UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
Facultad de Ciencia y Tecnología
Licenciatura en Matemáticas

TAREAS CON SENTIDO PROFESIONAL EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS: VALIDACIÓN A PARTIR DEL CAMBIO CONCEPTUAL

Tesis de Pregrado de

Alejandra Tirado Maldonado

Natalia Morales Rozo
Asesora

Bogotá D. C.,

2024

A mamá por las madrugadas en las que su amor incansable fue mi mayor motor.

A papá por su amor incondicional y sus abrazos que son mi gran refugio.

A Sofi, mi mejor amiga, gracias por ser mi hermana.

A él, que escuchó mis quebrantos y me acompañó en este gran recorrido.

Aún con todas sus farsas, penalidades y sueños fallidos, el mundo es todavía hermoso. Sé alegre. Esfuérzate por ser feliz.

Desiderata.

AGRADECIMIENTO

Deseo agradecer principalmente a Dios, por permitirme culminar mi carrera, por brindarme salud y por darme la oportunidad de compartir con mi familia y mis amigos.

A Elizabeth Maldonado, maestra de la vida, gran compañera y cómplice en este trabajo. Igualmente, a Quimedez Tirado, que me enseñó a trabajar, a construir una familia y que las tardes son mejores con las personas que amas.

A Sofía Tirado, profesora del Idioma del amor, de cosquillas y de noches silenciosas llenas de comprensión. Deseo que tu corazón este siempre lleno de alegría y disfrutes de tu carrera.

A Miguel Herrera, capitán y profesor lleno de historias. Espero tu vida esté llena de éxitos y cumplas cada meta que te propongas.

A mi profesora Natalia Morales, por ser un ejemplo como educadora, por su dedicación, por su paciencia y por todos los consejos brindados. Gracias, por escucharme y por cada tarde llena de risas.

Al grupo de investigación RE-MATE, quienes me han acompañado en este gran recorrido, por cada consejo y por permitirme pertenecer a un espacio de colegas.

A mis amigos, a mis cómplices y todos los que me permitieron aprender de sus experiencias, gracias.

A Lala, por su paciencia y su fortaleza ante cada batalla. Te deseo lo mejor del mundo.

CONTENIDO

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

El programa de Licenciatura en Matemáticas (LM) de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN) considera el conocimiento didáctico-matemático como un elemento fundamental en la preparación de los futuros profesores de matemáticas (FPM). No obstante, los investigadores y formadores (IF) del grupo *Research on Mathematics Teacher Education* de la UPN han notado que esta formación no está generando el efecto esperado en los FPM. A pesar de abordar temas relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, las prácticas educativas de los FPM siguen dominadas por métodos tradicionales de enseñanza y el rol del profesor como mero transmisor de conocimiento. Se atribuye esta falta de impacto, en parte, a que la formación de los FPM ha estado enfocada en aspectos teóricos, sin suficiente referencia a la práctica docente ni a los últimos resultados de investigaciones en el campo de la formación de profesores.

A partir de estas reflexiones, los investigadores-formadores están reorientando sus acciones formativas para mejorar los procesos de enseñanza de las matemáticas en las escuelas. Se centran en las tareas que proponen a los futuros profesores de matemáticas, lo que ha generado discusiones sobre el significado y la importancia de estas tareas en la formación docente. De igual forma, este enfoque profesional, que se refiere a la preparación y formación especializada de los educadores en el ámbito de la enseñanza de las matemáticas, incluye situaciones prácticas basadas en la teoría de la Educación Matemática, con el objetivo principal de fomentar el desarrollo de los conocimientos, competencias y habilidades necesarias para enseñar matemáticas de manera efectiva. Esto implica integrar estrategias pedagógicas avanzadas, el uso de recursos tecnológicos, y la adaptación a diferentes estilos de aprendizaje, preparando a los educadores para enfrentar los desafíos del aula contemporánea y mejorar la comprensión matemática de sus estudiantes.

Por esta razón, algunos profesores del grupo de investigación anteriormente nombrado, durante el proyecto de investigación *Tareas con sentido para profesores que enseñarán matemáticas, un ejemplo desde la Didáctica de la Aritmética y el Álgebra* (DMA-629-23), han caracterizado las Tareas con sentido profesional para los futuros profesores de matemáticas; con las cuales se busca brindar oportunidades de aprendizaje estructuradas y contextualizadas que preparen a los FPM para los desafíos y problemas reales que encontrarán en su labor docente.

Asimismo, el grupo de investigación durante esta caracterización ha establecido quince características que aluden a una *Tareas con sentido profesional para los futuros profesores de matemáticas*, entre ellas se pueden destacar algunas (Rendón et al., 2023), tales como:

a. Vincular la práctica del profesor de matemáticas con desarrollos teórico-investigativos de la Didáctica de las Matemáticas.
b. Abordar -posibles- prácticas o problemas profesionales del profesor de matemáticas.
c. Poner en juego las creencias, concepciones (*v.g.* en relación con lo que significa enseñar o aprender matemáticas) y conocimientos (*v.g.* matemático, didáctico, curricular, pedagógico) de los futuros profesores de matemáticas.
d. Permitir exhibir el conocimiento (*v.g.* matemático, didáctico, curricular, pedagógico) de los futuros profesores de matemáticas, en torno a los asuntos (*v.g.* objetos, procesos, procedimientos) matemáticos escolares inmersos y sus conexiones e importancia.

Adicionalmente, en algunas sesiones de reunión del equipo de investigación, en torno a las posibles estrategias metodológicas para llevar a cabo la validación de las tareas, se situó la estrategia *cambio conceptual*, entendida esta a partir de los siguientes referentes:

- Vosniadou y Verschaffel (2004) utilizan la estrategia *cambio conceptual* para caracterizar el tipo de aprendizaje requerido cuando la nueva información que se va a aprender entra en conflicto con el conocimiento previo de los estudiantes, generalmente adquirido sobre la base de las experiencias cotidianas. A su vez, Vosniadou (2001) expone que los profesores deben construir sobre las ideas preexistentes y poco a poco guiar a los estudiantes hacia conocimientos más maduros, pues los conceptos erróneos pueden formarse al ignorar las creencias previas, por ello, proporcionar a los estudiantes observaciones y experimentos que comprueben que algunas de sus creencias son equivocadas, permiten reestructurar ideas previas.

- Appleton (1997) establece que durante el *cambio conceptual* se contrastan las concepciones que posee un estudiante y la concepción que resulta luego de controvertir nueva información. Tal contraste puede identificarse en el ajuste idéntico, cuando la concepción del sujeto se mantiene incluso en disposición de la nueva información, pues esta refuerza tales concepciones; el ajuste aproximado, cuando el estudiante asimila la nueva información, pero a su vez, persiste en sus nuevas concepciones, incluso sin evidenciar la incompatibilidad entre estas; y el ajuste incompleto, cuando se evidencia un cambio en la concepción inicial, al hallar evidencias de un conflicto cognitivo entre esta y la nueva evidencia.

De esta forma, se pretende contribuir al proceso de validación de la tarea propuesta "*Enseñanza de los números reales en libros de texto y su aprendizaje*" como una *Tarea con sentido profesional para los futuros profesores de matemáticas* por medio de la estrategia *cambio conceptual*.

Por todo lo anterior, en el contenido, se encuentran cuatro capítulos, los cuales se especifican en el orden en que se desarrolla el documento, así:

Durante el primer capítulo, se presentan la introducción y la justificación del documento, las cuales están basadas en las reflexiones y acciones formativas que buscan mejorar los procesos de enseñanza de las matemáticas, con el programa denominado *tarea con sentido profesional en la formación de profesores de matemáticas*.

El segundo capítulo constituye un componente fundamental en la investigación, ya que proporciona el sustento conceptual y la base teórica necesaria para abordar el tema de estudio. Se explorarán las principales teorías y enfoques sobre el cambio conceptual, así como la conceptualización de una *tarea con sentido profesional en la formación de profesores de matemáticas*.

En el desarrollo del tercer capítulo, se encuentra una descripción detallada de los aspectos metodológicos para tener en cuenta en la investigación y así validar si la tarea "Enseñanza de los números reales en libros de texto y su aprendizaje" es una *tarea con sentido profesional en la formación de profesores de matemáticas.* En esta misma, se desarrolla la herramienta analítica propuesta, para comprender la estructura y su relación con el objetivo del trabajo de investigación.

Para el capítulo cuarto, se presenta un análisis de estudiantes en el proceso de aprendizaje sobre los números reales y sus propiedades, buscando identificar y comprender cómo progresan en su comprensión de los conceptos matemáticos fundamentales.

Así pues, esta investigación busca contribuir a la comprensión del cambio conceptual en la formación de futuros profesores de matemáticas y a la mejora de sus prácticas de enseñanza, proporcionando algunas reflexiones para el diseño y la implementación de *Tareas con sentido profesional en la formación de profesores de matemáticas.*

JUSTIFICACIÓN

En Colombia, diversas instituciones de educación superior han asumido este reto y están ofreciendo programas de formación de profesores que integran estos enfoques innovadores. Entre ellas, destacan la Universidad Nacional de Colombia, la Universidad Pedagógica Nacional, la Universidad de Antioquia, la Universidad del Valle, la Universidad del Atlántico, la Universidad de los Andes, la Pontificia Universidad Javeriana y la Universidad de La Sabana. Estas universidades están impulsando programas que combinan la teoría pedagógica con prácticas docentes en entornos reales, preparando a los futuros docentes para enfrentar los desafíos del siglo XXI con un enfoque que prioriza la reflexión crítica, la adaptabilidad y el compromiso con la educación de calidad.

En el contexto del nuevo milenio, se reconoce la urgencia de reformar la educación y transformar la formación de los futuros profesores, buscando una integración más estrecha entre la teoría y la práctica. Esto implica un cambio significativo en las instituciones educativas, que tradicionalmente se han centrado en la teoría y la abstracción. Ahora se enfrentan al desafío de formar profesionales que sean tanto prácticos como teóricos, lo que implica una nueva forma de relacionarse con el conocimiento, fomentando una colaboración continua y contextualizada.

Diseñar tareas con sentido profesional que realmente impacten el proceso de enseñanza-aprendizaje no está exento de dificultades. La principal de ellas radica en equilibrar la profundidad conceptual y el enfoque práctico, de modo que estas tareas no solo sean académicamente rigurosas, sino también accesibles y relevantes para los estudiantes. Además, a menudo se presenta la dificultad de prever las diversas interpretaciones y enfoques que los estudiantes pueden adoptar al resolver dichas tareas, lo que puede generar una distancia entre los objetivos previstos por el profesor y las realidades que enfrentan los estudiantes durante su aplicación.

Otro desafío importante es que, en muchos casos, el profesor formador termina gestionando tareas tradicionales. Esto se debe a varios factores, como la presión del currículo oficial, la falta de tiempo para desarrollar e implementar propuestas innovadoras, y la necesidad de cumplir con expectativas institucionales que a menudo privilegian el seguimiento de métodos más convencionales. Además, el profesor formador puede verse limitado por su propia concepción de lo que constituye una tarea adecuada, que puede estar influenciada por su formación previa y por un sistema educativo que históricamente ha promovido enfoques tradicionales.

En este contexto, la concepción de tarea para el profesor formador y los FPM adquiere un significado crucial. Para el profesor formador, una tarea no es simplemente un conjunto de ejercicios, sino una oportunidad para promover el desarrollo de competencias pedagógicas y matemáticas en sus estudiantes. Sin embargo, los FPM pueden tener una visión más limitada, percibiendo las tareas como simples herramientas para evaluar el conocimiento adquirido, sin necesariamente considerar su potencial formativo y reflexivo. Esta discrepancia en la concepción de la tarea subraya la importancia de diseñar actividades que no solo evalúen conocimientos, sino que también fomenten la reflexión crítica y la aplicación práctica de conceptos en contextos reales de enseñanza.

Así, el presente trabajo busca validar la tarea "*Enseñanza de los números reales en libros de texto y su aprendizaje"* propuesta como Tarea con sentido profesional en la formación de profesores de matemáticas, por el grupo de investigación RE-MATE de la UPN y diseñada por la profesora Lyda Mora Mendieta. Esta tarea fue elegida precisamente por haber sido construida desde una rigurosa caracterización de las necesidades y desafíos que enfrentan los futuros docentes en su proceso de formación. Se consideró que dicha tarea refleja de manera integral los aspectos teóricos y prácticos esenciales para la enseñanza de los números reales, y se adapta a las realidades pedagógicas que estos profesores encontrarán en su ejercicio profesional. Además, la tarea permite un análisis profundo de su impacto en el proceso de aprendizaje de los estudiantes del curso Enseñanza y Aprendizaje de la

Aritmética y el Álgebra, durante su aplicación en el semestre 2023-II, bajo la dirección de la profesora Natalia Morales Rozo. De este modo, la elección de la tarea no solo responde a su pertinencia teórica, sino también a su potencial para generar reflexiones críticas y constructivas en torno a las prácticas pedagógicas actuales en la formación de docentes.

En la primera fase del proyecto, el equipo de investigación constituyó, a partir de la revisión de literatura especializada en Didáctica de las Matemáticas y en Formación de profesores de matemáticas, el constructo *Tarea con sentido en/para la formación profesional inicial del profesor de matemáticas*, así:

> Una tarea en/para la formación profesional inicial del profesor de matemáticas es una demanda estructurada, mediante la cual el formador brinda oportunidades de aprendizaje a los futuros profesores de matemáticas, con un contenido (conocimiento) y propósito de aprendizaje. Asimismo, estas tareas deben incluir elementos como: formulación, materiales y recursos, formas de agrupar a los estudiantes, estrategias de interacción entre los estudiantes y con el profesor, y su temporalidad (Gómez, Mora y Velasco, 2018; da Ponte, 2004).
>
> En cuanto al sentido en/para la formación profesional inicial del profesor de matemáticas, este precisa involucrar situaciones vinculadas a la práctica o futura práctica profesional (García, 2005; Monereo, 2013) y estar guiado teóricamente por los resultados de las investigaciones, para promover el desarrollo de sus conocimientos, competencias y destrezas necesarias para educar en matemáticas (Aké y López-Mojica, 2020).

Ahora, atendiendo al objetivo general del proyecto de investigación que es:

> Proveer tareas para la formación inicial de profesores de matemáticas que den sentido a su formación profesional, alrededor de la enseñanza y el aprendizaje de la Aritmética y el Álgebra; a través de la consolidación de material prediseñado por formadores de profesores de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional y con el fin de poner en evidencia tipos de tareas que promuevan las competencias profesionales necesarias en los futuros profesores de matemáticas (Mora, Morales y Rendón, 2023, p.8).

Se plantearon algunos objetivos específicos, uno de ellos centra su interés en "validar las tareas con sentido seleccionadas (…) a través de fuentes de opinión" (Mora et al., 2023, p.9). En relación con dichas fuentes, una, refiere a los estudiantes del espacio académico Enseñanza y Aprendizaje de la Aritmética y el Álgebra o quienes lo han cursado; y otra, a algunos expertos de los campos de la Didáctica de las Matemáticas o de la Formación de profesores de matemáticas.

En esta línea, debido a que la decisión reciente del grupo de investigación fue atender solo a la segunda fuente de opinión como mecanismo de validación, esta propuesta se enfocará en contribuir a la validación de una de las tareas con sentido que previamente ha sido implementada, en relación con la primera fuente considerada, la de los estudiantes del curso. Para ello, se analizarán las producciones escritas y verbales recopiladas en el momento en que resolvieron la tarea con sentido; es importante señalar que estas producciones se recolectaron en el transcurso del semestre 2023-2, en el marco del proyecto de investigación.

Este estudio, al enfocarse en explorar el cambio conceptual en los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional a quienes se les aplicó dicha tarea, busca comprender las experiencias, percepciones y significados construidos por tales participantes durante el desarrollo de la Tarea con sentido profesional en la formación de profesores de matemáticas. De esta manera, se espera no solo contribuir a la validación de la tarea, sino también a la reflexión sobre cómo las concepciones y prácticas de los profesores formadores y FPM pueden evolucionar hacia enfoques más innovadores y efectivos en la enseñanza de las matemáticas.

OBJETIVOS

General

Validar la tarea "Enseñanza de los números reales en libros de texto y su aprendizaje" en el marco del proyecto de investigación "Tareas con sentido para profesores que enseñarán matemáticas, un ejemplo desde la Didáctica de la Aritmética y el Álgebra", para determinar si es una *tarea con sentido profesional en la formación de profesores de matemáticas*, utilizando la estrategia de cambio conceptual.

Específicos

1. Establecer la conceptualización a usar sobre la estrategia metodológica de cambio conceptual en el contexto de la formación de profesores de matemáticas, a partir del estudio de referentes teóricos de la literatura especializada.

2. Diseñar la herramienta metodológica de validación a usar, que integre los principios de una *tarea con sentido profesional en la formación de profesores de matemáticas* y del cambio conceptual.

3. Aplicar la herramienta de validación diseñada a las evidencias verbales y escritas generadas por los estudiantes durante la aplicación de la tarea "Enseñanza de los números reales en libros de texto y su aprendizaje".

4. Identificar los modelos mentales y los patrones de cambio conceptual en cada uno de los estudiantes que realizaron la tarea "Enseñanza de los números reales en libros de texto y su aprendizaje", tras la aplicación de la herramienta de validación.

5. Analizar los patrones de cambio conceptual y los modelos mentales identificados para la validación de la tarea "Enseñanza de los números reales en libros de texto y su aprendizaje" como una *tarea con sentido profesional en la formación de profesores de matemáticas*.

CAPÍTULO 2. MARCO DE REFERENCIA

El presente capítulo constituye un componente fundamental en la investigación, ya que proporciona el sustento conceptual y la base teórica necesaria para abordar el tema de estudio. Se explorarán las principales teorías y enfoques sobre el cambio conceptual, así como la conceptualización de una *tarea con sentido profesional en la formación de profesores de matemáticas*.

CAMBIO CONCEPTUAL

El cambio conceptual en la enseñanza y aprendizaje de las ciencias es un proceso complejo que involucra la interacción de diversas teorías y modelos educativos. En esta sección, se explorará cómo la estructura teórica nativa de los estudiantes y el conflicto conceptual contribuyen a la reestructuración de los conocimientos previos hacia una comprensión más científica.

Estructura teórica nativa

Uno de los principales desafíos en la enseñanza de las ciencias es la presencia de concepciones alternativas firmemente arraigadas en los estudiantes, las cuales tienden a ser difíciles de modificar y, en algunos casos, persisten incluso después de muchos años de instrucción científica.

Por ello, las investigaciones relacionadas con las *ideas previas*, también conocidas como *concepciones alternativas*, (Flores et al., 2002, citado por Bello, 2004), *preconceptos* o *conocimientos previos* (Viennot, 1976; Novak, 1979; Driver et al., 1978; citados por del Puerto, 2010) datan de los años setenta y han puesto un relieve ampliamente importante en la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias, ya que al considerarlas como un mecanismo de adaptación al medio (Bello y Valdez, 2002) estas deben reconocerse en cualquier ámbito del conocimiento pues son construcciones que dan respuesta a la necesidad de interpretar fenómenos naturales o conceptos científicos, brindando explicaciones, descripciones o predicciones. Por lo que estas ideas son construcciones personales, muy resistentes al cambio, pues muchas veces se mantienen al pasar los años de instrucción escolarizada (Bello, 2004).

Ante ello, algunos autores consideran que pueden existir *ideas previas* relativamente aisladas, Mortimer (1995, citado por Bello, 2004) piensa que no son aisladas, sino que implican la formación de una red conceptual, red semántica o esquema de pensamiento, conocido entre los investigadores como *esquema representacional*. Si bien, los estudiantes encuentran información que contradice sus esquemas representacionales y les obliga a revisarlos, es difícil para ellos aceptarla, porque les parece errónea (Mulford y Robinson, 2002, citados por Bello 2004). En estas condiciones actúan de diversas maneras, desde ignorarla hasta rechazarla, incluso llegan a aceptarla haciendo sólo pequeños cambios en sus *concepciones* o *ideas previas*.

Bajo esta perspectiva, un conjunto de conocimientos en las que *"las cosas son como parecen ser"*, es decir, lo que se ve es y por ende es lo que se debe entender, está ligado a un referente ontológico de materialidad, en donde el mundo físico se constituye por cosas consistentes, estables y organizadas en un microcosmos (Lombana, 1998).

Basado en lo anterior, la conformación de una *estructura teórica nativa* sobre el mundo físico sería el primer paso que el individuo da culturalmente y que define su manera de actuar y pensar. Es decir que la *estructura teórica nativa*, actúa como referente en la manera como los individuos interpretan la información proveniente de la cultura y el mundo físico. (Lombana, 1998)

Para Vosniadou (citada por Lombana, 1998) una *estructura teórica nativa* posee una lógica, unas reglas de producción, unos compromisos epistemológicos y ontológicos y, por ende, se trata de un pensamiento independiente y autónomo con respecto a cualquier otro, de ahí que esta estructura no se asimila con lo referido previamente en la literatura como *errores conceptuales* (*misconceptions)*.

Según lo citado, Lombana (1998) menciona que:

> "dependiendo del nivel de la revisión, en la "estructura teórica nativa", se constituyen diferentes tipos de cambio conceptual. Por lo general, una revisión a nivel de la "estructura teórica nativa", se considera como el tipo de cambio más radical y difícil y es aquí donde con mayor fuerza emergen la "misconceptions". En esta perspectiva las "misconceptions" son vistas como explicaciones alternativas que elaboran los estudiantes para explicar o interpretar la información científica dentro de su "estructura teórica nativa ". (p.57)

Conflicto conceptual y Conflicto cognitivo

El conflicto conceptual es un aspecto crucial en la enseñanza y aprendizaje de las ciencias que surge cuando los estudiantes se encuentran con información nueva que desafía sus *ideas previas*. Este fenómeno, junto con el conflicto cognitivo, puede ser utilizado estratégicamente en el aula para fomentar el aprendizaje y la comprensión profunda de los conceptos científicos. Con respecto al conflicto cognitivo, este se refiere a la disonancia que los estudiantes experimentan cuando sus creencias y conocimientos previos son cuestionados por nuevas evidencias o explicaciones.

Para Nussbaum (1989, citado por Moreira, 2003) la estrategia de *conflicto cognitivo* recuerda la visión de Popper (1987) que mantiene que las teorías son falseadas y entonces rechazadas en base a un experimento crucial. Sin embargo, otros filósofos de la ciencia argumentan que hay otros mecanismos para rechazar teorías, pues el conflicto entre la teoría vigente y la contra-evidencia generada por el experimento crucial, no es suficiente para rechazar la teoría (Moreira, 2003).

De igual manera, el *conflicto cognitivo*, por más crucial que sea, no parece ser suficiente para rechazar definitivamente una concepción alternativa, pues los estudiantes pueden siempre proponer hipótesis auxiliares (consideradas *"misconceptions")* para salvar sus teorías implícitas (Pozo, 1992, citado por Moreira, 2003).

Por otra parte, el *conflicto conceptual* está ligado a las disciplinas científicas y a la racionalidad implicada en el aprendizaje de estas, las cuales están contenidas en los contextos definidos por la naturaleza de los objetos de estudio (Lombana, 1998). Al hablar desde este contexto, resulta más conveniente hablar de conflicto conceptual en lugar de conflicto cognitivo.

Uno de los modelos -o enfoque teórico- que permite realizar una analogía respecto a lo que es el *conflicto conceptual*, es el de Kuhn (citado por del Puerto, 2010). En este se explica el mecanismo de la evolución de la ciencia, describiendo cómo el estado de crisis en determinado momento permite construir nuevas concepciones, cuando lo existente es incapaz de explicar un problema particular identificado por la comunidad.

Silvia del Puerto (2010) explica que, en ese momento, puede surgir una *revolución* cuando el paradigma es sustituido por un modelo alternativo que promete ofrecer la explicación o la solución deseada. Allí se adopta un nuevo marco de pensamiento que permanecerá válido hasta que ocurra otra *revolución*.

De otro modo, durante el proceso de adquisición de conocimientos, el estudiante posee un conjunto de *ideas previas* de diversas fuentes: conocimientos intuitivos derivados de la experiencia cotidiana, que constituyen una teoría ingenua de la realidad; y conocimientos académicos previos. Si estos conocimientos son coherentes con los nuevos adquiridos de su experiencia educativa, no hay conflicto y la nueva información se añade simplemente a la anterior.

El estudiante conserva su *estructura teórica nativa* y la aplica sin modificaciones a la nueva situación. Sin embargo, en varias ocasiones, la nueva información es de alguna manera incompatible con la preexistente, generando un conflicto conceptual. Si este conflicto se resuelve de manera adecuada, se produce una reorganización de los conocimientos en la mente del estudiante, dando lugar a un *cambio conceptual* (Vosniadou y Vamvakoussi, 2006, citados por del Puerto, 2010).

No obstante, a veces, a pesar de plantearse el *conflicto conceptual*, no se produce un *cambio conceptual* o este ocurre de manera parcial. En estos casos, surgen *modelos sintéticos intermedios*, ya que los estudiantes intentan adaptar la nueva información a su marco preexistente, a pesar de las incompatibilidades o incoherencias presentes (Biza, Souyoul y Zachariades, 2005, citados por del Puerto, 2010); estos *modelos sintéticos intermedios* son evidentes cuando los estudiantes cometen errores (Vosniadou y Verschaffel, 2004).

Ahora bien, respecto a los términos *conflicto cognitivo* y *conflicto conceptual*, existe una diferencia importante sobre su uso dependiendo del contexto en el cual se esté.

Para el caso del término *conflicto cognitivo* conviene usarlo en la medida en que se esté abordando el problema de la estructuración cognitiva ligada a los procesos de madurez intelectual de los sujetos, independientemente de los contenidos que se manejen (Lombana, 1998). Luego, en una situación de enseñanza, la estrategia para que el profesor genere un *conflicto conceptual* implicaría que establezca una *disonancia cognitiva*[1] en el estudiante lo suficientemente grande para llevar a una *acomodación*[2], pero no tan grande que no le permita continuar con la tarea propuesta. El resultado de esa *acomodación* sería un *cambio conceptual.*

Silveira (1991, citado por Moreira, 2003), por ejemplo, ha propuesto una estrategia en la cual el profesor empezaría la clase como si las *ideas previas* de los estudiantes, que hacen parte de la *estructura teórica nativa* de los mismos, fueran correctas, usándolas para desarrollar el asunto de interés con total acuerdo de los estudiantes. Luego, el uso continuo de tales concepciones puede llevar a conclusiones erróneas, *errores conceptuales* o *misconceptions*.

Modelos de Cambio conceptual

Con respecto a lo dicho anteriormente se hace más útil y esclarecedor abordar el modelo de cambio conceptual (MCC) y los problemas relacionados con la educación en ciencias desde una perspectiva epistemológica (Lombana, 1998), teniendo en cuenta la estructura teórica nativa y el conflicto conceptual.

Un importante aporte a la interpretación del MCC es realizado por Strike y Posner (1985), quienes ven el aprendizaje como una actividad racional e investigan de qué manera se incorporan las nuevas concepciones a las estructuras cognitivas de los estudiantes y cómo o cuándo, se vuelven disfuncionales esas ideas previas (estructura teórica nativa), para ser reemplazadas (citados por Bello, 2004). Estos autores siguiendo la línea de Posner et al. (1982, citado por Lombana, 1998), plantean la idea de que

---

[1] Se entiende por *disonancia cognitiva* a un estado de incomodidad o tensión psicológica que experimenta una persona cuando tiene dos creencias, actitudes o ideas que entran en conflicto entre sí, o cuando sus acciones no están alineadas con sus creencias o valores.

[2] Se entiende por *acomodación* como el proceso cognitivo en el que se reestructuran los esquemas mentales existentes para integrar nueva información que no encaja con el conocimiento previo, implicando un cambio profundo en la comprensión del concepto.

muchas concepciones están entretejidas entre sí, de tal forma que el cambio de una concepción a/por otra, desencadena el cambio o modificación de muchas otras concepciones; por ello, es necesario plantear que el aprendizaje envuelve dos patrones de reestructuración.

El primero tiene que ver con la captura conceptual o asimilación, en donde la nueva concepción es adicionada a, o reconciliada con, lo que el estudiante ya conoce, en el que no se requiere una revisión conceptual mayor. El segundo patrón está asociado con el proceso a través del cual una concepción reemplaza el uso de otra, dando lugar a lo que se denomina intercambio conceptual o acomodación, el cual implica una reestructuración, aunque también puede ser vista como una competición entre concepciones.

Adicionalmente, existe evidencia sobre la posibilidad de efectuar cambios radicales que involucren todas las concepciones, y en su extremo opuesto, también presentarse cambios parciales que involucren un número reducido de nociones (Lombana, 1998). Lo anterior, da pie para entender el cambio conceptual como un proceso que involucra cambios integrales, así como un proceso gradual, o por etapas (Lombana, 1998).

Moreira (2003), presenta un MCC popularizado en la década de ochenta que sigue el modelo kuhniano[3], propuesto por Posner et al. (1982) en el que a pesar de que existan varias condiciones para el cambio conceptual, hay cuatro que parecen ser comunes en la mayoría de los casos (op. cit. p. 214):

1. Debe existir una insatisfacción con las concepciones existentes: Es improbable que científicos y estudiantes hagan cambios radicales en sus conceptos, a menos que perciban que pequeños movimientos no funcionan más.

2. Una nueva concepción debe ser inteligible: El individuo debe ser capaz de entender el nuevo concepto lo suficiente para explorar sus posibilidades.

3. Una nueva concepción debe parecer inicialmente plausible: Cualquier nuevo concepto adoptado, debe por lo menos parecer tener la capacidad de resolver los problemas generados por sus predecesores.

4. Una nueva concepción debe sugerir la posibilidad de un programa de investigación fructífero: El nuevo concepto debe tener el potencial de ser extendido a otras áreas, de abrir nuevas posibilidades.

Estos requerimientos hacen aparecer el proceso dentro de un contexto de extremada racionalidad; sin embargo, la tensión entre los cambios globales y graduales permite ver este punto con una óptica diferente, ligado a las características particulares de cada individuo, pues puede deducir que lo que se ha dado en llamar cambio racional, no es más que el uso de los distintivos propios de los elementos, correspondientes a cada ecología conceptual (Lombana, 1998).

Esta *ecología conceptual* propone interdependencia entre las ideas; es decir, los conceptos que posee el individuo determinan qué nuevas concepciones está en condiciones de aceptar y, a la vez, éstas al ser incorporadas en la red conceptual existente, la modifican (Bello, 2004, citando a Posner et al.). Bello (2004) también comenta que:

---

[3] Modelo de Kuhn: de cambio de paradigma para explicar el cambio conceptual desde el ámbito de la psicología cognitiva.

“La dirección de una acomodación está determinada por: anomalías frente a las expectativas del individuo; su experiencia previa; sus compromisos epistemológicos y creencias metafísicas, y el conocimiento que tenga de otras áreas. Todo ello dará como consecuencia una competición entre concepciones cuyo resultado generará el cambio conceptual (p.211)”.

En la línea de esta proposición, - y continuando con el modelo de Thomas Kuhn (1978) - según Carey (1985, 1991, citada por Moreira, 2003), los seres humanos nacen con sistemas de conocimientos en algunos dominios, como el del lenguaje, el de los objetos físicos y el de los números, que permiten organizar los estímulos del mundo exterior.

Carey (1985, 1991, citada por Moreira, 2003), comenta que

> “Este conjunto de conocimientos se constituye en teorías a partir de las cuales los conceptos son explicados, estas teorías permiten que se pueda percibir ciertas cosas pertenecientes a un dominio y por lo tanto se razone sobre ellas a partir de los principios que regulan el dominio en cuestión. [Además], supone que, estas teorías pueden sufrir modificaciones estructurales a lo largo de la vida, lo que le permite postular que los conceptos pueden evolucionar o aprenderse a partir de lo que llama cambio conceptual (p. 304)”.

Carey (citada por Bello, 2004) reconoce dos tipos de cambio en la red conceptual del estudiante: el débil y el fuerte. En el estudiante – o aprendiz -, el débil corresponde a modificaciones pequeñas en los conceptos, que no implican cambios profundos en su red conceptual, pues no requieren un cambio de paradigma. A diferencia de, el fuerte, el cual corresponde a aquellos cambios en los que se realizan modificaciones profundas en las concepciones, provocando una revolución en el conocimiento científico (Bello, 2004).

Además, Carey (1991, p. 258, citada por Moreira, 2003) plantea que el proceso de “enriquecimiento” se da a partir de la adquisición de nuevos conceptos, al ser contrastados con unos iniciales que son opuestos; ya que la posición del cambio conceptual permite la alternativa de que los nuevos conceptos adquiridos puedan no ser definibles en los términos de los conceptos que ya se poseen.

Por lo tanto, la propuesta de MCC que presenta, implica modificaciones en los “core principles” (principios centrales) que gobiernan las formas de razonar, dando lugar a nuevos principios que son inconmensurables con los antiguos. Estos cambios pueden manifestarse en diferenciaciones conceptuales, la unificación de conceptos previamente considerados como distintos, o nuevos análisis que convierten ciertos conceptos de simples propiedades en relaciones fundamentales. Estos cambios pueden resultar en mudanzas, tanto en la posición que los conceptos ocupan en las teorías como en su reubicación en nuevas categorías ontológicas.

Por otro lado, diSessa y Sherin (1998, citados en Bello, 2004) cuestionan la relevancia del enfoque centrado en el modelo estándar para el cambio conceptual, planteando el interrogante principal: "¿Qué implica realmente el cambio conceptual?". Argumentan que los conceptos son esenciales en este proceso, pero su definición no ha sido clara para los investigadores. Por ello, introducen la noción de "constructos teóricos" y proponen la "coordinación de clase" como una categoría de conceptos, señalando que diferentes aprendizajes conllevan exigencias intelectuales diversas.

En relación con lo dicho por diSessa y Sherin, Vosniadou (1994, citada por Moreira, 2003, Lombana, 1998 y Bello, 2004) considera que el cambio conceptual ocurre mediante ajustes graduales en el modelo mental del mundo físico, pues el enriquecimiento implica la adición de información a las estructuras conceptuales existentes, mientras que la revisión puede implicar modificaciones en creencias, suposiciones o en la estructura relacional de una teoría. Cuando el enriquecimiento consiste en agregar nueva información a una estructura conceptual existente, se trata de un cambio conceptual simple, mientras que la revisión se hace necesaria cuando la nueva información es incompatible con creencias o suposiciones preexistentes. Aun así, los fracasos en el aprendizaje suelen ocurrir cuando la adquisición de conocimiento demanda la revisión de suposiciones arraigadas en el marco teórico, en estos casos, pueden surgir inconsistencias, conocimiento inerte (memorístico) o la formación de ideas preconcebidas (Bello, 2004).

Modelos mentales

Vosniadou (1994; Vosniadou y Brewer, 1994, citada por Moreira, 2003) utiliza el término de los modelos mentales para explicar las dificultades de los estudiantes para la comprensión de los conceptos científicos.

Además, Moreira (2003) resalta que:

> "Según esta autora, las representaciones que los estudiantes generan para comprender una situación están determinadas por las teorías de dominio que los sujetos tienen sobre un determinado conjunto de fenómenos, que, a su vez, adoptarían, de forma implícita, la estructura de ciertos principios o supuestos epistemológicos y ontológicos impuestos por las "teorías-marco" o teorías implícitas (Pozo y Gómez Crespo, 1999, citados por Moreira, 2003)" (p. 310).

Estos supuestos implícitos se constituirían en los primeros años de vida del sujeto, aún sin ser – necesariamente – compatibles con los presupuestos de las teorías científicas (*modelos científicos* como Vosniadou describió (1994, citada por Lombana, 1998)), convirtiéndose en el principal obstáculo para el aprendizaje de conceptos científicos.

Gutiérrez (2000, citado por Moreira, 2003), propone que la necesidad del individuo de construir modelos mentales coherentes, robustos y consistentes que permitan tener una concordancia entre su pensamiento y los datos del mundo, sería el agente responsable del proceso de cambio conceptual. Por ello, la relación entre modelos mentales y estructuras mentales -como la *estructura teórica nativa*- podría describirse como una relación dialéctica, pues la lectura de la realidad a partir del conocimiento-en-acción[4] del sujeto influenciaría los modelos mentales, pero el proceso de comparación entre los resultados de esos modelos mentales y el resultado efectivo de la situación en sí puede llevar a modificaciones en los invariantes del sujeto por causa de las inconsistencias entre el modelo mental y la situación nueva, o en la búsqueda de coherencia entre su pensamiento y los datos del mundo externo (Moreira, 2003).

Sin embargo, Caravita (2001, citado por Moreira, 2003) subraya que:

> "más que observarse un proceso de construcción del conocimiento a partir de un cambio de conceptualizaciones, lo que se observa es que los estudiantes toman de la intervención didáctica información de la que no eran conscientes y la aceptan y la creen. Lo revolucionario se observaría en las consecuencias de esta aceptación, que permitiría a los estudiantes, a partir del nuevo conocimiento tener nuevas perspectivas sobre los hechos que potencialmente les pueden posibilitar nuevas formas de procesar la información" (p. 310).

En esta línea, para promover un *cambio conceptual*, se sugiere abordar directamente las creencias epistemológicas (definidas por Vosniadou como *modelo mental inicial*) en lugar de tratar solo las *ideas previas*, por lo que es necesario tener en cuenta el contacto con los invariantes conceptuales de cada uno, así como lo resultante durante el proceso de aprendizaje. Los procesos que conducen al desarrollo de *modelos sintéticos* (definidas por Vosniadou, 1994) pueden manifestarse de dos formas. En primer lugar,

---

[4] Descrito por Greca y Moreira (2002, citado por Moreira, 2003) como un invariante conceptual.

como un proceso de enriquecimiento conceptual, que implica simplemente agregar nuevo conocimiento a la estructura conceptual existente. En segundo lugar, mediante la revisión de la estructura teórica, lo que puede implicar cambios en las creencias o supuestos, y esto a su vez se traduce en modificaciones en la estructura lógica de la teoría.

Así pues, continuando con desde el punto de vista de Vosniadou (1994, citada por Lombana, 1998), el *cambio conceptual* estaría relacionado con el proceso a través del cual las *teorías específicas* (o *estructura teórica nativa*, definida en el apartado que lleva su nombre) de los estudiantes entran en "contacto" con las teorías y conceptos del área de estudio. En este proceso de "contacto" emergen tres tipos de modelos mentales, a saber:

Modelos mentales iniciales	Modelos sintéticos	Modelos científicos
Son construidos por el individuo haciendo uso de su "estructura teórica nativa" sobre el mundo físico. En ella se conjugan las creencias epistemológicas y ontológicas que permiten constituir un modelo coherente del mundo físico. Este tipo de conocimiento es consistente, lógico y fundamental para el individuo.	Son producto del "contacto" entre la "estructura teórica nativa" y los conceptos y teorías de la ciencia. Estos se generan en el intento de reconciliar estos dos tipos de conocimientos. Es aquí en donde emergen la "misconceptions" y se inicia el proceso de cambio conceptual.	Son construidos y aceptados por la Comunidad Científica. Estos tipos de modelos son descritos por los sistemas teóricos que interpretan la naturaleza desde una perspectiva científica.

Tabla 1.- Tipos de modelos mentales en el cambio conceptual propuesto por Vosniadou (1994, citada por Lombana, 1998). Elaboración propia.

Con lo dicho anteriormente, al establecer una relación entre lo declarado por Vosniadou, Gutiérrez y demás autores, se pueden establecer relaciones entre la estructura teórica nativa, modelo mental inicial, conflicto conceptual y modelos mentales sintéticos. Estos se pueden visualizar en el siguiente diagrama, en el que se ubican de izquierda a derecha a modo de proceso:

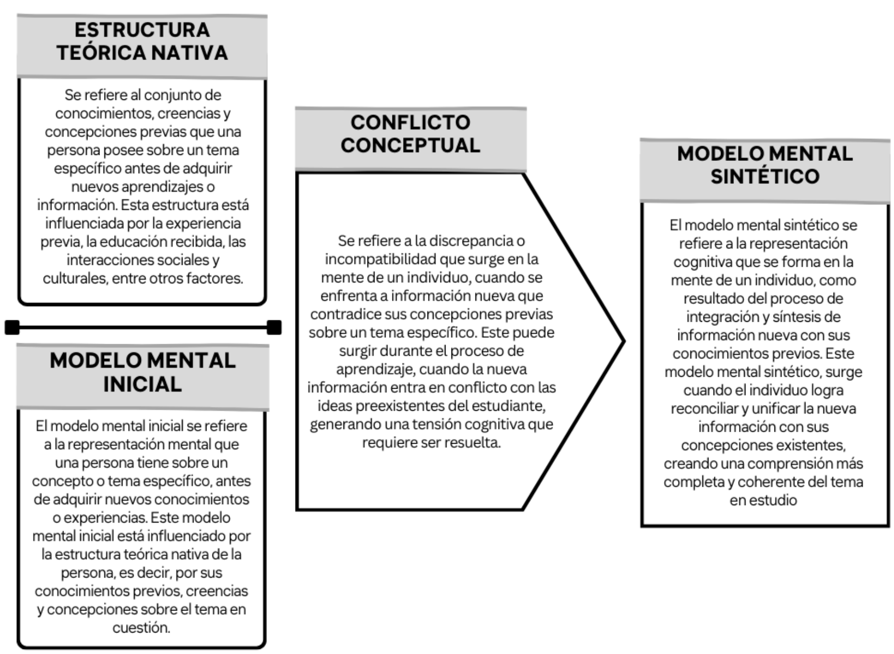


Figura 1.- Diagrama de relación entre modelos mentales durante el cambio conceptual. Elaboración propia.

PERSPECTIVA ASUMIDA SOBRE CAMBIO CONCEPTUAL

Al respecto, algunos autores que se tomarán en cuenta para esta investigación proponen los siguientes patrones de cambio conceptual:

1. Cambio Conceptual en Cascada (Posner et al, 1982, citado por Lombana, 1998): Se reconoce la interrelación entre una concepción particular y otras relacionadas, lo que permite replantear la estructura conceptual del estudiante. Identificar la noción central que puede desencadenar cambios en otras nociones es fundamental. Aunque la secuencia exacta de estos cambios es difícil de determinar debido a su rápida sucesión, resulta interesante explorar mecanismos para prolongar y ampliar este proceso, adaptándolo a la idiosincrasia del aprendizaje individual.

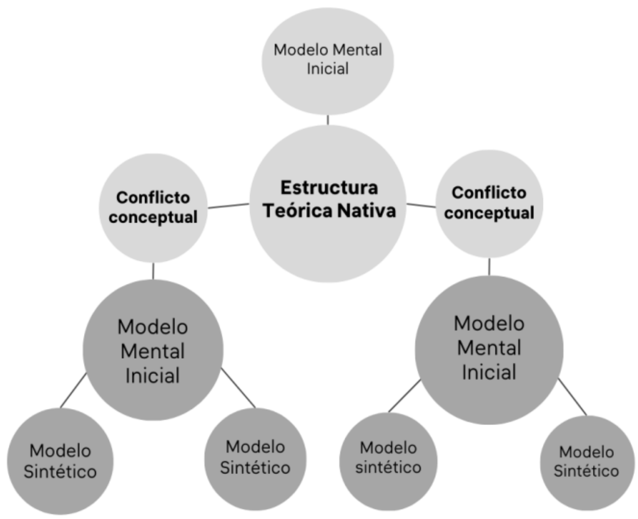


Figura 2.- Diagrama de Cambio Conceptual en Cascada. Elaboración propia.

2. Cambio Conceptual Masivo (Posner et al,1982): Este patrón considera el cambio conceptual como un proceso que reemplaza un conjunto de nociones por otro sin mediación intermedia. Se basa en el escrutinio racional de las concepciones contrastantes.

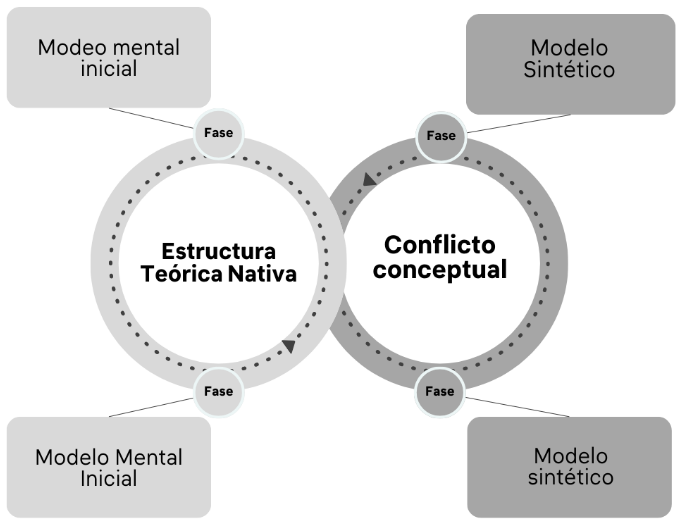


Figura 3.- Diagrama de Cambio Conceptual Masivo. Elaboración propia.

3. Cambio Conceptual Incremental (Nussbaum 1989; Metz 1991; Carey 1985; Clough & Driver 1986): Se refiere al proceso gradual de introducción de nuevas ideas que forman la base para una transformación conceptual. Este enfoque permite cambios graduales donde nuevas ideas, con su aplicación a lo largo del tiempo, generan nuevas relaciones y significados.

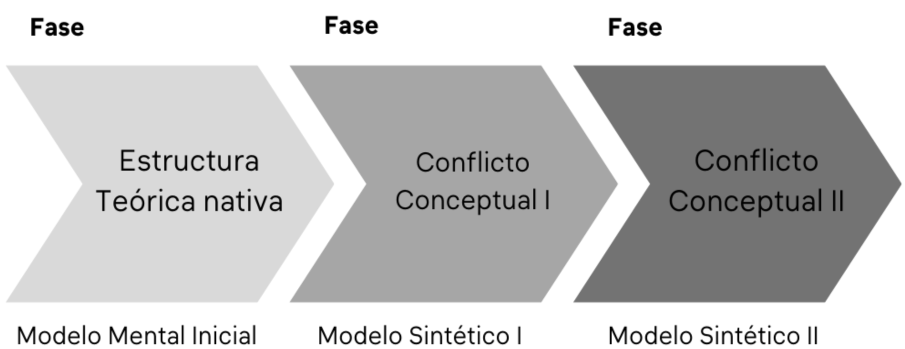


Figura 4.- Diagrama de Cambio Conceptual Incremental. Elaboración propia.

4. Cambio Conceptual de Construcción Dual (Nussbaum 1989; Metz 1991; Carey 1985; Clough & Driver 1986): A veces, los estudiantes manejan dos explicaciones completamente diferentes y contrapuestas sin dificultad aparente. Esto sugiere que el aprendizaje de un nuevo paradigma no siempre implica un cambio completo en las concepciones existentes. En algunos casos, los sujetos emplean múltiples formas de razonamiento sin que esto represente necesariamente un problema.

Figura 5.- Diagrama de Cambio Conceptual de Construcción Dual. Elaboración propia.

Durante estos procesos de cambio conceptual, pueden surgir contratiempos como inconsistencias, conocimiento inerte y malentendidos. Además, diversos motivos pueden dificultar el cambio conceptual (según Pruneau et al., 2005 y Vosniadou, 1994, citado por Barón 2009), como la falta de creencia en la nueva teoría, la terquedad en mantener la concepción inicial, el desinterés por el tema o la influencia de concepciones arraigadas en la comunidad del estudiante.

TAREA CON SENTIDO PROFESIONAL EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Según la revisión documental realizada en el proyecto de investigación mencionado sobre "tareas con sentido en/para la formación profesional inicial del profesor de matemáticas" se analiza el concepto de *tarea* desde varios ángulos, destacando la importancia de que las tareas propuestas en la formación de profesores de matemáticas sean relevantes y estén diseñadas para fomentar competencias específicas en los futuros profesores (Morales, et al., 2023).

Tras la revisión documental, se propone una definición de *tarea con sentido profesional en la formación de profesores de matemáticas* como:

> una demanda estructurada que brinda oportunidades de aprendizaje a los futuros profesores de matemáticas, con un contenido (matemático o didáctico) y un propósito de aprendizaje, involucrando situaciones vinculadas a la práctica o futura práctica profesional y guiada por resultados de la investigación en Educación Matemática; para promover el desarrollo de conocimientos, competencias y destrezas necesarias en el futuro profesor de matemáticas (Rendón, et. al, 2023).

Además, se destaca que las tareas:

> deben fomentar la creación de nuevos conocimientos, estimular un rol activo por parte de los futuros profesores, desafiar sus creencias y conocimientos, identificar y reconocer las limitaciones de su experiencia actual, abordar las prácticas y problemas profesionales del docente y permitir la exhibición y modificación del conocimiento profesional, entre otros aspectos (Morales, N., et al. 2023).

Fases de Aké

Esta tarea se plantea siguiendo las fases propuestas por Aké, un enfoque metodológico que promueve un análisis detallado y estructurado en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Las fases propuestas por Aké proporcionan un marco sólido para abordar la complejidad de la enseñanza de los números reales, guiando a los estudiantes a través de un proceso reflexivo y metódico.

La primera fase, que involucra el trabajo individual fuera del aula, permite a los estudiantes explorar los conceptos fundamentales de los números reales a través del análisis de libros de texto. Esto les brinda la oportunidad de desarrollar una comprensión inicial de los temas clave y comenzar a reflexionar sobre los desafíos y las estrategias potenciales para la enseñanza de este tema.

La segunda fase, que implica el trabajo en equipo durante la sesión de clase, fomenta la interacción y el intercambio de ideas entre los estudiantes. Al discutir y comparar sus hallazgos individuales, los estudiantes pueden identificar patrones comunes, así como discrepancias y puntos de vista diversos. Esta fase promueve el desarrollo de habilidades colaborativas y la construcción colectiva de conocimiento.

La tercera fase, centrada en la lectura y el análisis de documentos especializados, ofrece a los estudiantes la oportunidad de profundizar en aspectos específicos de la enseñanza de los números reales. Al examinar investigaciones previas y perspectivas teóricas, los estudiantes pueden enriquecer su comprensión y tomar postura informada sobre los enfoques pedagógicos más efectivos.

La fase de reajuste, que sigue a la lectura de documentos, permite a los estudiantes revisar y ajustar sus conclusiones iniciales a la luz de nueva información y perspectivas adquiridas. Este proceso de retroalimentación facilita un análisis más riguroso y matizado, mejorando la calidad de los resultados finales.

Finalmente, la fase de institucionalización proporciona un espacio para consolidar los hallazgos y reflexiones de los estudiantes en un marco más amplio de la práctica educativa. Al compartir y discutir sus conclusiones con el grupo, los estudiantes pueden contribuir al desarrollo de un conocimiento compartido y generar ideas para futuras investigaciones y prácticas pedagógicas.

Tarea implementada y a analizar

En este proyecto de investigación, se busca validar la tarea "*Enseñanza de los números reales en libros de texto y su aprendizaje*" propuesta como *Tarea con sentido profesional en la formación de profesores de matemáticas*, por el grupo de investigación *RE-MATE* de la UPN y diseñada por la profesora Lyda Mora Mendieta.

A lo largo de esta tarea, se explora la complejidad de los números reales y se aborda su enseñanza y aprendizaje, especialmente en el contexto de libros de texto utilizados en la educación secundaria y media en Colombia. Esta tarea tiene como objetivo principal que los futuros profesores de matemáticas reconozcan la complejidad en la enseñanza y el aprendizaje de los números reales; así mismo, busca que no solo adquieran conocimientos teóricos sobre este conjunto numérico, sino que también desarrollen habilidades prácticas para enseñar este objeto de manera efectiva en el aula.

Esta tarea se desarrolla en varias fases, que incluyen trabajo individual y grupal, lectura de documentos, una fase de ajustes y una de institucionalización. Se fomenta la interacción entre los estudiantes, la discusión de sus ideas y la reflexión sobre las similitudes y diferencias en sus enfoques.

Los objetivos de esta tarea incluyen:

1. Reconocer distintos tipos de representaciones de los números reales a partir de su revisión histórica y la literatura especializada en Educación Matemática.

2. Reconocer la complejidad en la conceptualización y aprendizaje de los números reales mediante la metacognición y la revisión de aspectos históricos y errores frecuentes en la transposición didáctica.

3. Tomar postura acerca de los aspectos esenciales de los números reales que se deben abordar en su enseñanza, a partir del estudio de documentos producidos en Educación Matemática y la revisión de libros de texto.

Para lograr estos objetivos, se plantea un proceso estructurado [proyecto de investigación] que involucra diversas etapas y actividades, como se detalla en el anexo B del documento:

1. Fase Individual: En esta fase, los estudiantes realizan un trabajo individual extraclase donde reciben un libro de texto escolar de 8° grado y analizan cómo se introducen los números reales en el texto, así como las características fundamentales que se destacan. Se espera que identifiquen las representaciones propias de los números reales presentes en el libro y reflexionen sobre la forma en que se aborda este concepto en el material educativo.

2. Fase Grupal: Posteriormente, los estudiantes se reúnen en equipos en una sesión de clase para compartir y discutir sus análisis individuales. Comparten sus conclusiones preliminares y plantean reflexiones conjuntas sobre los aspectos abordados en los libros de texto seleccionados. En esta fase, los equipos colaboran para plasmar de forma creativa en un pliego de papel o diapositiva, sus conclusiones sobre los números reales según lo expuesto en los textos escolares, respondiendo a preguntas orientadoras específicas.

3. Fase Teórica: Después de la fase grupal, los estudiantes se sumergen en una fase teórica donde se les asigna la lectura analítica de cinco documentos relacionados con los números reales. Cada grupo de estudiantes responde estas preguntas sobre los documentos, profundizando en aspectos clave como la introducción de los números reales en los textos, las características fundamentales que los conceptualizan y las representaciones propias de los números reales.

   Esta fase proporciona a los estudiantes la oportunidad de ampliar su comprensión de los números reales a través de la revisión de fuentes académicas y especializadas. Les permite contrastar y complementar la información encontrada en los libros de texto escolares con perspectivas teóricas más profundas y detalladas. Además, les brinda la base para reajustar y enriquecer las conclusiones establecidas en las fases anteriores, preparándolos para la fase de reajuste y la institucionalización de las ideas principales sobre los números reales.

4. Fase de Reajuste: Después de la fase teórica, los estudiantes se organizan en equipos y, revisan y complementan las conclusiones establecidas inicialmente en base a la información teórica adquirida. Cada equipo modifica su trabajo original para reflejar un mayor entendimiento de los números reales y sus representaciones. Posteriormente, se lleva a cabo una exposición de las conclusiones revisadas.

5. Fase de Institucionalización: Esta fase inicia con la exposición de carteleras que presentan las ideas principales sobre los números reales, seguida de una selección de las ideas más relevantes por parte del profesor. Se destaca la complejidad de los números reales y se enfatiza la importancia de características como la completitud y la cardinalidad en su estudio.

Características de tarea con sentido profesional

Esta tarea fue propuesta desde la conceptualización de *Tarea con sentido profesional en la formación de profesores de matemáticas,* por lo que fue propuesta respondiendo a unas características dadas por el proyecto de investigación y por su autora, Lyda Costanza Mora. Estas son:

- Propiciar un rol activo por parte de los futuros profesores.
- Potenciar el desarrollo personal de los futuros profesores a partir de las interacciones (v.g. discusiones, trabajo grupal) con otros.
- Abordar [posibles] prácticas o problemas profesionales del profesor de matemáticas.
- Poner en juego las creencias, concepciones (v.g. en relación con lo que significa enseñar o aprender matemáticas) y conocimientos (v.g. matemático, didáctico, curricular) de los futuros profesores.
- Permitir exhibir el conocimiento (v.g. matemático, didáctico, curricular) de los futuros profesores en torno a los asuntos (v.g. objetos, procesos, procedimientos) matemáticos escolares inmersos.
- Permitir a los futuros profesores modificar (transformar, descubrir, replantear, reaprender, profundizar) su conocimiento.
- Vincular la práctica del profesor de matemáticas con desarrollos teóricos-investigativos de la Didáctica de las Matemáticas.
- Permitir que surjan nuevos cuestionamientos que potencien la perspectiva profesional del futuro profesor de matemáticas
- Promover la comprensión de conceptos didácticos y matemáticos
- Permitir a los futuros profesores reconocer características del desarrollo (de tipo cognitivo/epistémico) del pensamiento matemático, en pertinencia con lo que plantea el currículo escolar colombiano
- Tener una estructura en relación con su intencionalidad

CAPÍTULO 3. MARCO METODOLÓGICO

Este capítulo contiene una descripción detallada de los aspectos metodológicos para tener en cuenta en la investigación para validar si la tarea "Enseñanza de los números reales en libros de texto y su aprendizaje" es una *tarea con sentido profesional en la formación de profesores de matemáticas*. En esta misma, se desarrollará la herramienta analítica propuesta, para así comprender su estructura y su relación con el objetivo de este trabajo de investigación.

ASPECTOS GENERALES

Participantes

La población que se observó en esta investigación corresponde a un grupo de estudiantes del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, específicamente el grupo del espacio académico *Enseñanza y Aprendizaje de la Aritmética y el Álgebra* que se desarrolló durante el semestre lectivo 2023-2 y que orientó la profesora Natalia Morales Rozo.

La selección de los estudiantes a considerar como muestra se fundamentó en criterios, tales como:

- Asistencia completa durante la realización de la tarea
- Entrega de los documentos solicitados en la fase I y la fase III

La aplicación de los criterios mencionados anteriormente, hizo que de los 19 estudiantes inscritos en el espacio académico se tuvieran en cuenta para la investigación 12 estudiantes (ver, Anexo A), ya que los participantes incluidos en el estudio fueron aquellos que completaron satisfactoriamente las tres sesiones de la tarea propuesta, lo que implicaba su compromiso y dedicación al proceso de aprendizaje. Además, los documentos entregados proporcionaron información adicional y detallada sobre el proceso de aprendizaje y la comprensión de los conceptos abordados en el contexto de la tarea propuesta.

Estrategia y enfoque investigativo

La estrategia investigativa empleada en este estudio se basó en la observación participante y el análisis documental como principales métodos de recolección de datos. Este enfoque permitió sumergirse en el entorno del aula de Enseñanza y Aprendizaje de aritmética y álgebra, así como en las interacciones y dinámicas del grupo estudiantil, objeto de estudio. La observación participante implicó la presencia activa del investigador en las sesiones de clase, lo que posibilitó recopilar información sobre el progreso de la tarea asignada, las interacciones entre los alumnos y la docente, y los procesos de aprendizaje en marcha. Esta metodología ofreció una visión directa y detallada de los sucesos y situaciones en el aula, capturando aspectos significativos del proceso educativo.

Adicionalmente, se realizó un análisis documental de los materiales producidos por los estudiantes durante la ejecución de la tarea. Estos documentos comprendieron carteles, registros de conclusiones grupales y cualquier material pertinente a la actividad. La evaluación de estos documentos proporcionó información adicional sobre el rendimiento de los estudiantes, su comprensión de los conceptos tratados y la evolución de la tarea en sus distintas etapas. De manera conjunta, la combinación de la observación participante y el análisis documental facilitó la comprensión profunda de los fenómenos educativos estudiados y la obtención de descubrimientos relevantes para la validación de la tarea *Enseñanza y Aprendizaje de la Aritmética y el Álgebra*.

La aproximación y el enfoque investigativo utilizado en este estudio se fundamentó en una perspectiva cualitativa y fenomenológica. Desde una perspectiva cualitativa, se priorizó la comprensión de los procesos subyacentes y las interacciones sociales que influyen en la construcción del conocimiento matemático. Se buscó capturar la riqueza y la complejidad de los fenómenos estudiados a través de la observación detallada, el análisis reflexivo y la interpretación contextualizada de los datos recopilados. El enfoque fenomenológico, por su parte, implicó la exploración de las vivencias y perspectivas de los participantes en relación con la tarea propuesta y el proceso de aprendizaje. Se prestó especial atención a los significados atribuidos por los estudiantes y la profesora a las fases realizadas, así como a los factores que influyen en su comprensión y apropiación de los conceptos matemáticos.

Fases de la investigación

Con la intención de validar la tarea "Enseñanza de los números reales en libros de texto y su aprendizaje" para determinar si es una *tarea con sentido profesional en la formación de profesores de matemáticas*, utilizando la estrategia de cambio conceptual, durante esta investigación, se siguieron las siguientes fases, a saber:

Fase exploratoria

En esta fase, se llevó a cabo una aproximación al fenómeno u objeto de estudio utilizando diversos recursos y herramientas, como la observación directa y la participación. Posteriormente, se define el cambio conceptual como estrategia metodológica para la validación de las tareas, lo que implica comprender claramente su alcance y aplicación en este contexto particular:

En esta se tuvo en cuenta lo siguiente:

- Marco de referencia sobre *tarea con sentido profesional en la formación de profesores de matemáticas*: Se exploraron las conceptualizaciones previas establecidas en el proyecto *Tareas con sentido para profesores que enseñarán matemáticas, un ejemplo desde la Didáctica de la Aritmética y el Álgebra* (Morales et al., 2022).

- Definición de cambio conceptual como estrategia metodológica para la validación de tareas: Se estableció una comprensión clara de lo que se entiende por cambio conceptual, así como se concentra información sobre los posibles modelos de cambio conceptual propuestos por diferentes autores.

- Construcción de la herramienta de validación: Se diseñó una herramienta específica para evaluar el “sentido” de las tareas. Además, se describió cómo se utilizaría esta herramienta para validar las tareas.

Fase analítica

Esta fase implicó el estudio y análisis de la información recopilada u observada. Para ello, se realizó una revisión exhaustiva del material, su clasificación, la identificación de problemas u objetivos, y la integración de la información, transformándola en un lenguaje científico.

- Selección de evidencias: Se examinan las evidencias recopiladas sobre la tarea que se desea validar y se depuran las evidencias teniendo en cuenta el propósito de la investigación sin excluir muestras. Finalmente, se organizan aquellas que permitan evidenciar el proceso de cada estudiante.

- Aplicación de la herramienta de validación: Se utilizará la herramienta construida para evaluar las tareas seleccionadas para la que posteriormente se registrarán los resultados obtenidos.

- Análisis de los resultados: Se realiza un análisis de los datos recopilados en los que se considera cómo los resultados se relacionan con la conceptualización de tareas con sentido y el cambio conceptual.

Fase de discusión y conclusiones

En esta fase se revisa la información obtenida, contrastándola con datos de otros investigadores o estudios previos. El objetivo es alcanzar un nuevo nivel de conocimiento a través del análisis crítico de los datos recopilados.

- Resultados y conclusiones: Se documentarán los hallazgos y conclusiones, respondiendo al objetivo propuesto, destacando los aspectos clave de la validación y su relevancia para la formación de profesores de matemáticas.

EVIDENCIAS

Teniendo en cuenta lo llevado a cabo durante las 3 sesiones de clase en las que se desarrolló la tarea *Enseñanza y Aprendizaje de la Aritmética y el Álgebra* descrita en el apartado *tarea implementada y a analizar* del Capítulo I, que a su vez se cohesiona con las fases para la implementación de tareas propuestas por Aké y López-Mojica (2020) referidas en el marco de referencia.

Por ello fue necesario usar evidencias grupales organizadas de la siguiente manera:

Código de grupo	Estudiantes del grupo
1	HV, JR y JV
2	GV y JG
3	VZ, LB y AM
4	DD y JF
5	MB y SG

Tabla 2.- Organización de los grupos por número

Con ello se codificaron las evidencias para llevar a cabo el análisis propuesto en este estudio, las cuales son:

Transcripciones de clase

Las transcripciones de clase se realizaron a partir de los vídeos grabados durante las sesiones en las que se abordó la tarea sobre la *Enseñanza de los números reales en los textos escolares* (Anexo D – Videos de clase). Estas transcripciones se generaron tanto a partir de los vídeos recopilados como evidencia para el proyecto de investigación *Tareas con sentido profesional para la formación de profesores de matemáticas*, como de los audios grabados por los estudiantes durante las fases correspondientes al trabajo grupal.

En necesario resaltar que no todos los estudiantes proporcionaron esta evidencia, ya que algunos no la compartieron en el grupo de Teams conformado por todos los estudiantes del curso "Enseñanza y aprendizaje de la aritmética y el álgebra" del semestre 2023-2 (los recopilados se encuentran en el anexo 1 como audio).

Los códigos usados para estas evidencias fueron:

- Videos de transcripciones de clase: Número de video_ tiempo del fragmento

- Audios grupales: GNúmero del grupo_AudNúmero de audio

Posteriormente, estas transcripciones fueron depuradas para cada estudiante, conservando información relevante como definiciones, conceptos y objetos matemáticos, en los que fuese posible evidenciar un proceso relacionado al objetivo de esta investigación.

Producciones de los estudiantes

La producción de los estudiantes se encontraba recopilada en los archivos del Grupo de Teams "*Enseñanza y Aprendizaje de la Aritmética y el Álgebra*" del semestre 2023-2, proporcionada como evidencia para el proyecto de investigación *Tareas con Sentido Profesional para la Formación de Profesores de Matemáticas.*

Esta producción se divide en cuatro fases:

1. Fase I: Corresponde a la tarea enviada por los en la que se les pidió diligenciar una tabla con las instrucciones correspondientes (Anexo E). Esta se codificó: Iniciales del nombre y apellido_tar1

2. Fase II: Corresponde a la elaboración de la cartelera durante la primera sesión de clase (Anexo F). Esta se codificó: Iniciales del nombre y apellido_car1

3. Fase III: Corresponde a la fase teórica en la que los estudiantes trabajaron en grupo (Anexo G). Esta se codificó: Iniciales del nombre y apellido_teo

4. Fase IV: Corresponde a los ajustes realizados por los estudiantes a sus carteles durante la fase de reajuste (Anexo F). Esta se codificó: Iniciales del nombre y apellido_car2

HERRAMIENTA ANALÍTICA

Con el fin de organizar, depurar y analizar las evidencias con las que se cuenta, se construyen 3 tablas, en las que se tienen en cuenta los objetivos de esta investigación, el marco de referencia constituido y la justificación para la validación de la tarea *Enseñanza y Aprendizaje de la Aritmética y el Álgebra*.

En este sentido, para el caso de las evidencias que se encuentran en los anexos y que hacen sus veces de las producciones escritas y grabadas, se utiliza la siguiente tabla para depurar y organizar el proceso realizado por cada estudiante durante la tarea implementada:

<table>
<tr><td colspan="2">Código del estudiante</td></tr>
<tr><td>FASE INDIVIDUAL</td><td>Código de la evidencia</td></tr>
<tr><td colspan="2">Aquí se encuentra la depuración del anexo E correspondiente a la Fase Individual, en la que se encuentran términos que permiten evidenciar las ideas previas de cada estudiante.</td></tr>
<tr><td>FASE GRUPAL</td><td>Código de la evidencia</td></tr>
<tr><td colspan="2">Aquí se encuentra la transcripción del anexo F correspondiente al producto de la Fase Grupal, en la que se puede visualizar lo escrito en las carteleras por cada grupo.</td></tr>
<tr><td>Tiempos de grabación en la que se encuentra el fragmento</td><td>Aquí se encuentra la depuración del anexo C correspondiente a los audios de la Fase Grupal, en las que se tiene en cuenta los fragmentos relacionados con la realización de la fase.</td></tr>
<tr><td>FASE TEÓRICA</td><td>Código de la evidencia</td></tr>
<tr><td colspan="2">Aquí se encuentra la depuración del anexo G correspondiente a la Fase Teórica, en la que se encuentran términos que permiten evidenciar las conceptualizaciones de cada grupo sobre los modelos científicos propuestos.</td></tr>
</table>

FASE DE REAJUSTE	Código de la evidencia
Aquí se encuentra la transcripción del anexo F correspondiente al producto de la Fase de Reajuste en la que se puede visualizar lo escrito en papeles de otro color (tal y como se dio en las instrucciones de la tarea implementada) en las carteleras por cada grupo.	
Tiempos de grabación en la que se encuentra el fragmento	Aquí se encuentra la depuración del anexo C correspondiente a los audios de la Fase de Reajuste, en las que se tiene en cuenta los fragmentos relacionados con la realización de la fase.
FASE DE INSTITUCIONALIZACIÓN	Código de la evidencia
Tiempos de grabación	Aquí se encuentra la depuración del anexo D correspondiente a los audios de la Fase de Institucionalización, en las que se tiene en cuenta los fragmentos relacionados con la realización de la fase, en la exposición de cada estudiante.

Tabla 3.- Herramienta 1 para la depuración de evidencias de cada estudiante.

Nótese que en la Herramienta 1 se usa algo denominado *Código del estudiante*, el cual consiste en las iniciales del nombre y apellido de cada estudiante protegiendo su identidad. Este se usará con el fin de diferenciar el proceso individual.

Así mismo, cada evidencia utilizada cuenta con el *Código de la evidencia*, el cual permite encontrarla de forma ágil en los anexos, de la manera en la que se describe en el apartado evidencias.

De igual forma, fue necesario nombrar cada proceso por estudiante, por lo que se contarán con varios, codificados de la siguiente manera: *código del estudiante y número del proceso*. Este número se refiere a cada una de las estructuras evidenciadas durante el proceso de la tarea implementada.

Esta información se organizará en una tabla (ver Tabla 4), que permitirá evidenciar el proceso de cada estudiante con respecto a los diferentes modelos científicos trabajados durante la tarea propuesta (Anexo I). Así mismo, tendrá una estructura que permita evidenciar la relación entre la Estructura Teórica Nativa y los conflictos conceptuales que pudieron presentarse, por medio de fragmentos de transcripciones y estructuras evidenciadas en la depuración de la Tabla 3. Allí mismo, se encontrará una conclusión que hará referencia al proceso de cada estudiante durante la realización de la tarea. Estos se encuentran organizados en una herramienta constituida de la siguiente manera:

Cód.	Fase I	Fase II	Fase III	Fase IV	Fase V	Conclusión
Código del proceso del estudiante	Fragmentos de la depuración correspondientes a la producción de esta fase.	Fragmentos de la depuración correspondientes a la transcripción de los audios grupales de esta fase. Así como fragmentos de la transcripción de las carteleras realizadas durante esta fase.	Fragmentos de la depuración correspondientes a la producción de esta fase.	Fragmentos de la depuración correspondientes a la transcripción de los audios grupales de esta fase. Así como fragmentos de la transcripción de las carteleras reajustadas durante esta fase.	Fragmentos de la depuración correspondientes a la transcripción de los audios grupales de esta fase.	Descripción del proceso en general.

Tabla 4.- Herramienta 2 para organización de los procesos y las fases llevadas a cabo durante cada uno.

Luego, para resaltar la relación entre los modelos mentales de cada estudiante; y deducir el patrón que caracteriza el cambio conceptual de dicho estudiante se utiliza la siguiente tabla:

Cód.	**Fase de la tarea**[5]	**Modelo Mental Inicial**	**Modelo Sintético**
Código del proceso del estudiante	Fase I	*Modelo Mental Inicial evidenciado en la fase I*	*Modelo Sintético Inicial evidenciado en la fase I*
	Fase II	*Modelo Mental Inicial evidenciado en la fase II*	*Modelo Sintético Inicial evidenciado en la fase II*
	Fase III	*Modelo Mental Inicial evidenciado en la fase III*	*Modelo Sintético Inicial evidenciado en la fase III*
	Fase IV	*Modelo Mental Inicial evidenciado en la fase IV*	*Modelo Sintético Inicial evidenciado en la fase IV*
	Fase V	*Modelo Mental Inicial evidenciado en la fase V*	*Modelo Sintético Inicial evidenciado en la fase V*

Tabla 5.- Herramienta 3 para organizar los modelos mentales en cada fase.

Finalmente, el análisis de las tres herramientas mencionadas previamente junto con los objetivos y las características de la tarea *Enseñanza y Aprendizaje de la Aritmética y el Álgebra* descritos previamente en el apartado Características de tarea con sentido profesional del Capítulo I permitirá validar la tarea como una *tarea con sentido profesional en la formación de profesores de matemáticas* según el *cambio conceptual* obtenido por cada estudiante.

Ejemplo del uso de la herramienta analítica

En este apartado se realizará un ejemplo de aplicación de las herramientas para que así pueda ser de utilidad durante la búsqueda de anexos.

En la herramienta analítica 2, es posible evidenciar varios procesos organizados de la siguiente manera:

[5] En el caso de que no sea posible encontrar modelos mentales en alguna fase, no será necesario tener todas las fases.

<table>
<tr><th>Cód.</th><th>Fase I</th><th>Fase II</th><th>Fase III</th><th>Fase IV</th><th>Fase V</th><th>Conclusión</th></tr>
<tr><td rowspan="6">HB3</td><td rowspan="3">Su representación en la recta numérica, mediante intervalos acotados y no acotados, y por expresiones decimales. Se destaca la utilización de herramientas geométricas como el teorema de Pitágoras para la representación de números irracionales en la recta numérica.</td><td>Explican lo de los intervalos acotados con respecto a los segmentos se hace una anotación, bueno, durante todos los números reales nos dice que siempre hay un punto en la recta numérica que va a significar un número real.</td><td>Representaciones como la recta numérica, biyección punto-número, y fracciones continuas.</td><td>Recta numérica</td><td rowspan="2">HB: bueno, el segundo tema que es los irracionales, bueno hace la representación en la recta numérica y de forma geométrica. Esos, pues por el teorema de Pitágoras.</td><td rowspan="6">En la primera fase, el estudiante señala que en el libro se aborda la representación de los números reales a través de la recta numérica, utilizando intervalos acotados y no acotados, así como expresiones decimales. Se hace hincapié en la utilización de herramientas geométricas, como el teorema de Pitágoras, para representar los números irracionales en la recta numérica. Además, se define la distinción entre decimales infinitos, decimales periódicos puros, decimales periódicos y expresiones decimales.
En la segunda fase, se reitera la explicación sobre los intervalos acotados en relación con los segmentos en la recta numérica, resaltando que en todos los números reales siempre existe un punto en la recta numérica que representa un número real. Se menciona nuevamente la representación de irracionales en la recta numérica, agregando la posibilidad de una representación geométrica a través del Teorema de Pitágoras. Asimismo, se detalla que los decimales exactos, decimales periódicos puros y decimales no periódicos son representaciones de números reales.
En la tercera fase, el estudiante identifica en los referentes teóricos varias representaciones, como la recta numérica, la biyección punto-número y las fracciones continuas, así como representaciones geométricas que ofrecen una visualización intuitiva de los números reales y ayudan a relacionar conceptos abstractos con situaciones concretas. Además, se menciona el sistema de representación simbólica, el Sistema de notación decimal, la notación operatoria habitual, la notación decimal y fraccionaria, y las expresiones algebraicas y analíticas como representaciones de los números reales basadas en los referentes dados.
En la cuarta fase, se concluye que las representaciones de los números reales incluyen la recta numérica, la representación de expresiones algebraicas, magnitudes geométricas, expresiones decimales (notación decimal finita, periódica, no periódica), radicales, y la representación de los números irracionales en la recta numérica y de forma geométrica mediante el teorema de Pitágoras.
En la última fase, se detalla una representación simbólica dividida en notación decimal finita e infinita, así como no periódica, y se menciona la logaritmación, los radicales como representación y la logaritmación como operación. Se aclara que no se encuentran representaciones ni expresiones algebraicas en el libro inicialmente asignado.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Representación en la recta numérica, que son los irracionales. Y ahora a esa representación de la recta numérica se le puede adicionar una representación geométrica por el Teorema de Pitágoras</td><td>Representaciones geométricas.</td><td rowspan="4">Representación de: expresiones algebraicas, magnitudes geométricas, expresiones decimales - Notación decimal (finita, periódica, no periódica). Radicales</td></tr>
<tr><td>La recta numérica y otras representaciones geométricas proporcionan una visualización intuitiva de los números reales y ayudan a los estudiantes a relacionar conceptos abstractos con situaciones concretas.</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td rowspan="3">Aun así, se define la diferencia entre decimal infinito, decimal periódico puro, decimal periódico, expresión decimal</td><td>Bueno, a uno no le dicen como…es decimal y ya, sino explicar decimal periódico, decimal periódico puro, decimal</td><td rowspan="3">Sistema de representación simbólica, Sistema de notación decimal, notación operatoria habitual. Notación decimal y fraccionaria. Expresiones algebraicas y analíticas.</td></tr>
<tr><td>Hay representaciones simbólicas que son: decimal, decimal exacto, decimal periódica pura y decimal no periódica</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>y la logaritmación, bueno, los radicales como una representación y la logaritmación como una operación. Y, ya clasificándolas, no hay representaciones y ni expresiones algebraicas.</td></tr>
</table>

Tabla 6.- Ejemplo de organización de las estructuras teóricas nativas y los conflictos conceptuales de cada estudiante

Para la herramienta 3, esta tendrá las fases correspondientes a las propuestas para la realización de la tarea, teniendo en cuenta aquellas en las que se evidenció el uso de estructuras teóricas y modelos científicos relacionados entre sí, tal y como se puede observar en la Tabla 7.

Cód.	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
HB3	Fase I	Identificación de la representación de los números reales a través de la recta numérica, intervalos acotados y no acotados, y expresiones decimales. Utilización del teorema de Pitágoras para representar números irracionales.	Entendimiento de las representaciones iniciales de los números reales y sus diversas expresiones decimales.
	Fase II	Reiteración de la explicación sobre intervalos acotados y representación geométrica de los irracionales. Reconocimiento de la representación de decimales exactos, periódicos puros, y no periódicos como números reales.	Refuerzo del conocimiento sobre la representación de los números reales y la inclusión de más detalles sobre sus formas decimales y geométricas.
	Fase III	Identificación de diversas representaciones de los números reales: recta numérica, biyección punto-número, fracciones continuas, y representaciones geométricas. Conexión de conceptos abstractos con situaciones concretas.	Ampliación de la comprensión de las representaciones de los números reales y su visualización intuitiva.
	Fase IV	Conclusión sobre la variedad de representaciones de los números reales: recta numérica, expresiones algebraicas, magnitudes geométricas, notación decimal, radicales, y representación geométrica de irracionales.	Consolidación de una visión amplia y multifacética de las representaciones de los números reales.
	Fase V	Detalle de la representación simbólica, incluyendo notación decimal finita e infinita, radicales, y logaritmación. Observación de la ausencia de representaciones algebraicas en el libro.	Reconocimiento de las limitaciones del material estudiado y comprensión detallada de las representaciones simbólicas y operacionales de los números reales.

Tabla 7.- Ejemplo de la herramienta analítica aplicada al proceso HB3

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS

En este capítulo se muestran los patrones de cambio conceptual identificados en cada uno de los estudiantes de la muestra seleccionada empleando la herramienta analítica mencionada y ejemplificada previamente, por lo que la herramienta 2 no será necesaria, ya que esta fue analizada para construir la herramienta 3.

El objetivo principal es identificar y comprender cómo los estudiantes progresan en su comprensión de los conceptos matemáticos fundamentales y cómo estos conceptos se consolidan y reestructuran a lo largo de la tarea implementada.

Luego, con tales patrones y lo descrito en el apartado de *tarea implementada y a analizar* se hace la validación de la tarea *Enseñanza de los números reales en libros de texto y su aprendizaje* como *tarea con sentido profesional en la formación de profesores de matemáticas*.

ESTUDIANTE HB

Patrón de Cambio Conceptual HB1

Cód.	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
HB1	Fase I	Presentación de los conjuntos numéricos (naturales, enteros, racionales e irracionales) a través de representaciones por extensión y comprensión.	Definición de los números reales como la unión de los conjuntos de números racionales e irracionales.
	Fase II	Relación de la definición de los números reales mediante la representación por comprensión de los conjuntos Q U I	Comprensión inicial de los números reales a través de una representación más abstracta.
	Fase V	Reconocimiento de la importancia de presentar primero el conjunto de números racionales, seguido por el conjunto de irracionales, y luego unirlos y representarlos por comprensión.	Reconocimiento de la estructura didáctica más clara para la definición de los números reales. Se nota una posible confusión sobre la noción de infinito y el diagrama del libro sugiere incorrectamente que los racionales son un conjunto más extenso.

Tabla 8.- Modelos mentales de HB1

En la fase I, presenta los conjuntos numéricos (naturales, enteros, racionales e irracionales) a través de representaciones por extensión y comprensión, y define los números reales como la unión de los conjuntos de números racionales e irracionales. En la fase II, relaciona la definición de los números reales mediante la representación por comprensión de los conjuntos Q e I, logrando una comprensión inicial de los números reales a través de una representación más abstracta.

En la fase V, reconoce la importancia de presentar primero el conjunto de números racionales, seguido por el conjunto de irracionales, para luego unirlos y representarlos por comprensión. Este reconocimiento de una estructura didáctica más clara en la definición de los números reales muestra una mejora progresiva en su entendimiento. Sin embargo, señala una posible confusión sobre la noción de infinito y la interpretación de los diagramas del libro, el cual sugiere incorrectamente que los racionales son un conjunto más extenso, lo que indica que está comenzando a cuestionar y mejorar su comprensión, de forma gradual y no drástica.

El estudiante introduce la definición de los números reales a través de distintas representaciones, en un proceso de cambio conceptual incremental; pues las nuevas ideas se van incorporando de manera gradual, integrando y consolidando la información de forma continua. Así mismo, la falta de conflictos conceptuales indica que el estudiante está asimilando la nueva información de forma fluida, sin alterar significativamente su estructura nativa teórica.

Patrón de Cambio Conceptual HB2

Cód.	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
HB2	Fase I	Representación de los números reales mediante la letra "R" y definición como todos los números decimales. Uso de diagramas para ilustrar las relaciones de contenencia y no contenencia entre los conjuntos numéricos.	Entendimiento inicial de los números reales y su representación, así como las relaciones entre distintos conjuntos numéricos.
	Fase II	Observación de la falta de relación con otros sistemas numéricos, como los números naturales, y ausencia de menciones a sistemas numéricos adicionales (binario, sexagesimal).	Conclusión de que no existe una relación entre diferentes sistemas numéricos en el material estudiado, aunque sí se reconoce la relación entre conjuntos numéricos.

Tabla 9.- Modelos mentales de HB2

El estudiante adquiere una comprensión inicial de los números reales y su interrelación con otros conjuntos numéricos, representándolos mediante diagramas, pues con este proceso, evidencia una construcción inicial del conocimiento. En la fase I, se aborda la representación de los números reales mediante la letra "R" y su definición como todos los números decimales. Se utilizan diagramas para ilustrar las relaciones de contención y no contención entre los conjuntos numéricos, lo que permite al estudiante entender las relaciones entre distintos conjuntos numéricos desde una perspectiva gráfica y conceptual.

A lo largo de su proceso de aprendizaje, el estudiante experimenta un patrón de cambio conceptual de construcción dual, donde explora la comprensión de los números reales y sus interacciones dentro del sistema numérico, al mismo tiempo que reconoce la falta de integración con otros sistemas numéricos. En la fase II, observa la falta de relación de los números reales con otros sistemas numéricos, como los números naturales, y nota la ausencia de menciones a sistemas numéricos adicionales (por ejemplo, binario y sexagesimal). De igual forma, al identificar la carencia de vinculación con otros sistemas numéricos y la omisión de mencionar sistemas como el binario o sexagesimal, el estudiante se enfrenta a una perspectiva dual. Por un lado, comprende adecuadamente las relaciones entre los diferentes conjuntos numéricos; por otro lado, reconoce la falta de integración con otros sistemas numéricos.

La habilidad para gestionar dos explicaciones o perspectivas distintas sin que una invalide por completo a la otra constituye un aspecto distintivo del cambio conceptual de construcción dual. Esta comprensión permite al estudiante concluir que, aunque no existe una relación directa entre diferentes sistemas numéricos, se puede reconocer la relación entre estos conjuntos, lo cual es fundamental para un aprendizaje profundo y adaptativo en matemáticas.

Patrón de Cambio Conceptual HB3

Cód.	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
HB3	Fase I	Identificación de la representación de los números reales a través de la recta	Entendimiento de las representaciones iniciales de los números reales y sus

		numérica, intervalos acotados y no acotados, y expresiones decimales. Utilización del teorema de Pitágoras para representar números irracionales.	diversas expresiones decimales.
	Fase II	Reiteración de la explicación sobre intervalos acotados y representación geométrica de los irracionales. Reconocimiento de la representación de decimales exactos, periódicos puros, y no periódicos como números reales.	Refuerzo del conocimiento sobre la representación de los números reales y la inclusión de más detalles sobre sus formas decimales y geométricas.
	Fase III	Identificación de diversas representaciones de los números reales: recta numérica, biyección punto-número, fracciones continuas, y representaciones geométricas. Conexión de conceptos abstractos con situaciones concretas.	Ampliación de la comprensión de las representaciones de los números reales y su visualización intuitiva.
	Fase IV	Conclusión sobre la variedad de representaciones de los números reales: recta numérica, expresiones algebraicas, magnitudes geométricas, notación decimal, radicales, y representación geométrica de irracionales.	Consolidación de una visión amplia y multifacética de las representaciones de los números reales.
	Fase V	Detalle de la representación simbólica, incluyendo notación decimal finita e infinita, radicales, y logaritmación. Observación de la ausencia de representaciones algebraicas en el libro.	Reconocimiento de las limitaciones del material estudiado y comprensión detallada de las representaciones simbólicas y operacionales de los números reales.

Tabla 10.- Modelos mentales de HB3

El estudiante HB3 comienza con el entendimiento de la recta numérica y la aplicación del teorema de Pitágoras para representar números irracionales, iniciando así un proceso de cambio conceptual. En este proceso, se introducen nuevas ideas y representaciones de los números reales. A medida que avanza a través de las fases propuestas, su comprensión se amplía y profundiza al integrar progresivamente diferentes formas de representación y establecer conexiones entre conceptos abstractos y situaciones concretas.

En la primera fase, se familiariza con las representaciones básicas y las herramientas geométricas. En la segunda fase, refuerza y profundiza en estos conocimientos iniciales. Posteriormente, en la tercera fase, amplía su comprensión y comienza a visualizar intuitivamente las relaciones entre las distintas representaciones. Durante la cuarta fase, consolida su conocimiento y adquiere una visión más amplia y detallada de los números reales, incorporando nuevas formas de representación como las fracciones continuas y la biyección punto-número.

En la quinta fase, detalla las representaciones simbólicas y operacionales, lo que refleja el conocimiento adquirido. A través de este proceso, no solo repasa las representaciones iniciales, sino que añade detalles sobre las representaciones geométricas y decimales, estableciendo conexiones entre conceptos y situaciones concretas, mejorando así, su comprensión del tema.

El proceso de aprendizaje de HB3 demuestra un progreso gradual y sistemático en la comprensión de los números reales, desde la familiarización inicial hasta la consolidación y aplicación de conceptos avanzados. Esto permite evidenciar que el estudiante HB3 sigue un patrón de Cambio Conceptual Incremental. Este patrón se caracteriza por la introducción gradual de nuevas ideas y representaciones, así como por la profundización progresiva del conocimiento a medida que se avanza en las fases del proceso de aprendizaje.

Patrón de Cambio Conceptual HB4

Cód.	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
HB4	Fase I	Identificación de las propiedades de los números reales en el libro, específicamente la reflexividad, antisimetría y transitividad. Reconocimiento de la presencia de cotas en intervalos acotados y la relación de completitud.	Comprensión inicial de las propiedades y la relación de completitud en los números reales.
	Fase II	Contraste de las premisas iniciales con las conclusiones del grupo. Discusión sobre la no exclusividad de la densidad, numerabilidad y completitud para los números reales. Mención de las secciones de Dedekind para demostrar la cardinalidad de los números reales.	Ampliación del entendimiento sobre las propiedades de los números reales y reconocimiento de la complejidad de conceptos como la densidad y la cardinalidad.
	Fase III	Presentación de definiciones clave: conmensurabilidad, inconmensurabilidad, densidad y continuidad. Explicación de la inclusión de números racionales e irracionales en las secciones de Dedekind.	Profundización en la comprensión de las propiedades de los números reales, destacando conmensurabilidad e inconmensurabilidad, la densidad y la continuidad.
	Fase IV	Debate sobre la idea de completitud y su relación con la continuidad. Discusión sobre la densidad como representación geométrica.	Refinamiento del entendimiento de la continuidad y completitud, y cómo estas propiedades interrelacionan con la densidad y la no-numerabilidad.
	Fase V	Conclusión de que la continuidad abarca tanto la densidad como la completitud, junto con la no-numerabilidad de los números reales.	Consolidación de una comprensión integrada y coherente de las propiedades de los números reales, destacando su continuidad, densidad y completitud.

Tabla 11.- Modelos mentales de HB4

El proceso HB4 inicia en la primera fase, al mencionar las propiedades iniciales de los números reales, específicamente la reflexividad, antisimetría y transitividad, y reconoce la presencia de intervalos acotados y la relación de completitud. Esto establece una comprensión inicial de las propiedades de los números reales. En la segunda fase, contrasta estos conceptos iniciales con nuevas ideas debatidas en grupo, abordando la no exclusividad de la densidad, numerabilidad y completitud para los números reales. Allí, se mencionan las cortaduras de Dedekind para demostrar la cardinalidad de los números reales. Esto sugiere tanto un proceso incremental como una posible cascada de cambios en la comprensión de conceptos interrelacionados, ampliando el entendimiento sobre las propiedades de los números reales y reconociendo la complejidad de conceptos como la densidad y la cardinalidad.

En la tercera fase, la introducción de nuevas definiciones clave como conmensurabilidad, inconmensurabilidad, densidad y continuidad refleja un proceso incremental de aprendizaje. La explicación de la inclusión de números racionales e irracionales en las cortaduras de Dedekind profundiza en la comprensión de las propiedades de los números reales, destacando la conmensurabilidad y la continuidad. En la cuarta fase, el análisis de la relación entre completitud y continuidad representa una revisión y refinamiento incremental de las ideas, pues el debate sobre la idea de completitud y su relación con la continuidad, junto con la discusión sobre la densidad como representación geométrica, sugiere cambios en la comprensión de las propiedades interrelacionadas.

Por último, en la quinta fase, la conclusión de que la continuidad abarca tanto la densidad como la completitud, junto con la no-numerabilidad de los números reales, evidencia una integración progresiva de los conocimientos. Esta fase subraya la interdependencia de estos conceptos y sugiere cambios, consolidando una comprensión de las propiedades de los números reales, destacando las propiedades de continuidad, densidad y completitud.

El patrón de cambio conceptual seguido por el estudiante HB combina un cambio conceptual incremental, a través del cual se amplían y profundizan progresivamente las ideas, y un cambio conceptual en cascada, donde las nuevas ideas provocan una reestructuración significativa de la comprensión del estudiante. Este enfoque dual permite una comprensión profunda y multifacética de las propiedades de los números reales, integrando de manera coherente y progresiva diversos conceptos y sus conexiones.

Patrón de Cambio Conceptual HB5

Cód.	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
HB5	Fase I	Referencia a la descripción del libro sobre la relación de orden entre los números reales positivos y negativos.	Reconocimiento inicial de la relación de orden en los números reales.
	Fase II	Enfatiza que los números reales positivos son mayores que cero y los negativos son menores que cero. Esta etapa resalta la importancia de la relación de orden para comprender los números reales.	Conclusión de que la relación de orden es una característica fundamental de los números reales, completando el análisis propuesto.

Tabla 12.- Modelos mentales de HB5

El estudiante HB comienza su análisis identificando la relación de orden entre los números reales positivos y negativos, según se detalla en el libro, lo que se puede considerar como su estructura teórica nativa.

Durante la fase I, hace referencia a la descripción del libro sobre esta relación, reconociendo su existencia inicialmente. En la fase II, se enfoca en que los números reales positivos son mayores que cero y los negativos son menores que cero, destacando la importancia de esta relación para entender los números reales. Se concluye que esta relación es una característica fundamental de los números reales, cerrando así el análisis propuesto.

En el proceso de cambio conceptual experimentado por el estudiante sigue un patrón de cambio conceptual dual, pues principalmente se introduce de forma gradual la idea de la relación de orden entre los números reales, partiendo de la descripción inicial del libro y luego ampliando la comprensión de esta relación. A lo largo de las dos fases, se perfecciona la comprensión de la relación de orden entre los números reales positivos y negativos, sin necesidad de modificar drásticamente la estructura teórica nativa.

Validación de la tarea a partir del estudiante HB

En HB1 se cumplió con el primer objetivo al utilizar la revisión histórica y los diagramas de libros de texto para entender las representaciones de los números reales. En cuanto al segundo objetivo, aunque HB1 reconoció ciertos errores en la transposición didáctica, como la confusión sobre la noción de infinito, no se mencionó un uso explícito de la metacognición, por lo que este objetivo se cumplió parcialmente. El tercer objetivo se cumplió plenamente, ya que en HB1 se tomó postura sobre cómo deben presentarse los números reales y cuestionó la didáctica presentada en los libros de texto. Las características cumplidas incluyeron propiciar un rol activo, abordar problemas profesionales, modificar el conocimiento, promover la comprensión de conceptos didácticos y matemáticos, y reconocer características del desarrollo cognitivo/epistémico.

El estudiante HB2 cumplió con el primer objetivo al utilizar la revisión histórica y los diagramas de libros de texto para entender las representaciones de los números reales. En cuanto al segundo objetivo, aunque HB2 reconoció ciertos errores en la transposición didáctica, como la confusión sobre la noción de infinito, no se mencionó un uso explícito de la metacognición, por lo que este objetivo se cumplió parcialmente. El tercer objetivo se cumplió plenamente, ya que HB2 tomó postura sobre cómo deben presentarse los números reales y cuestionó la didáctica presentada en los libros de texto. Las características cumplidas incluyeron propiciar un rol activo, abordar problemas profesionales, modificar el conocimiento, promover la comprensión de conceptos didácticos y matemáticos, y reconocer características del desarrollo cognitivo/epistémico.

El estudiante HB3 también cumplió con los tres objetivos planteados. Reconoció distintos tipos de representaciones y herramientas geométricas para los números reales, abordando así el primer objetivo. En el segundo objetivo, utilizó la metacognición para reconocer la complejidad del aprendizaje de los números reales y profundizó su comprensión a lo largo del proceso. Para el tercer objetivo, HB3 tomó postura sobre cómo enseñar los números reales a través de distintas representaciones y procesos de aprendizaje. Las características cumplidas fueron propiciar un rol activo, abordar problemas profesionales, modificar el conocimiento, promover la comprensión de conceptos didácticos y matemáticos, y reconocer características del desarrollo cognitivo/epistémico.

En el caso del estudiante HB4, todos los objetivos se cumplieron. HB4 mencionó propiedades y características de los números reales y su representación, cumpliendo con el primer objetivo. Utilizó la metacognición para contrastar conceptos iniciales con nuevas ideas y profundizar su comprensión, cumpliendo con el segundo objetivo. Para el tercer objetivo, HB4 tomó postura sobre la relación entre conceptos como completitud, densidad y continuidad en la enseñanza de los números reales. Las características cumplidas incluyeron propiciar un rol activo, abordar problemas profesionales, modificar el conocimiento, promover la comprensión de conceptos didácticos y matemáticos, y reconocer características del desarrollo cognitivo/epistémico.

El estudiante HB5, por otro lado, mostró un cumplimiento parcial de los objetivos y características. Cumplió con el primer objetivo al analizar la relación de orden entre números reales positivos y negativos, basado en representaciones del libro. Sin embargo, no se menciona el uso de la metacognición ni la revisión histórica en la comprensión del tema, por lo que no cumplió con el segundo objetivo. Tampoco cumplió con el tercer objetivo, ya que el enfoque se mantuvo en la relación de orden sin un análisis amplio de los aspectos esenciales de los números reales. Las características cumplidas fueron propiciar un rol activo, modificar el conocimiento y promover la comprensión de conceptos didácticos y matemáticos. Las características no cumplidas incluyen potenciar el desarrollo personal a partir de interacciones, vincular la práctica docente con desarrollos teóricos e investigativos, permitir que surjan nuevos cuestionamientos y reconocer características del desarrollo cognitivo/epistémico en relación con el currículo escolar colombiano.

En conclusión, durante los procesos HB1, HB2, HB3 y HB4 se cumplieron con los objetivos planteados y varias características de una *tarea con sentido profesional en la formación de profesores de matemáticas*.

En HB5, aunque se cumplió parcialmente los objetivos y características, mostró limitaciones en el uso de la metacognición y en tomar postura sobre los aspectos esenciales de la enseñanza de los números reales. Las características no cumplidas, especialmente en el caso de HB5, incluyen la falta de interacción y trabajo grupal, la vinculación con desarrollos teóricos e investigativos, y el surgimiento de nuevos cuestionamientos que potencien la perspectiva profesional.

ESTUDIANTE KD

Patrón de Cambio Conceptual KD1

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
KD1	Fase I	Identifica que el libro presenta a los números reales como un conjunto numérico y establece conexiones con números racionales, irracionales, enteros, naturales, decimales finitos, periódicos y fracciones.	Comprensión inicial de los números reales como un conjunto amplio que incluye diversas categorías de números.
	Fase II	Menciona la introducción de los números reales a través de la combinación de conjuntos numéricos, acompañado de un diagrama ilustrativo. Define un número racional como el cociente de dos enteros.	Clarificación de la definición de números racionales y visualización de la combinación de conjuntos.
	Fase III	Detalla las representaciones específicas de los números reales, incluyendo notación decimal, fraccionaria y gráfica en la recta numérica. Resalta la aparición de números irracionales para medir magnitudes.	Expansión de la comprensión mediante diversas representaciones de los números reales y la importancia de los números irracionales.
	Fase V	Presenta la ubicación de los números enteros en la recta numérica, seguida por los números fraccionarios y culminando con la integración de los números reales al identificar los espacios vacíos. Subraya la comprensión de la escritura decimal y la representación de números radicales.	Consolidación de la comprensión de los números reales y sus subcategorías en la recta numérica y a través de distintas representaciones.

Tabla 13.- Modelos mentales de KD1

En el proceso KD1, el estudiante establece una comprensión inicial amplia de los números reales y sus conexiones con otros conjuntos numéricos, continuando con un cambio conceptual incremental, en la introducción y comprensión de los números reales y sus subcategorías a lo largo de las fases. Esto se puede evidenciar desde la fase I, pues el estudiante identifica que el libro presenta los números reales como un conjunto amplio que incluye diversas categorías de números, como racionales, irracionales, enteros, naturales, decimales, infinitos periódicos y fraccionarios lo cual establece una comprensión inicial de los números reales y sus conexiones con otros conjuntos numéricos. En la fase II, se clarifica la definición de números racionales y se menciona la introducción de los números reales a través de la combinación de conjuntos numéricos, acompañada de un diagrama ilustrativo. Así mismo, define un número racional como el cociente de dos enteros y visualiza la combinación de conjuntos, mostrando un incremento en la comprensión del tema.

En la fase III, detalla cómo los números reales pueden representarse de diferentes maneras, incluyendo notación decimal y fraccionaria, su representación gráfica en la recta numérica y resalta la aparición de números irracionales para medir magnitudes. Esta fase refuerza las múltiples formas de representación, expandiendo la comprensión del estudiante mediante diversas representaciones de los números reales y la importancia de los números irracionales. En la fase V, presenta la ubicación de los números enteros en la recta numérica, seguido por los números fraccionarios y culmina con la integración de los números reales al identificar los espacios vacíos. Subraya la comprensión de la escritura decimal y la representación de números radicales. Esta fase consolida la comprensión de los números reales y sus subcategorías en la recta numérica y a través de distintas representaciones

El patrón de cambio conceptual de estudiante se puede identificar como cambio conceptual incremental y cambio conceptual de construcción dual. El cambio conceptual incremental se evidencia en la introducción gradual de nuevas ideas y la transformación progresiva del conocimiento. Introduce gradualmente conceptos relacionados con los números reales y sus representaciones. Maneja múltiples formas de representación de los números reales (decimal, fraccionaria, gráfica) y comprende la coexistencia de estas representaciones.

Patrón de Cambio Conceptual KD2

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
KD2	Fase I	Reconoce que el libro asigna a los números reales la propiedad de correspondencia biunívoca entre los puntos de la recta y los números reales.	Adquisición de la noción inicial de correspondencia entre los números reales y la recta numérica.
	Fase II	Postula la Propiedad de Completitud como principio de correspondencia, estableciendo que cada punto de la recta corresponde a un número real y viceversa.	Profundización en la comprensión de la correspondencia biunívoca y la noción de completitud de los números reales.
	Fase III	Retoma propiedades fundamentales como la continuidad, el orden y la densidad para comprender el concepto de infinito y la integralidad del conjunto de números reales.	Ampliación del conocimiento sobre propiedades clave de los números reales y su relación con el concepto de infinito.
	Fase IV	Destaca que los números reales cumplen con la Densidad, Continuidad y Completitud. Reconoce que la propiedad de completitud puede generar confusiones, al igual que la continuidad, debido a la correspondencia entre los números reales y la recta.	Identificación de posibles puntos de confusión en la comprensión de las propiedades de los números reales y su relación con la recta numérica.

Tabla 14.- Modelos mentales de KD2

En el proceso KD2, el estudiante adquiere una comprensión inicial de la correspondencia entre los números reales y la recta numérica. Experimenta un proceso de cambio conceptual incremental, donde avanza desde una comprensión básica de la correspondencia entre los números reales y la recta hacia una comprensión más profunda de propiedades como la completitud y la densidad. Además, se observa un replanteamiento de su estructura conceptual inicial a medida que revisa y amplía su comprensión de las propiedades de los números reales.

En la fase I, reconoce que el libro asigna a los números reales la propiedad de correspondencia biunívoca entre los puntos de la recta y los números reales. Esta fase marca la noción inicial de correspondencia entre los números reales y la recta numérica. En la fase II, postula la propiedad de Completitud como principio de correspondencia, estableciendo que cada punto de la recta corresponde a un número real y viceversa. Este avance indica una profundización en la comprensión de la correspondencia biunívoca y la noción de completitud de los números reales.

Durante la fase III, retoma propiedades fundamentales como la continuidad, el orden y la densidad para comprender el concepto de infinito y la integralidad del conjunto de números reales. Esta fase supone una ampliación del conocimiento sobre propiedades clave de los números reales y su relación con el concepto de infinito. En la fase IV, destaca que los números reales cumplen con la Densidad, Continuidad y Completitud, y reconoce que la propiedad de completitud puede generar confusiones, al igual que la continuidad, debido a la correspondencia entre los números reales y la recta. Esta etapa refleja la identificación de posibles puntos de confusión en la comprensión de las propiedades de los números reales y su relación con la recta numérica.

Finalmente, profundiza la comprensión de completitud en los números reales y su relación de correspondencia biunívoca. A medida que amplía su conocimiento sobre propiedades fundamentales de los números reales, como la continuidad y la densidad, logra una comprensión más profunda del concepto de infinito. Reconoce posibles puntos de confusión relacionados con la completitud y la continuidad de los números reales, lo que indica un proceso de revisión y ajuste de su estructura conceptual.

Patrón de Cambio Conceptual KD3

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
KD3	Fase I	Señala continuamente la ambigüedad al presentar los números reales tanto como conjunto numérico como sistema numérico.	No es posible crear un modelo sintético ya que no es posible evidenciar un conflicto conceptual durante la realización de la tarea respecto a estas ideas previas.

Tabla 15.- Modelos mentales de KD3

En KD3, no es posible evidenciar un cambio conceptual pues el estudiante señala continuamente la ambigüedad al presentar los números reales tanto como conjunto como sistema numérico, pero no extiende esta comprensión a las demás estructuras teóricas usadas. No hubo indicios de una revisión o ajuste de su estructura conceptual inicial en función de nueva información o reflexión crítica.

Patrón de Cambio Conceptual KD4

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
KD4	Fase II	Concluye en la segunda fase que el texto escribe fracciones cuando se trata realmente de números fraccionarios	No es posible crear un modelo sintético ya que no es posible evidenciar un conflicto conceptual durante la realización de la tarea respecto a estas ideas previas.

Tabla 16.- Modelos mentales de KD4

En KD4, no es posible evidenciar un cambio conceptual pues el estudiante concluye en la segunda fase que el texto escribe fracciones cuando se trata realmente de números fraccionarios, pero no modela esta estructura teórica nativa frente a las demás representaciones de los números reales.

Patrón de Cambio Conceptual KD5

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
KD5	Fase IV	Nombra en la fase de reajuste que el conjunto de los números reales cuenta con cardinalidad.	No es posible crear un modelo sintético ya que no es posible evidenciar un conflicto conceptual durante la realización de la tarea respecto a estas ideas previas.

Tabla 17.- Modelos mentales de KD5

En KD5 no se evidenció un cambio conceptual, ya que mencionó la cardinalidad del conjunto de números reales, pero no extendió este modelo mental ni surgió conflicto o síntesis con otras representaciones. No hubo indicios de una revisión profunda o ajuste de su estructura conceptual en función de nueva información.

Validación de la tarea a partir del estudiante KD

En los procesos KD1 y KD2 se cumplieron con los objetivos planteados al establecer una comprensión amplia y profunda de los números reales, así como de sus conexiones con otros conjuntos numéricos, a través de un proceso de cambio conceptual incremental y de construcción dual. En ambos procesos se utilizaron múltiples representaciones y una reflexión crítica para avanzar en su comprensión y tomar postura sobre la presentación de los números reales en el libro. En cuanto a las características de una *tarea con sentido profesional en la formación de profesores de matemáticas*, propiciaron un rol activo, abordaron problemas profesionales, modificaron su conocimiento y promovieron la comprensión de conceptos didácticos y matemáticos.

Por otro lado, en KD3, KD4 y KD5 no se cumplieron plenamente con los objetivos ni con las características de una *tarea con sentido profesional en la formación de profesores de matemáticas*. No se evidenció un cambio conceptual significativo en sus procesos de comprensión de los números reales, ni mostraron una comprensión profunda de las propiedades y relaciones de este conjunto numérico. Además, no se tomó postura sobre aspectos esenciales de la enseñanza de los números reales ni se evidencia que se ha propiciado un rol activo en su aprendizaje.

ESTUDIANTE JR

Patrón de Cambio Conceptual JR1

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
JR1	Fase I	Destaca que los números reales se introducen a través de la teoría de conjuntos, utilizando diagramas de Venn para visualizar las relaciones entre los diversos conjuntos numéricos.	Inicio del proceso de comprensión de los números reales mediante la teoría de conjuntos y la visualización de relaciones entre conjuntos numéricos.
	Fase II	Mención sobre el tema en cuestión no ha sido enseñado desde 1998, lo que plantea la interrogante sobre la viabilidad de utilizar la teoría de conjuntos para abordar este tema.	Reconocimiento de la falta de familiaridad con el tema y cuestionamiento sobre la idoneidad del enfoque pedagógico basado en la teoría de conjuntos.

	Fase IV	Destaca, a través de una observación, la importancia de diferenciar la relación entre los Sistemas de Numeración	Reconocimiento de la necesidad de comprender y diferenciar los diferentes sistemas de numeración para un mejor entendimiento de los números reales.

Tabla 18.- Modelos mentales de JR1

El estudiante JR comienza su proceso de comprensión de los números reales a través de la teoría de conjuntos, lo que indica un primer paso hacia la asimilación de conceptos básicos. Durante este proceso, sigue un patrón de cambio conceptual incremental, desde una introducción básica de los números reales mediante la teoría de conjuntos, hacia una comprensión más profunda que incluye reflexión crítica y diferenciación de conceptos relacionados con los sistemas de numeración.

En la fase I, destaca que los números reales se introducen a través de la teoría de conjuntos, utilizando diagramas de Venn para visualizar las relaciones entre los diversos conjuntos numéricos. Esto marca el inicio del proceso de comprensión de los números reales mediante la teoría de conjuntos y las relaciones entre conjuntos numéricos. En la fase II, menciona que el tema en cuestión no ha sido enseñado desde 1998, lo que plantea la interrogante sobre la viabilidad de utilizar la teoría de conjuntos y se cuestiona la idoneidad del enfoque pedagógico basado en la teoría de conjuntos. En la fase IV, destaca a través de una observación, la importancia de comprender y diferenciar la relación entre los sistemas de numeración, para un mejor entendimiento de los números reales.

El análisis del proceso de aprendizaje evidencia una reflexión sobre el método de enseñanza utilizado, lo que sugiere una adaptación gradual del enfoque pedagógico. El avance en el proceso se demuestra al reconocer la importancia de diferenciar los sistemas de numeración, indicando una comprensión más profunda del tema.

Patrón de Cambio Conceptual JR2

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
JR2	Fase I	Resalta la relación de orden entre los números reales.	Reconocimiento inicial de la relación de orden como una propiedad fundamental de los números reales.
	Fase II	Menciona la relación de orden desde la recta numérica y reconoce las relaciones de orden y completitud.	Profundización en la comprensión de la relación de orden, relacionándola con la noción de completitud y reconociendo su importancia en la estructura de los números reales.
	Fase III	Retoma la completitud de los números reales, destacando que esta incluye tanto números racionales como irracionales.	Consolidación del entendimiento sobre la completitud de los números reales y su composición que abarca tanto los números racionales como los irracionales.

Tabla 19.- Modelos mentales de JR2

El estudiante JR comienza reconociendo una propiedad básica de los números reales, la relación de orden, lo que indica un primer paso hacia la comprensión del tema. En la fase I, resalta la relación de orden entre los números reales, marcando el reconocimiento inicial de esta relación como una propiedad fundamental de los números reales. En la fase II, menciona la relación de orden desde la recta numérica y reconoce las relaciones de orden y completitud, profundizando así en la comprensión de la relación de orden y relacionándola con la noción de completitud, subrayando la importancia de estas propiedades en la estructura de los números reales. Durante la fase III, retoma la completitud de los números reales, destacando que esta incluye tanto números racionales como irracionales. Este momento representa la consolidación del entendimiento sobre la completitud de los números reales y su composición que abarca tanto los números racionales como los irracionales.

El proceso JR2 muestra progreso al determinar la relación de orden y la noción de completitud y comprender su relevancia desde la perspectiva de la representación gráfica en la recta numérica. Se alcanza una comprensión más profunda al reconocer que la completitud de los números reales abarca tanto los números racionales como los irracionales, lo que demuestra una ampliación del conocimiento sobre la estructura del conjunto de los números reales.

El patrón de cambio conceptual que sigue el estudiante parece alinearse con el cambio conceptual incremental, ya que el avance muestra el reconocimiento de la relación de orden y una comprensión más profunda de la completitud de los números reales. En cada fase, amplía su comprensión, desde entender la relación de orden hasta relacionarla con la completitud de los números reales, construyendo significados y aplicaciones más complejas de los conceptos aprendidos.

Patrón de Cambio Conceptual JR3

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
JR3	Fase I	Incorpora los numerales, representaciones geométricas y la recta numérica para ilustrar los números reales.	Reconocimiento inicial de diferentes representaciones de los números reales, incluyendo tanto aspectos simbólicos como geométricos.
	Fase III	Destaca la importancia de representaciones simbólicas y en la recta numérica, e introdujo otras representaciones como la biyección punto-número y las fracciones continuas, resaltando también las representaciones geométricas.	Ampliación del entendimiento de las representaciones de los números reales, incluyendo tanto representaciones simbólicas como geométricas, así como la introducción de nuevas representaciones como la biyección punto-número y las fracciones continuas.

Tabla 20.- Modelos mentales de JR3

El proceso de aprendizaje del estudiante en relación con la comprensión de los números reales revela un enfoque que combina tanto el cambio conceptual incremental como el cambio conceptual de construcción dual. En la fase I, comienza con un reconocimiento inicial de diferentes representaciones de los números reales, lo que indica un proceso de avance, al introducir gradualmente nuevas ideas.

Sin embargo, es en la fase III donde este proceso se intensifica. Aquí, no solo amplía su entendimiento de las representaciones de los números reales, incorporando tanto aspectos simbólicos como geométricos, sino que también se introducen nuevas representaciones como la biyección punto-número y las fracciones continuas. Este paso hacia la incorporación de múltiples representaciones sugiere una construcción de conceptos, donde el estudiante maneja explicaciones contrapuestas sobre la representación de los números reales.

La ausencia de información sobre el proceso en la fase II dificulta determinar con precisión el patrón de cambio conceptual seguido por el estudiante en esa etapa específica. Sin embargo, la introducción de nuevas representaciones y múltiples explicaciones indican que el proceso de aprendizaje puede implicar tanto un cambio incremental como la construcción de conceptos duales en diferentes momentos.

Patrón de Cambio Conceptual JR4

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético

JR4	Fase II	Nombra la densidad y hace referencia a la biyección. También debate sobre si la densidad y la completitud son diferentes. Además, define la densidad como: los números reales son infinitos y continuos en la recta numérica.	Comienza a explorar el concepto de densidad en relación con los números reales y discute su relación con la completitud. También proporciona una definición inicial de densidad en términos de infinitud y continuidad en la recta numérica.
	Fase IV	Vuelve a mencionar la densidad.	Reflexiona sobre el concepto de densidad, lo que indica una persistencia en la exploración de este tema.

Tabla 21.- Modelos mentales de JR4

El estudiante JR comienza su análisis reconociendo el concepto de densidad y su exploración a lo largo de las fases proporcionadas, lo cual revela un enfoque consistente con el cambio conceptual incremental pues, en la fase II, menciona el concepto de densidad y discute su relación con la completitud. Además, proporciona una definición inicial de densidad en términos de infinitud y continuidad en la recta numérica.

Este proceso de aprendizaje continúa en la fase IV, donde vuelve a mencionar la densidad y sigue reflexionando sobre este concepto. Esta persistencia en la exploración de la densidad indica una progresión en la comprensión de este concepto, lo que sugiere un proceso de aprendizaje incremental. Inicialmente, comienza explorando este concepto y discutiendo su relación con la completitud, proporcionando una definición inicial. Posteriormente, continúa reflexionando sobre la densidad en fases posteriores, lo que indica una evolución en su entendimiento.

Así mismo, refleja una estrategia efectiva para construir conocimiento de manera sólida y coherente, ya que amplía y profundiza su comprensión en los conceptos relacionados con los números reales, desde la densidad hasta la completitud del conjunto.

Patrón de Cambio Conceptual JR5

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
JR5	Fase II	Reconoce que la cardinalidad de los números reales sería $\aleph_0$	Introducción del concepto de cardinalidad en relación con los números reales, identificando $\aleph_0$ como su cardinalidad.
	Fase IV	Menciona que la cardinalidad es el número del conjunto	Profundización en la comprensión del concepto de cardinalidad al asociarlo con la cantidad de elementos en un conjunto.

Tabla 22.- Modelos mentales de JR5

El proceso JR5 en relación con el concepto de cardinalidad y su evolución a lo largo de las fases proporcionadas muestra un enfoque consistente con el cambio conceptual incremental. En la fase II, comienza a familiarizarse con el concepto al mencionar que la cardinalidad de los números reales sería $\aleph_0$, identificando así la cardinalidad del conjunto.

Este proceso de aprendizaje continúa en la fase IV, donde profundiza en su comprensión del concepto de cardinalidad al asociarlo con la cantidad de elementos en un conjunto. Al mencionar que la cardinalidad es el número del conjunto, el estudiante demuestra una mayor claridad de este concepto.

A lo largo de las fases, se observa un avance gradual en la comprensión del concepto de cardinalidad por parte del estudiante. Inicialmente, el estudiante identifica $\aleph_0$ como la cardinalidad de los números reales.

En fases posteriores, profundiza en su comprensión al asociar la cardinalidad con la cantidad de elementos en un conjunto.

Este proceso de aprendizaje refleja un enfoque efectivo para construir conocimiento de manera gradual y sólida. Por medio del cambio conceptual incremental, amplía y profundiza su comprensión de los conceptos relacionados con la cardinalidad y los números reales. Este enfoque de aprendizaje continuo y reflexivo le permite al estudiante integrar nuevas ideas y desarrollar una comprensión más completa y precisa del tema.

Patrón de Cambio Conceptual JR6

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
JR6	Fase I	Resalta la notación científica.	Introducción de la importancia de la notación científica en su comprensión de los números.
	Fase II	Menciona la representación de números periódicos.	Comprensión para incluir los números periódicos, añadiendo que la notación decimal también es una forma de representación.

Tabla 23.- Modelos mentales de JR6

El estudiante comienza su análisis, relacionando las diversas notaciones y representaciones de números, mostrando un enfoque coherente con el cambio conceptual incremental. En la fase I, enfatiza la importancia de la notación científica para la comprensión de los números, lo que indica un primer paso en la exploración de diferentes formas de representación numérica.

Este proceso evoluciona en la fase II, donde expande su comprensión al mencionar las representaciones de números periódicos y también reconoce que la notación decimal es una forma de representación. Esta ampliación de la comprensión indica una progresión en la exploración y comprensión de las diferentes formas de representar números.

A lo largo de las fases, se observa una progresión gradual en la comprensión de las diversas notaciones y representaciones de números por parte del estudiante. Comienza con un enfoque en la notación científica y luego añade las representaciones de números periódicos y decimales. Esta progresión refleja un proceso de aprendizaje continuo y reflexivo, donde construye sobre su conocimiento previo de manera coherente, integrando nuevas formas de representación numérica a medida que avanza.

Patrón de Cambio Conceptual JR7

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
JR7	Fase II	Lo de los sistemas, que viene siendo digamos, las operaciones	No es posible crear un modelo sintético ya que no es posible evidenciar un conflicto conceptual durante la realización de la tarea respecto a estas ideas previas.
		En las propiedades de las operaciones	No es posible crear un modelo sintético ya que no es posible evidenciar un conflicto conceptual durante la realización de la tarea respecto a estas ideas previas.

Tabla 24.- Modelos mentales de JR7

En la fase II debate sobre los sistemas numéricos, los cuales relacionó con las propiedades de las operaciones entre números reales, pero no profundizó in generó algún modelo mental sintético.

Patrón de Cambio Conceptual JR8

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
JR8	Fase I	El valor absoluto como características importantes que se abordan	No es posible crear un modelo sintético ya que no es posible evidenciar un conflicto conceptual durante la realización de la tarea respecto a estas ideas previas.

Tabla 25.- Modelos mentales de JR8

En la primera fase nombra el valor absoluto como una característica importante, abordada en el libro, pero no realiza conclusiones ni lo añade a ninguna concepción.

Patrón de Cambio Conceptual JR9

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
JR9	Fase I	Reconoce que el libro comienza con una introducción a los números racionales, definiéndolos y mostrando cómo se ubican en la recta numérica	No es posible crear un modelo sintético ya que no es posible evidenciar un conflicto conceptual durante la realización de la tarea respecto a estas ideas previas.

Tabla 26.- Modelos mentales de JR9

En la primera fase reconoce que el libro comienza con una introducción a los números racionales, definiéndolos y mostrando cómo se ubican en la recta numérica. Esta idea no sufre ningún cambio durante la realización de la tarea.

Patrón de Cambio Conceptual JR10

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
JR10	Fase III	Conmensurabilidad e inconmensurabilidad: Evolución histórica hacia la creación del conjunto de los números reales.	No es posible crear un modelo sintético ya que no es posible evidenciar un conflicto conceptual durante la realización de la tarea respecto a estas ideas previas.
	Fase III	Continuidad: No hay espacios vacíos entre los números reales, lo que los hace continuos. Destaca la completitud de los números reales. Resaltan los números irracionales en Dedekind.	

Tabla 27.- Modelos mentales de JR10

En la tercera fase, define la conmensurabilidad e inconmensurabilidad desde la evolución histórica hacia la creación del conjunto de los números reales, así mismo, define la continuidad como que no hay espacios vacíos entre los números reales, lo que los hace continuos. Esta idea no sufre ningún cambio conceptual.

Validación de la tarea a partir del estudiante JR

En los procesos JR1 y JR2, el estudiante muestra un cumplimiento efectivo y pleno de los objetivos respectivos. En JR1, demuestra un cambio conceptual incremental hacia una comprensión más profunda de los números reales, mientras que en JR2, se evidencia un cambio similar en la comprensión de la relación de orden y la completitud de los números reales. En ambos casos, se destacan características como propiciar un rol activo y promover la comprensión de conceptos didácticos y matemáticos.

Sin embargo, el proceso JR3 muestra un cumplimiento parcial de los objetivos, ya que, aunque hay una introducción gradual de nuevas ideas sobre los números reales, la falta de información en la fase II dificulta el seguimiento del cambio conceptual. A pesar de ello, en la fase III se observa una construcción de conceptos significativa, indicando un avance en la comprensión del estudiante.

Por otro lado, en JR4 y JR6, el estudiante demuestra un cumplimiento pleno de los objetivos, pues en ambos casos, se evidencia un cambio conceptual incremental en la comprensión de los números reales, destacando la persistencia en la exploración y reflexión sobre los conceptos presentados.

En contraste, en JR5, JR7, JR8, JR9 y JR10, el cumplimiento de los objetivos es parcial. Aunque hay una progresión gradual en la comprensión de diversos conceptos matemáticos, la falta de profundización en ciertas fases limita el alcance del cambio conceptual. A pesar de ello, se observa un avance en la comprensión del estudiante en etapas posteriores, lo que sugiere un proceso de aprendizaje continuo.

ESTUDIANTE JV

Patrón de Cambio Conceptual JV1

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
JV1	Fase I	Establece las relaciones de contención y no contención para introducir los números como la amalgama de los conjuntos de números racionales e irracionales.	Enfatiza que los números reales surgen de las interrelaciones entre los conjuntos numéricos, abordando la conexión entre números naturales, enteros, racionales (decimales exactos y periódicos) y números irracionales (decimales infinitos no periódicos).
	Fase II	Introduce el sistema de números reales y se comienzan a presentar los conjuntos.	Ofrece una breve explicación sobre los números racionales e irracionales, la unión de conjuntos y la escritura por comprensión.
	Fase III	Reitera que los números reales se introducen a través de los conjuntos numéricos.	Reafirma la idea de que los números reales se entienden a través de los conjuntos numéricos.
	Fase V	Menciona la complejidad de representar los números reales mediante conjuntos.	Evidencia diferencias de magnitud entre los conjuntos numéricos, resaltando la complejidad en su representación.

Tabla 28.- Modelos mentales de JV1

El proceso de aprendizaje del estudiante en relación con la comprensión de los números reales muestra un enfoque coherente con el cambio conceptual incremental. Desde la fase I, establece las relaciones de contención y no contención para introducir los números como la amalgama de los conjuntos de números racionales e irracionales, enfatizando la conexión entre diferentes conjuntos numéricos.

Este proceso evoluciona en las fases posteriores. En la fase II, introduce el sistema de números reales y comienza a presentar los conjuntos, ofreciendo una explicación sobre los números racionales e irracionales y la unión de conjuntos. En la fase III, se reafirma la idea de que los números reales se entienden a través de los conjuntos numéricos. La progresión continúa en la fase V, donde menciona la complejidad de representar los números reales mediante conjuntos, resaltando las diferencias de magnitud entre los conjuntos numéricos y la complejidad en su representación.

A lo largo de las fases, se observa una evolución progresiva en la comprensión de los números reales por parte del estudiante. Comienza con la idea básica de contención y no contención, y gradualmente añade detalles sobre la naturaleza de los números racionales e irracionales, así como la complejidad de su representación. Esta construcción gradual del conocimiento refleja un proceso de aprendizaje caracterizado por el cambio conceptual incremental.

Patrón de Cambio Conceptual JV2

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
JV2	Fase I	Aborda las operaciones aritméticas en los números reales, incluyendo la suma, resta, multiplicación y división.	Se destaca que las propiedades de adición y multiplicación en el conjunto de los números reales cumplen con las mismas características que en el conjunto de los números.
	Fase II	Profundiza en propiedades como reflexividad, antisimetría y transitividad.	Se añaden detalles sobre las propiedades de las relaciones, mostrando una comprensión más avanzada de las estructuras subyacentes en los números reales.
	Fase V	Reitera que las propiedades de la relación son reflexivas, antisimétricas y transitivas.	No se realiza modificación alguna en las propiedades mencionadas, lo que sugiere una consolidación de estos conceptos.

Tabla 29.- Modelos mentales de JV2

El estudiante comienza su análisis, relacionando las operaciones aritméticas y las propiedades de las relaciones en los números reales, mostrando un enfoque consistente con el cambio conceptual incremental.

Desde la fase I, aborda las operaciones básicas como la suma, resta, multiplicación y división en los números reales, destacando que las propiedades de adición y multiplicación en este conjunto cumplen con las mismas características que en el conjunto de los números.

En la fase II, profundiza en propiedades más abstractas como la reflexividad, antisimetría y transitividad, mostrando una comprensión más avanzada de las estructuras subyacentes en los números reales.

La progresión continúa en la fase V, donde reitera las propiedades de la relación como reflexivas, antisimétricas y transitivas, sin realizar modificaciones adicionales. Esto sugiere una consolidación de estos conceptos, donde el estudiante afirma y fortalece su comprensión sin necesidad de cambios adicionales.

A lo largo de las fases, se observa un proceso gradual y progresivo en la comprensión de los números reales por parte del estudiante. Comienza con operaciones aritméticas básicas y avanza hacia propiedades más abstractas de las relaciones, consolidando su conocimiento en las fases posteriores.

Patrón de Cambio Conceptual JV3

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
JV3	Fase I	Aborda la representación de los números reales en la recta numérica.	No se realiza conclusión.

	Fase II	Trata nuevamente las representaciones en la recta numérica, incluyendo la perspectiva geométrica mediante el Teorema de Pitágoras y la representación simbólica.	Surge la pregunta sobre la necesidad de la notación científica.
	Fase III	Explora diversas representaciones, como la recta numérica, la biyección punto-número y las fracciones continuas.	Se enfoca en la biyectividad de la correspondencia números-puntos y la continuidad. Además, aborda el sistema de representación gráfica, la notación decimal, la notación operatoria habitual, la notación decimal y fraccionaria, así como las expresiones algebraicas y analíticas.
	Fase IV	Discute la representación geométrica de la recta numérica.	Se destaca que los subconjuntos de los números reales se emplean para su representación numérica y se menciona la representación simbólica y las expresiones algebraicas.

Tabla 30.- Modelos mentales de JV3

El proceso de aprendizaje del estudiante en relación con las representaciones de los números reales muestra un enfoque coherente con el cambio conceptual incremental. Desde la fase I, aborda la representación de los números reales en la recta numérica, lo que constituye un punto de partida para su comprensión.

Este proceso evoluciona en las fases posteriores. En la fase II, trata nuevamente las representaciones en la recta numérica, agregando una perspectiva geométrica mediante el Teorema de Pitágoras y la representación simbólica, y plantea la pregunta sobre la necesidad de la notación científica. En la fase III explora diversas representaciones, como la biyección punto-número y las fracciones continuas, y se enfoca en la biyectividad de la correspondencia números-puntos y la continuidad, además de abordar diferentes sistemas de representación gráfica y notacional.

La progresión continúa en la fase IV, donde discute la representación geométrica de la recta numérica y destaca que los subconjuntos de los números reales se emplean para su representación numérica, mencionando también la representación simbólica y las expresiones algebraicas.

A lo largo de las fases, se observa un proceso continuo y progresivo en la comprensión del estudiante, sobre las representaciones de los números reales. Comienza con conceptos básicos y se adentra en diversas formas de representación, lo que caracteriza un enfoque incremental. La introducción y exploración de nuevas representaciones, así como la discusión sobre su necesidad y utilidad, indican un proceso de enriquecimiento conceptual más que de reemplazo.

Patrón de Cambio Conceptual JV4

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
JV4	Fase I	Analiza la relación de orden en los números reales, diferenciando entre valores positivos y negativos, y clasificando las desigualdades entre ellos. Además, estudia la representación geométrica mediante intervalos acotados (segmentos) y no acotados (semirrecta y recta), utilizando la relación de orden para	Comprensión de la clasificación básica de los números reales y su representación geométrica inicial.

		definir un subconjunto de puntos	
	Fase II	Aborda las relaciones de orden como la completitud, los intervalos acotados y los segmentos, afirmando la existencia de la completitud.	Comprensión de las relaciones de orden para incluir la noción de completitud en los números reales.
	Fase III	Señala que la completitud abarca tanto los números racionales como los irracionales, conformando un conjunto completo. Destaca la densidad de los números reales, afirmando que son infinitos y continuos en la recta numérica, y menciona la evolución histórica hacia la creación del conjunto de los números reales en cuanto a conmensurabilidad e inconmensurabilidad.	Integración de las nociones de densidad y continuidad, entendiendo que los números reales forman un conjunto continuo y completo.
	Fase IV	Profundiza en relaciones de igualdad, especificando que la completitud implica que entre dos números existe otro en medio. Explora la igualdad en el contexto de más de dos números, discutiendo las implicaciones cuando un tercer número (X) se encuentra entre dos números (A y B).	Comprensión de la completitud y las relaciones de igualdad, considerando escenarios más complejos.
	Fase V	Delibera acerca de la completitud a través de las relaciones de orden, fundamentándose en la desigualdad.	Comprensión de la completitud y la relación de orden en los números reales, aplicando estos conceptos a situaciones de desigualdad.

Tabla 31.- Modelos mentales de JV4

Este proceso sigue un patrón de cambio conceptual incremental, pues inicia con la relación de orden y su representación geométrica, la cual se amplía gradualmente para incluir conceptos más complejos como completitud, densidad y continuidad, integrándolos en una comprensión más profunda de los números reales.

Con respecto a la comprensión de las relaciones de orden en los números reales, muestra un enfoque coherente con el cambio conceptual incremental. Desde la fase I, analiza la relación de orden, diferenciando entre valores positivos y negativos, y clasificando las desigualdades entre ellos, además de estudiar su representación geométrica mediante intervalos acotados y no acotados.

Posteriormente, el proceso evoluciona en las fases siguientes. En la fase II, aborda las relaciones de orden como la completitud y los intervalos acotados y los segmentos, afirmando la existencia de la completitud y profundizando en la comprensión de estas relaciones.

La progresión continúa en la fase III, donde señala que la completitud abarca tanto los números racionales como los irracionales, destacando la densidad de los números reales y mencionando la evolución histórica hacia la creación del conjunto de los números reales en cuanto a conmensurabilidad e inconmensurabilidad.

En la fase IV, profundiza en relaciones de igualdad, especificando que la completitud implica que entre dos números existe otro en medio y explora la igualdad en el contexto de más de dos números, discutiendo las implicaciones cuando un tercer número se encuentra entre dos números.

El proceso culmina en la fase V, donde delibera acerca de la completitud a través de las relaciones de orden, fundamentándose en la desigualdad y aplicando estos conceptos a situaciones más complejas.

Patrón de Cambio Conceptual JV5

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
JV5	Fase I	Analiza la relación de orden entre los números reales, diferenciando entre los números positivos y negativos, y clasificando las desigualdades entre ellos. Se introducen las propiedades inherentes a esta relación.	Clasificación básica de los números reales y las propiedades fundamentales de las desigualdades.
	Fase II	Profundiza en las relaciones de orden, destacando su interpretación como desigualdades.	Comprensión más profunda de las relaciones de orden y cómo estas se manifiestan como desigualdades entre los números reales.
	Fase III	Se centra en la biyectividad de la correspondencia entre números y puntos en la recta numérica, así como en la noción de continuidad lineal.	Comprensión de cómo cada número real se corresponde con un punto en la recta numérica y cómo la continuidad lineal proporciona lógica y propiedades al conjunto numérico.
	Fase IV	Establece una relación entre las propiedades previamente mencionadas y las relaciones de igualdad.	Integración de las propiedades de las desigualdades y la continuidad con las relaciones de igualdad, consolidando su comprensión de la estructura y propiedades de los números reales.

Tabla 32.- Modelos mentales de JV5

El proceso de aprendizaje del estudiante en cuanto a las relaciones de orden entre los números reales muestra un enfoque coherente con el cambio conceptual incremental. Desde la fase I, analiza la relación de orden, diferenciando entre números positivos y negativos, y clasificando las desigualdades entre ellos, introduciendo además las propiedades inherentes a esta relación.

Este proceso evoluciona en las fases posteriores. En la fase II, profundiza en las relaciones de orden, destacando su interpretación como desigualdades, lo que muestra una comprensión más profunda de cómo estas se manifiestan en los números reales.

La progresión continúa en la fase III, donde el estudiante se centra en la biyectividad de la correspondencia entre números y puntos en la recta numérica, así como en la noción de continuidad lineal, lo que amplía su comprensión sobre la representación geométrica de los números reales. En la fase IV, establece una relación entre las propiedades previamente mencionadas y las relaciones de igualdad, integrando las propiedades de las desigualdades y la continuidad con las relaciones de igualdad, consolidando así su comprensión de la estructura y propiedades de los números reales.

Patrón de Cambio Conceptual JV6

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
JV6	Fase I	Resalta la importancia de precisar la representación en fracciones continuas y de señalar diferencias fundamentales con los números racionales para una comprensión	Identifica la relevancia de las fracciones continuas y establece una distinción clara entre estas y los números racionales, lo cual enriquece su

		más profunda.	comprensión de los números reales.
	Fase II	Menciona la ausencia de elementos como la cardinalidad y las fracciones continuas.	Critica la falta de discusión sobre cardinalidad y fracciones continuas, mostrando una consciencia crítica de los elementos necesarios para una comprensión completa.
	Fase V	Subraya la falta de cardinalidad y fracciones continuas, aspectos acordados previamente.	Reafirma su crítica sobre la omisión de cardinalidad y fracciones continuas, mostrando consistencia en su evaluación y comprensión del tema.

Tabla 33.- Modelos mentales de JV6

El estudiante comienza su análisis en relación con las fracciones continuas y los números racionales, donde muestra un patrón de cambio conceptual de construcción dual. Desde la fase I, resalta la importancia de precisar la representación en fracciones continuas y señala las diferencias fundamentales con los números racionales para una comprensión más profunda.

En la fase II, menciona la ausencia de elementos como la cardinalidad y las fracciones continuas, mostrando una consciencia crítica de los elementos necesarios para una comprensión completa. Esta crítica persiste en la fase V, donde el estudiante subraya nuevamente la falta de cardinalidad y fracciones continuas, reafirmando su evaluación y comprensión del tema.

A lo largo de las fases, muestra una capacidad para manejar múltiples formas de razonamiento y crítica, incluso cuando algunos elementos importantes no están presentes en el material de estudio. Esta capacidad sugiere que el estudiante mantiene dos niveles de comprensión: uno basado en la información disponible y otro basado en su conocimiento previo y la crítica constructiva de lo que falta.

Este proceso de aprendizaje caracterizado por una construcción dual del conocimiento permite al estudiante manejar diferentes niveles de comprensión y razonamiento, incluso en presencia de información incompleta. La capacidad para criticar y evaluar la falta de elementos clave a lo largo de las fases, sugiere una profundidad de pensamiento y una capacidad crítica que son esenciales para el cambio conceptual en matemáticas y otros campos.

Validación de la tarea a partir del estudiante JV

En JV1, JV2, JV3, JV4, JV5 y JV6 se observa un cumplimiento variado de los objetivos planteados y de las características de una *tarea con sentido profesional en la formación de profesores de matemáticas*. En JV1, JV2, JV3 y JV4, el estudiante logra reconocer distintas representaciones de los números reales y toma postura sobre su enseñanza, lo que indica un cumplimiento satisfactorio de los objetivos. Además, demostró habilidades como modificar su conocimiento y promover la comprensión de conceptos didácticos y matemáticos. En estos procesos también se evidenció las características del desarrollo cognitivo/epistémico en relación con el currículo escolar colombiano.

Por otro lado, JV5 y JV6 mostraron un cumplimiento parcial de los objetivos. Si bien ambos estudiantes abordaron aspectos de las representaciones de los números reales, JV5 se centró únicamente en la relación de orden entre números positivos y negativos, mientras que JV6 analizó específicamente las fracciones continuas y los números racionales. Sin embargo, en ninguno de los dos se mencionó una revisión histórica en su comprensión del tema, lo que limitó su cumplimiento del segundo objetivo. Además, JV5 y

JV6 no discutieron ampliamente sobre cómo deben presentarse los números reales ni cuestionaron la didáctica presentada en los libros de texto, lo que indica un cumplimiento parcial del tercer objetivo.

En conclusión, mientras que en JV1, JV2, JV3 y JV4 se demostró un cumplimiento más completo de los objetivos y características de una *tarea con sentido profesional en la formación de profesores de matemáticas*, JV5 y JV6 mostraron un cumplimiento parcial, especialmente en relación con el uso de la metacognición y la reflexión sobre la enseñanza de los números reales. Sin embargo, se evidencia un compromiso con el análisis y la comprensión de los conceptos matemáticos, lo que sugiere un progreso en su desarrollo profesional como futuro profesor de matemáticas.

ESTUDIANTE LC

Patrón de Cambio Conceptual LC1

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
LC1	Fase I	Se introduce al estudiante en el concepto de los números reales como un conjunto numérico esencial en operaciones algebraicas.	Comprende que los números reales abarcan tanto números racionales como irracionales, estableciendo una base inicial sobre la naturaleza y la importancia del conjunto de números reales en matemáticas
	Fase II	Se explora la unión de dos conjuntos numéricos y su relación con otros conjuntos en función de los elementos que comparten.	Se familiariza con la estructura del conjunto de números reales, comprendiendo cómo los números racionales e irracionales se unen para formar este conjunto. Esto refuerza su comprensión de la composición y las relaciones internas entre diferentes subconjuntos numéricos.
	Fase IV	Se discute la cardinalidad del conjunto de números reales.	Aprende sobre la magnitud del conjunto de números reales en comparación con otros conjuntos numéricos, adquiriendo una noción avanzada sobre la "tamaño" del conjunto de números reales en términos de cardinalidad.
	Fase V	Se profundiza en las relaciones mencionadas con otros conjuntos numéricos, considerando los elementos compartidos.	Consolida su comprensión sobre la distinción entre números reales racionales e irracionales, y cómo estos se relacionan con otros conjuntos numéricos. Esto proporciona una visión más completa y detallada de las interrelaciones y las propiedades de los conjuntos numéricos.

Tabla 34.- Modelos mentales de LC1

El proceso LC1 sigue un patrón de cambio conceptual incremental, ya que, a lo largo de las diferentes fases, va desarrollando gradualmente su comprensión sobre los números reales y su importancia en las operaciones algebraicas.

Desde la fase I, comprende que los números reales incluyen tanto números racionales como irracionales, lo que establece una base inicial sobre la naturaleza y la importancia del conjunto de números reales en matemáticas. Por lo que en la fase II se familiariza con la estructura del conjunto de números reales y comprende cómo los números racionales e irracionales se unen para formar este conjunto. Esto refuerza su comprensión de la composición y las relaciones internas entre diferentes subconjuntos numéricos.

Para la fase IV, aprende sobre la cardinalidad del conjunto de números reales, lo que le permite entender la magnitud de este conjunto en comparación con otros conjuntos numéricos, por tanto, esta adquisición de nociones avanzadas amplía su comprensión del tema.

Finalmente, en la fase V, profundiza en las relaciones del conjunto de números reales con otros conjuntos numéricos, consolidando su comprensión sobre la distinción entre números reales racionales e irracionales y cómo se relacionan con otros conjuntos.

Patrón de Cambio Conceptual LC2

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
LC2	Fase I	Observa que la presentación de los números reales como un sistema numérico.	Se enfatizan las operaciones y conceptos matemáticos asociados.
	Fase II	Comprende que el conjunto de números reales no se define como un sistema únicamente por sus elementos, sino por las operaciones que pueden realizarse con ellos.	Reconoce la importancia de un esquema gráfico para representar los números reales como un sistema numérico, lo que sugiere una necesidad de visualización para clarificar esta ambigüedad.

Tabla 35.- Modelos mentales de LC2

El proceso LC2 se caracteriza por la coexistencia de dos enfoques distintos en la comprensión del concepto de números reales. En primer lugar, el reconocimiento de la ambigüedad inicial indica una conciencia crítica, sobre la presentación de los números reales como un sistema numérico. En segundo lugar, la diferenciación entre conjunto y sistema demuestra una comprensión más profunda de la naturaleza estructural de los números reales.

En la fase I, observa que la presentación de los números reales como un sistema numérico no es explícita, lo que genera ambigüedad en su comprensión inicial. Esta observación resalta la importancia de una presentación clara y estructurada de los conceptos matemáticos para facilitar su comprensión.

En la fase II, reconoce que el conjunto de números reales no se define únicamente por sus elementos, sino por las operaciones que pueden realizarse con ellos. Esta diferenciación entre conjunto y sistema muestra una profundización, reconociendo que la naturaleza de los números reales va más allá de su existencia como elementos individuales.

Además, se destaca la importancia de la representación gráfica para clarificar esta ambigüedad y facilitar la comprensión del sistema numérico de los números reales. Este enfoque dual, que combina tanto la comprensión abstracta de las operaciones y conceptos matemáticos como la visualización a través de representaciones gráficas, permite al estudiante tener un concepto más completo y multifacético del tema.

Patrón de Cambio Conceptual LC3

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
LC3	Fase I	Analiza las propiedades de los números reales en operaciones algebraicas como la suma y la multiplicación, y propiedades algebraicas como la	Adquiere una comprensión sólida de las propiedades operacionales y algebraicas de los números reales, estableciendo una base teórica fundamental.

		asociativa, conmutativa y distributiva.	
	Fase II	Se aborda la propiedad de completitud o el postulado de correspondencia, destacando que a cada punto de la recta le corresponde un número real y viceversa.	Entiende el concepto de completitud y cómo los números reales corresponden de manera biunívoca a puntos en la recta numérica.
	Fase III	Se identifican diversas características fundamentales de los números reales, como la continuidad, el orden y la densidad.	Amplía su comprensión de los números reales, reconociendo características importantes que definen su comportamiento y estructura.
	Fase IV	Se enfatiza que los números reales cumplen con la densidad y la continuidad.	Reafirma su conocimiento sobre la continuidad y la densidad de los números reales, integrando estas propiedades en su comprensión general del sistema numérico.
	Fase V	Se hace referencia a la propiedad de completitud de los números reales con la recta numérica y se añade la noción de cardinalidad en el conjunto de los números reales, destacando su continuidad.	Consolida su comprensión sobre la completitud, la continuidad y la cardinalidad de los números reales, desarrollando una visión integral de estos conceptos en el contexto de la recta numérica.

Tabla 36.- Modelos mentales de LC3

El estudiante LC comienza su análisis siguiendo un patrón de cambio conceptual incremental, lo que implica una introducción de nuevas ideas en la estructura conceptual del estudiante. A través de las diferentes fases, profundiza y amplía su comprensión de los números reales de manera acumulativa.

En la fase I, establece una base sólida al comprender las propiedades operacionales y algebraicas de los números reales. Esto proporciona el fundamento necesario para construir una comprensión más profunda en las fases siguientes.

En la fase II, se introduce el concepto de completitud, añadiendo una nueva dimensión a la comprensión del estudiante. Entiende cómo los números reales corresponden biunívocamente a puntos en la recta numérica, lo que amplía su perspectiva sobre la naturaleza de estos números.

En la fase III, identifica y añade características fundamentales como la continuidad, el orden y la densidad, lo que amplía aún más su conocimiento sobre los números reales y su comportamiento.

En las fases IV y V, reafirma y consolida su conocimiento sobre la continuidad y la densidad de los números reales, y, además, añade la noción de cardinalidad, integrando todos estos conceptos en una comprensión holística de los números reales. Esto refuerza su entendimiento sobre la completitud del conjunto de números reales y su relación con la recta numérica.

Patrón de Cambio Conceptual LC4

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
LC4	Fase I	Identifica una ambigüedad en la definición de los números racionales, señalando que describirlos simplemente como el resultado de la división de dos números enteros puede ser confuso para otros estudiantes.	Desarrolla una sensibilidad hacia las posibles dificultades y confusiones que las definiciones matemáticas ambiguas pueden causar, especialmente en el contexto educativo.

	Fase II	Se destaca un error común al definir un número racional como aquel que puede expresarse como el cociente de dos números enteros.	Toma conciencia de la importancia de precisión en las definiciones matemáticas, reconociendo que describir los números racionales de manera inexacta puede llevar malentendidos y errores conceptuales.

Tabla 37.- Modelos mentales de LC4

El proceso de aprendizaje del estudiante en LC4 sigue un patrón de cambio conceptual incremental, donde a través de una secuencia de identificación y corrección de conceptos, mejora su capacidad para comunicar ideas matemáticas con claridad y va desarrollando gradualmente su comprensión sobre los números reales y su importancia en las operaciones algebraicas.

En la fase I, identifica una ambigüedad en la definición de los números racionales al señalar que describirlos simplemente como el resultado de la división de dos números enteros puede ser confuso para otros estudiantes. Esta etapa muestra una sensibilización inicial hacia las posibles dificultades y confusiones que las definiciones matemáticas ambiguas pueden causar, especialmente en el contexto educativo. En la fase II, destaca un error común al definir un número racional como aquel que puede expresarse como el cociente de dos números enteros. Aquí, toma conciencia de la importancia de la precisión en las definiciones matemáticas, reconociendo que describir los números racionales de manera inexacta puede llevar a malentendidos y errores conceptuales.

Patrón de Cambio Conceptual LC5

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
LC5	Fase I	Aborda las representaciones de los números reales, destacando las expresiones decimales y fraccionarias, e incluye las raíces cuadradas de los números primos como parte de dichas representaciones.	Establece una comprensión inicial de las diversas formas en las que los números reales pueden ser representados, incluyendo tanto formas exactas como radicales.
	Fase II	Se explora la relación de los diversos conjuntos numéricos en sus respectivas representaciones.	Comienza a relacionar cómo diferentes conjuntos numéricos (racionales, irracionales) se representan de manera distinta y cómo estos se integran en el sistema de los números reales.
	Fase III	Se detallan las disparidades entre la representación simbólica (notación decimal, fraccionaria, entre otras) y la representación gráfica en la recta numérica.	Profundiza en la comprensión de las diferencias entre las representaciones simbólicas y gráficas, clarificando cómo se visualizan y se manipulan en distintos contextos matemáticos.
	Fase IV	Se discute que la escritura decimal puede presentarse de manera exacta, en forma de período puro o no periódica, e incluso en forma de radicales.	Reconoce la variedad de formas en que las expresiones decimales pueden manifestarse, incluyendo identificación de diferentes tipos de decimales y radicales.

	Fase V	Se concluye que tanto la estimación como los números reales, racionales e irracionales, decimales, fracciones, no se refieren a números en sí, sino a fracciones. Se destaca que los números irracionales con raíces dentro de los números primos son lo que se alude en la representación de los números radicales. Se identifica esta etapa como la representación operatoria.	Integra su comprensión de las representaciones numéricas con un enfoque en las fracciones y radicales, reconociendo la naturaleza fraccionaria de muchas representaciones numéricas y destacando la importancia de la representación operatoria.

Tabla 38.- Modelos mentales de LC5

El estudiante LC5 comienza su análisis siguiendo un patrón de cambio conceptual incremental, donde a través de cada fase se desarrolla una comprensión más profunda y detallada de las representaciones de los números reales.

En la fase I, establece una comprensión inicial de las diversas formas en las que los números reales pueden ser representados, incluyendo expresiones decimales, fraccionarias y radicales. En la fase II, comienza a explorar la relación entre los diversos conjuntos numéricos y sus representaciones, profundizando en las conexiones y diferencias entre ellos.

En la fase III, se detallan las diferencias entre la representación simbólica y gráfica de los números reales, lo que permite una mejor comprensión de cómo se visualizan en distintos contextos matemáticos. En la fase IV, se discute la variedad de formas en que las expresiones decimales pueden manifestarse, enriqueciendo la comprensión de su diversidad.

Finalmente, en la fase V, se integran todas las comprensiones adquiridas, enfocándose en la naturaleza fraccionaria de las representaciones numéricas y estableciendo la representación operatoria como un marco importante para entender los números reales.

Patrón de Cambio Conceptual LC6

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
LC6	Fase IV	La necesidad de medir magnitudes	No es posible crear un modelo sintético ya que no es posible evidenciar un conflicto conceptual durante la realización de la tarea respecto a estas ideas previas.

Tabla 39.- Modelos Mentales de LC6

En LC6 durante la fase III habla de cómo la necesidad de medir magnitudes permitió el surgimiento de los números reales, pero no se evidenció conflictos conceptuales que pudiesen derivar en un cambio conceptual, por lo que no es posible analizar los modelos mentales construidos durante la tarea.

Validación de la tarea a partir del estudiante LC

El proceso de aprendizaje de LC1 destaca por su cumplimiento efectivo del primer objetivo al comprender gradualmente la importancia de los números reales en las operaciones algebraicas. Este logro se relaciona con un cambio conceptual incremental, donde el estudiante desarrolla progresivamente su comprensión a lo largo de las diferentes fases. Además, logra tomar postura sobre la enseñanza de los números reales, indicando un cumplimiento pleno del tercer objetivo. Las características cumplidas incluyen propiciar un rol activo, abordar problemas profesionales y promover la comprensión de conceptos didácticos y matemáticos, así como reconocer características del desarrollo cognitivo/epistémico.

En contraste, en LC2 se observa un cumplimiento parcial de los objetivos. Aunque el estudiante reconoce la ambigüedad inicial en la presentación de los números reales y profundiza en la diferenciación entre conjunto y sistema, no aborda explícitamente el uso de la metacognición ni la revisión histórica en su comprensión del tema, lo que limita su cumplimiento del segundo objetivo. Sin embargo, demuestra una comprensión más profunda de la estructura de los números reales y la importancia de la representación gráfica, sugiriendo un cumplimiento parcial del tercer objetivo. Las características cumplidas incluyen propiciar un rol activo y promover la comprensión de conceptos didácticos y matemáticos.

Por otro lado, el proceso de aprendizaje de LC3 refleja un cumplimiento efectivo de los objetivos planteados. Aquí, el estudiante demuestra un cambio conceptual incremental al introducir nuevas ideas en su estructura conceptual y profundizar su comprensión a lo largo de las fases. Además, logra tomar postura sobre la enseñanza de los números reales, lo que indica un cumplimiento pleno del tercer objetivo. Las características cumplidas incluyen propiciar un rol activo, abordar problemas profesionales, modificar el conocimiento, promover la comprensión de conceptos didácticos y matemáticos, y reconocer características del desarrollo cognitivo/epistémico.

Similarmente, en LC4, se muestra un cumplimiento efectivo de los objetivos y características de una *tarea con sentido profesional en la formación de profesores de matemáticas*. Aquí, el estudiante identifica ambigüedades y errores en la definición de los números racionales, lo que refleja una sensibilización hacia las dificultades conceptuales en el aprendizaje de matemáticas. Este proceso se relaciona con un cambio conceptual incremental, donde el estudiante mejora gradualmente su capacidad para comunicar ideas matemáticas con claridad. Además, logra tomar postura sobre la enseñanza de los números reales, lo que indica un cumplimiento pleno del tercer objetivo. Las características cumplidas incluyen propiciar un rol activo, abordar problemas profesionales, modificar el conocimiento, promover la comprensión de conceptos didácticos y matemáticos, y reconocer características del desarrollo cognitivo/epistémico.

En LC5, el estudiante manifiesta el cumplimiento de los objetivos planteados al desarrollar una comprensión más profunda y detallada de las representaciones de los números reales a lo largo de cada fase. Además, logra tomar postura sobre la enseñanza de los números reales, lo que indica un cumplimiento pleno del tercer objetivo. Las características cumplidas incluyen propiciar un rol activo, abordar problemas profesionales, modificar el conocimiento, promover la comprensión de conceptos didácticos y matemáticos, y reconocer características del desarrollo cognitivo/epistémico.

Finalmente, en LC6, aunque se reconoce la necesidad de medir magnitudes como un contexto importante para el surgimiento de los números reales, no se evidencian conflictos conceptuales que puedan derivar en un cambio conceptual, lo que limita el análisis de los modelos mentales construidos durante la tarea, sugiriendo un cumplimiento parcial de los objetivos. Las características cumplidas incluyen propiciar un rol activo y promover la comprensión de conceptos didácticos y matemáticos.

ESTUDIANTE AM

Patrón de Cambio Conceptual AM1

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
AM1	Fase I	Introduce la noción de los números reales partiendo de los conjuntos de números racionales e irracionales, resaltando su unión como el conjunto de números reales.	Establece una comprensión básica de los números reales como la combinación de números racionales e irracionales, proporcionando un marco inicial para entender el sistema numérico completo.

	Fase II	Se refiere al contenido del libro que describe la composición de los números reales a partir de los números racionales e irracionales.	Refuerza y valida su comprensión inicial mediante la referencia a la fuente bibliográfica, consolidando su conocimiento sobre la composición de los números reales.
	Fase III	Se aborda la distinción entre la irracionalidad y racionalidad, destacando que los números irracionales poseen decimales infinitos no periódicos, a diferencia de los números racionales que pueden expresarse como fracciones.	Profundiza en su comprensión de las características diferenciadoras entre números racionales e irracionales, clarificando cómo se representan y distinguen estos dos tipos de números dentro del conjunto de los números reales.

Tabla 40.- Modelos Mentales de AM1

El proceso de aprendizaje del estudiante en AM1 sigue un patrón de cambio conceptual incremental, donde cada fase contribuye gradualmente a la construcción de una comprensión más profunda y detallada del concepto de los números reales.

En la fase I, comienza con una introducción básica sobre la noción de los números reales, destacando la unión de los conjuntos de números racionales e irracionales. En la fase II, a través de la referencia al contenido del libro, refuerza su concepto inicial, consolidando su conocimiento sobre la composición de los números reales.

Finalmente, en la fase III, profundiza en la distinción entre números racionales e irracionales, entendiendo las características de cada uno, especialmente en términos de su representación decimal.

Este enfoque incremental permite al estudiante desarrollar una comprensión sistemática del conjunto de los números reales, comenzando con una visión general y progresando hacia un conocimiento más preciso entre los diferentes tipos de números que lo componen.

Patrón de Cambio Conceptual AM2

Cód	**Fases**	**Modelo Mental Inicial**	**Modelo Sintético**
AM2	Fase I	Menciona las propiedades de reflexividad, simetría, y transitividad, así como la propiedad de densidad, aunque esta última no está claramente definida en el libro.	Inicia su comprensión de los números reales identificando sus propiedades fundamentales, aunque con una definición incompleta de la densidad.
	Fase II	Se discute sobre las propiedades de los números reales, específicamente las propiedades: transitiva, simétrica, y reflexiva.	Profundiza su comprensión de las propiedades básicas de los números reales, reafirmando y ampliando su conocimiento inicial.

Tabla 41.- Modelos Mentales de AM2

El estudiante durante el proceso AM2 comienza su análisis siguiendo un patrón de cambio conceptual incremental, donde cada fase contribuye gradualmente a una comprensión más profunda y estructurada de las propiedades de los números reales.

En la fase I, comienza por identificar varias propiedades fundamentales de los números reales, incluyendo la reflexividad, simetría, transitividad, y densidad, aunque con una comprensión inicial incompleta de la densidad. En la fase II, profundiza su comprensión de estas propiedades, discutiéndolas de manera más detallada y reforzando su conocimiento inicial.

Este enfoque incremental permite al estudiante desarrollar una comprensión más completa y precisa de las propiedades de los números reales, comenzando con una identificación básica y progresando hacia una discusión más detallada y estructurada.

Patrón de Cambio Conceptual AM3

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
AM3	Fase I	Identifica que el libro no abarca propiedades de los números reales como la no exclusividad, la no numerabilidad y la completitud.	Reconoce lagunas en la cobertura del libro respecto a propiedades cruciales de los números reales, señalando áreas no abordadas.
	Fase II	Se explica que la completitud implica que no debe haber espacios vacíos en la recta numérica y se menciona que el texto no evidencia la numerabilidad, pero sí la densidad en algunos ejercicios.	Comprende la propiedad de completitud y reconoce que la densidad se aborda en el texto, aunque la numerabilidad no está claramente cubierta.
	Fase III	Se aborda el concepto de inconmensurabilidad, explicando que dos magnitudes son inconmensurables si no existen dos números que las relacionen de manera proporcional. Se discute la continuidad, completitud y no numerabilidad de los números reales, resaltando la densidad del conjunto.	Adquiere un entendimiento profundo de conceptos avanzados como inconmensurabilidad, continuidad, completitud, y no numerabilidad, reconociendo que los números reales forman una línea continua sin puntos vacíos y que su cardinalidad es distinta de la de los números racionales.
	Fase IV	Profundiza en la continuidad e inconmensurabilidad, mencionando que algunos números no pueden expresarse como racionales, destacando la no numerabilidad de los números reales y la relación con la densidad en la recta numérica.	Refuerza su comprensión de la continuidad y la inconmensurabilidad, enfatizando la no numerabilidad de los números reales y su implicación en la densidad.
	Fase V	Se compara la inconmensurabilidad con la representación de segmentos y se menciona la continuidad, concluyendo que los números reales están presentes, lo que lleva a la discusión sobre relaciones y la densidad en la recta numérica.	Sintetiza su aprendizaje, integrando los conceptos de inconmensurabilidad, continuidad y densidad, y aplicándolos a la comprensión de la recta numérica.

Tabla 42.- Modelos Mentales de AM3

El proceso de aprendizaje del estudiante en AM3, sigue un patrón de cambio conceptual incremental, que se caracteriza por un progreso gradual desde una comprensión inicial hasta una comprensión más profunda y detallada de los conceptos relacionados con los números reales.

En la fase I, comienza identificando lagunas en el material de estudio, señalando que el libro no cubre propiedades esenciales de los números reales, como la no exclusividad, la no numerabilidad y la completitud. Para la fase II, el estudiante profundiza su comprensión al abordar la propiedad de completitud y reconocer que, aunque la densidad se trata en el texto, la numerabilidad no está claramente cubierta. Esta fase muestra un avance en la comprensión, donde el estudiante no solo identifica vacíos, sino que también comienza a relacionar conceptos y a reflexionar sobre la información presentada en el material de estudio.

En la fase III, adquiere un entendimiento más profundo de conceptos avanzados como la inconmensurabilidad, la continuidad, la completitud y la no numerabilidad. Este proceso implica no solo comprender estas propiedades individualmente, sino también reconocer cómo se interrelacionan y contribuyen a la comprensión general de los números reales. El estudiante llega a comprender que los números reales forman una línea continua sin puntos vacíos, lo que contrasta con los números racionales, y reconoce la importancia de estas propiedades en la caracterización del conjunto de los números reales.

En la fase IV, refuerza su comprensión de la continuidad y la inconmensurabilidad, profundizando en la no numerabilidad de los números reales y su implicación en la densidad. Esta etapa muestra una capacidad para aplicar los conceptos aprendidos, lo que indica un progreso significativo en su comprensión del tema.

Finalmente, en la fase V, sintetiza su aprendizaje, integrando los conceptos de inconmensurabilidad, continuidad y densidad, y aplicándolos a la comprensión de la recta numérica. Esta fase representa la culminación del proceso de aprendizaje, donde el estudiante demuestra una comprensión completa y multifacética de los conceptos relacionados con los números reales y su representación en la recta numérica.

Patrón de Cambio Conceptual AM4

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
AM4	Fase I	Incluye las propiedades de las operaciones de los números reales (adición, multiplicación, potenciación, radicación, y logaritmación) mediante situaciones problema en contextos matemáticos y cotidianos.	Aplica las propiedades operacionales de los números reales en diversos contextos, lo que facilita una comprensión práctica y contextualizada de estas operaciones.
	Fase II	Se subraya la importancia de tener un sistema compuesto por conjuntos, relaciones y operaciones para abordar las propiedades de los números reales.	Destaca la necesidad de un enfoque sistemático que integra conjuntos, relaciones y operaciones, lo que permite una visión más estructurada y holística de las propiedades de los números reales.

Tabla 43.- Modelos Mentales de AM4

El estudiante AM comienza su análisis siguiendo un patrón de cambio conceptual incremental, en el cual cada fase añade un nivel adicional de comprensión y estructura al conocimiento del estudiante sobre los números reales.

En la primera fase, se enfoca en la aplicación de propiedades operacionales en contextos prácticos, lo cual es crucial para que el estudiante vea la relevancia y utilidad de estas propiedades en situaciones reales. Al abordar situaciones problema tanto en contextos matemáticos como cotidianos, el estudiante desarrolla una comprensión concreta de las operaciones de los números reales.

En la segunda fase, avanza hacia una comprensión más sistemática, subrayando la importancia de integrar conjuntos, relaciones y operaciones para abordar de manera efectiva las propiedades de los números reales.

Destaca la necesidad de una visión más estructurada y coherente del sistema numérico, ya que, al reconocer la importancia de un sistema compuesto por conjuntos, relaciones y operaciones, desarrolla una comprensión más profunda de la estructura que sustenta las propiedades de los números reales.

Patrón de Cambio Conceptual AM5

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
AM5	Fase I	Discute la representación de los números reales en la recta numérica y menciona las representaciones numéricas equivalentes.	Se establece una comprensión inicial de cómo se representan los números reales en la recta numérica, lo que sienta las bases para entender su estructura y relación con otras representaciones numéricas.
	Fase II	Se detalla sobre las representaciones en la recta numérica, incluyendo la expresión decimal y fraccionaria.	Amplía su comprensión sobre las representaciones numéricas en la recta numérica, lo que le permite visualizar cómo se expresan los números reales tanto en forma decimal como fraccionaria.
	Fase III	Profundiza en las representaciones simbólicas y gráficas de los números reales, incluyendo diversas notaciones como la decimal, fracciones continuas, expresiones algebraicas, radicales, aproximaciones en series y números trascendentes	Adquiere una comprensión más amplia y detallada de las formas en que se pueden representar los números reales, tanto simbólica como gráficamente, lo que le permite explorar la relación entre tipos de representaciones y entender la naturaleza de los números reales y su estructura.
	Fase IV	Se aborda sobre aproximaciones en series y números trascendentes.	Profundiza en conceptos avanzados relacionados con la representación de los números reales, lo que le permite comprender aspectos más complejos de su estructura y comportamiento.
	Fase V	Se menciona un error en la expresión decimal relacionado con la periodicidad.	Identifica y reconoce un error específico en una representación numérica, lo que indica una capacidad para detectar y corregir posibles malentendidos o imprecisiones en el proceso de aprendizaje.

Tabla 44.- Modelos Mentales de AM5

El proceso de aprendizaje del estudiante en AM5 sigue un patrón de cambio conceptual incremental, en el cual cada fase agrega una capa adicional de comprensión y profundización sobre la representación y naturaleza de los números reales.

En la primera fase, establece una comprensión inicial de cómo se representan los números reales en la recta numérica, lo que sienta las bases para entender su estructura y su relación con otras representaciones numéricas. Al discutir las representaciones numéricas equivalentes, el estudiante comienza a visualizar la conexión entre los números reales y su ubicación en la recta numérica.

En la segunda fase, amplía su comprensión al detallar sobre las representaciones en la recta numérica, incluyendo tanto la expresión decimal como fraccionaria. Esto le permite visualizar con mayor claridad cómo se expresan los números reales en diferentes formas y cómo estas formas se relacionan entre sí en el contexto de la recta numérica.

En la tercera fase, profundiza en las representaciones simbólicas y gráficas de los números reales, explorando notaciones como la decimal, fracciones continuas, expresiones algebraicas, radicales, aproximaciones en series y números trascendentes. Esta exploración le permite al estudiante adquirir una comprensión más completa y detallada de los números reales y su estructura, así como de la relación entre diferentes tipos de representaciones.

En la cuarta fase, avanza hacia conceptos más avanzados al abordar aproximaciones en series y números trascendentes, lo que le permite comprender aspectos más complejos de la estructura y el comportamiento de los números reales.

Finalmente, en la quinta fase identifica y reconoce errores en una representación numérica, demostrando una capacidad para detectar y corregir imprecisiones en el proceso de aprendizaje.

Patrón de Cambio Conceptual AM6

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
AM6	Fase I	Identifica una falta de claridad en la definición del sistema numérico, señalando que solo se hace referencia al conjunto de números racionales e irracionales.	Se reconoce una deficiencia en la presentación del sistema numérico, lo que indica una conciencia de la necesidad de una definición más explícita y completa para comprender el conjunto de números reales.
	Fase II	Establece una analogía entre el sistema de numeración y los conjuntos de decimales, racionales y reales, comparándolos con sistemas de numeración como los números naturales.	Profundiza en la comprensión del sistema numérico al relacionarlo con otros conjuntos numéricos y sistemas de numeración, lo que permite una visión más holística y contextualizada de los números reales y su lugar dentro del espectro numérico.

Tabla 45.- Modelos Mentales de AM6

El estudiante comienza su análisis siguiendo un patrón de cambio conceptual incremental, donde se van identificando y abordando gradualmente las lagunas en la comprensión del sistema numérico y su relación con otros conjuntos.

En la primera fase, reconoce una falta de claridad en la definición del sistema numérico, lo que indica una conciencia de las deficiencias en su comprensión inicial. Al señalar esta falta de claridad, el estudiante muestra una sensibilidad hacia la importancia de tener una definición explícita y completa del sistema numérico para comprender adecuadamente el conjunto de números reales.

En la segunda fase, profundiza en su comprensión al establecer analogías entre el sistema numérico, otros conjuntos numéricos y sistemas de numeración como los números naturales. Esta comparación le permite contextualizar la naturaleza de los números reales. Al relacionar el sistema de numeración con conjuntos como los decimales, racionales y reales, el estudiante amplía su comprensión y obtiene una visión más contextualizada de los números reales.

A través de este proceso, avanza en su comprensión del sistema numérico y los números reales, construyendo gradualmente una visión más completa de su estructura y su función en matemáticas.

Patrón de Cambio Conceptual AM7

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
AM7	Fase I	Se observa una omisión en la definición explícita de la expresión fraccionaria	No es posible crear un modelo sintético ya que no es posible evidenciar un conflicto conceptual durante la realización de la tarea respecto a estas ideas previas.

Tabla 46.- Modelos mentales de AM7

En la primera fase se observa una omisión en la definición explícita de la expresión fraccionaria, pero esta no produce ningún cambio o conflicto conceptual.

Validación de la tarea a partir del estudiante AM

En el caso de AM1, el estudiante demuestra un cumplimiento efectivo del objetivo de construir una comprensión más profunda del concepto de números reales. A lo largo de cada fase, logra desarrollar progresivamente su comprensión, reflejando así el cumplimiento de los objetivos establecidos. Aunque no se menciona explícitamente el uso de la metacognición o la revisión histórica, se destacan características como propiciar un rol activo y promover la comprensión de conceptos didácticos y matemáticos.

En contraste, en AM2, el estudiante muestra un cumplimiento parcial de los objetivos. Aunque identifica varias propiedades fundamentales de los números reales y profundiza en su comprensión, no se evidencia el uso explícito de la metacognición o la revisión histórica. No obstante, se cumplen características como abordar problemas profesionales, modificar el conocimiento y promover la comprensión de conceptos didácticos y matemáticos.

Por otro lado, el proceso AM3 refleja un cumplimiento efectivo de los objetivos planteados. Aquí, el estudiante muestra un cambio conceptual incremental y logra tomar posición sobre la enseñanza de los números reales, indicando un cumplimiento pleno de los objetivos establecidos, así como de las características mencionadas.

En cuanto a AM4, el estudiante muestra un cumplimiento efectivo de los objetivos y características de una *tarea con sentido profesional en la formación de profesores de matemáticas*. Agrega un nivel adicional de comprensión y estructura al conocimiento sobre los números reales, al mismo tiempo que toma posición sobre su enseñanza.

En el análisis de AM5, muestra un cumplimiento efectivo de los objetivos planteados y logra tomar posición sobre la enseñanza de los números reales, lo que indica un cumplimiento pleno de los objetivos y características mencionadas.

Finalmente, en AM6, refleja un cumplimiento parcial de los objetivos. Aunque identifica lagunas en la comprensión del sistema numérico y profundiza gradualmente su conocimiento, no se evidencia el uso explícito de la metacognición o la revisión histórica. Aun así, se cumplen características como propiciar un rol activo y promover la comprensión de conceptos didácticos y matemáticos.

ESTUDIANTE MB

Patrón de Cambio Conceptual MB1

Cód.	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
MB1	Fase I	Señala que el libro aborda los números	Reconoce la definición básica de los

		reales como la fusión entre los números racionales e irracionales.	números reales como la combinación de números racionales e irracionales. Esta comprensión inicial es crucial para entender la naturaleza y la estructura de los números reales como un conjunto completo y continuo.
	Fase II	Se detalla la definición de los números decimales periódicos y no periódicos, representados en el conjunto $\mathbb{R}$.	Profundiza en su comprensión al discutir las características de los números decimales, tanto periódicos como no periódicos, y cómo están representados en el conjunto de números reales. Esta fase indica una mayor familiaridad con las representaciones numéricas y propiedades específicas de los números reales.
	Fase V	Se destaca la ausencia de una definición precisa de los números reales en el libro. Más bien, se describen de manera abstracta, casi como conjuntos.	Reconoce una deficiencia en la presentación de los números reales en el material de estudio, señalando que la descripción es abstracta y carece de una definición precisa. Esto sugiere una conciencia crítica por parte del estudiante sobre la calidad del contenido presentado y su capacidad para identificar lagunas en la explicación.

Tabla 47.- Modelos Mentales de MB1

El estudiante en MB1 sigue un patrón de cambio conceptual incremental a lo largo de su proceso de aprendizaje sobre los números reales. En la primera fase, demuestra una comprensión inicial al reconocer que los números reales son una combinación de números racionales e irracionales. Esta comprensión básica establece una base fundamental para cualquier estudio posterior sobre los números reales.

En la segunda fase, profundiza su comprensión al discutir las propiedades específicas de los números reales, como los números decimales periódicos y no periódicos. Este avance indica una mayor familiaridad con las representaciones numéricas y las características específicas de los números reales.

Finalmente, en la quinta fase, muestra una capacidad crítica al identificar la falta de una definición precisa de los números reales en el material de estudio. Esta capacidad para cuestionar y evaluar el contenido demuestra un desarrollo en su pensamiento crítico y su comprensión de los conceptos matemáticos.

Patrón de Cambio Conceptual MB2

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
MB2	Fase I	Resalta la utilización de representaciones geométricas para esquematizar la secuencia de los números reales e introduce los conceptos de "números reales positivos" y "números reales negativos".	Comienza a familiarizarse con la representación visual de los números reales, diferenciando entre números positivos y negativos. Esto establece una base para comprender cómo se distribuyen los números reales en la recta numérica.
	Fase II	Se hace hincapié en la representación gráfica a través de la recta numérica y en la representación simbólica. Se observa la ausencia de ejemplos relacionados con	Profundiza en la representación gráfica y simbólica de los números reales, pero identifica una carencia en la cobertura de otros conjuntos numéricos importantes

		los conjuntos numéricos enteros y naturales.	como los enteros y naturales. Esto indica una comprensión más amplia de la representación numérica, aunque con algunas lagunas.
	Fase III	Se mencionan las representaciones simbólicas como la notación decimal, fracciones y radicales, junto con su representación gráfica mediante la recta numérica.	Amplía su comprensión de las diversas formas simbólicas en que se pueden representar los números reales y su relación con la representación gráfica. Esto refuerza su capacidad de visualizar y simbolizar diferentes tipos de números reales.
	Fase IV	Se reconoce la representación decimal y sus múltiples formas (fracciones, raíces, entre otros), destacando que estas varían según la teoría aplicada (Cantor con intervalos, Dedekind con cortaduras, y Cauchy con sucesiones).	Adquiere una comprensión más profunda de las diferentes teorías y métodos de representación de los números reales, apreciando la diversidad de enfoques matemáticos para describir los números. Esto indica un avance significativo en su comprensión conceptual.
	Fase V	Se precisa que las representaciones en la recta numérica y en el texto se centran en los números periódicos y no periódicos, así como en la representación geométrica. Se menciona cómo se definen los números decimales periódicos y no periódicos en el texto y se alude a la posibilidad de abordar la igualdad a través de la teoría de conjuntos.	Consolida su comprensión de las diferentes formas de representación de los números reales, tanto periódicos como no periódicos, y su representación geométrica. Además, muestra un interés en explorar la igualdad desde una perspectiva teórica más avanzada, como la teoría de conjuntos, lo que denota un alto nivel de comprensión y capacidad de abstracción.

Tabla 48.- Modelos Mentales de MB2

En MB2, se revela un proceso de construcción gradual y acumulativa de conceptos. Cada fase amplia la comprensión sobre las representaciones numéricas y las teorías matemáticas subyacentes.

En la primera fase, comienza a familiarizarse con la representación visual de los números reales, diferenciando entre números positivos y negativos. Esta etapa establece una base fundamental para comprender cómo se distribuyen los números reales en la recta numérica. En la segunda fase, se profundiza en la representación gráfica y simbólica de los números reales, aunque se identifica una carencia en la cobertura de otros conjuntos numéricos importantes como los enteros y naturales. A pesar de esta laguna, muestra una comprensión más amplia de la representación numérica.

La tercera fase amplía aún más la comprensión del estudiante al abordar las diversas formas simbólicas en que se pueden representar los números reales, así como su relación con la representación gráfica. Esto refuerza su capacidad de visualizar y simbolizar diferentes tipos de números reales. En la cuarta fase, adquiere una comprensión más profunda de las diferentes teorías y métodos de representación de los números reales.

Finalmente, en la quinta fase, consolida su comprensión de las diferentes formas de representación de los números reales, tanto periódicos como no periódicos, y su representación geométrica. Además, muestra un interés en explorar la igualdad desde una perspectiva teórica más avanzada, lo que denota un alto nivel de comprensión y capacidad de abstracción.

Patrón de Cambio Conceptual MB3

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
MB3	Fase II	Señala que el texto carece de ejemplos relacionados con los conjuntos numéricos enteros y naturales.	Esta observación indica una atención específica del estudiante hacia la falta de inclusión de ejemplos relacionados con conjuntos numéricos fundamentales, como los enteros y los naturales. La ausencia de ejemplos puede dificultar la comprensión completa de la relación entre los diferentes conjuntos numéricos.
	Fase V	Vuelve a mencionar la limitación del texto al abordar solo los sistemas más recientes estudiados, lo cual podría considerarse un error ya que no facilita al estudiante la identificación de que dichos conjuntos también forman parte de los números reales.	Destaca nuevamente la carencia del texto al no incluir los conjuntos numéricos enteros y naturales dentro del contexto de los números reales. Esta observación indica una comprensión más profunda de la importancia de abordar todos los conjuntos numéricos relevantes para una comprensión completa de los números reales.

Tabla 49.- Modelos Mentales de MB3

Al analizar el proceso MB3, se evidencia que sigue un patrón de cambio conceptual incremental a lo largo de su proceso de aprendizaje sobre los conjuntos numéricos y su relación con los números reales. Este comienza en la segunda fase, al mostrar una comprensión inicial e identificar la falta de ejemplos relacionados con los conjuntos numéricos enteros y naturales en el texto. En la quinta fase, profundiza en su comprensión al señalar cómo esta limitación del texto puede dificultar la identificación de la inclusión de conjuntos numéricos fundamentales dentro del contexto de los números reales.

Esta observación muestra un avance en su capacidad para evaluar el contenido del texto y comprender su impacto en el aprendizaje, lo que indica un desarrollo significativo en su comprensión conceptual y su habilidad para analizar y evaluar información matemática.

Patrón de Cambio Conceptual MB4

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
MB4	Fase I	Señala que el libro trata las propiedades de los números reales, como la igualdad y el orden, pero indica que la ausencia de ejemplos generales de números reales podría restringir el entendimiento de los estudiantes acerca de este conjunto numérico.	Importancia de los ejemplos generales para facilitar la comprensión de los conceptos de números reales. Al destacar la ausencia de ejemplos, indica una conciencia de cómo esta falta puede limitar el aprendizaje de los estudiantes.
	Fase II	Se centra en las propiedades de la operación de multiplicación y la operación aditiva en los números reales, señalando que estas operaciones comparten las mismas propiedades que en los números racionales.	Comprensión de las propiedades de las operaciones fundamentales en los números reales y su relación con los números racionales. El estudiante reconoce la continuidad en las propiedades de estas operaciones entre diferentes conjuntos numéricos.

	Fase III	Se resalta la completitud y la continuidad del sistema numérico real, además de su densidad.	Demuestra comprender las propiedades fundamentales del sistema numérico real, como su completitud, continuidad y densidad. Estas propiedades son cruciales para entender la estructura del conjunto de números reales.
	Fase IV	Se menciona la densidad y se la vincula con los puntos de la recta numérica y la continuidad, argumentando que estas propiedades se satisfacen debido a la densidad y la completitud del sistema.	Muestra una comprensión más profunda al vincular la densidad del sistema numérico real con la continuidad y los puntos de la recta numérica. Esta conexión demuestra una apreciación más completa de cómo estas propiedades están interrelacionadas en el contexto de los números reales.
	Fase V	Se declara que el sistema numérico real no es enumerable debido a su relación con los números naturales.	Manifiesta un entendimiento claro de que el sistema numérico real no puede ser enumerado debido a su relación con los números naturales. Esta comprensión implica una apreciación más profunda de la cardinalidad del conjunto de números reales.

Tabla 50.- Modelos Mentales de MB4

El estudiante en MB4 sigue un patrón de cambio conceptual incremental a lo largo de su proceso de aprendizaje sobre los números reales y sus propiedades. En la primera fase, muestra la importancia de los ejemplos generales para facilitar la comprensión de los conceptos de números reales. Al destacar la ausencia de ejemplos, indica una conciencia de cómo esta falta puede limitar el aprendizaje de los estudiantes.

En la segunda fase, demuestra comprensión de las propiedades de las operaciones fundamentales en los números reales y su relación con los números racionales. Reconoce la continuidad en las propiedades de estas operaciones entre diferentes conjuntos numéricos.

En la tercera fase, se resalta la completitud, la continuidad y la densidad del sistema numérico real. El estudiante demuestra comprender estas propiedades fundamentales, que son básicas para entender la estructura del conjunto de números reales. En la cuarta fase, muestra una comprensión más profunda al vincular la densidad del sistema numérico real con la continuidad y los puntos de la recta numérica. Esta conexión demuestra una apreciación más completa de cómo estas propiedades están interrelacionadas en el contexto de los números reales.

Finalmente, en la quinta fase, menciona claramente que el sistema numérico real no es enumerable debido a su relación con los números naturales, lo que muestra un entendimiento claro de la cardinalidad del conjunto de números reales.

Patrón de Cambio Conceptual MB5

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
MB5	Fase I	Señala que el libro no presenta diferentes representaciones de los números reales más allá de su orden y su uso en ecuaciones	No es posible crear un modelo sintético ya que no es posible evidenciar un conflicto conceptual durante la realización de la tarea respecto a estas

	Fase I	Se señala la ausencia de una definición explícita de los números reales	ideas previas.

Tabla 51.- Modelos mentales de MB5

En la fase I, el estudiante comienza su análisis, señalando que el libro no presenta diferentes representaciones de los números reales más allá de su orden y su uso en ecuaciones, así mismo señala la ausencia de una definición explícita de los números reales. Esta idea no es complementada ni produce un conflicto conceptual durante las siguientes fases.

Patrón de Cambio Conceptual MB6

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
MB6	Fase II	No menciona nada de estructuras algebraicas	No es posible crear un modelo sintético ya que no es posible evidenciar un conflicto conceptual durante la realización de la tarea respecto a estas ideas previas.

Tabla 52.- Modelos mentales de MB6

Para esta segunda fase, reconoce que el libro no menciona nada de estructuras algebraicas. Pero no complementa esta observación durante la tarea.

Validación de la tarea a partir del estudiante MB

En MB1, el estudiante muestra un cumplimiento efectivo del objetivo al desarrollar una comprensión progresiva de los números reales. A través de las diferentes fases, demuestra un avance gradual en su comprensión, desde una visión básica hasta una capacidad crítica para cuestionar y evaluar el contenido. Además, muestra habilidad para identificar lagunas en el material de estudio, lo que evidencia un rol activo en su aprendizaje y promueve la comprensión de conceptos didácticos y matemáticos.

Por otro lado, en MB2, el estudiante exhibe un cumplimiento pleno de los objetivos planteados. Cada fase contribuye a una comprensión más amplia y detallada de los números reales y sus representaciones. Además, demuestra un interés en explorar conceptos más avanzados, lo que indica un alto nivel de comprensión y capacidad de abstracción. Aquí también se observa un rol activo del estudiante, así como la capacidad para abordar problemas profesionales y promover la comprensión de conceptos didácticos y matemáticos.

En el caso de MB3, muestra un cumplimiento efectivo del objetivo al desarrollar una comprensión progresiva de los conjuntos numéricos y su relación con los números reales. Aunque el proceso comienza en la segunda fase, el estudiante demuestra un avance significativo en su capacidad para evaluar el contenido y comprender su impacto en el aprendizaje. Se resalta nuevamente el rol activo del estudiante, así como la capacidad para modificar el conocimiento y promover la comprensión de conceptos didácticos y matemáticos.

Durante el proceso MB4, el estudiante manifiesta un cumplimiento pleno de los objetivos y características de una *tarea con sentido profesional en la formación de profesores de matemáticas*. A través de las diferentes fases, demuestra un cambio conceptual incremental y una comprensión profunda de las propiedades de los números reales. Además, muestra una capacidad para relacionar conceptos y entender la estructura del conjunto de números reales, lo que evidencia un enfoque activo en su aprendizaje y la promoción de la comprensión de conceptos didácticos y matemáticos.

Sin embargo, en MB5, muestra un cumplimiento parcial de los objetivos. Aunque identifica la falta de ejemplos y una definición explícita de los números reales en el material de estudio, no se evidencia un desarrollo significativo en la comprensión del tema a lo largo de las fases. A pesar de esto, muestra una conciencia crítica sobre el contenido presentado, lo que refleja un reconocimiento de las características del desarrollo cognitivo/epistémico.

Finalmente, en MB6, el estudiante muestra un cumplimiento parcial de los objetivos al reconocer la falta de mención sobre estructuras algebraicas en el libro, pero no complementa esta observación durante la tarea, lo que limita el avance significativo en la comprensión del tema. Aquí también se destacan el rol activo del estudiante y el reconocimiento de características del desarrollo cognitivo/epistémico.

ESTUDIANTE LB

Patrón de Cambio Conceptual LB1

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
LB1	Fase I	Resalta la importancia de reconocer que el conjunto de los números reales se compone de la unión de los números racionales e irracionales. Además, destaca que el texto presenta los números reales como un conjunto y establece una relación con los números racionales e irracionales.	Adquiere una comprensión inicial de la estructura del conjunto de números reales, identificando su composición y la relación entre sus subconjuntos. Esto proporciona una base fundamental para entender la totalidad del conjunto numérico R.
	Fase II	Se señala la falta de diferenciación entre el conjunto de los números reales, los números racionales y los números irracionales en el texto, y que el conjunto numérico R no se define claramente como un sistema numérico.	Reconoce una deficiencia en la presentación del material, observando que la diferenciación entre los subconjuntos de números no está claramente definida. Este reconocimiento puede llevar al estudiante a buscar una comprensión más precisa y diferenciada de los números reales y sus subconjuntos.

Tabla 53.- Modelos Mentales de LB1

El análisis del proceso de aprendizaje del estudiante en el caso de LB1 revela un patrón que combina elementos de cambio conceptual incremental y cambio conceptual masivo, principalmente debido a la presentación del material en el texto.

En la primera fase, adquiere una comprensión inicial de la estructura del conjunto de números reales al identificar su composición como la unión de los números racionales e irracionales. Este paso es fundamental para establecer un esquema conceptual claro sobre los números reales y sus subconjuntos.

En la segunda fase, señala una deficiencia en la presentación del material, al observar la falta de diferenciación entre los conjuntos de números reales, racionales e irracionales en el texto. Esta crítica demuestra una capacidad para analizar y evaluar la información presentada, lo que puede llevar a una reestructuración más profunda de su comprensión.

A través de este proceso de crítica y reevaluación, está en camino de avanzar en su comprensión sobre el conjunto de números reales, buscando una diferenciación más clara y precisa entre sus subconjuntos. Esta búsqueda de una comprensión más precisa es característica del cambio conceptual incremental, donde el estudiante continúa refinando su comprensión a medida que expone nuevas ideas y perspectivas.

Patrón de Cambio Conceptual LB2

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
LB2	Fase I	Señala la igualdad entre números reales, abordando conceptos como la reflexividad, simetría y transitividad.	Demuestra una comprensión inicial de las propiedades básicas de las relaciones de igualdad entre números reales. Esto establece una base sólida para entender cómo funcionan estas propiedades en un contexto matemático.
	Fase II	Se discuten las propiedades de las relaciones, destacando la ausencia de la propiedad no exclusiva.	Avanza en su comprensión al identificar y discutir las propiedades de las relaciones entre números reales, y nota la ausencia de la propiedad no exclusiva. Esto sugiere que el estudiante está desarrollando una comprensión más crítica y detallada de las características de las relaciones matemáticas.

Tabla 54.- Modelos Mentales de LB2

El estudiante en LB2 sigue un patrón de cambio conceptual incremental a lo largo de su proceso de aprendizaje sobre las relaciones entre los números reales.

En la primera fase, demuestra una comprensión inicial de las propiedades básicas de las relaciones de igualdad entre números reales, abordando conceptos como la reflexividad, simetría y transitividad. Esto establece una base sólida para entender cómo funcionan estas propiedades en un contexto matemático. En la segunda fase, el estudiante avanza en su comprensión al identificar y discutir las propiedades de las relaciones entre números reales, y nota la ausencia de la propiedad no exclusiva. Esto sugiere que está desarrollando una comprensión más crítica y detallada de las características de las relaciones matemáticas.

El análisis muestra que el estudiante comienza con una comprensión básica de las propiedades de igualdad entre los números reales y, en la fase siguiente, amplía su análisis para incluir una discusión sobre las propiedades de las relaciones, identificando lagunas como la ausencia de la propiedad no exclusiva. Este enfoque progresivo y detallado indica un desarrollo del conocimiento, característico del cambio conceptual incremental. Cada fase construye sobre la anterior, mostrando una trayectoria de aprendizaje estructurada y en constante profundización.

Patrón de Cambio Conceptual LB3

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
LB3	Fase I	Identifica las propiedades clausurativa, asociativa, conmutativa, modulativa e invertida de la familia aditiva en los números reales.	Adquiere un conocimiento sólido de las propiedades fundamentales de las operaciones aditivas en los números reales, estableciendo una base para entender cómo estas propiedades facilitan diversas manipulaciones matemáticas.
	Fase II	Se describe el sistema de numeración como un conjunto de símbolos y letras que posibilitan la representación de todos los números válidos. Se diferencia entre un sistema numérico y un sistema de numeración. Además, se abordan	Amplía su comprensión al diferenciar claramente entre un sistema numérico y un sistema de numeración, y se familiariza con las propiedades tanto de la operación aditiva como de la multiplicativa. Esto ayuda a consolidar una visión más

		conceptos como sistema numérico, propiedades de la operación aditiva y propiedades de la operación multiplicativa.	completa de cómo los números reales operan dentro de estos sistemas.
	Fase V	Se destaca que, si bien las operaciones aditivas comparten algunas propiedades con la radicación y la logaritmación, al abordar la potenciación, no se proporciona una definición formal ni se mencionan propiedades específicas.	Reconoce una laguna en la definición y explicación de las propiedades de la potenciación en comparación con otras operaciones. Esto indica una necesidad de profundizar más en la comprensión y formalización de estas propiedades.

Tabla 55.- Modelos Mentales de LB3

El análisis del proceso de aprendizaje del estudiante en el caso de LB3 revela un patrón de cambio conceptual incremental, que refleja la progresión en la comprensión de las propiedades y operaciones de los números reales.

En la primera fase, adquiere un conocimiento sólido de las propiedades fundamentales de las operaciones aditivas en los números reales. Esto sienta una base importante para su comprensión posterior de cómo estas propiedades facilitan diversas manipulaciones matemáticas.

En la segunda fase, amplía su comprensión al diferenciar claramente entre un sistema numérico y un sistema de numeración. Además, se familiariza con las propiedades tanto de la operación aditiva como de la multiplicativa. Esta ampliación de conocimientos contribuye a una visión más completa de cómo los números reales operan dentro de estos sistemas.

En la quinta fase, reconoce una laguna en la definición y explicación de las propiedades de la potenciación en comparación con otras operaciones. Este reconocimiento muestra una evaluación crítica de su comprensión actual y una motivación para profundizar más en la comprensión de estas propiedades.

Patrón de Cambio Conceptual LB4

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
LB4	Fase I	Expone las representaciones de los números reales abordadas en el libro de texto, tales como la recta real y las expresiones decimales y fraccionarias.	Obtiene una comprensión inicial de las distintas formas de representar los números reales, sentando las bases para el estudio más profundo de estas representaciones.
	Fase II	Se destaca la presencia de la recta numérica junto a la recta real para asignar a cada punto un número y a cada número un punto. Además, se menciona la utilización de la construcción geométrica para representar los números irracionales en la recta numérica, incluyendo expresiones fraccionarias.	Profundiza su comprensión al integrar la representación geométrica, lo que le permite visualizar y entender mejor cómo se representan los números irracionales en la recta numérica.
	Fase III	Se aborda detalladamente la representación en la recta numérica, ejemplificando las representaciones simbólicas y gráficas. Se mencionan diversas representaciones de los números reales, como la notación decimal (decimales), las fracciones (fracciones	Adquiere una comprensión completa y detallada de las diferentes formas de representar los números reales, así como la capacidad de distinguir claramente entre números racionales e irracionales.

		continuas), las expresiones algebraicas, las expresiones con radicales, la aproximación en series y los números trascendentes. Igualmente, se ahonda en el concepto de irracionalidad y racionalidad, diferenciando entre números irracionales y racionales.	
	Fase V	Se aclara que dentro del conjunto de los números reales mencionados en el libro se incluyen la expresión decimal, la expresión fraccionaria, la recta numérica y la construcción geométrica. Asimismo, se señala que en las expresiones o números fraccionarios se identifican algunos errores, como la colocación del signo negativo junto a la fracción, lo que genera confusiones sobre si dicho signo pertenece al numerador, denominador o a la fracción en su totalidad.	Refina su comprensión de las representaciones de los números reales y toma conciencia de errores comunes en la notación de fracciones, mejorando su precisión en el uso de estas representaciones.

Tabla 56.- Modelos Mentales de LB4

El estudiante en LB4 sigue un proceso de cambio conceptual incremental donde se observa un avance en su comprensión de las representaciones de los números reales. En la fase I, se introduce en las representaciones básicas de los números reales, como la recta numérica y las expresiones decimales y fraccionarias. Esta etapa establece una base sólida al proporcionar una comprensión fundamental de cómo se pueden expresar y visualizar los números reales en diferentes formatos.

En la fase II, profundiza su comprensión al explorar la representación geométrica de los números reales, especialmente los irracionales. La inclusión de la construcción geométrica para representar estos números en la recta numérica amplía su capacidad para comprender conceptos abstractos.

La fase III marca un punto crucial en el proceso, donde el estudiante adquiere una comprensión completa de las diversas formas de representar los números reales, desde la notación decimal hasta las expresiones con radicales y los números trascendentes. Además, desarrolla la habilidad de distinguir entre números racionales e irracionales, lo que refuerza su comprensión de la estructura del conjunto de números reales.

Finalmente, en la fase V, no solo consolida su comprensión de las representaciones de los números reales, sino que también mejora su precisión al identificar y corregir errores comunes en las fracciones.

Patrón de Cambio Conceptual LB5

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
LB5	Fase II	Se esclarecen las representaciones de los números reales abordadas en el texto, como la recta real y las expresiones decimales y fraccionarias. Se destaca la completitud y la no numerabilidad entre los reales y la completitud, haciendo hincapié en la ausencia de mención de la propiedad de numerabilidad y la falta de definición en relación con la densidad.	Obtiene una comprensión más clara de las representaciones de los números reales, enfocándose en conceptos importantes como la completitud y la no numerabilidad, aunque nota la falta de definiciones claras en algunos aspectos como la densidad.

	Fase III	Se subraya la continuidad y completitud, destacando que los números reales forman una línea continua e infinita sin puntos vacíos. Se aborda el concepto de inconmensurabilidad y la no numerabilidad, enfatizando la imposibilidad de contar los números reales y la densidad, que asegura que siempre se podrá encontrar otro número real entre dos números reales.	Profundiza su comprensión de la continuidad y completitud de los números reales, entendiendo la naturaleza infinita y no numerable de este conjunto, y el concepto de densidad que elimina la existencia de intervalos vacíos en la recta numérica.
	Fase IV	Se establece que la continuidad se manifiesta cuando se cumplen la densidad y la completitud. Se define la inconmensurabilidad y se añade que, en la no numerabilidad, el conjunto R es infinito y no numerable al no poder establecerse una correspondencia biunívoca con los números naturales.	Refina su comprensión de cómo la densidad y completitud contribuyen a la continuidad de los números reales. La definición de inconmensurabilidad se aclara, consolidando el entendimiento de los números irracionales y su diferencia con los racionales.
	Fase V	Se establece una relación entre la propiedad de densidad en los números reales y la recta numérica, concluyendo que la construcción geométrica establece una conexión con la inconmensurabilidad.	Logra conectar conceptos abstractos con representaciones geométricas, comprendiendo cómo la densidad y la construcción geométrica están relacionadas con la inconmensurabilidad, lo que solidifica su entendimiento de las propiedades de los números reales.

Tabla 57.- Modelos Mentales de LB5

El estudiante en LB5 sigue un patrón de cambio conceptual incremental, donde cada fase se construye gradualmente sobre el conocimiento adquirido en las etapas anteriores, profundizando en la comprensión de las representaciones y propiedades de los números reales.

En la fase II, adquiere una comprensión más clara de las representaciones de los números reales, centrándose en conceptos importantes como la completitud y la no numerabilidad. Sin embargo, observa la falta de definiciones claras en ciertos aspectos como la densidad, lo que indica una conciencia de las lagunas en su comprensión. La fase III marca un avance significativo, ya que el estudiante profundiza en conceptos como la continuidad, la completitud y la no numerabilidad de los números reales. Entiende la naturaleza infinita y no numerable de este conjunto y la propiedad de densidad, que garantiza que siempre se pueda encontrar otro número real entre dos números reales, lo que refuerza su comprensión de la estructura del conjunto de números reales.

En la fase IV, comprende cómo la densidad y la completitud contribuyen a la continuidad de los números reales. Además, la definición de inconmensurabilidad se aclara, consolidando su entendimiento de los números irracionales y su diferencia con los racionales.

Finalmente, en la fase V, logra conectar conceptos con representaciones geométricas, comprendiendo cómo la densidad y la construcción geométrica están relacionadas con la inconmensurabilidad. Esto demuestra una comprensión más integrada y aplicada de cómo las propiedades de los números reales se manifiestan y se relacionan entre sí.

Patrón de Cambio Conceptual LB6

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
LB6	Fase IV	Aproximaciones en series	No es posible crear un modelo sintético ya que no es posible evidenciar un conflicto conceptual durante la realización de la tarea respecto a estas ideas previas.

Tabla 58.- Modelos mentales de LB6

En la cuarta fase el estudiante señala el concepto de aproximaciones en series, pero no realiza una profundización sobre este.

Patrón de Cambio Conceptual LB7

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
LB7	Fase III	Magnitud inconmensurable: Aparece con la medida de longitudes inconmensurables por representaciones geométricas. Permite entender que no todos los números pueden expresarse en fracciones, es decir que abre paso a los irracionales.	No es posible crear un modelo sintético ya que no es posible evidenciar un conflicto conceptual durante la realización de la tarea respecto a estas ideas previas.

Tabla 59.- Modelos mentales de LB7

Para la fase III, comprende el concepto de magnitud inconmensurable, la cual reconoce que aparece con la medida de longitudes inconmensurables por representaciones geométricas. Explica que permite entender que no todos los números pueden expresarse en fracciones, es decir que abre paso a los irracionales. Desde este punto no vuelve a profundizar ni hacer ningún cambio conceptual.

Validación de la tarea a partir del estudiante LB

Durante LB1, el estudiante demuestra un cumplimiento efectivo del objetivo al desarrollar una comprensión progresiva de los números reales. Aunque hay elementos de cambio conceptual masivo debido a la presentación del material en el texto, el análisis revela un avance gradual en la comprensión, desde una visión básica hasta una capacidad crítica para cuestionar y evaluar el contenido. Se destacan características como propiciar un rol activo, modificar el conocimiento y promover la comprensión de conceptos didácticos y matemáticos.

En el caso de LB2, logra un cumplimiento pleno de los objetivos planteados. A lo largo de las fases, se evidencia un cambio conceptual incremental en su comprensión de las relaciones entre los números reales. Cada fase construye sobre la anterior, mostrando una trayectoria de aprendizaje estructurada y en constante profundización. Aquí también se resaltan características como propiciar un rol activo, abordar problemas profesionales y promover la comprensión de conceptos didácticos y matemáticos.

En LB3, el estudiante manifiesta un cumplimiento efectivo del objetivo de desarrollar una comprensión progresiva de las propiedades y operaciones de los números reales. A través de las diferentes fases, se observa un avance gradual en su comprensión, desde una base sólida hasta una capacidad crítica para evaluar y profundizar en su conocimiento. Además, se cumplen características como propiciar un rol activo, modificar el conocimiento y promover la comprensión de conceptos didácticos y matemáticos.

Durante LB4, muestra un cumplimiento pleno de los objetivos y características de una *tarea con sentido profesional en la formación de profesores de matemáticas*. A lo largo de las fases, se demuestra un cambio conceptual incremental en su comprensión de las representaciones de los números reales. Además, se evidencia una habilidad para identificar y corregir errores comunes, lo que indica un nivel avanzado de comprensión. Aquí también se cumplen características como propiciar un rol activo, abordar problemas profesionales, modificar el conocimiento y promover la comprensión de conceptos didácticos y matemáticos.

En el proceso LB5, el estudiante muestra un cumplimiento parcial de los objetivos. Aunque hay una progresión gradual en la comprensión de las representaciones y propiedades de los números reales, no se evidencia un desarrollo significativo en todas las fases. Sin embargo, demuestra una conciencia crítica sobre su comprensión actual, lo que refleja un reconocimiento de las características del desarrollo cognitivo/epistémico.

Por otro lado, en LB6, logra un cumplimiento parcial de los objetivos. Aunque identifica el concepto de aproximaciones en series en la primera fase, no profundiza sobre este en las siguientes etapas, lo que limita el avance significativo en la comprensión del tema. Se mantienen características como propiciar un rol activo y reconocer características del desarrollo cognitivo/epistémico.

Finalmente, en LB7, muestra un cumplimiento parcial de los objetivos al identificar el concepto de magnitud inconmensurable en la primera fase, pero no profundiza ni realiza cambios conceptuales significativos en las fases siguientes, lo que limita el avance sustancial en la comprensión del tema. Se mantienen características como propiciar un rol activo y reconocer características del desarrollo cognitivo/epistémico.

ESTUDIANTE VZ

Patrón de Cambio Conceptual VZ1

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
VZ1	Fase I	Identifica la introducción de los números reales como la fusión de los números racionales e irracionales, señalando ciertas ambigüedades en la definición de los números reales.	Comprende la definición inicial de los números reales como la unión de los números racionales e irracionales, pero reconoce la falta de especificidad en la descripción de cada subconjunto, lo que indica un nivel de conciencia sobre la claridad de la definición.
	Fase II	Menciona el conjunto numérico resultante de la unión de números racionales e irracionales, aclarando su composición.	Refuerza su comprensión al identificar explícitamente la composición del conjunto de números reales como la unión de los números racionales e irracionales, lo que muestra una mayor claridad sobre la definición de este conjunto numérico.
	Fase III	Aborda la distinción entre la irracionalidad y racionalidad, resaltando las características de los números irracionales y racionales	Profundiza su comprensión al diferenciar claramente entre los números irracionales y racionales, destacando las características específicas que los distinguen, como los decimales infinitos no periódicos en los números irracionales y la representación como fracciones en los números racionales.

Tabla 60.- Modelos Mentales de VZ1

El estudiante sigue un patrón de cambio conceptual incremental, pues a través de las fases, muestra un progreso gradual en la comprensión de los números reales, desde la identificación de su definición inicial hasta la distinción entre números irracionales y racionales.

En la primera fase, el estudiante comprende la definición inicial de los números reales como la fusión de los números racionales e irracionales, pero reconoce la falta de claridad en la descripción, lo que indica un nivel de conciencia sobre la ambigüedad en la definición.

Para la segunda fase, VZ refuerza su comprensión al identificar explícitamente la composición del conjunto de números reales, lo que muestra una mayor claridad sobre la definición. Con ello, en la tercera fase profundiza su comprensión al diferenciar claramente entre los números irracionales y racionales, destacando las características específicas que los distinguen. Esto demuestra una progresión en su nivel de conocimiento y comprensión del tema.

Este desarrollo gradual y acumulativo del conocimiento caracteriza un cambio conceptual incremental, donde el estudiante va integrando y refinando su comprensión de manera continua y estructurada.

Patrón de Cambio Conceptual VZ2

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
VZ2	Fase I	Identifica diversas representaciones numéricas, incluyendo fraccionarios decimales, fraccionarios no decimales y números decimales, destacando la importancia de comprender estas formas de representación.	Reconoce la importancia de comprender las distintas formas de representación numérica, pero señala la insuficiencia de una clasificación limitada de estas representaciones, lo que refleja un nivel inicial de análisis crítico sobre la diversidad de representaciones numéricas.
	Fase II	Se menciona la recta numérica y se enfatiza su construcción mediante herramientas geométricas, además de abordar la representación de sistemas numéricos.	Refuerza su comprensión al profundizar en la representación numérica mediante la recta numérica y su construcción geométrica, lo que muestra una ampliación del conocimiento sobre cómo se representan los números en este contexto.
	Fase III	Se centra en la representación en la recta numérica y su relación con construcciones geométricas, como las utilizadas por los pitagóricos, además de mencionar conceptos como aproximaciones por series y números algebraicos.	Profundiza su comprensión al relacionar la representación numérica con construcciones geométricas y conceptos matemáticos más avanzados, lo que indica una mayor sofisticación en el entendimiento de las diversas formas de representación de números reales.
	Fase IV	Se aborda el tema de los números trascendentes	Amplía su conocimiento al discutir los números trascendentes, lo que muestra una exploración de conceptos más avanzados dentro del tema de los números reales.
	Fase V	Se destaca la detección de un error en la expresión decimal y se aclara que no se requería periodicidad en ningún ejercicio.	Demuestra una capacidad para identificar errores y aclarar conceptos erróneos, lo que indica un nivel avanzado de análisis y comprensión crítica.

Tabla 61.- Modelos Mentales de VZ2

El estudiante sigue un patrón de cambio conceptual incremental, comenzando con una comprensión básica de las representaciones numéricas y avanza hacia un entendimiento más sofisticado que incluye la relación entre la representación numérica y construcciones geométricas, así como la exploración de conceptos matemáticos más avanzados como los números trascendentes y la detección de errores en expresiones numéricas.

En la fase I, muestra un inicio de análisis crítico al reconocer la importancia de comprender las diversas formas de representación numérica, pero señala la necesidad de una clasificación más amplia para una comprensión completa.

Durante la fase II, refuerza su comprensión al profundizar en la representación numérica mediante la recta numérica y su construcción geométrica, lo que indica una ampliación del conocimiento sobre cómo se representan los números en este contexto.

Con respecto a la fase III, se relacionan la representación numérica con construcciones geométricas y conceptos matemáticos más avanzados, lo que indica un avance en el entendimiento de las formas de representación de números reales.

Finalmente, en las fases IV y V, amplía su conocimiento al discutir los números trascendentes, lo que muestra una exploración de conceptos más avanzados dentro del tema de los números reales, para así poder demostrar una capacidad para identificar errores y aclarar conceptos erróneos, durante la quinta fase.

Patrón de Cambio Conceptual VZ3

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
VZ3	Fase II	Hace referencia al sistema numérico como la base del análisis y a sus propiedades asociadas. Identifica el sistema numérico junto con sus operaciones simples, la reflexividad y la transitividad.	Demuestra una comprensión sólida de los sistemas numéricos, enfatizando las operaciones básicas y las propiedades matemáticas fundamentales como la reflexividad y la transitividad. Esto sugiere un conocimiento estructurado y preciso sobre cómo los números y sus propiedades se interrelacionan.
	Fase V	Señala que no se menciona al sistema numérico, lo cual constituye un error. Identifica como propiedades del sistema numérico: la reflexividad, la simetría y la transitividad.	Corrige una omisión importante, reafirmando la necesidad de mencionar el sistema numérico explícitamente. Además, el estudiante reitera las propiedades fundamentales del sistema numérico (reflexividad, simetría y transitividad), lo que demuestra una comprensión clara y crítica del tema, y la capacidad de identificar y corregir errores conceptuales.

Tabla 62.- Modelos Mentales de VZ3

El análisis del proceso de aprendizaje del estudiante en el caso de VZ3 sigue un patrón de cambio conceptual incremental a lo largo de su proceso de aprendizaje sobre los sistemas numéricos y sus propiedades.

En la fase II, demuestra una comprensión sólida de los sistemas numéricos, enfatizando las operaciones básicas y las propiedades matemáticas fundamentales como la reflexividad y la transitividad. Esto sugiere un conocimiento estructurado y preciso sobre cómo los números y sus propiedades se interrelacionan. En la fase V, corrige una omisión importante al señalar que no se menciona explícitamente al sistema numérico.

Además, reafirma y profundiza su comprensión de las propiedades del sistema numérico, como la reflexividad, simetría y transitividad, lo cual indica un desarrollo continuo del conocimiento. Cada fase construye sobre la anterior, mostrando una trayectoria de aprendizaje estructurada y en constante profundización.

Patrón de Cambio Conceptual VZ4

Cód.	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
VZ4	Fase I	Analiza las propiedades de la adición y multiplicación en los números reales y las contrasta con las propiedades de los números racionales.	Muestra un entendimiento de cómo las propiedades de las operaciones aritméticas se aplican a diferentes conjuntos numéricos. Al comparar las propiedades de la adición y la multiplicación en los números reales y racionales, el estudiante evidencia una comprensión crítica de las similitudes y diferencias entre estos conjuntos.
	Fase II	Enfatiza que las propiedades se establecen en el conjunto, mientras que las operaciones se llevan a cabo en el sistema. Menciona propiedades significativas como la clausurativa, asociativa y conmutativa con relación a las operaciones.	Demuestra una comprensión más profunda de la estructura y funcionamiento del sistema numérico. Al distinguir entre el establecimiento de propiedades en el conjunto y la ejecución de operaciones en el sistema, y al identificar propiedades clave como la clausurativa, asociativa y conmutativa, el estudiante refina su análisis y muestra una comprensión más detallada y estructurada de cómo funcionan las operaciones dentro de los sistemas numéricos.

Tabla 63.- Modelos Mentales de VZ4

El estudiante en VZ4 sigue un patrón de cambio conceptual incremental al desarrollar una comprensión más profunda y detallada de las propiedades de las operaciones aritméticas en los números reales y racionales.

En la primera fase, se enfoca en analizar las propiedades de la adición y multiplicación en los números reales y las contrasta con las propiedades de los números racionales. Esto demuestra un entendimiento de cómo las propiedades de las operaciones aritméticas se aplican a diferentes conjuntos numéricos. Al comparar las propiedades de la adición y la multiplicación en los números reales y racionales, evidencia una comprensión crítica de las similitudes y diferencias entre estos conjuntos. En la segunda fase, enfatiza que las propiedades se establecen en el conjunto, mientras que las operaciones se llevan a cabo en el sistema. Menciona propiedades significativas como la clausurativa, asociativa y conmutativa con relación a las operaciones.

Al distinguir entre propiedades en el conjunto y la ejecución de operaciones en el sistema, y al identificar propiedades clave como la clausurativa, asociativa y conmutativa, el estudiante refina su análisis y muestra una comprensión más detallada y estructurada de cómo funcionan las operaciones dentro de los sistemas numéricos.

Patrón de Cambio Conceptual VZ5

Cód.	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
VZ5	Fase I	Identifica la relación de equivalencia entre los números reales.	Muestra una comprensión básica pero fundamental de cómo se establecen las relaciones de equivalencia en el conjunto de los números reales. Esto incluye el reconocimiento de propiedades como la reflexividad, simetría y transitividad, que son esenciales para definir una relación de equivalencia.
	Fase II	Menciona la relación que existe entre los números en relación con las operaciones de los números reales. Establece una correlación específica con los conjuntos, señalando que la operación de un número racional es análoga a la de los números reales. Se considera esta relación como derivada de la operación, aunque queda por determinar su veracidad.	Profundiza en su análisis al intentar establecer una conexión específica entre los números racionales y reales a través de sus operaciones. Este intento de correlacionar operaciones entre diferentes conjuntos muestra un avance en su comprensión del tema, aunque aún reconoce la necesidad de validar esta correlación.

Tabla 64.- Modelos Mentales de VZ5

El estudiante en el proceso VZ5 sigue un patrón de cambio conceptual incremental al desarrollar una comprensión más profunda de las relaciones de equivalencia y las operaciones en los números reales y racionales.

Pues, en la primera fase, identifica la relación de equivalencia entre los números reales, mostrando una comprensión básica pero fundamental de cómo se establecen estas relaciones. Esto incluye el reconocimiento de propiedades esenciales como la reflexividad, simetría y transitividad, que son cruciales para definir una relación de equivalencia.

En la segunda fase, menciona la relación que existe entre los números en relación con las operaciones de los números reales. Establece una correlación específica con los conjuntos, señalando que la operación de un número racional es análoga a la de los números reales.

Este proceso muestra que el enfoque inicial en identificar las relaciones de equivalencia proporciona una base sólida para la comprensión de cómo se estructuran los números reales.

Este desarrollo gradual, donde el conocimiento adquirido en la fase inicial se aplica y se expande en fases posteriores, caracteriza un cambio conceptual incremental; pues el estudiante va integrando y refinando su comprensión de manera continua y estructurada, lo que es típico de este patrón.

Patrón de Cambio Conceptual VZ6

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético

VZ6	Fase I	Identifica la omisión de características importantes de los números reales, como la densidad, la no numerabilidad y la completitud. Reconoce la relevancia de los números irracionales en situaciones de inconmensurabilidad y establece conexiones con los números racionales.	Se da cuenta de la necesidad de considerar aspectos más complejos de los números reales más allá de los números racionales, comenzando a construir una base para una comprensión más completa de los números reales.
	Fase II	Aborda en detalle los conceptos de densidad, no exclusividad de los números reales, no numerabilidad y completitud. Explica cómo la no numerabilidad implica que dos números no ocupan la misma posición en la recta numérica y cómo esto difiere de la numerabilidad.	Profundiza su comprensión de las propiedades fundamentales de los números reales y cómo estas propiedades difieren de las de otros conjuntos numéricos, avanzando en su comprensión de la estructura de los números reales.
	Fase III	Se resalta la noción de continuidad y completitud de los números reales, destacando que estos forman una línea continua e infinita sin puntos vacíos. Se enfatiza la densidad y la no numerabilidad, junto con la inconmensurabilidad.	Adquiere una comprensión más avanzada de cómo la continuidad y completitud de los números reales eliminan distancias "vacías" en la recta numérica, reforzando su conocimiento sobre la estructura y propiedades de los números reales.
	Fase IV	Se aborda la continuidad como resultado de la densidad y completitud y su relación con la recta numérica. Se menciona la no numerabilidad del conjunto de números reales y la inconmensurabilidad como la imposibilidad de expresar ciertas magnitudes de forma racional.	Consolida su comprensión de cómo la densidad y completitud conducen a la continuidad de la recta numérica, y cómo la no numerabilidad y la inconmensurabilidad definen las propiedades únicas de los números reales.
	Fase V	Se subraya que las propiedades de las operaciones involucran a ambos conjuntos (números racionales y reales), lo que influye en el cumplimiento de dichas propiedades.	Reconoce la influencia de los números racionales en las propiedades operacionales dentro del conjunto de números reales, completando su comprensión del comportamiento de estos números en operaciones matemáticas.

Tabla 65.- Modelos Mentales de VZ6

El análisis del proceso de aprendizaje del estudiante en VZ6, sigue un patrón de cambio conceptual incremental, donde cada fase construye sobre la anterior, permitiendo desarrollar gradualmente una comprensión más completa de los números reales y sus propiedades.

En la primera fase, identifica la omisión de características importantes de los números reales, como la densidad, la no numerabilidad y la completitud. Reconoce la relevancia de los números irracionales en situaciones de inconmensurabilidad y establece conexiones con los números racionales, lo que indica la complejidad de los números reales.

La segunda fase profundiza en conceptos como la densidad y la no numerabilidad de los números reales. Se explora cómo la no numerabilidad implica múltiples representaciones de un número en la recta numérica y la relación uno a uno entre números racionales y naturales, lo que muestra una comprensión más marcada de las propiedades de los números reales y su relación con otras estructuras numéricas.

En la tercera fase, se destaca la noción de continuidad y completitud de los números reales, junto con la densidad y la no numerabilidad. Se profundiza en la comprensión de la relación entre estos conceptos y su implicación en la estructura de los números reales.

La cuarta fase aborda la continuidad como resultado de la densidad y completitud, junto con la no numerabilidad del conjunto de números reales. Se profundiza en la noción de inconmensurabilidad y su relación con los números irracionales, lo que muestra una comprensión sólida de los conceptos fundamentales de los números reales y su relación con la geometría de la recta numérica.

Finalmente, en la quinta fase, se subraya que las propiedades de las operaciones involucran a ambos conjuntos (números racionales y reales), con lo cual concluye que los números racionales influyen en el cumplimiento de estas propiedades en los números reales, completando así su comprensión del comportamiento de estos números en operaciones matemáticas.

Patrón de Cambio Conceptual VZ7

VZ7	**Fase II**	Magnitud inconmensurable: Aparece con la medida de longitudes inconmensurables por representaciones geométricas. Permite entender que no todos los números pueden expresarse en fracciones, es decir que abre paso a los irracionales.	No es posible crear un modelo sintético ya que no es posible evidenciar un conflicto conceptual durante la realización de la tarea respecto a estas ideas previas.

Tabla 66.- Modelos mentales de VZ7

En la fase II, el estudiante menciona la magnitud inconmensurable, la cual aparece con la medida de longitudes inconmensurables por representaciones geométricas. No vuelve a profundizar en esto ni tiene algún conflicto conceptual.

Validación de la tarea a partir del estudiante VZ

En VZ1, muestra un cumplimiento efectivo del objetivo de comprender los números reales a través de un cambio conceptual incremental. A lo largo de las fases, el progreso es gradual, desde una definición inicial hasta la distinción entre números irracionales y racionales. Destacan características como propiciar un rol activo, modificar el conocimiento y promover la comprensión de conceptos didácticos y matemáticos.

En contraste, en VZ2, el estudiante muestra un cumplimiento pleno de los objetivos planteados. A través de las fases, demuestra un cambio conceptual incremental desde una comprensión básica de las representaciones numéricas hacia un entendimiento más sofisticado que incluye la relación entre estas representaciones y conceptos matemáticos avanzados. Aquí también se resaltan características como propiciar un rol activo, abordar problemas profesionales y promover la comprensión de conceptos didácticos y matemáticos.

Sin embargo, en VZ3, manifiesta un cumplimiento efectivo de los objetivos y características de una *tarea con sentido profesional en la formación de profesores de matemáticas*. A lo largo de las fases, se evidencia un cambio conceptual incremental en su comprensión de los sistemas numéricos y sus propiedades. Se destaca una trayectoria de aprendizaje estructurada y en constante profundización, así como el fomento del rol activo del estudiante y la promoción de la comprensión de conceptos didácticos y matemáticos.

En continuidad, en VZ4, destaca un cumplimiento pleno de los objetivos y características de una *tarea con sentido profesional en la formación de profesores de matemáticas*. A lo largo de las fases, demuestra un cambio conceptual incremental en su comprensión de las propiedades de las operaciones aritméticas en los números reales y racionales. Se observa una comprensión más detallada y estructurada de cómo funcionan las operaciones dentro de los sistemas numéricos. Aquí también se cumplen características como propiciar un rol activo, abordar problemas profesionales, modificar el conocimiento y promover la comprensión de conceptos didácticos y matemáticos.

A pesar de esto, en VZ5, se evidencia un cumplimiento pleno de los objetivos y características de una *tarea con sentido profesional en la formación de profesores de matemáticas*. A lo largo de las fases, el estudiante muestra un cambio conceptual incremental en su comprensión de las relaciones de equivalencia y las operaciones en los números reales y racionales. Se destaca una progresión continua y estructurada en la comprensión del tema, así como el fomento del rol activo del estudiante y la promoción de la comprensión de conceptos didácticos y matemáticos.

Asimismo, en VZ6, manifiesta un cumplimiento pleno de los objetivos y características de una *tarea con sentido profesional en la formación de profesores de matemáticas*. A lo largo de las fases, el estudiante muestra un cambio conceptual incremental en su comprensión de los números reales y sus propiedades. Se observa una construcción gradual de una comprensión más completa del tema, así como el fomento del rol activo del estudiante y la promoción de la comprensión de conceptos didácticos y matemáticos.

Sin embargo, en VZ7, el estudiante muestra un cumplimiento parcial de los objetivos al mencionar la magnitud inconmensurable en la fase I, pero no profundiza en este concepto ni presenta conflictos conceptuales. Aunque hay un inicio en la comprensión del tema, se destaca la necesidad de profundizar más en el desarrollo conceptual. Se mantienen características como propiciar un rol activo y reconocer características del desarrollo cognitivo/epistémico.

ESTUDIANTE GB

Patrón de Cambio Conceptual GB1

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
GB1	Fase I	Destaca que el libro comienza con una introducción histórica sobre los números irracionales y las contribuciones de Cantor y Dedekind en la construcción de los números reales.	Obtiene una base histórica y conceptual sólida sobre la evolución de los números reales, comprendiendo las raíces históricas y las principales contribuciones al desarrollo de estos conceptos.
	Fase II	Se presenta el conjunto de números reales (R) como la unión de números racionales (Q) e irracionales (I). Se explica la construcción de los números reales por Cantor a partir de sucesiones infinitas de números racionales y se menciona la introducción de los números reales con el descubrimiento de los números irracionales.	Entiende la composición del conjunto de números reales y la metodología utilizada por Cantor para su construcción, así como la relación entre números racionales e irracionales.
	Fase III	Se hace referencia a las cortaduras de Dedekind como un método para introducir los números reales.	Amplía su comprensión sobre la construcción de los números reales, conociendo la técnica de las cortaduras de Dedekind y su importancia en la teoría de los números reales.
	Fase IV	Se subraya la imposibilidad de garantizar que los conjuntos numéricos estén	Reflexiona sobre las limitaciones y complejidades en la contención de

		completamente contenidos unos en otros. Se discute el papel de Dedekind y se alude a la noción de unión entre conjuntos.	conjuntos numéricos, apreciando la profundidad de las contribuciones de Dedekind y entendiendo mejor la noción de unión de conjuntos.
	Fase V	Se establece que los números reales se introducen a través de las cortaduras de Dedekind, que se definen en el conjunto de los números racionales y conducen a la formación de los números reales. Se menciona nuevamente la construcción de Cantor mediante sucesiones infinitas de números racionales, asignando a cada número un punto en la recta numérica.	Consolida su conocimiento sobre las dos principales metodologías de construcción de los números reales, comprendiendo tanto la técnica de las cortaduras de Dedekind como la construcción de Cantor, y su representación en la recta numérica.

Tabla 67.- Modelos Mentales de GB1

El proceso de aprendizaje del estudiante en GB1 muestra un cambio conceptual incremental y una conexión entre diferentes metodologías de construcción de los números reales. En la primera fase, obtiene una base sólida tanto histórica como conceptual sobre la evolución de los números reales, comprendiendo las raíces históricas y las principales contribuciones al desarrollo de estos conceptos.

En la segunda fase, se presenta el conjunto de números reales como la unión de los números racionales e irracionales, explicando la metodología utilizada por Cantor para su construcción a partir de sucesiones infinitas de números racionales. Esto le permite entender la composición del conjunto de números reales y la relación entre los números racionales e irracionales. En la tercera fase, se introduce al estudiante en la técnica de las cortaduras de Dedekind como otro método para introducir los números reales, ampliando su comprensión sobre la construcción de estos números y reconociendo la importancia de esta técnica en la teoría de los números reales.

En la cuarta fase, reflexiona sobre las limitaciones y complejidades de conjuntos numéricos, reconociendo las dificultades en garantizar que los conjuntos estén completamente contenidos unos en otros y apreciando la profundidad de las contribuciones de Dedekind en este contexto.

Finalmente, en la quinta fase, consolida su conocimiento sobre las dos principales metodologías de construcción de los números reales: las sucesiones infinitas de Cantor y las cortaduras de Dedekind. Además, comprende cómo estas metodologías se aplican en la representación de los números reales en la recta numérica.

Patrón de Cambio Conceptual GB2

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
	Fase I	Propone la representación de números racionales e irracionales en la recta numérica, junto con diversas representaciones decimales.	Adquiere una comprensión inicial sobre cómo los números racionales e irracionales se ubican en la recta numérica y cómo se pueden representar decimalmente.

GB2	Fase II	Se aborda la recta numérica como un encajonamiento y se establece una conexión con el teorema de Pitágoras. Se identifican errores en la representación de los números reales en un diagrama de Venn, destacando problemas en la interpretación de los conjuntos racionales e irracionales, y se discute la notación científica.	Comprende la relación entre la recta numérica y el teorema de Pitágoras, adquiere habilidades críticas para identificar errores en diagramas y entiende la importancia de la notación científica para representar números de manera precisa.
	Fase III	Se resalta la noción de intervalos encajados de Cantor y se hace referencia a la representación en notación decimal.	Profundiza en conceptos avanzados como los intervalos encajados de Cantor y amplía su conocimiento sobre la representación decimal de los números, entendiendo su importancia en la teoría de conjuntos y en la continuidad de la recta numérica.
	Fase IV	Se mencionan conceptos como logaritmación, radicación, exponenciación y diversas representaciones operacionales.	Amplía su repertorio de operaciones matemáticas, entendiendo cómo se aplican la logaritmación, radicación y exponenciación en el contexto de los números reales y sus representaciones.
	Fase V	Se explora el modelo de la recta numérica y se detallan los distintos tipos de representaciones, como la notación decimal, que incluye números decimales finitos e infinitos no periódicos.	Consolida su comprensión de la recta numérica y las diversas representaciones de los números reales, diferenciando claramente entre números decimales finitos e infinitos no periódicos.

Tabla 68.- Modelos Mentales de GB2

El proceso GB2 muestra un desarrollo conceptual y operacional integral a lo largo de varias fases. En la primera fase, adquiere una comprensión inicial sobre cómo representar números racionales e irracionales en la recta numérica, así como su representación decimal.

En la segunda fase profundiza en la relación entre la recta numérica y el teorema de Pitágoras, y adquiere habilidades críticas para identificar errores en diagramas, además de entender la importancia de la notación científica. En la tercera fase, amplía su conocimiento sobre conceptos avanzados como los intervalos encajados de Cantor y la representación en notación decimal, profundizando en la teoría de conjuntos y la continuidad de la recta numérica. En la cuarta fase, se introducen conceptos avanzados como la logaritmación, radicación y exponenciación, comprendiendo su relevancia en el contexto de los números reales y sus representaciones.

Finalmente, en la quinta fase, consolida su comprensión del modelo de la recta numérica y las diversas representaciones de los números reales, diferenciando claramente entre los tipos de notación decimal y su significado.

Patrón de Cambio Conceptual GB3

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
GB3	Fase I	Está explorando las relaciones y operaciones entre números reales y racionales, así como las propiedades que las acompañan	Establecimiento de relaciones y operaciones entre números reales y racionales, y abordaje de propiedades

	Fase II	Parece haber internalizado el concepto de operaciones y sus propiedades en un sistema numérico, centrándose específicamente en la adición.	Incorporación de operaciones con propiedades de adición en un sistema numérico
	Fase V	Destaca que las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división tienen las mismas propiedades en ambos conjuntos numéricos	Reconocimiento de propiedades comunes en operaciones en ambos conjuntos numéricos

Tabla 69.- Modelos Mentales de GB3

El proceso de aprendizaje del estudiante en GB3 muestra un cambio conceptual incremental a lo largo de varias fases. En la primera fase, está explorando las relaciones y operaciones entre números reales y racionales, así como las propiedades que las acompañan. Esta fase puede considerarse como una introducción a la idea de que diferentes conjuntos numéricos tienen operaciones específicas con propiedades particulares.

En la segunda fase, menciona el concepto de operaciones y sus propiedades en un sistema numérico, centrándose específicamente en la adición. Esto indica una progresión en su comprensión de cómo funcionan las operaciones dentro de un sistema numérico específico. Finalmente, en la quinta fase, reconoce que las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división tienen las mismas propiedades en ambos conjuntos numéricos. Este reconocimiento de propiedades comunes en operaciones en ambos conjuntos numéricos indica un avance significativo en su comprensión.

Este cambio comenzó mencionando relaciones y operaciones básicas, luego profundizó en las propiedades de la adición y finalmente llegó a reconocer la generalidad de ciertas propiedades en diferentes operaciones y conjuntos numéricos. Este proceso refleja un desarrollo cognitivo gradual y una construcción activa del conocimiento, lo que es coherente con el modelo de cambio conceptual incremental.

Patrón de Cambio Conceptual GB4

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
GB4	Fase I	Aborda el concepto de igualdad al destacar las propiedades de los números reales, fundamentadas en las operaciones aritméticas.	Comprende la importancia de las propiedades de igualdad en los números reales como base para el análisis matemático, lo que indica una comprensión inicial del tema.
	Fase II	Se profundiza en la noción de igualdad, identificando tres propiedades que definen la relación de equivalencia, y se discute sobre las relaciones de orden y completitud.	Refuerza su comprensión al identificar y discutir diversas propiedades y conceptos relacionados con la igualdad y las relaciones de orden en los números reales, lo que indica un avance en su nivel de conocimiento y comprensión.
	Fase III	Se detallan aspectos como el orden, la densidad, la continuidad numérica, la inconmensurabilidad y la completitud.	Profundiza su comprensión al explorar en detalle diferentes aspectos del conjunto de números reales, lo que demuestra una mayor claridad sobre la estructura y las propiedades de este conjunto.
	Fase IV	Se destaca la ausencia de completitud en los enteros y se vuelve a mencionar la enumerabilidad.	Reconoce las limitaciones de ciertos conjuntos numéricos en términos de completitud y refuerza la comprensión

			sobre la enumerabilidad en el contexto de los números reales.
	Fase V	Se clarifica el concepto de relación de orden y se subraya la densidad del conjunto numérico.	Consolida su comprensión al aclarar y reforzar conceptos clave relacionados con el orden y la densidad en el conjunto de números reales, lo que indica un nivel avanzado de conocimiento y comprensión del tema.

Tabla 70.- Modelos Mentales de GB4

El estudiante sigue un patrón de cambio conceptual incremental a lo largo de varias fases. Progresa gradualmente desde una comprensión rudimentaria de los números reales como una combinación de números racionales e irracionales hacia un conocimiento más detallado de las distinciones entre estos conjuntos numéricos.

En la primera fase, se introduce al concepto de igualdad y a las propiedades básicas de los números reales, sentando así los cimientos esenciales para su comprensión futura. En la segunda fase, se profundiza en el concepto de igualdad al identificar y analizar las propiedades que definen la relación de equivalencia. Se discute también sobre las relaciones de orden y se introduce el concepto de completitud, ampliando así la comprensión del estudiante con conceptos más avanzados.

En la tercera fase, se exploran aspectos adicionales relacionados con el orden, la densidad, la continuidad numérica, la inconmensurabilidad y la completitud. Esta etapa profundiza aún más en los conceptos previamente introducidos y brinda al estudiante una comprensión más detallada y completa del tema.

La cuarta fase continúa construyendo sobre el conocimiento previo al abordar la falta de completitud en los enteros y abordar nuevamente la enumerabilidad en contextos específicos. En la quinta fase, se aclara la relación de orden y se enfatiza la densidad del conjunto numérico, consolidando y reafirmando los conceptos discutidos anteriormente y demostrando la comprensión profunda adquirida por el estudiante a lo largo del proceso.

En síntesis, esto refleja la progresión gradual del estudiante desde un nivel básico hacia una comprensión más detallada y sofisticada de los números reales, edificando sobre el conocimiento adquirido en cada fase previa.

Patrón de Cambio Conceptual GB5

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
GB5	Fase II	Señala que el texto no presenta magnitudes conmensurables, sino razones conmensurables entre magnitudes.	Reconocimiento de razones conmensurables entre magnitudes
	Fase IV	Hace referencia a la inconmensurabilidad. Este término se refiere a la imposibilidad de expresar la relación entre dos magnitudes como una razón de números enteros	Mención de la inconmensurabilidad

Tabla 71.- Modelos Mentales de GB5

El proceso de aprendizaje del estudiante en GB5 muestra un cambio conceptual incremental a lo largo de varias fases. Inicia en la segunda fase, en la que reconoce la ausencia de magnitudes conmensurables y señala la existencia de razones conmensurables entre magnitudes, lo que sugiere una comprensión más profunda de las relaciones numéricas y una reflexión sobre su naturaleza.

Continua en la cuarta fase, mencionando la inconmensurabilidad, entendida como la imposibilidad de expresar la relación entre dos magnitudes como una razón de números enteros. Este reconocimiento indica una comprensión más avanzada de las propiedades numéricas y una apreciación de las limitaciones de la representación numérica.

Este patrón de cambio conceptual implica una acumulación gradual de conocimientos y una refinación de la comprensión existente sobre las relaciones numéricas, pues, el estudiante avanza desde el reconocimiento de razones conmensurables hacia la comprensión de la inconmensurabilidad, lo que refleja un proceso de aprendizaje progresivo.

Validación de la tarea a partir del estudiante GB

El estudiante en GB1 cumplió con éxito el objetivo de comprender la construcción de los números reales mediante diferentes metodologías. A lo largo de las fases, demostró un cambio conceptual incremental al avanzar desde una comprensión inicial hasta una comprensión más profunda de las metodologías de Cantor y Dedekind. Esta progresión refleja una participación en su aprendizaje, lo que sugiere una característica de compromiso y reflexión.

En el caso de GB2, el estudiante logró desarrollar una comprensión conceptual y operacional integral de los números reales, lo que coincide con el objetivo establecido. Desde una comprensión inicial hasta la diferenciación entre tipos de notación decimal y su significado, el estudiante demostró un enfoque coherente con el cambio conceptual incremental. Este enfoque refleja la característica de construcción gradual del conocimiento y la habilidad para integrar conceptos complejos de manera efectiva.

El estudiante en GB3 exhibió un cambio conceptual incremental, avanzando desde una introducción básica hasta el reconocimiento de propiedades comunes en operaciones entre números reales y racionales. Este progreso refleja la característica de desarrollo cognitivo gradual y construcción activa del conocimiento. Además, la participación en la exploración de nuevas ideas y la reflexión sobre su significado destaca la característica de compromiso con el aprendizaje.

En GB4, siguió un patrón de cambio conceptual incremental, avanzando desde una comprensión rudimentaria hasta una comprensión detallada de los números reales y sus propiedades. Esta progresión coincide con la característica de construcción gradual del conocimiento, donde cada fase construyó sobre la anterior para consolidar la comprensión adquirida. Además, la participación en el aprendizaje refleja la característica de compromiso y reflexión.

Finalmente, en GB5, demostró un cambio conceptual incremental al avanzar desde el reconocimiento de conceptos básicos hasta la comprensión de conceptos más avanzados como la inconmensurabilidad. Este progreso refleja la característica de acumulación gradual de conocimientos y refinamiento de la comprensión existente. Además, la participación en la identificación y reflexión sobre propiedades numéricas destaca la característica de compromiso con el aprendizaje.

ESTUDIANTE JG

Patrón de Cambio Conceptual JG1

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético

JG1	Fase I	Expone que el libro aborda la noción de los números reales como un sistema numérico e introduce la utilización de los números reales para representar magnitudes inmensurables, incluyendo tanto números racionales como irracionales en su conjunto	Comprende que los números reales forman un sistema numérico integral que incluye tanto números racionales como irracionales y que pueden usarse para representar magnitudes que no pueden ser medidas con números enteros o fracciones simples
	Fase II	Profundiza en la utilización de los números reales para magnitudes inmensurables y sugiere que en la descripción del conjunto sería pertinente especificar que está compuesto por números racionales e irracionales. También hace referencia a la formación de cortes en el conjunto de los números racionales, resultando en números reales, y resalta la importancia de las sucesiones infinitas, la racionalidad y las sucesiones de Cauchy.	Amplía su comprensión de los números reales al incluir la noción de cortes (cortaduras de Dedekind) y las sucesiones de Cauchy, reconociendo que estas herramientas matemáticas son esenciales para definir los números reales y que cada número real tiene una representación en la recta numérica.
	Fase III	Plantea la imposibilidad de garantizar que los conjuntos numéricos estén contenidos unos en otros y discute que las cortaduras representan un número real (cortaduras de Dedekind). También comenta acerca de los intervalos encajados de Cantor.	Reconoce la complejidad en la relación entre diferentes conjuntos numéricos y cómo las cortaduras y los intervalos encajados ayudan a definir los números reales y sus propiedades.
	Fase V	Aborda nuevamente el tema del conjunto numérico de los números reales, resaltando su importancia y composición.	Consolida su comprensión de que los números reales forman un conjunto numérico esencial en matemáticas, destacando sus propiedades y la inclusión de números racionales e irracionales, y reafirma la importancia de las cortaduras y otras herramientas matemáticas para comprender la estructura de los números reales.

Tabla 72.- Modelos Mentales de JG1

El análisis del proceso de aprendizaje del estudiante muestra un cambio conceptual incremental a lo largo de varias fases. Comienza la primera fase, con una comprensión básica de los números reales como un sistema numérico que incluye tanto números racionales como irracionales. Luego, en fases posteriores, profundiza su comprensión al incluir conceptos avanzados como las cortaduras de Dedekind, las sucesiones de Cauchy y los intervalos encajados de Cantor.

En la segunda fase, amplía su comprensión al reconocer la importancia de especificar que el conjunto de números reales está compuesto por números racionales e irracionales. Además, se introduce en la formación de cortes en el conjunto de los números racionales y se destacan las sucesiones infinitas y las sucesiones de Cauchy como herramientas esenciales para entender los números reales y su correspondencia con puntos en la recta numérica.

En la tercera fase, profundiza en las propiedades de los conjuntos numéricos al plantear la dificultad de garantizar la inclusión de unos conjuntos numéricos en otros. Se discuten las cortaduras de Dedekind como una representación de números reales y se mencionan los intervalos encajados de Cantor, lo que sugiere una comprensión más avanzada de la estructura y las propiedades de los números reales.

Finalmente, en la quinta fase, el estudiante consolida su comprensión del conjunto numérico de los números reales, lo que indica un nivel más profundo en la comprensión de los conceptos discutidos en las fases anteriores.

Patrón de Cambio Conceptual JG2

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
JG2	Fase I	Explora la representación de los números reales, proporcionando ejemplos de números racionales e irracionales, y discutiendo conceptos de números fraccionarios, finitos e infinitos no periódicos. Además, se exploran diversas representaciones como fracciones y decimales finitos e infinitos, y se aborda el tema de los intervalos.	Adquiere una comprensión inicial de las diversas formas de representación de los números reales y de las diferencias básicas entre números racionales e irracionales.
	Fase II	Identifica errores en un diagrama de Venn, que sugiere incorrectamente que el conjunto de números racionales es mayor que el de irracionales. Discute la representación de los números reales mediante la recta real, relacionándola con la recta numérica, el encajonamiento y el teorema de Pitágoras. También aborda la notación científica y establece que un número real siempre tiene una representación periódica de periodo cero, decimal infinito o de periodos distintos.	Corrige conceptos erróneos y profundiza en su comprensión de la estructura y la representación de los números reales, integrando conocimientos sobre su relación con otros conceptos matemáticos.
	Fase III	Se enfoca en la representación de los números reales mediante notación decimal.	Consolida su comprensión de la notación decimal como una representación fundamental de los números reales.
	Fase IV	Discute la representación simbólica y gráfica de los números reales en la recta numérica, introduciendo conceptos más avanzados como logaritmación, radicación, exponenciación y diversas representaciones operacionales.	Desarrolla una comprensión más avanzada y profunda de las operaciones y las representaciones gráficas de los números reales, ampliando su conocimiento a áreas más complejas de la matemática.
	Fase V	Aborda la representación gráfica del modelo gráfico.	Sintetiza la información aprendida en las fases anteriores, demostrando una comprensión completa y la capacidad de aplicar conceptos de representación gráfica en un contexto más amplio.

Tabla 73.- Modelos Mentales de JG2

El proceso de aprendizaje del estudiante en JG2 muestra un cambio conceptual incremental a lo largo de varias fases. Comienza con una exploración de la representación de los números reales, incluyendo ejemplos de números racionales e irracionales, así como diversas formas de representación como fracciones y decimales finitos e infinitos.

En esta primera fase, adquiere una comprensión inicial de las diferencias básicas entre números racionales e irracionales. En la segunda fase, identifica errores en la representación del conjunto de números reales en un diagrama de Venn, corrigiendo conceptos erróneos y profundizando en su comprensión de la estructura y la representación de los números reales. Se introducen conceptos como la recta real, el encajonamiento y el teorema de Pitágoras, además de discutir la notación científica y las representaciones periódicas y no periódicas de los números reales.

La tercera fase se centra en la representación de los números reales mediante notación decimal, lo que indica una consolidación de los conceptos discutidos en las fases anteriores. En la cuarta fase, aborda la representación simbólica y gráfica de los números reales en la recta numérica, discutiendo conceptos más avanzados como logaritmación, radicación, exponenciación y diversas representaciones operacionales. Esto demuestra una comprensión más avanzada y profunda de las operaciones y las representaciones gráficas de los números reales.

Finalmente, en la quinta fase, sintetiza la información aprendida en las fases anteriores al abordar la representación gráfica del modelo gráfico. Esta etapa final muestra una comprensión completa y la capacidad de aplicar conceptos de representación gráfica en un contexto más amplio.

Patrón de Cambio Conceptual JG3

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
JG3	Fase I	Establece relaciones entre las operaciones fundamentales (suma, resta, multiplicación y división) en los números reales y los números racionales.	Comprende cómo funcionan estas operaciones en ambos conjuntos numéricos y cómo están relacionadas, formando una base sólida para entender las propiedades de los sistemas numéricos.
	Fase II	Explora y destaca las propiedades de las operaciones de adición y multiplicación en los sistemas numéricos, mencionando específicamente la propiedad clausurativa, asociativa, conmutativa, modulativa, invertiva y distributiva	Desarrolla una comprensión más profunda de las propiedades que subyacen a las operaciones básicas en los números reales y los números racionales, reconociendo que estas propiedades son fundamentales para la estructura de los sistemas numéricos.
	Fase V	Menciona la exposición de sistemas numéricos presentes en el libro, destacando principalmente las propiedades de adición, sustracción, multiplicación y división.	Consolida su comprensión de las propiedades fundamentales de las operaciones en los sistemas numéricos, demostrando una visión integrada y completa de cómo estas propiedades se aplican en diferentes contextos numéricos.

Tabla 74.- Modelos Mentales de JG3

El estudiante en JG3 avanza de manera gradual desde una comprensión básica de las operaciones en los números reales y racionales hacia una comprensión más profunda y completa de las propiedades fundamentales que rigen estas operaciones.

En la primera fase, establece relaciones entre las operaciones fundamentales en ambos conjuntos numéricos, lo que demuestra una comprensión inicial de cómo funcionan estas operaciones y cómo están relacionadas.

En la segunda fase, profundiza en la exploración de las propiedades de las operaciones de adición y multiplicación, identificando específicamente propiedades como la clausurativa, asociativa, conmutativa, modulativa, invertiva y distributiva. Esta fase refleja una comprensión más avanzada de las propiedades en las operaciones básicas de los números reales y los números racionales.

Finalmente, en la quinta fase, menciona la exposición de sistemas numéricos presentes en el libro, destacando principalmente las propiedades de adición, sustracción, multiplicación y división. Esto indica la comprensión de las propiedades fundamentales de las operaciones en los sistemas numéricos, demostrando una visión completa de cómo estas propiedades se aplican en diferentes contextos numéricos.

Patrón de Cambio Conceptual JG4

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
JG4	Fase I	Establece una conexión entre el tema actual y las propiedades de los números reales discutidas anteriormente.	Demuestra una comprensión inicial del tema al aplicar las propiedades conocidas de los números reales, mostrando una base sólida de conocimiento previo.
	Fase II	Explora conceptos relacionados con el orden y la completitud, incluyendo relaciones simétricas, antisimétricas, reflexivas y transitivas. Define el orden y enfatiza la importancia de la completitud, así como la inconmensurabilidad de los números reales.	Profundiza su comprensión de las propiedades fundamentales de los números reales, adquiriendo una visión más detallada y estructurada de estos conceptos.
	Fase III	Se enfoca en conceptos de orden, densidad, continuidad numérica y completitud, además de la inconmensurabilidad.	Fortalece su comprensión de cómo las propiedades de orden, densidad y continuidad se aplican a los números reales, desarrollando una comprensión integrada de estos conceptos.
	Fase IV	Examina la completitud y densidad en relación con la recta numérica y los conjuntos de números reales, mencionando relaciones como la densidad y la continuidad numérica.	Logra una comprensión detallada de cómo la completitud y densidad se manifiestan en la recta numérica y en el conjunto de los números reales, mejorando su capacidad para visualizar y aplicar estos conceptos.
	Fase V	Explora las propiedades reflexivas, simétricas y transitivas en números racionales y reales, destacando la importancia de la relación de orden.	Consolida su comprensión de las propiedades fundamentales de los números reales y racionales, reconociendo la importancia de las relaciones de orden y su aplicación en contextos numéricos.

Tabla 75.- Modelos Mentales de JG4

En el proceso de aprendizaje del estudiante en JG4 muestra el avance progresivo en la comprensión básica de las propiedades de los números reales hacia una comprensión más profunda y detallada, integrando conceptos clave a lo largo del proceso.

En la primera fase, establece conexiones entre el tema actual y las propiedades de los números reales discutidas previamente, mostrando una base sólida de conocimiento previo y una comprensión inicial del tema. En la segunda fase, profundiza en conceptos relacionados con el orden y la completitud, explorando relaciones simétricas, antisimétricas, reflexivas y transitivas. Define el orden y resalta la importancia de la completitud, así como la inconmensurabilidad de los números reales, lo que demuestra una comprensión avanzada de las propiedades fundamentales de los números reales.

En la tercera fase, se enfoca en conceptos de orden, densidad, continuidad numérica y completitud, fortaleciendo su comprensión de cómo estas propiedades se aplican a los números reales y desarrollando una comprensión integrada de estos conceptos.

La cuarta fase examina detalladamente la completitud y densidad en relación con la recta numérica y los conjuntos de números reales, lo que indica una comprensión sólida de cómo estas propiedades se relacionan entre sí y con los números reales. Finalmente, en la quinta fase, explora las propiedades reflexivas, simétricas y transitivas en números reales, destacando la importancia de la relación de orden y su aplicación en contextos numéricos.

Por ello, el estudiante sigue un patrón de cambio conceptual incremental, avanzando gradualmente desde una comprensión inicial hasta una comprensión más profunda y detallada de los conceptos relacionados con los números reales.

Patrón de Cambio Conceptual JG5

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
JG5	Fase I	Define las características de la igualdad y la desigualdad entre números reales, lo que facilita la comprensión de las relaciones de orden.	Se establece una base sólida al comprender las características fundamentales de la igualdad y la desigualdad entre números reales, lo que sienta las bases para comprender las relaciones de orden y otras propiedades numéricas.
	Fase II	Se establecen las relaciones de igualdad y desigualdad, lo que conduce al desarrollo de propiedades.	Avanza en su comprensión al aplicar las definiciones de igualdad y desigualdad para derivar y entender propiedades numéricas más complejas, lo que implica una internalización más profunda de los conceptos matemáticos.
	Fase V	Se aborda el tema de las relaciones comenzando por estas, lo que incluye la anotación de las condiciones a cumplir, como la igualdad de r a m o la correspondencia de los números y sus expresiones, particularmente en el caso de las expresiones de desigualdad.	Profundiza en la comprensión de las relaciones numéricas al considerar condiciones específicas y aplicarlas en situaciones de desigualdad, lo que refina su comprensión de cómo las relaciones numéricas se manifiestan en diversas expresiones matemáticas.

Tabla 76.- Modelos Mentales de JG5

El estudiante en JG5 progresa en su comprensión de las relaciones numéricas y sus propiedades, desarrollando un concepto más profundo a lo largo del proceso de aprendizaje.

En las primeras dos fases, establece los fundamentos al comprender las características básicas de la igualdad y la desigualdad entre números reales. Esta comprensión inicial sienta las bases sólidas para el desarrollo posterior, proporcionando una base sólida del tema.

A medida que avanza el proceso, profundiza en su comprensión al aplicar estas definiciones para derivar propiedades numéricas más complejas. Este avance implica un progreso significativo en su comprensión conceptual, ya que internaliza de manera más profunda los conceptos matemáticos fundamentales.

En la quinta fase, aborda el tema de las relaciones y la correspondencia de los números y sus expresiones, especialmente, en el caso de desigualdad. Aplica conceptos de expresiones matemáticas en situaciones concretas.

Validación de la tarea a partir del estudiante JG

En este proceso, el estudiante muestra un cumplimiento efectivo del objetivo de desarrollar una comprensión progresiva de los números reales. A través de las diferentes fases, demuestra un avance gradual desde una comprensión básica hasta una comprensión más profunda de conceptos avanzados como las cortaduras de Dedekind y los intervalos encajados de Cantor. Las características cumplidas incluyen propiciar un rol activo y promover la comprensión de conceptos matemáticos y didácticos.

Por otro lado, en JG2, muestra un cumplimiento pleno de los objetivos planteados. Cada fase contribuye a una comprensión más amplia y detallada de los números reales y sus representaciones. Además, demuestra una capacidad para aplicar conceptos en diferentes contextos, lo que indica un alto nivel de comprensión y habilidad para transferir conocimientos. Las características cumplidas incluyen propiciar un rol activo, abordar problemas profesionales y promover la comprensión de conceptos didácticos y matemáticos.

En contraste, en JG3, manifiesta un cumplimiento efectivo del objetivo de desarrollar una comprensión progresiva de las propiedades de los números reales. A través de las diferentes fases, avanza desde una comprensión básica hasta una comprensión más profunda de conceptos como el orden, la densidad y la completitud. Las características cumplidas incluyen propiciar un rol activo, promover la comprensión de conceptos matemáticos y didácticos, y modificar el conocimiento.

Además, en JG4, demuestra un cumplimiento pleno de los objetivos y características de una *tarea con sentido profesional en la formación de profesores de matemáticas*. A través de las diferentes fases, demuestra un cambio conceptual incremental y una comprensión profunda de las propiedades de los números reales. Además, muestra una capacidad para relacionar conceptos y entender la estructura del conjunto de números reales. Las características cumplidas incluyen propiciar un rol activo, abordar problemas profesionales, modificar el conocimiento y promover la comprensión de conceptos didácticos y matemáticos.

Aunque en JG5, manifiesta un cumplimiento parcial de los objetivos. Aunque demuestra un avance en su comprensión de las relaciones numéricas y sus propiedades a lo largo del proceso, no se evidencia una progresión clara desde una comprensión básica hasta una comprensión más profunda. Sin embargo, demuestra una capacidad para aplicar conceptos en situaciones concretas. Las características cumplidas incluyen propiciar un rol activo y reconocer características del desarrollo cognitivo/epistémico.

ESTUDIANTE DD

Patrón de Cambio Conceptual DD1

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
DD1	Fase I	Establece que la unión de los números racionales e irracionales constituye el conjunto de los números reales, denotado por R. Además, identifica	Comprende la estructura jerárquica de los conjuntos numéricos y reconoce que los números reales extienden a los números racionales, que incluyen a los enteros y

		interconexiones entre distintos conjuntos numéricos.	naturales.
	Fase II	Define los números decimales periódicos y no periódicos, y representa el conjunto de los números reales como la unión de los racionales e irracionales.	Adquiere una comprensión más específica de la representación de los números reales, destacando su inclusión en el texto como un conjunto único que abarca tanto números decimales periódicos como no periódicos.
	Fase III	Destaca que los números reales pueden expresar tanto fracciones como números irracionales.	Desarrolla una comprensión más profunda de la versatilidad del conjunto de los números reales, reconociendo que incluye tanto los números racionales (fracciones) como los irracionales.
	Fase V	Menciona que la presentación de los números reales en el libro como un conjunto numérico es un error, ya que no es posible caracterizar los números reales mediante la simple combinación de dos conjuntos.	Muestra una capacidad crítica avanzada, siendo capaz de identificar y cuestionar errores conceptuales en el material de estudio, y adquiere un entendimiento más sólido de las propiedades y características del conjunto de los números reales.

Tabla 77.- Modelos Mentales de DD1

El proceso de análisis del estudiante DD1 sigue un patrón de cambio conceptual incremental al desarrollar una comprensión cada vez más matizada del conjunto de los números reales y su relación con otros conjuntos numéricos.

En la primera fase, se establece que la unión de los números racionales con los números irracionales constituye el conjunto de los números reales, denotado por R. Aunque el texto no aborda explícitamente los números reales como un sistema numérico, los considera como un conjunto numérico y revela interconexiones entre distintos conjuntos numéricos. Se subraya que los números reales extienden los números racionales, que a su vez engloban a los enteros y a los naturales, y se advierte sobre las relaciones entre conjuntos. Esta fase demuestra una comprensión básica pero crucial de la estructura jerárquica de los conjuntos numéricos y sus interrelaciones.

En la segunda fase, se definen los números decimales periódicos y no periódicos, representados por R. Específicamente, se menciona que R=Q∪I, lo que refiere a la inclusión de los números reales en el texto, única en su carácter como conjunto. Este paso representa un avance en la comprensión del estudiante, ya que introduce una representación específica de los números reales y subraya su caracterización a través de números decimales. En la tercera fase, se destaca que los números reales pueden expresar tanto fracciones como números irracionales. Esto demuestra una comprensión más profunda y concreta de la amplitud y versatilidad del conjunto de los números reales, ilustrando cómo abarcan tanto los números racionales (fracciones) como los irracionales

A medida que avanza, en la quinta fase, menciona que, aunque se presenta en el libro a los números reales como un conjunto numérico, esto es un error, ya que no es posible caracterizar los números reales mediante la combinación de otros dos conjuntos. Esta fase final muestra una capacidad crítica desarrollada del estudiante, quien ahora es capaz de identificar y cuestionar errores conceptuales en el material de estudio.

El análisis del patrón de cambio conceptual indica que el estudiante comienza con una comprensión básica de la estructura y extensión de los números reales y, a través de las fases, profundiza en su comprensión y aplicación de estos conceptos. La identificación y corrección de errores en la fase final sugiere un avance en su capacidad crítica y un entendimiento más sólido de las propiedades y características del conjunto de los números reales.

Patrón de Cambio Conceptual DD2

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
DD2	Fase I	Destaca la asociación entre cada número real y un punto en la recta, así como la correspondencia inversa. Además, menciona otras formas de representación, como la notación científica, los intervalos y la radicación, y reconoce que el material no aborda explícitamente la diversidad de métodos de representación	Comprende la estructura jerárquica de los conjuntos numéricos y reconoce que los números reales extienden a los números racionales, que incluyen a los enteros y naturales.
	Fase II	Alude a la representación geométrica en la recta numérica y aclara que la representación de logaritmos y exponentes es una operación, no una representación.	Desarrolla una comprensión más precisa de las diferencias entre representaciones y operaciones matemáticas, distinguiendo entre formas de representación geométrica y operaciones como logaritmos y exponentes.
	Fase III	Subraya la relevancia de sistemas de representación como la notación decimal y la recta numérica, mencionando las relaciones y correspondencias entre distintos sistemas de representación.	Amplía su comprensión de los números reales utilizando diversos sistemas de representación, como el sistema decimal, la recta numérica, fracciones, notación científica, y representaciones formales como las cortaduras de Dedekind y sucesiones de Cauchy.
	Fase IV	Describe la recta numérica y discute la falta de representación de expresiones algebraicas, magnitudes geométricas y expresiones decimales, abarcando notaciones decimales finitas, periódicas y no periódicas.	Identifica lagunas en la representación de ciertos tipos de expresiones, demostrando una capacidad crítica y un entendimiento más detallado de las distintas formas de representación y sus limitaciones en el material.
	Fase V	Reitera la asignación de un punto en la recta a cada número real y viceversa, mencionando el encajonamiento y el teorema de Pitágoras. Reconoce la existencia de representaciones operacionales para logaritmación, exponenciación, radicación y notación científica.	Refuerza su comprensión de la correspondencia entre números reales y puntos en la recta, así como de las representaciones operacionales. Muestra un entendimiento integral de diversas representaciones y operaciones, consolidando su conocimiento adquirido a lo largo de las fases.

Tabla 78.- Modelos Mentales de DD2

El estudiante sigue un patrón de cambio conceptual incremental, pues a lo largo de las fases, se observa un desarrollo progresivo y acumulativo del conocimiento sobre la representación de los números reales, desde una comprensión básica hasta una apreciación más completa y crítica.

En la fase I comienza identificando la asociación básica entre los números reales y sus representaciones en la recta numérica. Nota la correspondencia entre números y puntos, y menciona varias formas de representación. Sin embargo, también reconoce una limitación en el material de estudio, lo que indica una comprensión inicial pero consciente de las posibles deficiencias en la presentación del tema.

En la fase II, avanza en su análisis al diferenciar entre representaciones geométricas y operaciones matemáticas, como logaritmos y exponentes. Esta distinción muestra una comprensión más precisa de cómo los números reales pueden representarse y manipularse. En la fase III, profundiza en su comprensión al subrayar la importancia de diversos sistemas de representación, como la notación decimal y la recta numérica, y al destacar las relaciones entre diferentes métodos de representación. Utiliza ejemplos como las cortaduras de Dedekind y sucesiones de Cauchy para mostrar una comprensión avanzada y detallada de los números reales.

Para la fase IV muestra una capacidad crítica al identificar lagunas en la representación de ciertas expresiones algebraicas, geométricas y decimales. Esta fase refleja un conocimiento más completo y la habilidad para evaluar la suficiencia y claridad de las representaciones proporcionadas en el material de estudio. Durante la fase V, consolida su comprensión al reiterar la correspondencia entre números reales y puntos en la recta, y al mencionar métodos de representación operacional, como la logaritmación y la exponenciación. De igual forma, demuestra un entendimiento integral y sofisticado de las diversas formas de representar y operar con números reales.

Patrón de Cambio Conceptual DD3

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
DD3	Fase I	Revisa las propiedades algebraicas relacionadas con la adición y la sustracción en los números reales.	Comprende las propiedades fundamentales de la clausura, conmutatividad, asociatividad, modularidad e inversión. Esto establece una base sólida para el entendimiento de las operaciones dentro del conjunto de números reales.
	Fase II	Compara las operaciones de adición y multiplicación en los números reales con las mismas operaciones en los números racionales.	Reconoce que las propiedades algebraicas de las operaciones en los números reales son análogas a las propiedades en los números racionales, lo que muestra una comprensión más profunda y matizada de estas propiedades al poder contrastarlas entre diferentes conjuntos numéricos.

Tabla 79.- Modelos Mentales de DD3

En el proceso de aprendizaje del estudiante en DD3, se muestra el avance y revisa las propiedades algebraicas relacionadas con la adición y la sustracción en los números reales, durante la fase I. Igualmente comprende las propiedades fundamentales de la clausura, conmutatividad, asociatividad, modularidad e inversión. Esto establece una base sólida para el entendimiento de las operaciones dentro del conjunto de números reales.

En la fase II, compara las operaciones de adición y multiplicación en los números reales con las mismas operaciones en los números racionales. De esta forma, reconoce que las propiedades algebraicas de las operaciones en los números reales son análogas a las propiedades en los números racionales, lo que muestra una comprensión más profunda y matizada de estas propiedades al poder contrastarlas entre diferentes conjuntos numéricos.

Sigue un patrón de cambio conceptual incremental, pues a lo largo de las fases, se observa un desarrollo del conocimiento sobre las propiedades algebraicas de las operaciones en los números reales, desde una comprensión inicial de las propiedades básicas hasta una comparación más avanzada con las operaciones en los números racionales.

Patrón de Cambio Conceptual DD4

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
DD4	Fase I	Menciona la presentación de los números irracionales en el libro, destacando la falta de una definición formal.	Comprende que los números irracionales, junto con los racionales, forman el conjunto de los números reales, proporcionando una base inicial para entender la composición de los números reales.
	Fase II	Analiza las propiedades de los números irracionales, especialmente en relación con el producto de dos números irracionales.	Reconoce que el producto de dos números irracionales no siempre es racional y que el producto de un número irracional con cualquier número distinto de cero resulta en un número irracional. Esto muestra una comprensión más profunda de las propiedades de los números irracionales.
	Fase V	Establece que no puede haber un número que sea simultáneamente racional e irracional.	Entiende claramente la distinción y la exclusividad entre los números racionales e irracionales, lo que refina su comprensión de la estructura del conjunto de los números reales.

Tabla 80.- Modelos Mentales de DD4

El estudiante sigue un patrón de cambio conceptual incremental a través de las fases, ya que se presenta un desarrollo progresivo y acumulativo del conocimiento sobre los números irracionales y su relación con los números racionales dentro del conjunto de los números reales.

En la primera fase identifica la falta de una definición formal de los números irracionales en el libro y comprende la unión de los números racionales e irracionales como formadora del conjunto de los números reales. Esto proporciona una base inicial para entender la estructura de los números reales.

Para la segunda fase, profundiza su comprensión al analizar las propiedades del producto de números irracionales, reconociendo que su producto no siempre resulta en un número racional y que el producto de un número irracional siempre es un número irracional.

Durante la quinta fase, aclara la exclusividad mutua entre los números racionales e irracionales, demostrando una comprensión clara de la distinción entre estos conjuntos. Este desarrollo progresivo, donde cada fase construye sobre el conocimiento adquirido en la fase anterior, caracteriza un cambio conceptual incremental.

Patrón de Cambio Conceptual DD5

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
DD5	Fase I	Identifica implícitamente las características de orden y completitud en el texto, observando que los números reales no tienen intervalos vacíos y que siempre hay otro número real entre dos números reales dados	Comprende que los números reales son completos y que, a diferencia de los números racionales, no tienen intervalos vacíos y siempre hay un número real entre cualquier par de números reales. Esto establece una base sólida para entender las propiedades fundamentales de los números reales.
	Fase II	Menciona que la completitud implica la existencia de otro número entre dos números dados, ilustrando este concepto con el encajonamiento del número pi. También identifica propiedades algebraicas relacionadas con las operaciones básicas.	Avanza en su comprensión de la completitud y orden de los números reales, utilizando ejemplos específicos como el encajonamiento del número pi. Reconoce las propiedades algebraicas que se aplican a las operaciones básicas.
	Fase III	Subraya la importancia de la completitud y la densidad, definiendo el concepto de orden y reconociendo la estructura de cuerpo ordenado completo y la no numerabilidad de los números reales.	Profundiza en su comprensión al definir y conectar los conceptos de completitud, densidad y orden en la recta numérica, así como al reconocer la importancia de la no numerabilidad y la estructura de cuerpo ordenado completo.
	Fase IV	Menciona términos como completitud, densidad y la no biyección.	Mantiene y refuerza su comprensión de las propiedades fundamentales de los números reales, asegurándose de recordar los términos clave y sus implicaciones.
	Fase V	Aborda nuevamente el tema del orden y las propiedades, reconociendo la ausencia de continuidad, densidad y cardinalidad en el análisis realizado.	Refina su análisis al identificar áreas faltantes en la discusión sobre continuidad, densidad y cardinalidad, mostrando una capacidad crítica para evaluar la exhaustividad del contenido analizado

Tabla 81.- Modelos Mentales de DD5

El estudiante sigue un patrón de cambio conceptual incremental. A través de las fases, hay un desarrollo progresivo del conocimiento sobre las propiedades de los números reales, especialmente en relación con el orden, la completitud y la densidad.

En la primera fase identifica las características de orden y completitud, observando que los números reales no tienen intervalos vacíos y que siempre existe otro número real entre dos números dados. Esto proporciona una base sólida para la comprensión de los números reales. Para la segunda fase, avanza en su comprensión al ilustrar la completitud con el encajonamiento del número pi y al identificar las propiedades algebraicas. Esto muestra un mayor entendimiento de cómo se manifiestan estas propiedades en los números reales.

Durante la tercera fase, profundiza su comprensión al definir y conectar los conceptos de completitud, densidad y orden, reconociendo también la no numerabilidad y la estructura de cuerpo ordenado completo de los números reales. Esto representa un avance significativo en su conocimiento. En la cuarta fase, el estudiante mantiene y refuerza su comprensión de las propiedades fundamentales, mencionando términos clave y sus implicaciones. En la quinta fase, el estudiante completa su análisis crítico al reconocer áreas faltantes en la discusión sobre continuidad, densidad y cardinalidad, mostrando una capacidad avanzada para evaluar la exhaustividad del contenido. Este desarrollo progresivo, donde cada fase construye sobre el conocimiento adquirido en la fase anterior, caracteriza un cambio conceptual incremental.

Patrón de Cambio Conceptual DD6

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
DD6	Fase III	Reconoce la importancia de actividades prácticas que involucren la formación, transformación, traducción y coordinación de representaciones numéricas. Sugiere que estas actividades ayudarían a los estudiantes a comprender mejor cómo diferentes formas de representación pueden relacionarse entre sí.	No es posible crear un modelo sintético ya que no es posible evidenciar un conflicto conceptual durante la realización de la tarea respecto a estas ideas previas.

Tabla 82.- Modelos mentales de DD6

En la fase III, reconoce la importancia de actividades prácticas que involucren la formación, transformación, traducción y coordinación de representaciones numéricas. Sugiere que estas actividades ayudarían a los estudiantes a comprender mejor cómo diferentes formas de representación pueden relacionarse entre sí.

Patrón de Cambio Conceptual DD7

Cód	Fases	Modelo Mental Inicial	Modelo Sintético
DD7	Fase II	Comenta que no se menciona nada de estructuras algebraicas.	No es posible crear un modelo sintético ya que no es posible evidenciar un conflicto conceptual durante la realización de la tarea respecto a estas ideas previas.

Tabla 83.- Modelos mentales de DD7

En la segunda fase, el estudiante comenta que el texto no menciona nada de estructuras algebraicas sin indagar o profundizar sobre esto.

Validación de la tarea a partir del estudiante DD

El estudiante en DD1 muestra un cumplimiento efectivo del objetivo de desarrollar una comprensión progresiva de los números reales y sus interrelaciones. A través de las diferentes fases, demuestra un avance gradual en su comprensión, desde una visión básica hasta una capacidad crítica para cuestionar y evaluar el contenido. Además, identifica y corrige errores conceptuales en el material de estudio. Las características cumplidas incluyen propiciar un rol activo, modificar el conocimiento y promover la comprensión de conceptos didácticos y matemáticos.

Por otro lado, en DD2, mantiene un cumplimiento pleno de los objetivos y características de una *tarea con sentido profesional en la formación de profesores de matemáticas*. A lo largo de las fases, demuestra un desarrollo progresivo y acumulativo del conocimiento sobre la representación de los números reales, desde una comprensión básica hasta una apreciación más completa y crítica. Además, reconoce las limitaciones del material de estudio y profundiza en su comprensión a través de ejemplos y comparaciones. Las características cumplidas incluyen propiciar un rol activo, abordar problemas profesionales, modificar el conocimiento y promover la comprensión de conceptos didácticos y matemáticos.

En DD3, manifiesta un cumplimiento efectivo del objetivo de desarrollar una comprensión progresiva de las propiedades algebraicas de los números reales. A lo largo de las fases, demuestra un avance gradual en su comprensión, desde una comprensión inicial de las propiedades básicas hasta una comparación más avanzada con las operaciones en los números racionales. Además, demuestra un entendimiento claro de las operaciones dentro del conjunto de números reales. Las características cumplidas incluyen propiciar un rol activo, modificar el conocimiento y promover la comprensión de conceptos didácticos y matemáticos.

En DD4, muestra un cumplimiento pleno de los objetivos y características de una *tarea con sentido profesional en la formación de profesores de matemáticas*. A través de las fases, demuestra un desarrollo progresivo y acumulativo del conocimiento sobre los números irracionales y su relación con los números racionales dentro del conjunto de los números reales. Además, identifica y aclara conceptos clave y sus implicaciones. Las características cumplidas incluyen propiciar un rol activo, modificar el conocimiento y promover la comprensión de conceptos didácticos y matemáticos.

Por otro lado, el estudiante en DD5 muestra un cumplimiento efectivo del objetivo de desarrollar una comprensión progresiva de las propiedades de los números reales. A lo largo de las fases, demuestra un avance gradual en su comprensión, desde una visión básica hasta una apreciación más completa y crítica de las propiedades del conjunto de los números reales. Además, reconoce las áreas faltantes en la discusión y demuestra una capacidad avanzada para evaluar el contenido. Las características cumplidas incluyen propiciar un rol activo, modificar el conocimiento y promover la comprensión de conceptos didácticos y matemáticos.

Sin embargo, en DD6, reconoce la importancia de actividades prácticas para mejorar la comprensión de las representaciones numéricas. Aunque muestra conciencia sobre la utilidad de las actividades prácticas, no profundiza en cómo estas actividades pueden ser implementadas o en qué aspectos específicos podrían ayudar a los estudiantes. Aunque muestra conciencia sobre la utilidad de las actividades prácticas, no desarrolla completamente esta idea.

Del mismo modo, en DD7, el estudiante identifica una falta de mención sobre estructuras algebraicas en el texto. Aunque muestra conciencia sobre la omisión, no profundiza en esta observación ni investiga más sobre el tema. Aunque muestra conciencia sobre la omisión, no desarrolla completamente esta idea ni explora cómo podría impactar en el aprendizaje de los estudiantes.

Capítulo 5. Resultados y Conclusiones

La presente investigación se centró en la validación de una tarea propuesta como tarea con sentido profesional en la formación de profesores de matemáticas, con el objetivo de determinar su impacto en el proceso de aprendizaje de los estudiantes y en la preparación de los futuros profesores para enfrentar los desafíos de la enseñanza de las matemáticas. Utilizando una estrategia investigativa cualitativa y fenomenológica, se exploraron las experiencias, percepciones y significados construidos por los participantes durante el desarrollo de la tarea. La combinación de la observación participante y el análisis documental proporcionó una perspectiva detallada de los procesos educativos en curso, capturando aspectos significativos del aprendizaje y generando hallazgos relevantes para la validación de la tarea propuesta.

Aunque la falta de algunas evidencias no permitió un análisis exhaustivo del proceso de toda la población, se buscó construir una herramienta de análisis que evidenciara las diferencias entre los procesos de cada estudiante. Esto permitió identificar modelos mentales y patrones de cambio conceptual en los participantes, proporcionando una comprensión más profunda del aprendizaje en el contexto de la tarea implementada. En el análisis de los patrones de cambio conceptual, se observó un panorama amplio y coherente en el aprendizaje de los estudiantes respecto a los números reales y sus propiedades. En la mayoría de los casos, surgió un patrón claro de cambio conceptual incremental, indicando que los estudiantes avanzaron gradualmente desde una comprensión inicial hasta una comprensión más profunda de los conceptos matemáticos relacionados con los números reales.

Además, se evidenció que los participantes demostraron un cambio conceptual en su comprensión de la aritmética y el álgebra, sugiriendo que la tarea contribuyó al desarrollo de conocimientos, competencias y destrezas necesarias. Cada patrón de cambio conceptual ilustró cómo los estudiantes progresaron a través de diversas fases, consolidando y ampliando su comprensión a medida que se exponían a conceptos más avanzados y complejos. Desde una comprensión básica de los números reales hasta una apreciación sofisticada de conceptos como las cortaduras de Dedekind, los estudiantes demostraron una capacidad para integrar y aplicar su conocimiento en contextos matemáticos más desafiantes.

Sin embargo, se identificaron áreas de mejora, ya que, aunque la mayoría de los estudiantes mostraron un cumplimiento efectivo de los objetivos, algunos podrían profundizar más en áreas identificadas en el material de estudio. Esto subraya la importancia de fomentar el pensamiento crítico y propositivo entre los estudiantes, animándolos a identificar deficiencias y a sugerir soluciones o enfoques alternativos.

A pesar de estas limitaciones, fue posible validar la tarea "Enseñanza de los números reales en libros de texto y su aprendizaje" como una tarea con sentido profesional en la formación de profesores de matemáticas. La estrategia de cambio conceptual permitió determinar que esta tarea proporciona oportunidades estructuradas y contextualizadas de aprendizaje, que preparan a los futuros profesores para enfrentar los desafíos reales de la enseñanza de las matemáticas.

Así mismo, cabe resaltar que durante esta investigación fue crucial estudiar el cambio conceptual en la enseñanza y aprendizaje de las ciencias como un proceso multifacético para la formación de una comprensión científica más sólida y profunda en los estudiantes. Pues, este proceso implica la interacción entre la estructura teórica nativa de los estudiantes y el conflicto conceptual, fundamentales para la reestructuración de los conocimientos previos. Esta estructura teórica nativa se compone de concepciones alternativas o preconceptos, que son resistentes al cambio y suelen persistir incluso después de años de instrucción científica. Por ello, el conflicto conceptual se presenta cuando los estudiantes encuentran nueva información que desafía sus ideas previas, creando una disonancia que puede llevar al aprendizaje profundo si se maneja adecuadamente.

En cuanto al Modelo de Cambio Conceptual (MCC), se sugiere que el aprendizaje envuelve patrones de reestructuración: asimilación y acomodación. Este proceso puede ser gradual o abrupto, dependiendo de la magnitud de la revisión necesaria. Los modelos mentales son representaciones que los estudiantes generan para comprender situaciones, influenciadas por sus teorías implícitas y su estructura teórica nativa. El cambio conceptual puede ocurrir mediante el enriquecimiento o la revisión, que modifica creencias y suposiciones arraigadas.

En conclusión, se pudo evidenciar que el cambio conceptual es esencial para la educación en ciencias, requiriendo un enfoque que considere tanto la estructura teórica nativa de los estudiantes como los conflictos conceptuales que surgen durante el aprendizaje. Esta comprensión puede guiar a los educadores en la implementación de estrategias pedagógicas que faciliten la reestructuración del conocimiento y promuevan el desarrollo de una comprensión científica robusta y duradera.

Resultados

En cuanto a los resultados, es necesario resaltar que la estrategia de cambio conceptual para la validación de una *tarea con sentido profesional en la formación de profesores de matemáticas* puede ofrecer reflexiones valiosas sobre el diseño y la implementación de estas tareas, proporcionando claves para promover prácticas de enseñanza más efectivas. Pues fue posible evidenciar que el material didáctico proporcionó una introducción a los números reales y sus representaciones, utilizando una mezcla eficaz de notación simbólica y diagramas visuales. Sin embargo, la ausencia de una relación explícita entre los números reales y otros sistemas numéricos, como los números racionales e irracionales, limitó la comprensión del objeto matemático, en la mayoría de los casos analizados. Esta observación subraya la necesidad de una perspectiva más amplia y contextual en el estudio de las matemáticas, permitiendo a los estudiantes ver otras estructuras que amplíen sus concepciones.

Así mismo, la tarea promovió un impacto significativo en el proceso de aprendizaje de los estudiantes participantes, facilitando un cambio conceptual en su comprensión de los números reales. Pues, los estudiantes demostraron una mayor capacidad para entender y aplicar conceptos relacionados con este conjunto numérico, lo que sugiere que la tarea contribuyó al desarrollo de conocimientos, competencias y destrezas necesarias para la enseñanza efectiva de las matemáticas. Este cambio conceptual es crucial, ya que refleja una transición desde una comprensión superficial hacia una comprensión más profunda y matizada, esencial para la formación de futuros educadores.

Continuando con lo realizado, fue posible evidenciar que, en todos los estudiantes analizados, se observó un desarrollo progresivo del conocimiento, donde cada fase del aprendizaje construyó sobre la anterior. Esta secuencia lógica permitió a los estudiantes consolidar y ampliar constantemente su comprensión, facilitando una base sólida para construir conocimientos más avanzados; esta progresión estructurada fue fundamental para un aprendizaje efectivo y sostenible a largo plazo, tal y como lo indican los autores en la línea del estudio del cambio conceptual.

En cuanto a los resultados obtenidos, se logró validar la tarea "*Enseñanza de los números reales en libros de texto y su aprendizaje*" en el contexto del proyecto, demostrando que es una tarea significativa para la formación inicial de profesores de matemáticas. La validación de la tarea indica que no solo es relevante y aplicable, sino también eficaz para los objetivos educativos propuestos, asegurando su valor como herramienta educativa en la formación de futuros profesores.

Se identificaron patrones de cambio conceptual en los estudiantes, destacando la importancia de la interacción, el trabajo grupal, la vinculación con desarrollos teóricos e investigativos, y el surgimiento de nuevos cuestionamientos para potenciar la perspectiva profesional. Estos patrones reflejan cómo los estudiantes internalizaron y aplicaron los conceptos aprendidos, resaltando el papel crucial de la colaboración y la reflexión en el proceso de aprendizaje. La interacción y el trabajo grupal fomentaron un ambiente de aprendizaje dinámico y colaborativo, mientras que la vinculación con teorías e investigaciones proporcionó un marco sólido para el desarrollo conceptual. Los nuevos cuestionamientos surgidos de este proceso indicaron un nivel de comprensión y reflexión avanzado, esencial para el crecimiento profesional continuo.

Los resultados de esta investigación subrayan la importancia de reconocer y abordar las concepciones alternativas de los estudiantes para facilitar el cambio conceptual, por medio de estrategias pedagógicas que fomenten el conflicto conceptual y la acomodación pueden promover una comprensión científica más profunda. Además, los modelos de cambio conceptual proporcionan un marco teórico valioso para diseñar intervenciones educativas efectivas, adaptadas a las características individuales y contextuales de los estudiantes.

BIBLIOGRAFÍA

Aké, L., y López-Mojica, J. (2020). Naturaleza de las tareas profesionales en la formación de profesores de matemáticas. Páginas de Educación, 13(1), 58-81. https://doi.org/10.22235/pe.v13i1.1919

Appleton, K. (1997). Analysis and description of students' learning during science classes using a constructivist-based model. Journal of Research in Science Teaching, 34(3), 303-318.

Baron, L. (2009). Introducción al estudio del cambio conceptual. Revista Iberoamericana de Psicología: Ciencia y Tecnología, 2(2), 75-83. Universidad de Buenos Aires. Argentina.

Bello, S. (2004). Ideas previas del cambio conceptual. Revista Educación Química, 15(3), 210-217.

Del Puerto, S., & Seminara, S. (2010). Las concepciones erróneas y el cambio conceptual en el aprendizaje de la geometría analítica. *MEMFI: "Mejoramiento de la Enseñanza de la Matemática Para la Formación del Ingeniero", Proyecto de Investigación y Desarrollo de la Secretaría de Ciencia y Tecnología, Rectorado UTN (Cód. 25/C114 – UTI901).* http://funes.uniandes.edu.co/23023/

Ferrero, M., & Montoro, V. (2011). Consulta a profesores como medio de aproximación a las concepciones de los estudiantes acerca del número real. Revista de Educación Matemática, 26, 1-14.

Flores, L. (2004). El cambio conceptual: Interpretaciones, transformaciones y perspectivas. Revista Educación Química, 15(3), 256-269.

Lombana, C. A. S. (1998). El cambio conceptual: una teoría en evolución. *Revista Educación y Pedagogía, 10*(21), 49-67. http://200.24.17.68:8080/jspui/bitstream/123456789/2993/1/SotoCarlos_cambioconceptualteoriaevolucion.pdf

Monereo, C. (2009) La autenticidad de la evaluación. En: M. Castelló (Coord) (2009) La evaluación auténtica en enseñanza secundaria y universitaria, Barcelona, Edebé, Innova universitas.

Montoro, V. (2017). El número real y la recta. comprensiones de estudiantes secundarios y universitarios. *VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática.* [Libro De Actas]. ISBN 978-84-945722-3-4. http://funes.uniandes.edu.co/18444/

Mora, L., Morales, N., y Rendón, C. (2023). Un ejemplo de tarea con sentido para la formación de profesores de matemáticas alrededor de la generalización algebraica. Ponencia presentada en el VII Encuentro Internacional sobre la Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales.

Mora, L. C. y Torres, J. A. (2004). Concepciones de estudiantes de licenciatura en matemáticas sobre números reales [Trabajo de maestría, Universidad Pedagógica Nacional]. Funes. http://funes.uniandes.edu.co/11142/ .

Morales, N., Mora, L. Rendón, C. (2022). Tareas con sentido para profesores que enseñarán matemáticas, un ejemplo desde la Didáctica de la Aritmética y el Álgebra. [Proyecto de investigación]. CIUP: Universidad Pedagógica Nacional.

Montoro, V. (2017, del 10 al 14 de julio). El número real y la recta. Comprensiones de estudiantes secundarios y universitarios [comunicación breve]. VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, Madrid, España. http://funes.uniandes.edu.co/18444/

Morales, N., Mora, L., y Rendón, C. (2023). Tareas con Sentido en/para la formación profesional inicial del profesor de matemáticas: Algunos asuntos conceptuales. Comunicación breve presentada en el IV Encuentro Internacional De Investigación E Innovación En Educación Matemática (EIII+ED+MAT).

Moreira, M. A., & Greca, I. M. (2003). Cambio conceptual: análisis crítico y propuestas a la luz de la teoría del aprendizaje significativo. *Ciência & Educação*, *9*(2), 301-315. https://doi.org/10.1590/s1516-73132003000200010

Ponte, J. P. (2004). Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos. In J. Giménez, L. Santos, & J. P. Ponte (Eds.), La actividad matemática en el aula, 25-34. Barcelona: Graó.

Rendón, C., Mora, L., Morales, N., Morales, L., y Tirado, A. (2023). Caracterización de tareas con sentido para profesores que enseñarán matemáticas, un ejemplo desde la Didáctica de la Aritmética y el Álgebra. Ponencia presentada en el VII Simposio Internacional de Formación de Educadores (SIFORED).

Rico, J. (2012). Algunas diferencias entre reales y racionales: un aporte a la comprensión del concepto de número real en la escolaridad [Trabajo de pregrado, Universidad del Valle]. Funes. http://funes.uniandes.edu.co/10758/.

Romero, I., & Rico, L. (1999). Representación y comprensión del concepto de número real. Una experiencia didáctica en secundaria. Revista Ema, 4(2), 117-151.

Vosniadou, S., & Verschaffel, L. (2004). Extending the conceptual change approach to mathematics learning and teaching [Editorial]. Learning and Instruction, 14(5), 445–451. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.06.014

Vosniadou, S. (2001). Cómo aprenden los niños. [Documento de programa o de reunión]. Oficina Internacional de Educación de la UNESCO, Academia Internacional de Educación, (pp. 21-24).

ANEXOS

ANEXO A - PARTICIPANTES

<table>
<tr><th rowspan="2">Estudiantes</th><th rowspan="2">Analizado</th><th rowspan="2">Asistencia</th><th>Fase I</th><th colspan="2">Fase II</th><th>Fase III</th><th colspan="2">Fase IV</th><th>Fase V</th></tr>
<tr><th>Doc</th><th>Audio grupal</th><th>Cartelera</th><th>Doc</th><th>Audio grupal</th><th>Cartelera</th><th>Exposición</th></tr>
<tr><td>AM</td><td>Sí</td><td>Completa</td><td>Sí</td><td rowspan="3">Sí</td><td rowspan="3">Sí</td><td rowspan="3">Sí</td><td rowspan="3">No</td><td rowspan="3">Sí</td><td rowspan="3">Sí</td></tr>
<tr><td>LB</td><td>Sí</td><td>Completa</td><td>Sí</td></tr>
<tr><td>VZ</td><td>Sí</td><td>Completa</td><td>Sí</td></tr>
<tr><td>HB</td><td>Sí</td><td>Completa</td><td>Sí</td><td rowspan="3">Sí</td><td rowspan="3">Sí</td><td rowspan="3">Sí</td><td rowspan="3">Sí</td><td rowspan="3">Sí</td><td rowspan="3">Sí</td></tr>
<tr><td>JR</td><td>Sí</td><td>Completa</td><td>Sí</td></tr>
<tr><td>JV</td><td>Sí</td><td>Completa</td><td>Sí</td></tr>
<tr><td>KD</td><td>Sí</td><td>Completa</td><td>Sí</td><td rowspan="2">No</td><td rowspan="2">Sí</td><td rowspan="2">Sí</td><td rowspan="2">No</td><td rowspan="2">Sí</td><td rowspan="2">Sí</td></tr>
<tr><td>LC</td><td>Sí</td><td>Completa</td><td>Sí</td></tr>
<tr><td>DD</td><td>Sí</td><td>Completa</td><td>Sí</td><td rowspan="2">Sí</td><td rowspan="2">Sí</td><td rowspan="2">Sí</td><td rowspan="2">No</td><td rowspan="2">Sí</td><td rowspan="2">Sí</td></tr>
<tr><td>JF</td><td>No</td><td>Completa</td><td>No</td></tr>
<tr><td>GB</td><td>Sí</td><td>Completa</td><td>Sí</td><td rowspan="2">Sí</td><td rowspan="2">Sí</td><td rowspan="2">Sí</td><td rowspan="2">Sí</td><td rowspan="2">Sí</td><td rowspan="2">Sí</td></tr>
<tr><td>JG</td><td>Sí</td><td>Completa</td><td>Sí</td></tr>
<tr><td>MB</td><td>Sí</td><td>Completa</td><td>Sí</td><td rowspan="2">No</td><td rowspan="2">Sí</td><td>Sí</td><td rowspan="2">No</td><td rowspan="2">Sí</td><td rowspan="2">Sí</td></tr>
<tr><td>SG</td><td>No</td><td>Completa</td><td>Sí</td><td>No</td></tr>
<tr><td>JM</td><td>No</td><td colspan="8">No asistió</td></tr>
<tr><td>AD</td><td>No</td><td colspan="8">No asistió</td></tr>
<tr><td>JR</td><td>No</td><td colspan="8">No asistió</td></tr>
<tr><td>JC</td><td>No</td><td colspan="8">No asistió</td></tr>
<tr><td>BG</td><td>No</td><td colspan="8">No asistió</td></tr>
</table>

ANEXO B – TAREA IMPLEMENTADA

Tarea 10. Enseñanza de los números reales en libros de texto y su aprendizaje
Elaborada por: Lyda Constanza Mora Mendieta

Presentación

El sistema de los números reales es un objeto matemático crucial en el edificio de las matemáticas, es el único campo ordenado completo salvo isomorfismos; sobre él se han construido muchos otros conceptos matemáticos fundamentales del desarrollo de las matemáticas como el de límite.

Los números reales, entendidos como un *conjunto compuesto de elementos*, como un *conjunto numérico* (que puede citarse como la unión de dos conjuntos disjuntos, los números racionales y los números irracionales o los números reales algebraicos y los números reales trascendentes), y como un *sistema numérico* (triada compuesta por el conjunto numérico, sus operaciones y sus relaciones), constituyen uno de los objetos matemáticos – escolares – más complejos. Por su misma naturaleza, su conceptualización implica una mirada amplia de su historia, su epistemología y su filosofía; cuestiones que, por obvias razones, no serán tratadas en esta corta tarea, pero que, se espera, sean abordadas, así sea someramente, en las tres perspectivas antes citadas (compuesto por elementos, como conjunto numérico y como sistema numérico).

Algunos de los elementos que citamos de los números reales cuando nos piden diferenciarlos de otros conjuntos son: las tradicionales raíces cuadradas $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, entre otras, que usualmente se generalizan como $\sqrt{p}$ siendo p número entero positivo primo o p número no cuadrado perfecto; el famoso número áureo $\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\varphi$, uno de los números no construibles con regla y compás $\sqrt[3]{2}$, y los tan conocidos números reales trascendentes π y e, siendo estos los elementos prototipo y que, seguramente, deben ser enseñados a los escolares, reconocidos por ellos como números reales no racionales, números irracionales, que hacen parte de los números reales y que se diferencian de los números racionales, no en su operatoria pero sí en su significado.

No obstante, identificar algunos de los elementos de $\mathbb{R}$ es necesario pero insuficiente en el proceso de conceptualización de este riguroso y complejo objeto matemático. Es fundamental reconocer, por ejemplo, que si bien el conjunto de los números reales es infinito, este infinito no es equiparable con el infinito de $\mathbb{Q}$, pero no solo esto es complejo, también lo es la misma definición de $\mathbb{R}$, este fue un largo y dificultoso proceso en el desarrollo de las matemáticas, precisamente por la naturaleza, ya que al compartir la misma estructura algebraica y de orden (donde se incluye la densidad) que el de los números racionales, suele confundirse con este sistema, pasando por alto la propiedad reina de $\mathbb{R}$, la completitud.

Siendo entonces el objeto número real (en sus tres perspectivas) tan estructurado, ¿cómo abordarlo en la enseñanza de las matemáticas escolares?, ¿qué de este debe ser aprendido por los jóvenes de la educación secundaria y media (colombiana)?, ¿qué debe saber un profesor (o futuro) profesor de matemáticas para la enseñanza de este objeto?, ¿cómo se introduce este objeto en la enseñanza?, estas son preguntas que se han hecho varios investigadores en Educación Matemática y que, con esta tarea, pretenden responderse, así sea de manera no tan profunda, pero buscando que los maestros en formación profesional inicial a quienes va dirigida reconozcan la complejidad de este objeto matemático y cuenten con algunos elementos que propendan por una enseñanza y aprendizaje más robusto y vivenciando procesos metacognitivos; esto basados en que los estudiantes a quienes va dirigida esta tarea, en su proceso formativo en la Licenciatura en Matemáticas de la UPN, han no solo usado los números reales en espacios académicos de la línea de cálculo, por ejemplo, sino que han vivido ese proceso de construcción de $\mathbb{R}$ en algunos de los cursos de la línea de álgebra del programa.

Con base en lo anterior, esta tarea tiene como objetivos los siguientes:

- Reconocer distintos tipos de representaciones de los números reales a partir de su revisión histórica, la literatura especializada en Educación Matemática y la exploración de libros de texto.

- Reconocer la complejidad en la conceptualización y aprendizaje de los números reales, a partir de la metacognición y la revisión de algunos aspectos históricos propios de la construcción de los números reales y ciertos errores frecuentes en la transposición didáctica.

- Tomar postura acerca de los aspectos esenciales de los números reales que se deben abordar en su enseñanza, a partir del estudio de documentos producidos en la Educación Matemática y la revisión de libros de texto.

Requisitos:

Meta: Esta tarea pretende que los futuros profesores de matemáticas reconozcan la complejidad en la enseñanza y el aprendizaje de los números reales y que se doten de algunas estrategias fundamentadas que les permitan hacer una enseñanza idónea de este objeto matemático: uso de diferentes representaciones (con su potencialidades y limitaciones) y precisión de algunas de las características propias de los números reales, como conjunto y sistema numérico. Esto, a través de la revisión de algunos libros de texto.

Materiales: Para el desarrollo de esta tarea los futuros educadores deben contar con libros de texto de 8° grado (el mismo libro por cada cinco estudiantes) provistos por el formador de profesores, utilizados en la educación matemática colombiana, un formato individual (ver fase individual) para consignar la información sobre el libro de texto analizado, los documentos de las lecturas propuestas (impresos o digitales), papel periódico, Kraft o trazo (un pliego por equipo), hojas de papel, tijeras, marcadores de colores y cinta.

Agrupamiento de estudiantes: Para el desarrollo de esta tarea se hace, inicialmente un trabajo individual y, luego, trabajo en equipos de cinco estudiantes.

Estrategias de interacción: Después del trabajo individual que se prevé sea extraclase, alrededor de un breve análisis de un libro de texto de matemáticas de grado 8° utilizado en la educación escolar colombiana y el diligenciamiento de un formato entregado por el formador, se pasa al trabajo en equipos (conformados por cinco estudiantes) en el cual lo que prima es la interacción entre los estudiantes que analizaron el mismo libro previa instrucción del formador: "A partir de la información incluida en los formatos diligenciados, plantear conclusiones consensuadas respecto a los aspectos considerados en el formato, en un pliego de papel, de forma creativa titulando el cartel con los datos del libro del texto". Para ello, el formador entrega una guía por grupo (ver fase grupal).

Mientras los estudiantes, futuros profesores de matemáticas, van elaborando sus carteles, el formador observa de forma participativa las producciones de sus estudiantes.

Terminado lo anterior, el formador asigna a cada grupo la lectura analítica de cinco documentos (ver fase teórica) respondiendo a algunas preguntas (ver fase teórica). Esto se hace de forma individual y puede ser trabajo extraclase.

Posterior a ello, los estudiantes se vuelven a reunir en equipos para complementar sus carteleras con mensajes extra que se ubican en hojas, de acuerdo con las lecturas realizadas y la perspectiva ganada con estas para ajustar el análisis realizado sobre los libros en relación con los aspectos considerados inicialmente en el formato individual. En este momento, prima, de nuevo la interacción entre los estudiantes mientras el formador observa participativamente el trabajo realizado y nota los ajustes que se están haciendo además de "vigilar" que estos se incorporen al cartel con hojas extra.

Luego, cada equipo pega su cartel en alguna pared del salón (o de algún lugar específico de la institución) y se organiza una "galería" de tal forma que todos los estudiantes observen el trabajo de sus compañeros y hallen diferencias y similitudes con lo registrado por ellos en sus propios carteles de acuerdo con los libros analizados. En este caso, el formador también participa de la exposición. Se pueden hacer preguntas a los autores de cada cartel. EL formador también toma atenta nota de los comentarios que hacen los estudiantes a medida que pasan por la "galería".

Para cerrar, el formador toma las ideas en común expuestas por los estudiantes en los carteles y aquellas particulares, también, las compara con las que se quieren institucionalizar (ver fase de institucionalización), las organiza y, en forma de plenaria, lleva a cabo la institucionalización correspondiente.

Temporalidad: La tarea se prevé ser desarrollada así:

- Fase individual extraclase: 2 horas aprox.
- Fase grupal en sesión de clase: 2 horas aprox.
- Lectura de documentos (preferiblemente, extraclase): 2 horas aprox.
- Fase de reajuste: ¾ hora aprox.
- Fase de institucionalización: 1,25 horas aprox.

Descripción

<u>Fase individual</u>

De manera individual y como trabajo extraclase, cada estudiante elige un libro de texto escolar de 8° grado (cada cierto número de estudiantes tiene el mismo texto)[6], en lo posible, publicado en los últimos diez años (o también podrían ser textos de distintas épocas) y reporta, a partir de sus concepciones y la revisión del texto correspondiente, información referida a los siguientes aspectos:

- *Introducción a los números reales*: forma como el texto introduce los números reales (con elementos del conjunto de los números reales, como conjunto numérico o como sistema de números), diferencias y relaciones con otros conjuntos o sistemas numéricos y la forma como se exponen tales relaciones o diferencias.

- *Características de los números reales*: forma como el texto expone las características de los números reales y cuáles de estas son explícitas; interesan la densidad (no exclusiva de $\mathbb{R}$), la no numerabilidad y completitud de $\mathbb{R}$.

- *Representaciones de los números reales*: tipos de representaciones para los números reales usadas en el texto escolar.

Para ello, se pedirá a los estudiantes diligenciar una tabla (ver en el próximo recuadro) habiendo dado ciertas instrucciones que se presentan enseguida.

> Con base en texto escolar de grado 8° asignado/elegido, su revisión general, la ubicación de la unidad o capítulo correspondiente a números reales y una lectura de esta, completar la siguiente información (por favor, sustituir la instrucción escrita en gris por la solicitada allí y cambiar el color de la letra a negro):
>
> | Breve análisis de un libro de texto alrededor del tratamiento de los números reales[7] |
> |---|

[6] Para esto es ideal que previamente el formador de profesores haya, o bien seleccionado los libros escolares o haya pedido a los estudiantes traer libros de texto de grado 8° para elegir los que se utilizarán para la tarea.

[7] Algunos de los elementos incluidos en este cuadro están tomados de Rico, J. (2012). *Algunas diferencias entre reales y racionales: un aporte a la comprensión del concepto de número real en la escolaridad* [Trabajo de pregrado, Universidad del Valle]. Funes. http://funes.uniandes.edu.co/10758/

Datos del libro de texto	
Ubicar una foto de la carátula del libro de texto.	Escribir la bibliografía del texto siguiendo las normas APA 7ª. Edición.
Descripciones del libro del texto	
Aspecto a considerar	**Consideraciones**
En relación con el concepto: introducción a los números reales	Escribir aquí una breve descripción sobre cómo se introducen los números reales en el libro. ¿Se presentan algunos ejemplos prototipo de $\mathbb{R}$? ¿Cuáles? ¿Se presenta $\mathbb{R}$ como conjunto numérico? ¿Se establecen relaciones o diferencias con otros conjuntos numéricos? ¿Se presenta como sistema numérico? ¿Se presentan relaciones o diferencias con otros sistemas numéricos? ¿Con cuáles? ¿Cuáles relaciones o diferencias se establecen? ¿Cómo se presentan tales relaciones o diferencias? Presentar evidencias.
Características de los números reales	Escribir aquí cuáles características de los números reales son explicadas en el texto y cómo las aborda. Presentar evidencias.
En relación con las *representaciones*	Exponer los distintos tipos de representaciones de los números reales que son utilizados para enseñar este objeto matemático. Presentar evidencias.
Consideraciones sobre el abordaje de los números reales en el libro de texto	
De acuerdo con lo anteriormente diligenciado plantear algunas consideraciones sobre si el texto presenta de manera suficiente, sin errores ni ambigüedades el objeto número real.	

Fase grupal

Los estudiantes, con sus tablas diligenciadas, se reúnen en equipos, tales que todos sus integrantes hayan revisado el mismo libro de texto, comparten sus análisis preliminares y plantean algunas conclusiones al respecto de los aspectos antes mencionados, para ello plasmarán en un pliego de papel (o en una diapositiva, según el tipo de medio de enseñanza), de forma creativa, sus conclusiones alrededor de los aspectos antes mencionados en el libro de texto correspondiente; con base algunas preguntas orientadoras, que pueden leerse en el siguiente recuadro.

Reunidos en equipos según texto escolar, plantear, en un pliego de papel periódico (o en una diapositiva), de manera creativa, qué enseña el texto acerca de los números reales y cómo lo hace. Las preguntas que guían la realización de la cartelera (o diapositiva) son las siguientes: ¿Hay distintas formas de introducir los números reales en el libro de texto? ¿Cuáles? ¿Cuáles son las características de los números reales que se resaltan en el libro de texto

consultado? ¿Qué dice el texto acerca de tal(es) característica(s)?

¿En el libro de texto se establecen relaciones o diferencias entre los números reales con otros conjuntos o sistemas numéricos? ¿Con cuáles? ¿Cuáles relaciones o diferencias se establecen? ¿Cómo se presentan tales relaciones o diferencias? ¿Consideran que tales relaciones o diferencias son apropiadas para la enseñanza de este objeto en los estudiantes de 8° grado?

¿Hay errores o ambigüedades en la conceptualización de los números reales presentada en el libro de texto? Explicar.

¿Cuáles son los tipos de representaciones de los números reales utilizados en el libro de texto? Intentar hacer una tipificación. ¿Consideran que falta alguna representación de los números reales abordada en el libro o que haya sido poco explorada, en beneficio del aprendizaje de los estudiantes de 12-15 años alrededor de este objeto? Explicar.

No olvidar indicar, en la cartelera (o diapositiva), cuál es el texto escolar que expone.

Fase teórica

Se entregan a los estudiantes diferentes textos, de manera tal que cada estudiante de un mismo equipo lea distinto documento, los textos son estos:

Romero, I. & Rico, L. (1999). Representación y comprensión del concepto de número real. Una experiencia didáctica en secundaria. *Revista Ema*, *4*(2), 117-151. http://funes.uniandes.edu.co/1092/

Montoro, V. (2017, del 10 al 14 de julio). El número real y la recta. Comprensiones de estudiantes secundarios y universitarios [comunicación breve]. *VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*, Madrid, España. http://funes.uniandes.edu.co/18444/

Secciones 3.2. y 3.3. de Mora, L. C. y Torres, J. A. (2004). *Concepciones de estudiantes de licenciatura en matemáticas sobre números reales* [Trabajo de maestría, Universidad Pedagógica Nacional]. Funes. http://funes.uniandes.edu.co/11142/

Capítulo 1 de Rico, J. (2012). *Algunas diferencias entre reales y racionales: un aporte a la comprensión del concepto de número real en la escolaridad* [Trabajo de pregrado, Universidad del Valle]. Funes. http://funes.uniandes.edu.co/10758/.

Capítulo 2 de Rico, J. (2012). *Algunas diferencias entre reales y racionales: un aporte a la comprensión del concepto de número real en la escolaridad* [Trabajo de pregrado, Universidad del Valle]. Funes. http://funes.uniandes.edu.co/10758/.

Y se les pide responder a las siguientes preguntas, siempre que sea posible (depende del texto):

- ¿Cuáles son las características fundamentales de los números reales que los conceptualizan? ¿Cuáles de estas son imprescindibles abordar en la enseñanza secundaria? Explicar.

- ¿Cuáles son las representaciones propias de los números reales? ¿Cuáles de estas son imprescindibles abordar en la enseñanza secundaria? Explicar.

En suma, la instrucción para los estudiantes se presenta en el siguiente recuadro.

En el equipo, distribuirse la lectura y estudio de los textos listados abajo, respondiendo, en la medida de lo posible (ello depende del texto) a las siguientes preguntas:

¿Cuáles son las características fundamentales de los números reales que los conceptualizan? ¿Cuáles de estas son imprescindibles abordar en la enseñanza secundaria? Explicar.

¿Cuáles son las representaciones propias de los números reales? ¿Cuáles de estas son imprescindibles abordar en la enseñanza secundaria? Explicar.

Textos a distribuirse:

Romero, I. y Rico, L. (1999). Representación y comprensión del concepto de número real. Una experiencia didáctica en secundaria. *Revista Ema*, *4*(2), 117-151.

Montoro, V. (2017, del 10 al 14 de julio). El número real y la recta. Comprensiones de estudiantes secundarios y universitarios [comunicación breve]. *VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*, Madrid, España. http://funes.uniandes.edu.co/18444/

Secciones 3.2. y 3.3. de Mora, L. C. y Torres, J. A. (2004). *Concepciones de estudiantes de licenciatura en matemáticas sobre números reales* [Trabajo de maestría, Universidad Pedagógica Nacional]. Funes. http://funes.uniandes.edu.co/11142/ .

Capítulo 1 de Rico, J. (2012). *Algunas diferencias entre reales y racionales: un aporte a la comprensión del concepto de número real en la escolaridad* [Trabajo de pregrado, Universidad del Valle]. Funes. http://funes.uniandes.edu.co/10758/.

Capítulo 2 de Rico, J. (2012). *Algunas diferencias entre reales y racionales: un aporte a la comprensión del concepto de número real en la escolaridad* [Trabajo de pregrado, Universidad del Valle]. Funes. http://funes.uniandes.edu.co/10758/.

Fase de reajuste

Se les pide a los estudiantes que se vuelvan a organizar en los equipos originales, tomen su cartelera (o diapositiva) y con hojas/papel complementen o modifiquen las conclusiones que habían establecido originalmente, de acuerdo con lo leído en la fase teórica. Terminado este trabajo, cada equipo debe exponer su cartelera.

En el siguiente recuadro, la precisión de la consigna.

A partir de las lecturas realizadas y reunidos en el equipo que produjo la cartelera, revisarla y complementar lo expuesto allí, con hojas extra (o con cuadros de texto, si se optó por diapositiva), de manera tal que la cartelera (o diapositiva) exponga si el libro de texto explicita, y de qué manera:

La(s) forma(s) como se introducen los números reales (¿con elementos particulares, como un conjunto numérico, como un sistema numérico?) en los textos.

Las características fundamentales de los números reales que los conceptualizan.

Las representaciones propias de los números reales.

Fase de institucionalización

Esta fase inicia con la exposición de los carteles, a manera de “galería”; es decir, haciendo observación. (La) profesor(a) seleccionará las ideas principales expuestas por los estudiantes, buscando precisar que:

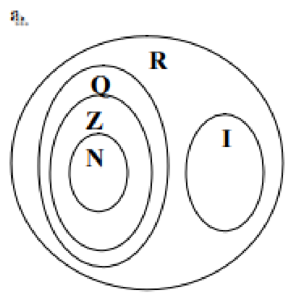
Los números reales son un objeto matemático de alta complejidad, no en vano, su proceso de objetificación tardó más de 2.000 años:

> El proceso de objetivación de los números reales llega a su etapa trascendental con los trabajos realizados por Cantor y Dedekind. Al estudiar estas teorías numéricas desarrolladas por estos autores visualizamos características que brindan claras diferenciaciones de los reales con los racionales. La cardinalidad y la completitud son dos propiedades esenciales que deben considerarse en cualquier estudio de los números reales. La potencia del continuo numérico, característica propia de los números reales, es clave en la diferenciación con los números racionales, pues esta permite una mejor comprensión de la continuidad numérica o completez, a menudo confundida con la densidad o con la continuidad geométrica propia de la recta. A pesar de este hecho, pudimos evidenciar cómo los textos escolares no proporcionan algún estudio de estas características numéricas. (Rico, 2012, p. 98).
>
> Los números reales son una noción clave en las matemáticas y de particular complejidad epistemológica, cognitiva y educativa. (Ferrero y Montoro, 2011, p. 2).
>
> Dada la creciente investigación en Didáctica de las Matemáticas sobre los números reales, la presentación de los números reales debería “ir más allá de sus aproximaciones a expresiones decimales y se considere a los números reales desde sus propias características.” (Rico, 2012, p. 79).
>
> Son dos las características principales del conjunto de los números reales que los diferencian de otros conjuntos, su no numerabilidad y su completitud. En efecto, son objetos de gran complejidad por lo que es un reto abordarlos en los libros de texto y en general en la enseñanza, por lo que buscar estrategias como las propuestas por Montoro (2017) para tratar, así sea de manera informal, el tema, es válido tenerlas presentes, como: proponer marcar (o quitar) infinitos números sobre la recta (p.ej., marcar todos los números racionales en la recta o marcar todas las raíces cuadradas de números racionales o pensar en quitar todos los números racionales de la recta). Así como “solicita imaginar un microscopio (ideal) de gran potencia que enfoca sobre un fragmento de recta numérica y agranda la imagen, invitando a pensar en un segmento de recta o intervalo de reales, que se agranda (primer ítem) y se pide que se dibuje lo que se ve durante este proceso (segundo ítem), por último, se solicita que se describa qué se ve cuando el aumento es “infinito” (tercer ítem).” (Montoro, 2017, p. 177).

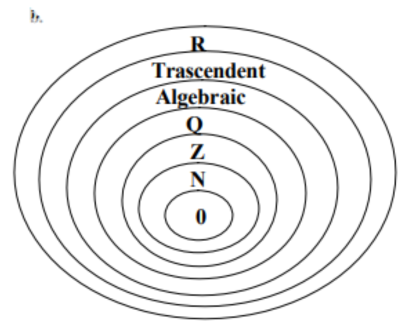
En relación con la cardinalidad:

> (…) una presentación de la cardinalidad permitiría un gran aporte a la comprensión de propiedades de los conjuntos numéricos y a la noción de infinito. Al mostrar que los números racionales poseen la misma cardinalidad que el conjunto de los naturales, puesto que se puede realizar una correspondencia biunívoca entre los elemento de cada conjunto, mientras que el conjunto de los números reales consiste en un infinito no numerable, los escolares se apropiarían de una herramienta útil en la diferenciación de los racionales con los reales que, a la vez, les permitiría una mejor comprensión del infinito numérico implicado en la caracterización de Q y R. (Rico, 2012, pp. 93-94).

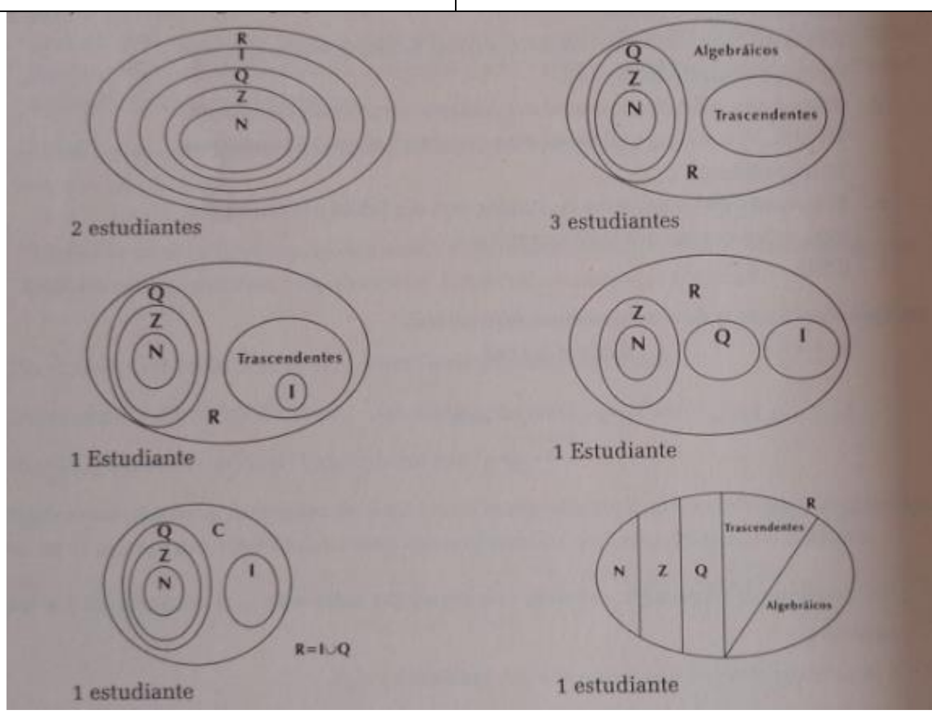
Modelos de inclusión usuales en los libros de texto como los siguientes son representaciones erradas, algunas más que otras; en particular porque de manera estricta conjuntos como el de los números enteros o el de los números naturales no están contenidos en los números reales porque las características de los números reales difieren totalmente de las de los otros números:



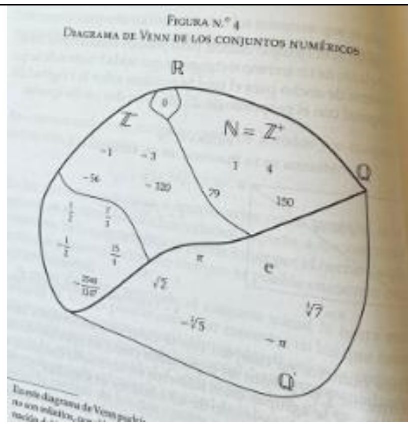
Tomado de Mora y Torres (2004, p. 257)

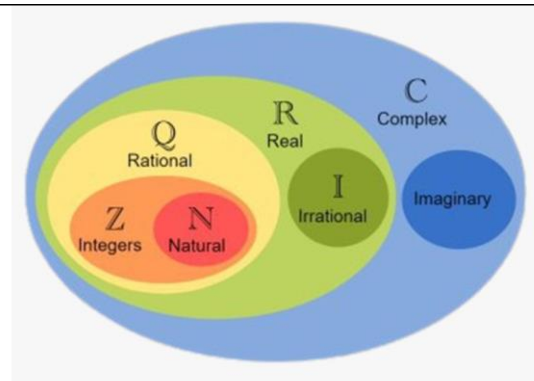


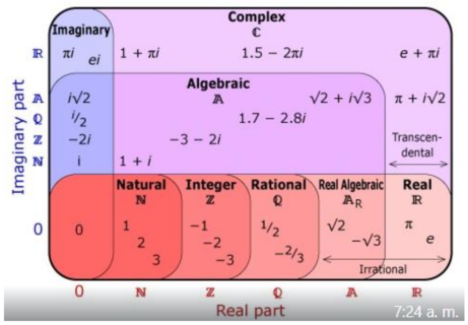
Tomado de Mora y Torres (2004, p. 257)

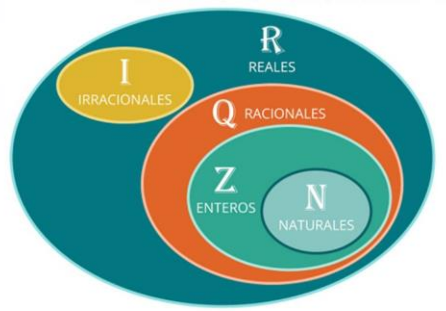


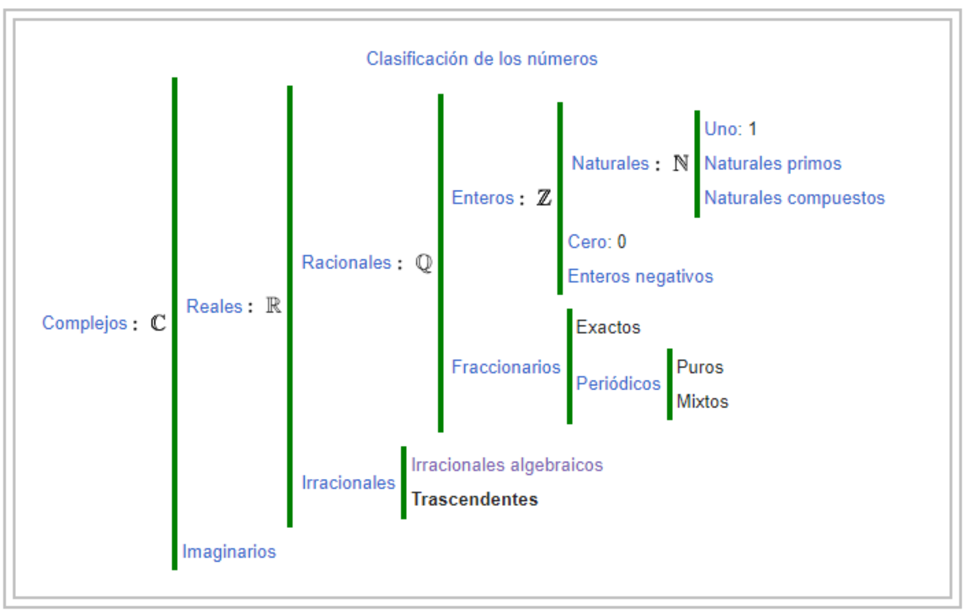
Tomado de Mora y Torres (2004, p. 220)











Tomado de wikipedia

Es usual decir que los números naturales o los números enteros son números reales, lo cual no es correcto rigurosamente hablando. Todo número natural tiene siguiente o todo número entero tiene antecesor, lo que no pasa en los números reales, ni siquiera en los números racionales; esas propiedades son justamente de esos conjuntos numéricos. Con los números naturales se puede contar, con los números reales no; pero no solamente esto. Si analizamos la relación de inclusión, al contrario, también notamos algunas dificultades, esto es, todo número real tiene opuesto, asunto que no se da en los números naturales y eso sin precisar la famosa propiedad de completitud que, obviamente, no cumplen los números enteros, por ejemplo. Muy seguramente algunos, no tienen reparo en afirmar que como $2 \in \mathbb{N}$ y $2 \in \mathbb{R}$, 2 es tanto número natural como número real y así con todos los números naturales, por lo cual $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$; no obstante, lo que sucede es que en $\mathbb{R}$ hay un subconjunto isomorfo a $\mathbb{N}$, por lo que se confunde con este, es decir, en el conjunto de los números reales hay un subconjunto de estos que tiene las mismas propiedades que el conjunto de los número naturales, por lo que se suele confundir con este; es decir, estrictamente hablando $\mathbb{R}$ no contiene a $\mathbb{N}$. Un asunto esencial es reconocer que, en términos algebraicos, tanto $\mathbb{R}$ como $\mathbb{Q}$ tienen la misma estructura algebraica y de orden, ambos son campos (o cuerpos) ordenados.

Los tipos de representaciones de los números reales podrían tipificarse (a partir de Mora y Torres, 2004) así:

Representaciones geométricas, cuyos registros pueden ser gráficos (dibujos) o propios del lenguaje geométrico, a magnitudes o la recta real. Siendo esta última las más representativa (por aquello de que a cada número real le corresponde un punto de la recta, aunque esto sea un axioma, pues hay números reales no construibles con regla y compás).

La representación en la recta numérica es comúnmente usada como soporte en la introducción de los conjuntos numéricos. Se trata de una representación utilizada con mucha frecuencia en los textos escolares para que el estudiante aborde e interactúe con el conocimiento de los números, para que logre una conexión de los objetos mentales con los objetos matemáticos, en este caso, con los conjuntos numéricos. Por tanto, es importante relacionar las características de la recta numérica como representación de los racionales y los reales.

La atribución de la continuidad a la recta se basa en axiomas, pero la naturaleza de la recta numérica es objeto de discusión y dicha naturaleza varía de un autor a otro. La recta se identifica por medio de una biyección con el conjunto ordenado de los números reales, pero en el caso de los números racionales esta identificación no es biunívoca pues la recta es más rica en individuos punto que los racionales en individuos número. La exposición consistente de la recta numérica como soporte a la definición de número real abre paso a intuiciones sobre la estructura del continuo lineal y la correspondencia de esta característica con los conjuntos numéricos. También permite una mejor comprensión de la cardinalidad de los conjuntos infinitos y la correspondencia con los racionales y los reales (Rico, 2012, p. 80).

(…) La recta numérica se utiliza, como es común en los textos escolares (…). [Algunos textos] Parten de la selección de la unidad entera y empleando la regla y el compás se le asigna a algunos números un punto sobre la recta. Este proceso se realiza partiendo del supuesto de que la recta se compone de puntos. La noción intuitiva del continuo lineal es fuente de dificultades y hasta contradicciones donde se ve implicada la noción de infinito. Dichas dificultades se manifiestan cuando los escolares, mediante la representación geométrica, no pueden dar cuenta de las diferencias entre la densidad y la completitud o continuo numérico. Si la correspondencia entre los puntos de la recta y los números reales, realizada mediante la medida de longitudes, se conceptualizara como una biyección, serviría de medio para mejorar la comprensión de esenciales características del conjunto de los números reales tales como, la densidad, el orden y la completitud. Por ejemplo, el sistema axiomático sobre el que se fundamenta el continuo lineal de la recta atribuye propiedades al conjunto numérico de los reales que resulta muy complicado de expresar mediante las representaciones numéricas, pero mediante el empleo apropiado de la representación en la recta numérica, esta característica del continuo podría ser comprendida más ampliamente cuando se trata de estudiar el conjunto de los números reales. Pero en ninguno de los textos analizados se pone de manifiesto la naturaleza de la recta como apoyo a la construcción del concepto de número real. Por tanto, consideramos que es primordial trabajar de modo consistente en la representación de la recta, dando mayor atención al proceso de biyección profundizando en este de manera explícita en los textos escolares. (Rico, 2012, pp. 93-94).

Representaciones verbales, aquellas en las que se usa el lenguaje común, la forma retórica; por ejemplo: “raíz cuadrada de dos”.

Representaciones simbólicas, entre las que se encuentran:

La notación decimal:

- Expresiones decimales exactas para algunos números reales (los que se corresponden con los números decimales).

- Expresiones decimales periódicas para algunos números reales (los que se corresponden con los números racionales).

- Expresiones decimales infinitas no periódicas para algunos números reales (los números irracionales, en particular los de Liouville, por ejemplo).

La notación operatoria, entre la que se hallan:

- Las fracciones.

- Las fracciones continuas.

- Las series.

- Los radicales.

- El alfabeto griego para números reales particulares.

Representación algebraica: cuando se usan letras griegas o del abecedario para generalizar números reales, por ejemplo, $x + y$ es un número real siendo x y y números reales.

En relación con las fracciones continuas:

El empleo de fracciones continuas para la presentación de R permitiría excluir el uso de expresiones decimales, que sólo son una aproximación de los reales mediante el uso de los racionales, o de los símbolos especiales, y expondría una manera diferente y precisa de representar cada número real, y en caso de que se requiera, se pueden usar fracciones continuas para proporcionar un valor aproximado de un número real a un racional, tan aproximado como se desee. Además, las fracciones continuas podrían aplicarse desde el primer grado de secundaria dado que se requiere sólo los números naturales y el algoritmo de Euclides para su desarrollo. (Rico, 2012, pp. 94-95).

En algunos textos:

> se usa la notación de conjuntos para definir los reales como la unión del conjunto de los números racionales con el conjunto de los números irracionales. Esta definición no aporta elementos que muestren las propiedades que realmente caracterizan el conjunto de los números reales; al usar la notación conjuntista para definir los reales podría asumirse que los irracionales son un conjunto incompleto igual al conjunto de los racionales o que su cardinalidad es la misma, en general, el uso de la notación de conjuntos no es suficiente en la conceptualización de R. (Rico, 2012, p. 92).

Usualmente "las diferencias tratadas en los textos no van más allá de sus expresiones decimales, lo cual no permite una clara caracterización del conjunto de los números reales". (Rico, 2012, p. 92).

En algunas oportunidades:

- se asume de manera implícita el continuo numérico, es decir, la propiedad de la completez de los números reales, cuando describe una biyección de los puntos de un segmento con los números reales. A pesar de este hecho implícito, no se muestra de manera clara esta fundamental propiedad perteneciente al conjunto de los números reales, la cual suministra una fuerte herramienta para diferenciarlo del conjunto de los números racionales. (Rico, 2012, p. 92).

- Conocer los hechos relacionados con el descubrimiento de magnitudes inconmensurables en la antigua Grecia y la profunda influencia que tuvo este hecho en la historia del desarrollo de las matemáticas, permite comprender de manera más amplia la naturaleza de los objetos matemáticos, en este caso, los números reales. Comprender que los antiguos griegos descubrieron magnitudes lineales, es decir, segmentos, los cuales no se podían medir o poner en proporción con algún otro segmento, suministra una base para acercarse a la caracterización del conjunto de los números reales. (Rico, 2012, p. 97). Aunque, si bien, el problema de la inconmensurabilidad se resuelve con la aceptación de los números reales; esta (la cita de Rico) podría interpretarse como una conclusión un poco superficial, porque se desconoce todo lo que se dio entre la época de Hipaso de Metaponto (500 a. C. aprox.) y Dedekind (181-1916).

- Según David Hilbert, las construcciones de los números reales propuestas por Méray, Cantor, Heine, Weierstrass y Dedekind son construcciones genéticas de $\mathbb{R}$ porque están basadas en $\mathbb{Q}$ y esta, a su vez, está basada en $\mathbb{Z}$ (o en $\mathbb{N}$; si se parte de los números naturales para construir los números racionales, se obtienen solo los números racionales positivos o no negativos), y $\mathbb{Z}$ está construido sobre $\mathbb{N}$. La construcción de $\mathbb{Z}$, debida a Hankel, se basa en clases de equivalencia construidas a partir de parejas de números naturales a través de una relación de equivalencia. Similarmente se hace con $\mathbb{Q}$, a través de una relación de equivalencia creada con parejas de números enteros, el segundo elemento de la pareja no cero. Así las cosas, lo que sucede es que clases de equivalencia de, por ejemplo, parejas de números naturales (para el caso de la construcción los números enteros) resultan isomorfas a números naturales, como es el caso de, por ejemplo $[(1,0)] \in \mathbb{Z}$ y que corresponde al número entero "uno", este número (que tiene en $\mathbb{Z}$ opuesto, $[(0,1)]$) resulta "comportarse igual" que el número $1 \in \mathbb{N}$.

En el currículo escolar colombiano determinado por los Estándares básicos de competencias matemáticas (MEN, 2006) se establece que los estudiantes escolares colombianos deben conocer los números reales, específicamente:

> Al terminar noveno grado…[los estudiantes deben estar en capacidad de]
>
> - Utilizar los números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos.
> - Resolver problemas y simplificar cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos.
> - Al terminar undécimo grado…[los estudiantes deben estar en capacidad de]
> - Analizar representaciones decimales de los números reales para diferenciar entre racionales e irracionales.
> - Reconocer la densidad e incompletitud de los números racionales a través de métodos numéricos, geométricos y algebraicos.
> - Comparar y contrastar las propiedades de los números (naturales, enteros, racionales y reales) y las de sus relaciones y operaciones para construir, manejar y utilizar apropiadamente los distintos sistemas numéricos.
> - Establecer relaciones y diferencias entre diferentes notaciones de números reales para decidir sobre su uso en una situación dada.

Por lo que es totalmente necesario, por parte de los futuros profesores, tener claras esas diferentes representaciones de los números reales, algunas de las cuales no aparecen en los libros de texto (como las fracciones continuas) y que pueden incorporarse en la enseñanza escolar de este objeto matemático. Así como comprender que las expresiones decimales son una forma (representación) de nombrar números reales que permiten diferenciar los números racionales de los números irracionales aunque muchos de estos últimos (salvo los de Liouville) no puedan representarse de manera concreta con este tipo de notación; no obstante, ella nos permite hacer aproximaciones a estos números que contribuyen a acotarlos y por ende a reconocer algunas de sus propiedades, como que pueden ser aproximados por números racionales.

Además de la importancia de reconocer que la densidad y la incompletitud de los números racionales son características que deben ser aprendidas por los estudiantes de la educación media colombiana; a través de distintos métodos, lo que podría constituirse en sendos trabajos de grado a desarrollar en la Licenciatura en Matemáticas.

ANEXO C – TRANSCRIPCIONES DE LOS AUDIOS GRUPALES

Este anexo se encuentra en el documento nombrado como *Anexo D - Transcripción videos.docx*.

En cuanto a las evidencias que fueron recopiladas como grabaciones de las clases, estas se encontrarán en la carpeta *Grabaciones en videos*, a la cual se puede acceder por medio del siguiente vínculo: Grabaciones en videos

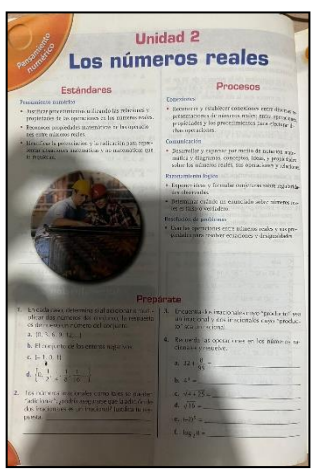
ANEXO D – TRANSCRIPCIONES DE LOS VIDEOS DE CLASE

Este anexo se encuentra en los documentos nombrados como G1, G2, G3 y G4 en la carpeta nombrada como *Anexo C - Audios Grupales*.

En cuanto a las evidencias que fueron recopiladas como grabaciones de audio grupales, estas se encontrarán en la carpeta *Grabaciones por grupos*, a la cual se puede acceder por medio del siguiente vínculo: Grabaciones por grupos

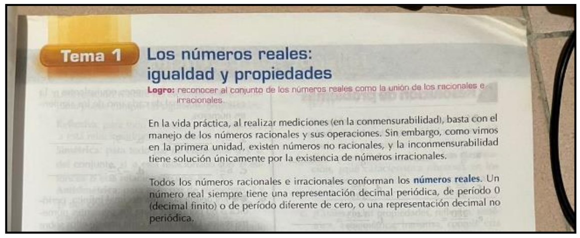
ANEXO E – RECOPILACIÓN DE LAS TAREAS DURANTE LA FASE INDIVIDUAL

Cód. VZ_tar1	
Breve análisis de un libro de texto alrededor del tratamiento de los números reales	
Datos del libro de texto	
	Artigue, M., y otros. (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática. Grupo Editorial Iberoamérica. Dikson, L. (1991). El aprendizaje de las matemáticas. Editorial Labor, S. A. Espinosa, F. (1996). Investigaciones en matemática educativa. Grupo Editorial Iberoamérica. Lean, G. A., & Clements, M. A. (1981). Spatial ability, visual imagery, and mathematics performance. Lovaglia, F. M., y otros. (1972). Álgebra. Harla S. A. de C. V. MEN. (1998). Lineamientos curriculares para el área de matemáticas. Colombia. Mendenhall, W., y otros. (1986). Estadística matemática con aplicaciones. Grupo Editorial Iberoamérica.

	Ministerio de Educación Nacional. (2003). Estándares básicos de matemáticas y lenguaje para la educación básica y media. Mayo de 2003. Moise, E. E., y Downs, F. L. Jr. (1986). Geometría Moderna. Addison-Wesley Iberoamericana, S. A. Perkins, D. (1992). La Escuela Inteligente. Editorial Gedisa. Polya, G. (1980). On solving mathematical problems in high school. Stephen Krulik. Universitas, Tomo 10. (1987). La Matemática. Salvat Editores, S. A.
Descripciones del libro del texto	
Aspecto por considerar	Consideraciones
Introducción a los números reales (en relación con el concepto)	Para iniciar la introducción de los números reales se presentas en primer lugar los estándares y procesos que se trabajaran en la unidad. Adicional pone una pequeña preparación para que los estudiantes recuerden los números racionales e irracionales. Evidencia 

Luego se introducen los números reales como la unión de los racionales e irracionales. Aclarando adicional la importancia de los números irracionales para la solución de la inconmensurabilidad que se puede dar entre los racionales.

Evidencia



Tema 1 Los números reales: igualdad y propiedades

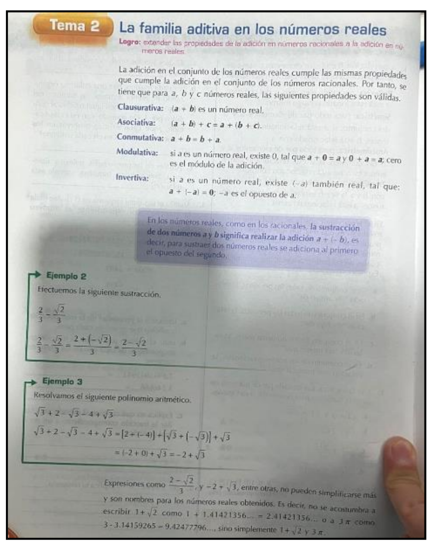
Logro: reconocer al conjunto de los números reales como la unión de los racionales e irracionales.

En la vida práctica, al realizar mediciones (en la conmensurabilidad), basta con el manejo de los números racionales y sus operaciones. Sin embargo, como vimos en la primera unidad, existen números no racionales, y la inconmensurabilidad tiene solución únicamente por la existencia de números irracionales.

Todos los números racionales e irracionales conforman los **números reales**. Un número real siempre tiene una representación decimal periódica, de período 0 (decimal finito) o de período diferente de cero, o una representación decimal no periódica.

Después se presentan las propiedades clausurativa, asociativa, conmutativa, modulativa e invertida de la familia aditiva en los números reales teniendo la relación de la adición en los números reales cumple las mismas propiedades que la adición en los racionales. Con sus respectivos ejemplos utilizando las propiedades.

Evidencia



Tema 2 La familia aditiva en los números reales

Logro: extender las propiedades de la adición en números racionales a la adición en números reales.

La adición en el conjunto de los números reales cumple las mismas propiedades que cumple la adición en el conjunto de los números racionales. Por tanto, se tiene que para a, b y c números reales, las siguientes propiedades son válidas.

Clausurativa: $(a + b)$ es un número real.

Asociativa: $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Conmutativa: $a + b = b + a$.

Modulativa: si a es un número real, existe 0, tal que $a + 0 = a$ y $0 + a = a$; cero es el módulo de la adición.

Invertiva: si a es un número real, existe $(-a)$ también real, tal que: $a + (-a) = 0$; $-a$ es el opuesto de a.

En los números reales, como en los racionales, **la sustracción de dos números a y b significa realizar la adición $a + (-b)$**, es decir, para sustraer dos números reales se adiciona al primero el opuesto del segundo.

Ejemplo 2

Efectuemos la siguiente sustracción.

$$\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{2 + (-\sqrt{2})}{3} = \frac{2 - \sqrt{2}}{3}$$

Ejemplo 3

Resolvamos el siguiente polinomio aritmético.

$$\sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} - 4 + \sqrt{3}$$

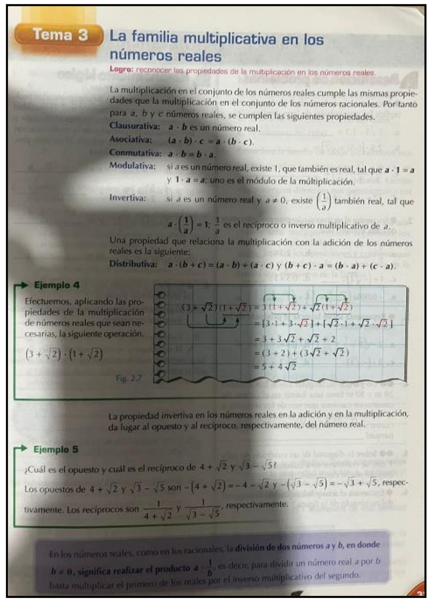
$$\sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} - 4 + \sqrt{3} = [2 + (-4)] + [\sqrt{3} + (-\sqrt{3})] + \sqrt{3}$$

$$= (-2 + 0) + \sqrt{3} = -2 + \sqrt{3}$$

Expresiones como $\frac{2 - \sqrt{2}}{3}$ y $-2 + \sqrt{3}$, entre otras, no pueden simplificarse más y son nombres para los números reales obtenidos. Es decir, no se acostumbra a escribir $1 + \sqrt{2}$ como $1 + 1.41421356... = 2.41421356...$ o a 3π como $3 \cdot 3.14159265 = 9.42477796...$, sino simplemente $1 + \sqrt{2}$ y 3π.

Otra relación entre conjuntos que aparece es que la familia multiplicativa en los números reales cumple las mismas propiedades que en los números racionales como los son la clausurativa, asociativa, conmutativa, modulativa, invertida y una propiedad que relaciona la multiplicación con la adición la distributiva. Adicional a parecen sus respectivos ejemplos en donde se cumplen las propiedades.

Evidencia



Tema 3 La familia multiplicativa en los números reales

Logro: reconocer las propiedades de la multiplicación en los números reales.

La multiplicación en el conjunto de los números reales cumple las mismas propiedades que la multiplicación en el conjunto de los números racionales. Por tanto para a, b y c números reales, se cumplen las siguientes propiedades.

Clausurativa: $a \cdot b$ es un número real.

Asociativa: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Conmutativa: $a \cdot b = b \cdot a$.

Modulativa: si a es un número real, existe 1, que también es real, tal que $a \cdot 1 = a$ y $1 \cdot a = a$; uno es el módulo de la múltiplicación.

Invertiva: si a es un número real y $a \neq 0$, existe $\left(\frac{1}{a}\right)$ también real, tal que $a \cdot \left(\frac{1}{a}\right) = 1$; $\frac{1}{a}$ es el recíproco o inverso multiplicativo de a.

Una propiedad que relaciona la multiplicación con la adición de los números reales es la siguiente:

Distributiva: $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ y $(b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a)$.

Ejemplo 4

Efectuemos, aplicando las propiedades de la multiplicación de números reales que sean necesarias, la siguiente operación.

$(3 + \sqrt{2}) \cdot (1 + \sqrt{2})$

$$\begin{aligned}(3 + \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) &= 3(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2}(1 + \sqrt{2})\\ &= [3 \cdot 1 + 3 \cdot \sqrt{2}] + [\sqrt{2} \cdot 1 + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}]\\ &= 3 + 3\sqrt{2} + \sqrt{2} + 2\\ &= (3 + 2) + (3\sqrt{2} + \sqrt{2})\\ &= 5 + 4\sqrt{2}\end{aligned}$$

Fig. 2.7

La propiedad invertiva en los números reales en la adición y en la multiplicación, da lugar al opuesto y al recíproco, respectivamente, del número real.

Ejemplo 5

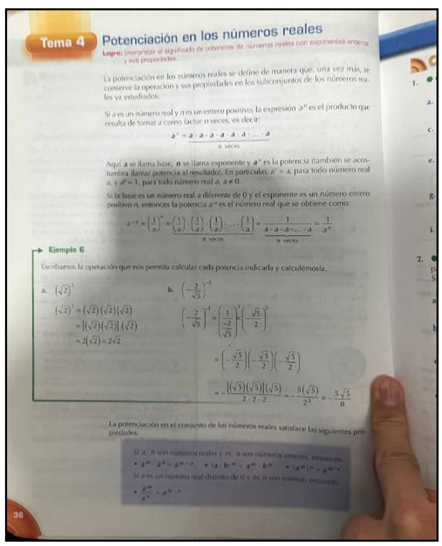
¿Cuál es el opuesto y cuál es el recíproco de $4 + \sqrt{2}$ y $\sqrt{3} - \sqrt{5}$?

Los opuestos de $4 + \sqrt{2}$ y $\sqrt{3} - \sqrt{5}$ son $-(4 + \sqrt{2}) = -4 - \sqrt{2}$ y $-(\sqrt{3} - \sqrt{5}) = -\sqrt{3} + \sqrt{5}$, respectivamente. Los recíprocos son $\frac{1}{4 + \sqrt{2}}$ y $\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{5}}$, respectivamente.

En los números reales, como en los racionales, la **división de dos números a y b, en donde $b \neq 0$, significa realizar el producto $a \cdot \frac{1}{b}$**, es decir, para dividir un número real a por b basta multiplicar el primero de los reales por el inverso multiplicativo del segundo.

Para la potenciación en los números reales se identifican que cumplen las mismas propiedades de los subconjuntos de los números reales, con sus debidos ejemplos.

Evidencia



Tema 4 Potenciación en los números reales

Logro: interpretar el significado de potencias de números reales con exponentes enteros y sus propiedades.

La potenciación en los números reales se define de manera que, una vez más, se conserve la operación y sus propiedades en los subconjuntos de los números reales ya estudiados.

Si a es un número real y n es un entero positivo, la expresión a^n es el producto que resulta de tomar a como factor n veces, es decir:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces}}$$

Aquí a se llama base, n se llama exponente y a^n es la potencia (también se acostumbra llamar potencia al resultado). En particular, $a^1 = a$, para todo número real a, y $a^0 = 1$, para todo número real a, $a \neq 0$.

Si la base es un número real a diferente de 0 y el exponente es un número entero positivo n, entonces la potencia a^{-n} es el número real que se obtiene como:

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \underbrace{\left(\frac{1}{a}\right) \cdot \left(\frac{1}{a}\right) \cdot \left(\frac{1}{a}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{a}\right)}_{n \text{ veces}} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces}}} = \frac{1}{a^n}$$

Ejemplo 6

Escribamos la operación que nos permita calcular cada potencia indicada y calculémosla.

a. $(\sqrt{2})^3$

$$\begin{aligned}(\sqrt{2})^3 &= (\sqrt{2})(\sqrt{2})(\sqrt{2})\\ &= [(\sqrt{2})(\sqrt{2})](\sqrt{2})\\ &= 2(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

b. $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{-3}$

$$\begin{aligned}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{-3} &= \left(\frac{1}{\frac{-2}{\sqrt{5}}}\right)^3 = \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^3\\ &= \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\\ &= -\frac{[(\sqrt{5})(\sqrt{5})](\sqrt{5})}{2 \cdot 2 \cdot 2} = -\frac{5(\sqrt{5})}{2^3} = -\frac{5\sqrt{5}}{8}\end{aligned}$$

La potenciación en el conjunto de los números reales satisface las siguientes propiedades:

Si a, b son números reales y m, n son números enteros, entonces,

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

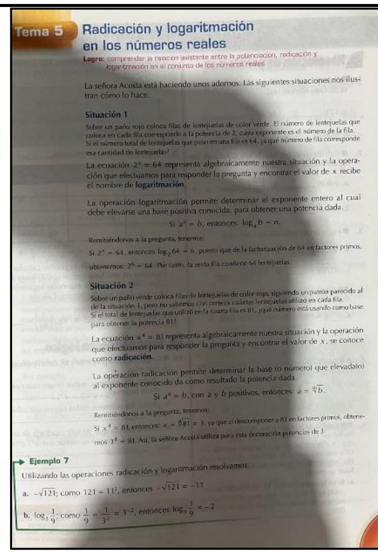
Si a es un número real distinto de 0 y m, n son enteros, entonces,

- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

36

Por último podemos mencionar la logaritmación y radicación dentro los números reales que aparece a partir de situaciones problemas en donde se ve necesario la solución de la ecuación con la radicación o la logaritmación con sus respectivos ejemplos.

Evidencia

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

Tema 5 Radicación y logaritmación en los números reales

Logro: comprender la relación existente entre la potenciación, radicación y logaritmación en el conjunto de los números reales

La señora Acosta está haciendo unos adornos. Las siguientes situaciones nos ilustran cómo lo hace.

Situación 1

Sobre un paño rojo coloca filas de lentejuelas de color verde. El número de lentejuelas que coloca en cada fila corresponde a la potencia de 2, cuyo exponente es el número de la fila. Si el número total de lentejuelas que puso en una fila es 64, ¿a qué número de fila corresponde esa cantidad de lentejuelas?

La ecuación $2^x = 64$ representa algebraicamente nuestra situación y la operación que efectuamos para responder la pregunta y encontrar el valor de x recibe el nombre de **logaritmación**.

La operación logaritmación permite determinar el exponente entero al cual debe elevarse una base positiva conocida, para obtener una potencia dada.

Si $a^n = b$, entonces: $\log_a b = n$.

Remitiéndonos a la pregunta, tenemos:

Si $2^x = 64$, entonces $\log_2 64 = 6$, puesto que de la factorización de 64 en factores primos, obtenemos: $2^6 = 64$. Por tanto, la sexta fila contiene 64 lentejuelas.

Situación 2

Sobre un paño verde coloca filas de lentejuelas de color rojo, siguiendo un patrón parecido al de la situación 1, pero no sabemos con certeza cuántas lentejuelas utilizó en cada fila. Si el total de lentejuelas que utilizó en la cuarta fila es 81, ¿qué número está usando como base para obtener la potencia 81?

La ecuación $x^4 = 81$ representa algebraicamente nuestra situación y la operación que efectuamos para responder la pregunta y encontrar el valor de x, se conoce como **radicación**.

La operación radicación permite determinar la base (o número) que elevada(o) al exponente conocido da como resultado la potencia dada.

Si $a^n = b$, con a y b positivos, entonces: $a = \sqrt[n]{b}$.

Remitiéndonos a la pregunta, tenemos:

Si $x^4 = 81$, entonces: $x = \sqrt[4]{81} = 3$, ya que al descomponer a 81 en factores primos, obtenemos $3^4 = 81$. Así, la señora Acosta utiliza para esta decoración potencias de 3.

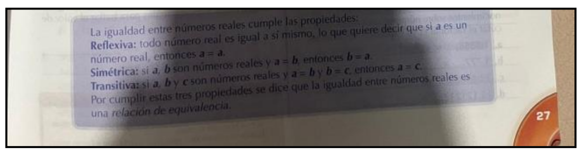
Ejemplo 7

Utilizando las operaciones radicación y logaritmación resolvamos:

a. $-\sqrt{121}$; como $121 = 11^2$, entonces $-\sqrt{121} = -11$

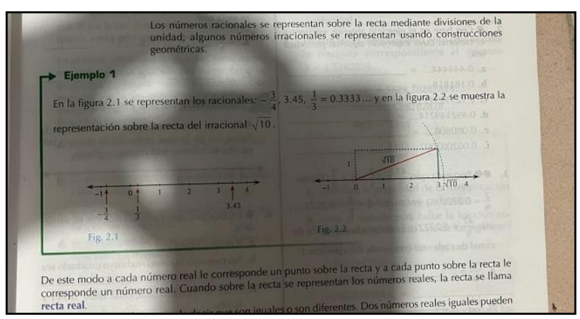
b. $\log_3 \frac{1}{9}$; como $\frac{1}{9} = \frac{1}{3^2} = 3^{-2}$, entonces $\log_3 \frac{1}{9} = -2$
</td>
</tr>
<tr>
<td>Características de los números reales</td>
<td>
Algunas de las características de los números reales es la relación de equivalencia para hablar de las propiedades que cumplan cuando existe igualdad entre los números reales.

Evidencia


La igualdad entre números reales cumple las propiedades:
Reflexiva: todo número real es igual a sí mismo, lo que quiere decir que si a es un número real, entonces $a = a$.
Simétrica: si a, b son números reales y $a = b$, entonces $b = a$.
Transitiva: si a, b y c son números reales y $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$.
Por cumplir estas tres propiedades se dice que la igualdad entre números reales es una *relación de equivalencia*.

27
</td>
</tr>
<tr>
<td>Representaciones de los números reales</td>
<td>
Se identifica la representación de los números racionales los representa sobre la recta mediante divisiones e irracionales con la construcción geométricas. Pero como anteriormente se menciona que la unión de ambos conjuntos son los números reales. Cuando en la recta se representan números reales la recta se llama recta real.

Evidencia


Los números racionales se representan sobre la recta mediante divisiones de la unidad; algunos números irracionales se representan usando construcciones geométricas.

Ejemplo 1

En la figura 2.1 se representan los racionales: $-\frac{3}{4}$, 3.45, $\frac{1}{3} = 0.3333...$ y en la figura 2.2 se muestra la representación sobre la recta del irracional $\sqrt{10}$.

Fig. 2.1

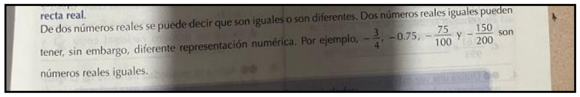
Fig. 2.2

De este modo a cada número real le corresponde un punto sobre la recta y a cada punto sobre la recta le corresponde un número real. Cuando sobre la recta se representan los números reales, la recta se llama **recta real**.

... es decir que son iguales o son diferentes. Dos números reales iguales pueden

Existen diferentes representaciones numéricas como;

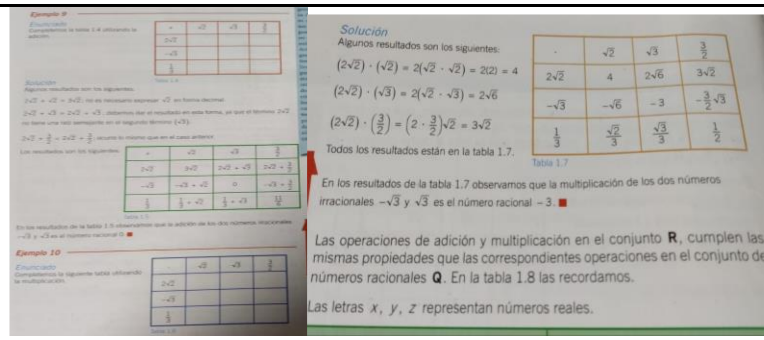
Fraccionario decimal, Fraccionario no decimal y Número decimal
</td>
</tr>
</table>

	Evidencia  recta real. De dos números reales se puede decir que son iguales o son diferentes. Dos números reales iguales pueden tener, sin embargo, diferente representación numérica. Por ejemplo, $-\frac{3}{4}$, -0.75, $-\frac{75}{100}$ y $-\frac{150}{200}$ son números reales iguales.

Consideraciones sobre el abordaje de los números reales en el libro de texto
Aunque el texto se encuentra casi completo presenta ambigüedades cuando define el conjunto de los números reales como la unión del conjunto de los irracionales y racionales sin definir alguno de los dos subconjuntos del conjunto de los reales. Adicional no presenta características de la densidad del conjunto de los reales, la no numerabilidad y la completitud de los $\mathbb{R}$ y queda escasa cuando no se clasifica su tipo de representación numérica.

Cód. SG_tar1

Breve análisis de un libro de texto alrededor del tratamiento de los números reales	
Datos del libro de texto	
	Castro R., (et al). (2004). Serie de MATEMATICAS para básica secundaria y media Espiral 8. Ed. Norma, pp. 10-66.
Descripciones del libro del texto	
Aspecto por considerar	Consideraciones
Introducción a los números reales (en relación con el concepto)	El libro introduce los números reales como conjunto un conjunto, haciendo mención a los números decimales que son dos clases como la periódica y la no periódica y dice que los reales es la unión de estos conjuntos. El conjunto de los números reales se indica con la letra **R**. Como el libro hace mención de los sistemas numéricos trabajados anteriormente para definir los números reales no muestra ejemplos o ilustras los números reales sino de una empieza con una tabla donde pides realizar operaciones con los números reales e ilustra errores que se pueden cometer al operar los números reales.


Solución
Algunos resultados son los siguientes:
$(2\sqrt{2})\cdot(\sqrt{2}) = 2(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}) = 2(2) = 4$
$(2\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}) = 2(\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}) = 2\sqrt{6}$
$(2\sqrt{2})\cdot\left(\frac{3}{2}\right) = \left(2\cdot\frac{3}{2}\right)\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$
Todos los resultados están en la tabla 1.7.

$\cdot$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{3}{2}$
$2\sqrt{2}$	4	$2\sqrt{6}$	$3\sqrt{2}$
$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{6}$	-3	$-\frac{3}{2}\sqrt{3}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{1}{2}$

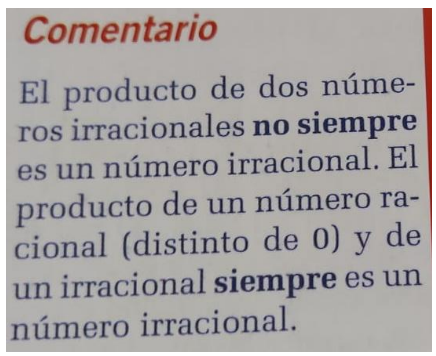
Tabla 1.7

En los resultados de la tabla 1.7 observamos que la multiplicación de los dos números irracionales $-\sqrt{3}$ y $\sqrt{3}$ es el número racional -3.

Las operaciones de adición y multiplicación en el conjunto **R**, cumplen las mismas propiedades que las correspondientes operaciones en el conjunto de números racionales **Q**. En la tabla 1.8 las recordamos.

Las letras x, y, z representan números reales.

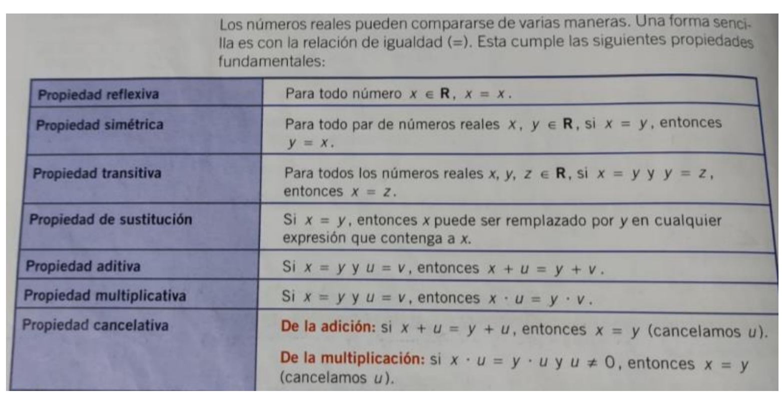
Cuando realiza los ejemplos anteriores con sus respectivas explicaciones el libro tiene un espacio donde van ubicando comentarios donde responden a algunas dudas o preguntas de los lectores. En este apartado hace alusión de que el producto de dos números irracionales no siempre da un numero irracional y que el producto de un numero racional distinto de cero y de un numero irracional siempre es un numero irracional, esta es una diferencio que hace a los otros conjuntos numéricos porque en las secciones de los conjuntos no menciona nada de lo mencionado, aunque no hace referencian a nada anterior sino solo lo menciona tal cual.


Comentario

El producto de dos números irracionales **no siempre** es un número irracional. El producto de un número racional (distinto de 0) y de un irracional **siempre** es un número irracional.

Características de los números reales

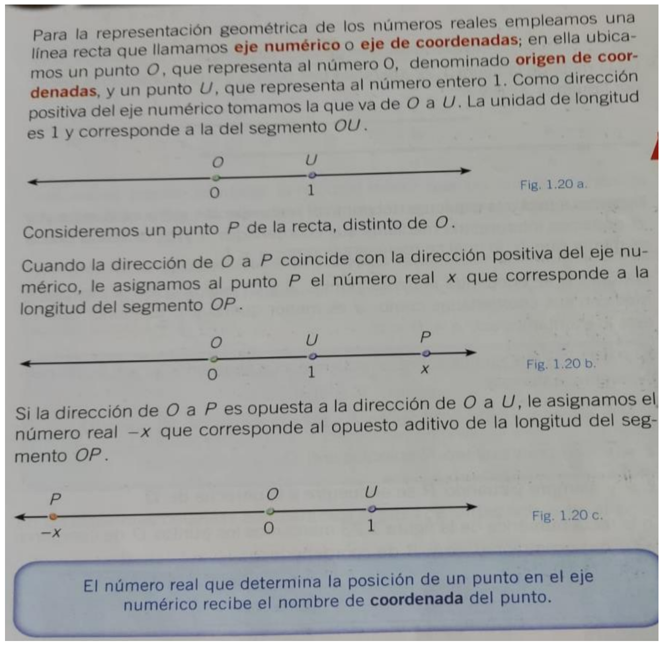
El libro no enuncia textualmente alguna característica de los números reales, una mención diferente que se encuentra en la sección de los números reales y lo menciona como tal de que los números reales pueden compararse de diferentes maneras haciendo alusión a la igualdad y las propiedades fundamentales.


Los números reales pueden compararse de varias maneras. Una forma sencilla es con la relación de igualdad (=). Esta cumple las siguientes propiedades fundamentales:

Propiedad reflexiva	Para todo número $x \in \mathbf{R}$, $x = x$.
Propiedad simétrica	Para todo par de números reales x, $y \in \mathbf{R}$, si $x = y$, entonces $y = x$.
Propiedad transitiva	Para todos los números reales $x, y, z \in \mathbf{R}$, si $x = y$ y $y = z$, entonces $x = z$.
Propiedad de sustitución	Si $x = y$, entonces x puede ser remplazado por y en cualquier expresión que contenga a x.
Propiedad aditiva	Si $x = y$ y $u = v$, entonces $x + u = y + v$.
Propiedad multiplicativa	Si $x = y$ y $u = v$, entonces $x \cdot u = y \cdot v$.
Propiedad cancelativa	**De la adición:** si $x + u = y + u$, entonces $x = y$ (cancelamos u). **De la multiplicación:** si $x \cdot u = y \cdot u$ y $u \neq 0$, entonces $x = y$ (cancelamos u).

Representaciones de los | El libro menciona que los números reales se pueden representar

números reales	geométricamente que se puede realizar en una recta que la llama eje numérico o eje de coordenadas. Esto consiste en lo conocido como la recta numérica y tomar de referencia el cero y un segmento de longitud de 0 a 1 y esa es la escala para que cada parte de la recta numérica quede de la misma medida y menciona el opuesto aditivo de un numero cualquiera como –X.



Para la representación geométrica de los números reales empleamos una línea recta que llamamos **eje numérico** o **eje de coordenadas**; en ella ubicamos un punto O, que representa al número 0, denominado **origen de coordenadas**, y un punto U, que representa al número entero 1. Como dirección positiva del eje numérico tomamos la que va de O a U. La unidad de longitud es 1 y corresponde a la del segmento OU.

Fig. 1.20 a.

Consideremos un punto P de la recta, distinto de O.

Cuando la dirección de O a P coincide con la dirección positiva del eje numérico, le asignamos al punto P el número real x que corresponde a la longitud del segmento OP.

Fig. 1.20 b.

Si la dirección de O a P es opuesta a la dirección de O a U, le asignamos el número real $-x$ que corresponde al opuesto aditivo de la longitud del segmento OP.

Fig. 1.20 c.

El número real que determina la posición de un punto en el eje numérico recibe el nombre de **coordenada** del punto.

Consideraciones sobre el abordaje de los números reales en el libro de texto

El libro menciona muchas cosas en las que podía hacer alusión o mencionar una estructura algebraica no rigurosa, pero si ir asociando esto para no estar mencionándolos en todo momento como conjunto de números reales y poder generar un poco de intriga para que ellos busquen palabras desconocidas o cosas nuevas de su antes con respecto al objeto estudiado. También hacer que seguido de los ejemplos unos ejercicios para que la lectura sea más interactiva.

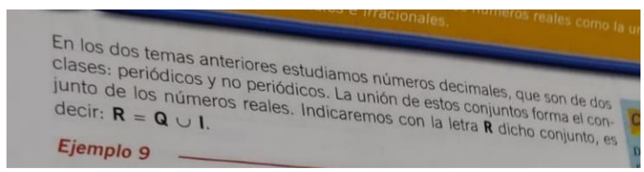
Cód. MB_tar1

Breve análisis de un libro de texto alrededor del tratamiento de los números reales

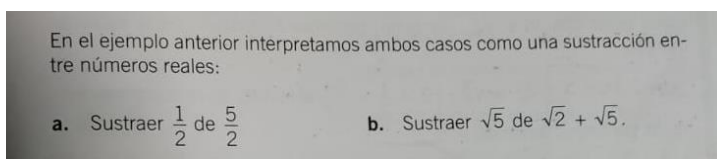
Datos del libro de texto

<table>
<tr><td>
</td><td>Castro R., (et al). (2004). Serie de MATEMATICAS para básica secundaria y media Espiral 8. Ed. Norma, pp. 10-66.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Descripciones del libro del texto</td></tr>
<tr><td>Aspecto por considerar</td><td>Consideraciones</td></tr>
<tr><td>Introducción a los números reales

(en relación con el concepto)</td><td>En el libro se introduce los números reales a través de otros conjuntos vistos anteriormente en el curso, se establecen como la unión del conjunto de los números racionales e irracionales.

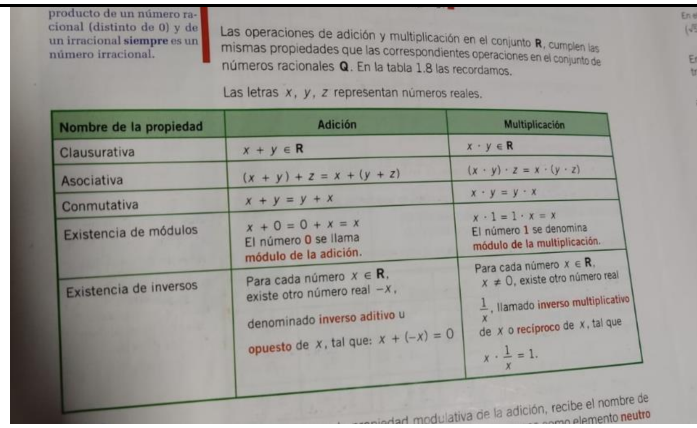

En los dos temas anteriores estudiamos números decimales, que son de dos clases: periódicos y no periódicos. La unión de estos conjuntos forma el conjunto de los números reales. Indicaremos con la letra R dicho conjunto, es decir: $\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I}$.
Ejemplo 9

Se presentan ejemplos basados en los dos conjuntos numéricos que lo componen (racionales, irracionales)


En el ejemplo anterior interpretamos ambos casos como una sustracción entre números reales:
a. Sustraer $\frac{1}{2}$ de $\frac{5}{2}$ b. Sustraer $\sqrt{5}$ de $\sqrt{2} + \sqrt{5}$.

En general no se presenta una definición de los números reales solo se mencionan a través de los dos conjuntos y su relación con estos. Por ejemplo, mencionan que los números racionales en la adición y multiplicación comparten propiedades.</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>



producto de un número racional (distinto de 0) y de un irracional **siempre** es un número irracional.

Las operaciones de adición y multiplicación en el conjunto **R**, cumplen las mismas propiedades que las correspondientes operaciones en el conjunto de números racionales **Q**. En la tabla 1.8 las recordamos.

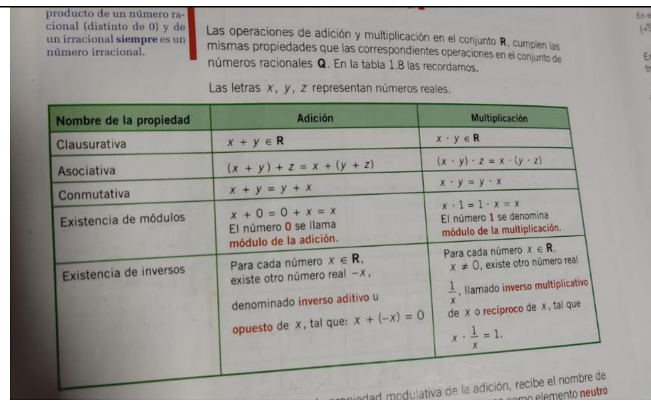
Las letras x, y, z representan números reales.

<table>
<tr><th>Nombre de la propiedad</th><th>Adición</th><th>Multiplicación</th></tr>
<tr><td>Clausurativa</td><td>$x + y \in \mathbf{R}$</td><td>$x \cdot y \in \mathbf{R}$</td></tr>
<tr><td>Asociativa</td><td>$(x + y) + z = x + (y + z)$</td><td>$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$</td></tr>
<tr><td>Conmutativa</td><td>$x + y = y + x$</td><td>$x \cdot y = y \cdot x$</td></tr>
<tr><td>Existencia de módulos</td><td>$x + 0 = 0 + x = x$
El número 0 se llama módulo de la adición.</td><td>$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$
El número 1 se denomina módulo de la multiplicación.</td></tr>
<tr><td>Existencia de inversos</td><td>Para cada número $x \in \mathbf{R}$, existe otro número real $-x$, denominado inverso aditivo u opuesto de x, tal que: $x + (-x) = 0$</td><td>Para cada número $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$, existe otro número real $\frac{1}{x}$, llamado inverso multiplicativo de x o recíproco de x, tal que $x \cdot \frac{1}{x} = 1$.</td></tr>
</table>

...propiedad modulativa de la adición, recibe el nombre de ... como elemento neutro

No se presentan diferencias entre los diferentes conjuntos numéricos, pero si algunas similitudes para definir el conjunto de los numéricos reales, como sus operaciones y propiedades.

</td>
</tr>
<tr>
<td>Características de los números reales</td>
<td>



producto de un número racional (distinto de 0) y de un irracional **siempre** es un número irracional.

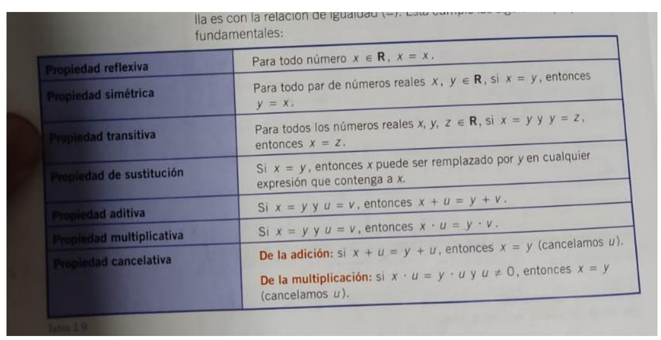
Las operaciones de adición y multiplicación en el conjunto **R**, cumplen las mismas propiedades que las correspondientes operaciones en el conjunto de números racionales **Q**. En la tabla 1.8 las recordamos.

Las letras x, y, z representan números reales.

<table>
<tr><th>Nombre de la propiedad</th><th>Adición</th><th>Multiplicación</th></tr>
<tr><td>Clausurativa</td><td>$x + y \in \mathbf{R}$</td><td>$x \cdot y \in \mathbf{R}$</td></tr>
<tr><td>Asociativa</td><td>$(x + y) + z = x + (y + z)$</td><td>$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$</td></tr>
<tr><td>Conmutativa</td><td>$x + y = y + x$</td><td>$x \cdot y = y \cdot x$</td></tr>
<tr><td>Existencia de módulos</td><td>$x + 0 = 0 + x = x$
El número 0 se llama módulo de la adición.</td><td>$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$
El número 1 se denomina módulo de la multiplicación.</td></tr>
<tr><td>Existencia de inversos</td><td>Para cada número $x \in \mathbf{R}$, existe otro número real $-x$, denominado inverso aditivo u opuesto de x, tal que: $x + (-x) = 0$</td><td>Para cada número $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$, existe otro número real $\frac{1}{x}$, llamado inverso multiplicativo de x o recíproco de x, tal que $x \cdot \frac{1}{x} = 1$.</td></tr>
</table>

...propiedad modulativa de la adición, recibe el nombre de ... como elemento neutro

Además de compartir las anteriores propiedades en relación con el conjunto de los racionales, nos mencionan que se pueden presentar como igualdades que cumplen diferentes propiedades.



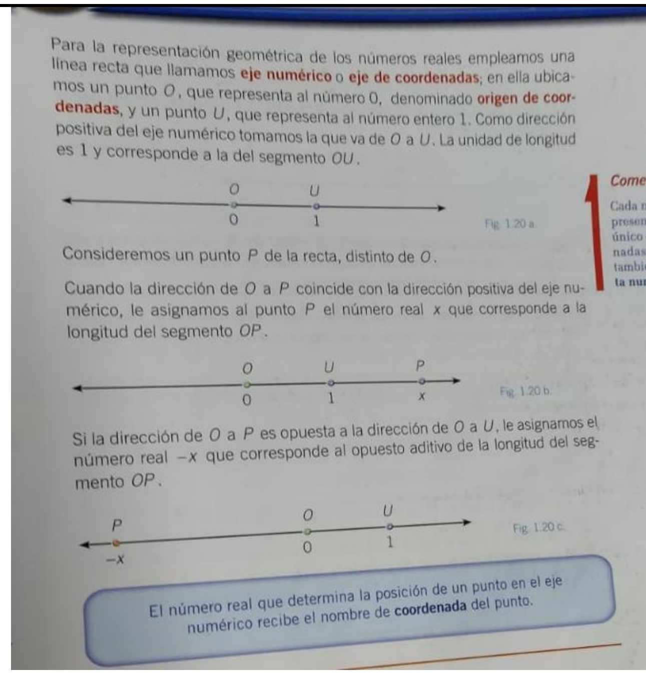
...lla es con la relación de igualdad (=). Esta cumple las siguientes propiedades fundamentales:

<table>
<tr><td>Propiedad reflexiva</td><td>Para todo número $x \in \mathbf{R}$, $x = x$.</td></tr>
<tr><td>Propiedad simétrica</td><td>Para todo par de números reales x, $y \in \mathbf{R}$, si $x = y$, entonces $y = x$.</td></tr>
<tr><td>Propiedad transitiva</td><td>Para todos los números reales x, y, $z \in \mathbf{R}$, si $x = y$ y $y = z$, entonces $x = z$.</td></tr>
<tr><td>Propiedad de sustitución</td><td>Si $x = y$, entonces x puede ser remplazado por y en cualquier expresión que contenga a x.</td></tr>
<tr><td>Propiedad aditiva</td><td>Si $x = y$ y $u = v$, entonces $x + u = y + v$.</td></tr>
<tr><td>Propiedad multiplicativa</td><td>Si $x = y$ y $u = v$, entonces $x \cdot u = y \cdot v$.</td></tr>
<tr><td>Propiedad cancelativa</td><td>De la adición: si $x + u = y + u$, entonces $x = y$ (cancelamos u).
De la multiplicación: si $x \cdot u = y \cdot u$ y $u \neq 0$, entonces $x = y$ (cancelamos u).</td></tr>
</table>

Tabla 1.9

También nos presentan el orden que se presentará en este conjunto numérico a través de una representación geométrica.

</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>


Para la representación geométrica de los números reales empleamos una línea recta que llamamos **eje numérico** o **eje de coordenadas**; en ella ubicamos un punto O, que representa al número 0, denominado **origen de coordenadas**, y un punto U, que representa al número entero 1. Como dirección positiva del eje numérico tomamos la que va de O a U. La unidad de longitud es 1 y corresponde a la del segmento OU.

Fig. 1.20 a

Consideremos un punto P de la recta, distinto de O.

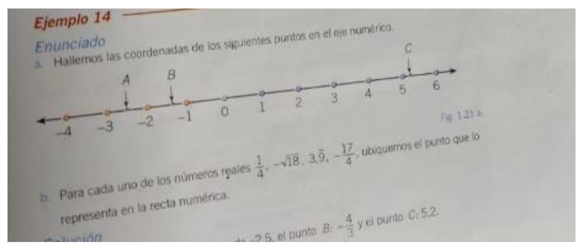
Cuando la dirección de O a P coincide con la dirección positiva del eje numérico, le asignamos al punto P el número real x que corresponde a la longitud del segmento OP.

Fig. 1.20 b

Si la dirección de O a P es opuesta a la dirección de O a U, le asignamos el número real $-x$ que corresponde al opuesto aditivo de la longitud del segmento OP.

Fig. 1.20 c

El número real que determina la posición de un punto en el eje numérico recibe el nombre de **coordenada** del punto.
</td>
</tr>
<tr>
<td>Representaciones de los números reales</td>
<td>
El uso de números de subconjuntos de los números reales



Ejemplo 14

Enunciado

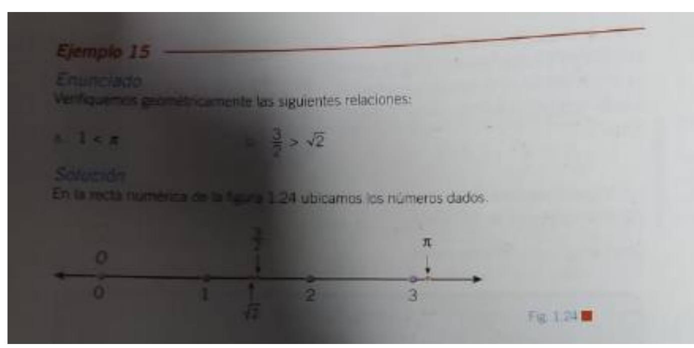
a. Hallemos las coordenadas de los siguientes puntos en el eje numérico.

Fig. 1.21 a

b. Para cada uno de los números reales $\frac{1}{4}$, $-\sqrt{18}$, $3.\bar{5}$, $-\frac{17}{4}$, ubiquemos el punto que lo representa en la recta numérica.

... -2,5, el punto B: $-\frac{4}{3}$ y el punto C: 5,2.

La representación geométrica



Ejemplo 15

Enunciado

Verifiquemos geométricamente las siguientes relaciones:

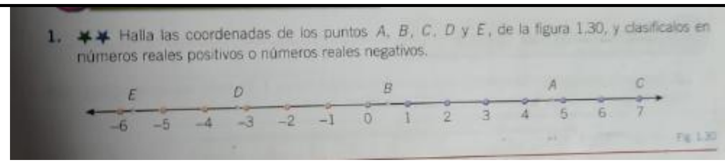
a. $1 < \pi$ b. $\frac{3}{2} > \sqrt{2}$

Solución

En la recta numérica de la figura 1.24 ubicamos los números dados.

Fig. 1.24

Además de los ejemplos anteriormente presentados de la representación geometrica anteriormente presentada, se presentan tareas donde introducen los terminos de “numeros reales positivos” y “números reales positivos”
</td>
</tr>
</table>



Consideraciones sobre el abordaje de los números reales en el libro de texto

El libro presenta varios errores en presentar el tema, ya que por ejemplo no presenta ejemplos generales de los números reales y esto no ayuda reconocerlos, ya que solo presenta elementos concretos de los números racionales e irracionales. Con lo que no presentar diferencias entre los diferentes conjuntos hace un poco difícil el entender la noción de número real y sus características.

Tampoco presentan diferentes representaciones de los números reales ya que al solo presentar su orden y su uso en ecuaciones lo que dificulta saber en qué contextos o el uso que se le puede dar a estos, por lo que el estudiante no lograra una buena comprensión del objeto.

Aunque se presentan tareas con problemas de la vida cotidiana que ayudan a comprender el objeto matemático y su uso en un contexto real.

Cód. LB_tar1

Breve análisis de un libro de texto alrededor del tratamiento de los números reales

Datos del libro de texto

Artigue, Michèle y otros. *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1995.

Dikson, Linda. *El aprendizaje de las matemáticas.* Editorial Labor, S. A., Madrid, 1991.

Espinosa, F. *Investigaciones en matemática educativa*. Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1996.

Lean, G. A. & Clements, M. A. Spatial ability, visual imagery, and mathematics peformance. 1981.

Lovaglia, Florence M. y otros. *Álgebra*. Harla S. A. de C. V., México, 1972,

MEN. Lineamientos curriculares para el área de matemáticas. Colombia, 1998.

Mendenhall, William y otros. *Estadística matemática con aplicaciones*. Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1986.

Ministerio de Educación Nacional. Estándares básicos de matemáticas y lenguaje para la educación básica y media.

<table>
<tr><td></td><td>Mayo de 2003.

Moise, Edwin E., Downs, Floyd L. Jr. Geometría Moderna. Addison-Wesley Iberoamericana, S. A., Estados Unidos, 1986.

Perkins, David. La Escuela Inteligente. Editorial Gedisa, Barcelona, 1992.

Polya, George. On solving mathematical problems in high school. Stephen Krulik, 1980.

Universitas, Tomo 10. La Matemática. Salvat Editores, S. A., 1987.

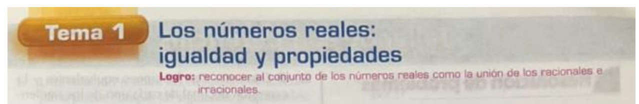
Volster, Carter, Crown, Warren. Invitación a las matemáticas. Editorial Norma, Bogotá, Colombia.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Descripciones del libro del texto</td></tr>
<tr><td>Aspecto por considerar</td><td>Consideraciones</td></tr>
<tr><td>Introducción a los números reales

(en relación con el concepto)</td><td>Los números reales en el libro se introducen por medio de 5 temas principales que son:

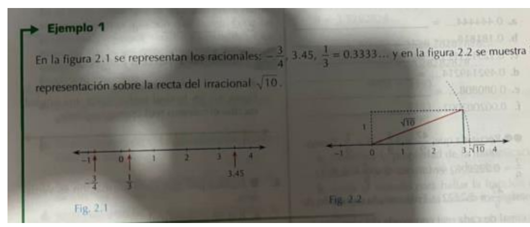

Contenido

1) Los números reales: igualdad y propiedades: en este tema el objetivo es reconocer al conjunto de los números reales como la unión de los racionales e irracionales, teniendo en cuenta el objetivo principal de este tema podemos observar que presentan los números reales como un conjunto y se establece una relación o unión con los números racionales e</td></tr>
</table>

irracionales. Además, busca que los estudiantes repasen un poco la sección anterior sobre los números racionales e irracionales, por medio de representaciones en rectas numéricas donde se trata se realizar una breve comparación entre los números racionales y los números irracionales, también presentan las propiedades que cumple la igualdad entre números reales que son: la propiedad reflexiva, simétrica y transitiva.


Tema 1 Los números reales: igualdad y propiedades

Logro: reconocer al conjunto de los números reales como la unión de los racionales e irracionales.

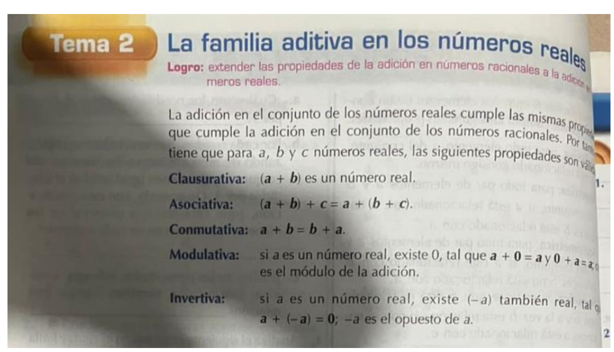

Ejemplo 1

En la figura 2.1 se representan los racionales: $-\frac{3}{4}$, 3.45, $\frac{1}{3} = 0.3333...$ y en la figura 2.2 se muestra la representación sobre la recta del irracional $\sqrt{10}$.

Fig. 2.1

Fig. 2.2

2) La familia aditiva en los números reales: esta sección tiene como objetivo extender las propiedades de la adición en números racionales a la adición en números reales, presentando las propiedades clausurativa, asociativa, conmutativa, modulativa e invertida de la familia aditiva en los números reales.


Tema 2 La familia aditiva en los números reales

Logro: extender las propiedades de la adición en números racionales a la adición [...] meros reales.

La adición en el conjunto de los números reales cumple las mismas propie[...] que cumple la adición en el conjunto de los números racionales. Por tan[...] tiene que para a, b y c números reales, las siguientes propiedades son váli[...]

Clausurativa: $(a + b)$ es un número real.

Asociativa: $(a + b) + c = a + (b + c)$.

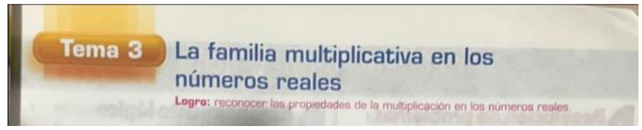
Conmutativa: $a + b = b + a$.

Modulativa: si a es un número real, existe 0, tal que $a + 0 = a$ y $0 + a = a$; 0 es el módulo de la adición.

Invertiva: si a es un número real, existe $(-a)$ también real, tal q[...] $a + (-a) = 0$; $-a$ es el opuesto de a.

3) La familia multiplicativa en los números reales: tiene

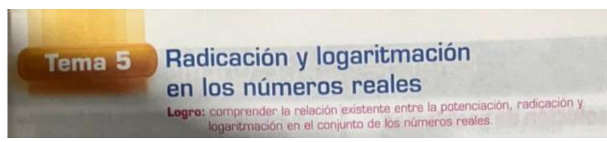
<table>
<tr>
<td></td>
<td>como objetivo reconocer las propiedades de la multiplicación en los números reales, este tema se centra un poco más en la propiedad distributiva.

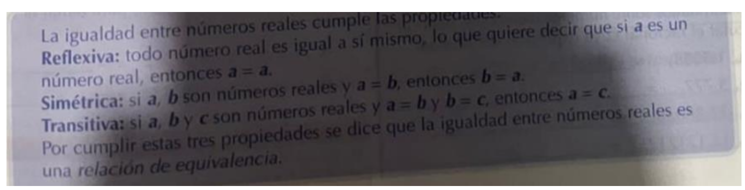

Tema 3 La familia multiplicativa en los números reales
Logro: reconocer las propiedades de la multiplicación en los números reales.

4) Potenciación en los números reales: este tema tiene como objetivo principal entender las propiedades y el concepto

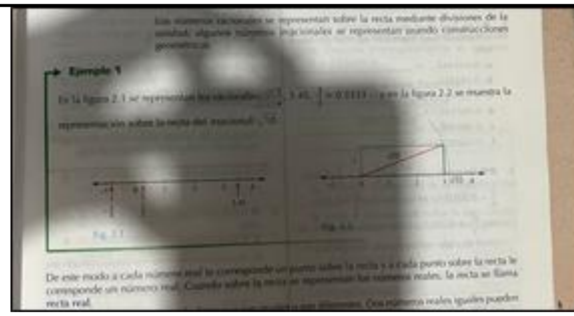

Tema 4 Potenciación en los números reales
Logro: interpretar el significado de potencias de números reales con exponentes y sus propiedades.

5) Radicación y logaritmación en los números reales: tiene como objetivo comprender la relación en el conjunto de los números reales

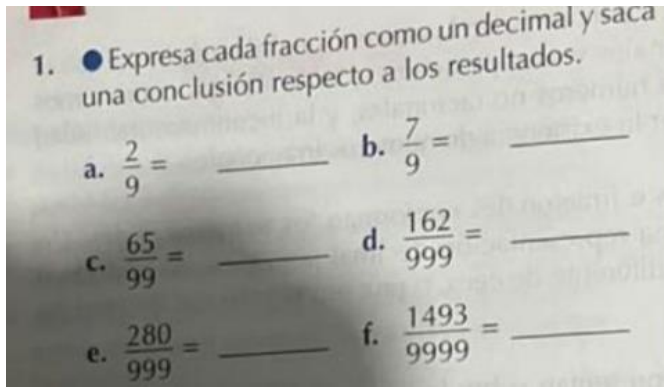

Tema 5 Radicación y logaritmación en los números reales
Logro: comprender la relación existente entre la potenciación, radicación y logaritmación en el conjunto de los números reales.</td>
</tr>
<tr>
<td>Características de los números reales</td>
<td>En el primer tema igualdad y propiedades podemos observar que al cumplirse las propiedades que de los números reales (reflexiva, simétrica y transitiva) tendremos una relación de equivalencia.


La igualdad entre números reales cumple las propiedades:
Reflexiva: todo número real es igual a sí mismo, lo que quiere decir que si a es un número real, entonces $a = a$.
Simétrica: si a, b son números reales y $a = b$, entonces $b = a$.
Transitiva: si a, b y c son números reales y $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$.
Por cumplir estas tres propiedades se dice que la igualdad entre números reales es una relación de equivalencia.</td>
</tr>
<tr>
<td>Representaciones de los números reales</td>
<td>En el libro se habla de diferentes representaciones de los números reales para enseñar el objeto matemático:

1) Recta real</td>
</tr>
</table>



2) Expresión decimal y expresión fraccionaria



1. Expresa cada fracción como un decimal y saca una conclusión respecto a los resultados.

a. $\frac{2}{9} =$ ______ b. $\frac{7}{9} =$ ______

c. $\frac{65}{99} =$ ______ d. $\frac{162}{999} =$ ______

e. $\frac{280}{999} =$ ______ f. $\frac{1493}{9999} =$ ______

Consideraciones sobre el abordaje de los números reales en el libro de texto

De acuerdo con lo anteriormente diligenciado plantear algunas consideraciones sobre si el texto presenta de manera suficiente, sin errores, ni ambigüedades el objeto número real.

Cód. LC_tar1

Breve análisis de un libro de texto alrededor del tratamiento de los números reales

Datos del libro de texto

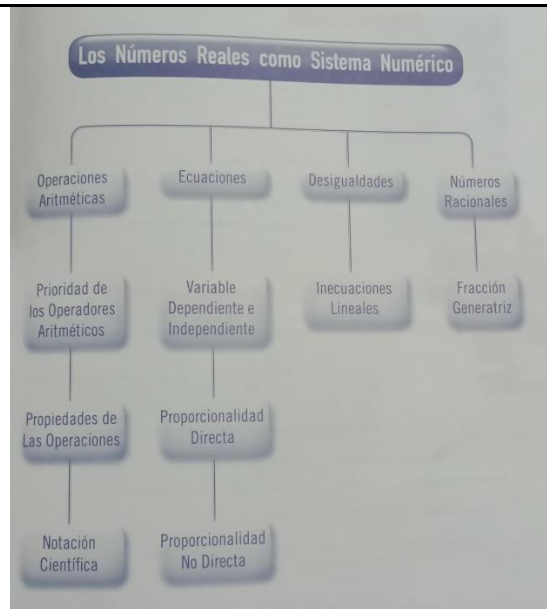
<table>
<tr><td>
</td><td>Ediciones Maristas. (2011). Juega y construye la matemática 8°. Editorial Kimpres. LTDA.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Descripciones del libro del texto</td></tr>
<tr><td>Aspecto por considerar</td><td>Consideraciones</td></tr>
<tr><td>Introducción a los números reales

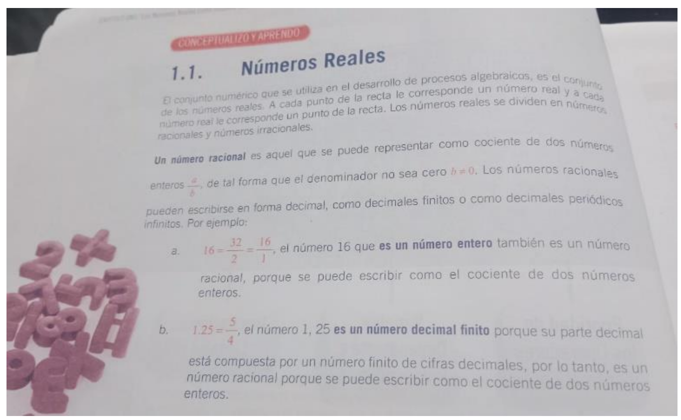
(en relación con el concepto)</td><td>En el libro se introducen los números reales como un conjunto numérico que se utiliza en el desarrollo de procesos algebraicos. Estos están conformados por los números irracionales y racionales. Siendo así los siguientes ejemplos:

a. π, e, ϕ
b. $16 = \frac{32}{2}, \frac{16}{1}$
c. $12,3\overline{345} = 12,3345345345345345 \ldots ..345 \ldots ....$

El libro especifica los números reales como sistema numérico del cual se desprende conceptos tales como: operaciones aritméticas, prioridad de los operadores aritméticos, propiedades de las operaciones, notación científica, ecuaciones, variable dependiente e independiente, proporcionalidad directa, proporcionalidad no directa, ETC.</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>





CONCEPTUALIZO Y APRENDO

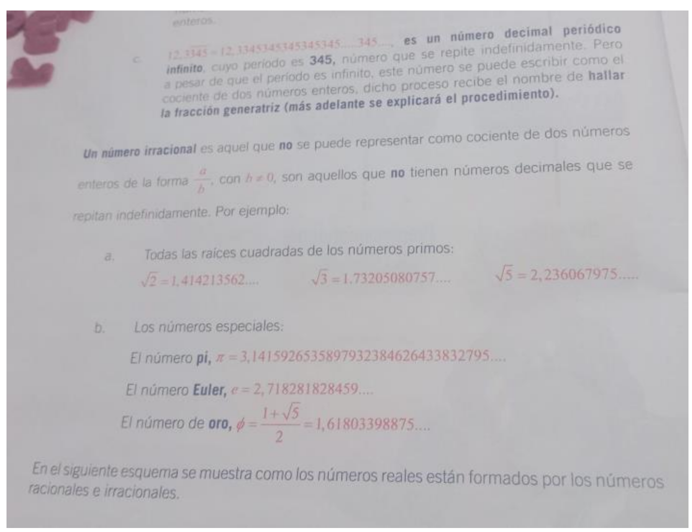
1.1. **Números Reales**

El conjunto numérico que se utiliza en el desarrollo de procesos algebraicos, es el conjunto de los números reales. A cada punto de la recta le corresponde un número real y a cada número real le corresponde un punto de la recta. Los números reales se dividen en números racionales y números irracionales.

Un número racional es aquel que se puede representar como cociente de dos números enteros $\frac{a}{b}$, de tal forma que el denominador no sea cero $b \neq 0$. Los números racionales pueden escribirse en forma decimal, como decimales finitos o como decimales periódicos infinitos. Por ejemplo:

a. $16 = \frac{32}{2} = \frac{16}{1}$, el número 16 que **es un número entero** también es un número racional, porque se puede escribir como el cociente de dos números enteros.

b. $1.25 = \frac{5}{4}$, el número 1, 25 **es un número decimal finito** porque su parte decimal está compuesta por un número finito de cifras decimales, por lo tanto, es un número racional porque se puede escribir como el cociente de dos números enteros.



enteros.

c. $12.3\overline{345} = 12.3345345345345345....345....$, **es un número decimal periódico infinito**, cuyo período es **345**, número que se repite indefinidamente. Pero a pesar de que el período es infinito, este número se puede escribir como el cociente de dos números enteros, dicho proceso recibe el nombre de **hallar la fracción generatriz (más adelante se explicará el procedimiento).**

Un número irracional es aquel que **no** se puede representar como cociente de dos números enteros de la forma $\frac{a}{b}$, con $b \neq 0$, son aquellos que **no** tienen números decimales que se repitan indefinidamente. Por ejemplo:

a. Todas las raíces cuadradas de los números primos:

$\sqrt{2} = 1,414213562....$ $\sqrt{3} = 1,73205080757....$ $\sqrt{5} = 2,236067975.....$

b. Los números especiales:

El número **pi**, $\pi = 3,14159265358979323846264338327 95....$

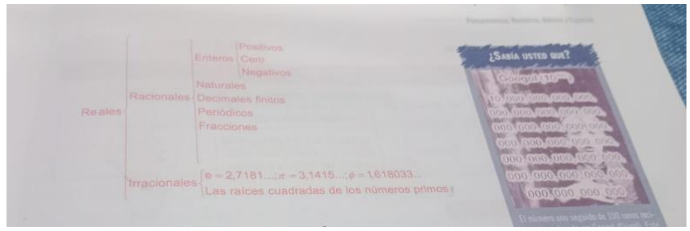
El número **Euler**, $e = 2,718281828459....$

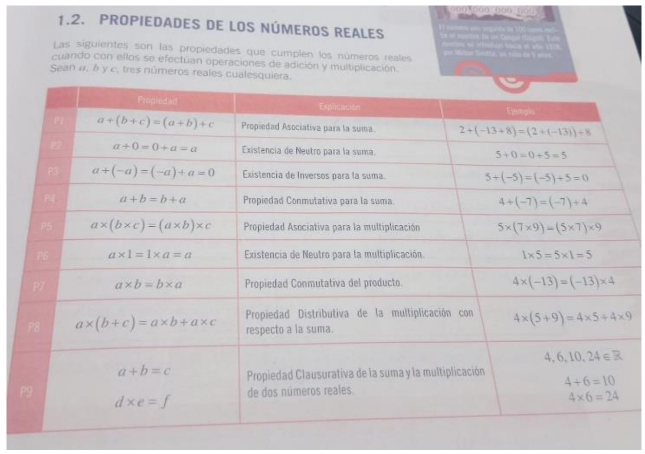
El número de **oro**, $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,61803398875....$

En el siguiente esquema se muestra como los números reales están formados por los números racionales e irracionales.

</td>
</tr>
<tr>
<td>Características de los números reales</td>
<td>En el libro se menciona que el conjunto está formado por el conjunto de los racionales y los irracionales además de eso se mencionan sus propiedades cuando se efectúan operaciones y</td>
</tr>
</table>

suma y multiplicación entre ellos, tales como la asociativa, la conmutativa, distributiva de la multiplicación respecto a la suma, la clausurativa de la suma y la multiplicación de dos números reales, el elemento neutro y el inverso.

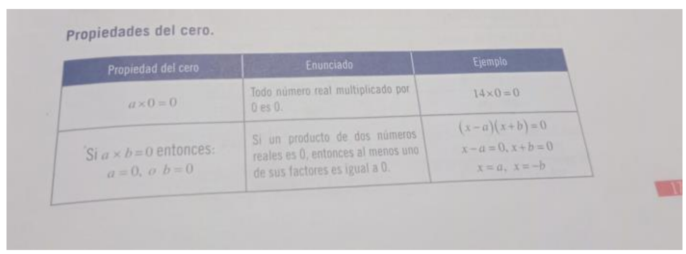




1.2. PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES

Las siguientes son las propiedades que cumplen los números reales cuando con ellos se efectúan operaciones de adición y multiplicación. Sean a, b y c, tres números reales cualesquiera.

	Propiedad	Explicación	Ejemplo
P1	$a+(b+c)=(a+b)+c$	Propiedad Asociativa para la suma.	$2+(-13+8)=(2+(-13))+8$
P2	$a+0=0+a=a$	Existencia de Neutro para la suma.	$5+0=0+5=5$
P3	$a+(-a)=(-a)+a=0$	Existencia de Inversos para la suma.	$5+(-5)=(-5)+5=0$
P4	$a+b=b+a$	Propiedad Conmutativa para la suma.	$4+(-7)=(-7)+4$
P5	$a\times(b\times c)=(a\times b)\times c$	Propiedad Asociativa para la multiplicación	$5\times(7\times9)=(5\times7)\times9$
P6	$a\times1=1\times a=a$	Existencia de Neutro para la multiplicación.	$1\times5=5\times1=5$
P7	$a\times b=b\times a$	Propiedad Conmutativa del producto.	$4\times(-13)=(-13)\times4$
P8	$a\times(b+c)=a\times b+a\times c$	Propiedad Distributiva de la multiplicación con respecto a la suma.	$4\times(5+9)=4\times5+4\times9$
P9	$a+b=c$ $d\times e=f$	Propiedad Clausurativa de la suma y la multiplicación de dos números reales.	$4, 6, 10, 24 \in \mathbb{R}$ $4+6=10$ $4\times6=24$



Propiedades del cero.

Propiedad del cero	Enunciado	Ejemplo
$a\times0=0$	Todo número real multiplicado por 0 es 0.	$14\times0=0$
Si $a\times b=0$ entonces: $a=0$, o $b=0$	Si un producto de dos números reales es 0, entonces al menos uno de sus factores es igual a 0.	$(x-a)(x+b)=0$ $x-a=0, x+b=0$ $x=a,\ x=-b$

Representaciones de los números reales

a. El número pi $\pi = 3{,}14159265358979323846264 3 \ldots$

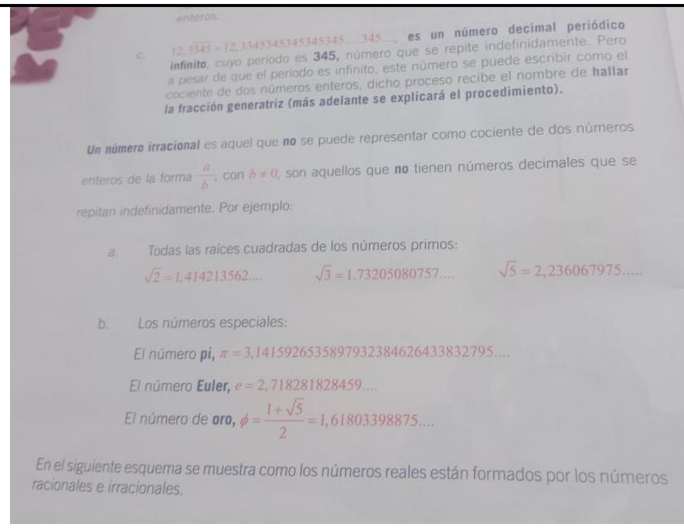
b. El número Euler $e = 2{,}718281828459 \ldots$

c. El número de oro $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803398875 \ldots$

d. $16 = \frac{32}{2}, \frac{16}{1}$

e. $12{,}3\overline{345} = 12{,}3345345345345345 \ldots \ldots 345 \ldots \ldots$

f. Todas las raíces cuadradas de los números primos.



enteros.

c. $12,\overline{345} = 12,345345345345345....345....$, **es un número decimal periódico infinito**, cuyo periodo es **345,** número que se repite indefinidamente. Pero a pesar de que el periodo es infinito, este número se puede escribir como el cociente de dos números enteros, dicho proceso recibe el nombre de **hallar la fracción generatriz (más adelante se explicará el procedimiento).**

Un número irracional es aquel que **no** se puede representar como cociente de dos números enteros de la forma $\frac{a}{b}$, con $b \neq 0$, son aquellos que **no** tienen números decimales que se repitan indefinidamente. Por ejemplo:

a. Todas las raíces cuadradas de los números primos:

$\sqrt{2} = 1,414213562....$ $\sqrt{3} = 1.73205080757....$ $\sqrt{5} = 2,236067975.....$

b. Los números especiales:

El número **pi,** $\pi = 3,14159265358979323846264338832795....$

El número **Euler,** $e = 2,718281828459....$

El número de **oro,** $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,61803398875....$

En el siguiente esquema se muestra como los números reales están formados por los números racionales e irracionales.

Consideraciones sobre el abordaje de los números reales en el libro de texto

Aunque el texto presenta de forma adecuada a los números reales como un conjunto formado por los conjuntos: números racionales e irracionales, esta definición se vuelve ambigua a la hora de definir los números racionales pues dice que son el cociente de dos números enteros.

Cuando habla de los números reales como sistema numérico, no los define como tal desde el sistema numérico sino desde lo que se puede hacer con ellos en el contexto de las matemáticas mismas, lo que hace que sea una presentación muy ambigua del objeto número real.

Cód. KD_tar1

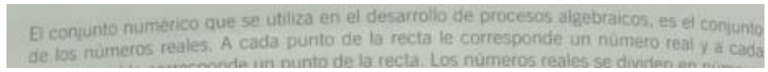
Breve análisis de un libro de texto alrededor del tratamiento de los números reales

Datos del libro de texto

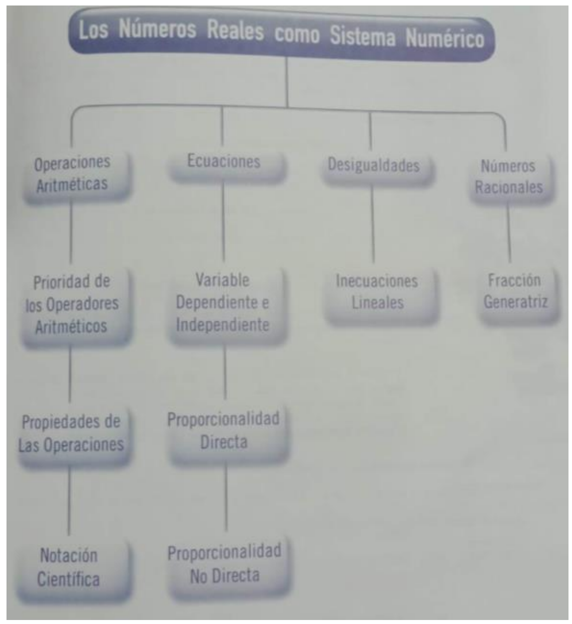
Norandina, C. d. (s.f.). *Juega y construye la Matemática*. Provincia Norandina, Colombia.

<table>
<tr><th colspan="2">Descripciones del libro del texto</th></tr>
<tr><th>Aspecto por considerar</th><th>Consideraciones</th></tr>
<tr><td>Introducción a los números reales

(en relación con el concepto)</td><td>En un apartado se presenta $\mathbb{R}$ como conjunto numérico que se utiliza en el desarrollo de procesos algebraicos. No se establecen relaciones o diferencias con otros conjuntos numéricos.

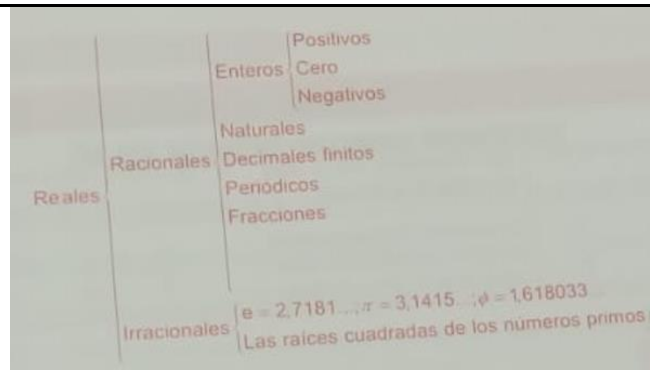

El conjunto numérico que se utiliza en el desarrollo de procesos algebraicos, es el conjunto de los números reales. A cada punto de la recta le corresponde un número real y a cada ... corresponde un punto de la recta. Los números reales se dividen en núm...

En otro apartado se presenta $\mathbb{R}$ como sistema numérico y es relacionado con algunos conceptos matemáticos.



Se presentan relaciones con los sistemas numéricos de los números Racionales e Irracionales, ya que dicen que los números reales se dividen en números racionales y números irracionales. A su vez relacionan números racionales con los Enteros, Naturales, decimales finitos, periódicos y fracciones.

Presentan el siguiente gráfico:</td></tr>
</table>

	
Características de los números reales	Una de las características que adjudican a los números reales es que “a cada punto de la recta le corresponde un número real y a cada número real le corresponde un numero de la recta”. Además, enuncian que se dividen en números racionales y números irracionales. se presenta ℝ como conjunto numérico que se utiliza en el desarrollo de procesos algebraicos
Representaciones de los números reales	De manera implícita se dice que los números reales en su representación escrita pueden escribirse en forma decimal, como decimales finitos o como decimales infinitos periódicos. Allí mismo, se enuncia que 16=32/2=16/1, por lo que “el número 16 que es un numero entero, se puede escribir como un numero racional, porque se puede escribir como el cociente dos números enteros”.

Consideraciones sobre el abordaje de los números reales en el libro de texto

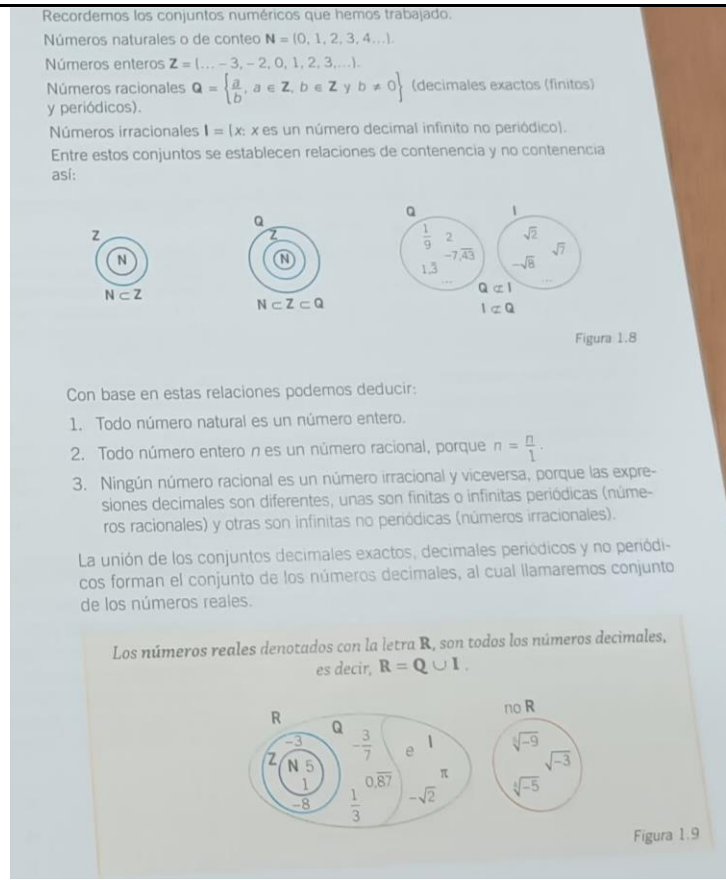
El hecho de que lo presente a los números Reales como conjunto numérico y también como sistema es en mi opinión, ambiguo.

Cód. JV_tar1

Breve análisis de un libro de texto alrededor del tratamiento de los números reales

Datos del libro de texto

	Padilla Chasing, S., Samper, C. & Moreno Gutiérrez, V. (2008). *Delta 8*. Bogotá D.C.: Grupo Editorial Norma.
Descripciones del libro del texto	
Aspecto por considerar	Consideraciones
Introducción a los números reales (en relación con el concepto)	Los números reales se introducen a partir de las relaciones entre los conjuntos numéricos, en donde se da aborda los conjuntos numéricos de los números naturales, enteros, racionales (decimales exactos y periódicos) y números irracionales (decimal infinito no periódico), asimismo se establecen las relaciones de contenencia y no contenencia. De este modo introducen los números $\mathbb{R}$ como la unión de los conjuntos. $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.



Recordemos los conjuntos numéricos que hemos trabajado.

Números naturales o de conteo $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, 4...\}$.

Números enteros $\mathbf{Z} = \{... -3, -2, 0, 1, 2, 3,...\}$.

Números racionales $\mathbf{Q} = \left\{\frac{a}{b}, a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{Z} \text{ y } b \neq 0\right\}$ (decimales exactos (finitos) y periódicos).

Números irracionales $\mathbf{I} = \{x: x$ es un número decimal infinito no periódico$\}$.

Entre estos conjuntos se establecen relaciones de contenencia y no contenencia así:

Figura 1.8

Con base en estas relaciones podemos deducir:

1. Todo número natural es un número entero.
2. Todo número entero n es un número racional, porque $n = \frac{n}{1}$.
3. Ningún número racional es un número irracional y viceversa, porque las expresiones decimales son diferentes, unas son finitas o infinitas periódicas (números racionales) y otras son infinitas no periódicas (números irracionales).

La unión de los conjuntos decimales exactos, decimales periódicos y no periódicos forman el conjunto de los números decimales, al cual llamaremos conjunto de los números reales.

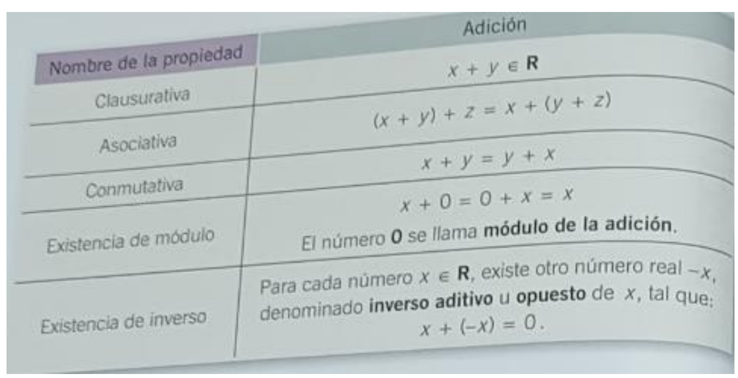
*Los **números reales** denotados con la letra **R**, son todos los números decimales, es decir, $\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I}$.*

Figura 1.9

Evidencia 1. – Introducción a los números reales.

Por otra parte, se tienen en cuenta las operaciones aritméticas tales como (suma, resta, multiplicación y división) en los números reales.

Adición y sustracción de números reales:



Nombre de la propiedad	Adición
Clausurativa	$x + y \in \mathbf{R}$
Asociativa	$(x + y) + z = x + (y + z)$
Conmutativa	$x + y = y + x$
Existencia de módulo	$x + 0 = 0 + x = x$ El número **0** se llama **módulo de la adición**.
Existencia de inverso	Para cada número $x \in \mathbf{R}$, existe otro número real $-x$, denominado **inverso aditivo** u **opuesto** de x, tal que: $x + (-x) = 0$.

Evidencia 2. – Propiedades de la Adición y sustracción de números reales.

Multiplicación y división de números reales:

Nombre de la propiedad	Multiplicación
Clausurativa	$x \cdot y \in \mathbf{R}$
Asociativa	$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
Conmutativa	$x \cdot y = y \cdot x$
Existencia de módulo	$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ El número 1 se denomina **módulo** de la multiplicación.
Existencia de inverso	Para cada número $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$, existe otro número real $\frac{1}{x}$, llamado **inverso multiplicativo** de x o **recíproco** de x, tal que $x \cdot \frac{1}{x} = 1$.
Propiedad distributiva de la multiplicación sobre la adición	$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

Evidencia 3. – Propiedades de la multiplicación y división de números reales.

En el texto se menciona que las operaciones de adición y multiplicación en el conjunto de los números ℝ cumple las mismas propiedades de dichas operaciones en el conjunto de los números ℚ.

Características de los números reales

Características de los números reales:

Como primera instancia se trata la relación de orden, en donde ubican los números reales positivos y negativos, teniendo en cuenta el punto de referencia 0.

Para la ubicación de los números reales empleamos una línea recta que llamamos eje numérico o eje de coordenadas; el punto de referencia *O*, que representa el número 0, divide a la recta en eje positivo (a la derecha de cero) y en eje negativo (a la izquierda de cero). Así, los puntos a la derecha del punto *O* serán para los **números reales positivos ($a > 0$)** y los puntos a la izquierda del punto *O* serán para los **números reales negativos ($a < 0$)**. El cero corresponde al número neutro.

Evidencia 4. – Relación de orden, números reales negativos y positivos.

Ejemplo:

El punto *A* de la figura 1.10 está a la izquierda del punto *B*; esta relación entre los puntos *A* y *B* podemos interpretarla mediante sus coordenadas –68 y 12,8, diciendo que –68 es menor que 12,8, lo cual se representa como $-68 < 12{,}8$.

El punto *B* se encuentra en los puntos *E* y *D*; esta relación la interpretamos con sus coordenadas como: –13,5 es menor que 12,8 y 12,8 es menor que 32,1. Esto lo escribimos así: $-13{,}5 < 12{,}8 < 32{,}1$.

Evidencia 5. – Ejemplo de cómo se aborda la relación de orden.

Continuando clasifican la relación de orden en los números reales, como desigualdades entre los mismos.

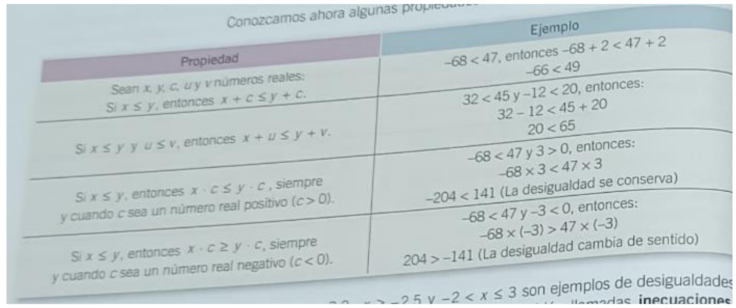
misma manera, la relación

*La relación menor o igual (≤) es una **relación de orden** en el conjunto **R**, porque:*
Es reflexiva: $a \leq a$, para todo número real a.
Es antisimétrica: si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$.
Es transitiva: si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$.

relación de orden.

Evidencia 5. – Relación de orden, desigualdades entre números reales.

Con esto también se tienen en cuenta las propiedades de dicha relación de orden, esto con su ejemplo.



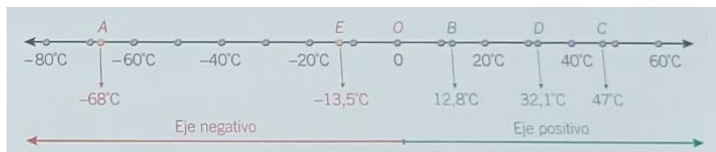
Conozcamos ahora algunas propiedades

Propiedad	Ejemplo
Sean x, y, c, u y v números reales: Si $x \leq y$, entonces $x + c \leq y + c$.	$-68 < 47$, entonces $-68 + 2 < 47 + 2$ $-66 < 49$
Si $x \leq y$ y $u \leq v$, entonces $x + u \leq y + v$.	$32 < 45$ y $-12 < 20$, entonces: $32 - 12 < 45 + 20$ $20 < 65$
Si $x \leq y$, entonces $x \cdot c \leq y \cdot c$, siempre y cuando c sea un número real positivo ($c > 0$).	$-68 < 47$ y $3 > 0$, entonces: $-68 \times 3 < 47 \times 3$ $-204 < 141$ (La desigualdad se conserva)
Si $x \leq y$, entonces $x \cdot c \geq y \cdot c$, siempre y cuando c sea un número real negativo ($c < 0$).	$-68 < 47$ y $-3 < 0$, entonces: $-68 \times (-3) > 47 \times (-3)$ $204 > -141$ (La desigualdad cambia de sentido)

Evidencia 6. – Propiedades de la relación de orden, desigualdades entre números reales.

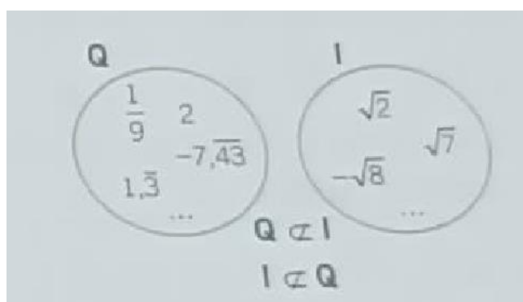
Representaciones de los números reales

Representación de los números reales en la recta numérica, teniendo en cuenta el ejemplo en grados Celsius.



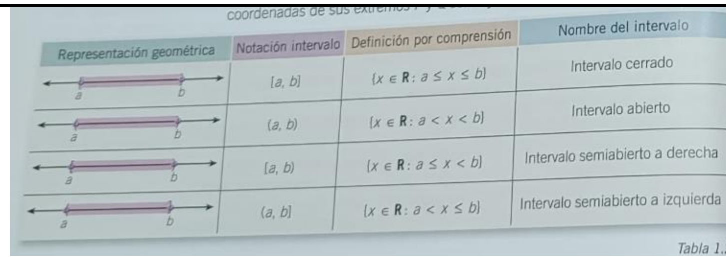
Evidencia 6. – Representación de los números reales en la recta numérica.

Representación de los números reales, teniendo en cuenta el conjunto de los $\mathbb{Q}$ he $\mathbb{I}$.



Evidencia 7. – Representación de los números reales en los conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$.

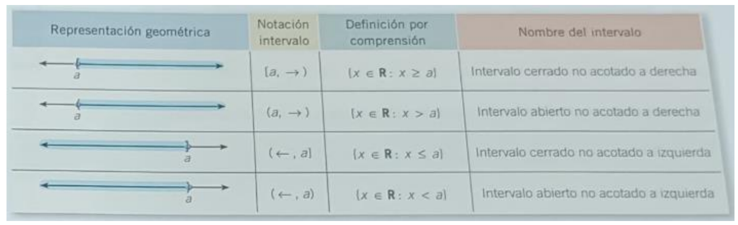
La representación geométrica, como intervalos acotados (Segmentos) y no acotados (Semirrecta y recta), en donde se utiliza la relación de orden para definir un subconjunto de los puntos.



Representación geométrica	Notación intervalo	Definición por comprensión	Nombre del intervalo
	$[a, b]$	$\{x \in \mathbf{R}: a \le x \le b\}$	Intervalo cerrado
	(a, b)	$\{x \in \mathbf{R}: a < x < b\}$	Intervalo abierto
	$[a, b)$	$\{x \in \mathbf{R}: a \le x < b\}$	Intervalo semiabierto a derecha
	$(a, b]$	$\{x \in \mathbf{R}: a < x \le b\}$	Intervalo semiabierto a izquierda

Tabla 1.2

Evidencia 8. – Representación de los números reales en intervalos acotados.



Representación geométrica	Notación intervalo	Definición por comprensión	Nombre del intervalo
	$[a, \rightarrow)$	$\{x \in \mathbf{R}: x \ge a\}$	Intervalo cerrado no acotado a derecha
	$(a, \rightarrow)$	$\{x \in \mathbf{R}: x > a\}$	Intervalo abierto no acotado a derecha
	$(\leftarrow, a]$	$\{x \in \mathbf{R}: x \le a\}$	Intervalo cerrado no acotado a izquierda
	$(\leftarrow, a)$	$\{x \in \mathbf{R}: x < a\}$	Intervalo abierto no acotado a izquierda

Evidencia 9. – Representación de los números reales en intervalos no acotados.

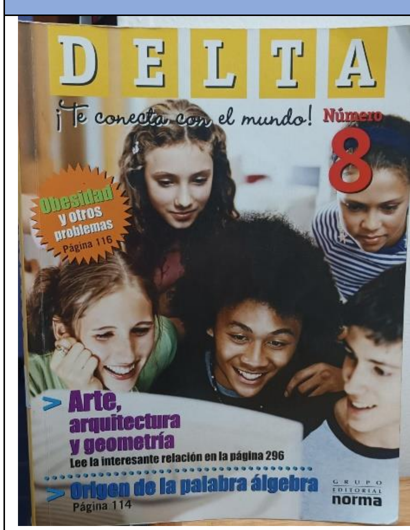
Consideraciones sobre el abordaje de los números reales en el libro de texto

El texto presenta una amplia información sobre los números reales, teniendo en cuenta sus propiedades, las operaciones aritméticas, algunas representaciones, etc. Tratando de llevar a colación diferentes ejemplos que ayuden a comprender lo expuesto. No obstante, es necesario especificar la representación en fracciones continuas y además algunas diferencias con los números racionales.

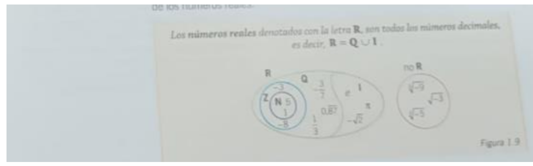
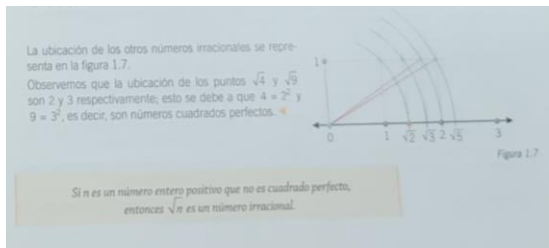
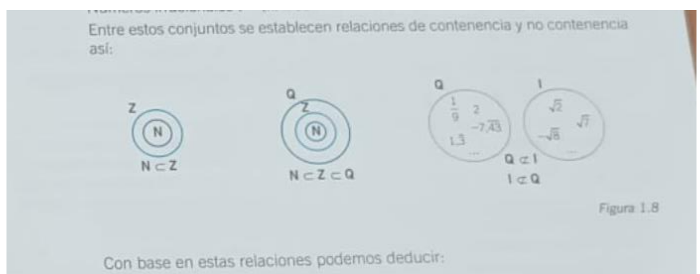
Cód. JR_tar1

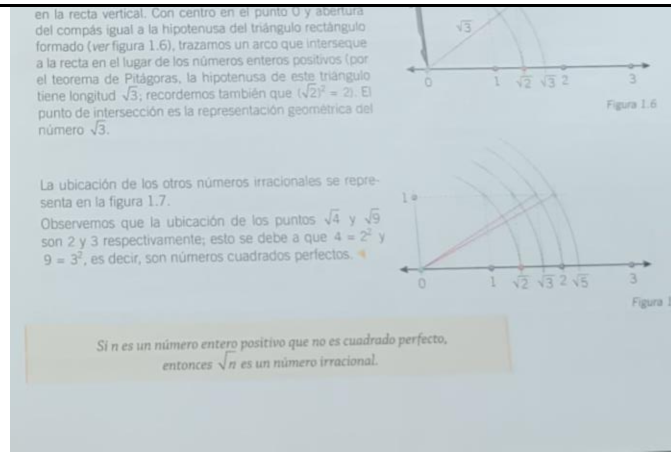
Breve análisis de un libro de texto alrededor del tratamiento de los números reales

Datos del libro de texto

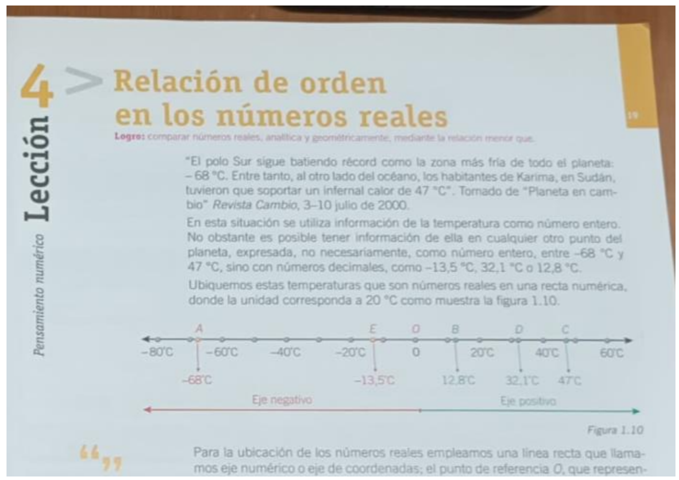


Padilla Chasing, S., Samper de Caicedo, C. & Moreno Gutiérrez, V. (2008). *Delta 8*. Grupo Editorial Norma, Bogotá.

Descripciones del libro del texto	
Aspecto por considerar	Consideraciones
Introducción a los números reales (en relación con el concepto)	Los números reales, en este libro, son presentados desde la teoría de conjuntos (diagramas de Venn). En libros anteriores se han ido presentado los diferentes conjuntos numéricos, este libro, en la unidad 1, inicia con una introducción a los números racionales, su definición y como ubicarlos en la recta   Seguido a esto, pasa a presentar los diferentes conjuntos numéricos trabajados hasta el momento, naturales, enteros, racionales e irracionales, estos por medio de contenencias 
Características de los números reales	Una de las características que muestra es como construir, en la recta un numero con regla y compas

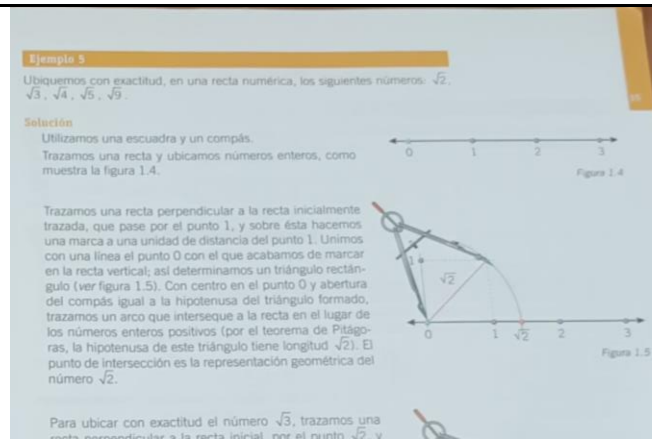
<table>
<tr>
<td></td>
<td>
en la recta vertical. Con centro en el punto 0 y abertura del compás igual a la hipotenusa del triángulo rectángulo formado (ver figura 1.6), trazamos un arco que interseque a la recta en el lugar de los números enteros positivos (por el teorema de Pitágoras, la hipotenusa de este triángulo tiene longitud $\sqrt{3}$; recordemos también que $(\sqrt{2})^2 = 2$). El punto de intersección es la representación geométrica del número $\sqrt{3}$.
Figura 1.6
La ubicación de los otros números irracionales se representa en la figura 1.7.
Observemos que la ubicación de los puntos $\sqrt{4}$ y $\sqrt{9}$ son 2 y 3 respectivamente; esto se debe a que $4 = 2^2$ y $9 = 3^2$, es decir, son números cuadrados perfectos.
Figura 1.7
Si n es un número entero positivo que no es cuadrado perfecto, entonces $\sqrt{n}$ es un número irracional.

Relación de orden entre los números reales


4 > Relación de orden en los números reales
Lección
Pensamiento numérico
Logro: comparar números reales, analítica y geométricamente, mediante la relación menor que.
"El polo Sur sigue batiendo récord como la zona más fría de todo el planeta: – 68 °C. Entre tanto, al otro lado del océano, los habitantes de Karima, en Sudán, tuvieron que soportar un infernal calor de 47 °C". Tomado de "Planeta en cambio" Revista Cambio, 3–10 julio de 2000.
En esta situación se utiliza información de la temperatura como número entero. No obstante es posible tener información de ella en cualquier otro punto del planeta, expresada, no necesariamente, como número entero, entre –68 °C y 47 °C, sino con números decimales, como –13,5 °C, 32,1 °C o 12,8 °C.
Ubiquemos estas temperaturas que son números reales en una recta numérica, donde la unidad corresponda a 20 °C como muestra la figura 1.10.
Figura 1.10
Para la ubicación de los números reales empleamos una línea recta que llamamos eje numérico o eje de coordenadas; el punto de referencia O, que represen-

Valor absoluto


5 > Valor absoluto
Lección
Pensamiento numérico
Jorge y Verónica caminan sobre una carretera en forma de línea recta. Ellos comenzaron su caminata en el mismo punto, pero en sentidos opuestos. Jorge avanza 500 metros al oriente y Verónica avanza 700 metros al occidente.
a. ¿A qué distancia del punto de partida está cada uno?
b. ¿Qué distancia separa a los dos caminantes?
Representemos en la recta numérica real esta situación (ver figura 1.11). En la escala de medición una unidad representará 100 metros.
Figura 1.11
a. Jorge está a 500 metros del punto de partida y Verónica se halla a 700</td>
</tr>
<tr>
<td>Representaciones de los números reales</td>
<td>Los números reales son representados cómo numerales, de forma geométrica y en la recta numérica</td>
</tr>
</table>



Ejemplo 5

Ubiquemos con exactitud, en una recta numérica, los siguientes números: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{9}$.

Solución

Utilizamos una escuadra y un compás.

Trazamos una recta y ubicamos números enteros, como muestra la figura 1.4.

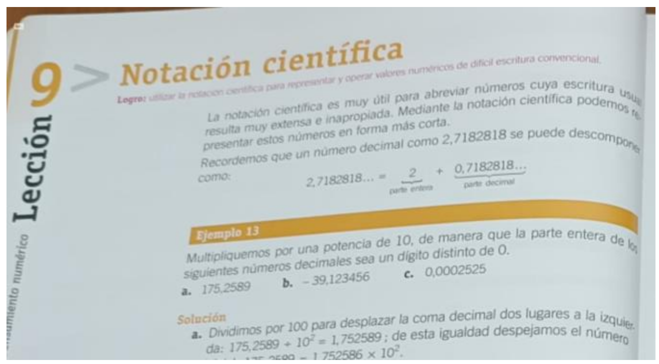
Figura 1.4

Trazamos una recta perpendicular a la recta inicialmente trazada, que pase por el punto 1, y sobre ésta hacemos una marca a una unidad de distancia del punto 1. Unimos con una línea el punto 0 con el que acabamos de marcar en la recta vertical; así determinamos un triángulo rectángulo (*ver* figura 1.5). Con centro en el punto 0 y abertura del compás igual a la hipotenusa del triángulo formado, trazamos un arco que interseque a la recta en el lugar de los números enteros positivos (por el teorema de Pitágoras, la hipotenusa de este triángulo tiene longitud $\sqrt{2}$). El punto de intersección es la representación geométrica del número $\sqrt{2}$.

Figura 1.5

Para ubicar con exactitud el número $\sqrt{3}$, trazamos una recta perpendicular a la recta inicial por el punto $\sqrt{2}$ y

Notación científica



Lección 9 > Notación científica

Logro: utilizar la notación científica para representar y operar valores numéricos de difícil escritura convencional.

La notación científica es muy útil para abreviar números cuya escritura usual resulta muy extensa e inapropiada. Mediante la notación científica podemos representar estos números en forma más corta.

Recordemos que un número decimal como 2,7182818 se puede descomponer como:

$$2{,}7182818\ldots = \underbrace{2}_{\text{parte entera}} + \underbrace{0{,}7182818\ldots}_{\text{parte decimal}}$$

Ejemplo 13

Multipliquemos por una potencia de 10, de manera que la parte entera de los siguientes números decimales sea un dígito distinto de 0.

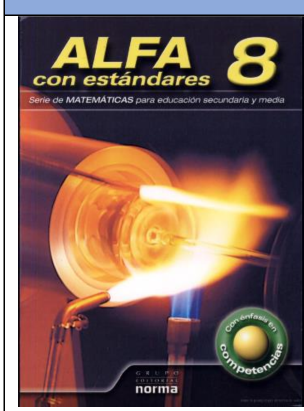
a. 175,2589 **b.** −39,123456 **c.** 0,0002525

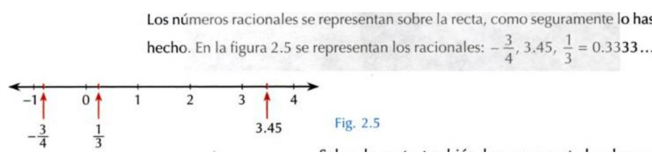
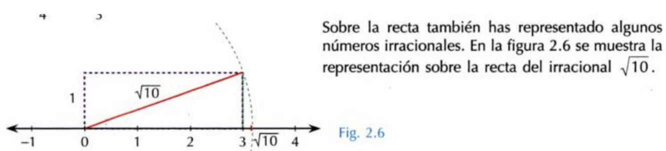
Solución

a. *Dividimos por 100 para desplazar la coma decimal dos lugares a la izquierda: $175{,}2589 \div 10^2 = 1{,}752589$; de esta igualdad despejamos el número* ... $1{,}752586 \times 10^2$.

Consideraciones sobre el abordaje de los números reales en el libro de texto
No considero que falte algo en el libro, en lo personal, la teoría de conjuntos no es la mejor forma de mostrar los objetos matemáticos a los estudiantes.

Cód. JG_tar1

Breve análisis de un libro de texto alrededor del tratamiento de los números reales	
Datos del libro de texto	
	**BIBLIOGRAFÍA** Camargo, L., García, G., Leguizamón, C., Samper, C. & Serrano, C. (2005). *Alfa 8.* Bogotá D.C.: Norma.

Descripciones del libro del texto	
Aspecto por considerar	Consideraciones
Introducción a los números reales (en relación con el concepto)	Los números reales son usados para magnitudes inconmensurables para la construcción de conjuntos y conceptos abstractos. Además, los números reales es el conjunto de todos números racionales e irracionales. Ejemplos de los prototipos de $\mathbb{R}$: ○ Números racionales:  *Evidencia 2. - Prototipo 1* ○ Números irracionales:  *Evidencia 2. - Prototipo 2* $\mathbb{R}$ como conjunto numérico: Todos los números racionales e irracionales conforman los *números reales*; de esa forma, un número real siempre tiene una representación decimal periódica, de período 0 (decimal finito) o de período diferente de cero, o una representación decimal no periódica. *Evidencia 3. – Conjunto numérico* Relaciones o diferencias con el conjunto de los números racionales: A continuación, se evidencia la relación de las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división) en los números reales con los números racionales. • En la adición:

La adición en el conjunto de los números reales cumple las mismas propiedades que cumple la adición en el conjunto de los números racionales.

Evidencia 4. – Relación 1

- En la sustracción:

En los números reales, como en los racionales, **la sustracción de dos números a y b significa realizar la adición $a + (-b)$**, es decir, para sustraer dos números reales se adiciona al primero el opuesto del segundo.

Evidencia 5. – Relación 2

- En la multiplicación:

junto de los números ...

La multiplicación en el conjunto de los números reales cumple las mismas propiedades que la multiplicación en el conjunto de los números racionales.

Evidencia 6. – Relación 3

- En la división:

En los números reales, como en los racionales, la **división de dos números a y b, en donde $b \neq 0$, significa realizar el producto $a \cdot \frac{1}{b}$**, es decir para dividir un número real a por b basta multiplicar el primero de los reales por el inverso multiplicativo del segundo.

Evidencia 7. – Relación 4

Sistema númerico de los números reales:

Si sobre la recta señalamos un punto, es posible determinar el número real que le corresponde teniendo como base una unidad que se ha señalado. Veámoslo en la figura 2.7.

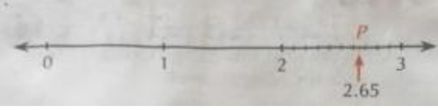


Fig. 2.7

Evidencia 8. – Parte 1 (Sistema numérico)

	En conclusión, podemos decir que: A cada número real le corresponde un punto sobre la recta y a cada punto sobre la recta le corresponde un número real. Cuando sobre la recta se representan los números reales, la recta se llama **recta real**. *Evidencia 9. – Parte 2 (Sistema numérico)*
Características de los números reales	Características de los números reales: ➢ **Igualdad:** Se da en dos números reales que pueden ser iguales, pero su representación numérica es diferente. La igualdad entre números reales cumple las propiedades: **Reflexiva:** todo número real es igual a sí mismo, lo que quiere decir que si a es un número real, entonces $a = a$. **Simétrica:** si a, b son números reales y $a = b$, entonces $b = a$. **Transitiva:** si a, b y c son números reales y $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$. Por cumplir estas tres propiedades se dice que la igualdad entre números reales es una *relación de equivalencia*. *Evidencia 10. – Igualdad* ➢ **Desigualdad:** Es una expresión en la cual aparece una relación de orden entre números reales $(<, >, \leq, \geq)$. Si adicionamos miembro a miembro las dos desigualdades, encontramos que se cumple la misma relación de orden entre las sumas, porque: *Evidencia 11. – Desigualdad (Primera parte)* $2 + (-1.3) < 5.3 + \sqrt{3}$ $0.7 < 6.032\ldots$ Igualmente, si a la relación $2 < 5.3$ le adicionamos la igualdad $-6 = -6$, encontramos que: $2 + (-6) < 5.3 + (-6)$ $-4 < -0.7$ El orden en los números reales se relaciona con la igualdad de ellos mediante la siguiente propiedad: si a cada miembro de una desigualdad se adiciona el mismo número real, la desigualdad se conserva. *Evidencia 12. – Desigualdad (Segunda parte)*
Representaciones de los números reales	Tipos de representaciones de los | Evidencias

números reales	
Número fraccionario	$-\frac{3}{2}$ Evidencia 13. – Número fraccionario
Número decimal finito	$-1.5000.$ Evidencia 14. – Número decimal finito
Número decimal infinito no periódico	$1.2020020002.$ Evidencia 15. – Número decimal infinito no periódico

Consideraciones sobre el abordaje de los números reales en el libro de texto

El texto no presenta errores ni ambigüedades del objeto matemático "Número real". No obstante, podría mejorar teniendo en cuenta los siguientes aspectos:

- ✓ Incluir ejemplos que ilustren las características de los números reales.
- ✓ Detallar el porqué de la relación y diferenciación de los números irracionales con los números reales.
- ✓ Relación entre números reales con los números enteros.
- ✓ Ejemplos de la aplicación de los números reales cuando comentaba en el apartado de la unidad "¿Cómo se aplica?".
- ✓ Resaltar las diferencias entre los números reales y los números racionales.

Cód. AM_tar1

Breve análisis de un libro de texto alrededor del tratamiento de los números reales

Datos del libro de texto

<table>
<tr>
<td>

Figura 1.- Conexiones matemáticas.</td>
<td>Artigue, Michèle y otros. Ingeniería didáctica en educación matemática. Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1995.

Dikson, Linda. El aprendizaje de las matemáticas. Editorial Labor, S. A., Madrid, 1991.

Espinosa, F. Investigaciones en matemática educativa. Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1996.

Lean, G. A. & Clements, M. A. Spatial ability, visual imagery, and mathematics peformance. 1981.

Lovaglia, Florence M. y otros. Álgebra. Harla S. A. de C. V., México, 1972,

MEN. Lineamientos curriculares para el área de matemáticas. Colombia, 1998.

Mendenhall, William y otros. Estadística matemática con aplicaciones. Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1986.

Ministerio de Educación Nacional. Estándares básicos de matemáticas y lenguaje para la educación básica y media. Mayo de 2003.

Moise, Edwin E., Downs, Floyd L. Jr. Geometría Moderna. Addison-Wesley Iberoamericana, S. A., Estados Unidos, 1986.

Perkins, David. La Escuela Inteligente. Editorial Gedisa, Barcelona, 1992.

Polya, George. On solving mathematical problems in high school. Stephen Krulik, 1980.

Universitas, Tomo 10. La Matemática. Salvat Editores, S. A., 1987.

Volster, Carter, Crown, Warren. Invitación a las matemáticas. Editorial Norma, Bogotá, Colombia.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Descripciones del libro del texto</td>
</tr>
<tr>
<td>Aspecto por considerar</td>
<td>Consideraciones</td>
</tr>
<tr>
<td>Introducción a los números reales

(en relación con el concepto)</td>
<td>El libro “Conexiones matemáticas” de la profesora Carmen Samper, para grado octavo, presenta en su tabla de contenido diez unidades. Cada una de estas unidades se basa en un concepto en específico y en un(os) pensamiento(s) que le corresponda conforme a los Lineamientos Curriculares de Matemáticas; a partir de esta estructura, se abordan unos temas relacionados con el concepto principal de cada unidad.</td>
</tr>
</table>

Antes de introducir Los números reales, que corresponden a la unidad 2 del libro, es importante enseñar a los estudiantes los números irracionales, que corresponden a la unidad 1 del libro. La introducción de números reales inicia con el tema “igualdad y propiedades”, donde se destaca y relaciona que el conjunto de los números racionales y el conjunto de los números irracionales componen en su totalidad al conjunto de números reales (ver Figura 2). Es importante señalar que un número real puede tener distintas representaciones numéricas que sean equivalentes entre sí (ver Figura 3).

Por medio de dos rectas numéricas se enseña la representación de un número racional y un número irracional (ver Figura 4); a partir de esto, se exponen algunas propiedades de los números reales (ver Figura 5). Se espera que, por medio del taller de competencias del libro el estudiante sea capaz de reconocer distintas representaciones numéricas de los números reales que sean equivalentes. Asimismo, que aplique las propiedades de transitividad y densidad (así no se explicite como las otras propiedades) en contextos matemáticos, para fortalecer la comprensión de los números reales (ver Figura 6).

Todos los números racionales e irracionales conforman los **números reales**. Un número real siempre tiene una representación decimal periódica, de período 0 (decimal finito) o de período diferente de cero, o una representación decimal no periódica.

De dos números reales se puede decir que son iguales o son diferentes. Dos números reales iguales pueden tener, sin embargo, diferente representación numérica. Por ejemplo, $-\frac{3}{4}$, -0.75, $-\frac{75}{100}$ y $-\frac{150}{200}$ son números reales iguales.

Figura 2.- Números reales.

Figura 3.- Representaciones numéricas equivalentes.

Ejemplo 1

En la figura 2.1 se representan los racionales: $-\frac{3}{4}$, 3.45, $\frac{1}{3} = 0.3333\ldots$ y en la figura 2.2 se muestra la representación sobre la recta del irracional $\sqrt{10}$.

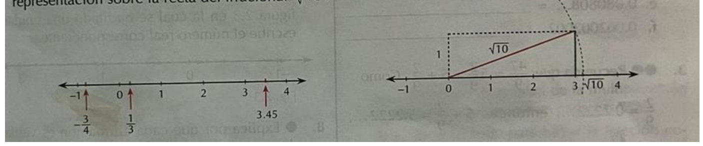


Figura 4.- Recta numérica de un número racional y un número

La igualdad entre números reales cumple las propiedades:
Reflexiva: todo número real es igual a sí mismo, lo que quiere decir que si a es un número real, entonces $a = a$.
Simétrica: si a, b son números reales y $a = b$, entonces $b = a$.
Transitiva: si a, b y c son números reales y $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$.
Por cumplir estas tres propiedades se dice que la igualdad entre números reales es una *relación de equivalencia*.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
irracional.

Figura 5.- Propiedades de los números reales.

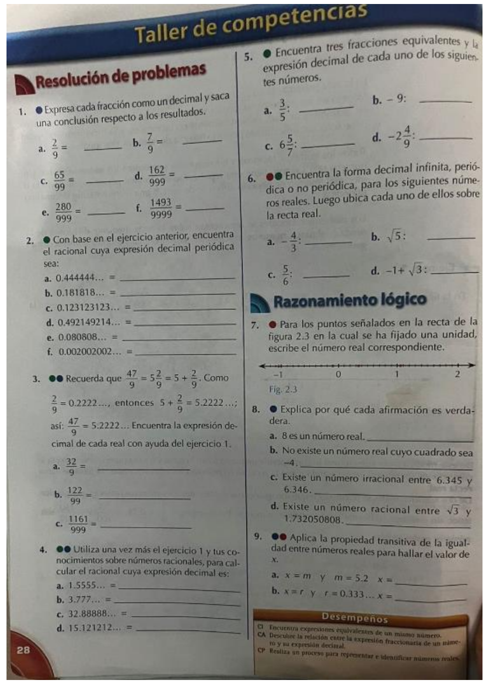

Taller de competencias
Resolución de problemas
1. Expresa cada fracción como un decimal y saca una conclusión respecto a los resultados.
a. $\frac{2}{9}=$ ____ b. $\frac{7}{9}=$ ____
c. $\frac{65}{99}=$ ____ d. $\frac{162}{999}=$ ____
e. $\frac{280}{999}=$ ____ f. $\frac{1493}{9999}=$ ____
2. Con base en el ejercicio anterior, encuentra el racional cuya expresión decimal periódica sea:
a. 0.444444… = ____
b. 0.181818… = ____
c. 0.123123123… = ____
d. 0.492149214… = ____
e. 0.080808… = ____
f. 0.002002002… = ____
3. Recuerda que $\frac{47}{9}=5\frac{2}{9}=5+\frac{2}{9}$. Como $\frac{2}{9}=0.2222\ldots$, entonces $5+\frac{2}{9}=5.2222\ldots$; así: $\frac{47}{9}=5.2222\ldots$ Encuentra la expresión decimal de cada real con ayuda del ejercicio 1.
a. $\frac{32}{9}=$ ____
b. $\frac{122}{99}=$ ____
c. $\frac{1161}{999}=$ ____
4. Utiliza una vez más el ejercicio 1 y tus conocimientos sobre números racionales, para calcular el racional cuya expresión decimal es:
a. 1.5555… = ____
b. 3.777… = ____
c. 32.88888… = ____
d. 15.121212… = ____
5. Encuentra tres fracciones equivalentes y la expresión decimal de cada uno de los siguientes números.
a. $\frac{3}{5}$: ____ b. -9: ____
c. $6\frac{5}{7}$: ____ d. $-2\frac{4}{9}$: ____
6. Encuentra la forma decimal infinita, periódica o no periódica, para los siguientes números reales. Luego ubica cada uno de ellos sobre la recta real.
a. $-\frac{4}{3}$: ____ b. $\sqrt{5}$: ____
c. $\frac{5}{6}$: ____ d. $-1+\sqrt{3}$: ____
Razonamiento lógico
7. Para los puntos señalados en la recta de la figura 2.3 en la cual se ha fijado una unidad, escribe el número real correspondiente.
−1 0 1 2
Fig. 2.3
8. Explica por qué cada afirmación es verdadera.
a. 8 es un número real. ____
b. No existe un número real cuyo cuadrado sea −4. ____
c. Existe un número irracional entre 6.345 y 6.346. ____
d. Existe un número racional entre $\sqrt{3}$ y 1.732050808. ____
9. Aplica la propiedad transitiva de la igualdad entre números reales para hallar el valor de x.
a. $x=m$ y $m=5.2$ $x=$ ____
b. $x=r$ y $r=0.333\ldots$ $x=$ ____
Desempeños
CI Encuentra expresiones equivalentes de un mismo número.
CA Descubre la relación entre la expresión fraccionaria de un número y su expresión decimal.
CP Realiza un proceso para representar e identificar números reales.
28

Figura 6.- Taller de competencias de los números reales.
</td>
</tr>
<tr>
<td>Características de los números reales</td>
<td>
En la segundad unidad, el tema 1 titulado “igualdad y propiedades” aborda inicialmente los números reales, partiendo del conjunto de los números racionales y el conjunto de los números irracionales. Se explora su representación en la recta numérica, así como las distintas representaciones numéricas de un número real que son equivalentes. Posteriormente, se adentra en exponer las propiedades de los números reales (ver Figura 5).

Reflexiva: todo número real es igual a sí mismo, lo que quiere decir que si a es un número real, entonces $a = a$

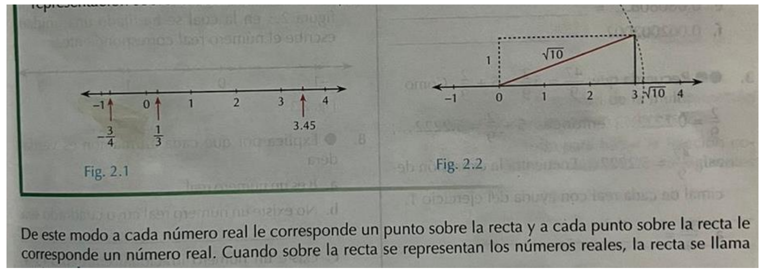
Simétrica: si a, b son números reales y a=b, entonces b=a.

Transitividad: si a, b y c son números reales y $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$.

Por cumplir estas tres propiedades se dice que la igualdad entre números reales es una relación de equivalencia.
</td>
</tr>
<tr>
<td>Representaciones de los números reales</td>
<td>En la segundad unidad, el tema 1 titulado “igualdad y propiedades” se exponen los siguientes tipos de representación de los números reales:</td>
</tr>
</table>

Expresión decimal: Un número real siempre tiene una representación decimal periódica, de periodo 0 (decimal finito) o de período diferente de cero, o una representación decimal no periódica (ver Figura 2).

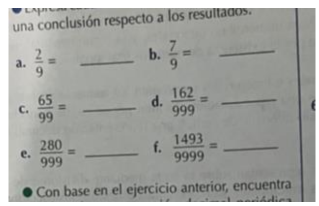
Recta real: a cada $\mathbb{R}$ le corresponde un punto sobre la recta y a cada punto sobre la recta le corresponde un $\mathbb{R}$ (ver Figura 7).



De este modo a cada número real le corresponde un punto sobre la recta y a cada punto sobre la recta le corresponde un número real. Cuando sobre la recta se representan los números reales, la recta se llama

Figura 7.- Recta real

Expresión fraccionaria: aunque no se define se entiende por aquella de la forma $\frac{a}{b}|b \neq 0$ (ver Figura 8 y figura 9).


una conclusión respecto a los resultados.

a. $\frac{2}{9}$ = ______ b. $\frac{7}{9}$ = ______

c. $\frac{65}{99}$ = ______ d. $\frac{162}{999}$ = ______

e. $\frac{280}{999}$ = ______ f. $\frac{1493}{9999}$ = ______

● Con base en el ejercicio anterior, encuentra

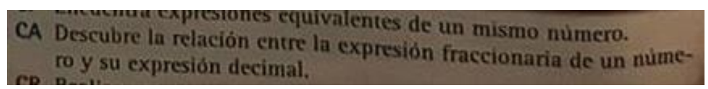

CA Descubre la relación entre la expresión fraccionaria de un número y su expresión decimal.

Figura 8.- Ejemplos de expresión fraccionaria

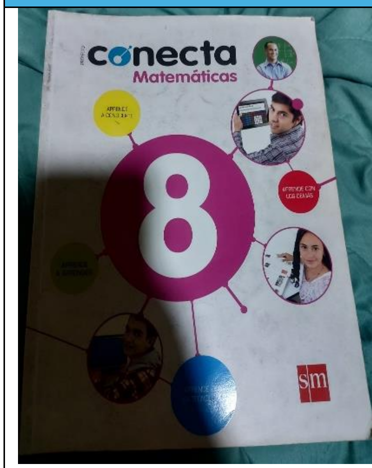
Figura 9.- Mención de expresión fraccionaria

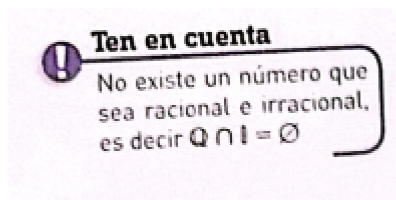
Consideraciones sobre el abordaje de los números reales en el libro de texto

La definición del objeto matemático "número real" en el libro carece de claridad e información, no se define como un sistema numérico o un sistema de numeración, solo menciona que está conformado por el conjunto de los números racionales y los números irracionales. Aunque el libro aborda algunas representaciones de los números reales, omite una definición explícita de "expresión fraccionaria", por lo tanto, no se logra comprender si la autora del libro la interpreta como una razón, como un parte-todo, un cociente u otras interpretaciones. De las propiedades de los números reales se menciona la reflexividad, simetría y transitividad, y en un ejemplo se intenta ilustrar la propiedad densidad, aunque esta última no se define como las otras propiedades, y hace falta la consideración de otras propiedades de los números reales, como la no exclusiva de los números reales, la no numerabilidad y la completitud.

Es importante resaltar que el libro tiene en cuenta las propiedades de las operaciones de los números reales en la adición multiplicación, potenciación, radicación y logaritmación a partir de situaciones problema que contemplan el contexto matemático y cotidiano. Teniendo siempre presente el estándar al que se espera que los estudiantes lleguen.

Cód. DD_tar1

Breve análisis de un libro de texto alrededor del tratamiento de los números reales	
Datos del libro de texto	
	Ediciones SM S.A. (2014). *Proyecto conecta matemáticas*. SM, Bogotá.
Descripciones del libro del texto	
Aspecto por considerar	Consideraciones
Introducción a los números reales (en relación con el concepto)	En el libro se menciona la siguiente introducción a los números reales: “El conjunto de los números racionales unido con el conjunto de los números irracionales forman el conjunto de los números reales, el cual se designa por $\mathbb{R}$”. Además, hacen una asociación del número real con la recta numérica, indicando que “A cada número real se le asocia un punto en la recta y, recíprocamente, a cada punto de la recta se le asocia un número real”. Se destaca que los números reales son una ampliación de los números racionales, que a su vez contienen a los enteros y a los naturales y también se mencionan advertencias sobre la relación entre conjuntos.

	  Al introducir el concepto y considerando la relación mencionada. En el libro no se hace una mención explícita de los números reales como sistema numérico sin embargo si como conjunto numérico, pero la estructura del texto revela relaciones entre diferentes conjuntos numéricos. Por ejemplo, se destaca que los números naturales están incluidos en los reales. Sin embargo, los números reales son infinitos, a diferencia de los números naturales, que son contables. Además, se menciona que los enteros están contenidos en los reales y comparten propiedades algebraicas, pero los reales no son contables. En cuanto a los números racionales, forman un subconjunto de los números reales. Aunque los racionales son densos, no son completos como los números reales y son contables. Los números irracionales, definidos como los números reales que no son racionales, se presentan en el libro sin una definición formal, pero se deja claro que la unión de los irracionales y los racionales constituyen todos los números reales. Ahora si hablamos de las diferencias entre los números reales y otros conjuntos mencionados el libro no detalla explícitamente eso. Sin embargo, al examinar con detalle, se evidencia que las diferencias principales de los números reales con respecto a estos conjuntos radican en su total ordenamiento. Los números reales contienen a los números naturales, enteros y racionales como subconjuntos, se construyen a partir de la combinación de irracionales y racionales para formar la recta numérica completa.
Características de los números reales	El libro menciona algunas características importantes a considerar al trabajar con números reales. Aunque no cubre todas las que se encuentran en el libro de Rico (2012), destaca algunas como el orden, la completitud, las propiedades algebraicas y la representación finita o

no finita.

Orden.

Para todo número real a se cumple una y sólo una de las siguientes relaciones: $a = 0$, $a < 0$ ó $a > 0$

Si $a > 0$, se dice que a es positivo.

Si $a < 0$, se dice que a es negativo.

Además:

$$a < b, \text{ si } a - b < 0$$
$$a > b, \text{ si } a - b > 0$$
$$a = b, \text{ si } a - b = 0$$

Completitud.

Aunque no se menciona explícitamente esta característica, se evidencia que los números reales no presentan 'huecos'. Siempre hay otro número real entre dos números reales dados. Esta observación se hace evidente al representar los números reales en la recta numérica, donde siempre existe un número entre cualquier par de números en la recta numerica.

- Entre 3 y 4
- Entre 3,1 y 3,2
- Entre 3,14 y 3,15
- Entre 3,141 y 3,142

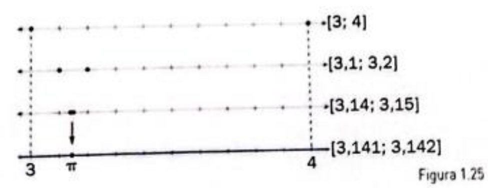


Figura 1.25

Propiedades.

Hablando de las propiedades algebraicas en relación con la adición y sustracción, se menciona que si a y b son numeros reales, la expresion a + b es la suma de los sumandos a y b con sus propiedades. La sustraccion es la operación que da como resultado la diferencia entre a y b decir a -b. Ademas a – b es equivalente a la adiccion a + (-b).

Propiedad	Generalización
Clausurativa	Si a y b son números reales, $a + b$ es un número real.
Conmutativa	Si a y b son números reales, $a + b = b + a$.
Asociativa	Si a, b y c son números reales, $(a + b) + c = a + (b + c)$.
Modulativa	Si a es un número real, existe otro número real 0, tal que $a + 0 = 0 + a = a$.
Invertiva	Si a es un número real, existe otro número real $-a$, tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

Tabla 1.3

Cuando hablan de la multiplicacion y division se menciona que, si a y b son numeros reales, la expresion a * b es el producto de los factores a y b. Por otro lado, el cociente de dos números reales es equivalente al producto del primero por el inverso multiplicativo del segundo.

La multiplicacion de números reales cumple las siguientes propiedades.

Propiedad	Generalización
Clausurativa	Si a y b son números reales, entonces ab es otro número real.
Conmutativa	Si a y b son números reales, entonces $ab = ba$
Modulativa	Existe el número real 1, tal que para cualquier número real a, se cumple que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
Asociativa	Si a, b y c son números reales, entonces $(ab)c = a(bc)$
Invertiva	Para todo número real $a \neq 0$ existe otro número real $a^{-1} = \frac{1}{a}$, llamado su inverso multiplicativo, tal que $a \cdot a^{-1} = 1$
Distributiva de la multiplicación con respecto a la adición	Si a, b y c son números reales, entonces: $a(b + c) = ab + ac$ $(a + b)c = ac + bc$

Tabla 1.4

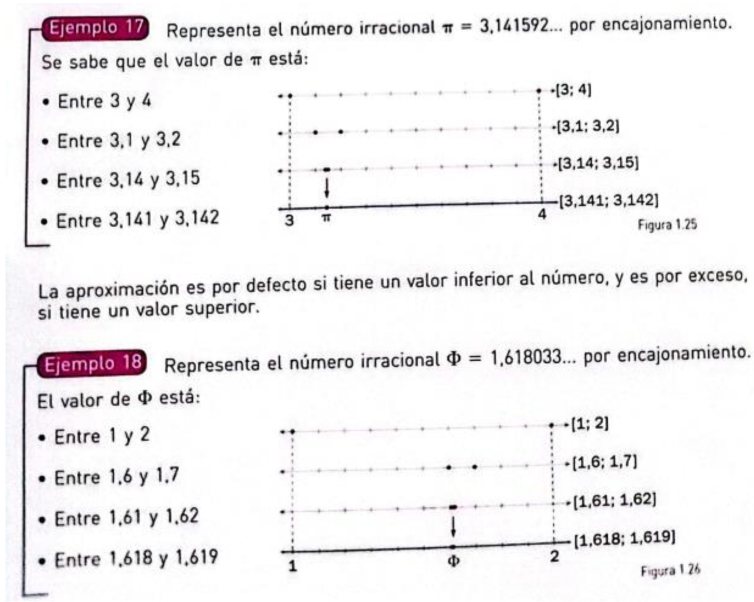
Representaciones de los números reales

No hay un único método para representar todos los infinitos números reales de manera precisa. Sin embargo, algunas representaciones presentadas tienen limitaciones, ya que no incluyen todos los números reales, aunque sí abarcan la mayoría de ellos.

Recta numérica.

En el libro, al asociar los números reales con la recta numérica, se señala la existencia de varios métodos para representarlos, aunque solo se abordan dos, siendo el encajonamiento uno de ellos.

“Este método consiste en realizar aproximaciones sucesivas al número dado, por la izquierda y por la derecha en la recta real.



Ejemplo 17 Representa el número irracional $\pi = 3{,}141592...$ por encajonamiento.

Se sabe que el valor de π está:

- Entre 3 y 4
- Entre 3,1 y 3,2
- Entre 3,14 y 3,15
- Entre 3,141 y 3,142

Figura 1.25

La aproximación es por defecto si tiene un valor inferior al número, y es por exceso, si tiene un valor superior.

Ejemplo 18 Representa el número irracional $\Phi = 1{,}618033...$ por encajonamiento.

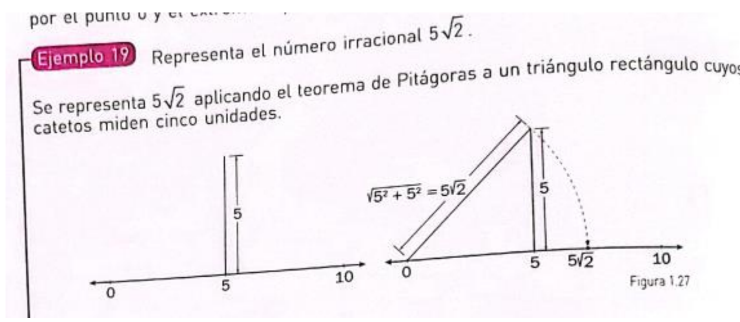
El valor de Φ está:

- Entre 1 y 2
- Entre 1,6 y 1,7
- Entre 1,61 y 1,62
- Entre 1,618 y 1,619

Figura 1.26

El segundo método, más bien de naturaleza geométrica, implica la aplicación del teorema de Pitágoras para representar los números reales en la recta numérica.

"Para ello, se traza un segmento perpendicular sobre la recta numérica y luego con un compás se proyecta la hipotenusa formada por el punto 0 y el extremo superior del segmento trazado."



Ejemplo 19 Representa el número irracional $5\sqrt{2}$.

Se representa $5\sqrt{2}$ aplicando el teorema de Pitágoras a un triángulo rectángulo cuyos catetos miden cinco unidades.

Figura 1.27

Por otro lado, si nos basamos en el libro de Rico, J (2012). *Algunas diferencias entre reales y racionales: un aporte a la comprensión del concepto de número real en la escolaridad.* Nos damos cuenta de que no existe una forma única de representar todos los infinitos números reales, en el libro *Proyecto conecta matemáticas* no lo muestran como una representación si no como "características o propiedades", sin embargo, estas son representaciones y estas son:

Intervalos.

"En un intervalo se encuentran todos los números comprendidos entre dos números llamados extremos”

Luego mencionan los tipos de intervalos.

Intervalo cerrado es aquel conjunto numérico que contiene a los extremos del intervalo. Se representa encerrando en corchetes sus extremos: $[a, b]$.

El intervalo $[a, b]$ contiene a todos los números mayores o iguales al número a pero menores o iguales al número b. Matemáticamente se expresa como $a \leq x \leq b$. Su representación geométrica se muestra en la figura 1.36

Intervalo cerrado
$[a, b]$

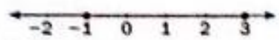


Figura 1.36

$[-1, 3] \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3$

Intervalo abierto es aquel conjunto numérico que no contiene a los extremos del intervalo. Se representa encerrando entre paréntesis sus extremos (a, b)

El intervalo (a, b) contiene a todos los números mayores que a pero menores que b Se escribe $a < x < b$. La figura 1.37 muestra su representación geométrica.

Intervalo abierto
(a, b)

Figura 1.37

$(-1, 3) \Leftrightarrow -1 < x < 3$

Los **intervalos semi-abiertos** son aquellos conjuntos numéricos que contienen a uno de los extremos del intervalo. Pueden ser:

Intervalo abierto a derecha
$[a, b)$

Figura 1.38

$[-1, 3) \Rightarrow -1 \leq x < 3$

Intervalo abierto a izquierda
$(a, b]$

Figura 1.39

$(-1, 3] \Rightarrow -1 < x \leq 3$

En una **semirrecta** se encuentran todos los números mayores o menores que un número dado. Dependiendo de si el número se encuentra incluido o no, existen cuatro tipos de semirrectas.

Semirrecta	Notación	Definición
Abierta positiva	$(a, +\infty)$	Números x tales que $a < x$
Cerrada positiva	$[a, +\infty)$	Números x tales que $a \leq x$
Abierta negativa	$(-\infty, a)$	Números x tales que $x < a$
Cerrada negativa	$(-\infty, a]$	Números x tales que $x \leq a$

Notación científica.

“La notación científica de un número real es su expresión como el producto de un número mayor o igual que 1 y menor que 10, por una potencia de 10”

Una vez explicado que es la notación científica, dicen como expresarlas

“Para expresar cantidades muy grandes en notación científica, se emplean potencias positivas de 10”

Ejemplo 25 Observa cómo se expresan los números 4 000 000 y 34 000 000 000 en notación científica.

$$4\,000\,000 = 4 \times 10^6$$

$$34\,000\,000\,000 = 3{,}4 \times 10^{10}$$

Para expresar cantidades muy pequeñas en notación científica, se emplean potencias negativas de 10.

Ejemplo 26 Expresa los números 0,0005 y 0,000000024 en notación científica

$$0{,}0005 = 5 \times 10^{-4}$$

$$0{,}000000024 = 2{,}4 \times 10^{-8}$$

Ejemplo 27 Una cienmillonésima de centímetro cuadrado puede escribirse como:

$$\frac{1}{100\,000\,000}\ \text{cm}^2$$

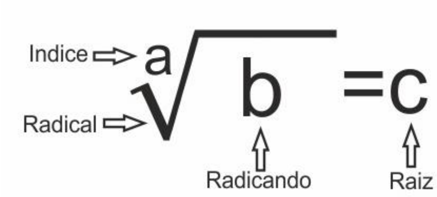
Esta expresión equivale a 0,00000001 cm^2.

Esta cantidad puede escribirse en forma más clara y corta con notación científica:

$$0{,}00000001\ \text{cm}^2 = 1 \times 10^{-8}\ \text{cm}^2$$

Radicación

“La radicación es una de las operaciones inversas de la potenciación, y cumple que para un numero natural n, b es la raíz enésima de a, si $b^n = a$”



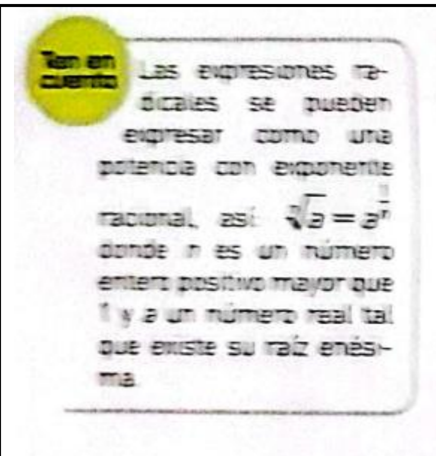
Ejemplo 29 Calcula $\sqrt[3]{32}$ mediante aproximaciones, por exceso y por defecto.

Se calcula mediante aproximaciones por exceso y por defecto $\sqrt[3]{32}$. La diferencia entre estos dos valores es el **error máximo**.

Aproximación	$\sqrt[3]{32}$ está comprendido entre	Por defecto	Por exceso	Error máximo
Entera	3 y 4	$3^3 = 27$	$4^3 = 64$	$4 - 3 = 1$
Decimal	3,1 y 3,2	$3{,}1^3 = 29{,}791$	$3{,}2^3 = 32{,}768$	$3{,}2 - 3{,}1 = 0{,}1$
Centesimal	3,17 y 3,18	$3{,}17^3 = 31{,}855$	$3{,}18^3 = 32{,}157$	$3{,}18 - 3{,}17 = 0{,}01$

Tabla 1.9

También mencionan una advertencia que debemos tener en cuenta de la radicación



Ten en cuenta

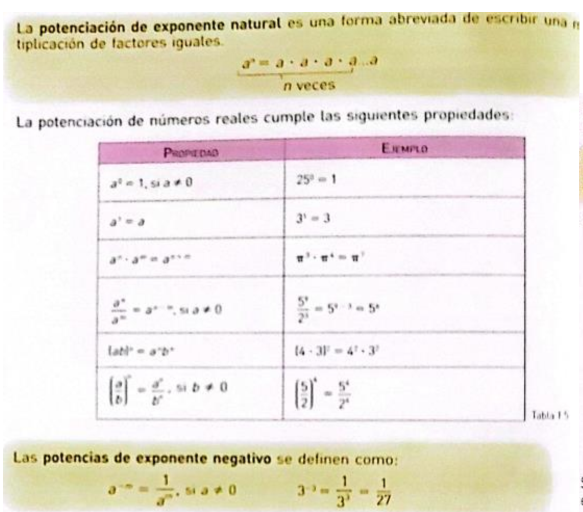
Las expresiones radicales se pueden expresar como una potencia con exponente racional, así: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ donde n es un número entero positivo mayor que 1 y a un número real tal que existe su raíz enésima.

Sin mencionarlo, pero se evidencia, la representación decimal, fracciones continuas, escritura especial (Símbolos como π, φ, e)

Consideraciones sobre el abordaje de los números reales en el libro de texto

El libro resulta sumamente interesante al abordar los números reales de manera exhaustiva, no se limita a meras abstracciones. Destaca al tratar los números reales como un todo, explorando sus características y operaciones derivadas de ese todo. A pesar de esto, se observan algunas inconsistencias, como afirmar que la representación se limita a dos métodos, cuando en realidad se utilizan múltiples enfoques sin reconocerlo explícitamente.

El libro aborda la potenciación y logaritmación como operaciones fundamentales, lo cual es valioso. Sin embargo, no enfatiza que cuando la operación se realiza entre dos enteros (base y exponente), el resultado será un número racional. Por otro lado, si la operación se realiza entre un número entero y uno fraccionario, el resultado será irracional. Esta aclaración no se presenta en el texto, y tampoco se destaca que esta es una operación y no es una forma de representación, presentando un malentendido.



La potenciación de exponente natural es una forma abreviada de escribir una multiplicación de factores iguales.

$$\underbrace{a^n = a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots a}_{n \text{ veces}}$$

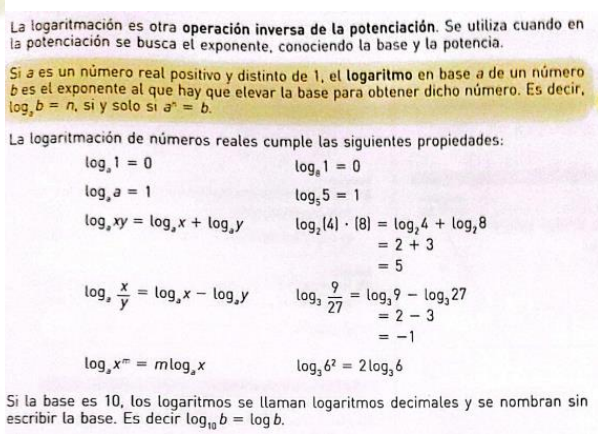
La potenciación de números reales cumple las siguientes propiedades:

Propiedad	Ejemplo
$a^0 = 1$, si $a \neq 0$	$25^0 = 1$
$a^1 = a$	$3^1 = 3$
$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$\pi^3 \cdot \pi^4 = \pi^7$
$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, si $a \neq 0$	$\frac{5^6}{5^2} = 5^{6-2} = 5^4$
$(ab)^n = a^n b^n$	$(4 \cdot 3)^2 = 4^2 \cdot 3^2$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, si $b \neq 0$	$\left(\frac{5}{2}\right)^4 = \frac{5^4}{2^4}$

Tabla 1.5

Las potencias de exponente negativo se definen como:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \text{ si } a \neq 0 \qquad 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$$



La logaritmación es otra **operación inversa de la potenciación**. Se utiliza cuando en la potenciación se busca el exponente, conociendo la base y la potencia.

Si a es un número real positivo y distinto de 1, el **logaritmo** en base a de un número b es el exponente al que hay que elevar la base para obtener dicho número. Es decir, $\log_a b = n$, si y solo si $a^n = b$.

La logaritmación de números reales cumple las siguientes propiedades:

$\log_a 1 = 0$ — $\log_8 1 = 0$

$\log_a a = 1$ — $\log_5 5 = 1$

$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ — $\log_2 (4) \cdot (8) = \log_2 4 + \log_2 8 = 2 + 3 = 5$

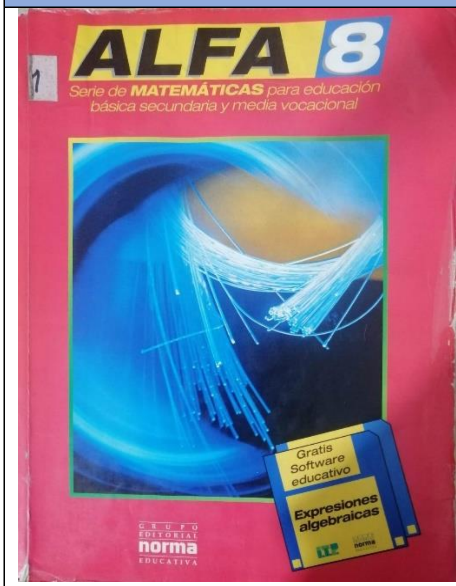
$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ — $\log_3 \frac{9}{27} = \log_3 9 - \log_3 27 = 2 - 3 = -1$

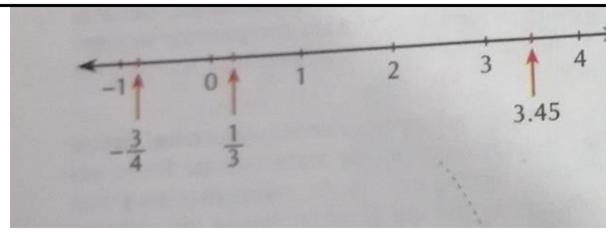
$\log_a x^m = m \log_a x$ — $\log_3 6^2 = 2 \log_3 6$

Si la base es 10, los logaritmos se llaman logaritmos decimales y se nombran sin escribir la base. Es decir $\log_{10} b = \log b$.

Otro aspecto importante es como abarcan las propiedades de cada uno de los conceptos.

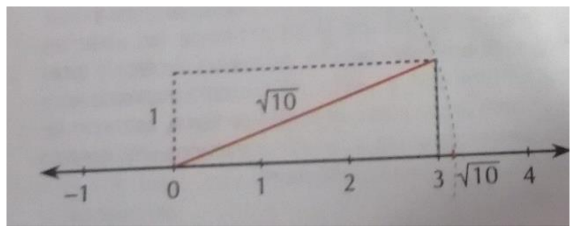
Cód. GB_tar1

Breve análisis de un libro de texto alrededor del tratamiento de los números reales	
Datos del libro de texto	
	Camargo, L., García, G., Leguizamón, C., Samper, C., & Serrano, C. (1999). Alfa 8 Serie de Matemáticas para educación básica secundaria y media vocacional. Editorial Norma S. A
Descripciones del libro del texto	
Aspecto por considerar	Consideraciones
Introducción a los números reales (en relación con el concepto)	Descripción sobre cómo se introducen los números reales Los números reales se introducen descubriendo los números irracionales por el griego Hippaso de Metaponte. En el siglo XIX, dentro del movimiento de la aritmetización del análisis, se da estatus de número a los irracionales y se reconoce que los números reales son racionales o irracionales. Cantor construye los números reales a partir de sucesiones infinitas de racionales (las sucesiones de Cauchy), donde a cada número real le corresponde un punto definido en la recta, cuya coordenada es igual al número. Dedekind en su obra Continuidad y número irracionales, construye conjuntos de racionales que producen cortaduras sobre el conjunto de los racionales hechas por racionales o no, donde una cortadura es un número real. **Ejemplos de $\mathbb{R}$** - Representación de los números racionales sobre la recta



Evidencia 1. Ejemplo 1

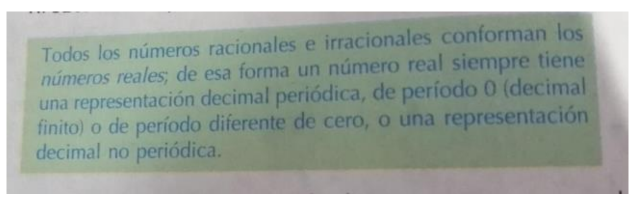
- Representación de los números irracionales sobre la recta



Evidencia 2. Ejemplo 2

¿Se presenta $\mathbb{R}$ como conjunto numérico?

- Conjunto de números racionales
- Conjunto de números irracionales

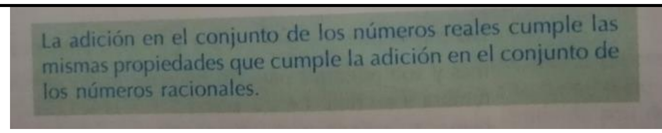

Todos los números racionales e irracionales conforman los *números reales*; de esa forma un número real siempre tiene una representación decimal periódica, de período 0 (decimal finito) o de período diferente de cero, o una representación decimal no periódica.

Evidencia 3. Como conjunto numérico

¿Se establecen relaciones o diferencias con otros conjuntos numéricos?

Se establecen relaciones entre el conjunto de los números reales con el conjunto de los números racionales respecto a las operaciones adición, sustracción, multiplicación y división, como se evidencia a continuación.

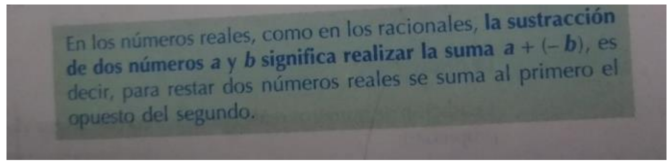
- Adición



La adición en el conjunto de los números reales cumple las mismas propiedades que cumple la adición en el conjunto de los números racionales.

Evidencia 4. Adición

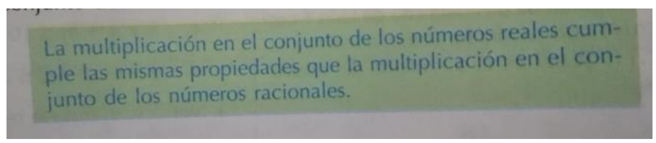
- Sustracción



En los números reales, como en los racionales, **la sustracción de dos números a y b significa realizar la suma** $a + (-b)$, es decir, para restar dos números reales se suma al primero el opuesto del segundo.

Evidencia 5. Sustracción

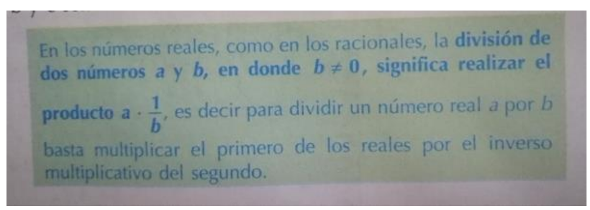
- Multiplicación



La multiplicación en el conjunto de los números reales cumple las mismas propiedades que la multiplicación en el conjunto de los números racionales.

Evidencia 6. Multiplicación

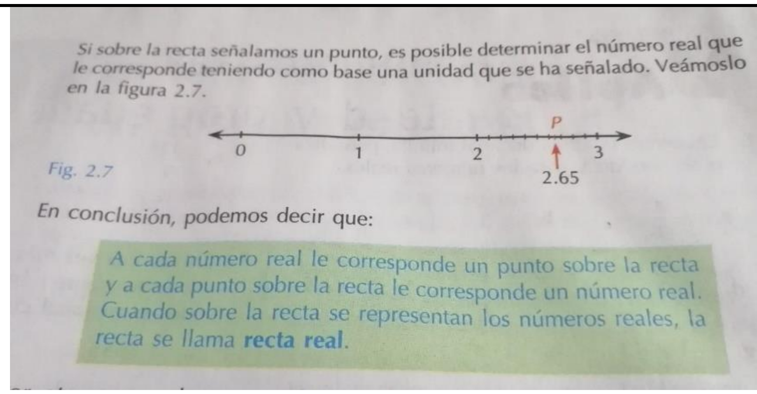
- División



En los números reales, como en los racionales, la **división de dos números a y b, en donde $b \neq 0$, significa realizar el producto** $a \cdot \frac{1}{b}$, es decir para dividir un número real a por b basta multiplicar el primero de los reales por el inverso multiplicativo del segundo.

Evidencia 7. División

¿Se presenta como sistema numérico?

<table>
<tr>
<td></td>
<td>


Si sobre la recta señalamos un punto, es posible determinar el número real que le corresponde teniendo como base una unidad que se ha señalado. Veámoslo en la figura 2.7.

P

0 1 2 3

2.65

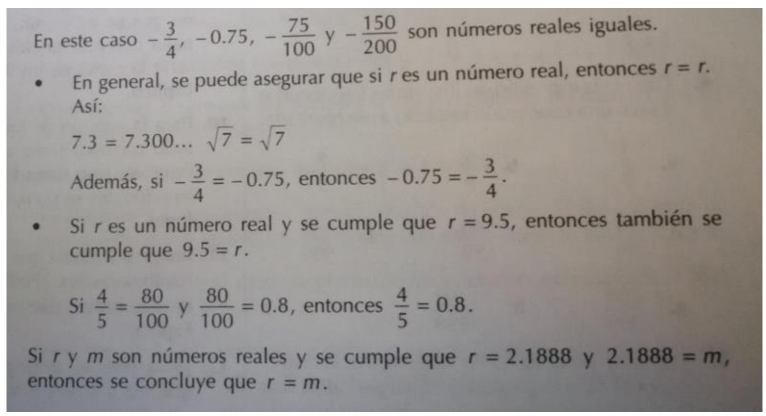
Fig. 2.7

En conclusión, podemos decir que:

A cada número real le corresponde un punto sobre la recta y a cada punto sobre la recta le corresponde un número real. Cuando sobre la recta se representan los números reales, la recta se llama **recta real**.

Evidencia 8. Sistéma numérico
</td>
</tr>
<tr>
<td>Características de los números reales</td>
<td>
Características de los números reales

- Igualdad entre números reales; se aborda con ejemplos.



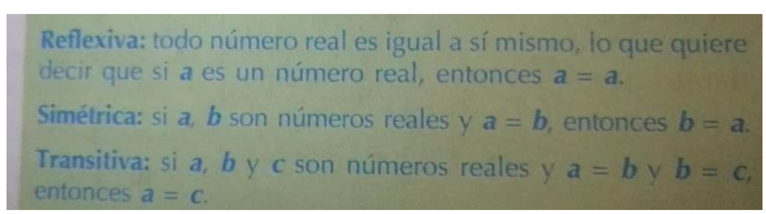
En este caso $-\frac{3}{4}$, -0.75, $-\frac{75}{100}$ y $-\frac{150}{200}$ son números reales iguales.

- En general, se puede asegurar que si r es un número real, entonces $r = r$.
  Así:
  $7.3 = 7.300\ldots$ $\sqrt{7} = \sqrt{7}$
  Además, si $-\frac{3}{4} = -0.75$, entonces $-0.75 = -\frac{3}{4}$.
- Si r es un número real y se cumple que $r = 9.5$, entonces también se cumple que $9.5 = r$.
  Si $\frac{4}{5} = \frac{80}{100}$ y $\frac{80}{100} = 0.8$, entonces $\frac{4}{5} = 0.8$.

Si r y m son números reales y se cumple que $r = 2.1888$ y $2.1888 = m$, entonces se concluye que $r = m$.

Evidencia 9. Igualdad entre números reales.

- La igualdad entre números reales cumple la propiedad reflexiva, simétrica y transitiva, que es una relación de equivalencia.



Reflexiva: todo número real es igual a sí mismo, lo que quiere decir que si a es un número real, entonces $a = a$.

Simétrica: si a, b son números reales y $a = b$, entonces $b = a$.

Transitiva: si a, b y c son números reales y $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$.

Evidencia 10. Relación de equivalencia
</td>
</tr>
</table>

- La adición de números reales se relaciona con la igualdad mediante la siguiente propiedad:

La suma (o resta) miembro a miembro de **dos igualdades** de números reales es otra igualdad.

Esta propiedad se puede considerar de la siguiente forma: si a cada miembro de una igualdad se suma el mismo número real, la igualdad se conserva.

Evidencia 11. Adición de números reales relacionada con la igualdad.

- Los números reales mayores que 0 se llaman números reales positivos.
- Los números reales menores que 0 se llaman números reales negativos.
- Desigualdades:

Si *a* es menor o igual que *b* y $a \neq b$, *a* es menor que *b* se escribe $a<b$.

Si *a* y *b* son dos números reales, entonces ocurre sólo una de las tres relaciones siguientes: $\boldsymbol{a = b}$, $\boldsymbol{a < b}$ o $\boldsymbol{a > b}$; en particular, si $\boldsymbol{r}$ es un número real, se cumple sólo una de las siguientes relaciones: $\boldsymbol{r = 0}$, $\boldsymbol{r < 0}$ o $\boldsymbol{r > 0}$, que equivale a decir que un número real es 0, es positivo o es negativo.

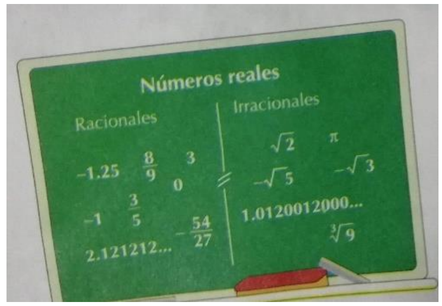
Evidencia 12. Desigualdades

- La suma miembro a miembro de dos desigualdades de números reales es otra desigualdad del mismo sentido.

$-3.2 < -1.3$ y $-3.2 + 1.9 = -1.3$

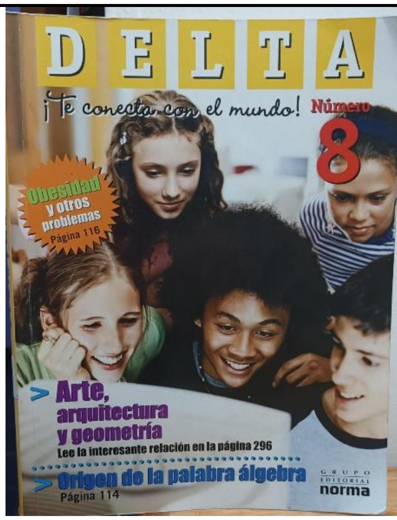
$-1.3 < \frac{2}{3}$ y $-1.3 + \frac{59}{30} = -\frac{13}{10} + \frac{59}{30} = \frac{2}{3}$

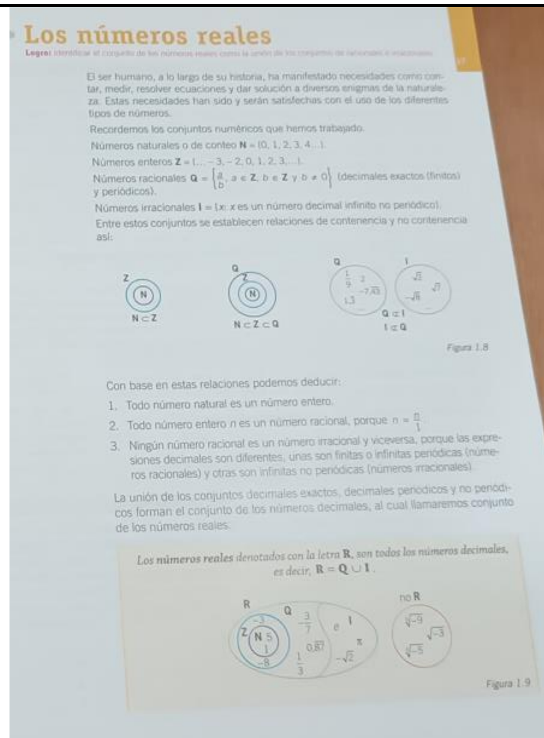
$\sqrt{3} < \sqrt{3} + 1$ y $\sqrt{3} + 1 = \sqrt{3} + 1$

	Evidencia 13. Ejemplo desigualdades
Representaciones de los números reales	Representaciones de los números reales - Los números racionales e irracionales conforman los reales.  - Los números fraccionarios. - Los números racionales tienen una expresión decimal finita de periodo cero o periódica de periodo diferente de cero. $2.1, -\frac{3}{2}, 1.0045, -0.353535..., \frac{120}{42}, 7,$ $2.1 = 2.1000...$ $-\frac{3}{2} = -1.5000...$ $1.0045 = 1.0045000...$ $-\frac{35}{99} = 0.3535...$ - Los números irracionales tiene una representación decimal infinita no periódica. $1.2020020002..., \sqrt{2}, , \sqrt{3}, -\sqrt{2}$ $1.2020020002... = 1.2020020002...$ $\pi = 3.141592653589...$ (por defecto) $\sqrt{3} = 1.732050808...$ (por defecto) $-\sqrt{2} = -1.414213562...$ (por exceso)
Consideraciones sobre el abordaje de los números reales en el libro de texto	
El texto no presenta errores y expresa de manera suficiente el objeto número real.	

Cód. HB_tar1

Breve análisis de un libro de texto alrededor del tratamiento de los números reales
Datos del libro de texto

	Padilla Chasing, S., Samper de Caicedo, C. & Moreno Gutiérrez, V. (2008). *Delta 8*. Grupo Editorial Norma, Bogotá. Bibliografía Burges, C., Alsina, C., et al. (1998). *Materiales para construir la geometría.* Colección Matemáticas, cultura y aprendizaje. Síntesis, Madrid. Camargo, L. & Samper, C. (1999). *Desarrollo del razonamiento deductivo a través de la geometría euclidiana.* Revista Ciencia y Tecnología. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, No. 5. Dickson, L., Brown, M., & Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas.* Labor, Madrid. Jaime, A., & Gutiérrez, Á. (1992). Definiciones de triángulos y cuadriláteros: errores e inconsistencias en libros de texto de EGB. Epsilon, Madrid, No. 23, pág. 49 – 62. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. (2003). Estándares Básicos de Matemáticas y Lenguaje para la Educación Básica y Media. Bogotá. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. (1998). *Lineamientos Curriculares.* Matemáticas. Bogotá. Rico, L., Castro Martínez, E., Castro, E. & et al. (1988). *Números y Operaciones.* Colección Matemáticas cultura y aprendizaje. Síntesis, Madrid. Socas, M. et al. (1989). *Iniciación al álgebra.* Síntesis, Madrid. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) & Sociedad Andaluza de Educación Matemática. (1991). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática.* Sociedad Andaluza de Educación Matemática, Madrid.
Descripciones del libro del texto	
Aspecto por considerar	Consideraciones
Introducción a los números reales (en relación con el concepto)	Como se evidencia en la Imagen 1, se muestran los conjuntos de números naturales y enteros mediante escritura de conjuntos por extensión, en cambio para los racionales e irracionales se utiliza una escritura de conjuntos por comprensión. Se realiza una presentación gráfica de las relaciones de contenencia y no contenencia entre estos conjuntos numéricos. Para finalizar, se define los números reales como todos los números decimales, es decir $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>


Los números reales

Logro: Identificar el conjunto de los números reales como la unión de los conjuntos de racionales e irracionales.

El ser humano, a lo largo de su historia, ha manifestado necesidades como contar, medir, resolver ecuaciones y dar solución a diversos enigmas de la naturaleza. Estas necesidades han sido y serán satisfechas con el uso de los diferentes tipos de números.

Recordemos los conjuntos numéricos que hemos trabajado.

Números naturales o de conteo $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, 4 \ldots\}$.

Números enteros $\mathbf{Z} = \{\ldots, -3, -2, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Números racionales $\mathbf{Q} = \left\{\frac{a}{b}, a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{Z} \text{ y } b \neq 0\right\}$ (decimales exactos (finitos) y periódicos).

Números irracionales $\mathbf{I} = \{x: x$ es un número decimal infinito no periódico$\}$.

Entre estos conjuntos se establecen relaciones de contenencia y no contenencia así:

$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$ $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$ $\mathbf{Q} \not\subset \mathbf{I}$ $\mathbf{I} \not\subset \mathbf{Q}$

Figura 1.8

Con base en estas relaciones podemos deducir:

1. Todo número natural es un número entero.
2. Todo número entero n es un número racional, porque $n = \frac{n}{1}$
3. Ningún número racional es un número irracional y viceversa, porque las expresiones decimales son diferentes, unas son finitas o infinitas periódicas (números racionales) y otras son infinitas no periódicas (números irracionales).

La unión de los conjuntos decimales exactos, decimales periódicos y no periódicos forman el conjunto de los números decimales, al cual llamaremos conjunto de los números reales.

Los números reales denotados con la letra $\mathbf{R}$*, son todos los números decimales, es decir,* $\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I}$.

Figura 1.9

Imagen 1. Presentación y definición de los números reales.
</td>
</tr>
<tr>
<td>Características de los números reales</td>
<td>
En la Imagen 2 se evidencia como los números reales se denotan con la letra $\mathbb{R}$, son todos los números decimales, y se establece la unión de racionales e irracionales.

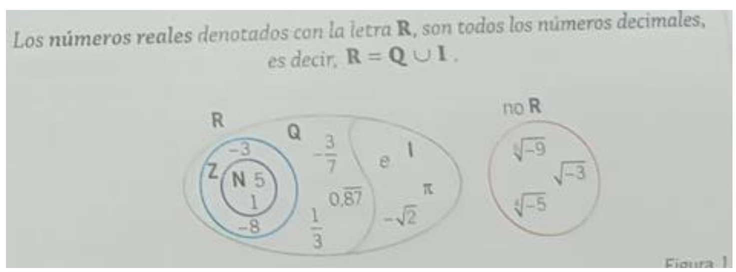


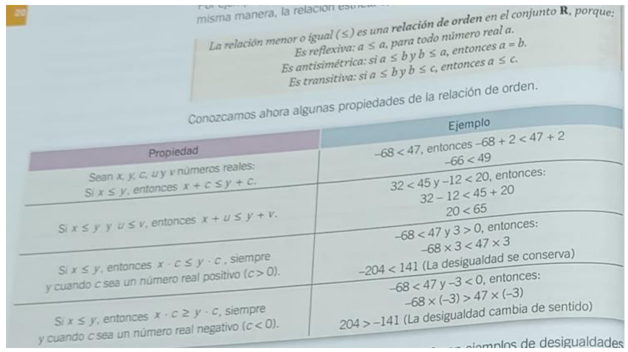
Imagen 2. Conjunto numérico de los números reales.

A partir de los conjuntos numéricos salen relaciones deducibles y establecen relaciones de contenencia y no contenencia por medio de diagramas en donde $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}, \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}, \mathbb{Q} \not\subset \mathbb{I}, \mathbb{I} \not\subset \mathbb{Q}$ como se muestra en la Imagen 3.

</td>
</tr>
</table>

Imagen 3. Conjuntos numéricos y sus relaciones de continencia y no continencia.

Hay una relación de orden de los números reales positivos y negativos mediante una recta numérica. Así como también, un ejemplo como la relación menor o igual (≤) en el conjunto de los Reales porque es reflexiva, antisimétrica y transitiva. En la Imagen 4 se presentan en una tabla con la propiedad en forma de generalización y un ejemplo de esta.



misma manera, la relación

*La relación menor o igual (≤) es una **relación de orden** en el conjunto **R**, porque:*
Es reflexiva: $a \leq a$, para todo número real a.
Es antisimétrica: si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$.
Es transitiva: si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$.

Conozcamos ahora algunas propiedades de la relación de orden.

Propiedad	Ejemplo
Sean x, y, c, u y v números reales: Si $x \leq y$, entonces $x + c \leq y + c$.	$-68 < 47$, entonces $-68 + 2 < 47 + 2$ $-66 < 49$
Si $x \leq y$ y $u \leq v$, entonces $x + u \leq y + v$.	$32 < 45$ y $-12 < 20$, entonces: $32 - 12 < 45 + 20$ $20 < 65$
Si $x \leq y$, entonces $x \cdot c \leq y \cdot c$, siempre y cuando c sea un número real positivo ($c > 0$).	$-68 < 47$ y $3 > 0$, entonces: $-68 \times 3 < 47 \times 3$ $-204 < 141$ (La desigualdad se conserva)
Si $x \leq y$, entonces $x \cdot c \geq y \cdot c$, siempre y cuando c sea un número real negativo ($c < 0$).	$-68 < 47$ y $-3 < 0$, entonces: $-68 \times (-3) > 47 \times (-3)$ $204 > -141$ (La desigualdad cambia de sentido)

Imagen 4. Relaciones y propiedades de orden en el conjunto de los números reales.

Las relaciones son ejemplos de desigualdades que se representan en la recta numérica a través de semirrectas (intervalos no acotados) o segmentos (intervalos acotados) como en la Imagen 5.

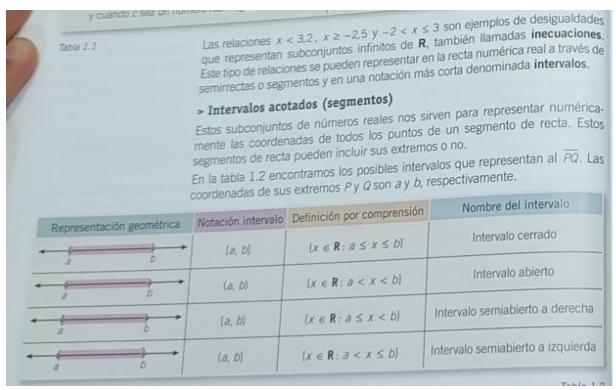


Tabla 1.1

Las relaciones $x < 3{,}2$, $x \geq -2{,}5$ y $-2 < x \leq 3$ son ejemplos de desigualdades que representan subconjuntos infinitos de **R**, también llamadas **inecuaciones**. Este tipo de relaciones se pueden representar en la recta numérica real a través de semirrectas o segmentos y en una notación más corta denominada **intervalos**.

> Intervalos acotados (segmentos)

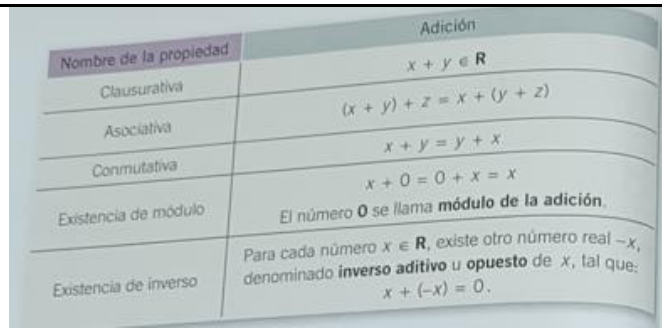
Estos subconjuntos de números reales nos sirven para representar numéricamente las coordenadas de todos los puntos de un segmento de recta. Estos segmentos de recta pueden incluir sus extremos o no.

En la tabla 1.2 encontramos los posibles intervalos que representan al $\overline{PQ}$. Las coordenadas de sus extremos P y Q son a y b, respectivamente.

Representación geométrica	Notación intervalo	Definición por comprensión	Nombre del intervalo
a b	$[a, b]$	$\{x \in \mathbf{R} : a \leq x \leq b\}$	Intervalo cerrado
a b	(a, b)	$\{x \in \mathbf{R} : a < x < b\}$	Intervalo abierto
a b	$[a, b)$	$\{x \in \mathbf{R} : a \leq x < b\}$	Intervalo semiabierto a derecha
a b	$(a, b]$	$\{x \in \mathbf{R} : a < x \leq b\}$	Intervalo semiabierto a izquierda

Imagen 5. Intervalos acotados (segmentos).

Asimismo, se presenta la adición y sustracción de números reales y las propiedades con respecto a la adición en una tabla como se evidencia en la Imagen 6. La tabla consta de dos columnas con el nombre de la propiedad y la generalidad. Lo mismo sucede con la multiplicación y división de números reales, aunque esta vez las propiedades son con respecto a la multiplicación.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>


<table>
<tr><th>Nombre de la propiedad</th><th>Adición</th></tr>
<tr><td>Clausurativa</td><td>$x + y \in \mathbf{R}$</td></tr>
<tr><td>Asociativa</td><td>$(x + y) + z = x + (y + z)$</td></tr>
<tr><td>Conmutativa</td><td>$x + y = y + x$</td></tr>
<tr><td>Existencia de módulo</td><td>$x + 0 = 0 + x = x$
El número 0 se llama módulo de la adición.</td></tr>
<tr><td>Existencia de inverso</td><td>Para cada número $x \in \mathbf{R}$, existe otro número real $-x$, denominado inverso aditivo u opuesto de x, tal que:
$x + (-x) = 0$.</td></tr>
</table>

Imagen 6. Propiedades con respecto a la adición de los números reales.

No presentan relaciones con otros sistemas numéricos, solo se menciona el sistema numérico decimal. Aun así, se define la diferencia entre decimal infinito, decimal periódico puro, decimal periódico, expresión decimal.
</td>
</tr>
<tr>
<td>Representaciones de los números reales</td>
<td>
En la Imagen 7 está la representación de los números irracionales en la recta numérica por el uso del teorema de Pitágoras que requiere calcular la medida de la diagonal.

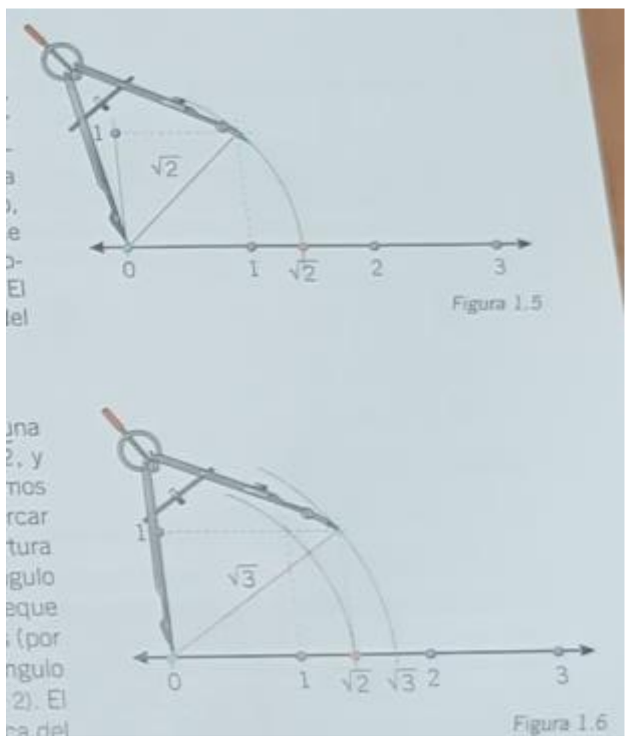


Imagen 7. Representación de números irracionales en la recta numérica con regla y compás.

Por medio de la geometría como se muestra en la Imagen 8 se utilizan los segmentos (intervalos acotados), como también semirrecta y recta (intervalos no acotados) que representan números reales por los extremos del intervalo propuestos en la notación del intervalo.
</td>
</tr>
</table>

> Intervalos acotados (segmentos)

Estos subconjuntos de números reales nos sirven para representar numéricamente las coordenadas de todos los puntos de un segmento de recta. Estos segmentos de recta pueden incluir sus extremos o no.

En la tabla 1.2 encontramos los posibles intervalos que representan al $\overline{PQ}$. Las coordenadas de sus extremos *P* y *Q* son *a* y *b*, respectivamente.

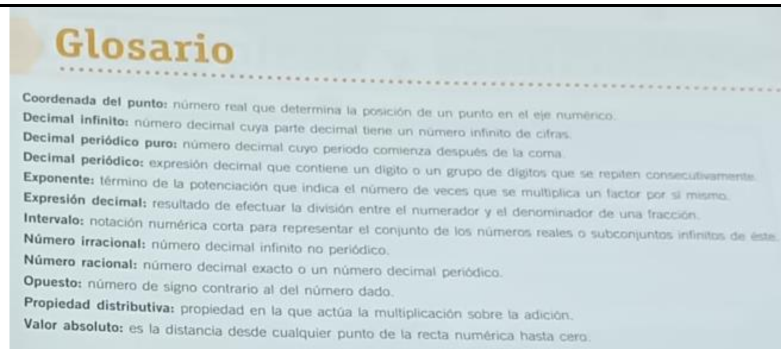
Representación geométrica	Notación intervalo	Definición por comprensión	Nombre del intervalo
	$[a, b]$	$\{x \in \mathbf{R} : a \leq x \leq b\}$	Intervalo cerrado
	(a, b)	$\{x \in \mathbf{R} : a < x < b\}$	Intervalo abierto
	$[a, b)$	$\{x \in \mathbf{R} : a \leq x < b\}$	Intervalo semiabierto a derecha
	$(a, b]$	$\{x \in \mathbf{R} : a < x \leq b\}$	Intervalo semiabierto a izquierda

Imagen 8. Intervalos acotados (segmentos).

Representación simbólica de los números reales por expresión decimal. Se define decimal infinito, decimal periódico puro y decimal periódico, por lo que se hace la distinción para número racional e irracional y su connotación con los números reales. A continuación, en las Imagen 8 y 9 se muestra la evidencia.

La proporción entre la energía fósil (carbón, petróleo, gas) consumida por el ser humano y la energía que la Tierra recibe del Sol ha crecido en forma exponencial: en 1800 era de $\frac{1}{1\ 000\ 000}$; hace dos décadas, de $\frac{1}{10\ 000}$ y a comienzos del nuevo milenio, de $\frac{1}{3000}$.

Imagen 8. Representación de número racional.



Glosario

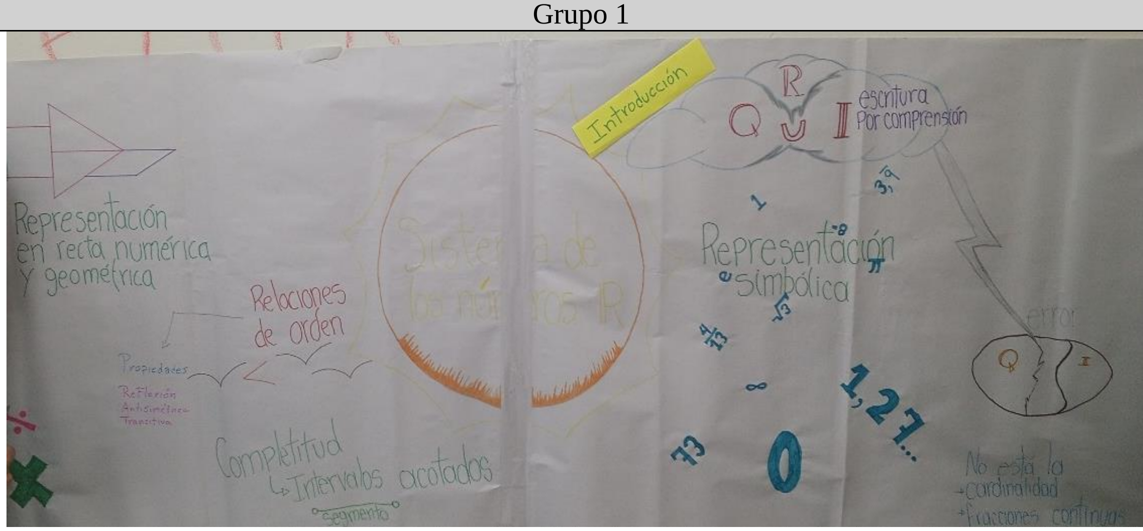
Coordenada del punto: número real que determina la posición de un punto en el eje numérico.
Decimal infinito: número decimal cuya parte decimal tiene un número infinito de cifras.
Decimal periódico puro: número decimal cuyo periodo comienza después de la coma.
Decimal periódico: expresión decimal que contiene un dígito o un grupo de dígitos que se repiten consecutivamente.
Exponente: término de la potenciación que indica el número de veces que se multiplica un factor por sí mismo.
Expresión decimal: resultado de efectuar la división entre el numerador y el denominador de una fracción.
Intervalo: notación numérica corta para representar el conjunto de los números reales o subconjuntos infinitos de éste.
Número irracional: número decimal infinito no periódico.
Número racional: número decimal exacto o un número decimal periódico.
Opuesto: número de signo contrario al del número dado.
Propiedad distributiva: propiedad en la que actúa la multiplicación sobre la adición.
Valor absoluto: es la distancia desde cualquier punto de la recta numérica hasta cero.

Imagen 9. Glosario de algunos términos de los números reales.

Consideraciones sobre el abordaje de los números reales en el libro de texto
A pesar de estar muy completo el libro con respecto al conjunto numérico de los números reales, hace falta la representación de fracciones continuas, ya que, no se recurre a esta representación. Además, no se presenta la cardinalidad de los números racionales y tampoco se menciona que el conjunto ℝ de los números reales es infinito, pero ℝ es infinito no numerable.

ANEXO F – CARTELERAS DESARROLLADAS EN LAS FASES II Y IV

Grupo 1



HB_car1
JV_car1
JR_car1
Título: Sistemas de los números R
Libro: DELTA 8
Transcripción:

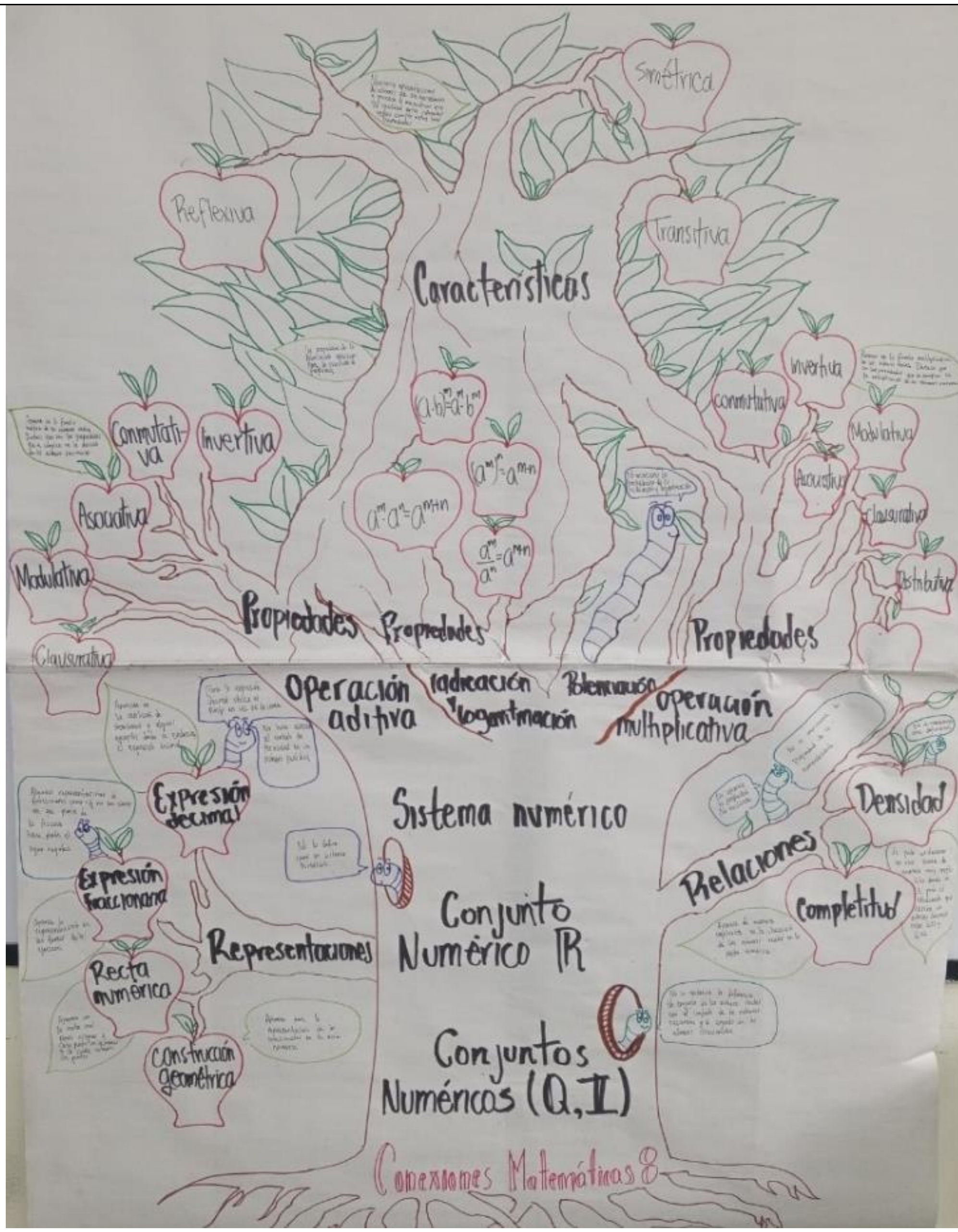
- Introducción
- Escritura por comprensión ℚ, u ℝ, 𝕀 – Error ℚ, 𝕀
- Representación en recta numérica y geométrica

- Representación simbólica
- Relaciones de orden: Propiedades → Reflexión, antisimétrica, transitiva
- Completitud – Intervalos acotados – Segmento
- No está la:
  * Cardinalidad

  * Fracciones continuas

HB_car2
JV_car2
JR_car2
Recta numérica - No enumerable ℝ Ø 𝕀 ℕ . No Biyectivo – Densidad ℝ – Completitud – Continuidad – No representación de: expresiones algebraicas, magnitudes geométricas, expresiones decimales - Notación decimal (finita, periódica, no periódica) . Radicales

Grupo 3



AM_car1
LB_car1
VZ_car1
Título: Conjuntos Numéricos (ℚ, 𝕀)
Libro: CONEXIONES MATEMATICAS 8
Transcripción:

- Conjuntos Numéricos (ℚ, 𝕀): No se evidencia la diferencia el conjunto de los números reales con el conjunto de los números racionales y el conjunto de los números irracionales
- Conjunto Numérico ℝ : No lo define como un sistema numérico
- Relaciones: No aparece la propiedad - No exclusiva - No se menciona la propiedad de la

numerabilidad

- Densidad: No se menciona una definición. Se pudo evidenciar en una tarea de manera muy explícita, donde se le pide al estudiante que escriba un número decimal entre 6,35 y 6,36
- Completitud: Aparece de manera implícita en la ubicación de los números reales en la recta numérica

• Representaciones:

- Expresión decimal: Para la expresión decimal utiliza el punto en vez de la coma – Aparece en la resolución de problemas y algunos ejemplos donde se evidencia la expresión decimal – No hace alusión al símbolo de periocidad en un numero periódico
- Expresión fraccionaria: Algunas representaciones de fraccionarios como $-\frac{1}{3}$ no son muy claras en que parte de la fracción hace parte el signo negativo - Aparece la representación en las tareas de los ejercicios
- Recta numérica: Aparece con la recta real para asignar a cada punto un número y a cada número un punto
- Construcción geométrica: Aparece para la representación de los irracionales en la recta numérica

• Sistema Numérico:

*Operación aditiva: Propiedades

- Asociativa: Aparece en la familia aditiva de los números reales. Destaca que son las propiedades que se cumplen en la adición de los números racionales
- Conmutativa
- Invertiva
- Modulativa
- Clausurativa

*Radicación y logaritmación: Propiedades

No menciona las propiedades de la radicación y la logaritmación

*Potenciación

$$(a.b)^m = a^m * b^m$$

$$(a^m)^n = a^{m*n}$$

$$a^m.a^n = a^{m+n}$$

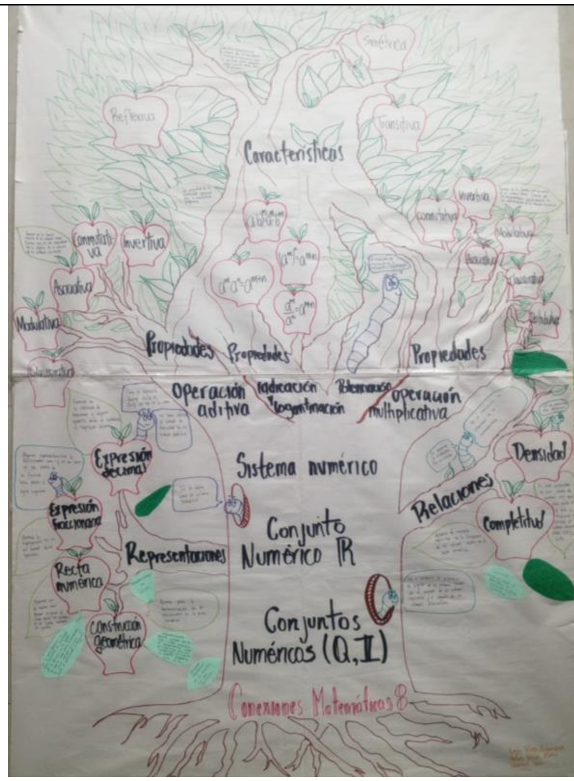
$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

*Operación multiplicativa: Propiedades

- Invertiva: Aparece en la familia multiplicativa de los números reales. Destaca que son las propiedades que se cumplen en la multiplicación de los números racionales
- Conmutativa
- Modulativa
- Asociativa
- Clausurativa

- Distributiva

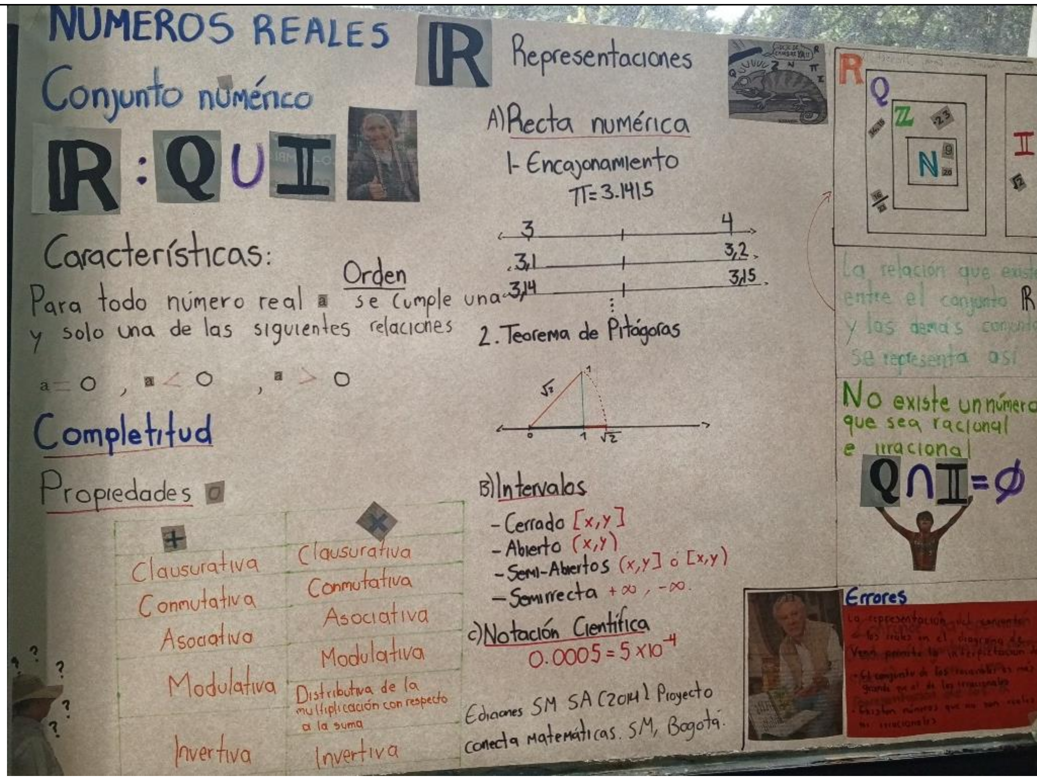
- Características: Menciona representaciones de números que son equivalentes y procede a mencionar que la igualdad entre números reales cumple estas tres propiedades
  - Reflexiva
  - Simétrica
  - Transitiva



AM_car2
LB_car2
VZ_car2

Números trascendentes - Con la recta numérica se logra relacionar la propiedad de la densidad en los reales - Aproximaciones en series – Inconmesurable permite entender que no todos pueden expresarse en representaciones racional por esto habre paso a los irracionales una relación al hacerla geométrica como la raíz de 2 – Número Algebraico es la solución de una ecuación - No-numerabilidad El conjunto ℝ es infinito, no se puede contar ya que no se puede establecer una correspondencia biunivoca con ℕ - Continuidad Cuando se cumple la densidad y la complitud existe una continuidad – Inconmesurabilidad Dado un A y B son inconmesurables si no existen dos números n, m que satisfagan mA = nB

Grupo 5



DD_car1
Título: NUMEROS REALES
Libro: CONECTA MATEMATICAS 8 SM, Bogotá. Ediciones SM S.A (2014). Proyecto
Transcripción:

- Conjunto numérico $\mathbb{R}$: $\mathbb{Q}$ U I

*Características:

- Orden: Para todo número real a se cumple una y solo una de las siguientes relaciones

  a=0 ; a $<$ 0 , a $>$ 0

- Completitud: Propiedades

(+) Clausurativa, Conmutativa, Asociativa, Modulativa, Invertiva

(x) Clausurativa, Conmutativa, Asociativa, Modulativa, Distributiva de la multiplicación con respecto a la suma, Invertiva

* Representaciones:

- Recta numérica:

a) Encajonamiento π= 3.1415

3 ⟷ ⟷ ⟷ ⟷ 4

3,1 ⟷ ⟷ ⟷ ⟷ 3,2 3,14 ⟷

⟷ ⟷ ⟷ 3,15

b) Teorema de Pitágoras: (figura)

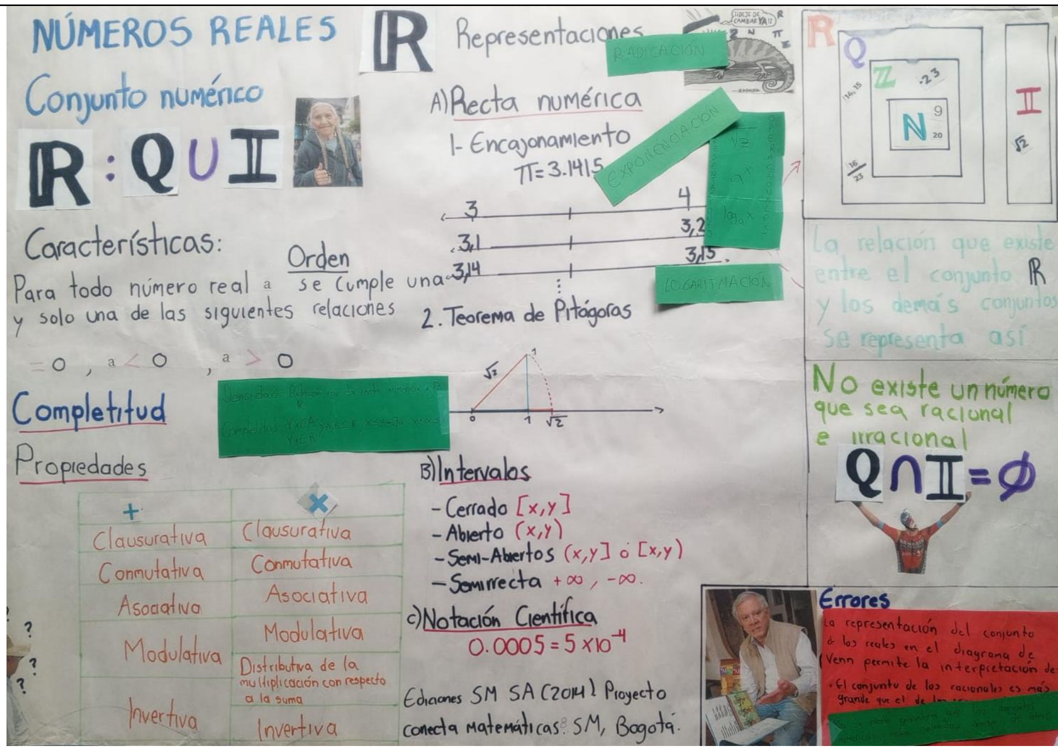
- Intervalos: Cerrado [x,y] - Abierto (x,y) - Semi-Abiertos (x,y] ó [x,y) – Semirrecta $+\infty$, $-\infty$

- Notación Científica: 0.0005 = 5 x 10-4

* Gráfico (ℝℚℤℕI) La relación que existe entre el conjunto y los demás conjuntos se representa así. No existe un número que sea raciona e irracional $\mathbb{Q} \cap \mathrm{I} = \emptyset$

* Errores: La representación del conjunto de los reales en el diagrama de Venn permite la interpretación de: - El conjunto de los racionales es más grande que el de los irracionales

- Existen números que no son reales ni irracionales

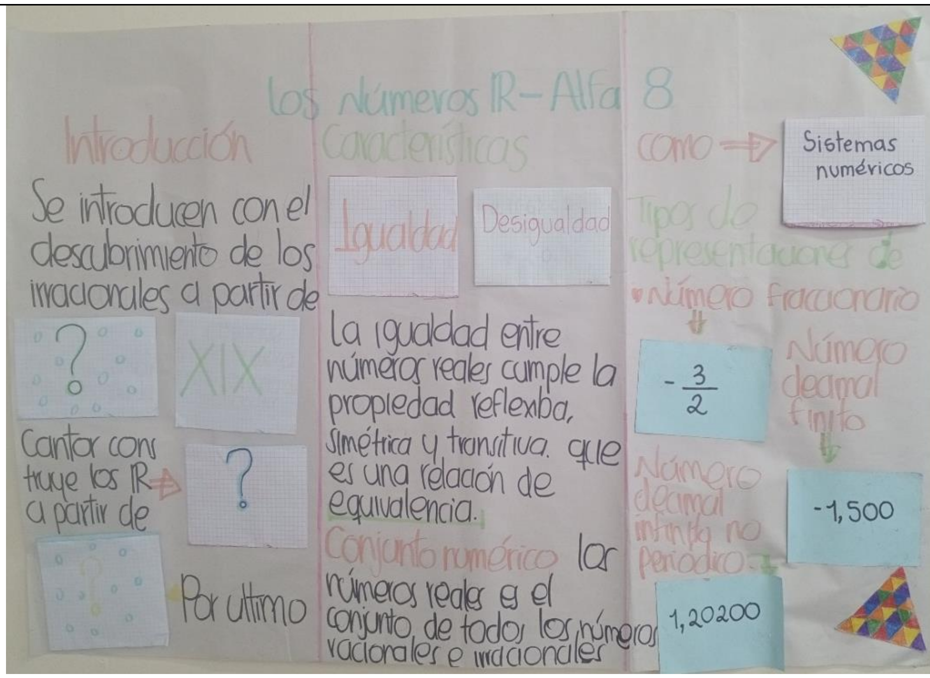


DD_car2

- Densidad: relación con la recta numérica y los ℝ - Completitud – LOGARITMACION - RADICACION – EXPONENCIACION – REPRESENTACIONES OPERACIONALES

- No se puede garantizar que los conjuntos numéricos, estén contenidos dentro de otros

Grupo 2



JG_car1
GB_car1
Título: Los Números $\mathbb{R}$
Libro: ALFA 8
Transcripción:

• Introducción
* Se introducen con el descubrimiento de los irracionales a partir de

- ? : Razones inconmesurables entre magnitudes
XIX : Se reconoce que los números reales son racionales e irracionales

* Cantor construye los $\mathbb{R}$ a partir de: ? Sucesiones infinitas de racionales

* Por último: ? Las cortaduras hechas en el conjunto de los números racionales son números reales

• Características
* Igualdad: $r = 2,1888$; $m = 2,1888 \Rightarrow r = m$

* Desigualdad: $2 + (-6) < 5.3 + (-6)$; $-4 < -0.7$

La igualdad entre números reales cumple la propiedad reflexiva, simétrica y transitiva que es una relación de equivalencia.

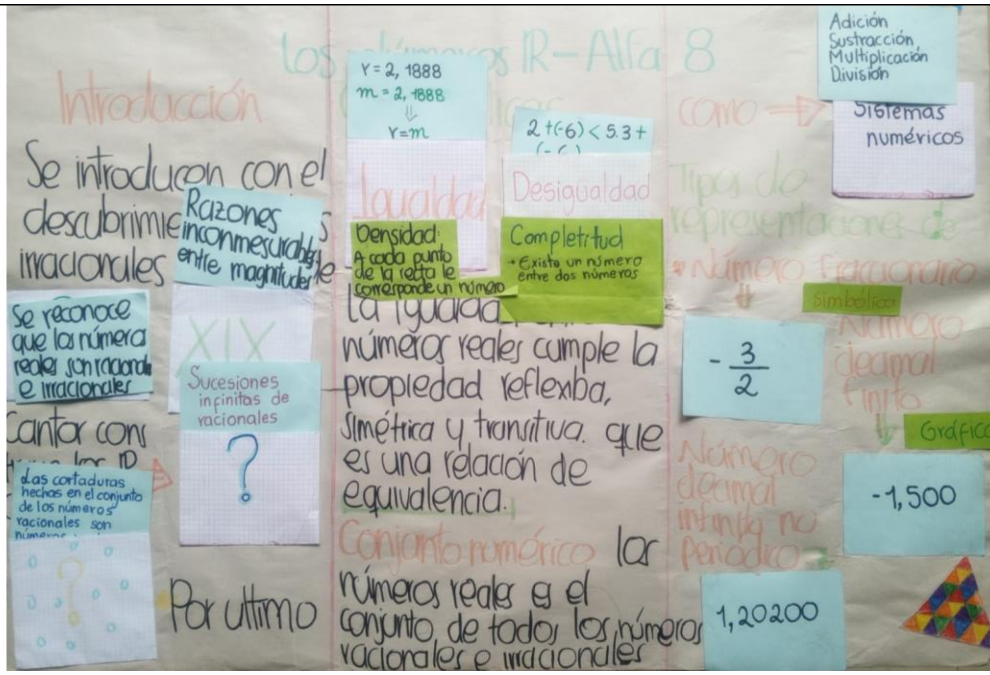
* Conjunto numérico. los números reales es el conjunto de todos los números racionales e irracionales

• Tipos de representaciones
* Sistemas numéricos: Adición, Sustracción, Multiplicación, División

* Número fraccionario $-\frac{3}{2}$

* Número decimal finito – 1,500

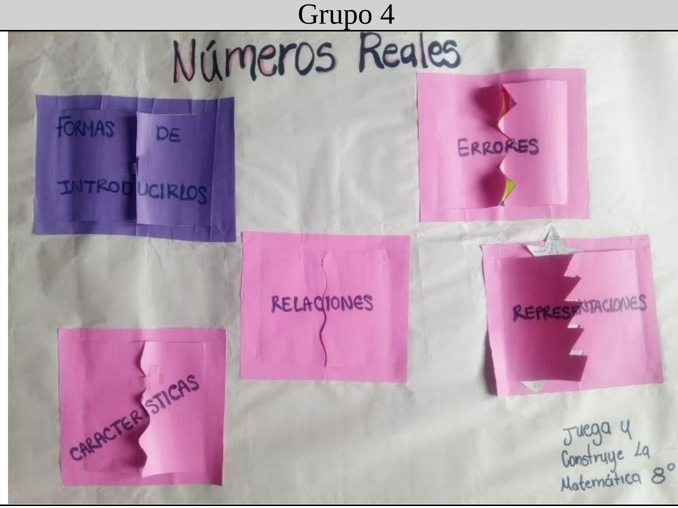
* Número decimal infinito no periódico 1,20200

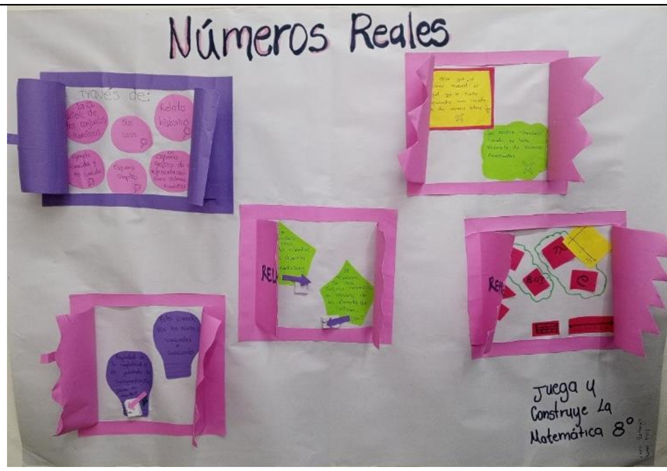


JG_car2
GB_car2

Densidad: a cada punto de la recta le corresponde un número - Completitud: Existe un número entre dos números - Simbólica - Gráfica

Grupo 4





KD_car1
LC_car1
Título: NUMEROS REALES
Libro: JUEGA Y CONSTRUYE LA MATEMATICA 8
Transcripción:

- FORMAS DE INTRODUCIRLOS: A través de

* La unión de dos conjuntos numéricos

* Sus usos

* Relato histórico

* Ejemplos conocidos y no conocidos

* Esquema sinóptico

* Un esquema grafico de su representación como sistema numérico

- CARACTERISTICAS

* Está formado por los números racionales e irracionales

* Propiedad de la completitud o el postulado de correspondencia ¿Cómo lo aborda? A cada punto de la recta le corresponde un número real y a cada número real le corresponde un punto de la recta

- RELACIONES

* Se relaciona con otros conjuntos numéricos en sus diferentes representaciones ¿Cómo? $16 = \frac{32}{2} = \frac{16}{1} = 16$

* Se relaciona con otros conjuntos numéricos en términos de los elementos que contienen ¿Cómo? Porque enuncian que los números reales se dividen en racionales e irracionales

- ERRORES

* Se dice que un número racional es aquel que se puede representar como cociente de dos números

enteros $\frac{a}{b}$

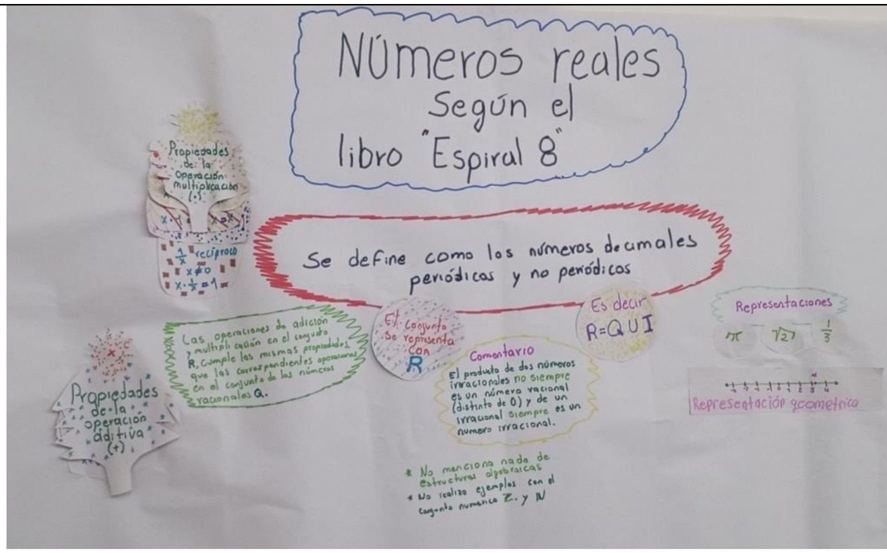
* Se escribe fracciones cuando se trata realmente de Números Fraccionarios

• REPRESENTACIONES

* 3,1415... π $\frac{1}{5}$ 8,125 $-\frac{2}{5}$ e

KD_car2
LC_car2
La necesidad de medir magnitudes - Su relación con la recta numérica - Tienen cardinalidad – Cumplen con Densidad y Continuidad – Escritura decimal: exacta, periódica pura, no periódica - radicales

Grupo 6



MB_car1
Título: Números reales según el libro “Espiral 8”
Libro: ESPIRAL 8
Transcripción:

- Definición: Se define como los números decimales periódicos y no periódicos. El conjunto de representa con $\mathbb{R}$. Es decir $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathrm{I}$

* Comentarios: el producto de dos números irracionales no siempre es un número racional (distinto de 0) y de un irracional siempre es un número irracional. * No menciona nada de estructuras algebraicas. * No realiza ejemplos con el conjunto numérico $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{N}$

- Propiedades de la operación multiplicación

* Clausurativa $x + y \in \mathbb{R}$

* Conmutativa $x * y = y * x$

* Extensión de módulos $x * 1 = 1 * x = x$

* Asociativa $(x * y) * z = x * (y * z)$

* Existencia de inversos $X \in \mathbb{R}$ $\frac{1}{x}$ recíproco $X \neq 0$ $X * \frac{1}{x} = 1$

- Propiedades de la operación aditiva (+)

* Conmutativa $x + y = y + x$

* Clausurativa $x + y \in \mathbb{R}$

* Existencia de módulo $x + 0 = 0 + x = x$

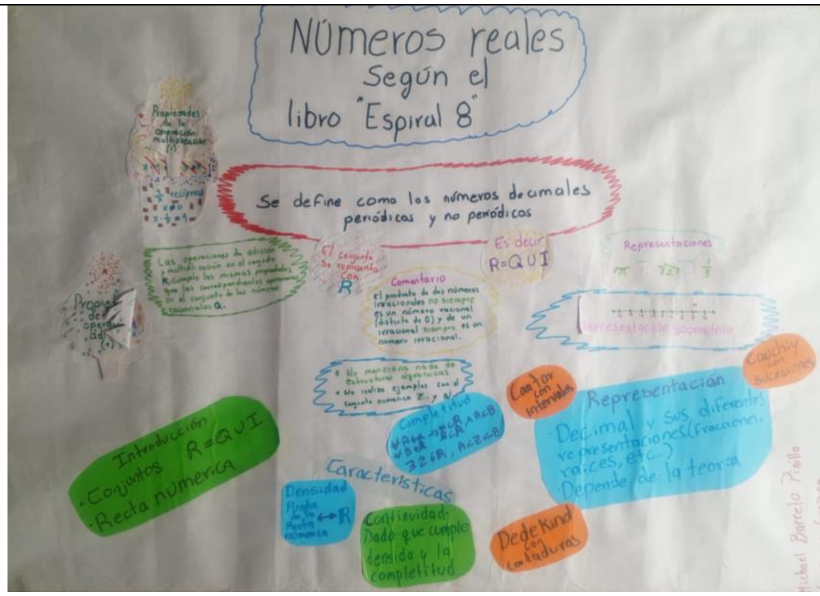
* Asociativa $(x + y) + z = x + (y + z)$

* Existencia de inversos $X \in \mathbb{R}$ $-X$ opuesto $x + (-x) = 0$

Las operaciones de adición y multiplicación en el conjunto $\mathbb{R}$, cumple las mismas propiedades que las correspondientes operaciones en el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$

- Representaciones π $\sqrt{2}$ $\frac{1}{3}$

* Representación geometrica (recta numérica)



MB_car2

* Introducción: Conjuntos, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathrm{I}$, Recta numérica. * Características: Densidad, puntos de la Recta númerica - Completitud - Continuidad, dado que cumple densidad y la completitud - * Representación: Decimal y sus diferentes representaciones (fracciones, raíces, etc...), Depende de la teoría, Cantor con intervalos, Dedekind con cortaduras, Cauchy con sucesiones

ANEXO G – RECOPILACIÓN DE LAS TAREAS DURANTE LA FASE TEÓRICA

Grupo 1	**Cód.**	HB_teo JV_teo JR_teo

Para el artículo de Montoro, V. (2017, del 10 al 14 de julio) las características fundamentales son:

A. Densidad: Teniendo en cuenta la representación de los números reales en la recta “numérica”, entre cada par de números reales, existe otro número real, por ende, hay infinitos números reales, ya que la recta es infinita.

B. Completitud: el conjunto de los números reales incluye al conjunto de los números irracionales y al conjunto de los números racionales, en donde se tienen en cuenta las fracciones, por esta razón el conjunto de los números reales al tener en cuenta su densidad, se consideran completos.

C. Continuidad: teniendo en cuenta la completitud, se puede decir que los números reales son continuos ya que no tienen espacios vacíos entre ellos.

Es necesario abordar las tres características, ya que, al comprender la noción de densidad, de tal forma que los estudiantes identifiquen que el conjunto de los números reales es completo y por estas razones tienen continuidad, todo esto a la luz de una representación, como esta ejemplificada en el texto, con la recta "numérica".

Para el artículo de Mora, L. C. y Torres, J. A. (2004) las características fundamentales son:

A. La continuidad numérica: en donde se busca evidenciar la completitud de los números reales.

B. Expresiones algebraicas y analíticas.

C. Magnitudes.

Es importante abordar la continuidad numérica, ya que con esto se comprende la noción de infinito y su densidad, por otra parte, las expresiones algebraicas podrían ayudar a comprender en forma general los números reales, no obstante, las magnitudes no son necesarias, ya que su comprensión puede ser integrada de forma directa en la representación con la recta numérica.

Para Romero y Romero (1999) las características fundamentales son:

A. Sistema de representación simbólica.

   a) Sistema de notación decimal: decimal finito, decimal periódico y decimal no periódico.

   b) Notación operatoria habitual: notación de fracción, irracionales algebraicos (v. g. irracionales cuadráticos) e irracionales trascendentes (v. g. $\pi, \phi, \mathcal{E}$).

B. Sistema de representación gráfica.

   a) Modelo de la recta real en dos niveles: (i) Biyectividad de la correspondencia números-puntos de la recta. (ii) Continuo lineal, ya que, sustenta la interpretación geométrica e impone una lógica y unas propiedades al conjunto numérico.

C. Continuidad.

Los números reales: toda sucesión infinita de números reales, creciente y acotada superiormente por cierto número k, tiene como límite un número real $a < k$, entonces a cada decimal infinito le corresponde un número real. Recíprocamente, cada número real viene dado mediante un decimal infinito (Ilín y Pozniak, 1991).

Según lo mencionado en el artículo las representaciones y la continuidad son necesarias para enseñar en la secundaria, aun así, hay un análisis de cada característica a continuación. En la representación simbólica es importante resaltar el sistema de numeración decimal posicional y establecer la diferencia de la notación decimal (finita, periódica, no periódica), además justificar que todo número racional tiene una expresión decimal finita o infinita periódica y viceversa. En la representación gráfica para la enseñanza en secundaria solo utilizaríamos el primer nivel por el criterio mediante cualquier número racional o irracional puede ser representado a un punto de la recta. Asimismo, se puede relacionar con la representación simbólica y que tienen un carácter complementario estas dos representaciones debido a que destacan en los aspectos operacionales (simbólico) y ayudan a intuir propiedades de continuidad y medida (gráfica).

Para Rico, L. (2012) las características fundamentales son:

A. Conmensurabilidad: El concepto de unidad en la antigüedad griega aseguraba la conmensurabilidad de todo par de segmentos, es decir que siempre se podía medir un segmento con otro…

B. Inconmensurabilidad: La aparición de las magnitudes inconmensurables en los trabajos pitagóricos llevo a un gran problema para esta escuela… Condujo las matemáticas por el rumbo de una fundamentación que se extendió por más de veinticinco siglos y que finalmente condujo a la creación del conjunto de los números reales (R).

C. La no-numerabilidad de los reales: Cantor probo que los números racionales son numerables, es decir, que se pueden contar puesto que se pueden color de forma biunívoca con los números naturales… La prueba de la no-numerabilidad de los números reales. Se dice que esta prueba la realizo a finales de 1873.

D. Continuidad y números irracionales en Dedekind: El límite de sucesiones racionales que aproximan al real r por defecto y por exceso.

1. ¿Cuáles son las representaciones propias de los números reales? ¿Cuáles de estas son imprescindibles abordar en la enseñanza de secundaria? Explicar.

Para el artículo de Montoro, V. (2017, del 10 al 14 de julio) las representaciones propias de los números reales son:

A. Sistema de representación simbólica.

   a. Notación decimal, notación en forma de fracción y radical.

B. Representación en la recta numérica.

Todas son imprescindibles, ya que así se comprende los números reales desde las diferentes representaciones y su organización en la recta numérica.

Para el artículo de Mora, L. C. y Torres, J. A. (2004) las representaciones propias de los números reales son:

A. Sistema de representación simbólica.

  a. Notación decimal, notación en forma de fracción, radical, sucesiones y series.

B. Representaciones geométricas.

La representación simbólica es importante, no obstante, las sucesiones y series se tornan complejas para la comprensión en ciertos grados, las representaciones geométricas son una forma de representar los números reales que posibilita una apropiación del concepto.

Para Romero y Rico (1999) las representaciones propias de los números reales son:

A. Sistema de representación simbólica.

  a. Sistema de notación decimal: decimal finito, decimal periódico y decimal no periódico.

  b. Notación operatoria habitual: notación de fracción, irracionales algebraicos (v. g. irracionales cuadráticos) e irracionales trascendentes (v. g. $\pi, \phi, \mathcal{E}$).

B. Sistema de representación gráfica.

  A. Modelo de la recta real en dos niveles: (i) Biyectividad de la correspondencia números-puntos de la recta. (ii) Continuo lineal, ya que, sustenta la interpretación geométrica e impone una lógica y unas propiedades al conjunto numérico.

Debido al énfasis que se hace en el anterior punto sobre las representaciones de los números reales. Este párrafo solo resaltara la dificultad del segundo nivel de representación gráfica y por qué no se utiliza en la enseñanza en secundaria según los autores.

entra la consideración del continuo lineal, que sustenta la interpretación geométrica del conjunto de los números reales. El sistema axiomático sobre el que se fundamenta dicho continuo lineal impone una lógica y unas propiedades al conjunto numérico, <u>difíciles de expresar y argumentar en términos de simples notaciones numéricas</u>.

Rico, L. (2012) las representaciones propias de los números reales son:

  A. La recta numérica: Cantor y Dedekind, por separado, enunciaron que la correspondencia de cada número real con los puntos de la recta era una asunción que no podía demostrarse y debía considerarse como un axioma…

  B. La biyección punto-número.

  C. Las fracciones continuas en la diferenciación entre Q y R: Euler demostró que cada número racional se desarrolla mediante una fracción continuas finitas, que un numero racional se desarrolla mediante una fracción continua infinita y que una fracción continua periódica es solución de una ecuación cuadrática.

Los imprescindibles son las representaciones, ya que permite a los estudiantes ver con diferentes representaciones y varias de sus propiedades, otra no tan importante, pero si relevante son conmensurabilidad ya que desde aquí se pueden mostrar la evolución entre los diferentes conjuntos de números.

Grupo 2	**Cód.**	GB_teo JG_teo

2. ¿Cuáles son las características fundamentales de los números reales que los conceptualizan? ¿Cuáles de estas son imprescindibles abordar en la enseñanza de secundaria? Explicar.

Características de los números reales:

- **Orden:** Dedekind (1872) afirma que: "Si $a > b$, y $b > c$, entonces a > c. siempre que a y c sean dos números diferentes, y que b sea mayor que uno y menor que el otro, lo expresaremos brevemente así: b está situado entre los dos números a y c" (p.37).
- **Densidad:** Dedekind (1872) nos dice que: "Si $a \neq b$ existen infinitos de números racionales entre a y b, esta es la propiedad topológica de la densidad de los números racionales" (p.37)
- **Continuidad numérica o completez:** Dedekind (1872) enuncia que: "La llamada continuidad numérica o completez es la propiedad fundamental de los reales que se muestra por medio de la construcción de Dedekind. Esta propiedad de los números reales permite diferenciarlos claramente de los racionales: los números racionales son densos, pero no completos" (p.38)
- **Inconmensurabilidad:** Hippasus (s.f) **"**Dadas dos magnitudes cualesquiera A y B, son inconmensurables si no existen dos números m y n que satisfagan $mA = nB$, o lo que es equivalente, dos magnitudes A y B son inconmensurables si para cualquier número m y n, $mA \neq nB$" (p.19).

El orden y la continuidad numérica o completez son imprescindibles en la enseñanza de secundaria porque son características fundamentales de los números reales, ya que, desarrollan habilidades tales como el proceso de razonamiento donde los estudiantes aprenden a comparar los números y entender sus relaciones de orden frente a la resolución de problemas en conte4xyos matemáticos y cotidianos. Además, dicha característica es esencial para la comprensión de otros objetos matemáticos como por ejemplo las desigualdades, resoluciones de ecuaciones y sistemas de ecuaciones. Por otro lado, la continuidad numérica o completez se requieren para medir lo continúo aplicando los algoritmos de suma, resta, multiplicación y división donde se tengan siempre resultados en los números reales.

3. ¿Cuáles son las representaciones propias de los números reales? ¿Cuáles de estas son imprescindibles abordar en la enseñanza de secundaria? Explicar.

Representaciones propias de los números reales:

▪ Representaciones simbólicas:

✓ **Notación decimal:** Rico y Romero (1999) “es un sistema integrador en el dominio de las representaciones simbólicas, puesto que toda notación decimal (finita, periódica o no periódica) representa un número real y, recíprocamente, cada número real puede ser expresado mediante una notación decimal” (p.124).

✓ **Notaciones operatorias habituales:** Rico y Romero (1999) “(fracciones, raíces cuadradas, etc.), que constituyen un complemento y un apoyo importante para el sistema de notación decimal” (p.124)

▪ Representaciones gráficas:

✓ Modelo de la recta:

Rico y Romero (1999) “es un sistema integrador en el dominio de los sistemas de representación gráfica puesto que la correspondencia entre los puntos de la recta y los números reales, realizada a través de la medida de longitudes, se conceptualiza como una biyección” (p.124).

▪ Otras representaciones usadas:

✓ Mora y Torres (2004) “En el caso de Dedekind, cortaduras representadas con letras griegas o como pares de conjuntos y éstos mediante letras del abecedario” (p.119)

✓ Mora y Torres (2004) “Para Cantor, intervalos encajados” (p.119).

La notación decimal y el modelo de la recta son imprescindibles en la enseñanza de secundaria porque son representaciones fundamentales de los números reales, ya que, los estudiantes necesitan entender y emplear números reales en dicha notación porque cada número real está asociado con un decimal infinito, y viceversa, cada decimal infinito representa un número real. Por otra parte, el modelo de recta numérica es una herramienta visual que ayuda a los estudiantes a comprender la relación entre los números reales, contribuyendo al desarrollo de la intuición matemática para reconocer su concepto.

Grupo 3	**Cód.**	AM_teo VZ_teo LB_teo

Romero (1999)

Características fundamentales de los números reales:

Continuidad: Los números reales forman una línea continua e infinita, sin huecos ni interrupciones. Esta propiedad es fundamental ya que implica que entre dos números reales siempre hay infinitos otros números reales. La comprensión de esta continuidad es esencial para entender la naturaleza infinita y sin interrupciones de la recta numérica real.

Densidad: Entre dos números reales siempre se puede encontrar otro número real. Esta densidad implica que no existen distancias "vacías" en la recta numérica. Esta característica es crucial para comprender la relación infinita y ordenada de los números reales, y es fundamental para conceptos matemáticos más avanzados, como límites y cálculo integral.

Irracionalidad: Los números irracionales, como la raíz cuadrada de 2, tienen decimales infinitos no periódicos. Esta propiedad muestra la existencia de números con infinitas cifras decimales no repetitivas y es esencial para entender la complejidad y diversidad de los números reales.

Racionalidad: Los números racionales son aquellos que pueden expresarse como fracciones. Esto incluye a los enteros y a los decimales que se repiten o terminan. La comprensión de los números racionales es fundamental para entender la relación entre las fracciones y los decimales.

Importancia en la enseñanza secundaria:

En la enseñanza secundaria, es crucial abordar la continuidad y la densidad de los números reales. Estos conceptos sientan las bases para comprender la naturaleza infinita y sin huecos de la recta numérica, lo cual es esencial para conceptos matemáticos posteriores, como límites, derivadas e integrales en cálculo.

La distinción entre números irracionales y racionales amplía la comprensión de los estudiantes sobre la diversidad de los números reales y cómo pueden ser representados y utilizados en diferentes contextos matemáticos y científicos.

Representaciones propias de los números reales:

Representación simbólica: Incluye la notación decimal, fracciones y expresiones algebraicas que representan números reales. La comprensión de la relación entre fracciones y decimales recurrentes e infinitos es crucial en la enseñanza secundaria.

Representación gráfica: La recta numérica relaciona cada punto en la recta con un número real. Esta representación visual ayuda a comprender la continuidad y densidad de los números reales. En secundaria, entender cómo se relacionan los números con puntos en la recta numérica es esencial para comprender las relaciones de orden y magnitud entre ellos.

Importancia en la enseñanza secundaria:

Enseñar las representaciones simbólicas y gráficas de los números reales en secundaria permite a los estudiantes comprender cómo se pueden expresar y visualizar estos números en diferentes contextos matemáticos y del mundo real. La recta numérica es una herramienta fundamental para comprender el orden y las relaciones entre los números, mientras que la representación decimal y fraccional profundiza la comprensión de su diversidad y complejidad.

El énfasis en diferentes representaciones amplía la comprensión de los estudiantes sobre la versatilidad de los números reales y cómo pueden ser aplicados en diversos campos de estudio.

Montoro (2017)

Características fundamentales de los números reales que los conceptualizan y su relevancia en la enseñanza secundaria:

Los números reales tienen características esenciales que los definen. En la enseñanza secundaria, es crucial abordar algunas de estas:

Continuidad y completitud: Los números reales forman una línea continua sin puntos vacíos. Esta idea es esencial para comprender la recta numérica como un modelo que contiene todos los números, incluso aquellos irracionales como π o la raíz cuadrada de 2. Enseñar esta continuidad y completitud ayuda a los estudiantes a entender que no hay lagunas en los números reales, algo que contrasta con los conjuntos discretos de números que pueden haber aprendido previamente.

Densidad numérica: Los números reales son infinitos y densos. Enseñar esto implica mostrar la infinitud entre dos números reales cualesquiera, así como la existencia de números entre cualquier par de números reales. Es vital para comprender que siempre hay más números reales por descubrir, incluso entre aquellos que ya conocemos.

Representación gráfica: La representación en la recta numérica es crucial. La habilidad para ubicar diferentes tipos de números reales en la recta, desde enteros hasta irracionales, fracciones y decimales, ayuda a visualizar su posición relativa y entender la relación entre estos números.

En la enseñanza secundaria: Estos conceptos fundamentales deben presentarse de manera gradual y comprensible para que los estudiantes puedan asimilarlos. La idea de continuidad y completitud puede introducirse mostrando que entre cualquier par de números hay otros, mientras que la densidad numérica se puede ilustrar con ejemplos de números que se aproximan cada vez más a otros.

Representaciones propias de los números reales y su importancia en la enseñanza secundaria:

Representación en la recta numérica: Es crucial para comprender la relación entre los números reales y su ubicación en una línea continua. Enseñar cómo ubicar diferentes tipos de números en la recta (enteros, fracciones, irracionales) ayuda a visualizar su relación y a entender su continuidad.

Diferenciación entre densidad y completitud: Esta distinción es importante para que los estudiantes entiendan que, aunque la recta numérica está densamente poblada, no hay huecos o lagunas entre los números. Esto implica mostrar que, a pesar de su densidad, la recta es completa y no deja espacios sin números.

Concepción de la naturaleza de la recta numérica: Comprender que la recta numérica es una representación visual de los números reales y su continuidad es esencial. Los estudiantes deben entender cómo la recta modela la infinitud, la densidad y la continuidad de los números reales.

MORA Y TORRES (2004)

Características fundamentales de los números reales y su importancia en la enseñanza:

Magnitud inconmensurable: Aparece con la medida de longitudes inconmensurables por representaciones geométricas. Permite entender que no todos los números pueden expresarse en fracciones, es decir que abre paso a los irracionales y al hacerlo geométricamente como se precisó con los pitagóricos con la raíz cuadrada de 2.

Completitud: La continuidad de la recta permite asociar el termino de completez. Decir que ya no existen huecos en la recta numérica lo que puede ayudar a comprender que, entre cualquier par de números, existe al menos un número real.

Continuidad: Se interpreto a través de la continuación geométrica de la recta**.** Permite explicar la secuencia ininterrumpida de los números reales por lo que se facilitaría en la escuela el cambio de los números racionales a los números reales.

Expresiones algebraicas y analíticas: Permite la expansión del número real y la facilitación de los números reales y la formalización de la axiomatización. Permite la manipulación de los números pensando en la resolución de ecuaciones.

Representaciones propias de los números reales y su importancia en la enseñanza secundaria:

- Sistema de representación simbólica que corresponde a la notación operatoria:

    1. Decímales

Las representaciones decimales son fundamentales para entender el número real además de que permite la solución de problemas cotidiano y que es fundamental para el desarrollo de conceptos matemáticos más avanzados.

2. Fracciones continuas, Fracción (unitaria, sexagesimal y común)

la fracción son importantes para el desarrollo de las habilidades de matemáticas por que sientan las bases para el desarrollo de un algebra mucho más avanzadas. Además se encuentran en situaciones de la vida real y ayuda con la relación entre los números racionales e irracionales.

3. Expresiones con radicales

4. Aproximaciones en series

5. Números trascendentes (Π, e)

Son fundamentales para el uso en otras ciencias como geometría y física.

- Representaciones verbales y geométricas

Es crucial tanto para comprender el por qué los números racionales no son suficiente y permite una relación geométrica en la recta numérica para el manejo de los irracionales.

RICO (2012)

Características fundamentales de los números reales que los conceptualizan y su relevancia en la enseñanza secundaria:

Inconmensurabilidad: Dadas dos magnitudes cualesquiera *A* y *B*, son inconmensurables si no existen dos números *m* y *n* que satisfagan *mA=nB*, lo cual tampoco proporcionaría la relación de equivalencia $\frac{A}{B} = \frac{n}{m}$.

No-numerabilidad: El conjunto de los números reales es infinito, su cardinalidad es distinta al conjunto de los números racionales. No se puede contar puesto que no se puede establecer una correspondencia biunívoca con los naturales.

Densidad: Si $a \neq b$ existen infinitos de los números reales entre a y b.

Completitud: en la recta numérica se puede establecer una correspondencia numérica con cada punto (a cada magnitud lineal se le puede asignar una cantidad numérica).

Representaciones propias de los números reales y su importancia en la enseñanza secundaria:

Representación en la recta numérica: Es una herramienta con la cual se facilita la introducción de los conjuntos numéricos. Sin embargo, presenta algunas limitaciones en cuanto a representar de manera exacta a cada elemento del conjunto numérico de los reales. En el momento de ubicar longitudes en la recta, no se puede realizar mediante medición directa la asignación de los irracionales. Por lo tanto, para el ámbito escolar, la recta numérica no debe considerarse como el medio principal para el estudio de las propiedades de los números reales.

Las fracciones continuas: Todo número racional puede ser desarrollado en una fracción continua infinita, todo número irracional puede ser desarrollado mediante una fracción continua infinita, y que una fracción continua periódica es solución de una ecuación cuadrática.

Las fracciones continuas son necesarias para el ámbito escolar ya que permiten representar los números reales de forma precisa, además que su acercamiento al objeto matemático número real permite hallar diferencias con el conjunto de los números racionales.

Grupo 4	**Cód.**	KD_teo LC_teo

Romero, I. y Rico, L. (1999). Representación y comprensión del concepto de número real. Una experiencia didáctica en secundaria. *Revista Ema*, *4*(2), 117-151.

1. ¿Cuáles son las características fundamentales de los números reales que los conceptualizan?

    - La correspondencia entre los números reales y los puntos de una recta.
    - La completitud que tienen los números reales con los números racionales e irracionales.
    - La capacidad para representar estos números de diferentes maneras y usos.

¿Cuáles de estas son imprescindibles abordar en la enseñanza de secundaria? Explicar.

Se cree necesario abordar en la enseñanza de secundaria estas características pues consideramos que es importante que los estudiantes entiendan las diferentes representaciones de los números tanto racionales como irracionales y que todas estas representaciones conforman los números reales con un orden y una densidad en correspondencia de la recta numérica.

2. ¿Cuáles son las representaciones propias de los números reales?

- La representación simbólica tales como el sistema de notación decimal.
- La representación gráfica en la recta numérica a través de medidas de longitudes.

¿Cuáles de estas son imprescindibles abordar en la enseñanza de secundaria? Explicar.

Se considera que ambas formas de representación son importantes en la enseñanza de los números reales en la secundaria pues como dice el texto *"Además, ambos sistemas de representación tienen un carácter complementario ya que, mientras que las representaciones simbólicas destacan aspectos operacionales y discretos de los reales, las representaciones gráficas ayudan a intuir propiedades de continuidad y medida".*

Montoro, V. (2017, del 10 al 14 de julio). El número real y la recta. Comprensiones de estudiantes secundarios y universitarios [comunicación breve]. *VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*, Madrid, España.

1. ¿Cuáles son las características fundamentales de los números reales que los conceptualizan?

    - Continuidad.
    - Orden.
    - Densidad

Pues para Montoro la representación de los números reales en la recta numérica ayuda a intuir el orden continuo y total del conjunto de números reales y la continuidad de la recta permite visualizar la completitud de este conjunto.

¿Cuáles de estas son imprescindibles abordar en la enseñanza de secundaria? Explicar.

Se cree necesario que estas características estén presentes en la enseñanza de secundaria pues es importante que los estudiantes entiendan la continuidad de los números reales pues esto es indispensable para hablar del infinito, su orden es importante para considerar los números reales como una estructura, que conozcan su densidad también es importante para hablar de infinito y considerar siempre que entre dos números reales hay otro número real.

2. ¿Cuáles son las representaciones propias de los números reales?

    - Representación de los números reales en la recta numérica con escala decimal.
    - La recta numérica como representación de los números reales

¿Cuáles de estas son imprescindibles abordar en la enseñanza de secundaria? Explicar.

Se considera que ambas representaciones son indispensables en la enseñanza de los números reales en la secundaria pues es importante que se entienda la biyección entre los números reales y la recta.

Mora, L. C. y Torres, J. A. (2004). *Concepciones de estudiantes de licenciatura en matemáticas sobre números reales*. Secciones 3.2. y 3.3. [Trabajo de maestría, Universidad Pedagógica Nacional]. Funes.

1. ¿Cuáles son las características fundamentales de los números reales que los conceptualizan?

- La continuidad de la recta como modelo para expresar la completez de los números reales.
- Herramienta en diversos desarrollos analíticos en el desarrollo del cálculo.
- Magnitud geométrica.

¿Cuáles de estas son imprescindibles abordar en la enseñanza de secundaria? Explicar.

Se cree que es imprescindible abordar los números reales con una continuidad en la recta numérica, pues esto acercaría a los estudiantes a comprender el infinito, quizás no se abordaría como una herramienta simplemente para desarrollos analíticos del cálculo, esto porque los números reales son una estructura que tiene su estudio propio. No se cree que sea indispensable que sea una magnitud geométrica, pues esta característica la cumplen los números racionales e irracionales por si solos.

2. ¿Cuáles son las representaciones propias de los números reales?

- Representaciones del tipo simbólico:

- Expresiones en forma de fracción (unitaria, sexagesimal, continua y común).

- Expresiones con radicales.

- Notación decimal

- Series.

- Sucesiones.

-Caracteres especiales para nominar algunos números.

- Representaciones verbales.

- Representaciones geométricas.

¿Cuáles de estas son imprescindibles abordar en la enseñanza de secundaria? Explicar.

Se considera que todas estas representaciones son indispensables en la enseñanza de los números reales en secundaria porque con estas distintas representaciones se les daría a los estudiantes una visión más amplia de lo que son los números enteros.

Rico, J. (2012). Algunas diferencias entre reales y racionales: un aporte a la comprensión del concepto de número real en la escolaridad. Capítulo 1. [Trabajo de pregrado, Universidad del Valle]. Funes.

¿Cuáles son las características fundamentales de los números reales que los conceptualizan? ¿Cuáles de estas son imprescindibles abordar en la enseñanza de secundaria? Explicar.

- La inconmensurabilidad condujo a la creación de los números reales.

- La inconmensurabilidad da paso a un proceso infinito y de imposible corroboración, de esta manera se da paso a la irracionalidad o la “no razón”.

- La necesidad de medir magnitudes ha dado origen a los números racionales e irracionales.

- Los racionales no son suficientes para medir, ya que medir consiste en asignar a cada magnitud una cantidad numérica y existen magnitudes a las que no se les puede asignar una cantidad racional.

- Cantor probó que los números racionales son numerables y los números reales son no numerables.
- Dedekind que el conjunto de los números reales es continuo.
- La continuidad numérica o completez es la propiedad fundamental de los reales.

Creo que en la enseñanza de secundaria es imprescindible abordar características como la necesidad de medir magnitudes y la imposibilidad de esta acción si no se introducen números irracionales, además creo que es muy importante abordar la propiedad de la completez.

Rico, J. (2012). Algunas diferencias entre reales y racionales: un aporte a la comprensión del concepto de número real en la escolaridad. Capítulo 2. [Trabajo de pregrado, Universidad del Valle]. Funes.

¿Cuáles son las representaciones propias de los números reales? ¿Cuáles de estas son imprescindibles abordar en la enseñanza de secundaria? Explicar.

- Simbólicas
  - ✓ Escritura decimal
  - ✓ Escritura decimal exacta
  - ✓ Escritura decimal periódica pura
  - ✓ Escritura decimal no periódica
  - ✓ Escritura fraccionara
- Numeración de posición
- Escritura especial
- En la recta numérica

Me parece imprescindible el abordaje de los reales en su representación en la recta numérica, ya que esta permite ir incorporando poco a poco los conjuntos numéricos, para al final situar los números reales y dejarla “sin huecos”. Además, me parecen importantes las representaciones simbólicas ya que dicho abordaje permite relacionar a los números reales con otros conjuntos numéricos.

Grupo 5	**Cód.**	DD_teo

Pregunta	Texto
¿Cuáles son las características fundamentales de los números reales que los conceptualizan?	1. Romero, I. y Rico, L. (1999). Representación y comprensión del concepto de número real. Una experiencia didáctica en secundaria.
	1. Los sistemas de representación simbólica y gráfica: • El sistema de notación decimal.

	• El modelo de la recta numérica. 2. Las relaciones y correspondencias entre los elementos de los distintos sistemas de representación (decimal, gráfico, notaciones operatorias etc.) 3. Las actividades de formación, transformación, traducción y coordinación de representaciones asociadas a estos sistemas. 4. La capacidad de los números reales para representar tanto racionales como irracionales. 5. La completitud.
	2. Montoro, V. (2017, del 10 al 14 de julio). El número real y la recta. Comprensiones de estudiantes secundarios y universitarios [comunicación breve]. *VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*
	Completitud: Los números reales incluyen a los números racionales (fracciones) e irracionales. El conjunto de los números reales se considera "completo" en el sentido que no hay números que le "falten". Continuidad: La recta numérica representa de manera continua a los números reales, sin "agujeros" o interrupciones. Densidad: Entre cualquier par de números reales existe otro número real. Esto implica que hay infinitos números en cualquier intervalo. Cardinalidad: A pesar de que los números reales son infinitos, su cantidad es mayor a la de los números naturales. Es decir, el infinito no es único.
	3. Mora, L. C. y Torres, J. A. (2004). Concepciones de estudiantes de licenciatura en matemáticas sobre números reales.
	Continuidad: Los números reales forman un conjunto con la propiedad de ser continuo, es decir, entre dos números reales cualesquiera siempre existen otro número real. Esta propiedad refleja la continuidad de la recta numérica. Orden: Existe una relación de orden entre los números reales. Dados dos números reales, uno es menor, mayor o igual que el otro. Densidad: El conjunto de los números reales es denso, significa que entre dos números reales distintos siempre hay otro número

	real. No existen "huecos" entre los números reales. Completitud: Contiene a los números racionales y también a todos los irracionales. Propiedades algebraicas: Cierre bajo las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división. Estructura de cuerpo ordenado completo: Forman un cuerpo con las operaciones aritméticas, cumplen los axiomas de orden y además son completos respecto a las propiedades anteriores.
	4. Rico, J. (2012). Algunas diferencias entre reales y racionales: un aporte a la comprensión del concepto de número real en la escolaridad.
	Completitud: Los números reales no dejan "huecos" en la recta numérica. Entre dos números reales siempre existe otro número real. No numerabilidad: El conjunto de los números reales posee una cardinalidad mayor a la de los números naturales. No se puede establecer una correspondencia biunívoca entre los naturales y los reales. Densidad: Entre dos números reales cualesquiera, siempre existe otro número real. Al igual que los racionales, los reales son densos, pero a diferencia de aquellos también son completos. Estructura de cuerpo ordenado completo: Los números reales conforman un cuerpo con las operaciones algebraicas usuales de adición, multiplicación, división. Además, tienen definida una relación de orden total que permite siempre comparar y ordenar dos números reales. Propiedades topológicas: Derivadas de la completitud y el orden, como la propiedad de los supremos (todo subconjunto no vacío acotado superiormente posee supremo), la propiedad de la bisección (todo intervalo contiene un punto que lo divide en dos subintervalos de igual longitud) y la propiedad del máximo (toda función continúa definida en un intervalo cerrado alcanza valores máximo y mínimo).
Pregunta	Texto
¿Cuáles de estas son imprescindibles abordar en la enseñanza de secundaria?	1. Romero, I. y Rico, L. (1999). Representación y comprensión del concepto de número real. Una experiencia didáctica en secundaria.

	Consideramos que los sistemas decimal y gráfico son herramientas importantes. Ayudan a entender la notación decimal infinita y cómo representar números en fracciones y en la recta numérica. Es crucial diferenciar números racionales e irracionales usando estas representaciones. Practicar traducir entre ellas refuerza la idea de que distintas formas pueden representar el mismo número real
	2. Montoro, V. (2017, del 10 al 14 de julio). El número real y la recta. Comprensiones de estudiantes secundarios y universitarios [comunicación breve]. *VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*
	Se deberían tratar: La densidad es una noción intuitiva cercana, que puede trabajarse identificando números entre otros dados, o viendo que siempre se pueden encontrar decimales entre dos números. La completitud, si bien es más abstracta, da el marco global de que no faltan números reales en la recta numérica. Permite diferenciar que los racionales "no alcanzan" para llenar la recta, introduciendo sutilmente la existencia de irracionales. En cambio, las nociones de continuidad y cardinalidad son muy abstractas para el nivel secundario o eso consideró.
	3. Mora, L. C. y Torres, J. A. (2004). Concepciones de estudiantes de licenciatura en matemáticas sobre números reales.
	Orden: Es fundamental que los estudiantes puedan ordenar números reales, compararlos y representarlos sobre la recta numérica. Esto es básico y fundamental para el aprendizaje de desigualdades, intervalos, valor absoluto, etc. Densidad: La idea de que entre dos números reales siempre hay otro es importante para construir la noción de continuidad. Se puede intuir con ejemplos entre enteros, racionales e irracionales. Completitud: Explicar que los reales incluyen a los racionales (fraccionarios) y también a los irracionales da una visión más completa del sistema numérico. Operaciones y propiedades algebraicas: Las operaciones con números reales y sus propiedades (conmutativa, asociativa, distributiva, etc.) son indispensables para álgebra y cálculos.
	4. Rico, J. (2012). Algunas diferencias entre reales y racionales: un aporte a la comprensión del concepto de

	número real en la escolaridad.
	Esta noción (completitud) subraya la continuidad de los números y su distribución en la recta y se introduce la idea de no numerabilidad para mostrar que la cantidad de números reales supera a la de los números naturales, ofreciendo una primera visión de la infinitud de los números reales en comparación con los naturales. Destacaríamos también la estructura de cuerpo ordenado completo de los números reales, destacando su capacidad para formar un cuerpo con operaciones como suma, multiplicación y división. Además, se enfatiza la existencia de una relación de orden total entre ellos, permitiendo comparar y operar con estos números en diversos contextos matemáticos.

Grupo 6	**Cód.**	MB_teo

Romero, I. y Rico, L. (1999). Representación y comprensión del concepto de número real. Una experiencia didáctica en secundaria. *Revista Ema*, *4*(2), 117-151.

1. ¿Cuáles son las características fundamentales de los números reales que los conceptualizan? ¿Cuáles de estas son imprescindibles abordar en la enseñanza de secundaria? Explicar.

- Se presentan la completitud que se tiene al tener el sistema numérico de los racionales e irracionales.

- Se presenta la capacidad de representarse (números racionales e irracionales) de diferente manera dependiendo de su uso. Lo que funciona para explicar la relación entre diferentes representaciones (por ejemplo, fracción y decimal).

- La continuidad de los números al representarse como una recta.

En este texto mencionan una característica que se me hace esencial abordar en la enseñanza, la relación entre diferentes representaciones de un mismo objeto matemático, en este caso de un número. Lo que permite que el estudiante conecte ideas y que estas representaciones no queden aisladas, sino que le dé un sentido a su representación con respecto a su uso y practicidad.

2. ¿Cuáles son las representaciones propias de los números reales? ¿Cuáles de estas son imprescindibles abordar en la enseñanza de secundaria? Explicar.

- Durante el texto nos menciona el tipo de representación simbólica que denotan como la notación decimal (también incluye fracciones, raíces y expresiones algebraicas)
- Durante el texto nos menciona el tipo de representación gráfica que notan como la denotan como el uso de la recta numérica (Estable una relación uno a uno entre cada punto y numero del sistema a través de longitudes de la recta).

Me parece importante abordar las dos representaciones durante la enseñanza en la secundaria ya que nos dan relaciones entre representaciones (simbólica) y permiten una mayor comprensión del objeto matemático al presentarse de otra manera (Gráfica). Su uso es complementario para entender el objeto matemático con mayor facilidad.

Montoro, V. (2017, del 10 al 14 de julio). El número real y la recta. Comprensiones de estudiantes secundarios y universitarios [comunicación breve]. *VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*, Madrid, España. http://funes.uniandes.edu.co/18444/

1. ¿Cuáles son las características fundamentales de los números reales que los conceptualizan?

¿Cuáles de estas son imprescindibles abordar en la enseñanza de secundaria? Explicar.

- En el texto nos menciona el termino completitud y continuidad al trabajar las tareas con rectas se refiere al que en esta no falten elementos, es decir no es a trozos la recta sino continua por lo tanto los reales cumplen estas características.

- Durante la tarea 3 diferentes estudiantes nos hablan de que siempre entre dos números habrá un número de elementos (algunos estudiantes dicen que son números finitos otros afirman que son infinitos), lo que se le atribuye la característica de la densidad.

En general son imprescindibles tareas que contribuyan a la identificación de estas dos características en el sistema numérico, ya que son elementos que los puedes diferenciar de los anteriores, y que continúan con la línea de lo que se ha aprendido con los anteriores sistemas numéricos.

2. ¿Cuáles son las representaciones propias de los números reales? ¿Cuáles de estas son imprescindibles abordar en la enseñanza de secundaria? Explicar.

    - Como primer momento es importante usar la representación decimal de los números para encontrar un flujo lógico al conectarlo con los números racionales e irracionales, lo que permite al estudiante identificar los números reales al ya reconocerlos con anterioridad.

    - Es importante conectar con otras representaciones de los números, es decir fracciones raíces, etc. Lo que permite entender al estudiante que pertenecen al mismo sistema numérico y lograr su completitud.

    - En las tareas que se proponen es muy usada la recta numérica, en la cual es realmente intuitiva para ver las características nombradas anteriormente. También es un elemento que ya es conocido por el estudiante lo que permite que se pueda familiarizar más con el objeto matemático.

Mora, L. C. y Torres, J. A. (2004). *Concepciones de estudiantes de licenciatura en matemáticas sobre números reales*. Secciones 3.2. y 3.3. [Trabajo de maestría, Universidad Pedagógica Nacional]. Funes. http://funes.uniandes.edu.co/11142/ .

1. ¿Cuáles son las características fundamentales de los números reales que los conceptualizan? ¿Cuáles de estas son imprescindibles abordar en la enseñanza de secundaria? Explicar.

    - En el texto nos mencionan que para Cantor y Dedekind la recta era un modelo adecuado para representar tanto la continuidad y a su vez la completitud de los números reales. La cual permitía diferenciarlos de los demás sistemas numéricos.

    - Al tratarse de la representación de la recta también nos habla sobre la densidad de los números reales, al tratarse de una recta continua no existirán vacíos entre esta.

    - Dedekind afirma que en los números reales esta la tricotomía que proporciona un orden al sistema numérico.

En este caso se introduce el orden que no me parece tan imprescindible a la hora de crear tareas con relación a este, ya que es un concepto que se ha manejado con los sistemas numéricos anteriores por lo que puede transcender a este con facilidad, lo que se debería tener en cuenta es su completitud que puede cambiar términos de este.

2. ¿Cuáles son las representaciones propias de los números reales? ¿Cuáles de estas son imprescindibles abordar en la enseñanza de secundaria? Explicar.

- Durante los siglos VI a.C hasta XIX se mantuvo la representación geométrica que mantenía diferentes problemáticas por los matemáticos que la usaban en la época.

- Se presentan representaciones de tipo simbólico como las expresiones en forma de fracción y radicales.

- Los números reales varían según la teoría, como para Dedekind son cortaduras, Cauchiy sucesiones, Cantor intervalos, etc. Pero todas simbólicas.

Se abordaría la representación geométrica para mostrarle al estudiante una parte de historia de donde surge el objeto matemático y para tener otra visión de este, pero en general no se tomaría en cuenta las de los autores por el nivel de dificultad y el interés de los estudiantes.

Rico, J. (2012). *Algunas diferencias entre reales y racionales: un aporte a la comprensión del concepto de número real en la escolaridad*. Capítulo 1 y 2. [Trabajo de pregrado, Universidad del Valle]. Funes. http://funes.uniandes.edu.co/10758/.

1. ¿Cuáles son las características fundamentales de los números reales que los conceptualizan? ¿Cuáles de estas son imprescindibles abordar en la enseñanza de secundaria? Explicar.

- En el texto nos menciona el termino completitud y continuidad (En este texto mencionan que Dedekind lo demuestra) al trabajar las tareas con rectas se refiere al que en esta no falten elementos, es decir no es a trozos la recta sino continua por lo tanto los reales cumplen estas características.

- Se presenta la no numeralidad donde Cantor demuestra que su cardinalidad es distinta a los números racionales y tampoco se puede establecer una relación de conteo con los números naturales.

- Nos establece la relación de que entre dos números reales siempre habrá otros números reales, que era algo que aún no se podía establecer entre los otros sistemas numéricos. Se le denomina la densidad.

La no numeralidad me parece una característica importante sobre el sistema de los números reales, pero no sabría la forma de enseñarlo en secundaria da tal forma que se más comprensible y llena de significado para los estudiantes, por lo que no sabría si es acertado enseñarlo o no durante la secundaria.

2. ¿Cuáles son las representaciones propias de los números reales? ¿Cuáles de estas son imprescindibles abordar en la enseñanza de secundaria? Explicar.

- Se presentan representaciones de tipo simbólico como las expresiones en forma decimal (periódica y no periódica) como fracción y radicales.

- La recta numérica, en la cual es realmente intuitiva para ver las características nombradas anteriormente. También es un elemento que ya es conocido por el estudiante lo que permite que se pueda familiarizar más con el objeto matemático. En este caso ya introduce intervalos.

Las dos representaciones van en concordancia y al tiempo para entender el objeto matemático, en este caso mencionan intervalos que va a facilitar el proceso de aproximación lo que puede llegar a

entender de mejor manera la recta numérica y sus divisiones.

ANEXO H – HERRAMIENTA ANALÍTICA 1

Este anexo se encuentra en los documentos nombrados como los *códigos de cada estudiante* en la carpeta nombrada como *Anexo H – Depuración*.

ANEXO I – HERRAMIENTA ANALÍTICA 2 Y 3

Este anexo se encuentra en el documento *Anexo I - Herramienta para análisis.xlsx*, el cual cuenta con una hoja de cálculo para cada estudiante (nombrado con el código dado) y una hoja nombrada Herramienta, en donde se podrá encontrar la Herramienta 3.