{\mu} \Gamma_{\gamma\nu}^{\mu} - \partial_{\gamma} \Gamma_{\mu\nu}^{\mu} + \Gamma_{\mu\kappa}^{\mu} \Gamma_{\gamma\nu}^{\kappa} - \Gamma_{\gamma\kappa}^{\mu} \Gamma_{\mu\nu}^{\kappa} \quad 3 - 41$$

Para cada uno de los componentes de la diagonal:

$$R_{00} = \Gamma_{01,0}^1 + \Gamma_{02,0}^2 + \Gamma_{03,0}^3 + \Gamma_{01}^1$$

$$\Gamma_{10}^1 + \Gamma_{02}^2 \Gamma_{20}^2 + \Gamma_{03}^3 \Gamma_{30}^3 \quad 3 - 42$$

$$R_{00} = \partial_0 \left(\frac{\dot{X}}{X} \right) + \partial_0 \left(\frac{\dot{R}}{R} \right) + \partial_0 \left(\frac{\dot{R}}{R} \right) + \left(-\frac{\dot{X}}{X} \right)^2 + \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 + \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2$$

$$R_{00} = \partial_0 \left(-\frac{\dot{X}}{X} \right) + 2\partial_0 \left(\frac{\dot{R}}{R} \right) - \left(\frac{\dot{X}}{X} \right)^2 + 2 \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2$$

$$R_{00} = \frac{\ddot{X}X - \dot{X}^2}{X^2} + 2 \frac{\ddot{R}R - \dot{R}^2}{R^2}$$

$$R_{00} = \frac{\ddot{X}}{X} + 2 \frac{\ddot{R}}{R} \quad 3 - 43$$

$$R_{11} = -\Gamma_{11,0}^0 + \Gamma_{12,1}^2 + \Gamma_{13,1}^3 + \Gamma_{11}^0 \Gamma_{01}^1 - \Gamma_{11}^0 \Gamma_{02}^2 - \Gamma_{11}^0 \Gamma_{03}^3 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{13}^3 \Gamma_{31}^3 \quad 3 - 44$$

$$R_{11} = -\partial_0(X\dot{X}) + \partial_1 \left(\frac{R'}{R} \right) + \partial_1 \left(\frac{R'}{R} \right) + (X\dot{X}) \left(\frac{\dot{X}}{X} \right) - (X\dot{X}) \left(\frac{\dot{R}}{R} \right) - (X\dot{X}) \left(\frac{\dot{R}}{R} \right) - \left(\frac{X'}{X} \right) \left(\frac{R'}{R} \right) - \left(\frac{X'}{X} \right) \left(\frac{R'}{R} \right) + \left(\frac{R'}{R} \right) \left(\frac{R'}{R} \right) + \left(\frac{R'}{R} \right) \left(\frac{R'}{R} \right)$$

$$R_{11} = -(\ddot{X}X) + 2 \left(\frac{R''}{R} \right) - 2 \left(\frac{X'R'}{XR} \right) - 2 \left(\frac{X\dot{X}\dot{R}}{R} \right) \quad 3 - 45$$

$$R_{22} = -\Gamma_{22,0}^0 - \Gamma_{22,1}^1 + \Gamma_{23,2}^3 - \Gamma_{22}^0 \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{22}^0 \Gamma_{02}^2 - \Gamma_{22}^0 \Gamma_{03}^3 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{22}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{23}^3 \Gamma_{32}^3 \quad 3 - 46$$

$$R_{22} = -\partial_0(R\dot{R}) - \partial_1 \left(-\frac{RR'}{X^2} \right) + \partial_2(\cot \theta) - (R\dot{R}) \left(\frac{\dot{X}}{X} \right) + (R\dot{R}) \left(\frac{\dot{R}}{R} \right) - (R\dot{R}) \left(\frac{\dot{R}}{R} \right) + \left(-\frac{RR'}{X^2} \right) \left(\frac{R'}{R} \right) - \left(-\frac{RR'}{X^2} \right) \left(\frac{R'}{R} \right) - \left(\frac{X'}{X} \right) \left(-\frac{RR'}{X^2} \right) + (\cot \theta)(\cot \theta)$$

$$R_{22} = -(\ddot{R}R + \dot{R}^2) + \partial_1 \left(\frac{(R'^2 + RR'')X^2 - (2X'X)RR'}{X^4} \right) + \left(\frac{-\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \right) - (R\dot{R}) \left(\frac{\dot{X}}{X} \right) + (R\dot{R}) \left(\frac{\dot{R}}{R} \right) - (R\dot{R}) \left(\frac{\dot{R}}{R} \right) + \left(-\frac{RR'}{X^2} \right) \left(\frac{R'}{R} \right) - \left(-\frac{RR'}{X^2} \right) \left(\frac{R'}{R} \right) - \left(\frac{X'}{X} \right) \left(-\frac{RR'}{X^2} \right) + (\cot^2 \theta)$$

$$R_{22} = -\ddot{R}R - \dot{R}^2 + \frac{(R'^2 + RR'')X^2 - (2X'X)RR'}{X^4} - (R\dot{R}) \left(\frac{\dot{X}}{X} \right) - \csc^2 \theta + (\cot^2 \theta)$$

$$R_{22} = -\ddot{R}R - \dot{R}^2 + \frac{R'^2}{X^2} + \frac{RR''}{X^2} - \frac{X'RR'}{X^3} - \frac{R\dot{R}\dot{X}}{X} - \csc^2 \theta + \cot^2 \theta \quad 3 - 47$$

$$R_{33} = -\Gamma_{33,0}^0 - \Gamma_{33,1}^1 - \Gamma_{33,2}^2 - \Gamma_{33}^0 \Gamma_{01}^1 - \Gamma_{33}^0 \Gamma_{02}^2 - \Gamma_{33}^1 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{33}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{31}^3 \Gamma_{33}^1 + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{23}^3 + \Gamma_{30}^3 \Gamma_{33}^0 \quad 3 - 48$$

$$R_{33} = -\partial_0(R\dot{R}\sin^2\theta) - \partial_1\left(-\frac{RR'\sin^2\theta}{X^2}\right) - \partial_2(-\sin\theta\cos\theta) - (R\dot{R}\sin^2\theta)\left(\frac{\dot{X}}{X}\right) - (R\dot{R}\sin^2\theta)\left(\frac{\dot{R}}{R}\right) - \left(-\frac{RR'\sin^2\theta}{X^2}\right)\left(\frac{X'}{X}\right) - \left(-\frac{RR'\sin^2\theta}{X^2}\right)\left(\frac{R'}{R}\right) + \left(\frac{R'}{R}\right)\left(-\frac{RR'\sin^2\theta}{X^2}\right) + (-\sin\theta\cos\theta)(\cot\theta) + \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)(R\dot{R}\sin^2\theta)$$

$$R_{33} = -(\ddot{R}R + \dot{R}^2)\sin^2\theta + \sin^2\theta\left(\frac{(R'^2 + RR'')X^2 - (2X'X)RR'}{X^4}\right) + (\cos^2\theta - \sin^2\theta) - (R\dot{R}\sin^2\theta)\left(\frac{\dot{X}}{X}\right) - (R\dot{R}\sin^2\theta)\left(\frac{\dot{R}}{R}\right) - \left(-\frac{RR'\sin^2\theta}{X^2}\right)\left(\frac{X'}{X}\right) - \left(-\frac{RR'\sin^2\theta}{X^2}\right)\left(\frac{R'}{R}\right) + \left(\frac{R'}{R}\right)\left(-\frac{RR'\sin^2\theta}{X^2}\right) + (-\sin\theta\cos\theta)(\cot\theta) + \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)(R\dot{R}\sin^2\theta)$$

$$R_{33} = -\ddot{R}R\sin^2\theta - \dot{R}^2\sin^2\theta + \frac{R'^2\sin^2\theta}{X^2} + \frac{RR''\sin^2\theta}{X^2} - \frac{R\dot{R}\dot{X}\sin^2\theta}{X} - \frac{RR'X'\sin^2\theta}{X^3} - \sin^2\theta \quad 3 - 49$$

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33} \quad 3 - 50$$

$$R = \left(\frac{\ddot{X}}{X} + 2\frac{\ddot{R}}{R}\right) + \left(-\frac{1}{X^2}\right)\left(-(\ddot{X}X) + 2\left(\frac{R''}{R}\right) - 2\left(\frac{X'R'}{XR}\right) - 2\left(\frac{X\dot{X}\dot{R}}{R}\right)\right) + \left(-\frac{1}{R^2}\right)\left(-\ddot{R}R - \dot{R}^2 + \frac{R'^2}{X^2} + \frac{RR''}{X^2} - \frac{X'RR'}{X^3} - \frac{R\dot{R}\dot{X}}{X} - \csc^2\theta + \cot^2\theta\right) + \left(-\frac{1}{R^2\sin^2\theta}\right)\left(-\ddot{R}R\sin^2\theta - \dot{R}^2\sin^2\theta + \frac{R'^2\sin^2\theta}{X^2} + \frac{RR''\sin^2\theta}{X^2} - \frac{R\dot{R}\dot{X}\sin^2\theta}{X} - \frac{RR'X'\sin^2\theta}{X^3} - \sin^2\theta\right)$$

$$\begin{aligned}
R &= -\frac{\ddot{X}}{X} + 2\frac{\ddot{R}}{R} + \left(\frac{\ddot{X}}{X}\right) - 2\left(\frac{R''}{RX^2}\right) + 2\left(\frac{X'R'}{X^3R}\right) + 2\left(\frac{\dot{X}\dot{R}}{XR}\right) + \frac{\dot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} - \frac{R'^2}{X^2R^2} - \frac{R''}{X^2R} \\
&\quad + \frac{X'R'}{X^3R} + \frac{\dot{R}\dot{X}}{RX} + \frac{\csc^2\theta}{R^2} - \frac{\cot^2\theta}{R^2} + \frac{\dot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} - \frac{R'^2}{X^2R^2} - \frac{R''}{X^2R} + \frac{\dot{R}\dot{X}}{XR} + \frac{R'X'}{X^3R} \\
&\quad + \frac{1}{R^2} \\
R &= 2\frac{\ddot{X}}{X} + 4\frac{\ddot{R}}{R} - 4\left(\frac{R''}{RX^2}\right) + 4\left(\frac{X'R'}{X^3R}\right) + 4\left(\frac{\dot{X}\dot{R}}{XR}\right) + 2\frac{\dot{R}^2}{R^2} - 2\frac{R'^2}{X^2R^2} + \frac{2}{R^2} \quad 3-51
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que para el modelo LTB se usa una distribución de polvo, el tensor de Energía-Momento:

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho(r,t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad T = \rho(r,t) \quad 3-52$$

$$G_{00} = R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R \quad 3-53$$

$$\begin{aligned}
G_{00} &= \left(\frac{\ddot{X}}{X} + 2\frac{\ddot{R}}{R}\right) \\
&\quad - \frac{1}{2}\left(2\frac{\ddot{X}}{X} + 4\frac{\ddot{R}}{R} - 4\left(\frac{R''}{RX^2}\right) + 4\left(\frac{X'R'}{X^3R}\right) + 4\left(\frac{\dot{X}\dot{R}}{XR}\right) + 2\frac{\dot{R}^2}{R^2} - 2\frac{R'^2}{X^2R^2} + \frac{2}{R^2}\right) \\
G_{00} &= \frac{\ddot{X}}{X} + 2\frac{\ddot{R}}{R} + -\frac{\ddot{X}}{X} - 2\frac{\ddot{R}}{R} + 2\left(\frac{R''}{RX^2}\right) - 2\left(\frac{X'R'}{X^3R}\right) - 2\left(\frac{\dot{X}\dot{R}}{XR}\right) - \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{R'^2}{X^2R^2} - \frac{1}{R^2} \\
G_{00} &= 2\left(\frac{R''}{RX^2}\right) - 2\left(\frac{X'R'}{X^3R}\right) - 2\left(\frac{\dot{X}\dot{R}}{XR}\right) - \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{R'^2}{X^2R^2} - \frac{1}{R^2} \quad 3-54
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones de campo de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad 3-55$$

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \quad 3-56$$

Con μ y ν iguales a cero se tiene la relación de tiempo-tiempo:

$$G_{00} = 8\pi GT_{00} + \Lambda g_{00} \quad 3-57$$

$$2\left(\frac{R''}{RX^2}\right) - 2\left(\frac{X'R'}{X^3R}\right) - 2\left(\frac{\dot{X}\dot{R}}{XR}\right) - \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{R'^2}{X^2R^2} - \frac{1}{R^2} = 8\pi G\varphi + \Lambda \quad 3-58$$

De donde se obtiene la primera ecuación de Friedmann:

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = 8\pi G\varphi + \Lambda - 2\left(\frac{R'}{RX^2}\right) + 2\left(\frac{X'R'}{X^3R}\right) + 2\left(\frac{\dot{X}\dot{R}}{XR}\right) - \frac{R'^2}{X^2R^2} + \frac{1}{R^2} \quad 3 - 59$$

Para calcular la traza de una ecuación tensorial se debe multiplicar toda la ecuación por $g^{\mu\nu}$:

$$g^{\mu\nu}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right) = g^{\mu\nu}(8\pi GT_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}) \quad 3 - 60$$

$$R - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}R = 8\pi Gg^{\mu\nu}T_{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} \quad 3 - 61$$

Teniendo en cuenta que $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}$ da como resultado la dimensionalidad, esta será igual a 4; y $g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$ da la traza de la ecuación tensorial:

$$R - \frac{1}{2}DR = 8\pi GT + \Lambda D \quad 3 - 62$$

$$R - 2R = 8\pi GT + 4\Lambda$$

$$R = -8\pi GT + 4\Lambda \quad 3 - 63$$

Se multiplica la expresión obtenida por menos un medio del tensor métrico covariante:

$$-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 4\pi GTg_{\mu\nu} - 2\Lambda g_{\mu\nu} \quad 3 - 64$$

Remplazando en las ecuaciones de campo:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \quad 3 - 65$$

$$R_{\mu\nu} + 4\pi GTg_{\mu\nu} + 2\Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}$$

$$R_{\mu\nu} = -4\pi GTg_{\mu\nu} - 2\Lambda g_{\mu\nu} + 8\pi GT_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}$$

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}\right) - \Lambda g_{\mu\nu} \quad 3 - 66$$

Para este caso se puede utilizar los índices μ y ν en cero y el resultado será espacio-espacio:

$$R_{00} = 8\pi G\left(T_{00} - \frac{1}{2}Tg_{00}\right) - \Lambda g_{00} \quad 3 - 67$$

$$\frac{\ddot{X}}{X} + 2\frac{\ddot{R}}{R} = 8\pi G\left(\varphi - \frac{1}{2}(\varphi)\right) - \Lambda$$

$$\frac{\ddot{X}}{X} + 2\frac{\ddot{R}}{R} = 4\pi G\varphi - \Lambda \quad 3 - 68$$

Obteniendo la segunda ecuación de Friedmann:

$$\frac{\ddot{R}}{R} = 2\pi G\varphi - \frac{1}{2}\frac{\dot{X}}{X} - \frac{1}{2}\Lambda \quad 3-6$$

Anexo 4 (Parámetros Cosmológicos LTB)

Se tiene en cuenta que para hallar la densidad de materia total y dentro de la primer ecuación de Friedmann del modelo de Lemaitre-Tolman-Bondi se usan los valores aproximados que se han registrado para nuestro universo, en este sentido se tiene en cuenta el valor de la densidad de materia, la densidad de energía oscura y el parámetro de Hubble hallados por el proyecto Plank en agosto del año 2021 de la sección TT+lowE para hallar los datos anteriormente mencionados, los datos registrados son:

$$\Omega_m = 0,321 \quad , \quad H_0 = 66.88 \text{ km/s/Mpc}$$

Para hallar la densidad de materia de nuestro universo se tendrá en cuenta la densidad crítica:

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad 4 - 1$$

Y el valor de la constante de gravitación universal:

$$G = 6,6743 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg} \quad 4 - 2$$

$$\rho_c = \frac{3 \left(66.88 \frac{km}{sMpc} \times \frac{Mpc}{3,086 \times 10^{19} km} \right)^2}{8\pi \left(6,6743 \times 10^{-11} \frac{m^3}{s^2 kg} \right)} \quad 4 - 3$$

$$\rho_c = \frac{1.4090 \times 10^{-35} \frac{1}{s^2}}{1,6774 \times 10^{-9} \frac{m^3}{s^2 kg}}$$

$$\rho_c = \frac{1.4090 \times 10^{-35} \text{ kg}}{1,6774 \times 10^{-9} \text{ m}^3}$$

$$\rho_c = 8.3999 \times 10^{-27} \frac{kg}{m^3} \quad 4 - 4$$

Recordando la relación entre la presión crítica, la densidad de materia ρ_m y el parámetro de densidad de materia total Ω_m :

$$\rho_m = \Omega_m \rho_c \quad 4 - 5$$

$$\rho_m = (0,321) \left(8.3999x10^{-27} \frac{kg}{m^3} \right)$$

$$\rho_m = 2,6963x10^{-27} \frac{kg}{m^3} \quad 4 - 6$$

La densidad de materia obtenida de los datos observacionales:

$$\rho_m = 2,6963x10^{-27} \frac{kg}{m^3} \quad 4 - 7$$

De forma análoga se halla el valor de la densidad de energía oscura ρ_Λ con base en los datos hallados del parámetro cosmológico de densidad de energía oscura (Ω_Λ):

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2} \quad 4 - 8$$

Teniendo en cuenta el valor de la constante cosmológica:

$$\Lambda = 10x10^{-53} \quad , \quad \Omega_\Lambda = 0,679 \quad 4 - 9$$

$$\rho_\Lambda = \Omega_\Lambda \rho_c \quad 7.1.289$$

$$\rho_\Lambda = (0,679) \left(8.4155x10^{-27} \frac{kg}{m^3} \right) \quad 4 - 10$$

El valor de la densidad de energía oscura obtenida de los datos observacionales es:

$$\rho_\Lambda = 5,7141x10^{-27} \frac{kg}{m^3} \quad 4 - 11$$

Anexo 5

Inniverse es una interfaz mediada por las tecnologías de la información y las comunicaciones (TIC), que nació por el amplio interés de profundizar en conocimientos de la Astronomía y en específico de la Cosmología acerca del estudio físico y geométrico de un modelo de universo realista, debido a que en los programas ofrecidos por la licenciatura en física no se aborda por diferentes factores, no obstante, esta interfaz busca acercar al estudiante a este análisis de la evolución del universo, con el fin de que tenga las herramientas conceptuales y matemáticas para dicho estudio, cabe resaltar que INNIVERSE busca incentivar el estudio de esta rama de la astronomía en específico, ya que toma conceptos que se ven en cursos como Relatividad General y Agujeros Negros y Cosmología, y con base en este conocimiento da cuenta de la reconstrucción de un modelo de universo realista.

Cabe resaltar que la creación de INNIVERSE de autoría propia y se rige bajo la licencia:

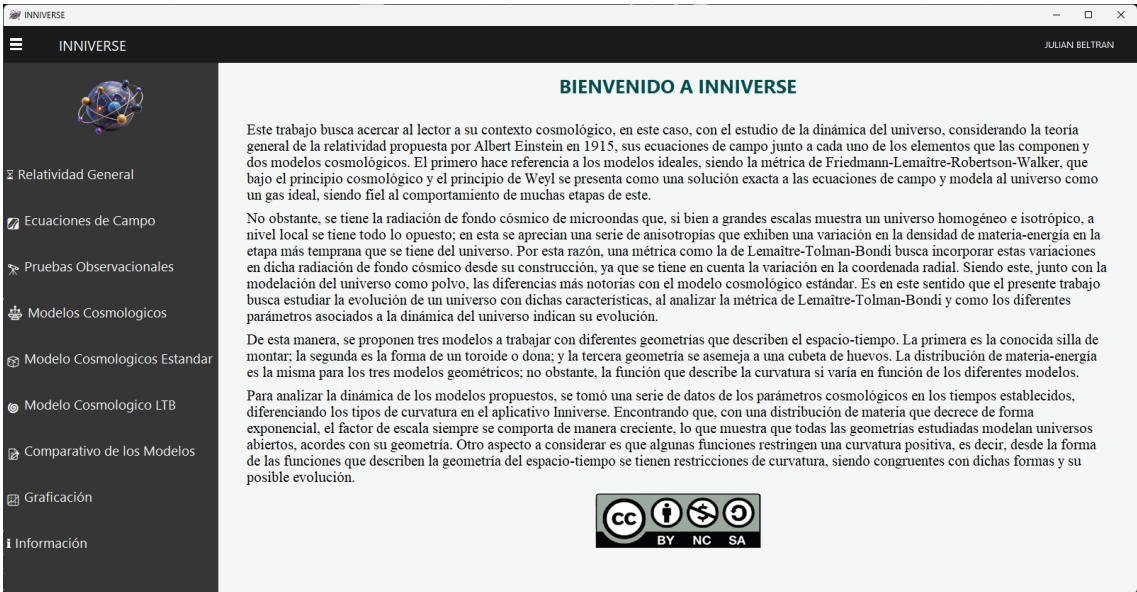
INNIVERSE © 2025 de JULIAN BELTRAN está licenciado bajo CC BY-NC-SA 4.0. Para ver una copia de esta licencia, visite <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Partes de INNIVERSE

Inniverse cuenta con un total de 11 secciones, aparte de la portada y la sección de información, en donde se muestra información desde la relatividad general hasta los datos para la realización del análisis físico y geométrico de la evolución del modelo de universo elegido, estas secciones son:

1. Portada

Esta información inicial contextualiza al usuario acerca del fin y lo que se encontrará en el aplicativo:



The screenshot displays the INNIVERSE application interface. At the top, there is a navigation bar with the INNIVERSE logo on the left and the user name 'JULIAN BELTRAN' on the right. Below the navigation bar is a sidebar menu with the following items: 'Relatividad General', 'Ecuaciones de Campo', 'Pruebas Observacionales', 'Modelos Cosmologicos', 'Modelo Cosmologicos Estandar', 'Modelo Cosmologico LTB', 'Comparativo de los Modelos', 'Graficación', and 'Información'. The main content area is titled 'BIENVENIDO A INNIVERSE' and contains the following text:

Este trabajo busca acercar al lector a su contexto cosmológico, en este caso, con el estudio de la dinámica del universo, considerando la teoría general de la relatividad propuesta por Albert Einstein en 1915, sus ecuaciones de campo junto a cada uno de los elementos que las componen y dos modelos cosmológicos. El primero hace referencia a los modelos ideales, siendo la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, que bajo el principio cosmológico y el principio de Weyl se presenta como una solución exacta a las ecuaciones de campo y modela al universo como un gas ideal, siendo fiel al comportamiento de muchas etapas de este.

No obstante, se tiene la radiación de fondo cósmico de microondas que, si bien a grandes escalas muestra un universo homogéneo e isotrópico, a nivel local se tiene todo lo opuesto; en esta se aprecian una serie de anisotropías que exhiben una variación en la densidad de materia-energía en la etapa más temprana que se tiene del universo. Por esta razón, una métrica como la de Lemaître-Tolman-Bondi busca incorporar estas variaciones en dicha radiación de fondo cósmico desde su construcción, ya que se tiene en cuenta la variación en la coordenada radial. Siendo este, junto con la modelación del universo como polvo, las diferencias más notorias con el modelo cosmológico estándar. Es en este sentido que el presente trabajo busca estudiar la evolución de un universo con dichas características, al analizar la métrica de Lemaître-Tolman-Bondi y como los diferentes parámetros asociados a la dinámica del universo indican su evolución.

De esta manera, se proponen tres modelos a trabajar con diferentes geometrías que describen el espacio-tiempo. La primera es la conocida silla de montar; la segunda es la forma de un toroide o dona; y la tercera geometría se asemeja a una cubeta de huevos. La distribución de materia-energía es la misma para los tres modelos geométricos; no obstante, la función que describe la curvatura sí varía en función de los diferentes modelos.

Para analizar la dinámica de los modelos propuestos, se tomó una serie de datos de los parámetros cosmológicos en los tiempos establecidos, diferenciando los tipos de curvatura en el aplicativo Inniverse. Encontrando que, con una distribución de materia que decrece de forma exponencial, el factor de escala siempre se comporta de manera creciente, lo que muestra que todas las geometrías estudiadas modelan universos abiertos, acordes con su geometría. Otro aspecto a considerar es que algunas funciones restringen una curvatura positiva, es decir, desde la forma de las funciones que describen la geometría del espacio-tiempo se tienen restricciones de curvatura, siendo congruentes con dichas formas y su posible evolución.

At the bottom of the main content area, there is a Creative Commons license logo (CC BY-NC-SA).

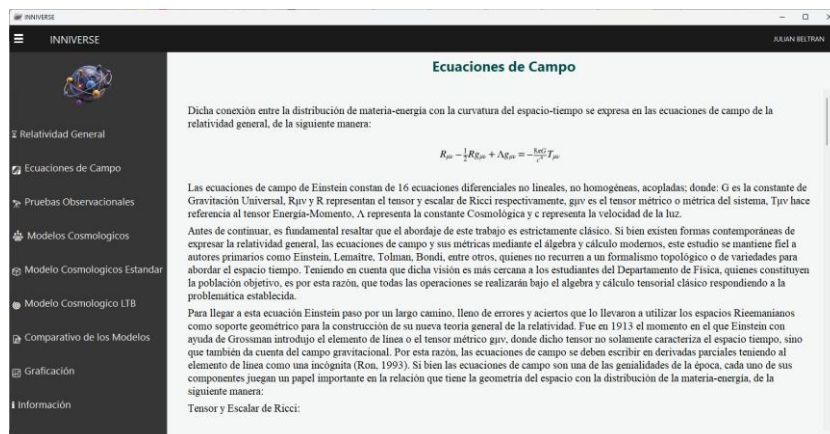
2. Relatividad General

En esta sección se tiene una breve introducción a la relatividad general y sus postulados.



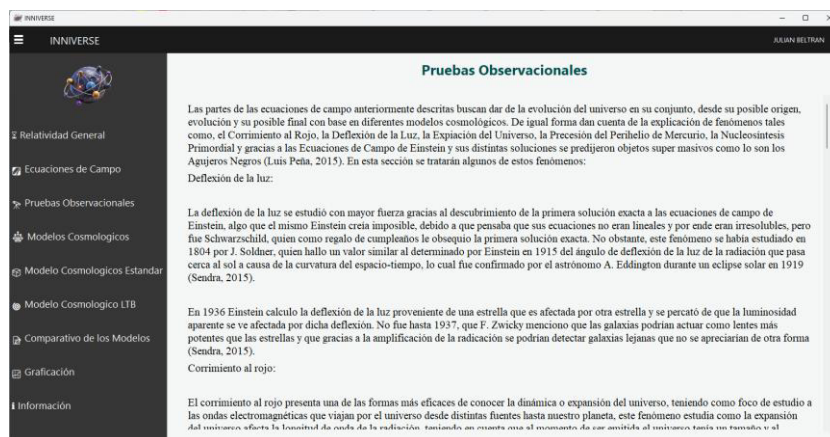
3. Ecuaciones de Campo:

En esta sección se tiene la presentación de las ecuaciones de campo de Einstein junto a sus partes.



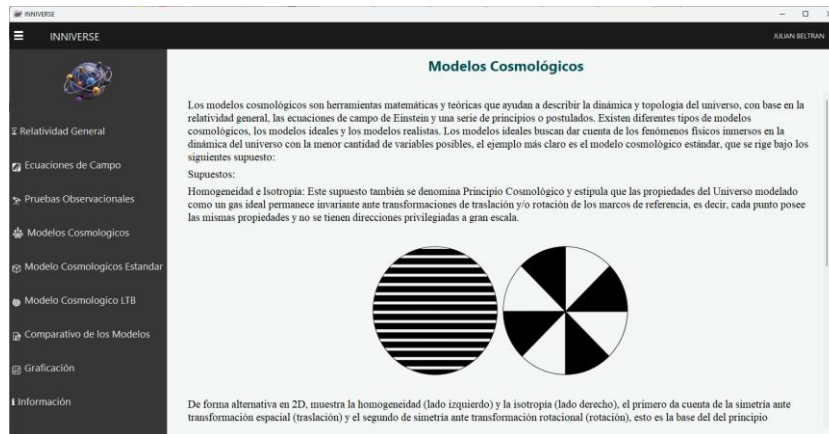
4. Pruebas Observacionales:

Esta sección muestra las pruebas observacionales que se usan como test para los diferentes modelos cosmológicos.



5. Modelos Cosmológicos:

Esta sección expone los diferentes modelos cosmológicos que se pueden tener, el principio de homogeneidad e isotropía junto al postulado de Weyl.



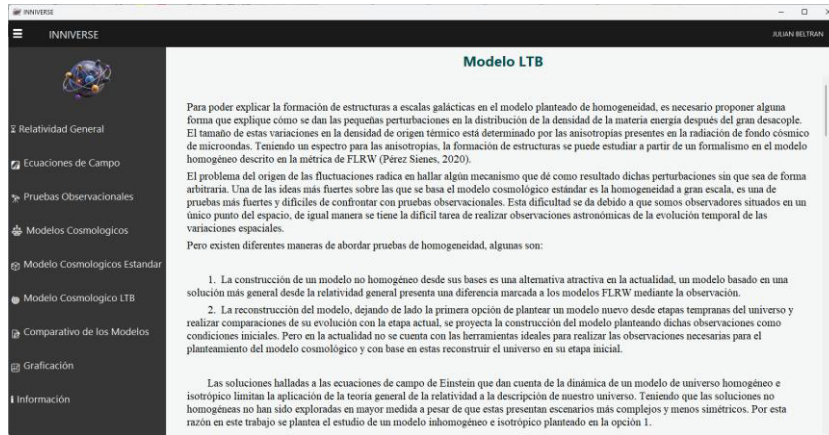
6. Modelo Cosmológico Estándar:

En esta sección se tiene la presentación del modelo cosmológico estándar con su métrica y los diferentes parámetros cosmológicos.



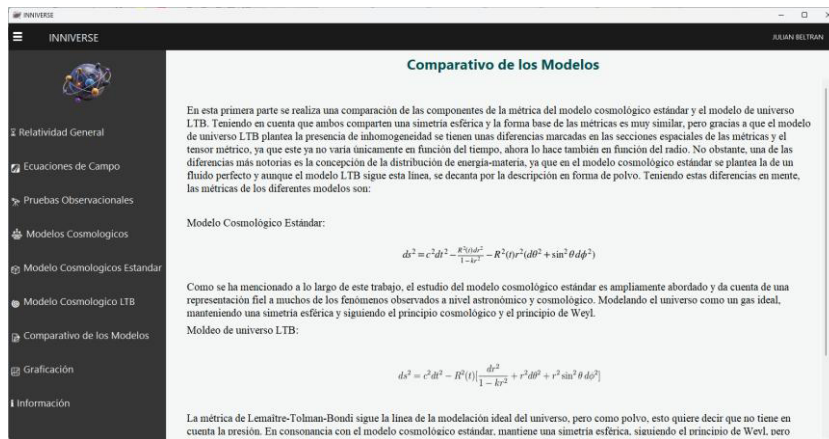
7. Modelo Cosmológico LTB:

Esta sección muestra el modelo cosmológico de Lemaitre-Tolman-Bondi junto a su métrica y los diferentes parámetros cosmológicos.



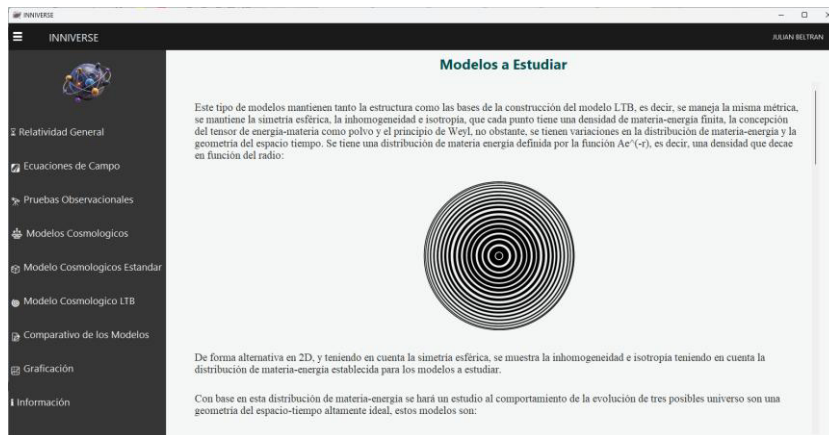
8. Comparativo de Modelos:

Esta sección de forma breve expone una comparación de la métricas de los dos modelos cosmológicos abordados en la interfaz.



9. Graficación:

Esta sección muestra a modo de introducción las condiciones y características que siguen los modelos cosmológicos a trabajar.



Para las siguientes 3 secciones que hacen referencia a los modelos a trabajar se tiene que en primera instancia se expone la ecuación de la geometría establecida, luego se tienen

las funciones auxiliares que determinan la densidad de materia-energía y la curvatura del espacio tiempo y por ultimo se tiene la derivada del factor de escala a trabajar.

En cuento a las graficas se tiene en primer una superficie en 3D que ilustra la geometría del espacio-tiempo establecida, luego se tiene un comparativo de la evolución del factor de escala para las tres geometrías posibles (con $b = 1, -1$ o 0), luego se tiene una gráfica de la evolución del factor de escala y de su derivada para el tipo de geometría establecido. Finalmente se tiene una tabla que muestra el valor para los diferentes parámetros cosmológicos, siendo estos: el factor de escala, el parámetro de Hubble, el parámetro de densidad de materia total, el parámetro de densidad de energía oscura, el parámetro de densidad de curvatura, la edad del universo y el tamaño del universo en función del valor del parámetro de Hubble.

10. Modelo 1:

Modelo de Silla de Montar

$$z = x^2 - y^2$$

Esta ecuación describe la construcción de la geometría en 3D

Funciones auxiliares:

$$F(r) = e^{-r}$$

$$k(r) = Br^n$$

Se tiene en cuenta que la función $F(r)$ que describe la distribución de materia-energía ya esta establecida y la función que describe la curvatura $k(r)$ da cuenta de la geometría a estudiar y se establece el valor de n como la unidad, para facilidad del estudio de este modelo.

Factor de Escala:

$$\dot{R} = \sqrt{\frac{c^2}{8} + \frac{1}{2} \pi G \rho_m R^2 - Br}$$

Este será el factor de escala que se estudiará, al variar los valores de la constante B en los diferentes tiempos que se miden en Giga años.

Geometría del Modelo (B = -1)

11. Modelo 2:

Modelo de Dona (Toroides)

$$z = x^2 - y^2$$

Esta ecuación describe la construcción de la geometría en 3D

Funciones auxiliares:

$$F(r) = e^{-r}$$

$$k(r) = B/r^2$$

Se tiene en cuenta que la función $F(r)$ que describe la distribución de materia-energía ya esta establecida y la función que describe la curvatura $k(r)$ da cuenta de la geometría a estudiar.

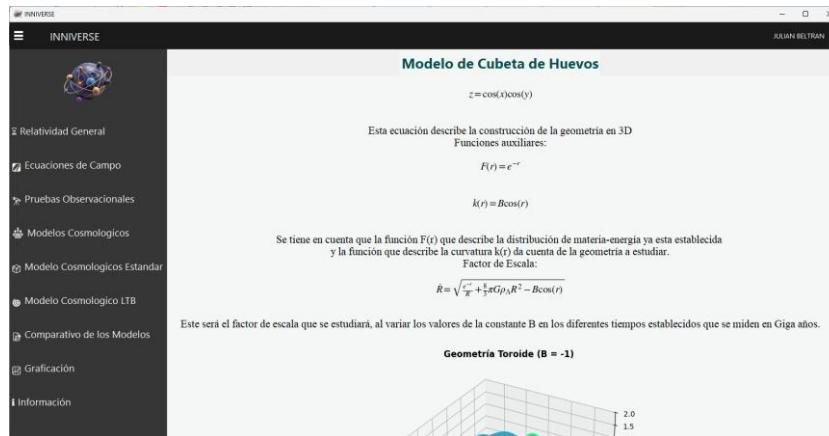
Factor de Escala:

$$\dot{R} = \sqrt{\frac{c^2}{8} + \frac{1}{2} \pi G \rho_m R^2 - \frac{B}{r}}$$

Este será el factor de escala que se estudiará, al variar los valores de la constante B en los diferentes tiempos establecidos que se miden en Giga años.

Geometría Toroides (B = -1)

12. Modelo 3:



13. Información:

Y finalmente se tiene una sección de información que tiene los datos personales del autor y el correo de contacto al cual se podrían comunicar en caso de necesitar algún tipo de información acerca del aplicativo.



Aplicativo:

Las imágenes que se muestran son la totalidad del aplicativo, para acceder a este de forma completa entre al siguiente enlace:

https://drive.google.com/drive/folders/1M8zrvXyw8ytWypBHjd9ASFJpLkvD-xEW?usp=drive_link

Aquí solamente debe darle descargar al archivo y colocarlo en su escritorio, debe dar doble clic para abrirlo.

Manual

Como se menciono anteriormente, las bases de este trabajo se abordan en los cursos de Relatividad General y Agujeros y Cosmología, por tal razón se espera que el aplicativo INNIVERSE sea usado desde cada una de estas materias, teniendo en cuenta que expone

diferentes conceptos clave para el estudio de la Relatividad, como lo es la homogeneidad e Isotropía, las ecuaciones de campo y la métrica del modelo cosmológico estándar. Por esta razón se puede usar como una herramienta al interior de las clases, como una alternativa en algunos casos visual que ayude a observar el fenómeno a estudiar, como una alternativa conceptual, ya que ofrece una visión diferente de los conceptos o como una alternativa matemática, debido a que en el trabajo que sustenta la información utilizada se tiene de forma rigurosa muchos de los procesos que se deben llevar a cabo para la reconstrucción de los diferentes elementos matemáticos.

Es así, como INNIVERSE se ve como una alternativa con la cual se puede abordar una serie de conceptos clave para el estudio de la relatividad y la cosmología, que puede llevar al estudio físico y geométrico de la evolución de un modelo de universo alternativo, teniendo en cuenta que también se presentan los diferentes parámetros con los cuales se estudia la dinámica del universo. De igual forma INNIVERSE se puede utilizar para reforzar el estudio de conceptos previos, teniendo en cuenta en que curso de la licenciatura se implemente, si se usara en el tópico de profundización de Agujeros y Cosmología, serviría como bagaje conceptual desde la Relatividad Especial, con el énfasis de las ecuaciones de campo y sus partes, teniendo en cuenta que también se aborda la métrica del modelo cosmológico estándar que es el eje dorsal de dicho tópico. Si se usara en el tópico de Relatividad General, sería un apoyo debido a que se abordan los principios de la Relatividad General, las ecuaciones de campo y la métrica del modelo estándar de la cosmología, también se tiene un análisis de la métrica y como esta modela al universo. Finalmente es de gran importancia resaltar que INNIVERSE nace para ser parte de los procesos formativos que se llevan a cabo en la Licenciatura en Física y no busca plantear o establecer una ruta de aprendizaje para los estudiantes o un listado de conceptos o temas para los profesores de los diferentes espacios académicos, de igual forma se tiene que esta interfaz es una invitación para que el estudiante desde su autonomía se acerque de forma introductoria a los análisis que se llevan a cabo en el estudio de la dinámica de un modelo de universo realista.

En este sentido se deja a consideración del docente o estudiante la forma en la que se implementara el uso de INNIVERSE en los diferentes procesos de Enseñanza-Aprendizaje que se implemente.

Sección	Curso
1	Relatividad General y Agujeros Negros y Cosmología
2	Relatividad General y Agujeros Negros y Cosmología
3	Relatividad General y Agujeros Negros y Cosmología
4	Relatividad General y Agujeros Negros y Cosmología
5	Relatividad General y Agujeros Negros y Cosmología
6	Profundización
7	Profundización
8	Profundización

En esta tabla se establece en que cursos se podría implementar la interfaz INNIVERSE como una alternativa para abordar las temáticas o como refuerzo.