

**Modelación de sólidos de revolución cuando el eje de rotación
es una recta oblicua**

José Norbeiro Ramírez Rayo

**Universidad Pedagógica Nacional
Facultad De Ciencia Y Tecnología
Departamento De Matemáticas
Bogotá D.C.
2025**

**Modelación de sólidos de revolución cuando el eje de rotación
es una recta oblicua**

José Norbeiro Ramírez Rayo
C.C:1006027196
Codigo:2018240053

Monografía como requisito parcial para optar por el título de Licenciado en Matemáticas

Director:
Prof. Benjamín Sarmiento Lugo

Universidad Pedagógica Nacional
Facultad De Ciencia Y Tecnología
Departamento De Matemáticas
Bogotá D.C.
2025

Tabla de contenidos

Capítulo 1 - Preliminares.....	7
1.1 Introducción.....	7
1.2 Justificación.....	9
1.3 Objetivos.....	11
Objetivo general.....	11
Objetivos específicos.....	11
Capítulo 2 – Marco conceptual.....	12
2.1 Sólidos de revolución.....	12
2.2 Modelos para volumen.....	12
2.2.1 Modelo para volumen por el método de discos.....	12
2.2.2 Modelo para volumen por el método de arandelas.....	17
2.2.3 Modelo para volumen por el método de capas cilíndricas.....	20
2.2.4 Modelo para área de una superficie de revolución.....	24
Capítulo 3 – Desarrollo de modelos para ejes oblicuos.....	27
3.1 Modelo para área de una región plana.....	27
3.2 Modelo para volumen de un sólido de revolución.....	39
3.3 Modelo para área de superficie de revolución.....	40
Capítulo 4 – Aplicación de los modelos.....	43
4.1 Ejemplo 1.....	43
4.1.1 Área de la región plana.....	43
4.1.2 Volumen del sólido de revolución.....	44
4.1.3 Área de superficie de revolución.....	45
4.2 Ejemplo 2.....	45
4.2.1 Área de la región plana.....	45
4.2.2 Volumen del sólido de revolución.....	47
4.2.3 Área de superficie de revolución.....	48
4.3 Ejemplo 3.....	48
4.3.1 Área de la región plana.....	48
4.3.2 Volumen del sólido de revolución.....	49
4.3.3 Área de superficie de revolución.....	51
Capítulo 5 – El aplicativo digital Oblique-Axis.....	52
5.1 La herramienta DescartesJS.....	52
5.1.1 ¿Qué es un applet?.....	52

5.1.2	Interfaz de DescartesJS	52
5.2	El aplicativo Oblique-Axis	58
5.3	Ejemplo de uso del aplicativo Oblique-Axis	60
	Conclusiones	62
	Referencias bibliográficas	63
	Anexos	65

Tabla de figuras

Figura 1: <i>Función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$</i>	13
Figura 2: Cuadrilátero i -ésimo representativo	14
Figura 3: Trapecios representativos que cubren el área encerrada entre la función y el eje de revolución	15
Figura 4: Bosquejo del sólido usando discos representativos	17
Figura 5: Funciones $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo $[a, b]$	18
Figura 6: Área bajo las curvas	18
Figura 7: <i>Vista en el plano del rectángulo representativo</i>	21
Figura 8: <i>Vista en el espacio del tubo formado por el rectángulo representativo.</i>	22
Figura 9: Área de rotación encerrada en la función $f(x)$, $y = 0$, $x = a$ y $x = b$	23
Figura 10: Sólido generado por el área de rotación.....	23
Figura 11: vista de la región plana y del rectángulo representativo	23
Figura 12: vista de la capa cilíndrica generada por el rectángulo representativo.....	23
Figura 13: Generatriz k -ésima representativa.....	25
Figura 14: Representación de la función $f(x)$ y el eje de revolución $g(x) = mx + b$	27
Figura 15: <i>Representación del punto x_j, la imagen $f(x)$ y su proyección en el eje de revolución.</i>	28
Figura 16: <i>Representación del punto $x_j + 1$ a una distancia Δx_j, la imagen $f(x_j + 1)$ y su proyección en el eje de revolución.</i>	29
Figura 17: <i>Representación de la función $y = f(x)$, el eje de revolución $g(x) = mx + b$ y la recta secante que pasa por las imágenes de los valores x_j y $x_j + 1$.</i>	30
Figura 18: <i>Representación de las funciones y el diferencial de distancia Δk_j en el eje de revolución.</i>	31
Figura 19: <i>Trapezio representativo.</i>	32
Figura 20: Trapecio representativo con la distancia Δx_j y el ángulo del eje de revolución β	32
Figura 21: Triángulo rectángulo IGJ.	33
Figura 22: <i>Trapezio representativo con el triángulo IJP.</i>	34
Figura 23: <i>Triángulo QRS para definir las identidades de α en términos de la pendiente.</i>	36

Figura 24: <i>Triangulo MIK usado para definir Li.</i>	37
Figura 25: <i>Representación de la función junto con el eje de revolución y la secante por los puntos I y J.</i>	41
Figura 26: <i>Área del ejemplo 1</i>	44
Figura 27: <i>Sólido del ejemplo 1</i>	45
Figura 28: <i>Representación del área del ejemplo 2</i>	46
Figura 29: <i>Representación del sólido del ejemplo 2.</i>	47
Figura 30: <i>Representación del área del ejemplo 3</i>	49
Figura 31: <i>Representación del sólido del ejemplo 3.</i>	50
Figura 32. <i>Pantalla inicial de DescartesJS.</i>	54
Figura 33. <i>Tablero para configurar la escena o aspecto del Applet</i>	54
Figura 34. <i>Tablero de configuración del espacio</i>	55
Figura 35. <i>Ubicación las pestañas “Controles” y “Definiciones”</i>	55
Figura 36. <i>Tablero de programación</i>	56
Figura 37. <i>Tablero de gráficos para el plano</i>	56
Figura 38. <i>Tablero para configurar movimiento</i>	57
Figura 39. <i>Tablero de Gráficos 3D</i>	57
Figura 40: <i>Pantalla inicial del aplicativo</i>	58
Figura 41: <i>Espacio para ingreso de funciones e intervalos</i>	59
Figura 42: <i>Campos para ingresar datos cuando el eje es oblicuo.</i>	59
Figura 43: <i>Gráficos generados cuando el eje de rotación es oblicuo</i>	60
Figura 44: <i>Gráficos generados cuando el eje de rotación es oblicuo</i>	61

Capítulo 1 - Preliminares

1.1 Introducción

Cuando se estudia cálculo integral en libros de textos muy usados como los escritos por Thomas, Leithold, Pourcel, Stewart, Larson, Stein, Hoffman, Edwards, Apóstol y Demidovich, entre otros, por lo regular se desarrollan algunos modelos para resolver problemas de la geometría, la física, la ingeniería, etc. Un modelo que aparece en todos estos libros de texto es el que permite calcular el volumen de un sólido obtenido al rotar una figura plana alrededor de una recta o eje de revolución.

Para el cálculo del volumen de un sólido, en los libros de textos se presentan dos tipos de aplicaciones: volumen de un sólido de revolución y volumen de un sólido de sección conocida. Para el primer tipo generalmente se presentan tres métodos: el método de capas cilíndricas, el método de los discos y el método de las arandelas; este último es básicamente es el mismo método de los discos para el caso en que la región plana que se rotará esté limitada por dos curvas. Para estos tres métodos, por lo general la rotación se hace alrededor de un eje coordenado o una recta paralela a uno de estos ejes.

En los diferentes textos consultados, se construye un modelo matemático para calcular el volumen del sólido, a saber:

Modelo para método de capas cilíndricas:
$$V = 2\pi \int_a^b xf(x)dx$$

Modelo para método de los discos:
$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

Modelo para método de las arandelas:
$$V = \pi \int_a^b (f^2(x) - g^2(x))dx$$

Las preguntas que surgen son:

- ¿Cómo se calcula el volumen de un sólido de revolución generado al rotar una región plana alrededor de una recta que no sea paralela a uno de los ejes coordenados? Es decir, la región se rota alrededor de una recta inclinada.
- ¿Cómo se calcula el área de una superficie de revolución generada al rotar una curva alrededor de una recta oblicua?

Considerando que esto es un vacío en los libros de texto consultados y muy seguramente en muchos otros textos, con este trabajo se pretende llenar este vacío presentando de manera detallada la construcción de un modelo matemático para calcular el volumen de un sólido de revolución generado al rotar una región plana alrededor de una recta oblicua y otro modelo para calcular el área de una superficie de revolución para condiciones similares.

Otra pretensión de este trabajo es elaborar applets para ejemplificar el uso de los dos modelos matemáticos, los cuales se desarrollarán con el software DescartesJS por ofrecer la ventaja de que se pueden incrustar en páginas webs o lecciones electrónicas, convirtiéndose en un recurso valioso para clases de cálculo en línea.

1.2 Justificación

El estudio del cálculo integral, en el marco de la Licenciatura en Matemáticas, constituye una herramienta fundamental para comprender y modelar una gran diversidad de situaciones y fenómenos de la geometría, la física, la ingeniería, etc. Tres de las aplicaciones geométricas que no faltan en los libros de texto son el cálculo de áreas de regiones planas, de volúmenes de sólidos de revolución y área de una superficie de revolución.

Una revisión de libros de texto para cálculo, como Apóstol (1997), Larson (2013) y Leithold (1990) entre otros, presentan una limitada gama de problemas relacionados con volúmenes y superficies de revolución, los pocos que aparecen proponen rotaciones alrededor de ejes horizontales o verticales. Se destaca el texto de Stewart (2015) donde se propone, como ejercicio, demostrar un modelo para calcular el área de una región entre una función y un eje oblicuo, y extenderlo para determinar el volumen del sólido generado por esta región rotada alrededor del eje oblicuo.

Por otra parte, en el syllabus del curso de cálculo integral de la Universidad no se contempla el cálculo de volúmenes de sólidos obtenidos al rotar una región plana alrededor de una recta oblicua, tampoco el de una superficie de revolución usando ejes oblicuos. Ante esta situación, surge la pregunta, si existen muchos artefactos mecánicos y componentes industriales que se obtienen al rotar una región plana o una curva alrededor de una recta oblicua ¿por qué no se estudia esta aplicación en la Universidad y por qué no aparece en los libros de cálculo?

Otras preguntas que surgen son: ¿Será muy complejo el modelo matemático para calcular volumen y superficie de revolución cuando el eje de rotación es oblicuo? ¿Es muy laboriosa la construcción del modelo matemático correspondiente? ¿Es difícil imaginar los objetos resultantes?

Las anteriores inquietudes son las que motivan el desarrollo de este trabajo de grado, centrado en la construcción de los modelos matemáticos para calcular el área de una región plana limitada por una curva y una recta oblicua, el volumen de un sólido obtenido al girar una región plana alrededor de un eje oblicuo y el área de una superficie de revolución con eje de rotación oblicuo.

Por otra parte, se desea ilustrar cada objeto resultante. Para ello se propone elaborar un applet con la herramienta DescartesJS, que muestre los objetos y calcule sus medidas. La elección de esta herramienta responde a varias ventajas: su portabilidad, dado que los archivos generados son independientes del sistema operativo, posibilitando su ejecución en cualquier explorador web; su sencillez de uso, que permite a los estudiantes y docentes experimentar rápidamente con expresiones algebraicas y sus representaciones gráficas; y su potencial para crear simuladores dinámicos que faciliten la visualización de objetos matemáticos complejos, como los sólidos de revolución rotados en torno a ejes oblicuos.

El aporte principal de este trabajo sería la construcción de los modelos matemáticos correspondientes y la presentación de algunos ejemplos, constituyéndose en un recurso bibliográfico que complementa a los libros de texto que normalmente se usan en los cursos de cálculo.

1.3 Objetivos

Objetivo general

Construir modelos matemáticos para calcular área de una superficie de revolución y el volumen de un sólido de revolución cuando el eje de rotación es una recta oblicua.

Objetivos específicos

1. Exponer la construcción de los modelos para el caso en que el eje de rotación es un eje coordenado o una recta paralela a uno de los coordenados.
2. Construir modelos para calcular área de una superficie de revolución y volumen de un sólido de revolución cuando el eje de rotación es una recta oblicua, como extensión del método de los discos.
3. Diseñar un aplicativo para verificar los modelos construidos.

Capítulo 2 – Marco conceptual

2.1 Sólidos de revolución

Un sólido es una figura tridimensional que se genera a partir de la rotación de una superficie plana cerrada en torno a un eje. Ejemplos de esto incluyen los conos, los cuales pueden considerarse como la rotación de un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos, así como los cilindros y discos que resultan de rotar un rectángulo respecto a uno de sus bordes. Existe una variedad considerable de ejemplos en este contexto.

En el ámbito del cálculo, los sólidos de revolución se definen como regiones que pueden estar delimitadas por una función y uno de los ejes coordenados, o bien entre dos o más funciones que rotan alrededor de un eje en el espacio, incluyendo los ejes coordenados X o Y . El estudio de estos sólidos implica determinar su volumen haciendo uso de las funciones que delimitan la región plana que será rotada. Por esta razón, se desarrollan modelos que facilitan el cálculo del volumen de un sólido de revolución. A continuación, se presentan algunos modelos que permiten determinar el volumen de un sólido de revolución, considerando un eje horizontal o vertical y un nuevo modelo que considere como eje una recta inclinada.

2.2 Modelos para volumen

2.2.1 Modelo para volumen por el método de discos

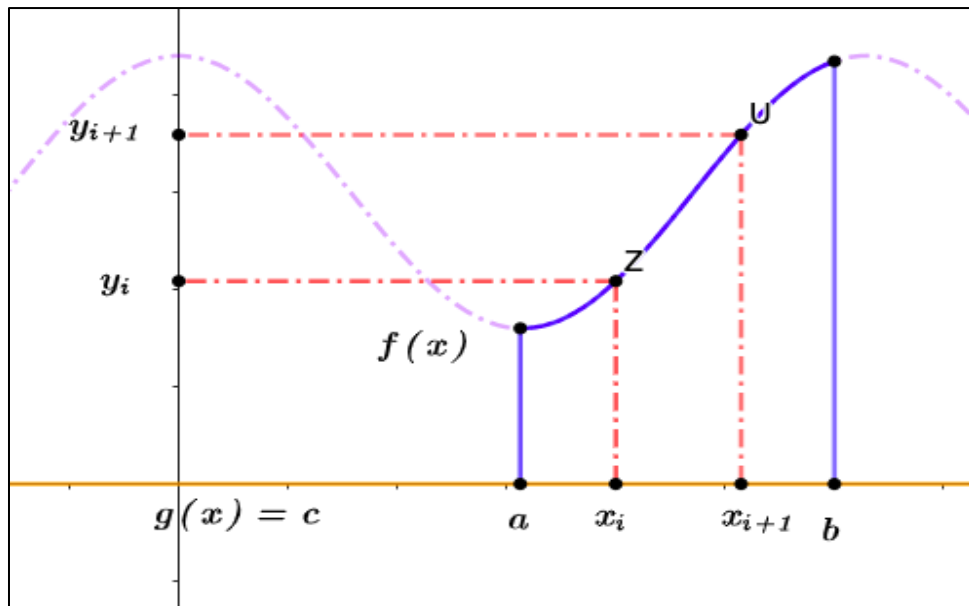
Como su nombre sugiere, la idea central del método consiste en aproximar el volumen de un sólido utilizando discos cilíndricos que lo cubran. Este enfoque se fundamenta en el hecho de que el volumen de un disco es más fácil de calcular, dado que se determina como el producto entre el área de su base y su grosor. Se entiende que, a mayor cantidad de discos empleados, mejor será

la aproximación al volumen total del sólido, lo que implica que el grosor de cada uno de estos discos debe ser un valor cercano a cero.

Para llevar a cabo la construcción del modelo, se considera una función $f(x)$ que sea derivable en un intervalo cerrado $[a, b]$. A continuación, se determina un eje horizontal representado por una recta paralela al eje X , o bien, por una función constante $g(x) = c$. Este eje forma parte de la frontera de la región encerrada y será fundamental para generar el sólido de revolución.

En este intervalo, se toma un punto x_i y se proyecta su imagen en la función $f(x)$, la cual será representada por el punto Z . A partir del punto $x_i \in [a, b]$, se selecciona una distancia Δx para definir un segundo punto x_{i+1} . De manera similar a lo que se hizo con x_i , se halla la imagen que será representada por el punto U . El punto x_{i+1} también se puede expresar como $x_i + \Delta x$, pero por conveniencia de escritura, se considerará únicamente como x_{i+1} .

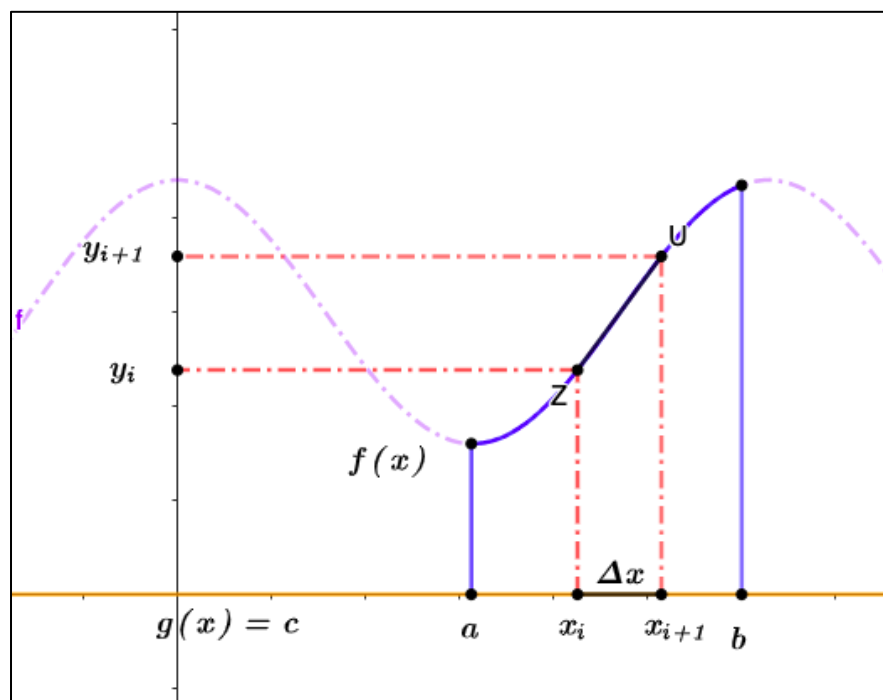
Figura 1: Función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$



Nota. El gráfico muestra la función $f(x)$, el eje de revolución $g(x)$ y el intervalo $[a, b]$, donde se definen los puntos x_i y x_{i+1} con sus respectivas imágenes y_i, y_{i+1} . Autoría propia.

Con los cuatro puntos que corresponden a los valores en $[a, b]$ y sus respectivas imágenes, se puede definir un trapecio. En este trapecio, la base mayor corresponde a la distancia que hay entre el eje de revolución $g(x)$ y la función de la curva $f(x)$, las bases quedan siendo las imágenes $f(x_{i+1}) - g(x_{i+1}) = f(x_{i+1}) - c$ y $f(x_i) - g(x_i) = f(x_i) - c$. la altura corresponde a la distancia entre los puntos en x_i y x_{i+1} , que es Δx .

Figura 2: Cuadrilátero i -ésimo representativo



Nota. El gráfico muestra el trapecio formado por los puntos Z, U, x_i y x_{i+1} que servirá para calcular el área encerrada. Autoría propia.

El área del i -ésimo trapecio se puede calcular por medio de la expresión

$$A_i = \frac{B_1 + B_2}{2} * h$$

Donde

- B_1 corresponde a la base $f(x_i) - c$
- B_2 corresponde a la base $f(x_{i+1}) - c$
- h corresponde a la distancia Δx

$$A_i = \frac{(f(x_i) - c) + (f(x_{i+1}) - c)}{2} * \Delta x$$

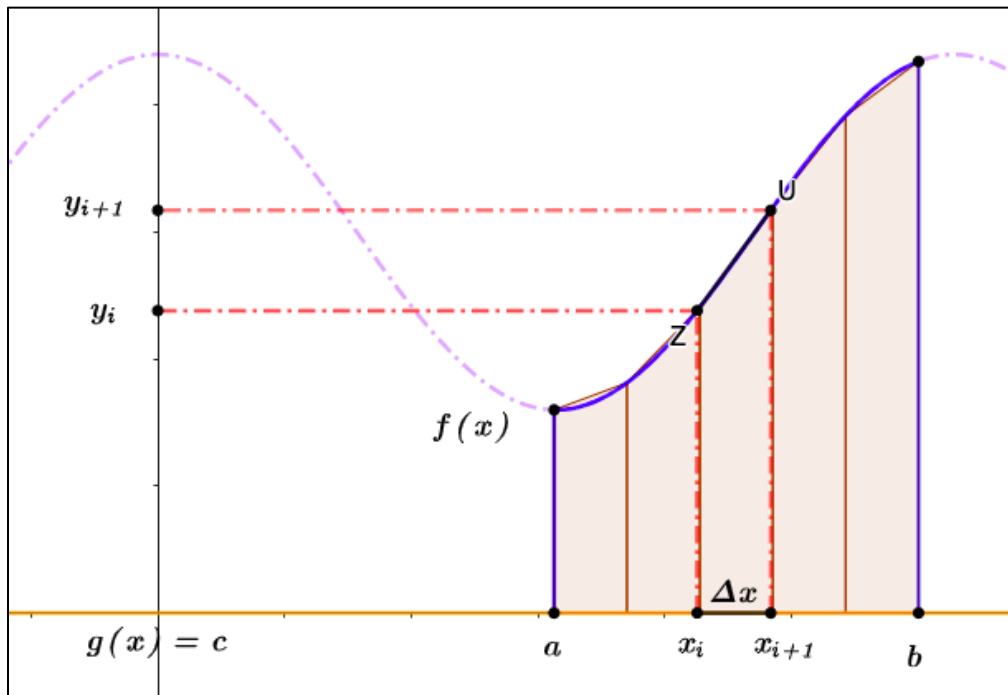
Dado que se utilizarán infinitos trapecios que cubran la región entre la curva $f(x)$ y el eje de revolución $g(x) = c$, a medida que el número de trapecios se acerque al infinito, estos se asemejarán a rectángulos cuya altura corresponde a alguna de las alturas del trapecio, es decir, $f(x_i) - c$. En consecuencia, es posible afirmar que el área de la región se puede calcular con n rectángulos cuya altura sea la diferencia $f(x_i) - c$ y la base sea Δx .

$$A_i = (f(x_i) - c)\Delta x$$

Como se cubrirá la superficie con n rectángulos A_i , el área de esta región será la sumatoria de los n rectángulos que se utilicen, de modo que a medida que n tienda al infinito o la base Δx tienda a cero mejor será la aproximación.

$$A_T = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (f(x_i) - c)\Delta x = \int_a^b (f(x) - c) dx$$

Figura 3: Trapecios representativos que cubren el área encerrada entre la función y el eje de revolución



Nota. Autoría propia.

Ahora, si se gira uno de estos trapecios en torno al eje de revolución $g(x) = c$, se obtiene un cono truncado cuyos radios y grosor equivalen a las alturas y la base del rectángulo, respectivamente.

El volumen del cono truncado se calcula

$$V_i = \frac{\pi(R_1^2 + R_1 * R_2 + R_2^2)(Grosor)}{3}$$

R_1 y R_2 corresponden alas bases del trapecio y el grosor a la altura Δx

$$V_i = \frac{\pi((f(x_i) - c)^2 + (f(x_i) - c) * (f(x_{i+1}) - c) + (f(x_{i+1}) - c)^2)}{3} * \Delta x$$

Ahora usando una cantidad n de conos truncados

$$V_T = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n V_i$$

$$V_T = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\pi((f(x_i) - c)^2 + (f(x_i) - c) * (f(x_{i+1}) - c) + (f(x_{i+1}) - c)^2)}{3} * \Delta x$$

$$V_T = \frac{\pi}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n ((f(x_i) - c)^2 + (f(x_i) - c) * (f(x_{i+1}) - c) + (f(x_{i+1}) - c)^2) * \Delta x$$

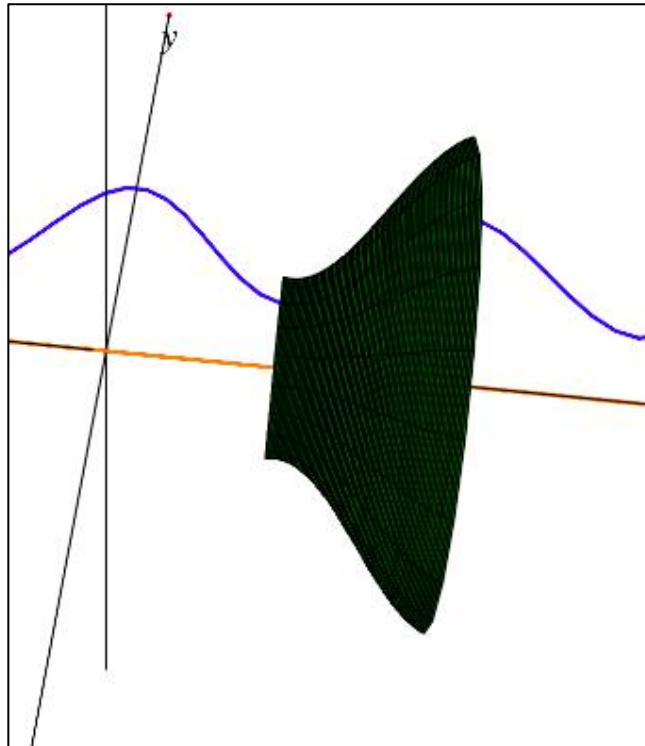
A medida que la cantidad de conos truncados aumenta, el grosor Δx tiende a 0, por lo que los puntos x_{i+1} y x_i resultan ser el mismo, luego la expresión quedaría

$$V_T = \frac{\pi}{3} \int_a^b ((f(x) - c)^2 + (f(x) - c) * (f(x) - c) + (f(x) - c)^2) * dx$$

$$V_T = \frac{\pi}{3} \int_a^b 3((f(x) - c)^2) * dx$$

$$V_T = \pi \int_a^b (f(x) - c)^2 * dx$$

Figura 4: Bosquejo del sólido usando discos representativos



Nota. Bosquejo del sólido generado por el área encerrada entre la función $f(x)$ y el eje de revolución $g(x) = c$. Autoría propia.

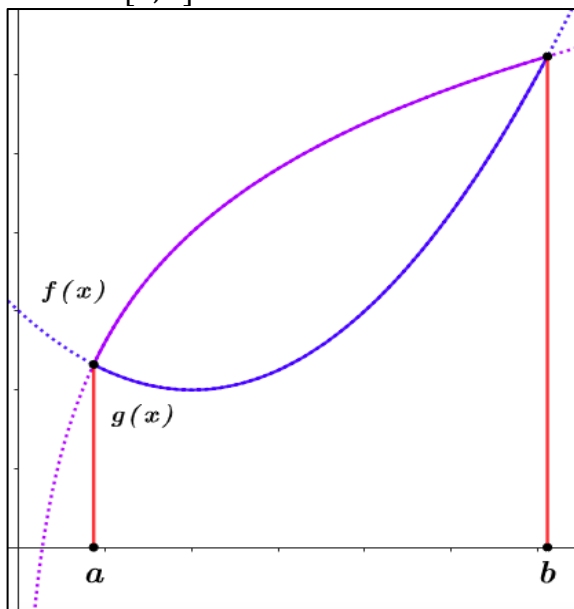
2.2.2 Modelo para volumen por el método de arandelas

El método de arandelas es una extensión del método de discos y resulta útil cuando el sólido de revolución tiene un agujero, es decir, cuando el eje de revolución no forma parte del contorno del área limitada por las curvas. En este caso, el sólido de revolución presenta un hueco en el centro. Es acertado considerar este método como una extensión del método de discos, ya que los discos utilizados para aproximar el volumen tendrán un hueco en el centro, lo que los denomina arandelas.

Para construir este modelo, son necesarias dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ que sean diferenciables, además de que se intersequen en dos puntos, los cuales definirán un intervalo en el que ambas funciones son continuas. De este modo, se determinará una región encerrada, como se muestra en la figura 5.

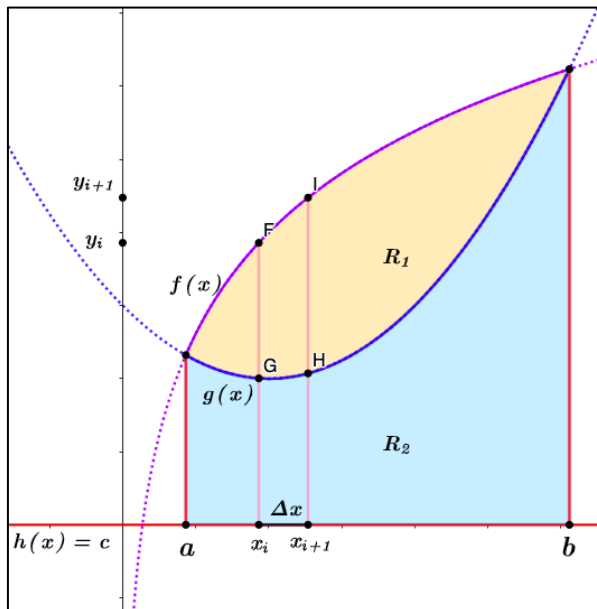
En este intervalo, se consideran dos regiones: R_1 , que está comprendida entre la curva $f(x)$ y el eje de revolución ($h(x) = c$); y R_2 , que está comprendida entre la curva $g(x)$ y eje $h(x) = c$ (ver figura 6). Con estas dos áreas, se pueden considerar dos sólidos de revolución diferentes y, utilizando el método de discos, se pueden calcular los volúmenes respectivos.

Figura 5: Funciones $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo $[a, b]$



Nota. funciones continuas en el intervalo $[a, b]$, donde los extremos del intervalo son los puntos de intersección de las funciones.

Figura 6: Área bajo las curvas



Nota. representación del área encerrada entre las curvas con el eje de revolución $h(x) = c$, R_1 y R_2

La forma para calcular las áreas es la misma usada en el método anterior, por ello, R_1 se puede definir a partir de un rectángulo i -ésimo representativo cuya base es Δx_i y su altura es la distancia desde el punto $E = (x_i, h(x_i) = c)$ hasta el punto $F = (x_i, f(x_i))$, es decir, $d(EF) = f(x_i) - h(x_i) = f(x_i) - c$.

$$R_{1i} = (f(x_i) - c)\Delta x_i$$

Para R_2 el rectángulo i -ésimo representativo cuya base es el mismo Δx_i y su altura es la distancia desde el punto $E = (x_i, h(x_i))$ hasta el punto $G = (x_i, g(x_i))$, es decir, $d(EG) = g(x_i) - h(x_i) = g(x_i) - c$.

$$R_{2i} = (g(x_i) - c)\Delta x_i$$

Luego la región R_3 que se encuentra entre las curvas $f(x)$ y $g(x)$ se puede calcular mediante la diferencia de áreas de los rectángulos representativos R_{1i} y R_{2i}

$$R_{1i} - R_{2i} = R_{3i} = (f(x_i) - c)\Delta x_i - (g(x_i) - c)\Delta x_i$$

$$R_{3i} = ((f(x_i) - c) - (g(x_i) - c))\Delta x_i$$

$$R_{3i} = (f(x_i) - g(x_i))\Delta x_i$$

El área de esta región estará determinada por la suma de los rectángulos representativos R_{3i}

$$R_3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n R_{3i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (f(x_i) - g(x_i))\Delta x_i = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

Ahora, para calcular el volumen de los sólidos generados por R_3 se pueden considerar dos sólidos; aquellos generados por R_1 y R_2 siendo este último el agujero que tendría el sólido cuando se rote R_3 en torno al eje de revolución $h(x) = c$.

El volumen del sólido generado por R_1 , se logra calcular con n conos truncados cuyos radios serían $f(x_i) - c$ y $f(x_{i+1}) - c$.

$$V_1 = \frac{\pi}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n ((f(x_i) - c)^2 + (f(x_i) - c) * (f(x_{i+1}) - c) + (f(x_{i+1}) - c)^2) * \Delta x$$

El volumen del sólido generado por R_2 con n conos truncados cuyos radios son $g(x_i) - c$ y $g(x_{i+1}) - c$, es

$$V_2 = \frac{\pi}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n ((g(x_i) - c)^2 + (g(x_i) - c) * (g(x_{i+1}) - c) + (g(x_{i+1}) - c)^2) * \Delta x$$

De la misma forma que se mencionó en el modelo anterior, a medida que la cantidad de conos truncados aumente, los puntos x_i y x_{i+1} tienden ser iguales, por lo tanto,

$$V_1 = \frac{\pi}{3} \int_a^b ((f(x) - c)^2 + (f(x) - c) * (f(x) - c) + (f(x) - c)^2) * dx$$

$$V_1 = \pi \int_a^b (f(x) - c)^2 * dx$$

$$V_2 = \frac{\pi}{3} \int_a^b ((g(x) - c)^2 + (g(x) - c) * (g(x) - c) + (g(x) - c)^2) * dx$$

$$V_2 = \pi \int_a^b (g(x) - c)^2 * dx$$

Como se está considerando a V_2 como el agujero del sólido resultante de rotar la región entre las curvas $f(x)$ y $g(x)$ R_3 , el volumen de este sólido, V_3 será la diferencia entre el V_1 y V_2 .

$$V_1 - V_2 = V_3 = \pi \int_a^b (f(x) - c)^2 * dx - \pi \int_a^b (g(x) - c)^2 * dx$$

$$V_3 = \pi \left(\int_a^b (f(x) - c)^2 * dx - \int_a^b (g(x) - c)^2 * dx \right)$$

$$V_3 = \pi \left(\int_a^b (f(x) - c)^2 - (g(x) - c)^2 * dx \right)$$

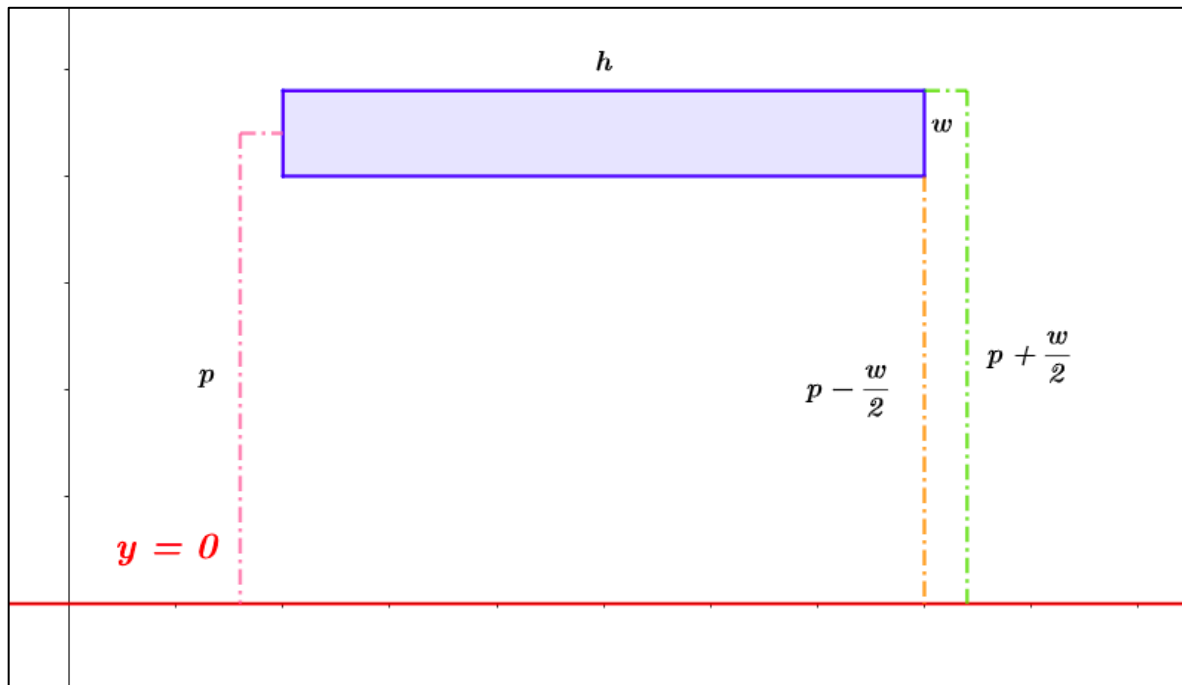
Esto también se puede ver como si en lugar de cubrir el sólido con n cantidad de discos, se cubre con arandelas cuyo radio mayor sea el valor de la función $f(x)$ y el radio menor la función $g(x)$.

2.2.3 Modelo para volumen por el método de capas cilíndricas

El método de capas cilíndricas se presenta como una alternativa para aquellos sólidos en los cuales la aplicación de alguno de los métodos anteriores resulta ser demasiado extensa o, en algunos casos, imposible. Este enfoque consiste en dividir el sólido en cascarones cilíndricos que se encuentran uno dentro del otro. Posteriormente, se integra el volumen de cada uno de estos cascarones para obtener el volumen total del sólido.

Se considera, en primer lugar, un rectángulo representativo en el que w denota el ancho del rectángulo, h representa la altura, y p es la distancia entre el eje de revolución y el centro del rectángulo, tal como se ilustra en la figura 7. Al realizar la rotación de este rectángulo en torno al eje de revolución, se forma una capa cilíndrica o tubo cuyo espesor es w . Para determinar el volumen de este tubo, se examinan dos cilindros: uno exterior con radio R y otro interior con radio r , cumpliendo, por razones evidentes, que $R > r$.

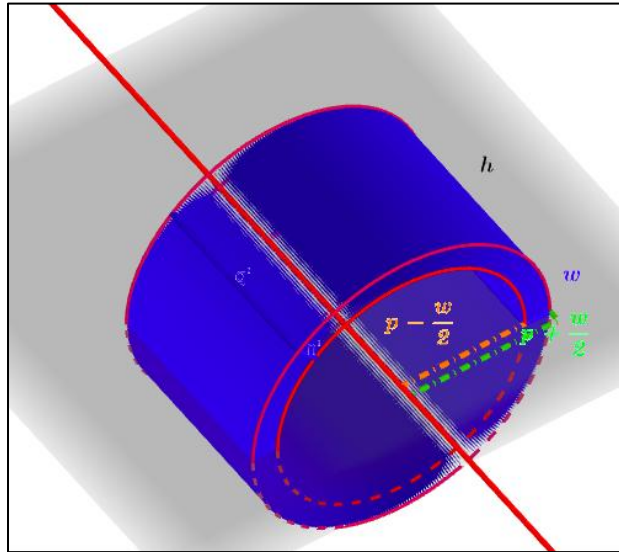
Figura 7: Vista en el plano del rectángulo representativo



Fuente: Autoría propia

Radio exterior: $R = p + \frac{w}{2}$
 Radio interior: $r = p - \frac{w}{2}$

Figura 8: Vista en el espacio del tubo formado por el rectángulo representativo.



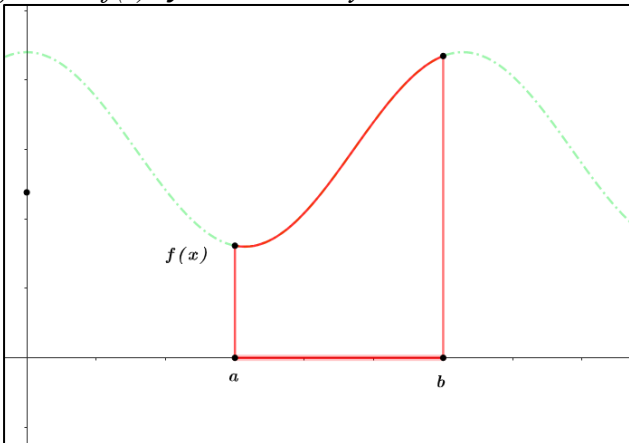
Fuente: Autoría propia

El volumen de la capa cilíndrica se calcula mediante la diferencia entre el volumen del cilindro exterior y el volumen del cilindro interior, el cual corresponde al agujero.

$$\begin{aligned}
 \text{Volumen capa} &= (\text{volumen cilindro}) - (\text{volumen agujero}) \\
 &= \pi R^2 h - \pi r^2 h \\
 &= \pi \left(p + \frac{w}{2}\right)^2 h - \pi \left(p - \frac{w}{2}\right)^2 h \\
 &= \pi h \left(\left(p + \frac{w}{2}\right)^2 - \left(p - \frac{w}{2}\right)^2 \right) \\
 &= \pi h \left(\left(\left(p + \frac{w}{2}\right) + \left(p - \frac{w}{2}\right) \right) \left(\left(p + \frac{w}{2}\right) - \left(p - \frac{w}{2}\right) \right) \right) \\
 &= \pi h ((2p)(w)) \\
 &= 2\pi h p w \\
 &= 2\pi(\text{altura})(\text{radio promedio})(\text{espesor})
 \end{aligned}$$

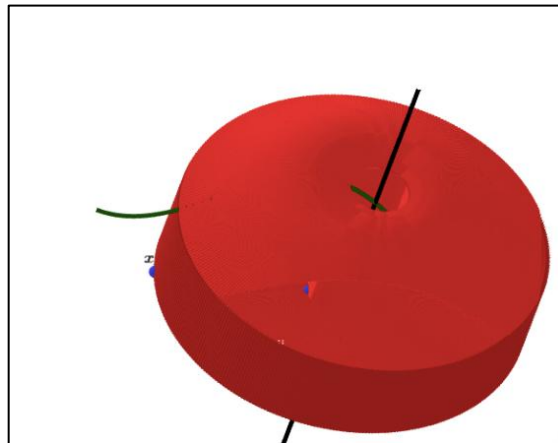
Ahora bien, esta expresión se puede usar para hallar el volumen de un sólido determinado al rotar alrededor del eje y la región comprendida entre una función $f(x)$, una recta horizontal $y = 0$, y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, donde $a < b$.

Figura 9: Área de rotación encerrada en la función $f(x)$, $y = 0$, $x = a$ y $x = b$



Fuente: Autoría propia

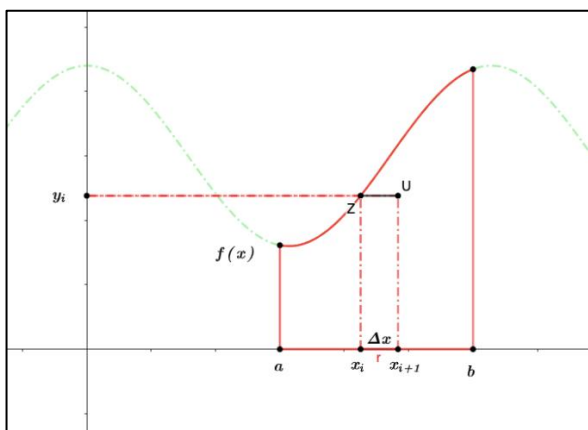
Figura 10: Sólido generado por el área de rotación



Fuente: Autoría propia

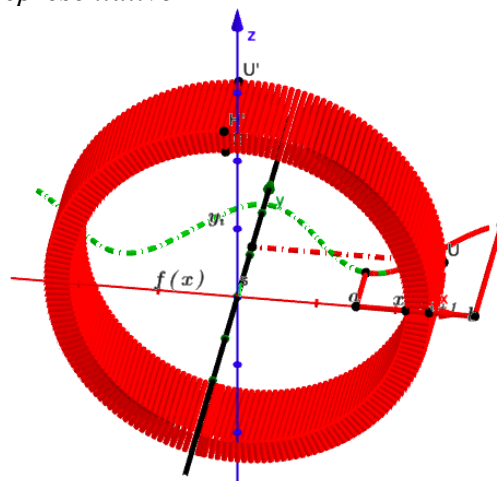
En el intervalo considerado, se selecciona un punto x_i , desde el cual se define una distancia Δx que constituye la base del rectángulo representativo cuya altura es $f(x_i)$. Al rotar este rectángulo en torno al eje de revolución, se genera una capa cilíndrica cuyo volumen puede expresarse como: $V_i = 2\pi(x_i)f(x_i)\Delta x$

Figura 11: vista de la región plana y del rectángulo representativo



Nota. que al rotarse alrededor del eje $x = 0$ genera una capa cilíndrica de espesor Δx . Autoría propia

Figura 12: vista de la capa cilíndrica generada por el rectángulo representativo



Nota. La suma del volumen de estas capas determinan el volumen del sólido. Autoría propia

Para obtener un cálculo aproximado del volumen total del sólido resultante, se emplean n capas cilíndricas, apiladas unas dentro de otras. La expresión para el volumen total se determina como la suma de los volúmenes de todas las capas individuales.

$$V \approx \sum_{l=1}^n V_l \approx \sum_{l=1}^n 2\pi(x_l)f(x_l)\Delta x$$

Como bien se sabe, cuanto mayor sea la cantidad de capas cilíndricas consideradas, más cercana será la aproximación al volumen real del sólido generado por la rotación de la función.

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^n 2\pi(x_l)f(x_l)\Delta x$$

$$V = \int_a^b 2\pi(x)f(x)dx$$

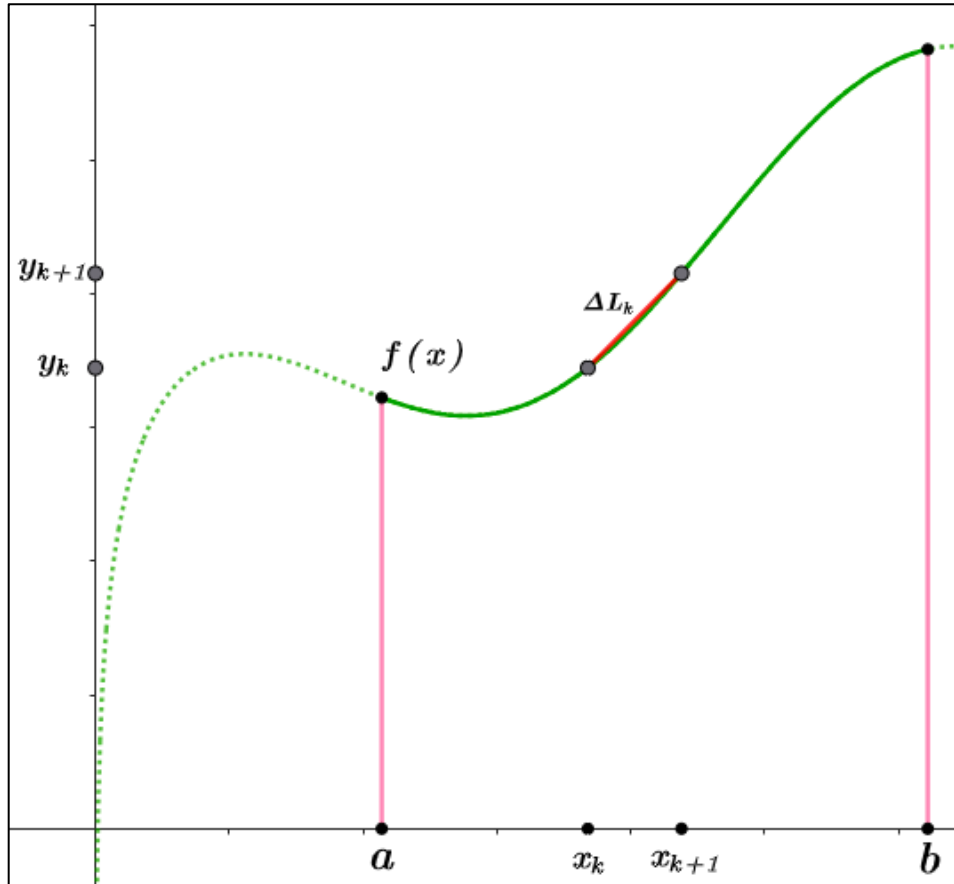
2.2.4 Modelo para área de una superficie de revolución

La superficie generada por la rotación de la curva $y = f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ puede interpretarse como la superficie lateral de un cuerpo obtenido al rotar segmentos de arco de la curva alrededor del eje de rotación y los segmentos de arco correspondientemente definidos entre $(x_k, f(x_k))$ y $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$. Al rotar cada uno de estos segmentos, en particular el segmento $\overline{(x_k, f(x_k))(x_{k+1}, f(x_{k+1}))}$. Se obtiene una superficie lateral equivalente a la de un cono truncado cuyas bases son $f(x_k) = y_k$ y $f(x_{k+1}) = y_{k+1}$

La generatriz L del k -ésimo cono truncado es:

$$\Delta L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2}$$

Figura 13: Generatriz k -ésima representativa



Fuente: Autoría propia

El área de la superficie lateral de este cono se expresa como

$$S_k = 2\pi L_k R$$

donde

$$R = \frac{1}{2}(y_{k+1} + y_k) = \frac{1}{2}(f(x_k) + f(x_{k+1}))$$

Por el teorema del valor medio se puede asegurar que existe un punto d_i tal que

$$r_k = f(d_k)$$

$$S_k = 2\pi L_k f(d_k)$$

Como bien se puede observar, la distancia L_k corresponde a la longitud del arco de una curva por lo que la expresión se puede simplificar como sigue:

$$S_k = 2\pi f(d_k) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \Delta x_k$$

$$S \approx 2\pi \sum_{k=1}^n f(d_k) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \Delta x_k$$

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Si la gráfica se hace girar respecto al eje y entonces S es

$$S = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

En el siguiente capítulo se desarrollarán los modelos que constituyen el primer propósito grande de este trabajo. Los modelos que se desarrollarán servirán para calcular el área de una región plana, el volumen de un sólido de revolución y el área de la superficie de revolución cuando el eje de rotación es una recta oblicua.

El interés por desarrollar estos modelos surgió cuando, al revisar varios textos de cálculo sobre cómo calcular el volumen de un sólido de revolución obtenido al rotar una región plana alrededor de una recta oblicua, solo se encontró en un cálculo de Stewart un ejercicio-proyecto que propone construir los modelos. También se consultaron los cálculos de Apóstol, Ayres, Berman, Demidovich, Edwards y Penney, Hughes y Gleason, Kudriavsev, Larson, Leithold, Marón, Piskunov, Purcell, Sadosky, Simmons, Spivak, Thomas, Swokowsky y Zill, pero no aparecen ni explicados ni propuestos como ejercicios los modelos para ejes de rotación oblicuos.

Capítulo 3 – Desarrollo de modelos para ejes oblicuos

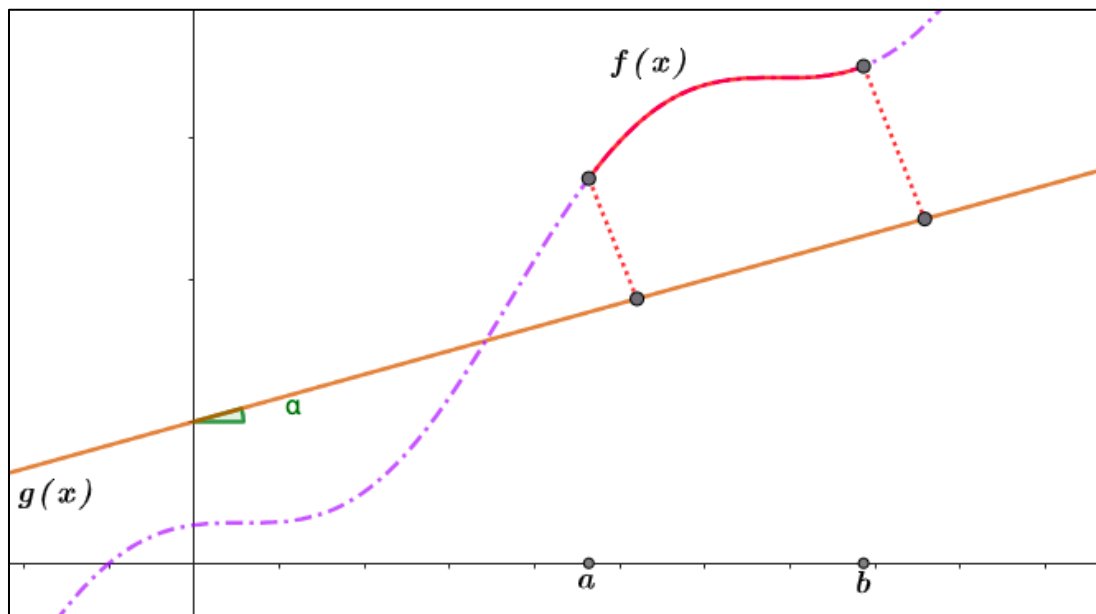
En este capítulo se desarrollarán tres modelos, considerando que el eje de rotación sea una recta oblicua. Los modelos son:

- Área de una región plana,
- Volumen de un sólido de revolución,
- Área de una superficie de revolución.

3.1 Modelo para área de una región plana

Inicialmente, se considera una función lineal descrita por la expresión $g(x) = mx + b$, donde m representa la pendiente de la recta y es equivalente al valor de la tangente del ángulo entre la función $g(x)$ y el eje x . A medida que se avanza en el cálculo del volumen, se tendrá en cuenta cómo esta inclinación afecta tanto el radio como el grosor de los discos, lo que repercutirá en la formulación final del volumen del sólido generado.

Figura 14: Representación de la función $f(x)$ y el eje de revolución $g(x) = mx + b$



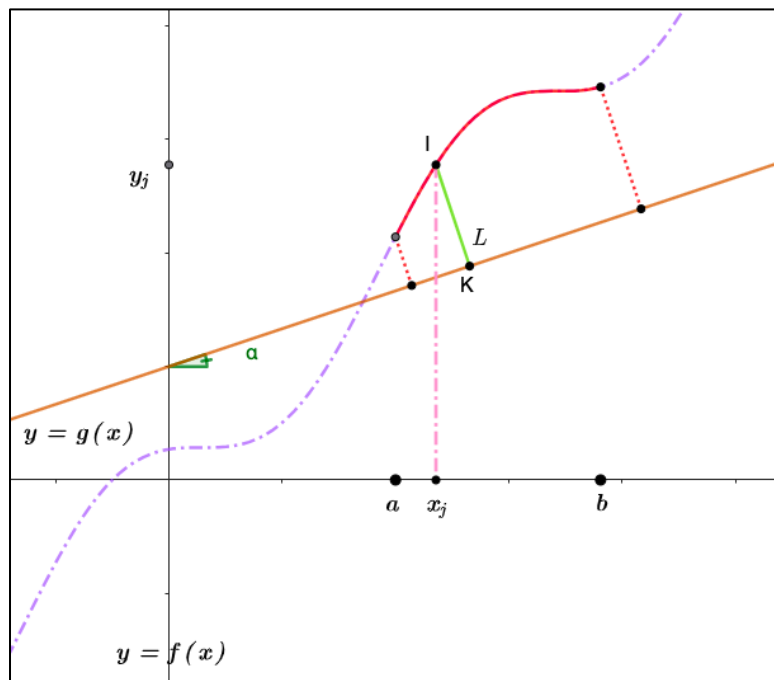
Fuente: Autoría propia

En la recta $g(x)=mx +b$, se tiene que $m = \tan \alpha$.

Ahora, sea $f(x)$ una función diferenciable en un intervalo cerrado $[a, b]$, la cual genera un sólido de revolución al girar la región acotada en el intervalo en torno a la recta $g(x)=mx+b$, como se muestra en la figura 14.

Dentro del intervalo $[a, b]$ se ubica un x_j cuya imagen es $f(x_j) = y_j$ y se va a proyectar sobre el eje de revolución determinando el punto K . Para agilizar algunos razonamientos y facilitar la visualización de las figuras, a la imagen del punto x_i en $f(x_i)$ se le llamará I y la proyección en el eje de revolución se llamará K . Tal y como se ve en la figura 15.

Figura 15: Representación del punto x_j , la imagen $f(x)$ y su proyección en el eje de revolución.



Fuente: Autoría propia

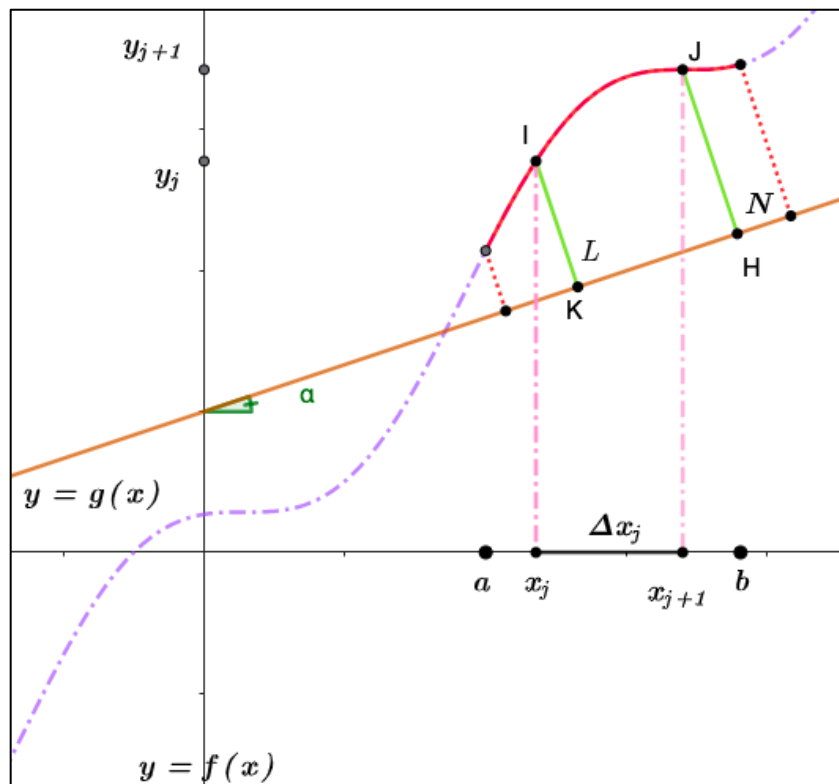
La distancia entre el punto I (imagen de x_j) y el punto K (proyección en el eje de revolución) se nombrará distancia L_i .

$$d(I, K) = L_i$$

$$\vec{IK} \perp g(x)$$

Se ubica un x_{j+1} a una distancia Δx en el eje X , al cual se le halla su respectiva imagen $f(x_{j+1}) = y_{j+1}$, nombrada como J , y se proyecta sobre el eje de revolución determinando el punto H . A la distancia entre el punto J y su respectiva proyección H se nombrará L_{i+1} , cómo se puede apreciar en la figura 16.

Figura 16: Representación del punto x_{j+1} a una distancia Δx_j , la imagen $f(x_{j+1})$ y su proyección en el eje de revolución.



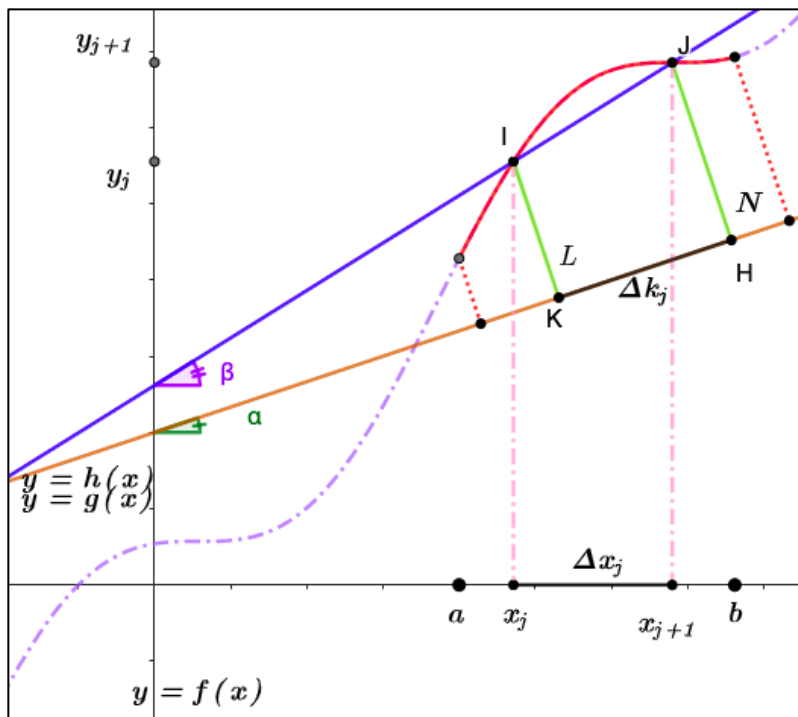
Fuente: Autoría propia

Los puntos I y J determina una recta $h(x) = m_1x + b$ que resulta ser secante a $y = f(x)$ y cuya pendiente será la distancia Δy_j dividida entre la distancia Δx_j ,

$$h(x) = m_{\text{sec}}x + b$$

$$\frac{\Delta y_j}{\Delta x_j} = \frac{y_{j+1} - y_j}{x_{j+1} - x_j} = \tan \beta$$

Figura 17: Representación de la función $y = f(x)$, el eje de revolución $g(x) = mx + b$ y la recta secante que pasa por las imágenes de los valores x_j y x_{j+1} .



Fuente: Autoría propia

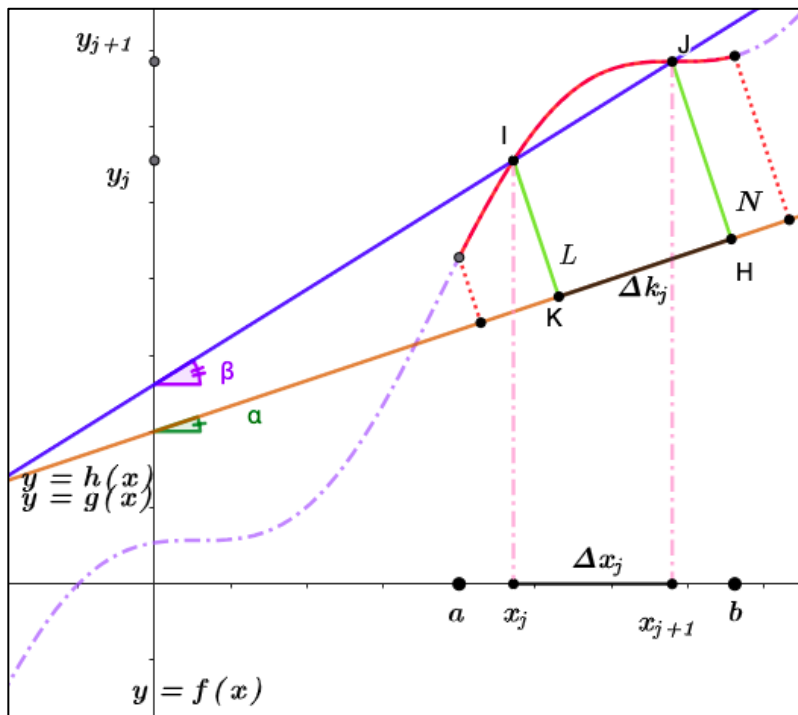
Dado que las rectas que contienen a L_i y a L_{i+1} son paralelas, el cuadrilátero formado por los puntos $IJKH$ resulta ser un trapecio, el cual servirá como prototipo para la construcción del modelo.

El punto H es la proyección de y_{j+1} en el eje de revolución y este se encuentra a una distancia Δy_j de y_j , esta depende de la distancia Δx_j . Así pues, la distancia Δk_j , entre K y H,

depende directamente de Δy_j , que a su vez depende de Δx_j , lo que indica que a medida que Δx_j varíe, Δk_j también lo hará. Es decir $\Delta k_j = v(\Delta x_j)$.

Ahora se debe definir cuál es el valor de Δk_j en términos de x , $g(x)=mx+b$, $y=f(x)$ y la recta secante h .

Figura 18: Representación de las funciones y el diferencial de distancia Δk_j en el eje de revolución.



Fuente: Autoría propia

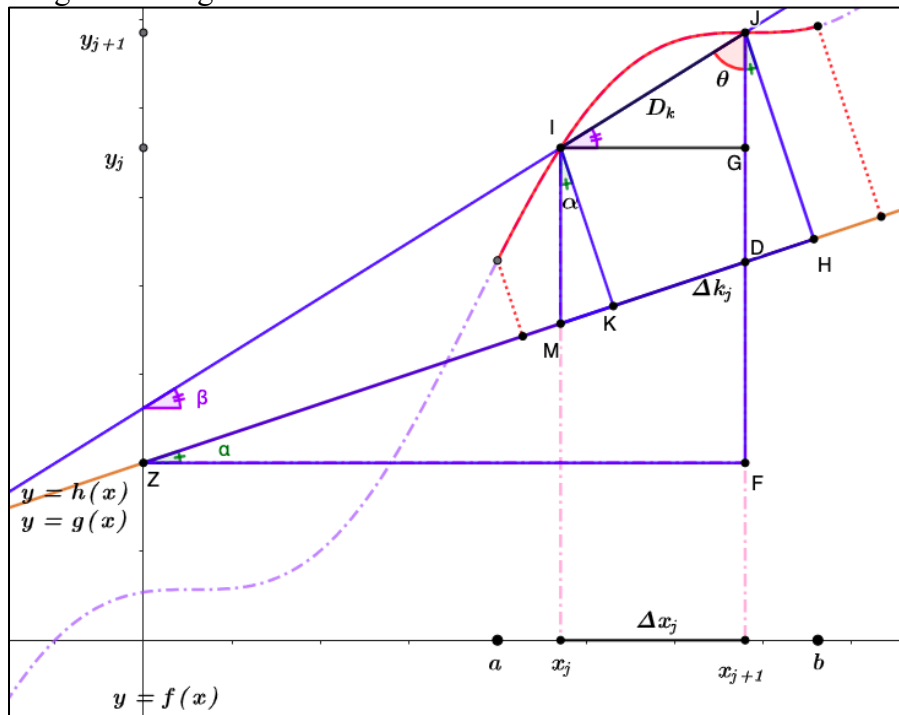
Como el trapecio es el prototipo, es necesario definir, algunas medidas de este en términos ya conocidos. Inicialmente la distancia Δx se puede proyectar usando una recta n paralela al eje X que pase por el punto I cuya intersección con la recta s determinada por el punto x_{j+1} y su respectiva imagen, determinen el punto G . Con esta distancia proyectada, se puede asegurar que el ángulo JIG es congruente con β , el ángulo de inclinación de la recta h , dado que son ángulos correspondientes. La distancia entre los puntos I y J se nombrará D_k .

$$d(I, G) = \Delta x_j ; \sphericalangle JIG \cong \beta ; d(I, J) = D_k$$

El triángulo DZF resulta ser semejante al triángulo DJH, dado que $\sphericalangle ZDF$ y $\sphericalangle DJH$ son opuestos por el vértice y $\sphericalangle ZFD$ y $\sphericalangle DHJ$ son rectos. Esto implica que los ángulos correspondientes de estos triángulos son iguales, garantizando que los ángulos $\sphericalangle DZF$ y $\sphericalangle DJH$ sean congruentes.

En la figura 21, los triángulos MIK y DJH son semejantes, entonces $\sphericalangle MIK$ y $\sphericalangle DJH$ son congruentes. Para facilitar la comprensión de los siguientes razonamientos se consideró pertinente tomar aparte solo el trapecio $IJKH$ y las medidas que aluden directamente a este.

Figura 21: Triángulo rectángulo IGJ.



Fuente: Autoría propia

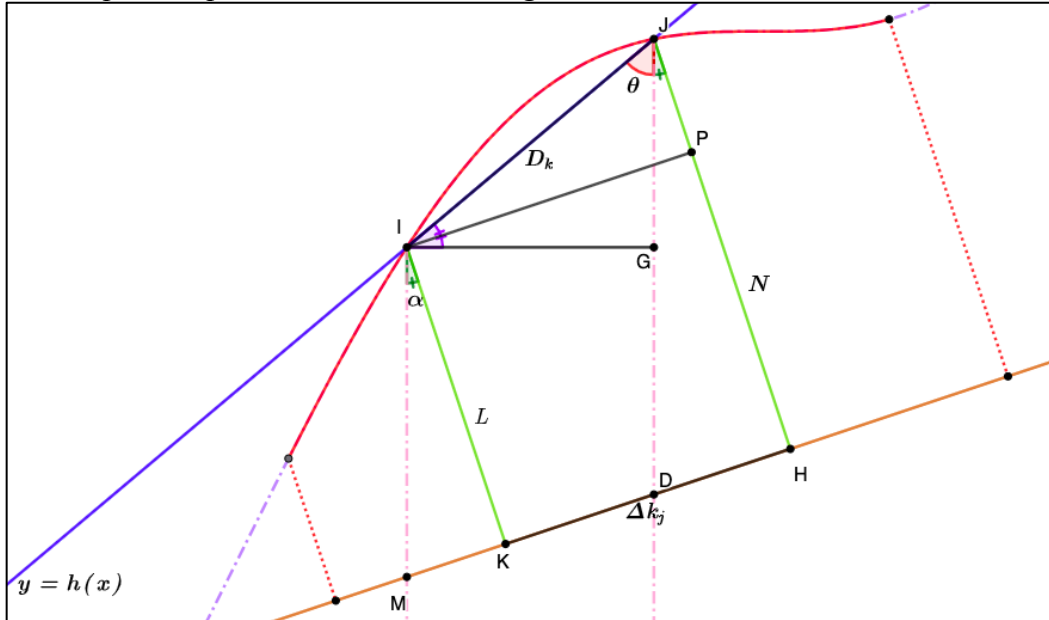
Como el triángulo IGJ es rectángulo, se pueden utilizar identidades trigonométricas para determinar algunas medidas.

$$\cos \beta = \frac{\Delta x_j}{D_k} ; D_k = \frac{\Delta x_j}{\cos \beta} \quad (1)$$

Desde este triángulo, se puede obtener la medida del ángulo restante θ : $\theta = 90 - \beta$

Se traza una paralela a KH que pase por el punto I con el fin de trasladar la medida Δk_j en un nuevo triángulo rectángulo IJP.

Figura 22: Trapecio representativo con el triángulo IJP.



Fuente: Autoría propia

Dado que el triángulo IJP es rectángulo, se puede establecer que el seno del ángulo compuesto por α y θ es la razón entre las distancias Δk_j y D_k

$$\sin(\alpha + \theta) = \frac{\Delta k_j}{D_k}$$

Despejando el valor de Δk_i se obtiene

$$\Delta k_j = D_k \sin(\alpha + \theta) \quad (2)$$

Pero, por (1) se sabe que $D_k = \frac{\Delta x_j}{\cos \beta}$

Al remplazar este valor en (2) se obtiene $\Delta k_j = \frac{\Delta x_j}{\cos \beta} \sin(\alpha + \theta)$

De igual manera, se sabe que $\theta = 90 - \beta$, entonces $\Delta k_j = \frac{\Delta x_j}{\cos \beta} \sin(\alpha + 90 - \beta)$.

Utilizando la identidad trigonométrica del seno de la suma de ángulos se obtiene:

$$\begin{aligned}\Delta k_j &= \frac{\Delta x_j}{\cos \beta} \sin(\alpha + 90 - \beta) \\ &= \sin(90 + \alpha - \beta) \frac{\Delta x_j}{\cos \beta} \\ &= (\sin(90) \cos(\alpha - \beta) + \cos(90) \sin(\alpha - \beta)) \frac{\Delta x_j}{\cos \beta} \\ &= (\cos(\alpha - \beta)) \frac{\Delta x_j}{\cos \beta}\end{aligned}$$

Usando la identidad del coseno de una resta se obtiene:

$$\begin{aligned}&= (\cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha) \frac{\Delta x_j}{\cos \beta} \\ &= \left(\frac{\cos \beta \cos \alpha}{\cos \beta} + \frac{\sin \beta \sin \alpha}{\cos \beta} \right) \Delta x_j \\ \Delta k_j &= (\cos \alpha + \sin \alpha \tan \beta) \Delta x\end{aligned}$$

De esta manera, la distancia Δk_j depende de valores proporcionados por las funciones iniciales, es decir, la curva que genera el sólido de revolución y el eje de revolución.

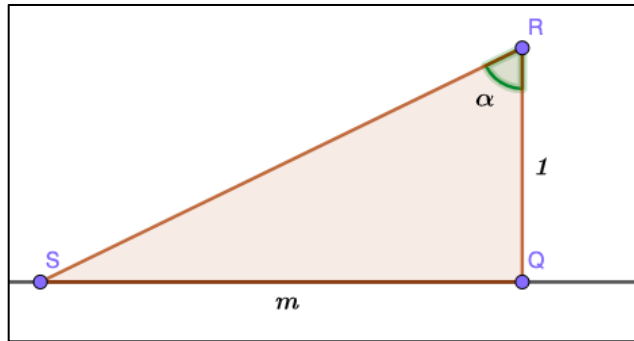
Si bien se podría trabajar con la expresión original para Δk_j , es posible expresar esta distancia en términos de las pendientes de las rectas involucradas, lo que facilitaría los cálculos. Esto se logra mediante el uso de las relaciones trigonométricas entre las pendientes y los ángulos.

Inicialmente, se conoce lo siguiente:

$$\tan \alpha = m \ ; \ \tan \beta = \frac{\Delta y_j}{\Delta x_j}$$

Ahora, considérese un triángulo cuyos catetos midan m y 1, de tal modo que se cumpla que la tangente de β siga siendo m .

Figura 23: Triángulo QRS para definir las identidades de α en términos de la pendiente.



Fuente: Autoría propia

Utilizando el teorema de Pitágoras se puede establecer que la hipotenusa del triángulo rectángulo equivale a $SR = \sqrt{m^2 + 1}$, luego el seno y coseno del ángulo α son:

$$\sin \alpha = \frac{m}{\sqrt{m^2 + 1}} \text{ y } \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{m^2 + 1}}.$$

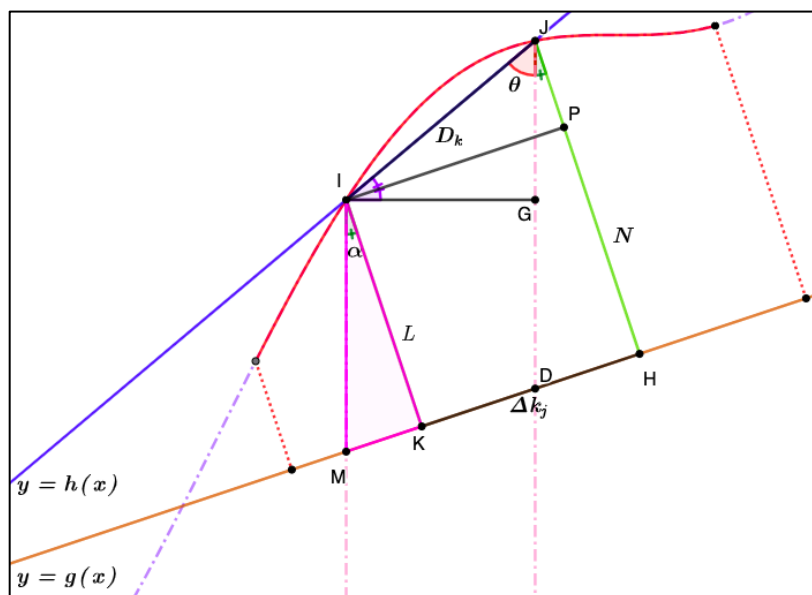
Conocidas expresiones para seno y coseno, se puede establecer el valor de Δx_i en términos de pendientes:

$$\begin{aligned} \Delta k_j &= (\cos \alpha + \sin \alpha \tan \beta) \Delta x \\ \Delta k_j &= \left(\frac{1}{\sqrt{m^2 + 1}} + \frac{m \frac{\Delta y_j}{\Delta x_j}}{\sqrt{m^2 + 1}} \right) \Delta x_j \\ \Delta k_j &= \left(\frac{1 + m \frac{\Delta y_j}{\Delta x_j}}{\sqrt{m^2 + 1}} \right) \Delta x_j \end{aligned}$$

Como se puede observar, Δx_k ahora está en términos de x (Δx_j), la pendiente del eje de revolución ($g(x)$) y la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos I y J .

Se requiere conocer cuáles son las alturas L_i del trapecio. Para lograr hacer esto, se toma la distancia entre el punto I y un punto M correspondiente a la imagen de x_i en la función $y = g(x)$, con esto, se toma el triángulo MIK .

Figura 24: Triangulo MIK usado para definir L_i .



Fuente: Autoría propia

$$I = (x_j, f(x_j))$$

$$M = (x_j, mx_j + b) = (x_j, g(x_j))$$

$$d(IM) = f(x_j) - g(x_j)$$

$$\cos \alpha = \frac{L_i}{f(x_j) - g(x_j)}$$

Despejamos L_i

$$\cos \alpha (f(x_j) - g(x_j)) = L_i$$

Usando el valor para coseno de α hallado anteriormente, se reemplaza y se obtiene

$$L_i = \frac{f(x_j) - g(x_j)}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

Esta sería la altura de los trapecios que se ubicarán para determinar el área de la región.

Ahora bien, como se pretende utilizar una cantidad muy grande de trapecios, a medida que se

aumenta la cantidad de estos, se van asemejando a rectángulos, por lo que sería correcto asegurar que el área entre la curva y el eje de revolución en el intervalo dado se puede calcular por la suma de n rectángulos con base Δk_j y altura L_i .

Dicho de otra forma, el área de cada rectángulo A_i está determinada por la siguiente expresión:

$$A_i = L_i * \Delta k_j$$

$$A_i = \frac{f(x_j) - g(x_j)}{\sqrt{m^2 + 1}} * \left(\frac{1 + m \frac{\Delta y_j}{\Delta x_j}}{\sqrt{m^2 + 1}} \right) \Delta x_j$$

$$A_i = \frac{(f(x_j) - g(x_j)) \left(1 + m \frac{\Delta y_j}{\Delta x_j} \right)}{m^2 + 1} \Delta x_j$$

Luego, si dividimos el área entre n rectángulos A_i , el área total A_T se determina al sumar los n rectángulos A_i cuando n se tiende a infinito.

$$A_T = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A_i$$

$$A_T = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{(f(x_j) - g(x_j)) \left(1 + m \frac{\Delta y_j}{\Delta x_j} \right)}{m^2 + 1} \Delta x_j$$

Dado que el valor de m es independiente a la sumatoria, la expresión se puede transformar en

$$A_T = \frac{1}{m^2 + 1} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (f(x_j) - g(x_j)) \left(1 + m \frac{\Delta y_j}{\Delta x_j} \right) \Delta x_j$$

Cuando la cantidad de trapecios n tiende a infinito, distancia Δx_j tiende 0 haciendo que x_{j+1} tienda a x_j y la pendiente de la recta secante que pasa por I y J, $m_{sec} = \frac{\Delta y_j}{\Delta x_j}$, tienda a

convertirse en la pendiente de una recta tangente por el punto I. Esto es la derivada de la función en el punto x_j que pertenece al intervalo $[a, b]$.

$$A_T = \frac{1}{m^2 + 1} \int_a^b (f(x) - g(x))(1 + mf'(x))dx$$

3.2 Modelo para volumen de un sólido de revolución

Para determinar el volumen del sólido se construirán discos que cubran todo el sólido.

El volumen de cada disco será

$$V_i = \pi L_i^2 \Delta k_j$$

$$V_i = \pi \left(\frac{f(x_j) - g(x_j)}{\sqrt{m^2 + 1}} \right)^2 * \left(\frac{1 + m \frac{\Delta y_j}{\Delta x_j}}{\sqrt{m^2 + 1}} \right) \Delta x_j$$

$$V_i = \frac{\pi (f(x_j) - g(x_j))^2 \left(1 + m \frac{\Delta y_j}{\Delta x_j} \right)}{(m^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \Delta x_j$$

$$V_T = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n V_i$$

$$V_T = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\pi (f(x_j) - g(x_j))^2 \left(1 + m \frac{\Delta y_j}{\Delta x_j} \right)}{(m^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \Delta x_j$$

$$V_T = \frac{\pi}{(m^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (f(x_j) - g(x_j))^2 \left(1 + m \frac{\Delta y_j}{\Delta x_j} \right) \Delta x_j$$

$$V_T = \frac{\pi}{(m^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \int_a^b (f(x) - g(x))^2 (1 + mf'(x)) dx$$

3.3 Modelo para área de superficie de revolución

Para la superficie de revolución obtenida al rotar una curva plana alrededor de un eje oblicuo se sigue un procedimiento similar al usado en el modelo para cuando el eje de rotación es horizontal, es decir, se considera una partición P del intervalo $[a, b]$.

$$P_{[a,b]} = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n = b\}$$

A cada punto x_k en el intervalo, se le asigna su correspondiente imagen en la curva $y = f(x)$ formando así una secuencia de puntos $P_0 P_1 \dots P_k P_{k+1} \dots P_n$. A partir de estos puntos, se construye una poligonal que conecta todos ellos.

Luego, se toma el segmento $\overline{P_k P_{k+1}}$ de dicha poligonal y se rota alrededor del eje de revolución definido por la recta $g(x) = mx + b$. La rotación de este segmento genera una superficie lateral que corresponde a un cono truncado cuyos radios corresponden a las distancias

$$L_i \text{ y } L_{i+1} \text{ y la generatriz } g_k = \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2} = \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2}$$

Entonces el área de la superficie lateral de este cono es:

$$s_k = 2\pi g_k \frac{(R_1 + R_2)}{2}$$

$$s_k = 2\pi \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2} \frac{(L_i + L_{i+1})}{2}$$

Se sabe que $\cos \alpha = \frac{L_i}{f(x_k) - mx_k - b}$

De aquí se puede expresar la distancia L_i como $L_i = (f(x_k) - mx_k - b) * \cos \alpha$

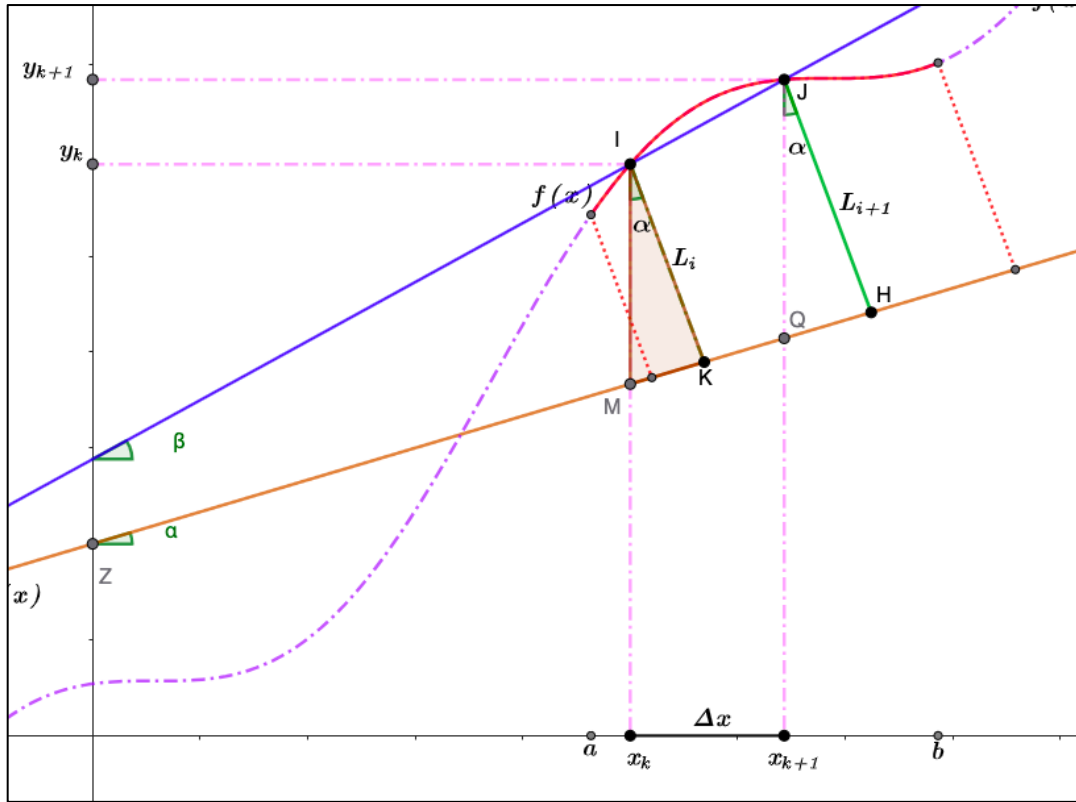
Usando $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{m^2+1}}$, se tiene $L_i = \frac{f(x_k) - mx_k - b}{\sqrt{m^2+1}}$

De igual manera, para la segunda distancia L_{i+1} se tiene $\cos \alpha = \frac{L_{i+1}}{f(x_{k+1}) - mx_{k+1} - b}$

$$L_{i+1} = (f(x_{k+1}) - mx_{k+1} - b) * \cos \alpha$$

$$L_{i+1} = \frac{f(x_{k+1}) - mx_{k+1} - b}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

Figura 25: Representación de la función junto con el eje de revolución y la secante por los puntos I y J



Fuente: Autoría propia

$$s_k = 2\pi \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2} \left(\frac{f(x_k) - mx_k - b + f(x_{k+1}) - mx_{k+1} - b}{2\sqrt{m^2 + 1}} \right)$$

$$s_k = \frac{\pi}{\sqrt{m^2 + 1}} (y_k + y_{k+1} - m(x_k + x_{k+1}) - 2b) \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2}$$

Hallando los valores medios de (x_k, x_{k+1}) y de sus respectivas imágenes (y_k, y_{k+1}) , donde

$$\bar{x}_k = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$$

$$\bar{y}_k = \frac{y_k + y_{k+1}}{2}$$

$$s_k = \frac{2\pi}{\sqrt{m^2 + 1}} (2\bar{y}_k - 2m\bar{x}_k - 2b) \sqrt{1 + \frac{\Delta y_k^2}{\Delta x_k^2}} * \Delta x_k$$

$$s_k = \frac{2\pi}{\sqrt{m^2 + 1}} (\bar{y}_k - m\bar{x}_k - b) \sqrt{1 + \frac{\Delta y_k^2}{\Delta x_k^2}} * \Delta x_k$$

Finalmente, la superficie del sólido será la sumatoria de las superficies de todos los conos truncados formados por los diferentes segmentos de la poligonal.

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{2\pi}{\sqrt{m^2 + 1}} (\bar{y}_k - m\bar{x}_k - b) \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2} * \Delta x_k$$

A medida que la cantidad de segmentos aumente, $\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}$ se convierte en la pendiente de una recta tangente a la curva, es decir a la derivada de la función.

$$S = \int_a^b \frac{2\pi}{\sqrt{m^2 + 1}} (\bar{y}_k - m\bar{x}_k - b) \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2} * \Delta x_k$$

$$S = \frac{2\pi}{\sqrt{m^2 + 1}} \int_a^b (f(x) - mx - b) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

$$S = \frac{2\pi}{\sqrt{m^2 + 1}} \int_a^b (f(x) - g(x)) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Capítulo 4 – Aplicación de los modelos

En este capítulo se presentarán tres ejemplos de aplicación de los modelos obtenidos en el capítulo anterior, en cada uno se calculará el área de la región plana, el volumen del sólido de revolución y el área de la superficie de revolución.

4.1 Ejemplo 1

Encuentre el área de la región plana, el área de la superficie de revolución y el volumen del sólido de revolución que se generan al rotar alrededor de la recta $g(x)=x$ la región comprendida entre la función $f(x) = 3x$ y la recta $g(x)=x$, en el intervalo $[0, 3]$.

4.1.1 Área de la región plana

$$A = \frac{1}{m^2 + 1} \int_a^b (f(x) - g(x))(1 + mf'(x))dx$$

Para este ejemplo se conoce:

- $f(x) = 3x$
- $g(x) = x$
- $m = 1$
- $A = 0$
- $B = 3$

Se rempazan estos valores en la expresión:

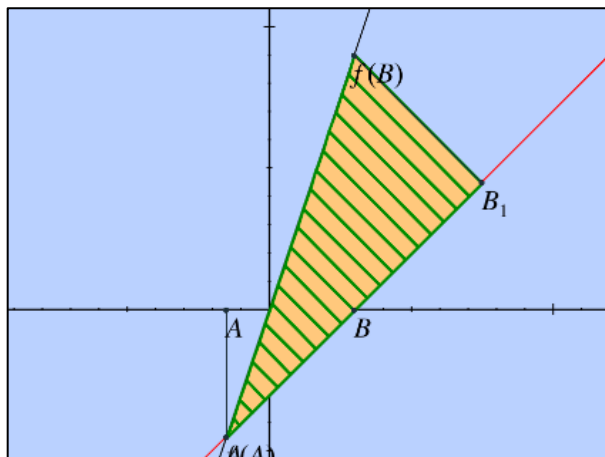
$$A = \frac{1}{1^2 + 1} \int_0^3 (3x - (x))(1 + 3)dx = \frac{1}{2} \int_0^3 (2x)(4)dx = \frac{4}{2} \int_0^3 2xdx$$

La solución de la integral es:

$$A = 2[x^2]_0^3 = 2[3^2 - 0^2] = 2[9] = 18u^2$$

En la figura 26 se muestra la región correspondiente.

Figura 26: Área del ejemplo 1



Fuente: Autoría propia

4.1.2 Volumen del sólido de revolución

Se reemplazan los valores en la expresión que se dedujo para el volumen:

$$V = \frac{\pi}{(m^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \int_p^q (f(x) - g(x))^2 (1 + mf'(x)) dx$$

$$V = \frac{\pi}{(1^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \int_0^3 (3x - (x - 3))^2 (1 + 3) dx = \frac{\pi}{\sqrt{8}} \int_0^3 (2x + 3)^2 (4) dx$$

$$V = \frac{4\pi}{2\sqrt{2}} \int_0^3 (4x^2 + 12x + 9) dx$$

La solución de la integral es:

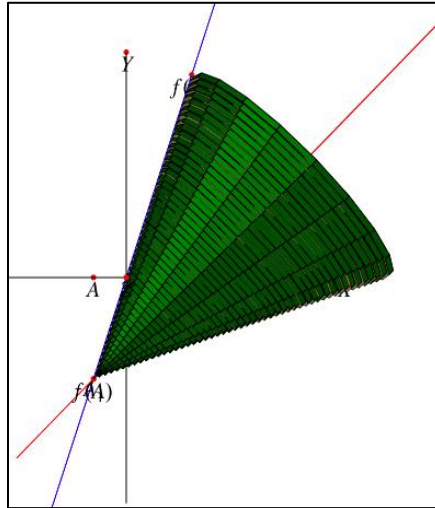
$$V = \frac{2}{\sqrt{2}} \pi \left[\frac{4x^3}{3} + 6x^2 + 9x \right]_0^3$$

$$V = \sqrt{2} \pi \left[\frac{4(3)^3}{3} + 6(3)^2 + 9(3) - \frac{4(0)^3}{3} - 6(0)^2 - 9(0) \right]$$

$$V = \sqrt{2} \pi [36 + 54 + 27] = \sqrt{2} \pi \left[\frac{243}{2} \right] = \frac{243\sqrt{2}\pi}{2} \approx 159.958 u^3$$

En la figura 27 se muestra el sólido de revolución.

Figura 27: Sólido del ejemplo 1



Fuente: Autoría propia

4.1.3 Área de superficie de revolución

Se reemplazan los valores en la expresión que se dedujo para la superficie de revolución:

$$S = \frac{2\pi}{\sqrt{m^2 + 1}} \int_a^b (f(x) - g(x)) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = \frac{2\pi}{\sqrt{1^2 + 1}} \int_0^3 (3x - x) \sqrt{1 + 3^2} dx$$

$$S = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \int_0^3 (2x) \sqrt{10} dx = \frac{2\sqrt{10}\pi}{\sqrt{2}} \int_0^3 (2x) dx = 2\sqrt{5}\pi [x^2]_0^3 \approx 126.45 u^2$$

4.2 Ejemplo 2

Encuentre el área de la región plana, el área de la superficie de revolución y el volumen del sólido de revolución que se generan cuando se rota alrededor de $g(x) = 3x + 1$ la región comprendida entre las funciones $f(x) = 3x + 5$ y $g(x) = 3x + 1$, en el intervalo $[2,5]$.

4.2.1 Área de la región plana

Se tiene la siguiente información:

- $f(x) = 3x + 5$

- $g(x) = 3x + 1$
- $m = 3$
- $A = 2$
- $B = 5$
- $f'(x) = 3$
- $A = \frac{1}{m^2+1} \int_a^b (f(x) - g(x))(1 + mf'(x)) dx$

Se reemplazan los valores en la expresión que se obtuvo para el área:

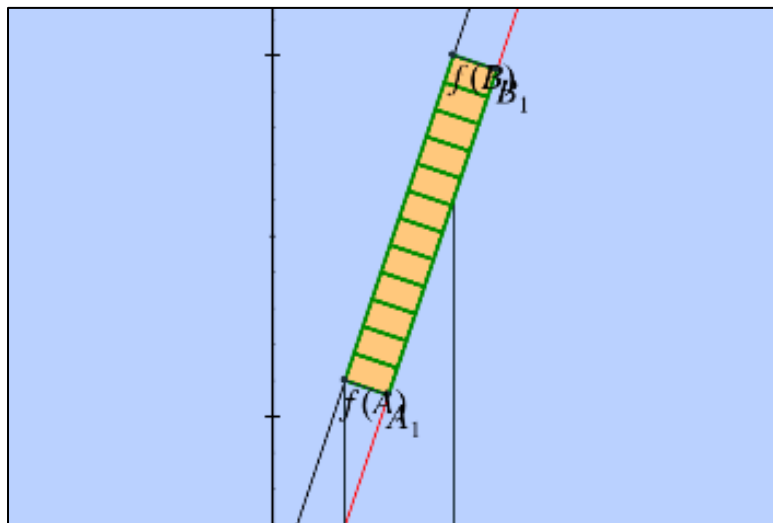
$$A = \frac{1}{3^2 + 1} \int_2^5 (3x + 5 - 3x - 1)(1 + 3(3)) dx = \frac{1}{10} \int_2^5 (4)(10) dx$$

Se resuelve la integral:

$$A = 4[x]_2^5 = 4(5 - 2) = 12 u^2$$

En la figura 28 se muestra la región plana.

Figura 28: Representación del área del ejemplo 2



Fuente: Autoría propia

4.2.2 Volumen del sólido de revolución

Se reemplazan los valores en la expresión obtenida para el volumen:

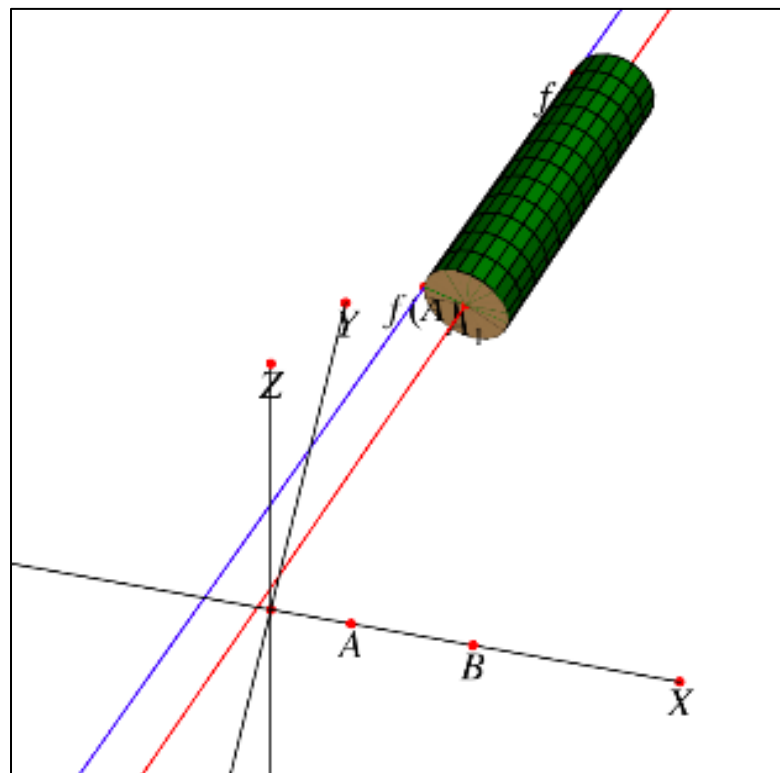
$$V = \frac{\pi}{(m^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \int_a^b (f(x) - g(x))^2 (1 + mf'(x)) dx$$

$$V = \frac{\pi}{(3^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \int_2^5 (3x + 5 - (3x + 1))^2 (1 + 3(3)) dx$$

$$V = \frac{\pi}{(10)^{\frac{3}{2}}} \int_2^5 4^2(10) dx = \frac{160\pi}{10\sqrt{10}} [x]_2^5 = \frac{16\pi}{\sqrt{10}} 3 = \frac{24\pi\sqrt{10}}{5} \approx 47.69u^3$$

En la figura 29 se muestra el sólido obtenido.

Figura 29: Representación del sólido del ejemplo 2



Fuente: Autoría propia

4.2.3 Área de superficie de revolución

Se reemplazan los valores en la expresión obtenida para la superficie de revolución:

$$S = \frac{2\pi}{\sqrt{m^2 + 1}} \int_a^b (f(x) - g(x)) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

$$S = \frac{2\pi}{\sqrt{3^2 + 1}} \int_2^5 (3x + 5 - (3x + 1)) \sqrt{1 + 3^2} dx$$

$$S = \frac{2\pi}{\sqrt{3^2 + 1}} \int_2^5 (4) \sqrt{10} dx = \frac{8\sqrt{10}\pi}{\sqrt{10}} [x]_2^5 = \frac{8\sqrt{10}\pi}{\sqrt{10}} (3) = 24\pi \approx 75.4u^2$$

4.3 Ejemplo 3

Encuentre el área de la región plana, el área de la superficie de revolución y el volumen del sólido de revolución que se generan cuando se rota alrededor de la recta $g(x) = 3x - 2$ la región limitada por la función $f(x) = x^2$ y la recta $g(x) = 3x - 2$ en el intervalo $[0, 1]$.

4.3.1 Área de la región plana

Se conoce la siguiente información:

- $f(x) = x^2$
- $g(x) = 3x - 2$
- $m = 3$
- $A = 0$
- $B = 1$

Si $f(x) = x^2$ entonces $f'(x) = 2x$

Se reemplazan los valores en la expresión $A = \frac{1}{m^2 + 1} \int_a^b (f(x) - g(x))(1 + mf'(x)) dx$

$$A = \frac{1}{3^2 + 1} \int_0^1 (x^2 - 3x + 2)(1 + 3(2x)) dx$$

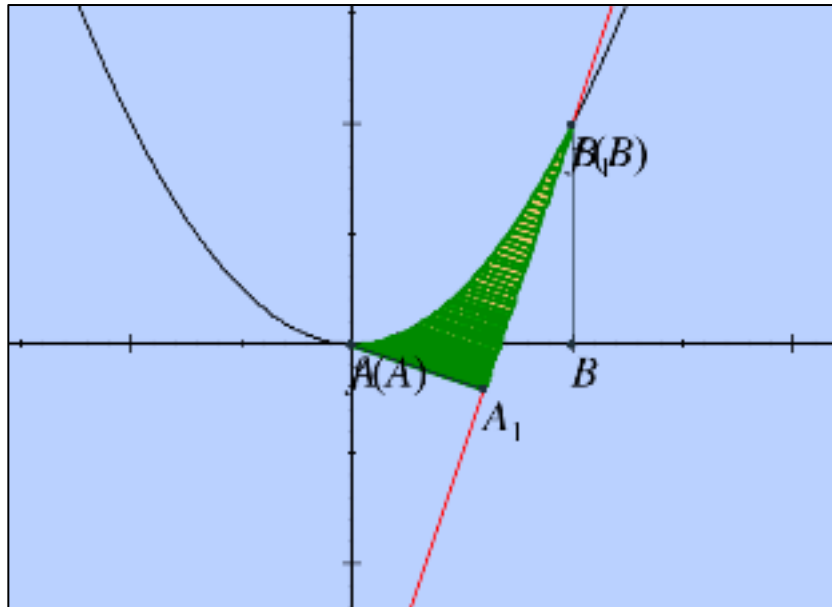
$$A = \frac{1}{3^2 + 1} \int_0^1 (x^2 - 3x + 2)(1 + 6x) dx$$

$$A = \frac{1}{10} \int_0^1 6x^3 - 17x^2 + 9x + 2 dx = \frac{1}{10} \left[\frac{6x^4}{4} - \frac{17x^3}{3} + \frac{9x^2}{2} + 2x \right]_0^1 = \frac{1}{10} \left[\frac{6}{4} - \frac{17}{3} + \frac{9}{2} + 2 \right]$$

$$A = \frac{1}{10} \left[6 - \frac{17}{3} + 2 \right] = \frac{1}{10} \left[8 - \frac{17}{3} \right] = \frac{1}{10} \left(\frac{7}{3} \right) = \frac{7}{30} u^2 \approx 0.23u^2$$

En la figura 30 se muestra la región plana correspondiente.

Figura 30: Representación del área del ejemplo 3



Nota: Autoría propia

4.3.2 Volumen del sólido de revolución

Se reemplazan los valores en la expresión $V = \frac{\pi}{(m^2+1)^{\frac{3}{2}}} \int_0^1 (f(x) - g(x))^2 (1 + mf'(x)) dx$

$$V = \frac{\pi}{(3^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \int_0^1 (x^2 - 3x + 2)^2 (1 + 3(2x)) dx$$

$$V = \frac{\pi}{(10)^{\frac{3}{2}}} \int_0^1 (x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x^3 + 9x^2 - 6x + 2x^2 - 6x + 4)(1 + 6x)dx$$

$$V = \frac{\pi}{10\sqrt{10}} \int_0^1 (x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4)(1 + 6x)dx$$

$$V = \frac{\pi}{10\sqrt{10}} \int_0^1 (6x^5 - 35x^4 + 72x^3 - 59x^2 + 12x + 4)dx$$

$$V = \frac{\pi}{10\sqrt{10}} \left[\frac{6x^6}{6} - \frac{35x^5}{5} + \frac{72x^4}{4} - \frac{59x^3}{3} + \frac{12x^2}{2} + 4x \right]_0^1$$

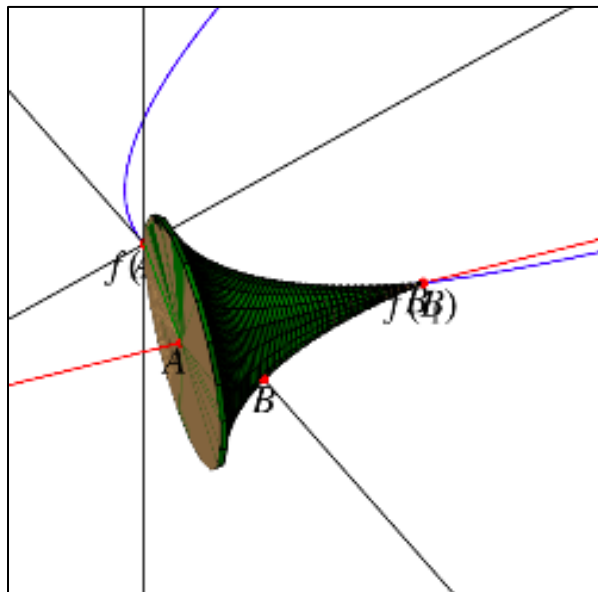
$$V = \frac{\pi}{10\sqrt{10}} \left[x^6 - 7x^5 + 18x^4 - \frac{59x^3}{3} + 6x^2 + 4x \right]_0^1$$

$$V = \frac{\pi}{10\sqrt{10}} \left[1^6 - 7(1)^5 + 18(1)^4 - \frac{59(1)^3}{3} + 6(1)^2 + 4(1) \right] = \frac{\pi}{10\sqrt{10}} \left[22 - \frac{59}{3} \right]$$

$$V = \frac{\pi}{10\sqrt{10}} \left(\frac{4}{3} \right) = \frac{2\pi}{15\sqrt{10}} \approx 0.23u^3$$

En la figura 31 se muestra la región plana correspondiente.

Figura 31: Representación del sólido del ejemplo 3



Fuente: Autoría propia

4.3.3 Área de superficie de revolución

Se reemplazan los valores en la expresión $S = \frac{2\pi}{\sqrt{m^2+1}} \int_0^1 (f(x) - g(x)) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$

$$S = \frac{2\pi}{\sqrt{3^2+1}} \int_0^1 (x^2 - 3x + 2) \sqrt{1 + (2x)^2} dx = \frac{2\pi}{\sqrt{10}} \int_0^1 (x^2 - 3x + 2) \sqrt{1 + 4x^2} dx$$

Para resolver la integral se usa la sustitución trigonométrica $x = \frac{1}{2} \tan \theta$, con la cual se llega a

$$\text{la siguiente integral trigonométrica } S = \frac{4\pi}{\sqrt{10}} \int \left(\frac{1}{4} \tan^2 \theta - \frac{3}{2} \tan \theta + 2 \right) \frac{1}{2} \sec^3 \theta d\theta.$$

La solución de esta integral es:

$$S = \frac{4\pi}{\sqrt{10}} \int \left(\frac{1}{4} \tan^2 \theta - \frac{3}{2} \tan \theta + 2 \right) \frac{1}{2} \sec^3 \theta d\theta$$

$$S = \frac{\sec \theta \tan \theta (2 \sec^2 \theta + 31)}{32} + \frac{31 \ln |\tan \theta + \sec \theta|}{32} - \frac{\sec^3 \theta}{2}$$

La solución de la integral en términos de x es:

$$S = \frac{2\pi}{\sqrt{10}} \left[\frac{(33x + 8x^3) \sqrt{\frac{1}{4} + x^2}}{8} + \frac{31 \ln \left| 2x + 2\sqrt{\frac{1}{4} + x^2} \right|}{32} - (1 + 4x^2) \left(\sqrt{\frac{1}{4} + x^2} \right) \right]$$

$$S = \frac{2\pi}{\sqrt{10}} \left[\frac{(33x + 8x^3) \sqrt{\frac{1}{4} + x^2}}{8} + \frac{31 \ln \left| 2x + 2\sqrt{\frac{1}{4} + x^2} \right|}{32} - (1 + 4x^2) \left(\sqrt{\frac{1}{4} + x^2} \right) \right]_0^1$$

$$S = \frac{2\pi}{\sqrt{10}} \left[\left(\frac{41\sqrt{5}}{16} \right) + \frac{31 \ln |2 + \sqrt{5}|}{32} - \frac{5}{2} \sqrt{5} + \frac{1}{2} \right] = \frac{2\pi}{\sqrt{10}} \left[\frac{2\sqrt{5} + 31 \ln |2 + \sqrt{5}| + 16}{32} \right]$$

$$S \approx 2.02u^2$$

Capítulo 5 – El aplicativo digital **Oblique-Axis**

Este capítulo se dedicará al aspecto tecnológico de este trabajo, lo cual constituye el segundo gran propósito y producto. Inicialmente se presenta la interfaz general de **DescartesJS**, posteriormente se presenta la interfaz y cómo usar el aplicativo digital **Oblique-Axis** que servirá para verificar los cálculos de áreas, superficies de revolución y volumen de sólidos de revolución tanto para ejes de rotación horizontales como para ejes de rotación oblicuos.

5.1 La herramienta **DescartesJS**

5.1.1 ¿Qué es un applet?

Lo primero que vale aclarar a los lectores es el término applet, ya que tanto **DescartesJS** como el aplicativo **Oblique-Axis** son applets. Un Applet es un programa o aplicación que se incrusta en el código de otro programa y por lo tanto su ejecución depende de la ejecución del otro programa. Los Applets pueden crearse en diferentes lenguajes de programación para ser utilizados especialmente en páginas Web.

Los Applets se caracterizan porque no pueden ejecutarse de forma independiente, generalmente brindan información gráfica y dinámica, permiten interacción con el usuario, carecen de sesión, tiene privilegios de seguridad muy limitados y normalmente cumplen tareas muy específicas.

En la actualidad, los Applets son muy utilizados en entornos de aprendizaje en línea donde se requieren simulaciones interactivas y en entornos presenciales para ofrecer a los estudiantes representaciones dinámicas de los objetos que se quieren estudiar. En la Web se encuentran muchas experiencias de actividades interactivas y pequeños laboratorios virtuales creados a base de Applets de Java, JavaScript, Flash, Geogebra y JClic, entre otros.

5.1.2 Interfaz de **DescartesJS**

Hacia el año 2000 aparece el nipe **Descartes**, que es un programa realizado en lenguaje Java con las características de un Applet configurable, es decir, que sirva para generar nuevos Applets. Los usuarios pueden programarlo o configurarlo para crear actividades interactivas, también llamadas

escenas por los creadores de Descartes. La ventana principal del Applet Descartes contiene un sistema de referencia cartesiano interactivo donde el usuario puede configurar el espacio (2D o 3D), definir controles o variables, crear algoritmos, configurar objetos 2D y 3D que van desde simples figuras geométricas hasta complejas funciones, animar los objetos creados, etc. (Madrigal, 2006).

Descartes fue creado inicialmente para la creación de lecciones electrónicas enriquecidas con escenas interactivas para favorecer la comprensión de conceptos de matemáticas, pero gradualmente se le han incorporado herramientas y funciones que permiten crear actividades interactivas para cualquier área del conocimiento.

Debido a los inconvenientes que se presentaban con la ejecución de los Applets cada vez que se actualizaba la versión de la máquina virtual de Java, los autores decidieron crear **DescartesJS**, que es un intérprete de Descartes compatible con HTML5. Esta compatibilidad ocasiona que los Applets creados con Descartes funcionen en cualquier ordenador, tableta o celular independientemente del sistema operativo que tenga.

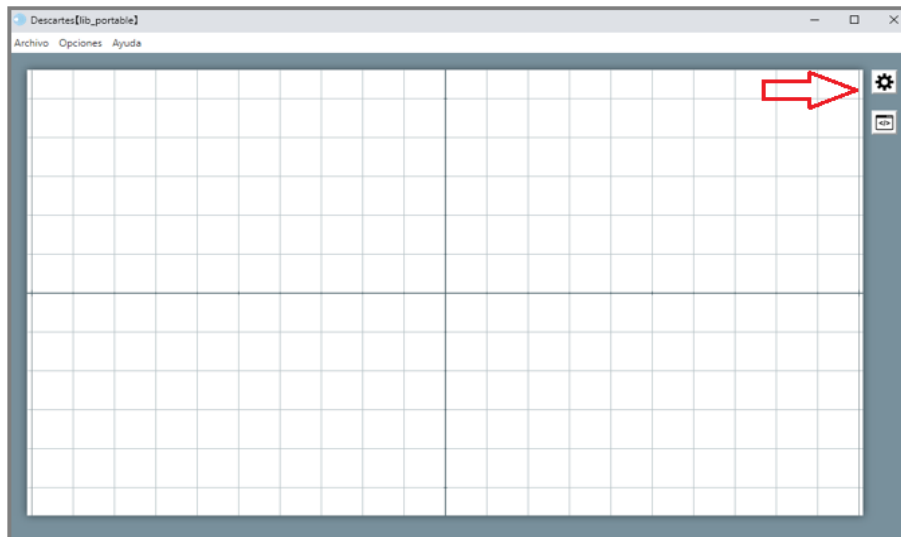
En la configuración de actividades con DescartesJS está implícita una programación matemática con JavaScript, por eso las escenas se ejecutan sin problemas en una página HTML y se pueden visualizar en cualquier navegador.

El programa Descartes y el intérprete o editor DescartesJS son propiedad del Proyecto Descartes de España, promovido por el antiguo Ministerio de Educación, Cultura y Deporte de España. La herramienta es gratuita y se puede descargar en la Web <https://proyectodescartes.org/>.

A continuación, se presenta brevemente la interfaz del programa DescartesJS:

Al abrir el programa aparece el tablero que se muestra en la figura 32. Para iniciar la configuración de una escena se pulsa en el botón “configuración” que se señala con la flecha.

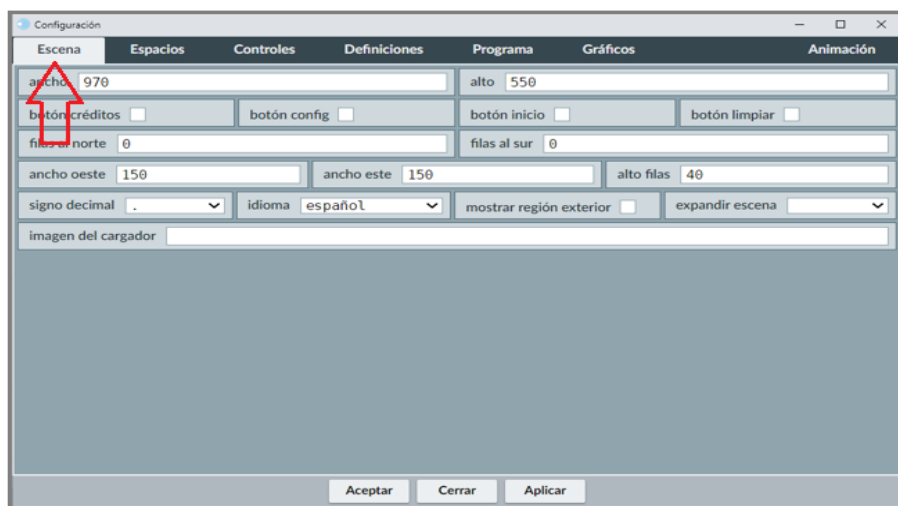
Figura 32. Pantalla inicial de DescartesJS.



Nota: Tomado de Abreu, J. (2016). DescartesJS. Versión 0.22.003. Instituto de Matemáticas, UNAM.

Al pulsar el botón de configuración, se activa un nuevo tablero donde aparecen siete pestañas: Escena, Espacios, Controles, Definiciones, Programa, Gráficos y Animación. Cuando se selecciona la pestaña “Escena” se activa un tablero para configurar el aspecto del Applet. Ver figura 33.

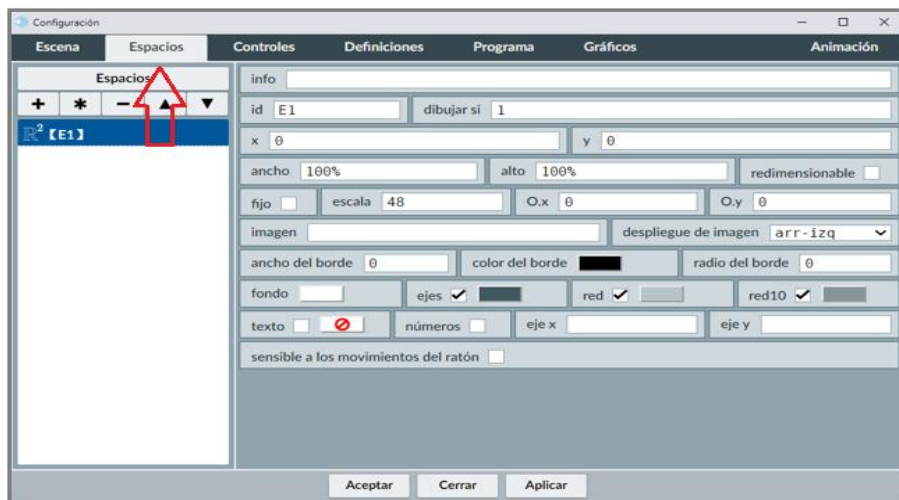
Figura 33. Tablero para configurar la escena o aspecto del Applet.



Nota: Tomado de Abreu, J. (2016). DescartesJS. Versión 0.22.003. Instituto de Matemáticas, UNAM.

La pestaña “Espacio” activa un tablero donde el usuario selecciona y configura el espacio de trabajo: el plano 2D o el espacio 3D. Ver figura 34.

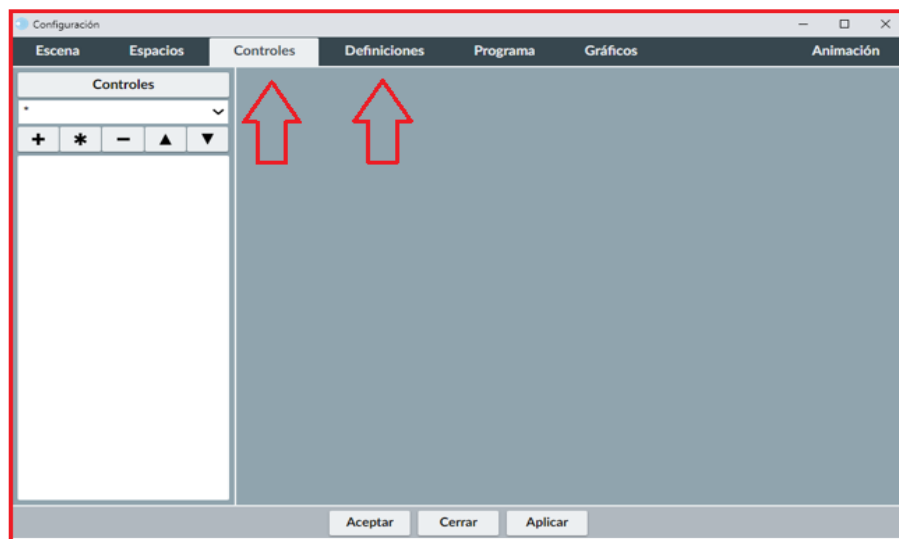
Figura 34. *Tablero de configuración del espacio.*



Nota: Tomado de Abreu, J. (2016). DescartesJS. Versión 0.22.003. Instituto de Matemáticas, UNAM.

En las pestañas de “Controles” y “Definiciones”, se activan tableros similares. En “Controles” se definen las variables y parámetros que posibilitarán la interactividad con el usuario. En “Definiciones” se definen funciones, matrices y vectores. Ver figura 35.

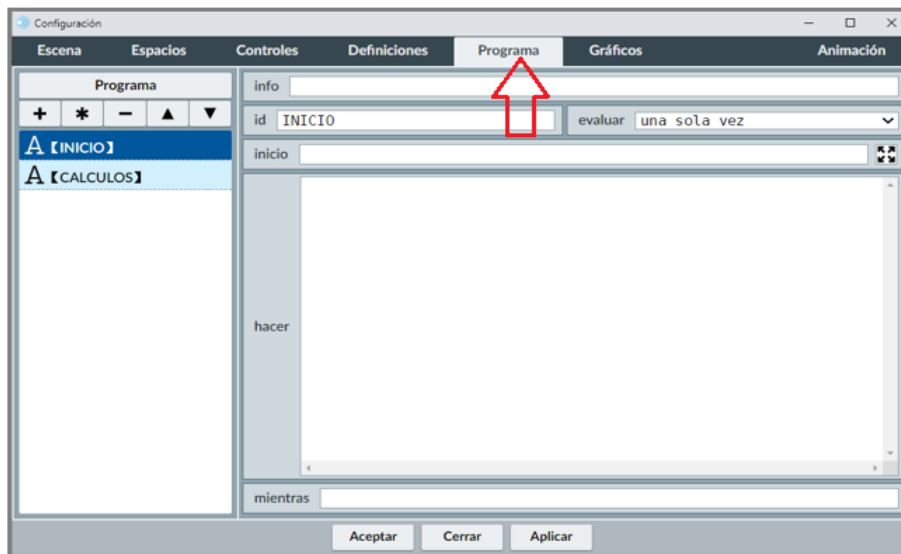
Figura 35. *Ubicación las pestañas “Controles” y “Definiciones”.*



Nota: Tomado de Abreu, J. (2016). DescartesJS. Versión 0.22.003. Instituto de Matemáticas, UNAM.

En la pestaña “Programa” el usuario puede crear un algoritmo para hacer un proceso iterativo, es decir, programar un ciclo en pseudocódigo. Ver figura 36.

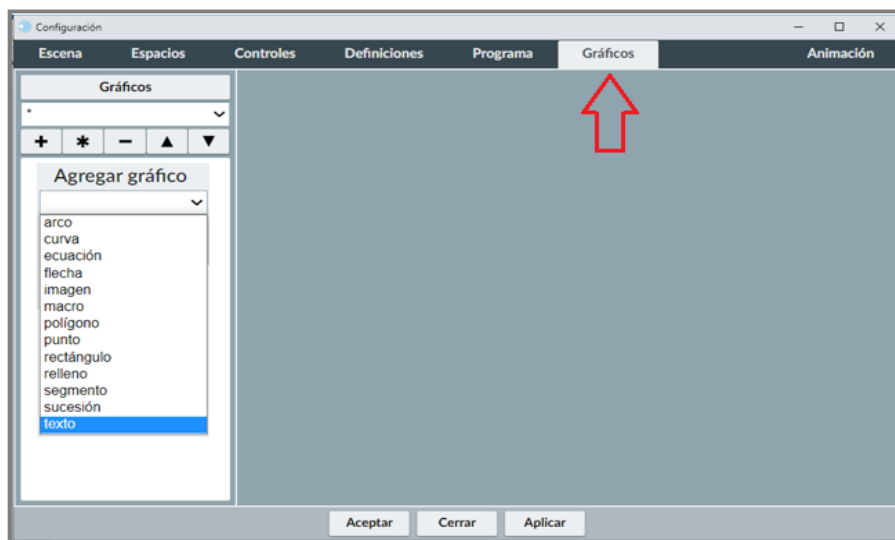
Figura 36. *Tablero de programación.*



Nota: Tomado de Abreu, J. (2016). DescartesJS. Versión 0.22.003. Instituto de Matemáticas, UNAM.

En la pestaña “Gráficos” se activa un tablero que da la opción de insertar objetos del plano como arcos, funciones, curvas, vectores, polígonos, textos, etc. Para cada objeto hay un tablero de configuración. Ver figura 37.

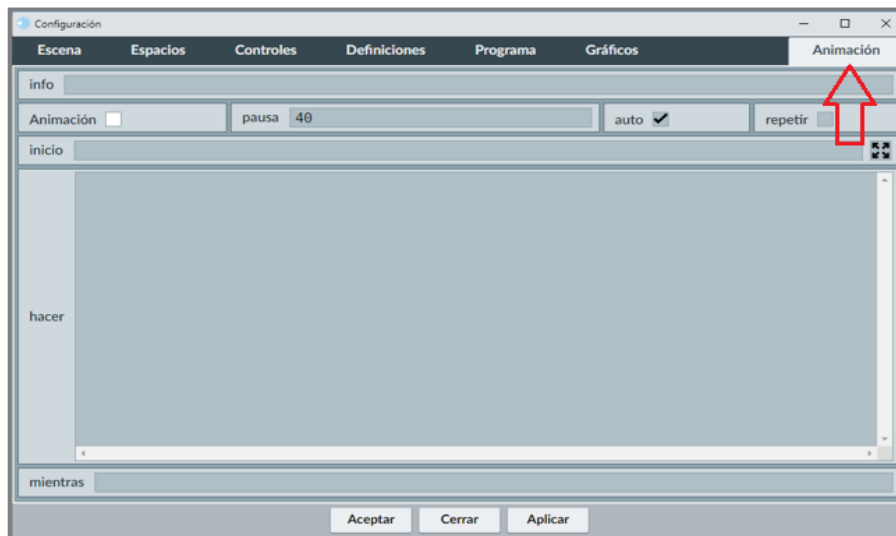
Figura 37. *Tablero de gráficos para el plano.*



Nota: Tomado de Abreu, J. (2016). DescartesJS. Versión 0.22.003. Instituto de Matemáticas, UNAM.

La pestaña “Animación” activa un tablero donde se puede programar el movimiento automático en una escena o de un objeto particular de la escena. Ver figura 38.

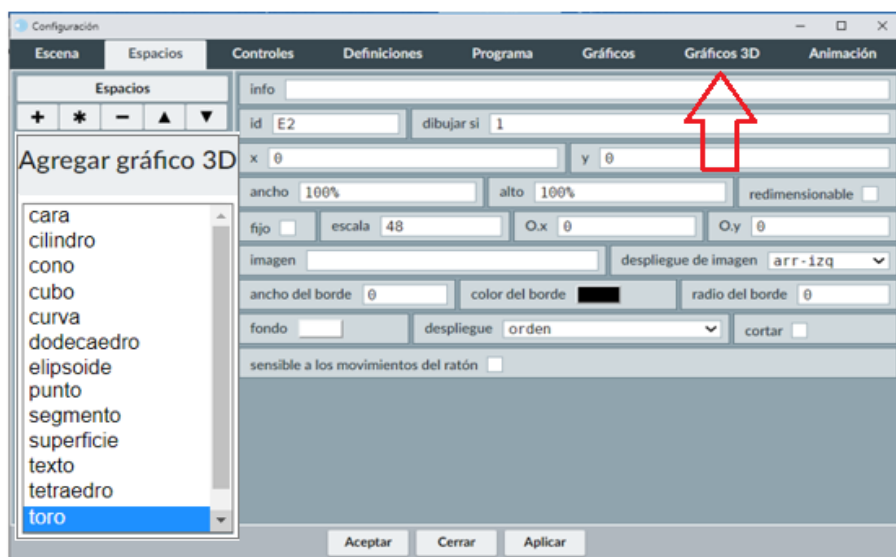
Figura 38. Tablero para configurar movimiento.



Nota: Tomado de Abreu, J. (2016). DescartesJS. Versión 0.22.003. Instituto de Matemáticas, UNAM.

Cuando se elige el espacio 3D se activa la pestaña “Gráficos 3D”. Con esta pestaña se activa un tablero que permite insertar objetos del espacio como cubos, cilindros, conos, superficies, poliedros, etc. Ver figura 39.

Figura 39. Tablero de Gráficos 3D.



Nota: Tomado de Abreu, J. (2016). DescartesJS. Versión 0.22.003. Instituto de Matemáticas, UNAM.

Después de presentar la interfaz del software DescartesJS y señalar las posibilidades que ofrece para crear objetos interactivos, vale destacar cuatro razones para trabajar con DescartesJS:

- Es libre.
- Los autores de actividades con DescartesJS no están obligados a subir las actividades al servidor del Proyecto Descartes.
- Las actividades son portables, es decir, no se requiere instalar el software para que funcionen.
- Las actividades se pueden colocar en una página Web y se pueden visualizar desde cualquier navegador independiente del sistema operativo.

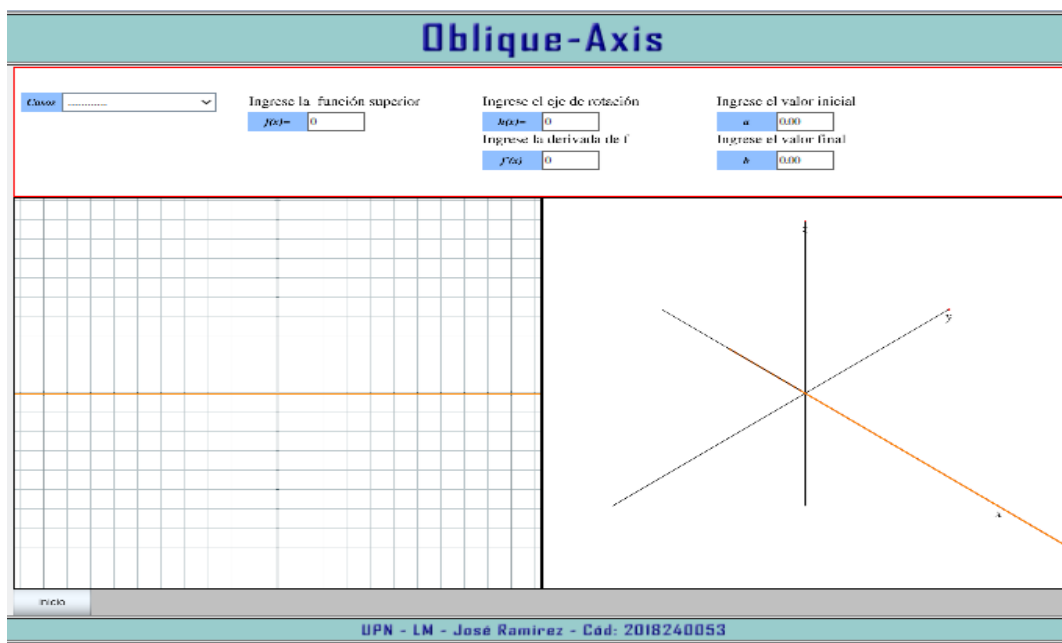
5.2 El aplicativo Oblique-Axis

El aplicativo **Oblique-Axis** es un applet creado con la herramienta DescartesJS y, por lo tanto, se puede incrustar en una página HTML. Al ser un applet puede configurarse y usarse en cursos virtuales para graficar regiones planas y sólidos de revolución. En la figura 40 se muestra la pantalla inicial de Oblique-Axis.

El aplicativo **Oblique-Axis** se ha dejado instalado en la web para uso libre y se puede acceder a él a través del enlace: <https://www.srvigas.com/Ramirez/OblicueAxis.html>

En la figura 40 se muestra la pantalla inicial de **Oblique-Axis**.

Figura 40: Pantalla inicial del aplicativo.



Nota. Pantalla inicial del aplicativo.

La pantalla inicial está compuesta por tres espacios: El primer espacio presenta un menú donde se da la posibilidad de elegir entre Ejes horizontales y Ejes oblicuos, además de tener los campos para ingresar las funciones. El segundo espacio es un plano R^2 donde se mostrará la gráfica de la región plana. El tercer espacio es R^3 , que es el espacio donde se representará el sólido de revolución.

En la figura 41 se muestra el espacio donde se ingresarán la función, el eje de rotación y el intervalo de integración. A la derecha aparecerán el área de la región plana, el volumen del sólido de revolución y la superficie de revolución.

Figura 41: *Espacio para ingreso de funciones e intervalos.*

Casos	Modelo eje horizontal	Ingrese la función superior	Ingrese el eje de rotación	Ingrese el valor inicial	$A=0 \text{ u}^2$
		$f(x)=$ 0	$h(x)=$ 0	a 0.00	$V=0 \text{ u}^3$
		Ingrese la función inferior	Ingrese la derivada de f	Ingrese el valor final	$S=0 \text{ u}^2$
		$g(x)=$ 0	$f'(x)$ 0	b 0.00	

Nota. Autoría propia

El campo Casos es un menú donde el usuario puede elegir el eje de rotación (horizontal u oblicuo).

En los campos para funciones inferior y superior se debe ingresar las funciones superior e inferior.

Es necesario que ambas funciones sean continuas en el intervalo.

En el campo para el eje se debe ingresar una constante, dado que el eje de rotación es horizontal.

En el campo para la derivada se debe ingresar la derivada de la función superior.

En la figura 42 se muestra el primer espacio para el caso en que el usuario elija Modelo ejes oblicuos.

Figura 42: *Campos para ingresar datos cuando el eje es oblicuo.*

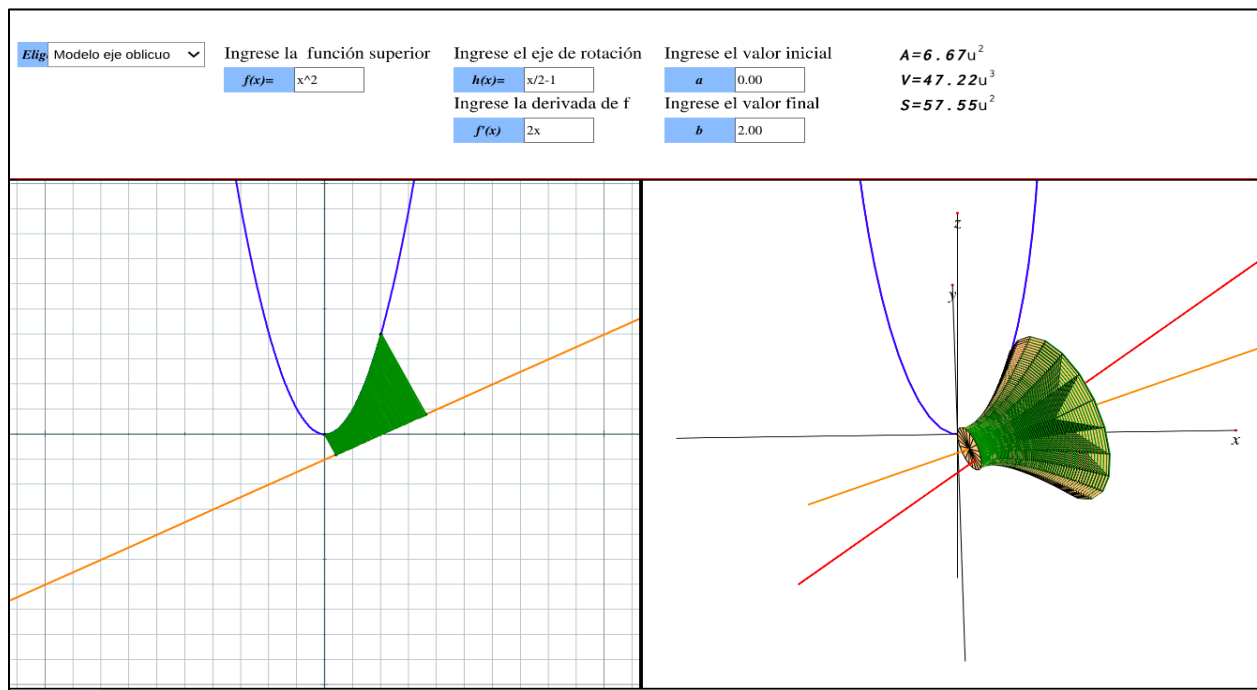
Eleg	Modelo eje oblicuo	Ingrese la función superior	Ingrese el eje de rotación	Ingrese el valor inicial	$A=6.67 \text{ u}^2$
		$f(x)=$ x^2	$h(x)=$ $x/2-1$	a 0.00	$V=47.22 \text{ u}^3$
			Ingrese la derivada de f	Ingrese el valor final	$S=57.55 \text{ u}^2$
			$f'(x)$ $2x$	b 2.00	

Nota. Autoría propia

Si se selecciona la opción Modelo con eje oblicuo, desaparecerá el campo para ingresar la segunda función, dado que en el aplicativo no se considera el modelo para dos funciones. En esta opción, la función inferior es el mismo eje de rotación.

En la figura 43 se muestran los gráficos que resultan después de ingresar los datos y los gráficos generados por el aplicativo.

Figura 43: Gráficos generados cuando el eje de rotación es oblicuo.



Nota. Autoría propia

5.3 Ejemplo de uso del aplicativo Oblique-Axis

Considérese la región R limitada por $f(x) = 4 + \frac{1}{4}x^2$ y la recta $g(x) = 1 + \frac{x}{2}$ entre $x=0$ y $x=4$.

¿Cuál es el área de la región R? ¿Cuál es el volumen del sólido de revolución que se genera al

rotar R alrededor de la recta $g(x) = 1 + \frac{x}{2}$? ¿Cuál es el área de la superficie de revolución?

Primer paso : Elegir Modelo eje oblicuo.

Segundo paso: Ingresar los datos:

Ingrese la función superior : $f(x) = 4 + \frac{1}{4}x^2$

Ingrese el eje de rotación : $g(x) = 1 + \frac{x}{2}$

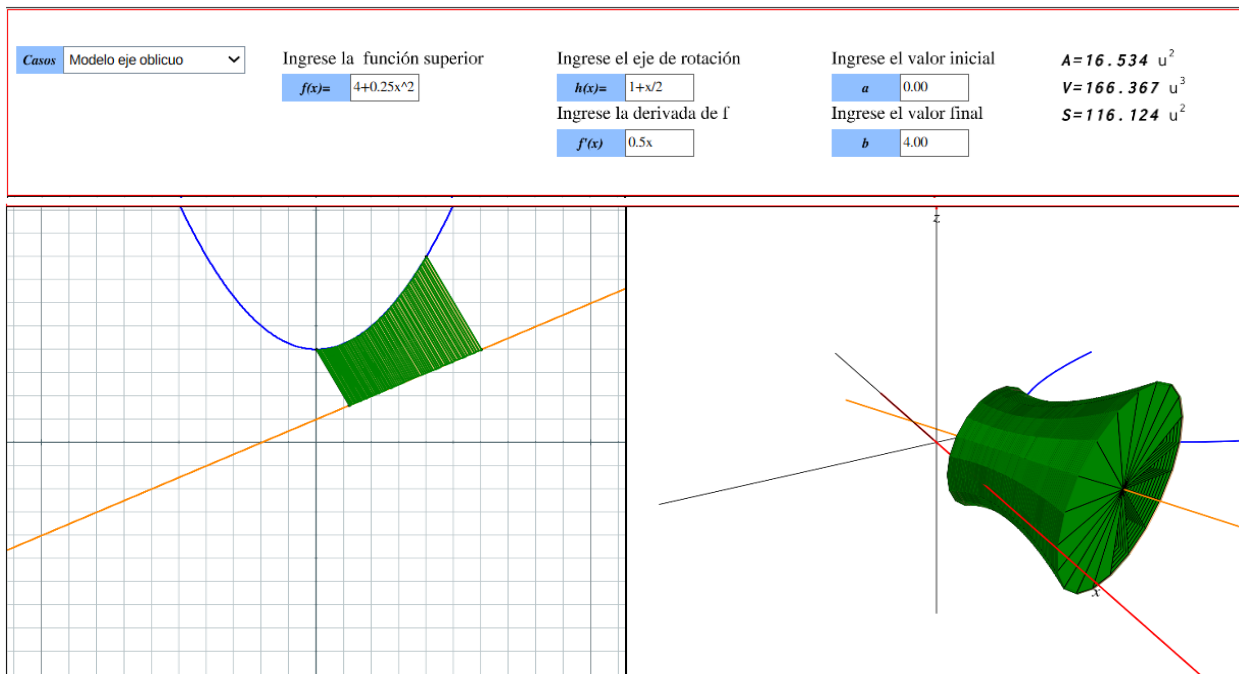
Ingrese la derivada de f : $f'(x) = \frac{x}{2}$

Ingrese el valor inicial : $a = 0.00$

Ingrese el valor final : $b = 4.00$

En la figura 44 se muestra la pantalla del aplicativo con gráficos y resultados.

Figura 44: Gráficos generados cuando el eje de rotación es oblicuo.



Nota. Autoría propia

Área de la región plana : $A = 16.534 \text{ u}^2$

Volumen del sólido de revolución : $V = 166.367 \text{ u}^3$

Área de superficie de revolución : $S = 116.124 \text{ u}^2$

Conclusiones

1. Se realizó una búsqueda exhaustiva en diferentes libros de cálculo y no se encontró material similar al expuesto en el capítulo 3 de este documento, por lo que puede considerarse este trabajo como un recurso bibliográfico importante para los cursos de cálculo integral.
2. Se construyeron modelos matemáticos para calcular el volumen de un sólido de revolución y el área de una superficie de revolución cuando se involucran ejes de rotación horizontales y oblicuos, cumpliéndose de esta forma con los dos primeros objetivos de este trabajo.
3. Se desarrolló el aplicativo Oblique-Axis con el apoyo de la herramienta DescartesJS, se probó su capacidad para dar resultados exactos y confiables, constituyéndose en una herramienta útil en la verificación de ejercicios. El aplicativo Oblique-Axis genera representaciones dinámicas interactivas que favorecen la percepción espacial y la intuición matemática de los estudiantes y profesores, permitiendo explorar de manera dinámica los efectos del cambio en la posición de los ejes de rotación.
4. La elaboración del aplicativo representa el cumplimiento de tercer objetivo de este trabajo y contribuye significativamente a ampliar la gama de aplicaciones del cálculo integral que normalmente se trabajan en la Universidad.
5. El desarrollo de este trabajo me permitió avanzar en la adquisición de habilidades para construir modelos matemáticos, además manejar una herramienta tan versátil, compleja y exigente como DescartesJS.
6. Un posible ejercicio para futuros trabajos es la construcción del modelo matemático para calcular el volumen del sólido de revolución que se genera al rotar alrededor de una recta oblicua una región plana limitada por varias curvas.

Referencias bibliográficas

Abreu, J. Galo, J. Oliveró, M. Escamilla, O. Espinosa., J. Madrigal, J. (2016). DescartesJS. Versión 0.22.003. Instituto de Matemáticas, UNAM.

Apostol, Tom M., Calculus: cálculo con funciones de una variable y varias variables, Segunda Edición. Editorial Reverté S.A. Barcelona, 1973.

Ayres, Frank. Sachems. McGraw Hill. Singapore, 2002.

Berman, G. N. Problemas de Análisis Matemático. Editorial Mir - Moscú.

Demidovich, B. P. Problemas de Análisis Matemático. Editorial Mir - Moscú.

Edwards y Penney. Cálculo, con geometría analítica. Cuarta edición. Prentice Hall, Pearson Educación. México, 2001.

Hughes, D y Gleason, A. Cálculo I. Compañía Editorial Continental S. A. México. 1997.

Kudriavsev, M. Problemas de cálculo diferencial e integral.

Leithold, Louis, Cálculo con geometría analítica. Séptima edición. Editorial Harla. México, 1998.

Larson, Roland E., Hostetler, Robert P., Cálculo con geometría analítica, 6ª Ed. Volumen 1, McGraw Hill, 1999.

Madrigal, J. (2006). Descartes: un proyecto para ver y hacer matemáticas. SCTM06 Sociedad, ciencia, tecnología y matemáticas. <https://proyectodescartes.org/>

Marón, I. Problemas de Cálculo diferencial e Integral. Editorial Mir - Moscú.

Piskunov, N. Cálculo diferencial e Integral. Editorial Mir - Moscú.

Proyectodescartes.org. (s.f.). Cálculo diferencial e integral II. Recuperado el 15 de junio de 2025 de https://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/Calculo_Diferencial_e_Integral_II/index.html

Proyectodescartes.org. (s.f.). DescartesJS-GeoGebra (2ª ed.). Recuperado el 15 de junio de 2025, de https://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/DescartesJS_GeoGebra_2ed/index.html?page=24

Purcell, Varberg y Rigdon. Cálculo. Octava edición. Prentice Hall, Pearson Educación. México, 2001.

Radillo Díaz, A., Abreu León, J. L., & Espinosa Longi, J. (2024). Documento de Descartes. Recuperado de <https://descartes.matem.unam.mx/doc/DescartesJS/DescartesJS.pdf>

Sadosky, N. Cálculo diferencial e Integral. Editorial Mir - Moscú.

Swokowsky. Cálculo con Geometría Analítica. Editorial Iberoamericana. México, 1985.

Simmons George F. Cálculo con geometría analítica. Editorial MacGraw Hill. Segunda edición. España, 2002.

Spivak, Michael. Cálculo infinitesimal. Editorial Reverté S.A. Barcelona, España. 1975.

Stewart, James. CÁLCULO, Conceptos y contextos. Thomson Editores. México, México. 1999.

Stewart, James. CÁLCULO, Trascendentes tempranas. Thomson Editores. Bogotá D.C., 2001.

Thomas, George; Finney, Ross L., Cálculo con geometría analítica, 9ª Ed. en 2 vols. Addison Wesley, 1999.

Zill, Dennis. Cálculo con Geometría Analítica. Editorial Mac Grw Hill. México, 2015.

Anexos

1. Código del aplicativo Oblique-Axis.

```
<html>
<head>
  <meta http-equiv="content-type" content="text/html; charset=UTF-8">
  <title>Oblique Axis</title>
  <script type="text/javascript" src="lib/descartes-min.js" charset="utf-8"></script>
  <style type="text/css">
<!--
.Estilo1 {
  font-size: large;
  font-weight: bold;
  font-family: Geneva, Arial, Helvetica, sans-serif;
}
.Estilo2 {
  font-family: Geneva, Arial, Helvetica, sans-serif;
  font-weight: bold;
  font-size: medium;
}
.Estilo3 {font-size: x-large}
-->
  </style>
</head>

<body style="padding:0; margin:0; background:#eff0f1;">

<table width="96%" border="2" align="center">
  <tr>
    <td bgcolor="#99CCCC"><div align="center" class="Estilo1 Estilo3"></div></td>
  </tr>
  <tr>
    <td align="center">

      <ajs name="Descartes" code="Descartes" width="1350" height="850">
        <param name="tamaño" value="1350x850">
        <param name="decimal_symbol" value=".">
        <param name="nombre" value="">
        <param name="Versión" value="5.5">
        <param name="editable" value="no">
        <param name="Idioma" value="español">
        <param name="Botones" value="créditos=no config=no inicio=sí limpiar=no filas_norte=0 filas_sur=0
ancho_este=150 ancho_oeste=150 alto=40 ">
        <param name="E_01" value="tipo='R2' id='Area' y='25%' ancho='50%' alto='75%' escala='30'
border_width='2' ">
```

```

<param name="E_02" value="tipo='R3' R3='sí' id='Espacio' x='50%' y='25%' ancho='50%' alto='75%'
escala='30' border_width='2' ">
<param name="E_03" value="tipo='R2' id='Texto' ancho='100%' alto='25%' red='no' red10='no'
ejes='no' border_width='1' border_color='ff0000' ">
<param name="C_01" value="id='f' tipo='numérico' interfaz='campo de texto' solo_texto='sí'
región='interior' espacio='Texto' nombre='f(x)' expresión='(300,70,150,30)' visible='sí' acción='calcular'
label_color='90bfff' font_family='Serif' negrita='sí' cursiva='sí' info='Funcion 1' ">
<param name="C_02" value="id='g' tipo='numérico' interfaz='campo de texto' solo_texto='sí'
región='interior' espacio='Texto' nombre='g(x)' expresión='(300,130,150,30)' visible='sí' acción='calcular'
dibujar-si='menu=1' label_color='90bfff' font_family='Serif' negrita='sí' cursiva='sí' info='Funcion 2' ">
<param name="C_03" value="id='h' tipo='numérico' interfaz='campo de texto' solo_texto='sí'
región='interior' espacio='Texto' nombre='h(x)' expresión='(600,70,150,30)' visible='sí' acción='calcular'
label_color='90bfff' font_family='Serif' negrita='sí' cursiva='sí' ">
<param name="C_04" value="id='a' tipo='numérico' interfaz='campo de texto' región='interior'
espacio='Texto' nombre='a' expresión='(900,70,150,30)' visible='sí' label_color='90bfff'
font_family='Serif' negrita='sí' cursiva='sí' ">
<param name="C_05" value="id='b' tipo='numérico' interfaz='campo de texto' región='interior'
espacio='Texto' nombre='b' expresión='(900,130,150,30)' min='a' visible='sí' label_color='90bfff'
font_family='Serif' negrita='sí' cursiva='sí' ">
<param name="C_06" value="id='df' tipo='numérico' interfaz='campo de texto' solo_texto='sí'
región='interior' espacio='Texto' nombre='f&quot;(x)' expresión='(600,130,150,30)' visible='sí'
acción='calcular' label_color='90bfff' font_family='Serif' negrita='sí' cursiva='sí' info='derivada f' ">
<param name="C_07" value="id='menu' tipo='numérico' interfaz='menú' región='interior'
espacio='Texto' nombre='Casos' expresión='(10,40,250,30)' visible='no' opciones='.....,Modelo eje
horizontal,Modelo eje oblicuo' label_color='90bfff' font_family='Serif' negrita='sí' cursiva='sí' ">
<param name="A_01" value="id='INICIO' algoritmo='sí' evaluar='una-sola-vez'
hacer='Espacio.rot.z=45;Espacio.rot.y=45' ">
<param name="A_02" value="id='CALCULOS' algoritmo='sí' evaluar='siempre'
hacer='N=75;;M=(h(b)-h(a))/(b-a);angrad=atan(M);ang=angrad*(180/pi);px=h(0);A1=(a-
M*px+M*f(a))/((M^2)+1);B1=(b-M*px+M*f(b))/((M^2)+1);Di=sqrt((B1-A1)^2+(g(B1)-g(A1))^2);P=-
px/M;l=P-A1;Ac=h(A1);SANG=sin(angrad);at=Ac/SANG;Du=(1+M*df(a))*(b-a)/N' ">
<param name="A_03" value="id='Area metodo de discos' algoritmo='sí' evaluar='siempre'
inicio='Sums=0;Sumi=0;i=a;R=0;ct3=0' hacer='ct3=ct3+1;dx=(b-a)/N;R=max(abs(Ah(i)),abs(Ah(i+(b-
a)/N)));Rm=min(abs(Ah(i)),abs(Ah(i+(b-
a)/N)));Sums=(ct3<=N)?Sums+R*dx:Sums;Sumi=(ct3<=N)?Sumi+Rm*dx:Sumi;i=i+(b-a)/N'
mientras='i<b' ">
<param name="A_04" value="id='Volumen metodo de discos' algoritmo='sí' evaluar='siempre'
inicio='svs=0;svi=0;j=a;D=0;ct3=0' hacer='ct3=ct3+1;D=max(abs(Vh(j)),abs(Vh(j+(b-
a)/N)));Dm=min(abs(Vh(j)),abs(Vh(j+(b-
a)/N)));svs=(ct3<=N)?svs+pi*D*dx:svs;svi=(ct3<=N)?svi+pi*Dm*dx:svi;j=j+(b-a)/N' mientras='j<b' ">
<param name="A_05" value="id='Superficie metodo de discos' algoritmo='sí' evaluar='siempre'
inicio='sups=0;supi=0;caps=0;capi=0;j=a;ct3=0' hacer='ct3=ct3+1;caps=max(abs(Sh(j)),abs(Sh(j+(b-
a)/N)));capi=min(abs(Sh(j)),abs(Sh(j+(b-a)/N)));dx=(b-
a)/N;sups=(ct3<=N)?sups+2*pi*caps*dx:sups;supi=(ct3<=N)?supi+2*pi*capi*dx:supi;j=j+(b-a)/N'
mientras='j<b' ">
<param name="A_06" value="id='Area Eje Oblicuo 1' algoritmo='sí' evaluar='siempre'
inicio='j=a;Rs=0;Ri=0;Recs=0;Reci=0;ct3=0' hacer='ct3=ct3+1;coa=1/(M^2+1);Rs=max(abs(Ao(j)),abs(Ao(j+(b-
a)/N)));Ri=min(abs(Ao(j)),abs(Ao(j+(b-a)/N)));dx=(b-
a)/N;Recs=(ct3<=N)?Recs+Rs*coa*dx:Recs;Reci=(ct3<=N)?Reci+Ri*coa*dx:Reci;j=j+(b-a)/N'
mientras='j<b' ">

```

```

<param name="A_07" value="id='Volumen Eje Oblicuo' algoritmo='sí' evaluar='siempre'
inicio='j=a;Ros=0;Roi=0;Dis=0;Disi=0;ct3=0'
hacer='ct3=ct3+1;key=pi/(M^2+1)^(3/2);Ros=max(abs(Vo(j)),abs(Vo(j+(b-
a)/N)));Roi=min(abs(Vo(j)),abs(Vo(j+(b-a)/N)));dx=(b-
a)/N;Dis=(ct3<=N)?Dis+key*Ros*dx:Dis;Disi=(ct3<=N)?Disi+key*Roi*dx:Disi;j=j+(b-a)/N'
mientras='j<b' ">
<param name="A_08" value="id='Superficie eje oblicuo' algoritmo='sí' evaluar='siempre'
inicio='j=a;sus=0;sui=0;cas=0;cai=0;ct3=0'
hacer='ct3=ct3+1;ped=2*pi/sqrt(M^2+1);sus=max(abs(So(j)),abs(So(j+(b-
a)/N)));sui=min(abs(So(j)),abs(So(j+(b-a)/N)));dx=(b-
a)/N;cas=(ct3<=N)?cas+ped*sus*dx:cas;cai=(ct3<=N)?cai+ped*sui*dx:cai;j=j+(b-a)/N;;' mientras='j<b'
">
<param name="A_09" value="id='Area Eje Oblicuo' algoritmo='sí' evaluar='siempre' ">
<param name="A_10" value="id='f(x)' algoritmo='no' expresión='_Eval_(f)' tipo='función' ">
<param name="A_11" value="id='g(x)' algoritmo='no' expresión='_Eval_(g)' tipo='función' ">
<param name="A_12" value="id='h(x)' algoritmo='no' expresión='_Eval_(h)' tipo='función' ">
<param name="A_13" value="id='df(x)' algoritmo='no' expresión='_Eval_(df)' tipo='función' ">
<param name="A_14" value="id='Ah(x)' algoritmo='no' expresión='f(x)-g(x)' tipo='función' ">
<param name="A_15" value="id='Sh(x)' algoritmo='no' expresión='(f(x)-h(x))*sqrt(1+(df(x))^2)'
tipo='función' ">
<param name="A_16" value="id='Vh(x)' algoritmo='no' expresión='(f(x)-h(x))^2-(g(x)-h(x))^2'
tipo='función' ">
<param name="A_17" value="id='Ao(x)' algoritmo='no' expresión='(f(x)-h(x))*(1+M*df(x))'
tipo='función' ">
<param name="A_18" value="id='So(x)' algoritmo='no' expresión='(f(x)-h(x))*sqrt(1+(df(x))^2)'
tipo='función' ">
<param name="A_19" value="id='Vo(x)' algoritmo='no' expresión='(f(x)-h(x))^2*(1+M*df(x))'
tipo='función' ">
<param name="G_01" value="espacio='Area' tipo='ecuación' color='0000ff' coord_abs='no'
expresión='y=f(x)' ancho='2' info='Funcion mayor' ">
<param name="G_02" value="espacio='Area' tipo='ecuación' color='ff0000' dibujar-si='menu=1'
coord_abs='no' expresión='y=g(x)' ancho='2' info='Funcion menor' ">
<param name="G_03" value="espacio='Area' tipo='ecuación' color='ff8800' coord_abs='no'
expresión='y=h(x)' ancho='2' info='Eje' ">
<param name="G_04" value="espacio='Area' tipo='polígono' color='008300' dibujar-si='menu=1'
coord_abs='no' expresión='(s,g(s))(s,f(s))(s+dx,f(s+dx))(s+dx,g(s+dx))(s,g(s))' familia='s'
s.intervalo='[a,b-(b-a)/N]' s.pasos='N-1' relleno='ffc889' ancho='1.5' info='Trapecios Mh' ">
<param name="G_05" value="espacio='Area' tipo='segmento' color='000000' dibujar-si='menu=1'
coord_abs='no' expresión='(a,g(a))(a,f(a))' tamaño='2' ancho='2' info='distancia a' ">
<param name="G_06" value="espacio='Area' tipo='segmento' color='000000' dibujar-si='menu=1'
coord_abs='no' expresión='(b,g(b))(b,f(b))' tamaño='2' ancho='2' info='distancia b' ">
<param name="G_07" value="espacio='Area' tipo='segmento' color='000000' dibujar-si='menu=2'
coord_abs='no' expresión='(A1,h(A1))(a,f(a))' tamaño='2' ancho='2' info='distancia a1' ">
<param name="G_08" value="espacio='Area' tipo='segmento' color='000000' dibujar-si='menu=2'
coord_abs='no' expresión='(B1,h(B1))(b,f(b))' tamaño='2' ancho='2' info='distancia b1' ">
<param name="G_09" value="espacio='Area' tipo='polígono' color='008300' dibujar-si='menu=2'
coord_abs='no' expresión='[(M*f(s)/(M^2+1))-
((px*M)/(M^2+1))+s/(M^2+1)),h((M*f(s)/(M^2+1))-
((px*M)/(M^2+1))+s/(M^2+1))][s,f(s)][s+(b-a)/N,sgn(f(s+(b-a)/N))*min(abs(f(s+(b-
a)/N)),abs(f(s+(b-a)/N))][[M*f(s+(b-a)/N)/(M^2+1)-((px*M)/(M^2+1))+((s+(b-
a)/N)/(M^2+1)),h((M*f(s+(b-a)/N)/(M^2+1))-((px*M)/(M^2+1))+((s+(b-

```

a)/N)/(M^(2)+1)))]((M*f(s)/(M^(2)+1))-((px*M)/(M^(2)+1))+s/(M^(2)+1)),h((M*f(s)/(M^(2)+1))-((px*M)/(M^(2)+1))+s/(M^(2)+1)))' familia='s' s.intervalo='[a,b-(b-a)/N]' s.pasos='N-1' relleno='ffc889' ancho='1.5' info='Trapezios Mo' ">

<param name="G_10" value="espacio='Texto' tipo='texto' color='20303a' coord_abs='sí' expresión='[300,40]' texto='{rtf1\uc0{\fonttbl\f0\fs40 Times New Roman;}{\colortbl\red0\green0\blue0;}\cf0\f0\fs40 Ingrese la función superior}' ancho='1' align='a_left' anchor='a_top_left' info='Texto Funcion 1' ">

<param name="G_11" value="espacio='Texto' tipo='texto' color='20303a' dibujar-si='menu=1' coord_abs='sí' expresión='[300,100]' texto='{rtf1\uc0{\fonttbl\f0\fs40 Times New Roman;}{\colortbl\red0\green0\blue0;}\cf0\f0\fs40 Ingrese la función inferior}' ancho='1' align='a_left' anchor='a_top_left' info='Texto Funcion 2' ">

<param name="G_12" value="espacio='Texto' tipo='texto' color='20303a' coord_abs='sí' expresión='[600,40]' texto='{rtf1\uc0{\fonttbl\f0\fs40 Times New Roman;}{\colortbl\red0\green0\blue0;}\cf0\f0\fs40 Ingrese el eje de rotación}' ancho='1' align='a_left' anchor='a_top_left' info='Texto Eje' ">

<param name="G_13" value="espacio='Texto' tipo='texto' color='20303a' coord_abs='sí' expresión='[600,100]' texto='{rtf1\uc0{\fonttbl\f0\fs40 Times New Roman;}{\colortbl\red0\green0\blue0;}\cf0\f0\fs40 Ingrese la derivada de f}' ancho='1' align='a_left' anchor='a_top_left' info='Texto derivada' ">

<param name="G_14" value="espacio='Texto' tipo='texto' color='20303a' coord_abs='sí' expresión='[900,40]' texto='{rtf1\uc0{\fonttbl\f0\fs40 Times New Roman;}{\colortbl\red0\green0\blue0;}\cf0\f0\fs40 Ingrese el valor inicial}' ancho='1' align='a_left' anchor='a_top_left' info='Texto extremo Inferior' ">

<param name="G_15" value="espacio='Texto' tipo='texto' color='000000' coord_abs='sí' expresión='[900,100]' texto='{rtf1\uc0{\fonttbl\f0\fs40 Times New Roman;}{\colortbl\red0\green0\blue0;}\cf0\f0\fs40 Ingrese el valor final}' ancho='1' align='a_left' anchor='a_top_left' border_size='20' info='Texto extremo Superior' ">

<param name="G_16" value="espacio='Texto' tipo='texto' color='20303a' dibujar-si='menu=1' coord_abs='sí' expresión='[1150,40]' texto='{rtf1\uc0{\fonttbl\f0\fs40 Courier New;}{\colortbl\red0\green0\blue0;}\cf0\f0\fs40\i\b A=\b0\i0{*mjaformula\i\b\expr (Sums+Sumi)/2\decimals 3\fixed0}\b0\i0 u{\supix 2}}\par\cf0\f0\fs40 }' ancho='1' align='a_left' anchor='a_top_left' info='Area Mh' ">

<param name="G_17" value="espacio='Texto' tipo='texto' color='20303a' dibujar-si='menu=1' coord_abs='sí' expresión='[1150,70]' texto='{rtf1\uc0{\fonttbl\f0\fs40 Courier New;}{\colortbl\red0\green0\blue0;}\cf0\f0\fs40\i\b V=\b0\i0{*mjaformula\i\b\expr (svs+svi)/2\decimals 3\fixed0}\b0\i0 u{\supix 3}}}' ancho='1' align='a_center' anchor='a_top_left' info='Volumen Mh' ">

<param name="G_18" value="espacio='Texto' tipo='texto' color='20303a' dibujar-si='menu=1' coord_abs='sí' expresión='[1150,100]' texto='{rtf1\uc0{\fonttbl\f0\fs40 Courier New;}{\colortbl\red0\green0\blue0;}\cf0\f0\fs40\i\b S=\b0\i0{*mjaformula\i\b\expr (sups+supi)/2\decimals 3\fixed0}\b0\i0 u{\supix 2}}}' ancho='1' align='a_center' anchor='a_top_left' info='Superficie Mh' ">

<param name="G_19" value="espacio='Texto' tipo='texto' color='20303a' dibujar-si='menu=2' coord_abs='sí' expresión='[1150,40]' texto='{rtf1\uc0{\fonttbl\f0\fs40 Courier New;}{\colortbl\red0\green0\blue0;}\cf0\f0\fs40\i\b A=\b0\i0{*mjaformula\i\b\expr (Recs+Reci)/2\decimals 3\fixed0}\b0\i0 u{\supix 2}}\par\cf0\f0\fs40 }' ancho='1' align='a_center' anchor='a_top_left' info='Area Mo' ">

<param name="G_20" value="espacio='Texto' tipo='texto' color='20303a' dibujar-si='menu=2' coord_abs='sí' expresión='[1150,70]' texto='{rtf1\uc0{\fonttbl\f0\fs40 Courier New;}{\colortbl\red0\green0\blue0;}\cf0\f0\fs40\i\b V=\b0\i0{*mjaformula\i\b\expr

(Dis+Disi)/2\decimals 3\fixed0}\b0\i0 u{\supix 3}}\par\cf0\fs40 }' ancho='1' align='a_center' anchor='a_top_left' info='Volumen Mo' ">

<param name="G_21" value="espacio='Texto' tipo='texto' color='20303a' dibujar-si='menu=2' coord_abs='si' expresión='[1150,100]' texto='{rtf1\uc0{\fonttbl\fs0\cf0\fs40\i\b New;}}{\colortbl\red0\green0\blue0;}\cf0\fs40\i\b S=\b0\i0{*mjaformula\i\b {\expr (cas+cai)/2\decimals 3\fixed0}\b0\i0 u{\supix 2}}}' ancho='1' align='a_center' anchor='a_top_left' info='Superficie Mo' ">

<param name="S_01" value="espacio='Espacio' tipo='punto' color='ff0000' color_reverso='ff0000' expresión='(0,0,0)' decimales='2' ancho='1' offset_dist='10' offset_angle='270' info='Centro' ">

<param name="S_02" value="espacio='Espacio' tipo='segmento' color='000000' expresión='(-10,0,0)(10,0,0)' ancho='1' Nu='7' info='X' ">

<param name="S_03" value="espacio='Espacio' tipo='segmento' color='000000' expresión='(0,-10,0)(0,10,0)' ancho='1' Nu='7' info='Y' ">

<param name="S_04" value="espacio='Espacio' tipo='segmento' color='000000' expresión='(0,0,-10)(0,0,10)' ancho='1' Nu='7' info='Z' ">

<param name="S_05" value="espacio='Espacio' tipo='punto' color='ff0000' color_reverso='ff0000' expresión='(10,0,0)' texto='{rtf1\uc0{\fonttbl\fs0\cf0\fs40\i\b Times New Roman;}}{\colortbl\red0\green0\blue0;}\cf0\fs40 \i{*mjaformula\i x\i0}\i0 }' font_family='Serif' decimales='2' ancho='1' offset_dist='10' offset_angle='270' info='x' ">

<param name="S_06" value="espacio='Espacio' tipo='punto' color='ff0000' color_reverso='ff0000' expresión='(0,10,0)' texto='{rtf1\uc0{\fonttbl\fs0\cf0\fs40\i\b Times New Roman;}}{\colortbl\red0\green0\blue0;}\cf0\fs40 \i{*mjaformula\i y\i0}\i0 }' font_family='Serif' decimales='2' ancho='1' offset_dist='10' offset_angle='270' info='y' ">

<param name="S_07" value="espacio='Espacio' tipo='punto' color='ff0000' color_reverso='ff0000' expresión='(0,0,10)' texto='{rtf1\uc0{\fonttbl\fs0\cf0\fs40\i\b Times New Roman;}}{\colortbl\red0\green0\blue0;}\cf0\fs40 \i{*mjaformula\i z\i0}\i0 }' decimales='2' ancho='1' offset_dist='10' offset_angle='270' info='z' ">

<param name="S_08" value="espacio='Espacio' tipo='curva' color='0000ff' expresión='U=-5+20*u\ny=f(U)\nx=U\nz=0' ancho='2' Nu='50' info='f(x)' ">

<param name="S_09" value="espacio='Espacio' tipo='curva' color='ff0000' expresión='U=-5+20*u\ny=g(U)\nx=U\nz=0' ancho='2' Nu='50' info='g(x)' ">

<param name="S_10" value="espacio='Espacio' tipo='curva' color='ff8800' expresión='U=-5+20*u\ny=h(U)\nx=U\nz=0' ancho='2' Nu='50' info='h(x)' ">

<param name="S_11" value="espacio='Espacio' tipo='segmento' color='000000' dibujar-si='menu=1' expresión='(a,g(a),0)(a,f(a),0)' ancho='2' Nu='7' info='Distancia a' ">

<param name="S_12" value="espacio='Espacio' tipo='segmento' color='000000' dibujar-si='menu=1' expresión='(b,g(b),0)(b,f(b),0)' ancho='2' Nu='7' info='Distancia b' ">

<param name="S_13" value="espacio='Espacio' tipo='cilindro' color='008300' color_reverso='ffc889' dibujar-si='menu=1' expresión='Cilindro' familia='s' s.intervalo='[a,b-(b-a)/N]' s.pasos='N-1' rotini='(0,90,0)' posini='(s+(b-a)/(2*N),h(s+(b-a)/(2*N)),0)' aristas='000000' modelo='color' ancho='2*(f(s)-h(s))' largo='2*(f(s)-h(s))' alto='(b-a)/N' Nu='20' Nv='1' info='Cilindro Mh1' ">

<param name="S_14" value="espacio='Espacio' tipo='polireg' color='a6008300' color_reverso='99ffc889' dibujar-si='menu=1' expresión='Polireg' familia='s' s.intervalo='[a,b-(b-a)/N]' s.pasos='N-1' rotini='(0,90,0)' posini='(s,h(s),0)' aristas='000000' modelo='color' ancho='2*(f(s)-h(s))' largo='2*(f(s)-h(s))' Nu='20' info='Cara 1' ">

<param name="S_15" value="espacio='Espacio' tipo='cilindro' color='90ffffff' color_reverso='91ffffff' dibujar-si='menu=1' expresión='Cilindro' familia='s' s.intervalo='[a,b-(b-a)/N]' s.pasos='N-1' rotini='(0,90,0)' posini='(s+(b-a)/(2*N),h(s+(b-a)/(2*N)),0)' aristas='000000' modelo='color' ancho='2*(g(s)-h(s))' largo='2*(g(s)-h(s))' alto='(b-a)/N' Nu='20' Nv='1' info='Cilindro Mh2' ">

<param name="S_16" value="espacio='Espacio' tipo='polireg' color='a4ffffff' color_reverso='98ffffff' dibujar-si='menu=1' expresión='Polireg' familia='s' s.intervalo='[a,b-(b-a)/N]' s.pasos='N-1'

```

rotini=(0,90,0)' posini=(s,h(s),0)' aristas='000000' modelo='color' ancho='2*(g(s)-h(s))' largo='2*(g(s)-h(s))' Nu='20' info='Cara 2' ">
  <param name="S_17" value="espacio='Espacio' tipo='cilindro' color='008300' color_reverso='ffc889'
dibujar-si='menu=2' expresión='Cilindro' familia='s' s.intervalo='[a,b-(b-a)/N]' s.pasos='N-1' rotini=(-
ang,90,0)'
      posini='(((s-M*px+M*f(s))/((M^2)+1)+(abs((Di*1)/(2*(Ac/SANG)))))/N),(h((s-
M*px+M*f(s))/((M^2)+1)+(abs((Di*1)/(2*(Ac/SANG)))))/N),0)' modelo='metal' ancho='2*(f(s)-M*s-
px)/sqrt(M^2+1)' largo='2*(f(s)-M*s-px)/sqrt(M^2+1)' alto=(b-a)/N' Nu='20' Nv='1' info='Cilindro Mo1'
">
  <param name="S_18" value="espacio='Espacio' tipo='polireg' color='008300' color_reverso='ffc889'
dibujar-si='menu=2' expresión='Polireg' familia='s' s.intervalo='[a,b-(b-a)/N]' s.pasos='N-1' rotini=(-
ang,90,0)' posini='((s-M*px+M*f(s))/((M^2)+1),h((s-M*px+M*f(s))/((M^2)+1)),0)' aristas='000000'
modelo='color' ancho='2*(f(s)-M*s-px)/sqrt(M^2+1)' largo='2*(f(s)-M*s-px)/sqrt(M^2+1)' Nu='20'
info='Cara 1o' ">
  </ajs>
  </td>
</tr>
<tr>
  <td bgcolor="#99CCCC"><div align="center" class="Estilo2"></div></td>
</tr>
</table>

</body>
</html>

```

2. Enlace para acceder al aplicativo Oblique-Axis.

<https://www.srvigas.com/Ramirez/OblicueAxis.html>