

Una propuesta para la enseñanza de la relatividad y las lentes gravitacionales a través de un aplicativo de modelación y simulación.

Trabajo para la obtención del título de Licenciado en Física

Autor: Elkin Andrés Galindo Galindo

Línea de Investigación de Enseñanza de la Física y su Relación Física Matemática

**Facultad de Ciencia y Tecnología
Departamento de Física
Universidad Pedagógica Nacional
2024**

Una propuesta para la enseñanza de la relatividad y las lentes gravitacionales a través de un aplicativo de modelación y simulación.

Trabajo para la obtención del título de Licenciado en Física

Autor: Elkin Andrés Galindo Galindo

Asesor: Víctor Andrés Heredia Heredia

**Línea de Investigación de Enseñanza de la Física y su
Relación Física Matemática**

Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de Física

Universidad Pedagógica Nacional

2024

Tabla De Contenido

Introducción	7
Contextualización Del Problema	8
Objetivos	10
<i>Objetivo General</i>	<i>10</i>
<i>Objetivos Específicos</i>	<i>10</i>
Antecedentes	10
En Camino Hacia Las LG	13
¿Caminos Planos O Curvos?	13
No Siempre En Línea Recta	16
Con La Luz Se Mide.....	18
Lentes En El Universo.....	20
<i>¿Qué son?.....</i>	<i>20</i>
<i>Lentes Gravitacionales Fuertes.....</i>	<i>22</i>
<i>Qué Puedo Hacer Con Las Ecuaciones.....</i>	<i>39</i>
Un Aplicativo Para Simular LG	41
Primero Modelar, Después Simular	41
La Base Es Lenstronomy	43
Módulos Para Un Aplicativo	44
Hagamos Una LG.....	53
LG En El Aula	53
A Qué Se Quiere Llegar.....	60
Conclusiones	62
Proyecciones.....	64
Anexos	65

Anexo 1	65
<i>Código Fuente.....</i>	<i>65</i>
Anexo 2	69
Anexo 3	85
<i>Código Fuente - Aplicativo.....</i>	<i>85</i>

Tabla de Figuras

Figura 1: Espacio plano y curvo.....	14
Figura 2: Deflexión de la luz.....	16
Figura 3: Deflexión según Cavendish y Soldner.....	17
Figura 4: Lente de múltiples imágenes.	21
Figura 5: Fuente a diferentes distancias.....	23
Figura 6: Cuáasar múltiple.....	24
Figura 7: Configuración básica de una lente gravitacional.....	25
Figura 8: Esquema anillo de Einstein.....	28
Figura 9: Radio de Einstein y lente gravitacional.	29
Figura 10: Magnificación de una fuente.....	31
Figura 11: Haz de luz y frente de onda.....	34
Figura 12: Retardo Temporal Geométrico.	34
Figura 13: Módulo LensModel.	45
Figura 14: Módulo LensModel Solver.	46
Figura 15: LightModel.....	46
Figura 16: PointSource.....	47
Figura 17: Data.....	47
Figura 18: Data.psf.....	48
Figura 19: ImSim.	48
Figura 20: LensPlot - Modelación.....	49
Figura 21: LensPlot - Simulación.....	50
Figura 22: Masa puntual.....	50
Figura 23: Masa puntual simulada.....	51

Agradecimientos

Quisiera agradecer principalmente a Dios por permitirme vivir esta hermosa experiencia, guiándome en cada paso y dándome la fortaleza para terminar de forma exitosa mis estudios.

*También quiero dedicar este trabajo a toda mi familia, pero en especial a mi **mamá**, por su apoyo incondicional en los momentos más difíciles, por estar siempre a mi lado, brindándome todo su amor, comprensión y confianza cuando más lo necesitaba. Agradezco profundamente a todos aquellos que me ofrecieron palabras de aliento y fuerzas para no desfallecer durante todos estos años: amigos, compañeros y docentes que hicieron posible que hoy pueda celebrar este logro.*

Este trabajo es una muestra tangible de mis habilidades y capacidades, desarrolladas a lo largo de estos años. Pero, también representa un testimonio de que la perseveración y la determinación permiten alcanzar metas significativas, incluso frente a las adversidades que en la vida se pueden encontrar.

Introducción

En el presente trabajo, se tiene como intencionalidad mostrar el desarrollo de una investigación orientada a la elaboración de una propuesta para la enseñanza de la relatividad mediante el estudio de las lentes gravitacionales y el uso de un aplicativo que logre visualizar el fenómeno de lente. Para la realización de la propuesta de enseñanza y la construcción de un aplicativo, fue necesario abarcar tanto aspectos conceptuales que describen y componen al fenómeno de lente como aspectos prácticos en relación con el uso de un lenguaje de programación. El trabajo realizado se encuentra dividido en cinco capítulos descritos a continuación:

En el Capítulo 1, se presenta una contextualización del problema que se busca abordar, así como las ideas que inspiraron la realización del trabajo. Además, se presenta la pregunta central de la investigación, los objetivos que se pretenden alcanzar a lo largo del estudio, y se destacan los trabajos previos que sirven como antecedentes y respaldan la viabilidad de la investigación.

En el Capítulo 2, se desarrollan de manera conceptual elementos entorno a la geometría del espacio, las trayectorias de los haces de luz, la distancia que hay entre cuerpos y el fenómeno de lente gravitacional. Con dichos elementos, se logra describir el espacio en el que suceden los eventos físicos, el tipo de trayectos que toman los cuerpos, la estimación de distancias por medio de la luz y la formación de imágenes a partir de cuerpos masivos y alineaciones entre cuerpos.

En el Capítulo 3, se realiza una descripción de los módulos y funciones optados para construir un aplicativo que logre modelar y simular un fenómeno de lente a partir de parámetros en relación con las distancias entre cuerpos y su alineación sobre un mismo eje óptico. En esta descripción, son mencionados las diferencias entre modelar y simular y señalados las funciones que cumplen cada módulo para obtener una visualización del fenómeno.

En el Capítulo 4, se presentan los tres momentos en los que se dividen la propuesta de enseñanza, en los cuales son señalados los objetivos que tiene cada actividad diseñada, una descripción general de la misma y aquellos resultados esperados al termino de esta. También son mencionadas algunos objetivos o intenciones que se pretenden cumplir al finalizar propuesta.

En el Capítulo 5, se presentan aquellas conclusiones y reflexiones a las que se llegaron, así como también, las perspectivas futuras que pueden ampliar los alcances de la propuesta y complementar el aplicativo que fueron elaborados.

Contextualización Del Problema

Un escenario habitual que puede observarse en las aulas de clase es el reducido interés que muestran los estudiantes hacia las asignaturas de ciencias. Lo anterior, puede ser debido a los recursos usados para su enseñanza y lo poco atractivo que son para los jóvenes. De acuerdo con Carneiro et al. (2021), en algunas clases magistrales no se llevan experimentos interactivos que puedan captar la atención o curiosidad del estudiante por la falta de capacitación de los maestros o los recursos limitados que pueden tener.

Hoy en día, existen diversas maneras de acercar a los estudiantes al estudio de las ciencias y ejemplificar escenarios en los que desempeñan un papel fundamental. Un ejemplo de esto es la utilización de películas o libros de divulgación científica en el aula, que presentan teorías ampliamente aceptadas y respaldadas por un numerosos científicos. Estos recursos pueden ser debatidos en clase, lo que contribuye a despertar el interés de los estudiantes por la ciencia.

Algunos ejemplos que evidencian y reúnen temáticas pertenecientes a la física moderna y que puede ser llevados a las aulas son Interstellar, Cosmos, Einstein and Eddington, Astrofísica para Gente con Prisa, entre otros. Dichos ejemplos hacen un gran esfuerzo en mostrar una cara distinta de la ciencia y así mismo, incentivar a su estudio sin mostrar la tradicional clase de tablero que reciben muchos de estos.

Por otro lado, en la Licenciatura en Física en el Departamento de Física (DFI) de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN), hay pocos espacios o cursos donde se estudian temas que involucren fenómenos de la física moderna como agujeros negros, materia y energía oscura, física de partículas y gravedad cuántica. Estos campos de estudio hacen parte de los grandes desafíos en las ciencias que aún no se resuelven y que buscan dar aportes a cuestiones como, detectar objetos lejanos, inferir la distribución de la masa en el cosmos, encontrar exoplanetas, medir la distancia a un cuásar, etc.

Es importante generar espacios para discutir y divulgar temas como seminarios de investigación, talleres, simposios, conferencias y/o similares; así promover la investigación y estudio de temas más complejos apoyados por los cursos del currículo.

Los lentes gravitacionales (LG) son también una temática sin un curso centrado exclusivamente a su estudio en el DFI y que, por sus pocas observaciones, podría considerarse

como un campo de estudio relativamente nuevo en la física, aunque se sospechaba de su existencia desde 1704 cuando Isaac Newton formula la posibilidad de que los cuerpos actuaran sobre la luz (Dodelson, 2017). El fenómeno tiene un amplio rango de aplicaciones en las que destaca la magnificación de cuerpos a grandes distancias o la observación de múltiples imágenes que permitan estudiar la estructura del universo.

Los LG al ser uno de los resultados predichos por el mismo Albert Einstein en su Teoría General de la Relatividad (TGR) puede abordar otras temáticas que son vistas en clases de relatividad en el DFI como, la geometría y deformación del espacio, la dilatación del tiempo, entre otros. Al hacer uso de este resultado podrían recopilarse y evidenciarse la relación entre los aspectos teóricos estudiados y la formación de fenómenos físicos que se derivan de la teoría.

Los LG son una forma de explicar y vincular temas estudiados durante los cursos de relatividad y los resultados que surgieron de esta teoría, como el concepto de espacio, su deformación y la deflexión de la luz. Dicho esto, en el DFI se pueden incluir más estrategias para aclarar o mostrar los resultados que la relatividad trajo y de esta forma, hacer las clases más enriquecedora y significativas para los procesos formativos de los estudiantes. Es entonces que el siguiente trabajo gira en torno a la pregunta:

¿Cómo abordar las lentes gravitacionales en un curso de relatividad para la comprensión del concepto de espacio apoyado con un aplicativo de modelación y simulación?

Objetivos

Objetivo General

Realizar una propuesta de estudio entorno a las lentes gravitacionales para la comprensión del concepto de espacio apoyado con un aplicativo de modelación y simulación.

Objetivos Específicos

- Comprender los aspectos relevantes que caracterizan al espacio en el que se desarrolla el fenómeno de lente gravitacional desde la teoría general de la relatividad.
- Construir un aplicativo en Python que permita modelar y simular una lente gravitacional, a partir de parámetros que indican la posición de los cuerpos en el espacio.
- Diseñar una propuesta de enseñanza en la que se abarquen características del espacio y su relación con el fenómeno de lente gravitacional con apoyo del aplicativo.
- Realizar una serie de discusiones y conclusiones alrededor de los alcances, posibilidades y ajustes entorno a la propuesta de estudio de las lentes gravitacionales.

Antecedentes

Para esta investigación, es necesario referenciar distintos trabajos investigativos en campos como la simulación y modelación de fenómenos físicos, la enseñanza de la física con herramientas tecnológicas y el estudio de las LG con software especializados. Las características de los trabajos descritos son el uso de un lenguaje de programación para simular o modelar ciertos escenarios físicos, un amplio marco conceptual entorno al fenómeno de lente y realizar aportes en los procesos de aprendizaje y comprensión en temáticas de la física moderna. Dichos trabajos reúnen aspectos que en conjunto cumplen con las expectativas del trabajo en desarrollo y el valor disciplinar y pedagógico que puede tener.

En el trabajo investigativo elaborado por Garzón (2014), se pretende realizar una propuesta de aprendizaje que permita generar interés a los estudiantes de último grado de colegio entorno al movimiento planetario. Dicho trabajo expone algunas generalidades del movimiento planetario desde una perspectiva clásica (geocentrismo, heliocentrismo, leyes de Kepler, etc.) y desde la TGR. La visualización del movimiento planetario se realiza con el apoyo de un aplicativo diseñado y creado en C++, y cuenta con un módulo didáctico que se puede implementar junto a este. Lo anterior, permite establecer un marco de referencia en la que es posible estudiar un mismo

fenómeno desde dos perspectivas contrarias y, posteriormente, simularse con ayuda de una herramienta tecnológica que permita modificar parámetros como la masa, el radio y la velocidad de un cuerpo en órbita.

Durante el desarrollo del trabajo, se logra exponer cómo estas herramientas tecnológicas pueden implementarse para el estudio de fenómenos físicos y añadir un valor agregado en la enseñanza de la física. Con lo dicho anteriormente, este trabajo propondrá un esquema con el que se abordarían LG considerando aspectos como, el contexto histórico, sus nociones base y la manipulación de un programa capaz de ejemplificar los escenarios de estudio. Con esta investigación se comparten algunos objetivos para el presente trabajo, como manipular parámetros claves del fenómeno, simular los eventos que faciliten cómo se abordan las temáticas en relatividad y llevar al aula herramientas tecnológicas que apoyen el proceso de enseñanza.

Con el trabajo de Surpi (1997), se muestran algunos de los conceptos y nociones que resultaran relevantes para un estudio previo al fenómeno de lente, en esta descripción también se exponen parte de las características de este fenómeno, por ejemplo, sus tipos, efectos e imágenes características de este. Aunque el objetivo principal de dicho trabajo no es una caracterización en detalle del fenómeno de lente, en este se deducen y explican algunos efectos, en especial aquellos relacionados con lentes gravitacionales fuertes.

Dentro de esta descripción del fenómeno y sus causas, el trabajo presenta las ecuaciones que logran predecir efectos como retardo temporal, magnificación e imágenes múltiples que caracterizan a este tipo de lente. Lo anterior, resulta significativo para consolidar parte del marco teórico y las generalidades del fenómeno de lente. El trabajo también presenta un desarrollo teórico entorno a cómo se ven afectados las trayectorias de los haces de luz por estructuras a gran escala y algunos parámetros cosmológicos que logran ser derivados por medio del fenómeno de lente.

Un trabajo más enfocado a la modelación y simulación de observaciones reales es el realizado por Aristizábal Duarte (2021), en el que se estudia la reconstrucción de dos LG a partir de observaciones directa con la que se determina los perfiles de luz y masa de estos. En este trabajo se abordan nociones y conceptos base en torno a el fenómeno de lente, pero también hace una descripción de los modelos, algoritmos y software que permiten modelar y simular este tipo de fenómeno. Para dicha descripción, Aristizábal Duarte muestra los modelos más convencionales para recrear la masa de una lente de acuerdo con su simetría y distribución de masa, y expone el

modelo usado para la luz emitida por una galaxia. En la simulación, muestra la caracterización de las lentes, parámetros, procesos de imagen y algoritmos usados. Finalmente, se realiza una comparación entre los modelos de masa y luz usados para observaciones en órbitas y hechas desde la tierra.

Este trabajo contribuye un referente para identificar los requisitos necesarios para simular el fenómeno de lente, explorar los modelos que se asemejan a este, y así, diseñar una ruta metodológica para el uso del software *Lenstronomy*, implementándolo en el aula. Además, el trabajo ofrece de manera sintética los conceptos y nociones fundamentales para un primer acercamiento al estudio de las LG.

Por último, el trabajo realizado por Hurtado et al. (2010), muestra cómo desde una simulación interactiva y a partir de consideraciones clásicas es posible estudiar el fenómeno de LG. Este trabajo se desarrolla considerando los fundamentos de la Mecánica Clásica y la Óptica Geométrica, y para ello se estima el ángulo de deflexión y la formación de imágenes en el fenómeno de lente. Parte de los objetivos de este trabajo son dirigidos a mejorar la comprensión del fenómeno en los estudiantes a nivel universitario y fortalecer su capacidad de aprendizaje apoyado por simulaciones.

Por tanto, este trabajo servirá de referentes para diseñar una metodología de enseñanza a partir de conceptos y nociones abordados en relatividad y visualizarse en un software de simulación. El trabajo que se describe contiene algunas similitudes frente que se espera al concluir la investigación como, tener una mayor comprensión de los conceptos tratados en clases de relatividad o afín. La simulación es diseñada a partir de lenguaje de programación Java e implementando soluciones numéricas con el método Runge Kutta de cuarto orden.

En Camino Hacia Las LG

En esta sección se presentan aspectos necesarios para describir el concepto de espacio y el fenómeno de LG, centrados en cambiar trayectos por modificaciones en el espacio, la curvatura que la luz puede tomar, las distancias entre cuerpos en el espacio y las características que identifican al fenómeno de lente. Los aspectos, inicialmente se abarcan desde lo conceptual y luego se muestran las ecuaciones y efectos asociadas al fenómeno.

¿Caminos Planos O Curvos?

Desde una perspectiva local y despreciando aquellas fallas geológicas presentes en la Tierra es posible afirmar que su superficie es plana, pero para un observador que se ubica en la Estación Espacial Internacional dicha superficie es realmente curva. En este contexto, ¿Cuál de las observaciones describe mejor la superficie de la Tierra? Con el anterior escenario, se quiere poner en discusión qué geometría gobierna en el universo y cómo esta se relaciona con la luz.

Para empezar, hay que recordar que los axiomas y postulados de la geometría Euclídea fueron durante años las únicas reglas que permitieron medir el espacio y dentro de sus definiciones y nociones se usan elementos como líneas, puntos, ángulos y planos para caracterizar a este.

De acuerdo con Datri (2014), con los axiomas y postulados de la geometría Euclídea es posible derivar o extraer algunas propiedades intrínsecas que se dotaban al concepto de espacio. Por ejemplo, para los postulados de Euclides es posible extender líneas hacia el infinito y trasladar de un lugar a otras formas sin que estas sufran cambios significativos, dando a entender que el espacio en el que estos se sitúan y desarrollan los eventos es homogéneo, isótropo y continuo. Dichas propiedades permearon el concepto de espacio construido y descrito por Newton en su obra *Principia* y posteriormente así desarrollar sus leyes del movimiento. Es probable que Newton se haya visto influenciado por los tratados de Euclides y con ello, se encuentren similitudes en sus nociones de espacio (Datri, 2014).

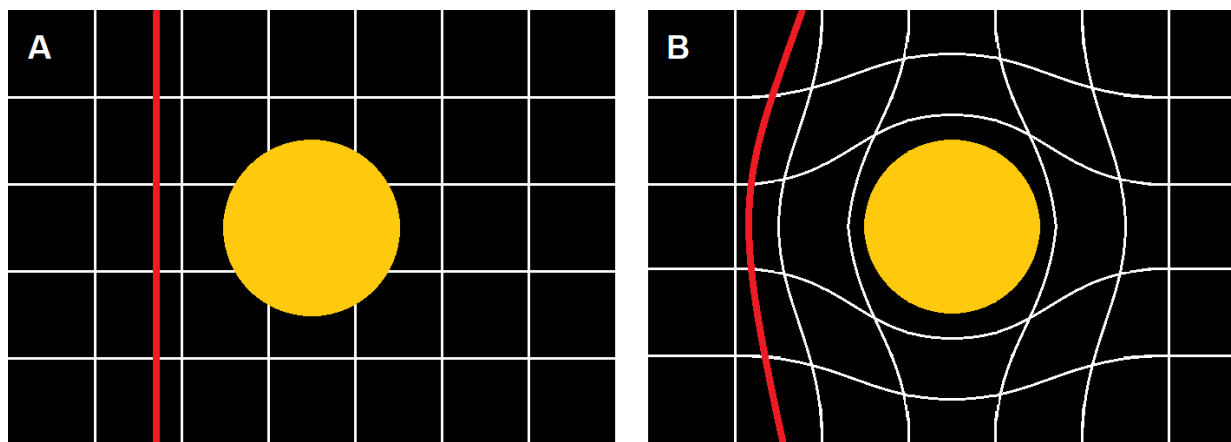
Con ayuda de la geometría Euclídea no solo se permitió construir y definir un primer concepto de espacio, sino también, establecer las bases que dieron origen a distintas geometrías en donde los ángulos internos de un triángulo no siempre suman 180 grados o en donde los trayectos rectos no son como comúnmente se conocen. A estas geometrías alternativas a la de Euclides se les denomina *geometrías no Euclídeas*. Para esas geometrías, los puntos o eventos del espacio

pueden conectarse espacialmente mediante geodésicas, que son el elemento análogo a las líneas rectas que describen aquellos trayectos más cortos entre dos puntos (Asimov, 2013).

Un ente o fenómeno físico que puede describir aquellos trayectos más cortos entre dos puntos es la luz, que como sabemos, para llegar de un punto a otro tiende a tomar trayectos rectos y que requieran un tiempo mínimo para hacerlo. Para la geometrías no Euclídeas sucede algo semejante, con la luz es posible describir aquellos trayectos más cortos, pero esta se encontrará condicionada a la deformación propia del espacio (Figura 1). Newton pensó en un primer momento en la idea de un cambio o modificación en los trayectos que toma la luz y a partir de ella otras personalidades estimaron el grado de desviación que un rayo (o haz) de luz podría sufrir si se acerca a un cuerpo masivo.

Los valores y conclusiones encontrados en relación con la desviación de un haz de luz no tuvieron un gran impacto en la comunidad científica debido a no encontrarse alineados con teorías que confirmaban la naturaleza ondulatoria de la luz (Laserna, 2012) o por no publicarse en medios que divulgaran dichos avances, pasando así desapercibido los hallazgos (Simionato, 2021).

Figura 1: Espacio plano y curvo.



Nota: En el recuadro A, los cuerpos u objetos presentes en el espacio no alteran la configuración geométrica en sus proximidades. En el recuadro B, cualquier ente compuesto con suficiente masa puede alterar la geometría del espacio y los trayectos originales de un cuerpo que pase en cercanías a este (línea roja). El recuadro A representa una geometría plana y el recuadro B una geometría curva. Elaboración propia.

Años más tarde, junto al desarrollo de la Teoría de la Relatividad y a nuevas nociones construidas sobre el concepto de espacio, serían retomados aquellos trabajos que describían el comportamiento de los haces de luz que pasan junto a un cuerpo masivo. En un primer momento con la Teoría Especial de la Relatividad (TER) se confirmaban las estimaciones sobre la desviación

de la luz, pero con un desarrollo más completo de la teoría (TGR) los valores serían corregidos y reemplazados.

Tras la llegada de la TGR, parte de las nuevas condiciones o ideas que se sobrepusieron a las teorías clásicas y que describían (de una forma un poco distinta a la inicial) el comportamiento de los haces de luz fueron el nuevo concepto de espacio establecido por Hermann Minkowsky y cómo este era susceptible a cambios debido a la presencia de cuerpos. Para Minkowsky, un punto se referencia en el espacio debía medirse con tres coordenadas espaciales y una coordenada temporal. Lo anterior, traería consigo dos implicaciones esenciales, primero; pasar de un espacio de tres a cuatro dimensiones y, segundo; que el espacio y el tiempo se transforman en una sola entidad conocida como *espacio-tiempo* (Minkowski, 2012).

Con aquellos elementos adoptados por la TGR que muestran a un espacio (relativo) deformado por cuerpos muy densos y el desarrollo de geometrías dominadas por geodésicas, es posible describir y explicar qué provoca el cambio en los trayectos que toma la luz y la desviación que se estima conforme a esta teoría.

La curvatura que toman los haces de luz ahora se puede entender como una consecuencia de la deformación que provocan los cuerpos masivos, esta deformación cambia el espacio en sus proximidades y los trayectos de aquellos entes que se mueven en cercanías a ellos. La geometría del espacio puede modificarse y condicionar el comportamiento de los entes que se mueven en esta configuración del espacio, como la luz bien lo demuestra (Einstein, 2002).

Por otro lado, un efecto que también sufrió cambios en la manera con la que se explicaba inicialmente y fue corregido haciendo uso de la TGR fue el perihelio de Mercurio, el cuál desde una perspectiva clásica, no lograba describir y explicar el comportamiento anómalo que se observaba en este planeta. Para esto también hubo que considerar que un cuerpo masivo modificaba la órbita o trayecto que describen alrededor de un cuerpo. De nuevo, al modificar el espacio se condiciona los trayectos que toman los entes (Einstein, 2002).

Los aspectos geométricos se convierten entonces en un elemento importante que permite una descripción más precisa de las observaciones de efectos como la desviación de la luz y los valores que miden el grado o proporción que este puede tener. Recordemos que estas nociones y

conceptos mencionados conforman el desarrollo de la TGR, pero a su vez, describen los resultados que derivan como el fenómeno de lente y la deflexión de la luz.

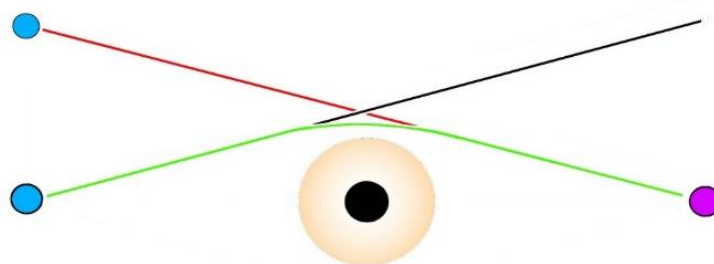
No Siempre En Línea Recta

En los trabajos realizados en el campo de la óptica y siendo un defensor del modelo corpuscular de la luz, Newton plantea a modo de pregunta la posibilidad de que los cuerpos puedan actuar sobre la luz a distancia (Newton, 1704). Con esta interrogante se empiezan a realizar cálculos y discusiones frente a cómo la trayectoria de la luz puede verse influenciada por la acción de los cuerpos.

Al hablar de una modificación en la trayectoria, se refiere a una curvatura tomada por la luz cuando se mueve en cercanías a un cuerpo masivo, a este efecto se le denomina *deflexión de la luz*. Si bien, Newton no proporciona ninguna respuesta que, de claridad a la interrogante inicial si fue el responsable de que otros se atrevieran a realizar dichos cálculos desde las ecuaciones y modelos propuestos por él para resolver dicha incógnita (Will, 1988).

Para comprender mejor la deflexión de la luz, es necesario abordar algunos aspectos teóricos importante sobre su comportamiento. Uno de ellos es reconoces que la luz no se desplaza únicamente de manera recta en el espacio y cumple con el principio de Fermat (El tiempo que toma la luz para llegar de un punto a otro es un mínimo (Stavroudis, 2012)). Además, se debe considerar que la luz podría seguir trayectorias curvas, manteniendo también un tiempo mínimo para llegar de un lugar a otro (Figura 2) (Petters et al. 2001).

Figura 2: Deflexión de la luz.



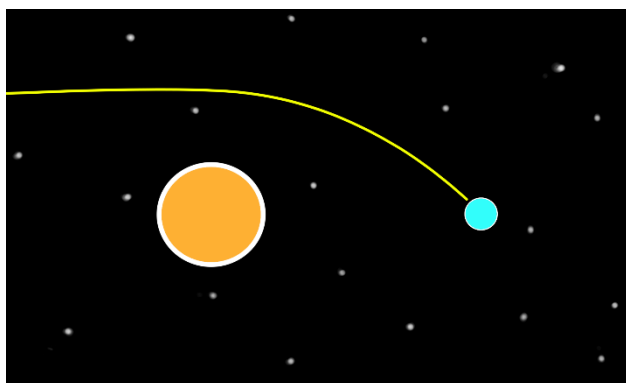
Nota: Un haz de luz (línea verde) que proviene y se desplaza inicialmente de forma recta desde una fuente lejana (esfera azul), se ve sometido a un cambio en su trayectoria debido a cuerpo masivo (esfera negra). Desde la perspectiva de un observador (esfera morada), la fuente lejana se ubica en una posición distinta a su original (esfera azul en la parte superior). La línea roja indica la línea de visión entre el observador y la posición aparente de la fuente y la línea negra el trayecto que el haz de luz tomaría sin la presencia de un cuerpo que modifique su trayecto inicial. Elaboración propia.

Otro aspecto para tener en cuenta es la noción que se tenían en la época respecto a la gravedad y cómo esta afectaba a todos los cuerpos sobre la tierra. De acuerdo con lo anterior, la

luz no debe ser la excepción y para que esta sea influenciada por la gravedad debía tener una masa definida o tan pequeña que tienda a cero, de esa forma la interacción que tiene la luz con un cuerpo masivo podría simplificarse a un problema de dos cuerpos y usarse las ecuaciones de Newton (Aristizábal Duarte, 2021).

Con un escenario similar al anterior, personajes como Henry Cavendish (en 1784) y Johann Soldner (en 1801) se pensaron cómo podría ser esta deflexión de la luz y posteriormente realizar los primeros cálculos referentes al mismo. Según Will (1988), los cálculos de estos científicos consideran la teoría gravitacional de Newton y el modelo corpuscular de la luz, con los que encontrarían (ambos) un valor cercano a 0,875 segundo de arco (Figura 3), hallando así el grado de desviación de un haz de luz que se mueve en cercanías al Sol.

Figura 3: Deflexión según Cavendish y Soldner.



Nota: Esquema Ilustrativo que muestra como un haz de luz (línea amarilla) que proviene del infinito y converge en un punto de observación (círculo azul) es curvado por la acción gravitacional que se ejerce sobre el mismo (causada por círculo naranja). Elaboración Propia.

Algunos aspectos en común que comparten estas primeras estimaciones del ángulo de deflexión son las consideraciones geométricas que describen las trayectorias que toman los haces de luz. Para ambas personalidades, la luz se mueve por segmentos hiperbólicos y estos proviene de estrellas o fuentes muy lejanas, como si se trataran de haces que llegan desde al infinito hasta el punto de observación (Jaki, 1978; Simionato, 2021).

John Mitchell (en 1738) realiza un estudio sobre las interacciones entre luz y la gravedad, aunque no realizó cálculos sobre la deflexión de la luz, si expuso la idea de que la luz puede ser capturada por cuerpos muy densos, haciendo que esta no escape (Schaffer, 1979). Al mismo tiempo postuló un método que determinaba la masa de las estrellas siempre y cuando este sea un sistema binario y estimar la “disminución” de la velocidad de la luz que emite (Bartusiak, 2015). Mitchell argumentaba que esto sucedía en estrellas más grandes que el Sol (500 veces más) pero

igual de densas, lo que no permitía que la luz saliera del campo gravitacional de este y que estas no puedan ser observadas (Schaffer, 1979).

Es así como, Cavendish, Soldner y Mitchell hacen aportes y cálculos fundamentales para el estudio de la gravedad y la luz desde modelos y teorías aceptadas en la época. Por otra parte, un aspecto también importante para el estudio de los haces de luz y el espacio es la medición de las distancias entre los cuerpos que emiten y reciben estos haces. Dichas distancias no son estimadas con artefactos y escalas de uso convencional, pero a partir de agentes como la luz se logra determinar qué tan lejos o próximos podemos estar a un cuerpo.

Con La Luz Se Mide

En nuestra cotidianidad podemos realizar diferentes mediciones de las distancias a las que nos encontramos de los objetos que tenemos a nuestro alrededor o distancias de separación entre un punto y otro. Dichas distancias las podemos estimar por medio de artefactos de mediciones (reglas, cintas, etc.) y a partir de unidades de medida como, kilómetros, millas terrestres, yardas, entre otros. Para aquellos escenarios con distancias de gran magnitud, también se usan unidades dependientes de agentes externos como la luz.

Un ejemplo de lo anterior es la medición de la distancia entre el Sol y la Tierra, denominada *Unidad Astronómica* que corresponde al tiempo necesario para que la luz del Sol llegue a la Tierra (alrededor de 8,3 minutos luz). Con otras unidades similares también es posible establecer y conocer a que distancias nos encontramos de cuerpos celestes mucho más lejanos que el Sol. Un caso que ejemplifica lo anterior es la distancias que hay entre la Tierra y Alpha Centauri, la cual se encuentra a 4,36 años luz¹.

Con la luz, al igual que en el caso anterior, también puede obtener información sobre el desplazamiento que tienen los cuerpos con respecto a nosotros, este fenómeno es conocido como *desplazamiento al rojo (z)* y de forma indirecta podemos conocer la distancia a la que se encuentran los cuerpos en el espacio (Díaz, 2016). De acuerdo con Weinberg (1972), el desplazamiento al rojo es un fenómeno causado por el movimiento relativo entre la Tierra y los cuerpos celestes, el cual provoca un desplazamiento en las líneas espectrales al observar el espectro electromagnético

¹ Recordemos que con la magnitud “año luz” se está indicando cuan distante puede encontrarse un cuerpo si nos desplazáramos tan rápido como la luz, en ese caso nos tomaría 4,36 años luz o recorrer 41.2 billones de kilómetros.

de los cuerpos celestes, dichos espectros son comparados con los obtenidos en laboratorios que se encuentran en la Tierra y posteriormente, determinar la proximidad que estos tiene con respecto a la Tierra.

En este fenómeno, el desplazamiento de las líneas espectrales puede verse impulsado por tres diferentes mecanismos, los cuales se encuentran relacionados con el cambio de coordenadas de la fuente emisora y el observador, el potencial gravitatorio que tiene la fuente y la expansión del de universo (Ortiz & Ibarra-Castor, 2024). A partir de dichos mecanismos se diferencia el desplazamiento al rojo Doppler, desplazamiento al rojo gravitatorio y desplazamiento al rojo cosmológico respectivamente.

Por otra parte, a partir de este fenómeno, se pueden realizar diferentes análisis y deducciones, que permitan definir características o aspectos que identifiquen a un cuerpo celeste, por ejemplo, con el espectro observado es posible conocer su temperatura, composición química, masa y distancia a la que nos encontramos (Díaz, 2016).

De acuerdo con Congdon & Keeton (2018), hay tres formas de observar y mostrar cómo se relacionan los desplazamientos al rojo con las distancias que se tiene desde la Tierra con otros cuerpos celestes. Estas distancias se encuentran relacionadas con la expansión del universo (distancia comóvil), la luminosidad del objeto (distancia de luminosidad), y el tamaño con el que se observa en el cielo (distancia angular²).

Este último (y para fines del presente trabajo), es de gran importancia en el estudio de las LG, ya que, con ellas es posible estimar las separaciones entre una fuente, una lente y el observador a partir de los ángulos de desviación que sufren las imágenes (Petters et al., 2001).

La distancia diametral angular es la relación entre el tamaño real de los cuerpos y el tamaño aparentes que se logra observar desde la Tierra, dicha distancia también se encuentra relacionada con las distancias comóviles y de luminosidad (Hogg, 2000; Sánchez, 2009). De acuerdo con Trilleras (2011), la expresión que describe esta distancia varía con respecto al modelo del universo (universo plano, abierto o cerrado) y dependen de parámetros como el parámetro de Hubble.

² Distancia Diametral-Angular.

Es necesario resaltar que los espectros observados de los diferentes objetos distantes mantienen una proporcionalidad entre el desplazamiento al rojo y la distancias que se tiene con los cuerpos. Es decir, si se miden los desplazamientos al rojo de dos galaxias distintas y se determina que una de ellas tiene un desplazamiento mayor que la otra, la galaxia con un mayor factor se considera las más alejadas y con mayor distancia respecto a la Tierra.

Los desplazamientos al rojo son de utilidad para el estudio del universo, pero en especial para el fenómeno de LG, ya que estos sistemas se componen de una lente y una fuente lejana que (en el mejor de los casos) se superponen y generan imágenes aparentes. Cada una de estas imágenes tendrán espectros similares, pero este corresponde a siempre a una única fuente, el caso más representativo del escenario descrito es el sistema QSO 0957+561 en el cual se observa a un cuásar doble (Petters et al., 2001).

Lentes En El Universo

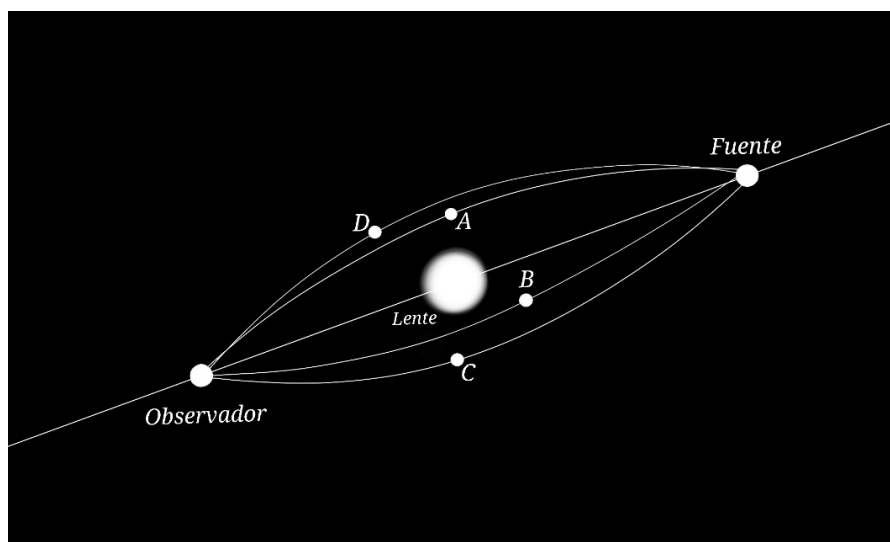
El fenómeno de LG es uno de los resultados derivado del desarrollo de la TGR que valida sus ideas más importantes entorno al espacio y la luz, este fenómeno permitió abrir un nuevo campo de estudio con relación a la luz y su comportamiento con otros entes. Cabe aclarar que este fenómeno no se refiere a una lente física o tangible como los que poseen distintos artefactos de uso común, sino a una interacción entre la luz y un cuerpo masivo que modifican el espacio a su alrededor. Aquellas semejanzas que si se comparten entre una lente común y el fenómeno en cuestión es observar cuerpos a grandes distancias, magnificar su imagen parcial o totalmente y hacer que converjan los haces de luz en punto definido.

¿Qué son?

Una LG es un fenómeno astrofísico que permite la observación de objetos a grandes distancias, generando desde el punto de vista de un observador una magnificación parcial o total de imágenes, un desplazamiento con respecto a su posición original y/o múltiples imágenes de un mismo cuerpo (Congdon & Keeton, 2018; Dodelson, 2017).

La observación de fuentes distantes por medio de LG implica que la luz emitida por la fuente sufra un cambio en su trayectoria al pasar por un cuerpo masivo que se interpone entre el observador y la fuente (Figura 4). Dicho cuerpo, modifica los posibles caminos que puede tomar la luz en su cercanía, provocando un cambio en el trayecto original que tenían los haces de luz emitidos desde la fuente (Dodelson, 2017).

Figura 4: Lente de múltiples imágenes.



Nota: Esquema en perspectiva de un fenómeno de lente en el que se generan cuatro imágenes (A, B, C, D) aparentes de una misma fuente al encontrarse alineado parcialmente con una lente y un observador. Elaboración propia.

Uno de los requisitos base para la observación de una LG es la alineación entre un observador, un cuerpo que modifique la trayectoria de la luz (cuerpo lente) y una fuente distante. Un ejemplo de lo anterior descrito es la deflexión de la luz captada durante la observación que Eddington realizó³. Dicho experimento requería observar, por medio de placas fotográficas, la posición de algunas estrellas ubicadas en el cumulo de las Hyades durante un eclipse solar y de esta forma, comprobar y observar el comportamiento de la luz de las estrellas cuando el Sol la eclipsa.

Las placas fotográficas que servirían de referencia para comprobar el desplazamiento de las estrellas serian tomadas días después del eclipse y con ellas verificar si hubo o no alguna deflexión de la luz en las estrellas. Luego de discriminar que observaciones y datos eran los óptimos para finalmente medir el ángulo de deflexión, se encuentra que este valor no se aleja del predicho con la TGR. Al realizarse el anuncio oficial de los resultados encontrados en la expedición y de presentar una evidencia a favor de la relatividad, algunos escépticos argumentaban que la observación hecha si mostraba que la luz puede curvarse, pero no mostraba de forma convincente a que se debía esa curvatura (Cowen, 2019).

³ Si bien, la configuración presentada en la observación no es una alineación perfecta entre la fuente, la lente y el observador, este escenario si se ejemplifican algunos aspectos que se involucran en el fenómeno de lente tales como, el desplazamiento de imágenes y una interacción entre un haz de luz y un cuerpo masivo.

Los resultados de la expedición de Eddington y en la que se confirmaba la deflexión de la luz, provocaron que los resultados y predicciones de la TGR se tomaran con mayor importancia y credibilidad. Una de las predicciones más importantes de esta teoría son las LG que, según Einstein, sería un fenómeno difícil de observar y del que no estaba del todo convencido de poder verse en algún momento (Einstein, 1936).

Décadas después, se observó el fenómeno en 1979, en el evento se captó el espectro visible de dos cuerpos celestes que coincidían entre sí, como si fueran dos objetos idénticos. Luego de realizarse otros estudios con técnicas complementarias, se logró determinar que estos dos espectros pertenecen a un mismo cuerpo y que su imagen se observara duplicada debido a la presencia de una galaxia que se interponía entre la fuente y la tierra (Congdon & Keeton, 2018).

Años después se logran registrar con mayor frecuencia LG que mostraban múltiples imágenes de este, y una mayor variedad de imágenes y efectos característicos del fenómeno de lente como: magnificaciones momentáneas, múltiples imágenes de un cuerpo y retardos temporales.

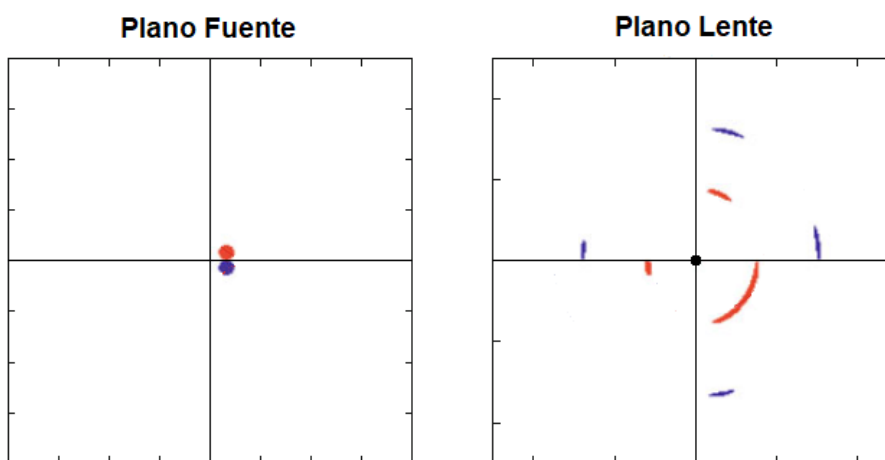
El fenómeno de lente se divide entre el régimen de lentes débiles y lentes fuertes, caracterizados por las llamativas imágenes que se generan y por los efectos y variedad de cuerpos celestes relacionados con cada uno de estos. Entre las aplicaciones más comunes que podemos encontrar en el estudio de las LG tenemos búsqueda de exoplanetas, distribución en galaxias, masa de cúmulos, estimación de materia oscura, entre otros (Congdon & Keeton, 2018).

Lentes Gravitacionales Fuertes

El fenómeno de LG es descrito por la deflexión que sufren los haces de luz tras una modificación de los trayectos originales que tienen y por la configuración o alineación entre una fuente, el cuerpo lente y un observador. Al hablar del régimen de las lentes gravitacionales fuertes (LGF), este tipo de lente es popularmente conocido por sus llamativas y pocas observaciones que muestran la formación de imágenes como, arcos, semi arcos, anillos e imágenes cuádruples que rodean al cuerpo lente responsable del fenómeno (Petters et al., 2001). Algunos de los cuerpos celestes con los que se encuentran relacionados este tipo de lente son galaxias, cúmulos de galaxias y cuásares, los cuales pueden tomar tanto el rol de fuente como el de cuerpo lente.

La formación de este tipo de lentes depende en gran medida de la densidad de masa que tienen los cuerpos que actúan como lente, pero también de su alineación casi perfecta entre los elementos que conforman al fenómeno de lente (Congdon & Keeton, 2018). Dichas magnitudes pueden mostrar una gran variedad de imágenes, ya que, tanto la masa como las distancias entre los entes involucrados podrán modificar en mayor o en menor medida el fenómeno de lente, provocando así una amplia gama de observaciones (Figura 5) (Petters et al., 2001).

Figura 5: Fuente a diferentes distancias.

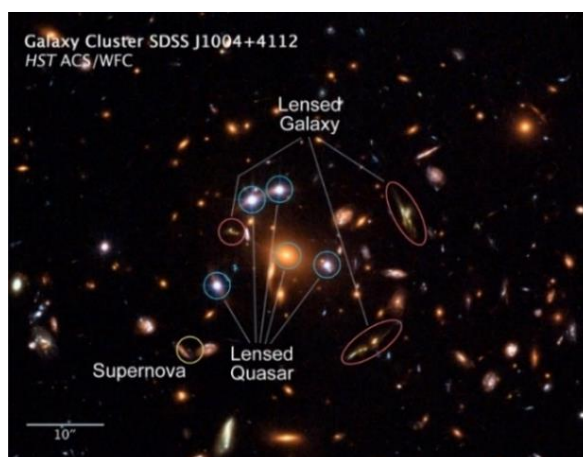


Nota: En el recuadro de la izquierda se muestran las ubicaciones de dos fuentes puntuales (punto rojo y azul) y en el recuadro de la derecha se observan sus imágenes deflectadas respectivamente. Las diferencias que se logran notar para las imágenes aparentes azules y rojas son producto de sus ubicaciones con respecto a la lente (punto negro) y que tan próximos están de él. Adaptado de Congdon & Keeton, (2018).

Las LGF son entonces un fenómeno que requiere de condiciones específicas para su observación como, su alineación, la distancia entre sus partes, la densidad de masa del cuerpo lente y su simetría⁴. Un ejemplo de este tipo de lente es la imagen tomada desde el Telescopio Espacial Hubble en la que se encuentra, cómo un cumulo de galaxias era capaz de generar cinco imágenes de un mismo cuásar ubicado detrás de este (Figura 6).

⁴ Los elementos mencionados también puede tomarse en cuenta para el fenómeno de lente en general. No es propio o exclusivo de las LGF.

Figura 6: Cuásar múltiple.



Nota: Cúmulo de Galaxias SDSS J1004+4112 en el que se observa a cinco imágenes de un mismo cuásar ubicado detrás del cúmulo. Créditos: ESA, NASA, K. Sharon (Universidad de Tel Aviv) y E. Ofek (Caltech).

Junto al régimen de LGF también se ven involucrados efectos con relación a la forma que toman las imágenes aparentes, la posición que adquieren con respecto al cuerpo lente y el tiempo que los haces de luz toman para llegar desde la fuente hasta el observador. Dichos efectos contribuyen con la estimación de varias magnitudes físicas como, la estimación de masa en los cuerpos lente, la medición del parámetro de Hubble, entre otros. De acuerdo con Schneider et al. (2006), si se logra aumentar el registro y observación de LGF podrán encontrarse mejores valores del parámetro de Hubble y cartografiar la masa en los alrededores de diferentes tipos de galaxias o cúmulos de galaxias.

Para mostrar algunas de las ecuaciones usadas en el estudio de LGF, se requiere presentar expresiones que determinan o predicen aspectos como, la forma de las imágenes aparentes, su posición con respecto al cuerpo lente y el tiempo de retardo apreciado entre imágenes individuales. Estas ecuaciones logran derivarse a partir del uso de métricas como, la métrica de Schwarzschild y bajo consideraciones en torno a la naturaleza del cuerpo o su simetría⁵ (Aristizábal Duarte, 2021).

Hasta el momento no se ha mencionado la ecuación que nos describe el grado de desviación (ángulo de deflexión) que tiene un haz de luz cuando su trayecto original se ve alterado por la deformación que un cuerpo produce en el espacio. Es importante mencionar que, en su momento, esta ecuación se desarrolló a partir de consideraciones clásicas como, la teoría corpuscular de la

⁵ En el trabajo realizado por Aristizábal Duarte (2021), se encuentran algunos desarrollos matemáticos que describen los casos emblemáticos que conforman a las LGF, para una descripción más detallada de las ecuaciones que describen a dicho fenómeno se remite a este trabajo.

luz y la Ley de Gravitación Universal, y que años más tarde, y junto a las revolucionarias ideas que la TGR muestra, el ángulo de deflexión ($\hat{\alpha}$) estimado inicialmente por Soldner (Ec.2.1) se diferencia con el encontrado por Einstein (Ec.2.2) en un factor de 2.

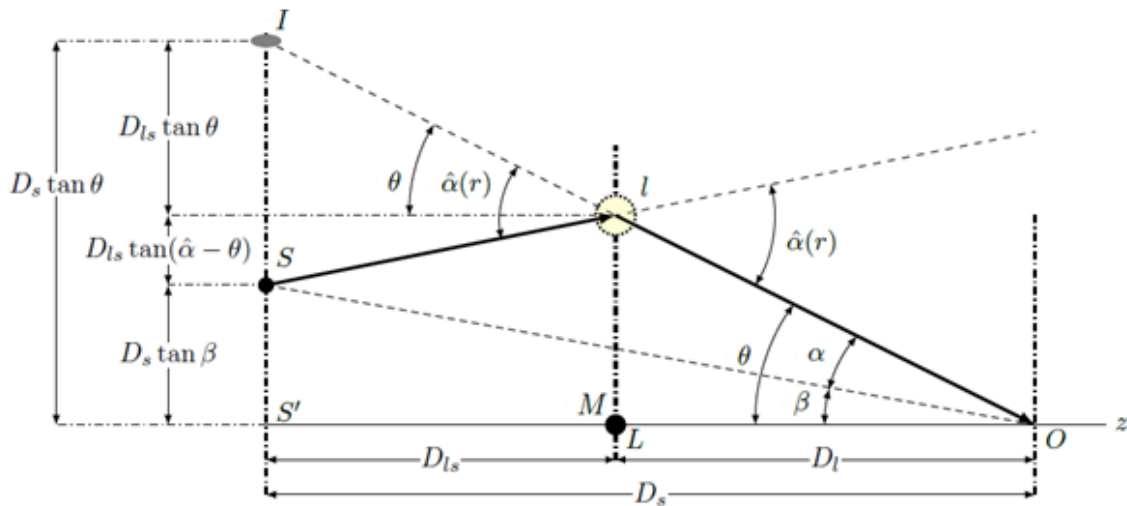
$$\hat{\alpha} = \frac{2GM_s}{c^2 r} \quad (\text{Ec. 2. 1})$$

$$\hat{\alpha}(r) = \frac{4GM_s}{c^2 r} \quad (\text{Ec. 2. 2})$$

Con las Ec.2.1 y Ec.2.2 se logran estimar el ángulo de deflexión para un haz de luz que pasa en cercanías al Sol, encontrándose así un valor de 0.83 y 1.75 segundos de arco respectivamente. Para dichas ecuaciones, se observa que magnitudes como, G (constante de gravitación universal), M (masa del Sol) y r (parámetro de impacto) se conservan en ambos casos. Según Aristizábal Duarte (2021), el valor estimado para la deflexión de un haz de luz (Ec.2.1) difiere del encontrado a partir de la Ec.2.2 por las geometrías que se adoptaron para su estimación.

En el estudio de las LGF (y en general el fenómeno de lente), es necesario caracterizar, describir y mostrar cómo es la configuración más típica y simple que se puede encontrar en un fenómeno de lente. La alineación (perfecta o no) entre la fuente, el cuerpo lente y el observador es importante, ya que, según el modo en que se ordenen, se podrán deducir relaciones trigonométricas que describan las distancias y ángulos de las posiciones intrínsecas de la fuente y sus imágenes aparentes (Figura 7).

Figura 7: Configuración básica de una lente gravitacional.



Nota: Esquema ilustrativo de un fenómeno de LG. En este se observa las ubicaciones y relaciones trigonométricas que se derivan de las posiciones entre la fuente (S), el cuerpo lente (L) y el observador (O). Para indicar la posición de dichos entes son usados los ángulos $\hat{\alpha}$, β , θ y α , y sus distancias que los separan. Las distancias D_s , D_l y D_{ls} son aquellas encontradas entre los planos observador - fuente, observador - lente y lente - fuente respectivamente. Tomado de Aristizábal Duarte (2021).

En la Figura 7 se puede apreciar un sistema de LG simple que describe el trayecto de los haces que son emitidos desde una fuente y llegan al observador (líneas oscuras que unen los puntos Sl y Io). Los haces de luz que viajan con una dirección inicial son redireccionados cuando estos llegan al punto de impacto l que se ubica en el mismo plano que el cuerpo lente (masa puntual M). Desde la perspectiva del observador y, si se extiende el haz de luz redireccionado, se observa una imagen aparente de la fuente en una posición distinta a la original. Es decir, los haces de luz que sufren un cambio en su dirección inicial y llegan al observador podrán generar imágenes aparentes de una fuente distante (I).

El caso más representativo de este tipo de lente y que requiere de una alineación casi completa es el anillo de Einstein (o anillo de Chwolson-Einstein), el cual se caracteriza por una imagen magnificada de la fuente⁶ alrededor de la lente. Su primera observación se realiza en el año 1987 por un grupo de científicos del MIT y dicho evento logra evidenciar lo que teóricamente se pensaba de la alineación entre los entes que conforman al fenómeno de lente (Petters et al., 2001).

A partir de las relaciones trigonométricas y los ángulos señalados⁷ en la Figura 7 es posible derivar una expresión que muestre las relaciones entre la posición de la fuente y el cuerpo lente, así como también, derivar efectos con relación a la ubicación de estos y una lente de masa puntual (Meneghetti, 2021). La posición de la imagen aparente con respecto al eje óptico (o eje z) que une a la lente y el observador puede describirse como:

$$D_s \tan \theta = D_{ls} \tan \theta + D_{ls} \tan(\hat{\alpha} - \theta) + D_s \tan \beta \quad (Ec. 2.3)$$

Si reordenamos la Ec.2.3 obtenemos que:

$$D_s \tan \beta = D_s \tan \theta - D_{ls} \tan(\hat{\alpha} - \theta) - D_{ls} \tan \theta \quad (Ec. 2.4)$$

Observe que los dos últimos factores de la expresión anterior corresponden a la suma de los segmentos $D_{ls} \tan(\hat{\alpha} - \theta)$ y $D_{ls} \tan \theta$ que se muestran en la Figura 7. De acuerdo con éste y

⁶ La magnificación o aumento del que se habla se produce de manera tangencial y radial, la cual será mencionada más adelante.

⁷ Ángulos correspondientes a los formados a partir de la imagen aparente que se observa (θ), la posición de la fuente (β), y ángulo de deflexión ($\hat{\alpha}$).

teniendo en cuenta la simetría del sistema, se puede apreciar que dicha suma corresponde al segmento total $D_{ls}\tan(\hat{\alpha})$. Si se reemplaza en la Ec.2.4 se obtiene que:

$$D_s \tan \beta = D_s \tan \theta - D_{ls} \tan(\hat{\alpha}) \text{ (Ec. 2.5)}$$

Al despejar de la Ec.2.5 el ángulo β y considerando que, para ángulos pequeños $\tan \theta \approx \sin \theta \approx \theta$, entonces tenemos como resultado:

$$\beta = \theta - \hat{\alpha} \frac{D_{ls}}{D_s} \text{ (Ec. 2.6)}$$

Usando la definición de *ángulo de deflexión reducido* (Meneghetti, 2021):

$$\alpha(\theta) \equiv \hat{\alpha} \frac{D_{ls}}{D_s} \text{ (Ec. 2.7)}$$

Y reemplazando en la Ec.2.6, finalmente se obtiene que:

$$\beta = \theta - \alpha(\theta) \text{ (Ec. 2.8)}$$

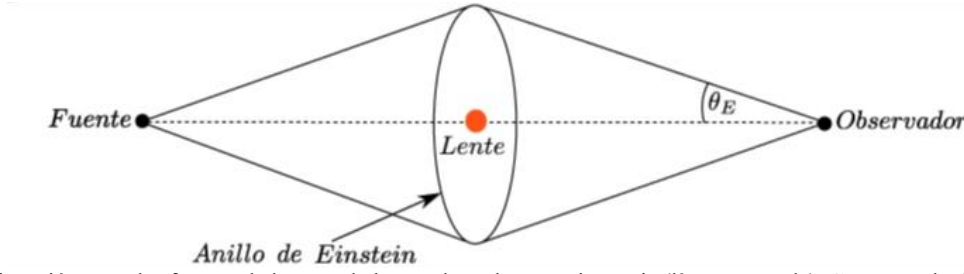
La Ec.2.8 se conoce como *ecuación de la lente* y es válida para modelos de masa simples como, masas puntuales y distribución de masa circularmente simétricas (Matarrese et al., 2011). De dicha ecuación, se logran desprender y estimar características propias del fenómeno de lente como, la magnificación que obtienen las imágenes aparentes, el número de imágenes que se puede observar y las posiciones que ocupan con respecto al cuerpo lente. Como se mencionó antes, el anillo de Einstein corresponde a un evento que solo pertenece al régimen de LGF, que puede describirse con la ecuación de la lente y mostrar algunas características de dicho evento.

Por ejemplo, si tanto la fuente, el cuerpo lente y el observador se encuentran ubicados sobre el mismo eje óptico, dicha configuración sugiere entonces que la posición de la fuente β sea igual o tienda a cero. Bajo estas consideraciones y reordenando la ecuación de la lente, encontramos que:

$$0 = \theta - \alpha(\theta) \quad \theta = \alpha(\theta) \text{ (Ec. 2.9)}$$

En este caso, nótese que el ángulo de deflexión es equivalente al ángulo que determina la ubicación de las imágenes aparentes en el cielo, pero la ubicación de dichas imágenes se encontrará extendida o alrededor del cuerpo lente (Surpi, 1997) (Figura 8).

Figura 8: Esquema anillo de Einstein.



Nota: Alineación entre las fuentes, la lente y el observador sobre un mismo eje (línea punteada). Como resultado se produce un anillo que rodea al cuerpo lente. Tomado de Villanueva (2015).

De la Ec.2.9 también puede substraerse otra expresión importante para el estudio de las LG relacionada con el anillo de Einstein, ya que señala aquella región en la que se presentará el fenómeno de lente (con mayor proporción) y las magnitudes sujetas a esta. Si haciendo uso del ángulo de deflexión reducido, la Ec.2.9 y se sustituye el parámetro de impacto (r) como: $r = D_l \theta$, se puede llegar a la expresión:

$$\theta = \frac{4GM}{c^2 \theta} \frac{D_{ls}}{D_l D_s} \quad (Ec. 2.10)$$

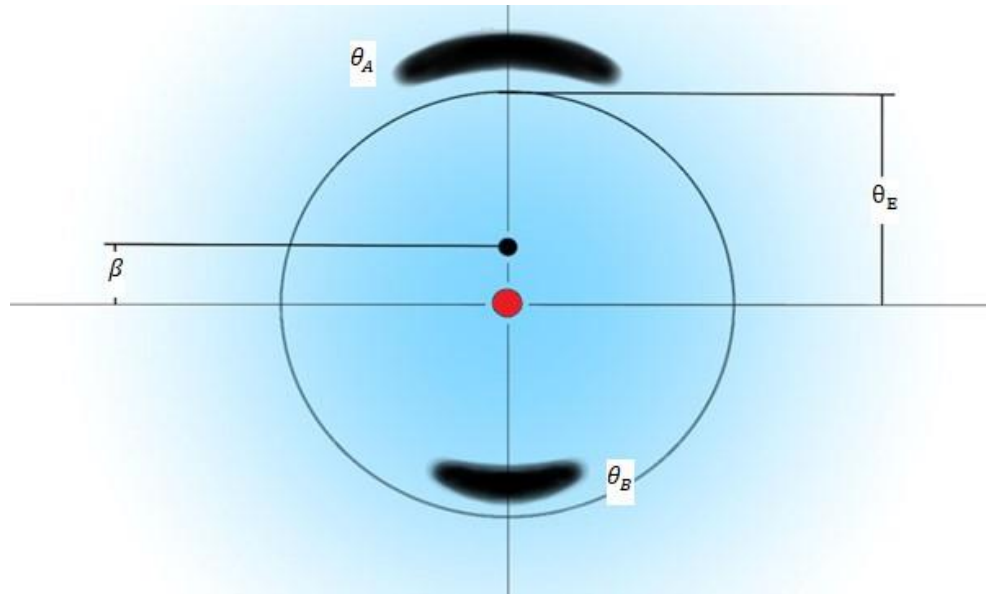
Despejando completamente θ , se obtiene finalmente:

$$\theta_E \equiv \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{ls}}{D_l D_s}} \quad (Ec. 2. 11)$$

Con la Ec.2.11 se puede denotar una región en la que el fenómeno de lente podrá apreciarse con mayor o menor proporción. Es decir, una zona que determina que tan apreciable son los efectos de lente (Aristizábal Duarte, 2021). Dicha ecuación se conoce como *Radio de Einstein* y, para fines ilustrativos, en la Figura 9 se muestra cómo este radio puede reflejarse en un evento de LG convencional⁸.

⁸Con la Figura 8 se tiene una perspectiva lateral de la ubicación del Radio de Einstein, el mismo señalado en la Figura 9 desde una perspectiva frontal.

Figura 9: Radio de Einstein y lente gravitacional.



Nota: Ilustración del fenómeno de LG visto desde la perspectiva del observador. En ella se observan una fuente y lente puntual (punto negro y rojo respectivamente), que se encuentran al interior de Radio de Einstein (θ_E) (círculo negro). Aquellas manchas alargadas en el interior y exterior del radio son las imágenes aparentes que se generan por el evento de lente (θ_A , θ_B).

Con la ecuación de la lente también es posible determinar las posiciones de las imágenes aparentes a partir de las soluciones de θ que satisfacen dicha expresión. Continuando con el caso del anillo de Einstein, haciendo uso de la Ec.2.6 y sustituyendo a $\hat{\alpha}$ con la Ec.2.2, obtenemos⁹:

$$\beta = \theta - \frac{4GM_s D_{ls}}{c^2 D_l \theta D_s}$$

Nótese que en el segundo factor de la derecha se encuentra implícito el Radio de Einstein elevado a la segunda potencia, así que reescribiendo la expresión anterior se tiene que:

$$\beta = \theta - \frac{\theta_E^2}{\theta} \quad (Ec. 2.11)$$

Si de la expresión anterior se despeja θ , observe que la ecuación resultante será semejante a una ecuación cuadrática del tipo $ax^2 \pm bx \pm c = 0$

$$\theta^2 - \beta\theta - \theta_E^2 = 0 \quad (Ec. 2.12)$$

Resolviendo la Ec.2.12 se obtiene:

⁹Se encuentra implícito la sustitución hecha anteriormente con $r = D_l \theta$

$$\theta_{A,B} = \frac{\beta}{2} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \theta_E^2} \text{ (Ec. 2. 13)}$$

Las soluciones encontradas para $\theta_{A,B}$ muestran las ubicaciones que las imágenes tendrán en el plano de la lente, y a su vez, la simetría que estas pueden adoptar alrededor de esta con dichas soluciones (Matarrese et al., 2011). La expresión anterior también señala que existen soluciones para la ecuación de la lente en las que $\beta \neq 0^{10}$, pero cuando $\beta = 0$ volveremos a encontrar una imagen extendida de la fuente entorno a la lente.

$$\theta_{A,B} = \frac{0}{2} \pm \sqrt{\frac{0}{4} + \theta_E^2} \qquad \theta_{A,B} = \theta_E \text{ (Ec. 2.14)}$$

En este caso, la Ec.2.14 indica que las soluciones de $\theta_{A,B}$ pueden encontrarse sobre el Radio de Einstein y la Ec.2.13 las variaciones que las imágenes aparentes experimentan.

Anteriormente, se mencionó que uno de los efectos que se pueden apreciar y que caracterizan al fenómeno de lente es la magnificación o amplificación que las imágenes aparentes sufren¹¹. En dicha magnificación, el brillo superficial de la fuente no se ve afectado por el cuerpo lente durante todo el trayecto del haz, pero el tamaño que esta pueda llegar a tener si puede aumentar cuando se involucran en un evento de lente (Matarrese et al., 2011).

De acuerdo con Congdon & Keeton (2018) y Meneghetti (2021), la magnificación que se puede apreciar de las imágenes aparentes puede medirse y expresarse en términos de la posición de la fuente y el Radio de Einstein; este factor de magnificación podrá incluso estimarse para una o más imágenes repetidas de la fuente.

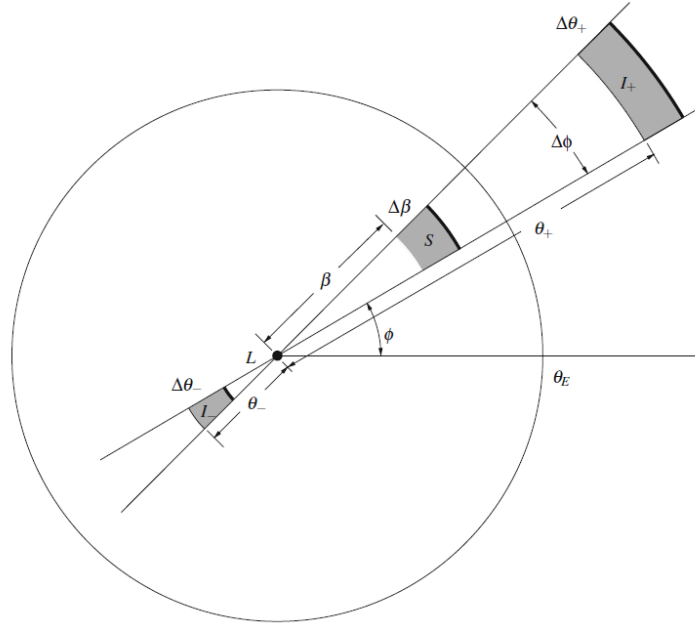
La magnificación de una imagen que se genera debido al fenómeno de lente puede relacionarse a partir de las áreas que una fuente lejana tiene cuando esta se encuentra con y sin cuerpo lente (Petters et al., 2001). Es decir, la magnificación es un factor que indica el aumento que la fuente adopta en términos del área que la fuente tiene antes y después de que sus haces de luz se vean curvados por la presencia de un cuerpo masivo (Narayan & Bartelmann, 1997).

¹⁰Valores mayores o menor a cero.

¹¹ Realmente no hay ningún ente que “amplifique” los haces de luz.

Un esquema que puede explicar de manera geométrica este efecto de magnificación es el presentado por Congdon & Keeton, (2018). En esta ilustración puede verse la posición de la fuente lejana y dos imágenes de esta misma. Nótese que las imágenes se ubican de forma simétrica a cada extremo del cuerpo lente y en cada una de ellas se encuentra asociado un tamaño aparente (área gris) (Figura 10).

Figura 10: Magnificación de una fuente.



Nota: Se observa en la figura como una fuente lejana (S) puede verse magnificada por una lente (L) y generarse dos imágenes aparentes (I_+ , I_-). Note que, en el caso de una lente de masa puntual, se generan imágenes ubicadas al interior y exterior del Radio de Einstein con mayor o menor tamaño aparente. El aumento o disminución que pueden presentarse en las imágenes aparentes y la dirección que estas toman depende de la ubicación de la fuente (β). Tomado de Congdon & Keeton (2018).

Como previamente se mencionó, este factor de magnificación estará relacionado con la imagen de la fuente alterada por el fenómeno de lente y la imagen sin esta alteración. Las imágenes con y sin magnificación pueden describirse por medio de ángulos sólidos como:

$$\text{Ángulo solido Imagen } \Omega_I = \theta d\theta$$

$$\text{Ángulo solido fuente } \Omega_S = \beta d\beta$$

El cociente entre dichos ángulos será el factor de magnificación (μ) que determina un aumento o disminución de la imagen con respecto a la fuente.

$$\mu = \frac{\theta d\theta}{\beta d\beta} \text{ (Ec. 2.15)}^{12}$$

Si nuevamente tenemos en cuenta que para una lente puntual pueden encontrarse las soluciones de $\theta_{A,B}$ que satisfacen la ecuación de la lente y expresar la magnificación de una fuente en términos de β , obtenemos que los factores θ/β y $d\theta/d\beta$ pueden reescribirse como:

$$\begin{aligned} \frac{\theta}{\beta} &= \frac{\theta_{A,B}}{\beta} = \frac{\frac{\beta}{2} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \theta_E^2}}{\beta} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{\sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}}{\beta} \right) \text{ (Ec. 2.16)} \end{aligned}$$

La expresión anterior se obtiene a partir de sustituir la Ec.2.13 dentro del primer factor de la Ec.2.15 y posteriormente simplificar.

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{d\beta} &= \frac{d}{d\beta} \left(\frac{\beta}{2} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \theta_E^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}} \right) \text{ (Ec. 2.17)} \end{aligned}$$

La Ec.2.17 se obtiene al derivar $\theta_{A,B}$ con respecto a β . Si se reemplaza en la Ec.2.15 las expresiones encontradas para Ec.2.16 y Ec.2.17, se tiene que:

$$\mu = \left[\frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{\sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}}{\beta} \right) \right] \left[\frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}} \right) \right]$$

Simplificando la expresión anterior se encuentra que:

¹² Para Congdon & Keeton (2018), el factor θ/β es la extensión tangencial que una fuente sufren en un evento de LG y el factor $d\theta/d\beta$ es su extensión radial. Como resultado se obtiene que la magnificación total de una imagen será el producto entre su magnificación tangencial y radial $\mu_t \mu_r$.

$$\mu_{\pm} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{\beta^2 + 2\theta_E^2}{\beta \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}} \right) \quad (\text{Ec. 2. 18})$$

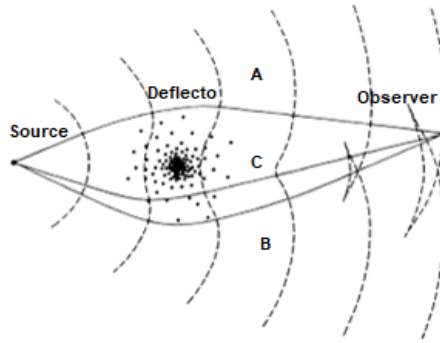
De esta forma se obtiene una expresión que permita estimar la magnificación que una imagen puede sufrir en términos de β y θ_E . Si en la Ec.2.18 se sustituyen valores en los que $\beta > 0$, se puede notar que $\mu_+ > 0$ y $\mu_- < 0$. De la anterior expresión, también se logra deducir que si $\beta \gg \theta_E$ los valores para μ_+ y μ_- tenderán a 1 y 0 respectivamente. De acuerdo con Wambsganss (1998), la magnificación para un anillo de Einstein en donde $\beta \rightarrow 0$ el aumento que este producirá será infinito sin límite de magnificación.

Para finalizar, un efecto que también acompaña al fenómeno de LG y que puede ser deducido a partir de consideraciones geométricas y gravitacionales es el retardo temporal entre imágenes de un mismo cuerpo. Este efecto se caracteriza por medir aquellos tiempos que toman los haces de luz para propagarse por los diferentes caminos o trayectos que unen a la fuente lejana y un observador.

Como se mencionó anteriormente, en el fenómeno de LGF se pueden encontrar escenarios en los que una fuente es vista en múltiples posiciones, pero en cada una de estas imágenes no se recorre la misma distancia para llegar desde la fuente, pasar en cercanías a un cuerpo lente y finalmente aproximarse al observador. Esto debido a que no todos los haces de luz son geoméricamente idénticos y por los potenciales gravitacionales a los que son sometidos cada uno de ellos (Dodelson, 2017).

Una representación gráfica de este efecto se muestra en la Figura 11 en la que se observa como tres haces de luz que logran converger en el observador rodean al cuerpo lente, pero individualmente no comparten la misma longitud en sus trayectos. Lo anterior implica que una señal emitida desde la fuente podrá ser percibida por un observador, pero estas no serán recibidas simultáneamente (Aristizábal Duarte, 2021; Surpi, 1997).

Figura 11: Haz de luz y frente de onda.



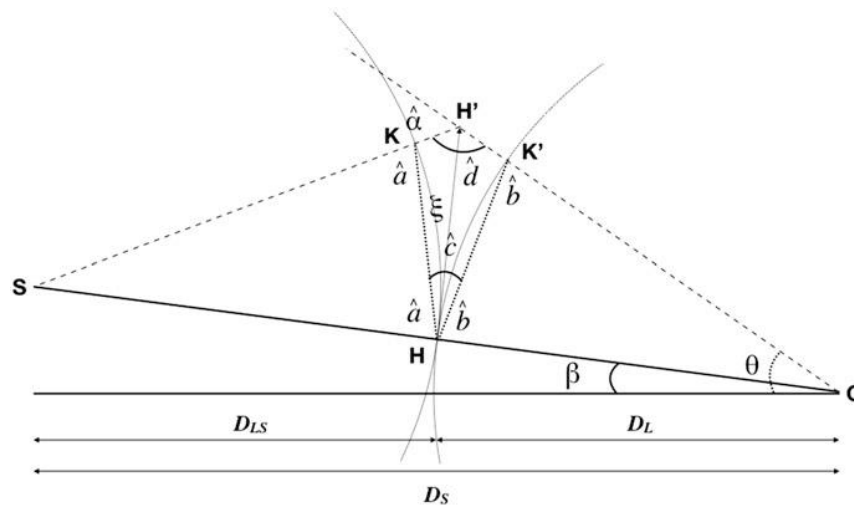
Nota: Figura en la que se observa como un frente de onda (líneas discontinuas) cambia cuando su paso se ve obstruido por un cuerpo masivo. Nótese que al llegar al observador el frente de onda no llega de manera simultánea. Las líneas continuas muestran los diferentes trayectos de diferentes longitudes que la luz toma para llegar al observador. Observe que para el trayecto A el frente de onda que lo acompaña no sufre una distorsión significativa con respecto a los trayectos B y C, por ende, dichos frentes no llegan de forma simultánea. Tomado de Aristizábal Duarte (2021).

El retardo temporal se define como la suma entre el tiempo geométrico que los haces de luz curvados experimentan cuando se aproximan a un cuerpo lente y el tiempo gravitacional que se relaciona con el potencial gravitatorio de la lente y cómo este afecta al haz de luz en su paso junto al cuerpo masivo (Meneghetti, 2021).

$$t_{total} = t_{geom} + t_{grav} \text{ (Ec. 2.20)}$$

Para estimar el tiempo geométrico, se deben suponer dos escenarios en donde la luz toma un trayecto recto entre la fuente y el observador; y en el que la luz debe tomar un camino un poco más largo debido a rodea un cuerpo que obstaculiza su tránsito recto (Figura 12).

Figura 12: Retardo Temporal Geométrico.



Nota: Descripción geométrica de un haz de luz que une los puntos $\overline{SHO}$ y $\overline{SH'O}$. La línea continua representa el trayecto que la luz puede tomar sin que este se vea obstruido por un cuerpo masivo entre la fuente (S) y el observador (O). Con la línea discontinua se muestra el camino que la luz toma cuando se encuentra inmerso en un fenómeno de lente. Tomado de Meneghetti (2021).

De acuerdo con el desarrollo hecho por Meneghetti (2021), para estimar el retardo temporal geométrico se debe encontrar aquella longitud extra que diferencia a los trayectos $\overline{SHO}$ y $\overline{SH'O}$. Es decir, una expresión que muestre la distancia extra recorrida por un haz de luz obstruido por un cuerpo lente. Dicha expresión está dada por:

$$\Delta l \approx \xi \hat{c} \text{ Ec. 2.21}$$

En donde Δl corresponde a un trayecto extra que toma el haz de luz, $\hat{c}$ un ángulo interno y ξ el parámetro de impacto entre H y H'. Mediante algunas relaciones geométricas que logran derivar de la Figura 12 se puede reescribir $\hat{c}$ en términos de $\hat{\alpha}$:

$$\hat{d} = \pi + \hat{\alpha}$$

$$\hat{\alpha} + \hat{b} + \hat{c} = \pi$$

$$\hat{\alpha} + \hat{b} = \hat{c} + \hat{d}$$

Combinando entre si las relaciones presentadas y haciendo las operaciones algebraicas correspondientes, se puede encontrar que:

$$\hat{c} = \frac{\hat{\alpha}}{2} \text{ (Ec. 2.22)}$$

De la Ec.2.7 si se despeja el ángulo $\hat{\alpha}$ y si se reemplaza en la Ec.2.22 se obtiene la expresión:

$$\Delta l \approx \xi \frac{\hat{\alpha}}{2} = \xi \frac{1}{2} (\theta - \beta) \frac{D_s}{D_{ls}} \text{ (Ec. 2.23)}^{13}$$

Para ξ , y a partir de la Figura 12, es posible expresarlo como $\xi = (\theta - \beta) D_l$. Al reemplazar en la expresión anterior, finalmente se encuentra que:

$$\Delta l = \frac{1}{2} (\theta - \beta)^2 \frac{D_s D_l}{D_{ls}} \text{ (Ec. 2.24)}$$

Llegando así a la ecuación que describe el tiempo geométrico como:

¹³ El factor $(\theta - \beta)$ se obtiene a partir de la ecuación de la lente al despejar α .

$$t_{geom} = \frac{\Delta l}{c} = \frac{1}{2}(\theta - \beta)^2 \frac{D_s D_l}{c D_{ls}} \quad (Ec. 2.25)$$

Para encontrar la contribución gravitacional que un cuerpo masivo añade al tiempo de retardo en un haz de luz, se puede empezar haciendo uso de la métrica de Schwarzschild en el límite de un campo débil (Surpi, 1997) y determinar el índice de refracción efectivo. Dicha métrica simplificada se puede expresar como:

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dr^2 \quad (Ec. 2.26)^{14}$$

Si se considera que $ds^2 = 0$ (Es decir, una partícula que viaja a la velocidad de la luz) y en ambos lados de la igualdad multiplicar por $1/dt^2$ se obtiene que:

$$\frac{ds^2}{dt^2} = 0 = \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 \frac{dt^2}{dt^2} - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \frac{dr^2}{dt^2} \quad (Ec. 2.27)$$

Observe que el cociente dr^2/dt^2 que se encuentra en el último factor de la Ec.2.27 corresponde a una velocidad v . Al reordenarse la Ec.2.27 y reescribirse en términos de c/v se encuentra que:

$$c^2 \left(1 + \frac{2MG}{c^2 r}\right) = v^2 \left(1 - \frac{2MG}{c^2 r}\right)$$

Simplificando la expresión anterior:

$$\frac{c}{v} = \sqrt{\frac{1 - \frac{2MG}{c^2 r}}{1 + \frac{2MG}{c^2 r}}} \approx \left(1 - \frac{2MG}{c^2 r}\right) \quad (Ec. 2.28)$$

Con la Ec.2.28 nótese que los valores de $\frac{2MG}{c^2 r}$ debe ser < 1 , ya que de lo contrario se obtendrían velocidades superiores a la de la luz. Dicha velocidad encontrada v corresponde a la velocidad de un haz de luz que cruza un campo gravitacional y c a la velocidad de un haz que no se somete a ningún campo.

¹⁴ Métrica simplificada de *Schwarzschild* tomada de Surpi (1997), al considerar un espacio-tiempo débilmente perturbado por una lente y un potencial newtoniano. También encontrado en Meneghetti (2021).

Así finalmente se obtiene el *índice de refracción efectivo*:

$$n(r) = \frac{c}{v} = 1 - \frac{2MG}{c^2 r} \text{ (Ec. 2.29)}$$

Dicho índice también puede encontrarse implícito al comparar los tiempos que un haz de luz requiere para viajar de un punto a otro, cuando este se encuentra (o no) perturbado por un potencial gravitacional (Meneghetti, 2021). Esta relación entre trayectos y tiempos se puede expresar como:

$$\text{Tiempo entre haz no perturbado y perturbado} = \frac{\text{Trayecto sin perturbación}}{\text{Vel. Luz sin perturbación}} - \frac{\text{Trayecto perturbado}}{\text{Vel. luz perturbado}}$$

Si se considera que los haces de luz se mueven a lo largo de un mismo eje (como el observado en la Figura 7 y se describe su movimiento como $z = ct$ y $z = c't$ para el haz no curvado y curvado respectivamente, entonces los diferenciales de tiempo para ambos haces se puede expresar como:

$$\begin{aligned} z &= ct \\ dz &= c dt \text{ Ec. 2.30(a)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &= c't \\ dz &= c' dt \text{ Ec. 2.30(b)} \end{aligned}$$

Si de los dz se despeja dt y se suman ambas expresiones, se obtiene un diferencial que dará cuenta de un trayecto extra que los haces de luz sin curvatura y con curvatura tomarán.

$$dt = \frac{dz}{c} - \frac{dz}{c'} \text{ Ec. 2.31}$$

Al integrar en ambos lados de la Ec.2.31 se encuentra la siguiente expresión:

$$\Delta t = \int \frac{1}{c} dz - \int \frac{1}{c'} dz$$

De la expresión anterior se factoriza $1/c$ y se encuentra un factor de c'/c que se asemeja al índice de refracción efectivo, obteniéndose así un tiempo geométrico (Δt) en términos de dicho índice.

$$\Delta t = \int \frac{1}{c} - \frac{1}{c'} dz = \frac{1}{c} \int \left(\frac{c}{c'} - 1 \right) dz = \frac{1}{c} \int (n - 1) dz \text{ (Ec. 2.32)}$$

Al sustituir el índice de refracción encontrado en la Ec.2.29 y despejar el potencial gravitacional newtoniano¹⁵ se obtiene que:

$$\Delta t = \frac{1}{c} \int \left(1 - \frac{2MG}{c^2 r} - 1 \right) dz = -\frac{2}{c^3} \int \phi dz \quad (Ec. 2.33)$$

Análogamente a la Ec.2.7 se puede usar la definición para el *potencial efectivo* de la lente según las distancias entre la fuente, el cuerpo lente y el observador.

$$\frac{D_l D_s}{D_{ls}} \hat{\psi} = -\frac{2}{c^2} \int \phi dz \quad (Ec. 2.34)$$

Dicho potencial es semejante a la integral resultante que se encuentra en Ec.2.33, reescribiendo dicha expresión se obtiene que:

$$t_{grav} = \frac{D_l D_s}{D_{ls} c} \hat{\psi} \quad (Ec. 2. 35)$$

Finalmente, con las ecuaciones encontradas para el tiempo geométrico y gravitacional es posible determinar el retardo temporal que un haz de luz sufre. Es importante mencionar que en las expresiones resultantes (t_{grav} y t_{geom}) deben agregarse a ellas un factor $(1 + z_L)$ que indica el corrimiento al rojo del cuerpo lente debido a la expansión del universo (Aristizábal Duarte, 2021).

A partir de los resultados que se obtienen de las ecuaciones 2.25 y 2.35 se puede reescribir la ecuación 2.20 de la siguiente forma:

$$t = (1 + z_L) \frac{D_l D_s}{D_{ls} c} \left(\frac{1}{2} (\theta - \beta)^2 + \hat{\psi} \right) \quad (Ec. 2. 36)$$

La expresión anterior nos da cuenta de las diferentes contribuciones geométricas y gravitacionales que se adoptan en un haz de luz cuando se curva su trayecto original. Es importante resaltar que para la deducción de la Ec.2.36 fue necesario comparar escenarios en los que la luz viajaba por un espacio-tiempo perturbado y no perturbado, por ende, dicha ecuación se puede

¹⁵ Recuerde que el potencial gravitacional newtoniano se encuentra definido como: $\phi = MG/r$

interpretar como el retardo temporal de un haz de luz sin lente gravitacional y su imagen aparente (como se observa en la Figura 12, segmento sin lente $\overline{SO}$ e imagen aparente en el punto H').

Qué Puedo Hacer Con Las Ecuaciones

Las ecuaciones antes mencionadas pueden estimar magnitudes y efectos que se encuentran en torno al estudio de las LG. Su desarrollo se da para un evento de masa puntual y, con ellas, se puede establecer un radio de impacto, un numero definido de imágenes, una magnificación de la fuente y un retardo temporal entre las imágenes aparentes. De dichas ecuaciones, también se pueden derivar propiedades o características del cuerpo lente y parámetros que pertenecen al espacio en el que se sitúa el evento como, la masa del lente, su estructura, la dirección de la fuente y parámetros cosmológicos.

Una de las ecuaciones abordadas es el Radio de Einstein, con el que se puede determinar aquella región en la que un fenómeno de lente tendrá mayor o menor efecto. Como se observa en la Ec.2.11, este radio dependerá de la masa del cuerpo y de las distancias entre la fuente, la lente y el observador. Pero de acuerdo con Congdon & Keeton (2018), al interior del radio puede encontrarse situada gran parte de la masa total que conforma a la lente, esto incluyendo tanto la masa visible como la hipotética materia oscura. Entonces, con dicho radio se puede conocer u obtener algunas pistas o indicios de la masa de la lente, y al mismo tiempo, limitando o restringiendo la masa que pueda encontrarse a las afueras del radio que compone al cuerpo que actúa como lente. (Congdon & Keeton, 2018).

Por otro lado, para definir el número de imágenes que pueden presentarse en un fenómeno de lente se deben encontrar las soluciones que satisfacen la ecuación de la lente, que como se mostró, para una masa puntual se obtendrán dos imágenes aparentes alrededor de esta. Este número de imágenes puede verse modificado si se considera otro tipo de simetría para el cuerpo lente, por ejemplo, si estas son esféricas o elípticas. En observaciones reales se ha notado que los fenómenos de lente presentan múltiples imágenes que no se asemejan a las esperadas si el cuerpo lente es una masa puntual, esto podría sugerir entonces que en el fenómeno se encuentra un cuerpo lente con una estructura interna distinta. Esta correlación entre el número imágenes y la simetría del cuerpo lente se convierte en un indicativo para conocer o realizar una primera estimación con respecto a la estructura interna que pueda tener el cuerpo lente (Congdon & Keeton, 2018).

Otros aspectos que identifica a un fenómeno de lente es su capacidad de magnificar la imagen de una fuente y observar ese efecto en cada una de las imágenes múltiples. La magnificación depende de la posición de la fuente, el Radio de Einstein (Ec.2.18) y puede presentarse tanto radial como tangencialmente. Para un modelo de masa puntual, la magnificación se presenta en sus dos imágenes aparentes a las que son asociadas un signo negativo y otro positivo. De acuerdo con Dodelson (2017), estos signos no corresponden a una mayor o menor extensión física de las imágenes aparente, sino más bien, estos se relacionan con la paridad o dirección que en ellos se observa. La estimación del factor de magnificación para las imágenes aparentes, indica un aumento en la amplitud de la fuente y si su imagen se encuentra invertida o no.

Las imágenes generadas en un fenómeno de lente son los principales actores u objetos donde sus efectos se aprecian. Un ejemplo de ellos es el retardo temporal que puede determinar aspectos como la expansión del universo a partir de variaciones observadas en cada imagen repetida (Refsdal, 1964). Para encontrar el retardo temporal fueron tomados en cuenta aspectos geométricos y gravitacionales, y en la ecuación resultante (Ec.2.36) se presentan variables como, el potencial de la lente o las distancias entre la fuente, la lente y el observador. La estimación de la expansión del universo o parámetro de Hubble¹⁶ se encuentra relacionada con otras magnitudes relevantes como la densidad crítica del universo y la edad del universo. Con lo dicho anteriormente, se quiere resaltar que algunos usos que puedes desprenderse del retardo temporal y cómo estas realizan aportes en campos de la física como la cosmología.

Finalmente, la observación directa de las LG en observatorios o telescopios espaciales depende en gran medida de la resolución que las imágenes puedan mostrar y de factores externos como el polvo estelar o ruido que se pueda captar. A lo anterior, también se puede agregar, que este tipo de fenómenos no puede ser reproducible en una escala real lo cual dificulta el estudio individual o específico de escenarios con propiedades o configuraciones concretas. Un software que puede realizar las acciones antes descritas es *Lenstronomy*, el cual logra estimar magnitudes como, el retardo y magnificación entre imágenes y, a su vez, realizar una visualización del fenómeno.

¹⁶ Los valores que algunos observatorios e investigaciones han encontrado de dicho parámetros se encuentran entre 67 y 74 km/sMpc.

Un Aplicativo Para Simular LG

Se presentan los elementos necesarios para modelar y simular un fenómeno de lente a partir de un software especializado y parámetros sobre la posición de los cuerpos. También se señalan aquellos módulos y submódulos usados para construir un aplicativo y se describen cada instancia o funciones usadas en los módulos.

Primero Modelar, Después Simular

En este trabajo se hará referencia constante a la acción de modelar y simular fenómenos como las LG, por tanto, se hace necesario mencionar aquellos factores que diferencian ambas acciones y con generar imágenes aparentes a partir de parámetros definidos.

Aunque no se pueden generar condiciones que permitan la observación directa de fenómenos como las LG, este puede generarse de forma virtual y mediante algoritmos que permiten ubicar y caracterizar los objetos en un ambiente controlado. Estos pueden tener propiedades o características ideales como encontrarse libres de fuerzas externas, perturbaciones en el ambiente, deformaciones en sus superficies, etc. Al hablar de una modelación, se hará referencia a la acción de representar y crear (en un ambiente virtual) todas aquellas características que un cuerpo u objeto tiene (Duarte & Morales, 2005), por ejemplo, una LG puede modelarse al asignar al cuerpo lente una ubicación predeterminada, una distribución de masa y alejado de otro cuerpo que lo perturba. Para un fenómeno como este, también podría modelarse la alineación que una lente y la fuente pueden tener, así como también, su distribución de luz. Dichas características, en escenarios reales, son muy poco probables de encontrar, pero realizar un modelado del fenómeno permiten un estudio y observación individual de aspectos que lo conforman.

Si ahora, luego de construir o establecerse un modelo que represente el escenario ideal para el estudio del fenómeno, se quiere agregar características que logren un acercamiento más realista a observaciones que pueden encontrarse, entonces se puede realizar ajustes a la visualización del modelo cambiando las dimensiones que esta tiene, la cantidad de píxeles, las interacciones que se tiene con la luz emitida o la resolución de la imagen que se puede obtener. Al modificar dichos aspectos, es posible mostrar una imagen más acorde a las condiciones de observación de un evento de este tipo, logrando así imitar o simular un evento de LG y una observación real.

Al hablar de una modelación del fenómeno de lente, se va a hacer referencia a la construcción (idealizada) del cuerpo lente, la fuente y su posición e imágenes aparentes. Al hablar de simulación del mismo evento, va a implicar agregar al modelo aspectos como, una distribución de luz, describir la posición de los cuerpos a partir de píxeles y aplicar funciones que se asemejen a la observación hecha desde telescopios, entre otros.

En la sección anterior entorno a las LGF, se mencionó que un cuerpo masivo (responsable del fenómeno de lente) puede considerarse una masa puntual para simplificar algunas propiedades, efectos y magnitudes de un sistema lente. Esta simplificación puede verse reflejada al momento de encontrar de forma analítica las soluciones que satisfacen la ecuación de la lente y reduciendo factores como la forma y simetría que el cuerpo lente puede tener (Aristizábal Duarte, 2021).

Para la modelación y simulación de una LG se requiere de aplicativos especializados capaces de representar gráficamente las alineaciones, proyecciones y extensiones que la imagen de una fuente puede tomar a partir de determinadas condiciones iniciales y así observar las interacciones con el cuerpo lente. Dichas representaciones pueden abarcar aspectos simples como una lente de masa puntual o una lente con forma de elipse y una distribución uniforme de masa. Aunque existen experimentos demostrativos que logran obtener y representar el fenómeno de lente con artefactos u objetos de uso común, esas prácticas pueden limitarse a una descripción de las formas o magnificaciones proyectadas en una superficie a través de un medio.

En cambio, los aplicativos de modelación para LG permiten variar parámetros que inciden en la formación de las imágenes aparentes como, la posición relativa de la fuente, el parámetro de impacto, las distancias entre la fuente, la lente y el observador etc. Lo anterior, permite observar el comportamiento de los haces de luz bajo diferentes condiciones iniciales y hacer una aproximación de los eventos que pueden encontrarse en observaciones reales.

Un aplicativo capaz de modelar y simular un evento de LG es *Lenstronomy*, el cual ha sido usado en numerosas investigaciones relacionadas con la reconstrucción de eventos de lente a partir de imágenes de alta resolución y el procesamiento de datos con aprendizaje profundo¹⁷, entre otros. Birrer & Amara (2018) mencionan y describen algunos de los alcances que *Lenstronomy* ofrece

¹⁷ Subcampo del Machine Learning capaz de enseñar a los ordenadores a como realizar tareas a partir de un conjunto de datos y aprender de ellos.

como, cuantificación de la subestructura de lente, cosmografía con retardo temporal y mediciones con cizalladura cósmica¹⁸.

Lenstronomy es de código abierto, desarrollado por Birrer & Amara (2018), y construido bajo el lenguaje de programación *Python*. Cuenta con una licencia de distribución MIT¹⁹ y es descrito como un software multipropósito con el que se pueden estudiar eventos de LGF y otros regímenes de lentes²⁰.

Este software tiene varios paquetes o módulos que permiten modelar fenómenos de lente con fuentes puntuales o cúmulos de galaxias que no se describen como distribuciones homogéneas de masa (múltiples fuentes o lentes). De acuerdo con Birrer, et al. (2021), uno de los objetivos de *Lenstronomy* es aportar en las investigaciones científicas, facilitar el análisis de datos robustos y modelar LG con un alto grado de dificultad. El software es corregido y complementado constantemente para el beneficio de los usuarios y satisfacer las necesidades que la comunidad científica requiere.

La Base Es *Lenstronomy*

La modelación y simulación de una amplia gama de LGF pueden realizarse por medio del software *Lenstronomy*, este requiere implementar y articular los módulos y submódulos que permitan caracterizar los perfiles de luz y masa que una fuente lejana o un cuerpo lente tienen. Algunas de estas características son la simetría que en ellos se presentan, su distribución de luz o sus alineaciones con el observador. Para dicha caracterización, deben definirse parámetros propios de modelo y perfiles preestablecidos por *Lenstronomy*. Es decir, para la manipulación del software se deben proporcionar datos de entrada específicos para cada modelo y perfil, y así construir un evento de lente con características similares a las observaciones reales.

Como se mostró en el capítulo anterior, trabajar desde una masa puntual posibilita mostrar efectos del fenómeno de lente. Este modelo supone la concentración de la masa de un cuerpo en un solo punto en específico, semejante a cuerpos compactos como estrellas o planetas. Dicha

¹⁸ Distorsión que sufren las imágenes de objetos muy lejanos por efecto de inhomogeneidades en el espacio y variaciones de densidad que son recorridos por los haces de luz.

¹⁹ Licencia que permite realizar modificaciones al código fuente y su redistribución, cumpliendo con sus condiciones de atribuir a los autores originales del software.

²⁰ Página del Software: <https://Lenstronomy.readthedocs.io/en/latest/index.html#>. Comunidad en GitHub: <https://github.com/Lenstronomy/Lenstronomy>

configuración de masa será también usada para la modelación y simulación de un evento de LG al construirse a partir de *Lenstronomy* y mostrar la formación de imágenes de acuerdo con este.

Este modelo de masa puntual estará acompañado de un perfil luminoso que se asemeje a la variación que la luz tiene a partir de un punto central semejante a una distribución luminosa o perfil Sérsic, *Lenstronomy* cuenta con una lista de perfiles que puede ser usados para simular el comportamiento que la luz de la fuente o lente puedan tener. Un perfil de luz Sérsic es una función que describe la distribución de luz que un cuerpo puede tener a partir de su intensidad superficial, un radio efectivo y un índice Sérsic (Breda, et al., 2019).

Para el presente trabajo, *Lenstronomy* es usado para modelar y simular un fenómeno de lente simple bajo un modelo de masa puntual y un perfil de luz Sérsic que logre ejemplificar los efectos que conforman a las LGF y construir escenarios similares a los que se pueden presentar en observaciones reales. A continuación, se realiza y muestra un primer esquema de cómo se compone dicho software y una breve descripción de los módulos y líneas de código. Como se mencionó anteriormente, *Lenstronomy* es empleado en diversas investigaciones en torno a las LG, pero con los parámetros y escenarios adecuados también puede tener un uso que ilustre sus efectos sin la complejidad que se presentan en investigaciones más robustas como, mediciones de la constante de Hubble o restricciones a las propiedades de materia oscura (Birrer & Amara, 2018).

Módulos Para Un Aplicativo

Para modelar y simular un fenómeno de lente compuesto de una fuente lejana y una lente de masa puntual, deben señalarse en *Lenstronomy*, los modelos de masa y luz que serán asociados al sistema. Estos son predefinidos en listas y requieren de parámetros que modifica el usuario como coordenadas de la lente, distancias angulares, excentricidad, corrimientos al rojo, entre otros. Dentro de *Lenstronomy* hay implícitos módulos que describen los modelos de LG como, **'POINT_MASS'** y **'SERSIC'** que corresponden al modelo de masa puntual asignado a la lente y la distribución de luz que la fuente y lente describen respectivamente.

A partir de dichos modelos, y al integrar los diferentes módulos capaces de modelar, simular y estimar las magnitudes físicas de una LG, se muestran las posiciones y magnificaciones que las imágenes aparentes sufren en un evento de lente, así como la distribución de luz que se observa cuando se encuentran muy cerca de una alineación entre la fuente, la lente y el observador.

Para ilustrar el funcionamiento base de los módulos y estudiar un evento característico de las LGF, se construye un fenómeno de lente en el que se pueden observar una imagen doble de una fuente²¹.

Uno de los módulos centrales que conforman a *Lenstronomy*, y al mismo tiempo encargado de ejecutar los aspectos relacionados a la lente como sus efectos y magnitudes físicas es *LensModel*. Para su ejecución, se requieren definir algunos parámetros tales como, el Radio de Einstein '**theta_E**', las coordenadas en donde se sitúa la lente '**center_x**' y '**center_y**' y las coordenadas que ubica a una de las imágenes aparentes '**theta_ra**, **theta_dec**' (Figura 13, líneas 7, 8, 9 y 11 respectivamente). De dichos parámetros, *Lenstronomy* permite establecer la posición relativa de la fuente ('**beta_ra**', **beta_dec**') por medio de la función **ray_shooting**²² (Figura 13, línea 12).

Figura 13: Módulo *LensModel*.

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 from lenstronomy.LensModel.lens_model import LensModel
5 lens_model_list=['POINT_MASS']           # Modelo de Masa Puntual.
6 lensModel=LensModel(lens_model_list)
7 kwargs_pm={'theta_E':1,                  # Lista de parámetros. Radio de Einstein
8            (Valeores entre 0 y 2).
9            'center_x': 0,                # Posición de la lente en el eje x (Mantener en
            'center_y':0}                 # Posición de la lente en el eje y (Mantener en
            cero).
10 kwargs_lens=[kwargs_pm]
11 theta_ra, theta_dec= -0.6,0.9           # Posición de una imagen aparente (en
            radianes).
12 beta_ra, beta_dec=lensModel.ray_shooting(theta_ra,theta_dec,kwargs_lens)

```

Nota: Fragmento del código fuente en donde se definen los parámetros iniciales del módulo *LensModel*.

Para determinar las posiciones de las imágenes aparentes, *LensModel* cuenta con el submódulo *LensModel.Solver* que permite encontrar las soluciones que satisfacen a la ecuación de la lente, esto se realiza a partir de los parámetros anteriormente definidos y por medio de la función **image_position_from_source** (Figura 14, línea 16). Además, se determina, la magnificación (**mag**) que las imágenes generadas sufren, mediante la función **magnification** (Figura 14, línea 17).

²¹ Las diferentes imágenes con relación a el código fuente que a continuación se presentan, sirven como referencia para mostrar y describir cómo se encuentran conformados los módulos del aplicativo. Para una observación o estudio más detallado del código se sugiere ver el Anexo 1.

²² Función que permite estimar la ubicación relativa de la fuente en el plano de la imagen a partir de los argumentos **kwargs_pm** y la coordenada de una de sus imágenes.

Figura 14: Módulo *LensModel Solver*.

```

14 from lenstronomy.LensModel.Solver.lens_equation_solver import LensEquationSolver
15 solver=LensEquationSolver(lensModel)
16 theta_ra, theta_dec=solver.image_position_from_source(beta_ra, beta_dec, kwargs_lens)
17 mag = lensModel.magnification(theta_ra, theta_dec,kwargs_lens)

```

Nota: Fragmento del código fuente con el que se determinan la posición de las imágenes y su magnificación a partir de funciones que componen al submódulo.

Otro de los módulos relevantes en *Lenstronomy* y encargado de parametrizar la distribución o perfil luminoso que una fuente o lente tiene es *LightModel*, para la construcción de este evento se escogió un perfil de luz tipo ‘**Sersic**’ para ambos cuerpos (Figura 15, líneas 20 y 28). Los parámetros que definen a este perfil son la amplitud o brillo intrínseco ‘**amp**’ (Figura 18, líneas 22 y 30), un radio efectivo ‘**R_sersic**’ (Figura 15, línea 23 y 31), un índice de concentración ‘**n_sersic**’ (Figura 15, línea 24 y 32), y las coordenadas que indican el centro del perfil ‘**center_x**’ (Figura 15, línea 25 y 33) y ‘**center_y**’ (Figura 15, línea 26 y 34). En la Figura 15, en una primera sección se definen los parámetros asociados al perfil luminoso de la fuente (líneas 22-26) y después los relacionados con la lente (líneas 30-34).

Figura 15: *LightModel*.

```

19 from lenstronomy.LightModel.light_model import LightModel
20 source_light_model=['SERSIC'] # Perfil de Luz (Fuente).
21 lightModel_source=LightModel(source_light_model)
22 kwargs_light_source = [{'amp': 4000, # Lista de parámetros Amplitud de la fuente
23                             (valores > 0)
24                             'R_sersic': 0.1, # Radio Efectivo (valores > 0).
25                             'n_sersic': 3, # Índice Sérsic (8 < n < 0.5).
26                             'center_x': beta_ra, # Posición de la fuente en eje x.
27                             'center_y': beta_dec}] # Posición de la fuente en eje y.
28 lens_light_model_list=['SERSIC'] # Perfil de Luz (Lente).
29 lightModel_lens=LightModel(lens_light_model_list)
30 kwargs_light_lens = [{'amp': 400, # Amplitud de la lente (valores > 0).
31                             'R_sersic': 1, # Radio Efectivo (valores > 0).
32                             'n_sersic': 2, # Índice Sérsic (8 < n < 0.5).
33                             'center_x': 0, # Posición de la lente en eje x.
34                             'center_y': 0}] # Posición de la lente en eje y.

```

Nota: Fragmento de código fuente en donde se definen los parámetros del perfil de luz para fuente y lente. Ambos cuerpos comparten el mismo tipo de perfil, pero los valores de cada parámetro varían de acuerdo con el cuerpo que se quiere representar y observación del fenómeno que se busca.

La parametrización de las múltiples imágenes observadas que se generan en un fenómeno de lente puede realizarse a través de módulo *PointSource*. La descripción de sus posiciones y brillos se realiza a través de un modelo ‘**LENSED_POSITION**’ (Figura 16, línea 37) y sus parámetros corresponden a la posición de las imágenes ‘**ra_image**’, ‘**dec_image**’ (Figura 16, líneas 39 y 40) y sus amplitudes individuales ‘**point_amp**’ (Figura 16, línea 41). Los valores que dichas variables

toman corresponden a las coordenadas estimadas de las imágenes aparentes (**theta_ra**, **theta_dec**) y las amplitudes intrínsecas de cada imagen que dependen de la magnificación (**mag**).

Figura 16: *PointSource*.

```

36 from lenstronomy.PointSource.point_source import PointSource
37 point_source_model_list=['LENSED_POSITION']      # Modelo de fuente puntual.
38 pointSource=PointSource(point_source_model_list, lensModel, [False])
39 kwargs_ps=[{'ra_image':theta_ra,                # Coordenada RA de la imagen.
40             'dec_image':theta_dec,              # Coordenada DEC de la imagen.
41             'point_amp':np.abs(mag)*30}]         # Amplitud que se observa en la imagen.

```

Nota: Fragmento de código fuente en donde se definen el modelo y parámetros de las imágenes aparentes del fenómeno de lente. Son usados nuevamente variables estimadas y definidas en módulos anteriores.

El módulo *Data* permite construir una rejilla donde se pueda simular un evento de lente. Dicho módulo establece las dimensiones y características que van a contener el marco en que se proyectará la simulación como, el tamaño de los píxeles '**deltaPix**' (Figura 17, línea 44), un punto inicial o central de pixeles **ra_at_xy_0** y **dec_at_xy_0** (Figura 17, línea 45), una matriz de transformación que permita pasar de coordenadas a pixeles y viceversa **transform_pix2angle** (Figura 17, línea 46) y la cantidad de pixeles por eje '**nx**' y '**ny**' (Figura 17, líneas 47 y 48). Los argumentos '**ra_at_xy_0**', '**dec_at_xy_0**' y '**transform_pix2angle**' (Figura 17, líneas 49 – 51) son previamente definidas en líneas 45 y 46. Como resultado final se obtiene una instancia con las propiedades definidas que la rejilla de pixeles tendrá **pixel_grid** (Figura 17, líneas 49 – 52).

Figura 17: *Data*.

```

43 from lenstronomy.Data.pixel_grid import PixelGrid
44 deltaPix=0.025                                # Tamaño del píxel en segundos de arco.
45 ra_at_xy_0, dec_at_xy_0 = -2.5, -2.5          # Punto de inicio en coordenadas RA y DEC
46 transform_pix2angle = np.array([[1, 0], [0, 1]]) * deltaPix
47 kwargs_pixel = {'nx': 200,                    # Número de píxeles en eje x.
48                'ny': 200,                    # Número de píxeles en eje y.
49                'ra_at_xy_0': ra_at_xy_0,      # Coordenada RA de píxel.
50                'dec_at_xy_0': dec_at_xy_0,    # Coordenada DEC de píxel.
51                'transform_pix2angle': transform_pix2angle}
52 pixel_grid = PixelGrid(**kwargs_pixel)        # Rejilla de simulación.

```

Nota: Fragmento de código fuente que construye la rejilla de simulación y sus parámetros en pixeles. Los valores de esta sección pueden ajustarse para obtener una mayor imagen u otra designación para las coordenadas iniciales del conjunto de pixeles.

Para definir una función de dispersión de puntos *Lenstronomy* cuenta con el submódulo *Data.psf* (Figura 18, línea 54) que permite definir parámetros relacionados con el tipo de función, el tamaño del píxel y cuan extendida o concentrada es la luz que se simula. Aquellos argumentos como '**psf_type**', '**fwhm**' y '**pixel_size**' (Figura 18, líneas 55 – 57) tienen valores recomendados o sugeridos en la documentación del software. Por último, se crea una instancia

‘**psf**’ (Figura 18, líneas 58) con la que se maneja exclusivamente los efectos de dispersión que se aprecian en la simulación.

Figura 18: *Data.psf*

```
54 from lenstronomy.Data.psf import PSF
55 kwargs_psf = {'psf_type': 'GAUSSIAN',          # Tipo de función de dispersión de puntos.
56              'fwhm': 0.1,                    # Anchura máxima para la función.
57              'pixel_size': deltaPix}          # Tamaño de píxel.
58 psf = PSF(**kwargs_psf)                      # Objeto que simula la dispersión de luz
```

Nota: Fragmento de código encargado de definir la función de dispersión de puntos y el conjunto de píxeles para la fuente y sus imágenes.

Para lograr una articulación de las diferentes instancias y parámetros que fueron definidos en el desarrollo del código, *Lenstronomy* cuenta con el módulo *ImSim* encargado de reunir los datos almacenados en los módulos anteriores. Esto se realiza asignando en una sola instancia **imageModel** todas las anteriores instancias que definen aspectos como el modelo de masa, los perfiles de luz, las fuentes puntuales, la función de dispersión y la rejilla de simulación (Figura 19, líneas 62 - 70). Del mismo modo, se asignan a **image** las variables que contienen los parámetros que definen el modelo de masa, sus perfiles de luz y fuentes puntuales (Figura 19, líneas 72 – 75).

Figura 19: *ImSim*.

```
60 from lenstronomy.ImSim.image_model import ImageModel
61 kwargs_numerics = {'supersampling_factor':1, 'supersampling_convolution': False}
62 imageModel = ImageModel(pixel_grid,          # Instancia definida en módulo Data.pixel_grid.
63                         psf,                # Instancia definida en módulo Data.psf.
64                         lensModel,          # Instancia definida en módulo LensModel.
65                         lightModel_source,  # Instancia definida en módulo LightModel (de
fuente).
66                         lightModel_lens,    # Instancia definida en módulo LightModel (de
lente).
67                         pointSource,        # Instancia definida en módulo PointSource.
68                         None,               # Instancia no definida, no relevenate.
69                         kwargs_numerics,    # Instancia definida en módulo ImSim.
70                         None)              # Instancia no definida, no relevenate.
71
72 image=imageModel.image(kwargs_lens,         # Lista de parámetros definidos en LensModel.
73                       kwargs_light_source, # Lista de parámetros definidos en LightModel
(de fuente).
74                       kwargs_light_lens,    # Lista de parámetros definidos en LightModel
(de lente).
75                       kwargs_ps)           # Lista de parámetros definidos en PointSource.
```

Nota: Fragmento de código en donde se recopilan las listas de argumentos y parámetros estimados para construir el evento de lente a modelar y simular.

Para representar y visualizar de manera gráfica la modelación y simulación del fenómeno de lente desarrollado, es necesario importar librerías como Numpy²³ y Matplotlib (Figura 13, línea 1 y 2), estas permiten graficar y gestionar grandes cantidades de datos que fueron almacenados.

²³ Su uso también fue requerido para estimar la amplitud que cada fuente puntual tiene (Figura 16, línea 41).

También es necesario la implementación del módulo *Plot* el cual va a definir e integrar en una misma interfaz todas las propiedades y características que se construyeron para representar el modelo de masa puntual, sus imágenes y la posición de la fuente.

La modelación y simulación del evento de lente se divide en dos momentos al ejecutarse el código descrito. En una primera figura, al usar la clase `lens_plot.lens_model_plot` (Figura 20, líneas 79 – 92) se podrá configurar propiedades principalmente relacionadas con el módulo *LensModel*, entre los que se encuentran el modelo de masa `lensModel` (Figura 20, línea 80), los parámetros iniciales `kwargs_lens` (Figura 20, línea 81), el número de píxeles `numPix` (Figura 20, línea 82), el tamaño del píxel `deltaPix` (Figura 20, línea 83) y las coordenadas de la fuente (`sourcePos_x`, `sourcePos_y`) (Figura 20, líneas 84 y 85). También, podrán habilitarse opciones de visualización para la fuente (Figura 20, línea 86), sus cáusticas y curvas críticas (Figura 20, línea 87), así como señalar las coordenadas centrales de la lente (Figura 20, líneas 89 y 90).

Figura 20: *LensPlot - Modelación.*

```

77 from lenstronomy.Plots import lens_plot
78 f, ax=plt.subplots(figsize=(6,6 ))           # Tamaño de la figura.
79 lens_plot.lens_model_plot(ax,                # Instancia usada previamente.
80                             lensModel,        # Instancia definida en módulo LensModel.
81                             kwargs_lens,      # Lista de parámetros definidos en LensModel.
82                             400,              # Total número de píxeles.
83                             0.01,             # Tamaño de píxel.
84                             beta_ra,          # Posición de la fuente en eje x.
85                             beta_dec,         # Posición de la fuente en eje y.
86                             True,             # Marcar fuente.
87                             True,             # Mostrar Cáustica y curva crítica.
88                             False,           # Mostrar Convergencia.
89                             0,                # Coordenada RA central en la figura.
90                             0,                # Coordenada DEC central en la figura.
91                             False,           # Invertir eje x.
92                             False)           # Estimar cáustica rápida.
93 plt.grid()                                   # Rejilla para ubicación de coordenadas.
94 plt.title('Modelado')                       # Título de la figura.
95 plt.show()                                  # Mostrar modelo.

```

Nota: Fragmento de código en donde son reunidos las instancias creadas en los módulos anteriores, así como el posicionamiento del modelado y funciones integradas del módulo.

Para la segunda figura, en donde es graficada la simulación del evento a partir de los datos almacenados en `image`, se implementa un método que requiere usar la función `imshow` y realizar una operación logarítmica `np.log10` (Figura 21, línea 98).

Figura 21: *LensPlot - Simulación.*

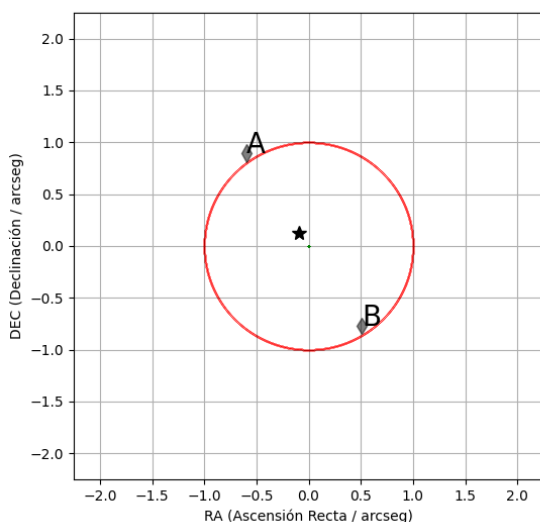
```

97 plt.figure(figsize=(6,6))                                # Tamaño de la figura.
98 plt.imshow(np.log10(image), origin='lower')              # Metodo de visualización. Logaritmo a datos
   tomados de variable image.
99 plt.title('Simulado')                                    # Título de la figura.
100 plt.axis('off')                                          # Eliminar ejes de píxeles
101 plt.show()                                              # Mostrar simulado .

```

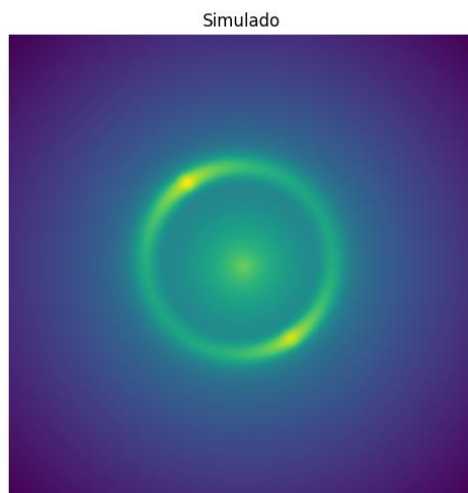
Nota: Fragmento de código para la ejecución de los valores y coordenadas almacenados en módulos anteriores y proyectarse en una misma interfaz.

Para una comprobación correcta de la construcción de este código descrito, es recomendable dividir el desarrollo del fenómeno de lente en secciones como las mostradas anteriormente y ejecutar a medida que se asignan valores a los parámetros y las instancias de cada módulo. Las dos imágenes que se logran modelar y simular corresponden a la distribución de masa que la lente tiene y las imágenes aparentes de la fuente (Figura 22), y una simulación del mismo evento en la que se observa las interacciones que tiene la luz de la fuente con el cuerpo lente (Figura 23).

Figura 22: *Masa puntual.*

Nota: Ilustración realizada por medio de *Lenstronomy* considerando una masa puntual. En ella se observan dos imágenes aparentes (A y B) de una fuente parcialmente alineada (estrella negra) con la lente y el observador (coordenadas RA,DEC [0,0]). Elaboración propia desde el código Python.

Figura 23: *Masa puntual simulada.*



Nota: Ilustración elaborada por medio de *Lenstronomy* en la que se muestra cómo se extienden las imágenes aparentes de una fuente lejana en torno a una lente de masa puntual, como resultado se forma un anillo. De manera difusa y con una definición débil también se observa las dos imágenes centrales aparentes de la fuente. Elaboración propia desde el código Python.

Es importante mencionar que estos módulos descritos son solo algunos que conforman a *Lenstronomy*. Si bien, no se pretende mostrar en detalle los módulos usados para una modelación o simulación de lente, si se quiere presentar aquellos módulos que se consideran base para un primer acercamiento o introducción al manejo de este tipo de aplicativo y aquellos necesarios para comprender los procesos internos que este realiza. Los módulos descritos se usan para abordar muchos modelos de masa y luz, por lo que se recomienda hacer una revisión previa a la documentación en línea para conocer los parámetros de cada modelo.

La manipulación directa del aplicativo no requiere un amplio conocimiento del lenguaje de programación Python, pero si el usuario debe ajustar el valor de una variable, agregar funciones o cualquier otra acción que implique modificar el código fuente este puede realizarse teniendo en cuenta el tipo de sintaxis y la estructura que se sigue en el lenguaje de programación. Al tener el aplicativo un cierto grado de simplicidad, este puede ser usado por estudiantes y docentes que buscan obtener una visualización del fenómeno de lente.

El código desarrollado y descrito se encontrará de manera completa en los Anexos del presente trabajo (Anexo 1) para aquellos que desean revisar o comprobar de forma directa el

funcionamiento de los módulos, y así comprender cómo se modela y simula un fenómeno de lente simple.

Para finalizar, hay que aclarar que el código fuente usado para construir un aplicativo que se ejecuta junto con la propuesta de enseñanza (que a continuación se describirá) tiene diferencias en comparación con el código mostrado y descrito anteriormente. Estas diferencias se encuentran en torno a el ingreso de parámetros y asignación de etiquetas que permitan indicar magnitudes estimadas, ubicaciones de los cuerpos e imágenes aparentes.

El ingreso de parámetros al aplicativo se realiza a partir de mensajes solicitados por este, que se procesarán y generará una visualización del fenómeno de lente. Las etiquetas se observarán en dichas visualizaciones y con estas señalar qué parámetros componen al fenómeno simulado.

Este código fuente se encontrará también en los Anexos del presente trabajo (Anexo 3) y solo será necesario copiar y pegar en su totalidad el código fuente en un editor de código para su ejecución e ingresar los parámetros de interés por el usuario.

Hagamos Una LG

En esta sección, se presentan los momentos y actividades que conforman a la propuesta de enseñanza de la relatividad y el fenómeno de LG. Para ello, se describen los objetivos y el tipo de actividades que permitirán llegar a un estudio de las LG. Por último, son presentados algunos resultados que se esperan obtener al implementar la propuesta expuesta.

LG En El Aula

Con el aplicativo anteriormente descrito, se posibilita la construcción de un sistema simple de LG que logre mostrar cómo se encuentran relacionados los parámetros y la formación de imágenes que caracterizan a este fenómeno. Esta relación puede apreciarse al modificar los valores que pueden tomar las variables del aplicativo y obtener simulaciones y magnitudes físicas diferentes.

Son múltiples los parámetros que pueden condicionar la observación y generación de imágenes de una fuente, para el desarrollo de esta sección nos centraremos en aquellos parámetros que describen aspectos como, las distancias entre los cuerpos, sus posiciones en el plano (lente y fuente) y el área de acción que la lente tiene. Otros parámetros relacionados como el perfil de luz o la resolución de la imagen se mantendrán sin cambio alguno²⁴.

Con base en lo anterior, a continuación, se proponen siete actividades divididas en tres momentos las cuales buscan afianzar las nociones que tienen los estudiantes con respecto al concepto de espacio y así acercarnos a un estudio del fenómeno de lente mostrando cómo se relacionan las perturbaciones que se presentan en este y su formación de imágenes. Estas actividades son dirigidas a estudiantes de la Licenciatura en Física o carreras afines que aborden cursos relacionados con la TGR y sus derivaciones. Como prerrequisito es necesario conocer cómo desde la relatividad son abordados los conceptos de espacio y geometría, así como su relación con cuerpos masivos.

Las actividades se dividen en tres momentos en donde se observan, analizan y describen los efectos y magnitudes presentes en el estudio de las LG como, el número de imágenes que se generan, la magnificación que sufren, las posiciones que estas adquieren y de qué forma interactúa

²⁴ Se mantienen los mismo valores presentados en la sección anterior. Esto no quiere decir que no sean susceptibles a modificaciones por el usuario.

la luz con los cuerpos. En cada momento son desarrolladas dos actividades en donde se busca que los estudiantes afiancen sus conocimientos en relatividad y se compruebe desde el estudio de las lentes.

En un primer momento, las actividades se enfatizan en identificar aquellas ideas previas que los estudiantes poseen frente al concepto de espacios Euclídeos y no Euclídeos, así como también, realizar una descripción de las características y propiedades de dichos espacios.

Objetivos	#	Actividades	Resultados Esperados
Reconocer las características y propiedades de un espacio Euclídeo y no Euclídeo. Identificar los parámetros que alteran el espacio Euclídeo y no Euclídeo de acuerdo con su métrica.	1	Formular a los estudiantes cuatro preguntas que permitan mostrar las ideas previas que tienen frente al concepto de espacio y sus tipos (Anexo 2, Primer Momento: Actividad 1). Estas preguntas se responden individualmente y luego se realiza una socialización grupal de las mismas. Al recopilar sus respuestas, el docente realiza una explicación en torno a qué es un espacio Euclídeo y no Euclídeo que permita consolidar y exponer aquellos aspectos que los componen y diferencian. Por último, los estudiantes realizan un cuadro comparativo en el que se evidencien las características pertenecientes a cada espacio y los escenarios que pueden ejemplificarlos (Anexo 2, Primer Momento: Actividad 1). (Tiempo Estimado: Dos horas)	*Los estudiantes identificarán las diferencias entre un espacio Euclídeo y no Euclídeo al señalar qué elementos caracterizan y pertenecen a cada espacio. *Los estudiantes evidenciarán qué parámetros pueden modificar el espacio al realizar una comparación de la distancia estimada entre dos puntos y observar los trayectos que un haz de luz toma bajo métricas distintas.

	2 Proponer a los estudiantes un ejercicio de solución analítica que permita estimar la distancia entre dos puntos a partir de dos métricas diferentes (Anexo 2, Primer Momento: Actividad 2). Luego de estimar dicha distancia, los estudiantes responden a tres preguntas que se logren mostrar cómo se encuentran relacionados el uso de métricas, la estimación de magnitudes y los trayectos considerados. Tras una socialización de las respuestas hechas por los estudiantes individualmente, el docente realiza una explicación y descripción de aquellos otros escenarios en donde varía la métrica de un espacio. Por último, se muestran dos ilustraciones en donde se comparen el comportamiento de los haces de luz en un espacio Euclídeo (plano) y no Euclídeo (curvo). A partir de estos, los estudiantes describen sus similitudes y diferencias (Anexo 2, Primer Momento: Actividad 2). (Tiempo Estimado: Dos horas)	
Los estudiantes logran diferenciar y describir las características y aspectos que identifican a cada tipo de espacio, así como también, comprender que factores pueden modificarlo a partir de comparaciones entre espacios y métricas.		

En un segundo momento, las actividades son centradas en mostrar cómo se compone un fenómeno de LG y los elementos o parámetros que permiten la observación de este. También, son

mostrados algunos fenómenos de lente simulados con los cuales se evidencien y aprecien las ubicaciones, distribuciones de las imágenes aparentes del fenómeno.

Objetivos	#	Actividades	Resultados Esperados
Reconocer los trayectos que la luz toma en cercanías a un cuerpo masivo para un espacio plano y curvo. Determinar las magnitudes y cambios posicionales que experimentan las imágenes de un cuerpo lejano en un fenómeno de lente a partir de eventos simulados.	1	Formular a los estudiantes cinco preguntas que permitan mostrar las ideas previas que tienen frente a los trayectos que toman los cuerpos en el espacio (Anexo 2, Segundo Momento: Actividad 1). Dichas preguntas se responden de forma individual y luego son socializadas grupalmente. Posteriormente, el docente realiza una explicación en torno a qué factores contribuyen con las modificaciones en los trayectos que toman los cuerpos desde una perspectiva relativista y su relación con la observación de imágenes en un fenómeno de lente. En dicha explicación son presentadas las ecuaciones que describen al fenómeno de lente. Por último, los estudiantes realizan una descripción de las características que identifican a un fenómeno de lente y sus condiciones de observación (Anexo 2, Segundo Momento: Actividad 1). (Tiempo Estimado: Dos horas)	*Los estudiantes reconocerán los diferentes trayectos que los cuerpos pueden tener según el espacio al describir el comportamiento de los haces de luz que interactúan con los cuerpos masivos. *Los estudiantes identificarán qué elementos conforman a un fenómeno de lente y cómo son observadas las imágenes aparentes de una fuente lejana al describir las condiciones mínimas de formación y observación.
	2	Mostrar a los estudiantes cuatro escenarios en donde se evidencien las semejanzas y	

	diferencias entre un sistema de lentes y el fenómeno de lente gravitacional (Anexo 2, Segundo Momento: Actividad 2). Los estudiantes deben señalar aquellos elementos análogos que encuentren en ambos escenarios y mostrar su relación con las ecuaciones expuestas anteriormente. Luego, son mostrados cinco imágenes simuladas del fenómeno de lente, y a partir de estas, se realiza una explicación en relación con los haces de luz, un cuerpo masivo y su incidencia en la formación de imágenes aparentes. Por último, los estudiantes realizan una descripción relacionada con los elementos necesarios para la representación y observación del fenómeno de lente (Anexo 2, Segundo Momento: Actividad 2) (Tiempo Estimado: Dos horas)	
Los estudiantes reconocerán que trayectos toma la luz cuando es modificado el espacio en cercanías a un cuerpo masivo y las características más representativas del fenómeno de lente gravitacional con descripciones entorno a la formación de imágenes y los factores que las generan.		

Por último, para un tercer momento, las actividades son enfocadas hacia la construcción y observación de lentes gravitacionales a partir del uso del aplicativo en el que se evidencie la relación entre la geometría del cuerpo y las imágenes generadas. Con dichas actividades también se realiza una comparación entre modelos de masa y sus magnitudes físicas. Cabe señalar que el aplicativo al que se hace referencia es el encontrado en el Anexo 3, el cual puede copiar y pegar en un editor de código para su ejecución.

Objetivos	#	Actividades	Resultados Esperados
Identificar los parámetros y elementos base que permiten una modelación y simulación del fenómeno de lente gravitacional. Reconocer la relación entre la simetría del cuerpo lente y la formación de imágenes al rededor del cuerpo lente. Determinar los parámetros que se asemejen a una observación real del fenómeno de lente.	1	Realizar una explicación sobre el funcionamiento del aplicativo para la modelación y simulación del fenómeno de lente, señalando los parámetros mínimos requeridos para la ejecución de este. Luego, se realizan de forma grupal la construcción de cinco escenarios donde los estudiantes deberán describir el comportamiento de los haces de luz para diferentes ubicaciones de una fuente lejana (Anexo 2, Tercer Momento: Actividad 1). Por último, son socializados los resultados de los estudiantes y señalados aquellos escenarios en donde los efectos como la magnificación y el retardo temporal tienen un valor máximo y mínimo. (Tiempo Estimado: Una sesión)	*Los estudiantes comprenderán cómo la posición aparente de una fuente puede generar múltiples imágenes de un mismo cuerpo a partir de los escenarios construidos y las magnitudes estimadas. *Los estudiantes identificarán cómo la formación de imágenes aparentes se encuentra relacionado con parámetros como la distribución y la excentricidad del cuerpo lente a partir de comparar fenómenos de lente construidos. *Los estudiantes reconocerán los parámetros mínimos para la construcción de un fenómeno de lente real al describir y comparar las diferencias entre los parámetros registrados y los supuestos.
	2	Plantear a los estudiantes tres preguntas relacionadas con la simetría del cuerpo lente y su interacción con la luz de un cuerpo lejano, que permitan obtener aquellas ideas previas que tienen sobre la formación de imágenes alrededor de la lente (Anexo 2, Tercer Momento: Actividad 2). Luego de haber socializado las respuestas, se propone a los	

	estudiantes construir en el aplicativo (Anexo 3), a partir de parámetros indicados cinco diferentes de lente gravitacional en donde se observen la variación de imágenes aparentes que se obtienen de dicho parámetro. Por último, se solicita a los estudiantes que agrupen los eventos construidos y describan las similitudes y diferencias en cada imagen aparentes según su brillo, amplitud y ubicación de la fuente y sus imágenes (Anexo 2, Tercer Momento: Actividad 2). (Tiempo Estimado: Dos horas)	
3	Se muestran una observación real de lente gravitacional y, a partir de ellas, se propone reconstruir la misma imagen a partir del aplicativo y los parámetros usados en actividades anteriores (Anexo 2, Tercer Momento: Actividad 3). Luego de realizar diferentes ensayos para reconstruir las imágenes mostradas, se realizará una comparación entre los valores reales y estimados de la observación con los sugeridos por los estudiantes. Los estudiantes describirán que factores fueron y no fueron tomados en cuenta para la reconstrucción de las observaciones. Por último, se realizan cinco preguntas que muestren cómo	

	los estudiantes relacionan la observación de imágenes, su formación y las alineaciones de los entes involucrados en el fenómeno (Anexo 2, Tercer Momento: Actividad 3). (Tiempo Estimado: Una sesión)	
Los estudiantes evidenciarán la relación entre la formación de imágenes y la deformación del espacio al observar y construir un fenómeno de lente a partir de parámetros propuestos y sugeridos.		

Con las actividades descritas los estudiantes podrán afianzar de manera paulatina y progresiva algunas temáticas que son tratadas en relatividad, pero también mediante el uso del aplicativo se estudiarán y observarán algunos parámetros iniciales que permitan la construcción de un fenómeno de lente. La implementación de este tipo de aplicativos logra apreciarse de forma directa que factores en la modelación y simulación tienen un grado de incidencia mayor que otros, y como sus efectos también se ven afectados por estos.

A Qué Se Quiere Llegar

Al finalizar la propuesta, se busca que los estudiantes reconozcan, comprendan e identifiquen los elementos que se encuentran presentes en un fenómeno de LG. Lo anterior, se observa a partir de las respuestas expuestas en las diversas socializaciones, descripciones y comparaciones de cada actividad, así como también, afianzar el concepto de espacio que se aborda en el estudio de la relatividad evidenciando su relación con la observación y formación de las imágenes aparentes de un cuerpo lejano. Lo anterior se puede ver reflejado al describir qué condiciones son requeridas para una observación y por qué el espacio deformado por un objeto masivo puede converger en un punto los haces de luz emitidos por un cuerpo lejano.

Parte de las descripciones que los estudiantes realizan, y que se encuentran en torno al fenómeno de lente, es el tipo de espacios en el que se desarrollan los eventos físicos y los diferentes trayectos que un cuerpo puede tomar si este se encuentra en un espacio Euclídeo o no Euclídeo. Es decir, se espera que los estudiantes señalen las características de cada tipo de espacio y los elementos de línea que identifican a estos, y de esta manera adquieran herramientas y nociones que permitan comprender por qué puede generarse un fenómeno como este.

Con el desarrollo de la propuesta, los estudiantes comprenden que aspectos del fenómeno de LG se asemejan a una lente física y cómo sus ecuaciones pueden abordarse desde una perspectiva geométrica. Al resaltar esas diferencias y similitudes entre lentes físicas y gravitacionales, se comprenden y observan de qué forma las imágenes aparentes de un cuerpo lejano se magnifican y las diferencias temporales que pueden estimarse entre sí. Lo anterior, debido a las interacciones gravitacionales que se tiene con la luz y los desplazamientos extra que un haz de luz debe tomar si este no sigue un trayecto recto en el espacio.

Al finalizar las actividades, los estudiantes adquieren elementos que permitan un estudio entorno a perfiles de luz y masa con parámetros que amplíen la propuesta inicial. Lo anterior, ofreciendo otros fenómenos o casos de estudio alternativos que extiendan el panorama expuesto con relación a la deformación del espacio o la deflexión de la luz. De este modo, los estudiantes también observan y evidencian la aplicabilidad de los conceptos y descripciones tratados en la propuesta a escenarios reales o que se asemejen a ella. Finalmente, con la propuesta los estudiantes adquieren y comprenden aquellos elementos que describen y caracterizan al fenómeno de lente.

La implementación de esta propuesta no se llevó a cabo debido a la falta de espacios y población adecuados para el desarrollo de las actividades, ya que, se requiere encontrar cursos donde el estudio de las LG sea considerado como un eje o aspecto central de este y un grupo de estudiantes familiarizado con el uso de un lenguaje de programación Python.

Adicionalmente, la propuesta requiere de una inversión considerable de tiempo, lo que podría saturar el contenido de cursos de relatividad en desarrollo y alterar la metodología establecida por el docente, generando así una contraposición con los objetivos del curso.

Por lo tanto, se sugiere que, para una implementación de esta propuesta en cursos de relatividad o afín, se identifiquen espacios orientados al estudio de las LG, con estudiantes que posean conocimientos básicos de programación en Python. Además, realizar una articulación previa de los contenidos programáticos con las actividades propuestas, con el fin de asegurar una integración coherente y efectiva.

Conclusiones

A continuación, son expuestas las conclusiones que se obtuvieron tras el desarrollo del presente trabajo y aquellas perspectivas futuras que puedan dar continuidad a la investigación tanto para la enseñanza de la relatividad y el fenómeno de lente como para un estudio entorno a la simulación de dicho fenómeno.

Por medio de la propuesta es posible abarcar algunos conceptos tratados en el estudio de la relatividad y mostrar una relación directa con fenómenos astrofísicos donde esta es evidente, permitiendo realizar explicaciones y descripciones de lo que ocurre en el espacio. Al observar dicha relación, se reduce el contenido abstracto que los conceptos puedan tener al ser expuestos en clase y presentarse con mayor claridad su vínculo con la física.

La propuesta también permite ejemplificar cómo se construye un fenómeno de lente, mostrando las interacciones entre la luz y los cuerpos masivos, a partir de las descripciones y estimaciones proporcionadas por la TGR. Mediante la construcción y análisis de este tipo de fenómenos, es posible verificar y comprender la validez de dicha teoría, así como su concordancia con las observaciones reales.

Durante la elaboración del trabajo, fue necesario profundizar en elementos que describen el fenómeno de lente como, las interacciones que tienen los haces de luz en cercanías a un cuerpo masivo y partir de ellos entender cómo se relaciona con el Radio de Einstein y la incidencia que tiene la distribución de masa para la observación del fenómeno. Lo anterior, también me permitió comprender qué tipo de parámetros pueden, tanto caracterizar al fenómeno de lente como representarlo en una modelación.

En el mismo sentido, fue necesario ahondar en aspectos como, la deflexión y distribución de la luz cuando un cuerpo deforma el espacio y genera múltiples imágenes de un mismo cuerpo. A partir de dichos aspectos, se logró evidenciar y comprender cómo influye la simetría de los cuerpos en la observación de imágenes y cómo la luz se ajusta con diferentes distribuciones de masa.

Por otro lado, en el estudio de las LG, son abarcados aquellos efectos que también caracterizan a un fenómeno de lente como, el retardo y la magnificación de imágenes, los cuales puede añadir a cursos de relatividad elementos que permitan apreciar diferencias temporales

cuando el espacio es distorsionado y aumentos en las imágenes aparentes si existen múltiples trayecto que convergen en un punto.

El estudio de este tipo de fenómenos también ofrece la posibilidad de ser abordado desde una perspectiva geométrica al establecerse relaciones de tipo trigonométricas presentes entre el observador, el cuerpo lente y la fuente lejana. Lo anterior, permite mostrar cómo pueden ser sintetizadas la deducción de las ecuaciones entorno al fenómeno y con ellas complementar el desarrollo de los cursos de relatividad.

Las LG al ser una línea de investigación en desarrollo de la física moderna y que se deriva de la TGR cuenta con la posibilidad de usarse como canal o medio que permita mostrar cómo se encuentran ligados los conceptos y nociones abordados en dicha teoría con los fenómenos que se observan en el espacio. Esta relación entre lo teórico y lo observado, logra evidenciar la relevancia y aplicabilidad que tiene el fenómeno de lente en eventos reales tales como la estimación de masa y la expansión del universo.

Al elaborar esta propuesta, fue posible comprender la importancia y relevancia que esta línea de investigación tiene actualmente en diferentes campos de estudio como, la búsqueda de exoplanetas o la estimación de masa de cuerpos masivos, por tanto, al abordarse este tipo de fenómenos, logra establecerse como un punto de partida para comprender aspectos con relación a la distribución de masa en el universo o su evolución.

En el desarrollo del trabajo y la elaboración de la propuestas, fue posible adquirir habilidades entorno a ámbitos académicos y profesionales tales como, el manejo del lenguaje de programación Python y la construcción de un aplicativo orientado así la enseñanza. Al ampliar y reforzar este tipo de habilidades, se logra continuar con el diseño de aplicativos que abarquen otros fenómenos y realizar investigaciones que también implementen dicho lenguaje.

Del mismo modo, el desarrollar y proponer actividades con relación al estudio de las LG apoyadas por un aplicativo, permitió comprender que estas deben componerse tanto de elementos teóricos que afiancen los conocimientos que han sido adquiridos, como elementos prácticos que permitan comprobar los efectos y observaciones predichos desde la teoría.

Proyecciones

Después de una primera implementación de la propuesta, esta puede estar sujeta a modificaciones que busquen complementar las actividades que se proponen y con ellas ampliar los alcances logrados desde la propuesta inicial. De la misma manera, con el aplicativo se prevé que a este pueda añadirse funciones, módulos y parámetros que permitan construir observaciones más precisas y cercanas a las registradas.

Si bien, en la propuesta son tratados elementos que realizan una descripción del fenómeno de lente y logra por medio de un aplicativo ejemplificar dicho fenómeno, a este último pueden agregarse procesos que complementen la simulación. Por ejemplo, añadir variables en relación con el ruido presente en observaciones reales, los cuales aportan aspectos que sumen para la reconstrucción de un fenómeno de lente.

Otro complemento que puede apoyar al aplicativo construido es realizar modelaciones y simulaciones con otros modelos de masa y luz que logren obtener visualizaciones del fenómeno más ajustado a la observación que se busca. Es decir, considerar modelos que requieran otro tipo de parámetros no contrarios a los usados en el aplicativo inicialmente.

Por otro lado, a la propuesta pueden integrarse actividades con tiempos de implementación más amplios que permitan abordar otras temáticas que complementen a estas, como explicaciones entorno a la aproximación de lente delgada o la relación entre causticas e imágenes aparentes.

Por último, en la propuesta también pueden incluirse actividades que requieran estimar de forma analítica los efectos que se presentan en un fenómeno de lente si una fuente lejana adopta diferentes ubicaciones. Estos con el objetivo de afianzar en los estudiantes la relación entre los parámetros que describen una LG y los efectos que desde lo teórico se predicen.

Anexos

Anexo 1

A continuación, es presentado el código fuente usado para exponer y describir en la sección “La Base Es *Lenstronomy*” los módulos, submódulos, funciones, parámetros base y procesos para la construcción de un fenómeno de LG. Para la ejecución de dicho código, es necesario que se tengan instaladas librerías como Numpy y Matplotlib, las cuales puede adquirirse desde la terminal usando los comandos **pip install numpy** y **pip install matplotlib** respectivamente. Del mismo modo puede ser instalado *Lenstronomy* con la línea de comandos **pip install lenstronomy**.

El presente código se extrajo directamente del editor *Visual Basic*, por ende, se recomienda copiar y pegar si se desea comprobar el funcionamiento de este. Es importante recordar y mencionar que el presente código fuente no corresponde al implementado para el desarrollo de la propuesta y que su intencionalidad es mostrar cómo se encuentran organizados los módulos y cuáles son los requeridos para la construcción del aplicativo.

Código Fuente

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

from lenstronomy.LensModel.lens_model import LensModel
lens_model_list=['POINT_MASS']          # Modelo de Masa Puntual.
lensModel=LensModel(lens_model_list)
kwargs_pm={'theta_E':1,                 # Lista de parámetros. Radio de
Einstein (Valores entre 0 y 2).
            'center_x': 0,              # Posición de la lente en el eje x
(Mantener en cero).
            'center_y':0}               # Posición de la lente en el eje y
(Mantener en cero).
kwargs_lens=[kwargs_pm]
theta_ra, theta_dec= -0.6,0.9           # Posición de una imagen aparente (en
radianes).
beta_ra, beta_dec=lensModel.ray_shooting(theta_ra,theta_dec,kwargs_lens)

from lenstronomy.LensModel.Solver.lens_equation_solver import LensEquationSolver
solver=LensEquationSolver(lensModel)
theta_ra, theta_dec=solver.image_position_from_source(beta_ra, beta_dec, kwargs_lens)
mag = lensModel.magnification(theta_ra, theta_dec,kwargs_lens)
```

```

from lenstronomy.LightModel.light_model import LightModel
source_light_model=['SERSIC'] # Perfil de Luz (Fuente).
lightModel_source=LightModel(source_light_model)
kwargs_light_source = [{'amp': 4000, # Lista de parámetros Amplitud de la
fuente (valores > 0)
'R_sersic': 0.1, # Radio Efectivo (valores > 0).
'n_sersic': 3, # Índice Sérsic ( $8 < n < 0.5$ ).
'center_x': beta_ra, # Posición de la fuente en eje x.
'center_y': beta_dec}] # Posición de la fuente en eje y.

lens_light_model_list=['SERSIC'] # Perfil de Luz (Lente).
lightModel_lens=LightModel(lens_light_model_list)
kwargs_light_lens = [{'amp': 400, # Amplitud de la lente (valores > 0).
'R_sersic': 1, # Radio Efectivo (valores > 0).
'n_sersic':2, # Índice Sérsic ( $8 < n < 0.5$ ).
'center_x': 0, # Posición de la lente en eje x.
'center_y': 0}] # Posición de la lente en eje y.

from lenstronomy.PointSource.point_source import PointSource
point_source_model_list=['LENSED_POSITION'] # Modelo de fuente puntual.
pointSource=PointSource(point_source_model_list, lensModel, [False])
kwargs_ps=[{'ra_image':theta_ra, # Coordenada RA de la imagen.
'dec_image':theta_dec, # Coordenada DEC de la imagen.
'point_amp':np.abs(mag)*30}] # Amplitud que se observa en la
imagen.

from lenstronomy.Data.pixel_grid import PixelGrid
deltaPix=0.025 # Tamaño del píxel en segundos de
arco.
ra_at_xy_0, dec_at_xy_0 = -2.5, -2.5 # Punto de inicio en coordenadas RA y
DEC
transform_pix2angle = np.array([[1, 0], [0, 1]]) * deltaPix
kwargs_pixel = {'nx': 200, # Número de píxeles en eje x.
'ny': 200, # Número de píxeles en eje y.
'ra_at_xy_0': ra_at_xy_0, # Coordenada RA de píxel.
'dec_at_xy_0': dec_at_xy_0, # Coordenada DEC de píxel.
'transform_pix2angle': transform_pix2angle}
pixel_grid = PixelGrid(**kwargs_pixel) # Rejilla de simulación.

from lenstronomy.Data.psf import PSF
kwargs_psf = {'psf_type': 'GAUSSIAN', # Tipo de función de dispersión de
puntos.
'fwhm': 0.1, # Anchura máxima para la función.
'pixel_size': deltaPix} # Tamaño de píxel.

```

```

psf = PSF(**kwargs_psf) # Objeto que simula la dispersión de
luz

from lenstronomy.ImSim.image_model import ImageModel
kwargs_numerics = {'supersampling_factor':1, 'supersampling_convolution': False}
imageModel = ImageModel(pixel_grid, # Instancia definida en módulo
Data.pixel_grid.
psf, # Instancia definida en módulo
Data.psf.
lensModel, # Instancia definida en módulo
LensModel.
lightModel_source, # Instancia definida en módulo
LightModel (de fuente).
lightModel_lens, # Instancia definida en módulo
LightModel (de lente).
pointSource, # Instancia definida en módulo
PointSource.
None, # Instancia no definida, no
relevante.
kwargs_numerics, # Instancia definida en módulo ImSim.
None) # Instancia no definida, no
relevante.

image=imageModel.image(kwargs_lens, # Lista de parámetros definidos en
LensModel.
kwargs_light_source, # Lista de parámetros definidos en
LightModel (de fuente).
kwargs_light_lens, # Lista de parámetros definidos en
LightModel (de lente).
kwargs_ps) # Lista de parámetros definidos en
PointSource.

from lenstronomy.Plots import lens_plot
f, ax=plt.subplots(figsize=(6,6 ))# Tamaño de la figura.
lens_plot.lens_model_plot(ax, # Instancia usada previamente.
lensModel, # Instancia definida en módulo
LensModel.
kwargs_lens, # Lista de parámetros definidos en
LensModel.
450, # Total número de píxeles.
0.01, # Tamaño de píxel.
beta_ra, # Posición de la fuente en eje x.
beta_dec, # Posición de la fuente en eje y.
True, # Marcar fuente.
True, # Mostrar Cáustica y curva crítica.

```

```

False,          # Mostrar Convergencia.
0,              # Coordenada RA central en la figura.
0,              # Coordenada DEC central en la
figura.
False,          # Invertir eje x.
False)          # Estimar cáustica rápida.
plt.grid()       # Rejilla para ubicación de
coordenadas.

#plt.show()      # Mostrar modelo.

plt.figure(figsize=(6,6)) # Tamaño de la figura.
plt.imshow(np.log10(image), origin='lower') # Método de visualización. Logaritmo
a datos tomados de variable image.
plt.axis('off')   # Eliminar ejes de píxeles

plt.show()        # Mostrar simulado .

```

Anexo 2

Propuesta

Se presenta a continuación una propuesta orientada al estudio de la relatividad y el fenómeno de lentes gravitacionales. Dicha propuesta, es construida a partir de una serie de actividades en las que se abarcan elementos teóricos y prácticos entorno al estudio de las lentes. Para un primer momento, se realizan actividades con las cuales se puedan describir el espacio en el que se desarrollan los eventos físicos y el uso de sus respectivas métricas, En un segundo momento, las actividades son centradas en mostrar cómo se encuentran relacionados los trayectos que toman los cuerpos y caracterizar el fenómeno de lente. Y finalmente, esta propuesta se concluye realizando la construcción de una serie de lentes en donde se observan como la variación de parámetros modifica la formación de imágenes y como estas inciden en la reconstrucción de estos.

Primer Momento: Actividad 1

Objetivo: Reconocer las características y propiedades de un espacio Euclídeo y no Euclídeo.

Se formulan a los estudiantes cuatro preguntas orientadoras que permitan obtener y exponer aquellas ideas previas que se tienen en torno al concepto de espacio (Euclídeo y no Euclídeo). A partir de las respuestas que los estudiantes puedan brindar, estas pueden tomarse como puntos de partida para realizar una explicación general de los conceptos y sus aspectos más relevantes.

Preguntas Orientadoras

- a. ¿Qué entiende usted por espacio Euclidiano?
- b. ¿Qué entiende usted por espacio no Euclidiano?
- c. ¿Está usted en un espacio Euclídeo y no Euclídeo? ¿Por qué?
- d. ¿Los postulados de Euclides también se cumplen en un espacio no Euclídeo? ¿Por qué?

Formuladas y realizadas las preguntas, los estudiantes exponen de manera grupal sus respuestas y a partir de ella, se establecen algunos mínimos que logren sintetizar qué se entiende por espacio Euclídeo y no Euclídeo y cómo estos pueden ser diferenciados.

Primer Momento: Actividad 2

Objetivo: Identificar los parámetros que alteran el espacio Euclídeo y no Euclídeo de acuerdo con su métrica.

Se propone a los estudiantes resolver un ejercicio de solución analítica que busque determinar la distancia de separación entre dos puntos en el espacio a partir del uso de dos métricas distintas que logren comprobar y evidenciar si existen un cambio en dicha magnitud.

Enunciado Del Ejercicio.

“En los alrededores de una estrella, se encuentran sobre un mismo eje dos estaciones espaciales que se comunican entre sí. La primera estación se encuentra ubicada a 10 km de distancia con respecto a la estrella y la segunda estación a 20 km con respecto a la misma. Determine la distancia entre ambas estaciones haciendo uso de la métrica de Minkowsky y posteriormente con la métrica de Schwarzschild, señale la diferencia entre ambas mediciones.”

Métrica de Minkowsky:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2$$

Métrica de Schwarzschild:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2$$

Desarrollado y solucionado el ejercicio propuesto, se formulan a los estudiantes tres preguntas con las cuales se logren describir cómo se encuentran relacionadas la estimación magnitudes y la métrica de un espacio y de qué forma inciden los parámetros que componen a cada métrica.

Preguntas

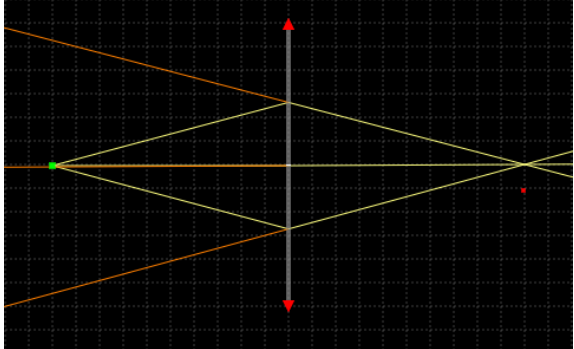
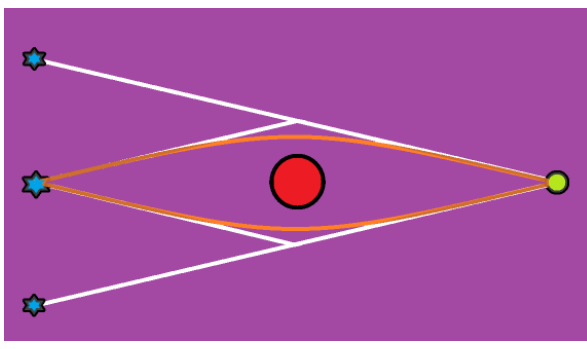
- a. Al usar dos diferentes métricas para estimar una misma magnitud, ¿Se encontraron resultados con diferencias significativas? ¿Si o No? ¿Cuáles?
- b. ¿Qué parámetros que componen a las métricas deben variarse para obtener un aumento y disminución de la distancia con mayor magnitud?

- c. ¿Qué tipo de trayectos unen espacialmente las estaciones si se tiene en cuenta la métrica de Minkowsky y de Schwarzschild?

Formuladas y realizadas las preguntas, los estudiantes exponen de manera grupal sus respuestas y a partir de ella, se establecen aquellos mínimos permitan a los estudiantes entender cómo las métricas de los espacio son relevantes estimar magnitudes.

Posteriormente, se realiza una explicación en la que se describan y observen otros escenarios en donde las métricas varían de acuerdo con el espacio que se considere y logren evidenciarse cómo también cambias sus trayectos.

La actividad se concluye mostrando a los estudiantes dos ilustraciones en donde se observen cómo una lentes ideal puede cambiar el trayecto original de un haz de luz (Ilustración A) y cómo un efectos similar se obtiene si el haz interactúa con cuerpos masivos (Ilustración B). A partir de estas, los estudiantes realizan una descripción de los elementos análogos que pueden apreciarse en ambos escenarios.

Ilustración A	Ilustración B
	
Elementos Análogos	

Segundo Momento: Actividad 1

Objetivo: Reconocer los trayectos que la luz toma en cercanías a un cuerpo masivo para un espacio plano y curvo.

Se formulan a los estudiantes cinco preguntas orientadoras que permitan obtener y exponer las ideas previas que tienen los estudiantes en torno a los trayectos que toman los cuerpos en el espacio. Las respuestas que se obtengan de estas serán tomadas como un punto de partida para una explicación general en relación con los trayectos óptimos que toman los cuerpos.

Preguntas Orientadoras

- a. ¿Qué tipo de trayectos toman los cuerpos que se mueven en el espacio?
- b. ¿Qué factores pueden cambiar la dirección del trayecto original de los cuerpos en el espacio?
- c. ¿Qué tipos de trayectos siguen los cuerpos en el espacio?
- d. ¿La luz que se observa de una fuente lejana (estrella, galaxia, etc.) se encuentra en el mismo lugar donde se ve? ¿Por qué?
- e. ¿Es posible observar más de una imagen de un mismo cuerpo? ¿Por qué?

Formuladas y realizadas las preguntas, los estudiantes exponen de manera grupal sus respuestas y a partir de ella, establecer algunos mínimos que logren sintetizar qué tipo de trayectos pueden seguir los cuerpos en el espacio y sus interacciones con cuerpos masivos.

Después de la socialización, se realiza una explicación en la que se abarquen cómo son modificados los trayectos que toman los cuerpos de acuerdo con la TGR y la relación entre luz y espacio. Dentro de la explicación también se muestra cómo es causado el fenómeno de lente y la formación de imágenes aparentes a partir de las ecuaciones que conforman a este.

La actividad se concluye al proponer a los estudiantes una descripción en la que se señalen las características que identifican al fenómeno de lente si este tiene como cuerpo lente una masa puntual y se encuentra cerca al eje óptico entre la fuente y el observador.

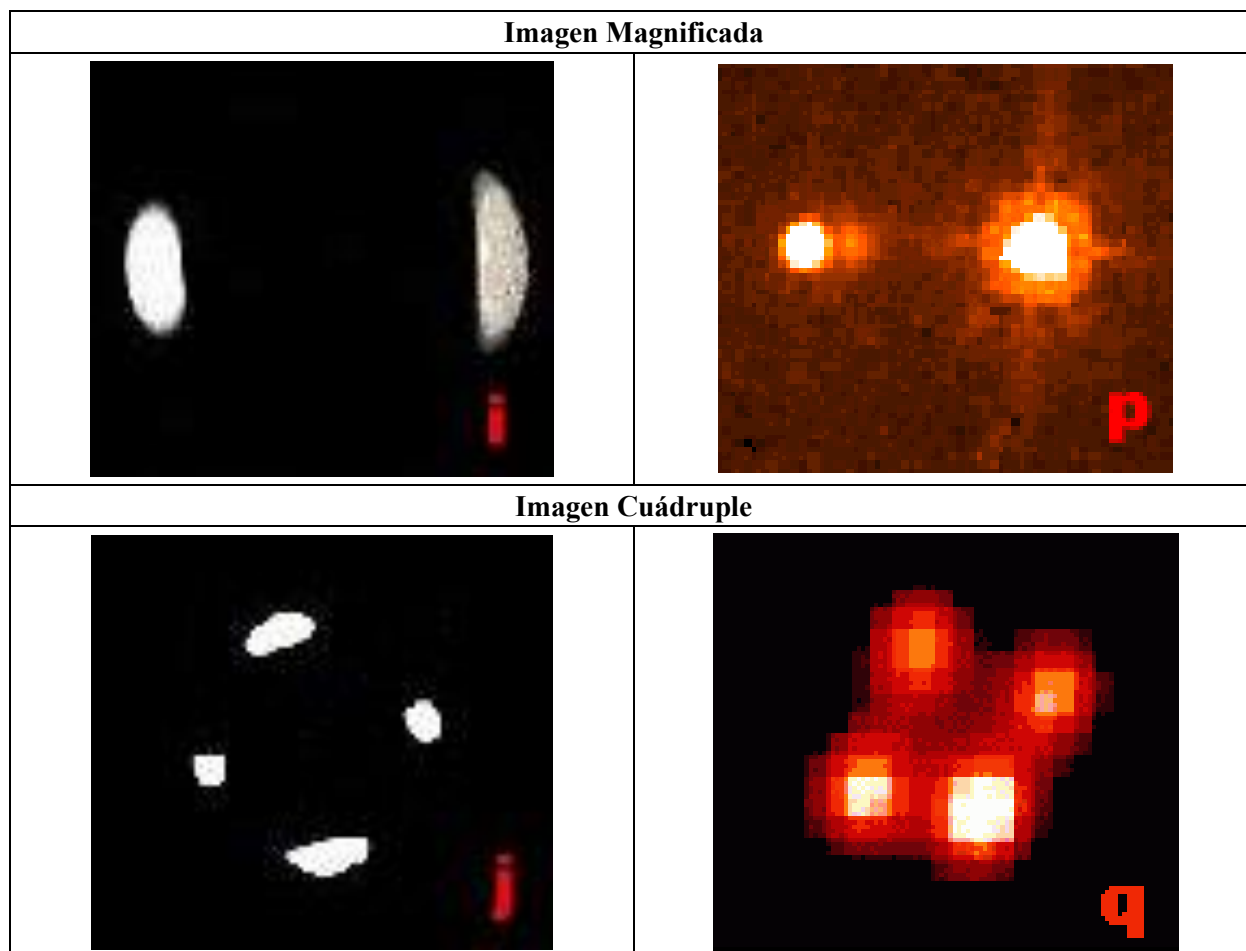
Segundo Momento: Actividad 2

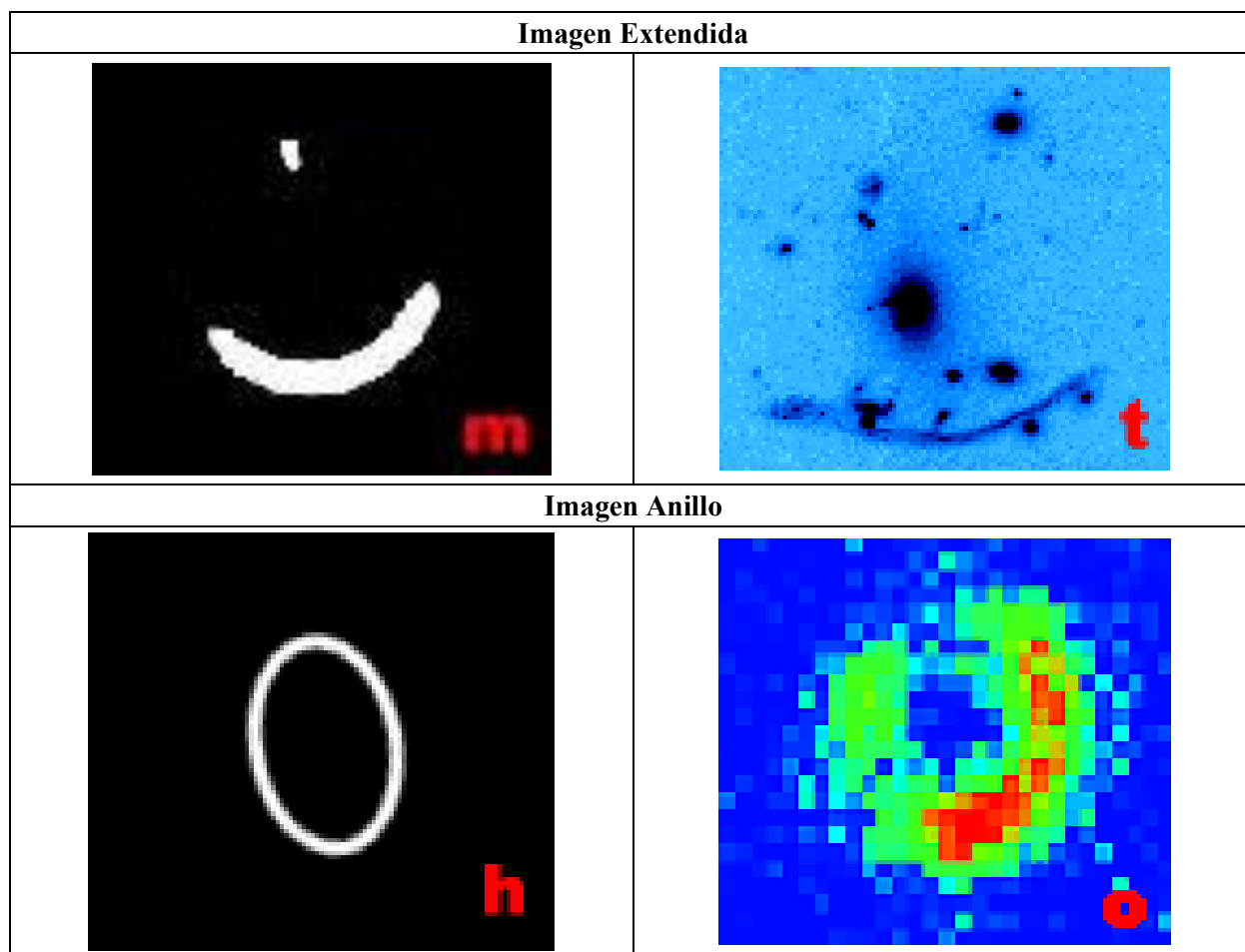
Objetivo: Determinar las magnitudes y cambios posicionales que experimentan las imágenes de un cuerpo lejano en un fenómeno de lente.

Se presentan a los estudiantes una serie de imágenes en donde se evidencien aquellas similitudes y diferencias entre las observaciones generadas por un montaje experimental con lentes y las observadas por telescopios espaciales. A partir de ellas, deben identificarse que aspectos se comparten o no en términos de la posición de las imágenes y las formas que se adoptan cuando una fuente de luz se ve obstruida por un cuerpo.

Imágenes Por Comparar

Las imágenes que a continuación se muestran fueron generadas en un experimento didáctico (lado izquierdo) compuesto de una fuente de luz, una lente y una superficie de proyección, el resto de las imágenes son generadas por un fenómeno de lente real (lado derecho).

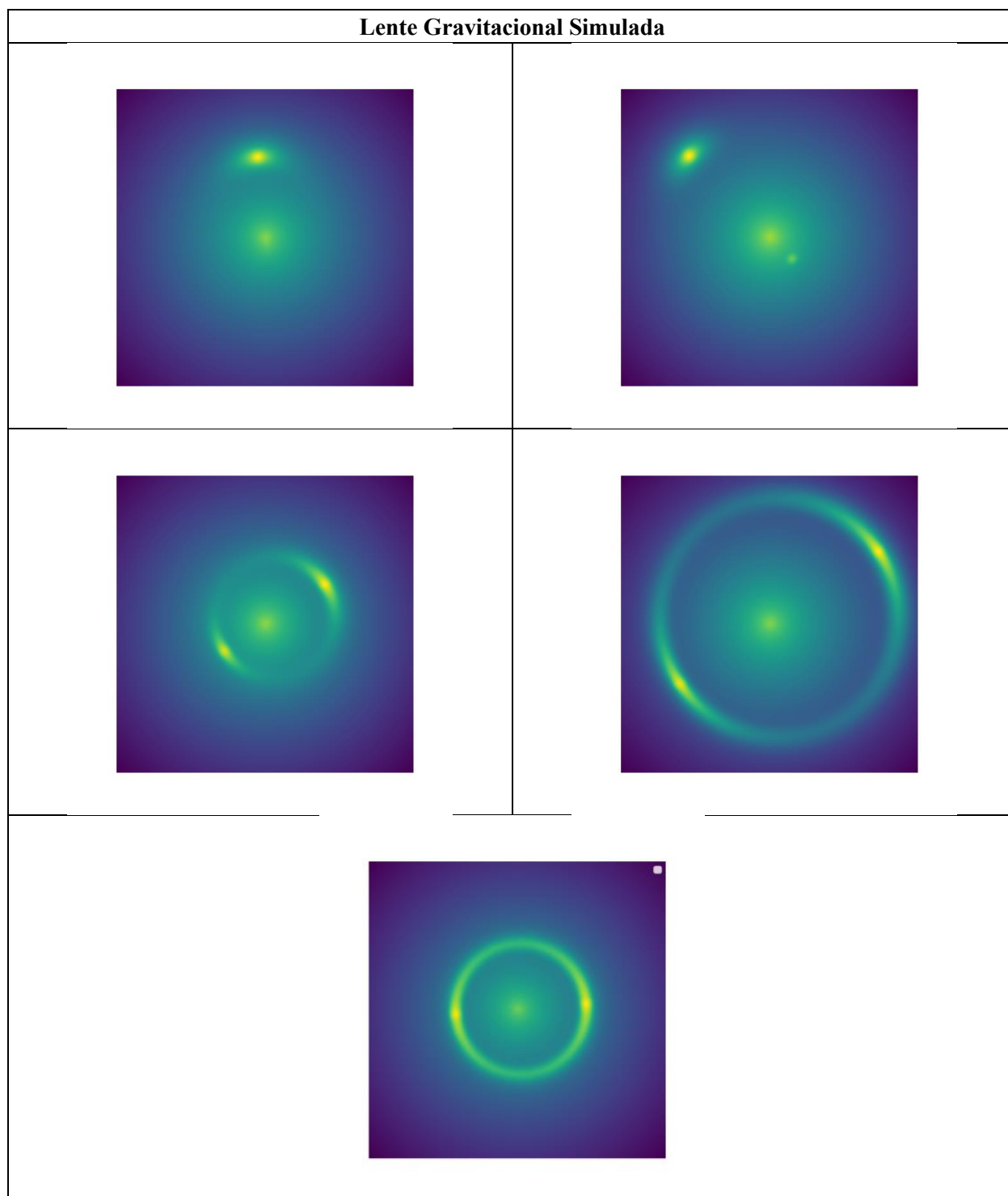




Nota: Las imágenes mostradas son tomadas de <https://n9.cl/ql5xqo>

Luego de presentar las imágenes, los estudiantes señalan las similitudes y diferencias observadas en cada una de ellas y a partir de las ecuaciones que describen al fenómeno de lente, se determina en qué casos es posible suponer una distribución de masa específica como puntual, esférica u otra.

Posteriormente, son mostrados a los estudiantes cinco fenómenos de lente simulados a partir del aplicativo (Anexo 3), con los cuales los estudiantes identificarán y realizan una aproximación de la ubicación que puede tomar el cuerpo lente y la magnitud de los efectos. Es importante señalar que las simulaciones son construidas bajo consideraciones como una única fuente y una masa puntual.



Tras observar las simulaciones, se realiza una explicación en torno al comportamiento de los haces de luz cuando una fuente, un cuerpo lente y un observador se encuentran parcial o totalmente alineados haciendo énfasis en la formación de imágenes y la distribución de luz.

La actividad se concluye realizando por parte de los estudiantes una descripción de las condiciones necesarias para generar un fenómeno de lente e indicando los parámetros que creen necesarios para una modelación y simulación de este.

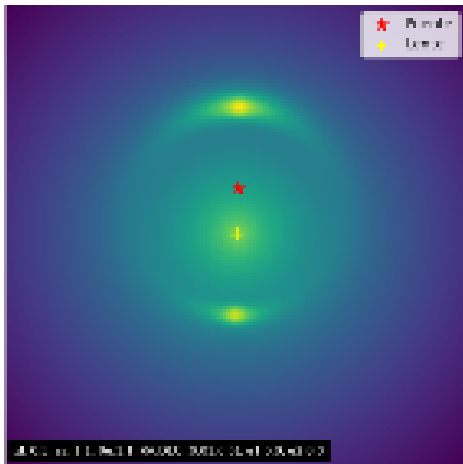
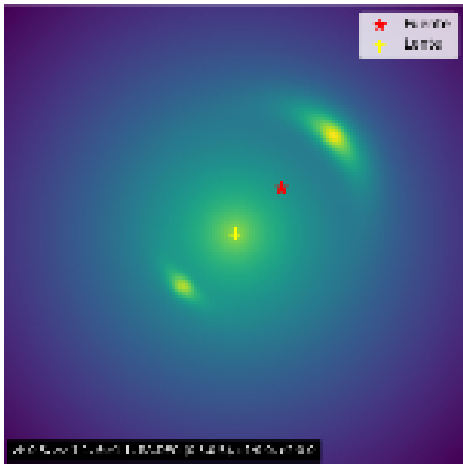
Tercer Momento: Actividad 1

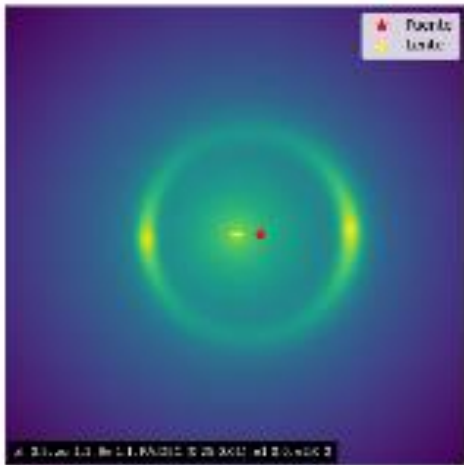
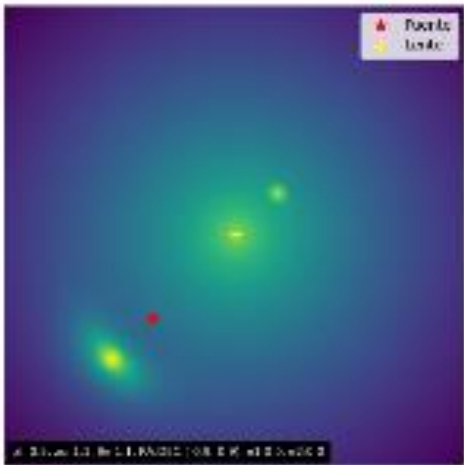
Objetivo: Identificar los parámetros y elementos base que permiten una modelación y simulación del fenómeno de lente gravitacional.

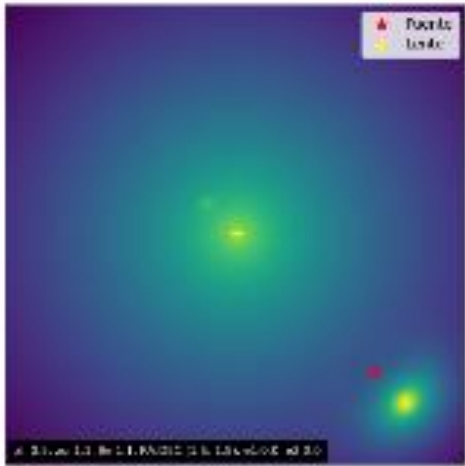
Se realiza una explicación con relación al funcionamiento del aplicativo construido (Anexo 3) y los parámetros necesarios para la modelación y simulación de un fenómeno de lente como, el Radio de Einstein, los desplazamientos al rojo de la lente y fuente y la ubicación que la fuente tiene con respecto a la lente.

Luego, de forma grupal, se construyen cinco ejemplos de lentes gravitacionales con los cuales se muestren la operatividad del aplicativo y cómo pueden variar la ubicación de las imágenes a partir de los parámetros señalados. A continuación, se presentan algunos valores y ejemplos sugeridos que pueden construirse. Es necesario mencionar que las imágenes que se observan a continuación son las simulaciones que se esperan por los estudiantes, por tanto, son imágenes de referencia para el docente.

Valores Parámetros
Parámetros como el Radio de Einstein y desplazamiento al rojo de la lente y fuente se mantienen constantes en los cinco casos. Sus valores corresponden a 1.1 segundos de arco, 0.5 (zl) y 1.1 (zs) respectivamente.

Caso 1	Caso 2
Coordenada Fuente: (0.01, 0.5)	Coordenada Fuente: (0.5, 0.5)
	

Caso 3	Caso 4
Coordenada fuente: (0.25, 0.01)	Coordenada fuente: (-0.9, -0.9)
	

Caso 5
Coordenada fuente: (1.5, -1.5)


La actividad de concluye con una socialización de las simulaciones realizadas en donde los estudiantes determinen y señalen en cuáles de los casos construidos se observa una mayor (y menor) separación, magnificaciones y retardo entre imágenes de acuerdo con la posición de la fuente.

Tercer Momento: Actividad 2

Objetivo: Reconocer la relación entre la simetría del cuerpo lente y la formación de imágenes al rededor del cuerpo lente.

Se formulan a los estudiantes tres preguntas orientadoras en relación con la simetría que el cuerpo lente puede tener y cómo esta inciden en la formación de imágenes ubicadas a su alrededor. Dichas preguntas, permitirán mostrar aquellas ideas previas que se tiene en torno al cambio de simetría si este ya no es considerado como un punto o una esférica.

Preguntas Orientadora

- ¿Cómo usted podría relacionar la formación de imágenes y la simetría que tiene un cuerpo lente?
- ¿Qué cambios observacionales podrían apreciarse en un fenómeno de lente si la simetría de un cuerpo pasa de ser esférica a elíptica?
- ¿Cree usted que a partir de las imágenes aparentes de un fenómeno de lente se puede estimar o suponer la simetría del cuerpo lente? ¿Si o No? ¿Por qué?

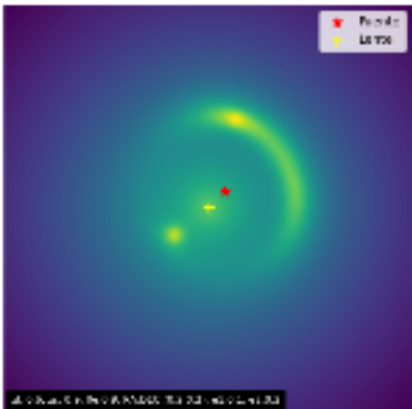
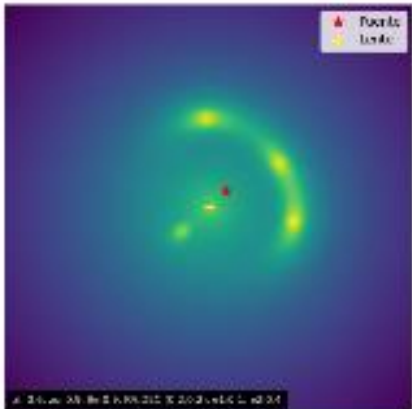
Posteriormente, las respuestas de los estudiantes serán socializadas y partir de ellas proponer la construcción de cinco fenómenos de lente en los que se varíe la simetría del cuerpo lente pasando de una distribución de masa esférica a una elíptica. Estas variaciones estarán en términos de la excentricidad mayor (e_1) y menor (e_2).

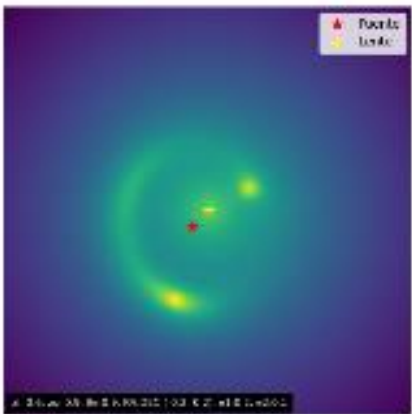
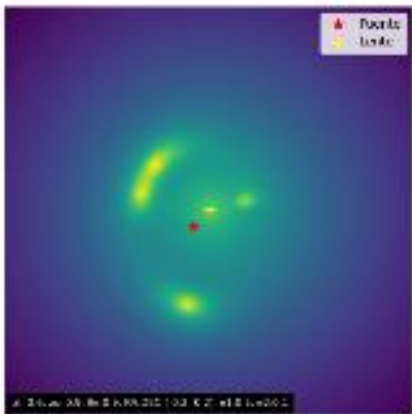
IMPORTANTE: Para modificar la simetría de la lente, se debe indicar en el aplicativo el cambio de modelo a considerar para la construcción de la lente. Lo anterior, puede realizarse al ejecutar el aplicativo (Anexo 3) y habilitar la opción 2 en el input **“Para un modelo de lente de Masa Puntual, digite 1. Para un modelo de lente de Masa Elíptico, digite 2”**. Es necesario mencionar que las imágenes que se observan a continuación son las simulaciones que se esperan por los estudiantes, por tanto, son imágenes de referencia para el docente.

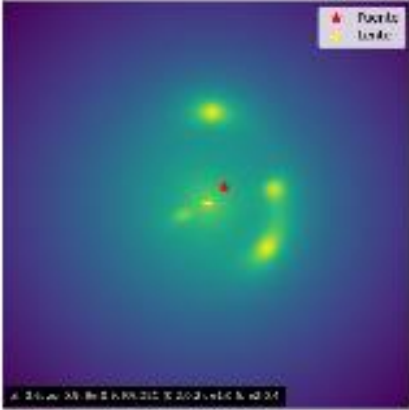
Los parámetros sugeridos para esta actividad son los siguientes:

Valores de parámetros

Parámetros como el Radio de Einstein y desplazamiento al rojo de la lente y fuente se mantienen constantes en los cinco casos. Sus valores corresponden a **0.9** segundos de arco, **0.6** (zl) y **0.9** (zs) respectivamente.

Caso 1		Caso 2	
Coordenada Fuente: (0.2, 0.2)		Coordenada Fuente: (0.2, 0.2)	
Excentricidad:	e1: 0.1	Excentricidad:	e1: 0.1
	e2: 0.2		e2: 0.4
			

Caso 3		Caso 4	
Coordenada Fuente: (-0.2, -0.2)		Coordenada Fuente: (-0.2, -0.2)	
Excentricidad:	e1: 0.2	Excentricidad:	e1: 0.5
	e2: 0.1		e2: 0.1
			

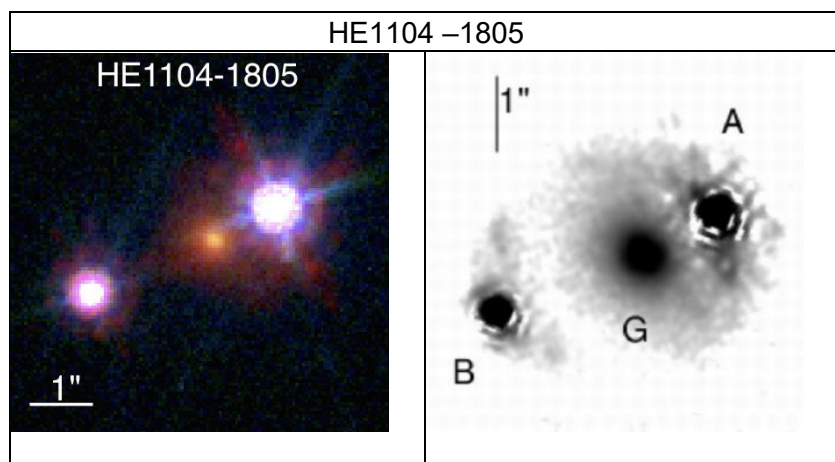
Caso 5	
Coordenada Fuente: (0.2, 0.2)	
Excentricidad:	e1: 0.5
	e2: 0.4
	

La actividad se concluye realizando una comparación al agrupar las simulaciones construidas y describiendo en cada una de ella qué semejanzas y diferencias logran apreciarse si se varían parámetros como la ubicación de la fuente y las excentricidades del cuerpo lente. La descripción de las simulaciones se realiza en términos del brillo, extensión, y ubicación de las imágenes aparentes.

Tercer Momento: Actividad 3

Objetivo: Determinar los parámetros que se asemejen a una observación real del fenómeno de lente.

Se presentan a los estudiantes una observaciones registradas de lentes gravitacionales en donde logran apreciarse la luminosidad que se presenta en ella y las ubicaciones aparentes de su fuente e imágenes. Para una identificación más precisa de los cuerpos e imágenes aparentes, en la observación son demarcadas la posición de las imágenes (A, B y la ubicación de su fuente (G).



Luego, teniendo como referencia la anteriores observación, se propone a los estudiantes realizar desde el aplicativo y a partir de los parámetros usados en actividades anteriores una reconstrucción aproximada de estas. Para ello, podrán realizar varios ensayos en donde intenten encontrar aquellos parámetros que consideren más adecuados que permiten obtener una simulación semejante a la observación que se mostró inicialmente.

Parámetros Estimados						
#	Redshift (zl)	Redshift (zs)	Radio Einstein	Coordenada Fuente	e1	e2
Ensayo 1						
Ensayo 2						
Ensayo 3						

Realizada una primera construcción aproximada del fenómeno de lente, son mostrados a los estudiantes el valor de los parámetros confirmados y, a partir de ellos, se comprueban que tan alejados o cercanos se encuentran de sus valores sugeridos. Los valores mostrados previamente, son ingresados al aplicativo para obtener una observación del fenómeno simulado y con ella observar si se asemeja o no a la observación registrada del mismo.

Parámetros Reales						
Nombre	Redshift (zl)	Redshift (zs)	Radio Einstein	Coordenada Fuente	e1	e2
HE1104 – 1805	2.32	0.319	1.2	(0.965, -0.5)	0	0

NOTA: Se recomienda al ejecutar el aplicativo y obtener un fenómeno simulado, guardar en un archivo las ilustraciones que se obtienen en cada ejecución para acceder a ellas en cualquier momento y realizar comparaciones entre eventos simulados. Lo anterior, puede realizarse al usar la opción de “guardar la figura” que se observa en la parte inferior de las ventanas emergentes.

Luego, con base en la reconstrucciones hecha y la observaciones real, los estudiantes señalan aquellos factores o aspectos que si se comparten en ambos escenarios y cuáles por factores externos no logran una reconstrucción más precisa del fenómeno. Dichos factores pueden estar en términos de la posición, el brillo, el tamaño y la extensión de las imágenes aparentes, y las condiciones de observación.

Finalmente, se formulan a los estudiantes cinco preguntas con las que se muestre su comprensión frente al fenómeno de lente y las características o efectos que lo identifican. Las preguntas son contestadas individualmente y luego, socializadas en el grupo a modo de conclusión y finalización de la propuesta.

- a. ¿Qué factores y condiciones son necesarios para la observación de un fenómeno de lente?
- b. Al realizar una simulación del fenómeno de lente ¿Cómo son observados los cambios en las imágenes aparentes si se varían los parámetros como el Radio de Einstein y la posición de la fuente?
- c. ¿Por qué identificar la simetría del cuerpo lente es relevante para construir y observar el fenómeno de lente?
- d. ¿De qué forma cree usted que pueden obtenerse cambios en las imágenes aparentes sin ajustar los parámetros requeridos para su modelación y simulación?
- e. ¿Puede un fenómeno de lente brindar información entorno a otras magnitudes físicas que compongan al cuerpo lente o la fuente?

Anexo 3

A continuación, es presentado el código fuente diseñado para la construcción de un aplicativo con el cual es desarrollado junto con la propuesta presentada. A diferencia del Anexo 1, en este código se encuentran algunas funciones extra y ciclos que permiten ingresar en un orden específico los parámetros para la modelación y simulación del fenómeno de lente a través de *inputs* solicitados por este.

No es recomendable realizar cambios sustanciales a este código para mantener una correcta ejecución del aplicativo y la propuesta presentada. Antes de realizar modificaciones al código se recomienda revisar la documentación oficial de *Lenstronomy* y así comprender qué parámetros, argumentos o funciones se encuentran habilitados dentro de este y no corromper el funcionamiento de este.

Para su uso, debe copiar y pegar por completo en el editor de código de su preferencia y comprobar que se encuentran instalados y actualizados todos los paquetes necesarios como *Lenstronomy*, Numpy, Matplotlib y la última versión de Python3. Al ejecutarse, lea con atención las instrucciones y mensajes que el aplicativo indica en la terminal para evitar ingresar datos erróneos o caracteres no permitidos.

Código Fuente - Aplicativo

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

print("DEFINIR LOS PARÁMETROS DEL FENÓMENO DE LENTE")
z1=float(input("Corrimiento al rojo de la lente: "))
zs=float(input("Corrimiento al rojo de la fuente: "))

from lenstronomy.LensModel.lens_model import LensModel
model=input("Para un modelo de lente de Masa Puntual, digite 1. Para un modelo de
lente de Masa Elíptico, digite 2: ")
if model=="1":
    lens_model_list=['POINT_MASS']
else:
    lens_model_list=['SIE']

lensModel=LensModel(lens_model_list, z1, zs)
theta_E= float(input("Radio de Einstein ( $\theta_e$ ): "))
```

```

center_x=0
center_y=0

beta_ra = float(input("Posición en el eje x de la fuente (RA): "))
beta_dec = float(input("Posición en el eje y de la fuente (DEC): "))
e1=float(0)
e2=float(0)

if model=="2":
    e1=float(input("Excentricidad mayor (e1): "))
    e2=float(input("Excentricidad menor (e2): "))

print( )
if model=="1":
    kwargs_pm={'theta_E':float(theta_E),                # Lista de
parámetros. Radio de Einstein (Valores entre 0 y 2).
    'center_x': float(center_x),                        # Posición de la
lente en el eje x (Mantener en cero).
    'center_y': float(center_y),}                      # Posición de la
lente en el eje y (Mantener en cero).
if model=="2":
    kwargs_pm={'theta_E':float(theta_E),                # Lista de
parámetros. Radio de Einstein (Valores entre 0 y 2).
    'center_x': float(center_x),                        # Posición de la
lente en el eje x (Mantener en cero).
    'center_y': float(center_y),
    'e1':float(e1),
    'e2':float(e2)}                                    # Posición de la lente en el eje
y (Mantener en cero).
kwargs_lens=[kwargs_pm]

from lenstronomy.LensModel.Solver.lens_equation_solver import LensEquationSolver
solver=LensEquationSolver(lensModel)
theta_ra, theta_dec=solver.image_position_from_source(beta_ra, beta_dec,
kwargs_lens)

magnification = lensModel.magnification(theta_ra, theta_dec,kwargs_lens)
print("Magnificación ( $\mu_{\pm}$ ):", magnification)
arrival_time = lensModel.arrival_time(theta_ra, theta_dec,kwargs_lens)
arrival_time_abs=np.abs(arrival_time)
arrival_time_total=np.sum(arrival_time_abs)
print("Retardo temporal entre imágenes ( $\Delta t$ ):", arrival_time_total)

from lenstronomy.LightModel.light_model import LightModel
source_light_model=['SERSIC']                          # Perfil de Luz (Fuente).

```

```

lightModel_source=LightModel(source_light_model)
kwargs_light_source = [{'amp': 4000,                # Lista de parámetros/Amplitud de
la fuente (valores > 0)
                        'R_sersic': 0.1,            # Radio Efectivo (valores > 0).
                        'n_sersic': 3,              # Índice Sérsic ( $8 < n < 0.5$ ).
                        'center_x': beta_ra,        # Posición de la fuente en eje x.
                        'center_y': beta_dec}]       # Posición de la fuente en eje y.

lens_light_model_list=['SERSIC']                    # Perfil de Luz (Lente).
lightModel_lens=LightModel(lens_light_model_list)
kwargs_light_lens = [{'amp': 400,                  # Amplitud de la lente (valores >
0).
                      'R_sersic':1,                # Radio Efectivo (valores > 0).
                      'n_sersic':2,                # Índice Sérsic ( $8 < n < 0.5$ ).
                      'center_x': 0,               # Posición de la lente en eje x.
                      'center_y': 0}]              # Posición de la lente en eje y.

from lenstronomy.PointSource.point_source import PointSource
point_source_model_list=['LENSED_POSITION']         # Modelo de fuente puntual.
pointSource=PointSource(point_source_model_list, lensModel, [False])
kwargs_ps=[{'ra_image':theta_ra,                  # Coordenada RA de la imagen.
            'dec_image':theta_dec,                # Coordenada DEC de la imagen.
            'point_amp':np.abs(magnification)*30}]  # Amplitud que se
observa en la imagen.

from lenstronomy.Data.pixel_grid import PixelGrid
deltaPix=0.025                                     # Tamaño del píxel en segundos de
arco.
ra_at_xy_0, dec_at_xy_0 = -2.5, -2.5              # Punto de inicio en coordenadas
RA y DEC
transform_pix2angle = np.array([[1, 0], [0, 1]]) * deltaPix
kwargs_pixel = {'nx': 200,                        # Número de píxeles en eje x.
               'ny': 200,                        # Número de píxeles en eje y.
               'ra_at_xy_0': ra_at_xy_0,          # Coordenada RA de píxel.
               'dec_at_xy_0': dec_at_xy_0,        # Coordenada DEC de píxel.
               'transform_pix2angle': transform_pix2angle}
pixel_grid = PixelGrid(**kwargs_pixel)             # Rejilla de simulación.

x_source, y_source =pixel_grid.map_coord2pix(beta_ra, beta_dec)
x_image, y_image =pixel_grid.map_coord2pix(theta_ra, theta_dec)
x_0, y_0 =pixel_grid.map_coord2pix(0, 0)

from lenstronomy.Data.psf import PSF
kwargs_psf = {'psf_type': 'GAUSSIAN',            # Tipo de función de dispersión
de puntos.

```

```

        'fwhm': 0.1,                    # Anchura máxima para la función.
        'pixel_size': deltaPix}        # Tamaño de píxel.
psf = PSF(**kwargs_psf)              # Objeto que simula la dispersión
de luz

from lenstronomy.ImSim.image_model import ImageModel
kwargs_numerics = {'supersampling_factor':1, 'supersampling_convolution': False}
imageModel = ImageModel(pixel_grid,   # Instancia definida en módulo
Data.pixel_grid.
                        psf,          # Instancia definida en módulo
Data.psf.
                        lensModel,    # Instancia definida en módulo
LensModel.
                        lightModel_source, # Instancia definida en módulo
LightModel (de fuente).
                        lightModel_lens,  # Instancia definida en módulo
LightModel (de lente).
                        pointSource,      # Instancia definida en módulo
PointSource.
                        None,             # Instancia no definida, no
relevance.
                        kwargs_numerics,  # Instancia definida en módulo
ImSim.
                        None)            # Instancia no definida, no
relevance.

image=imageModel.image(kwargs_lens,    # Lista de parámetros definidos
en LensModel.
                        kwargs_light_source, # Lista de parámetros definidos
en LightModel (de fuente).
                        kwargs_light_lens,   # Lista de parámetros definidos
en LightModel (de lente).
                        kwargs_ps)          # Lista de parámetros definidos
en PointSource.

from lenstronomy.Plots import lens_plot
f, ax=plt.subplots(figsize=(6,6 ))# Tamaño de la figura.
lens_plot.lens_model_plot(ax,          # Instancia usada previamente.
                        lensModel,      # Instancia definida en módulo
LensModel.
                        kwargs_lens,    # Lista de parámetros definidos
en LensModel.
                        400,            # Total número de píxeles.
                        0.01,          # Tamaño de píxel.
                        beta_ra,        # Posición de la fuente en eje x.

```

```

        beta_dec,          # Posición de la fuente en eje y.
        True,              # Marcar fuente.
        True,              # Mostrar Cáustica y curva
crítica.
        False,            # Mostrar Convergencia.
        0,                # Coordenada RA central en la
figura.
        0,                # Coordenada DEC central en la
figura.
        False,            # Invertir eje x.
        False)            # Estimar cáustica rápida.
plt.scatter(beta_ra, beta_dec, 75, "black", "*")
plt.grid()                # Rejilla para ubicación de
coordenadas.

plt.figure(figsize=(6,6)) # Tamaño de la figura.
plt.imshow(np.log10(image), origin='lower') # Método de visualización.

plt.scatter(x_image, y_image, 75, "black", "+", label="Imágenes") # Señalar donde
está la(s) imágenes
plt.scatter(x_source, y_source, 75, "red", "*", label="Fuente") # Señalar donde
está la fuente
plt.scatter(x_0, y_0, 75, "yellow", "+", label="Lente") # Señalar donde está la
lente

plt.annotate(f'μ±: {magnification}', xy=(0.02, 0.95), xycoords='axes fraction',
fontsize=8, color='white', backgroundcolor='black')
plt.annotate(f'Δt: {arrival_time_total:.2f} días', xy=(0.02, 0.9), xycoords='axes
fraction', fontsize=8, color='white', backgroundcolor='black')
plt.annotate(f'z1: {z1}, zs: {zs}, θe:{theta_E}, RA,DEC:({beta_ra},{beta_dec}),
e1:{e1}, e2:{e2}', xy=(0.02, 0.025), xycoords='axes fraction', fontsize=8,
color='white', backgroundcolor='black')

plt.legend(loc='upper right', frameon=True)

plt.axis('off')           # Eliminar ejes de píxeles
plt.show()                # Mostrar simulado.

```

Como una segunda alternativa para la ejecución de este aplicativo, también puede acceder al siguiente link para comprobar su funcionamiento y desarrollar la propuesta planteada.

https://colab.research.google.com/drive/1aalfCyC9oIrLHNCeYx3yd8M7s6Lgae_g?usp=sharing

Bibliografía

- Arjuna Castrillón, Hurtado, A., & Gonzalo Vargas. (2010). Introducción al fenómeno de Lente Gravitacional a partir de consideraciones. *Latin American Journal of Physics Education*, 367-373.
- Acín, A., & Acín, E. (2016). Persiguiendo a Einstein. En A. Acín, & E. Acín, *Persiguiendo a Einstein* (pág. 100). España: Bonallete Alcompas.
- Alvarez, J. L., & Marquina, J. E. (1992). Los Experimentos de Galileo. *Revista Ciencias*, 15 - 26.
- Aristizábal Duarte, J. C. (2021). *Reconstrucción de los perfiles de masa y de luz de los lentes gravitacionales 2M1310-1714 y J1537-3010*. Bogotá: Universidad de los Andes.
- Asimov, I. (2013). *El electrón es zurdo y otros ensayos científicos*. Madrid: Editorial Alianza.
- Bartusiak, M. (2015). *Agujeros negros Cómo una idea abandonada por Newton, odiada por Einstein y retomada por Hawking vuelve a enamorarnos*. España: Editorial Ariel.
- Breda, I., Papaderos, P., Gomes, J. M., & Amarantidis, S. (2019). A new fitting concept for the robust determination of Sérsic model parameters. *Astronomy and Astrophysics*, A128 1-20.
- Capria, M. M. (2005). *Physics Before and After Einstein*. University of Perugia, Department of Mathematics and Informatics, Perugia, Italy: IOS Press.
- Carneiro, R., Toscano, J. C., & Díaz, T. (2021). *Los desafíos de las TIC para el cambio educativo*. Madrid, España: Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI).
- Congdon, A. B., & Keeton, C. R. (2018). *Principles of Gravitational Lensing Light Deflection as a Probe of Astrophysics and Cosmology*. Cham, Suiza: Springer Nature Switzerland AG .
- Cowen, R. (2019). *Gravity's Century From Einstein's Eclipse to Images Black Hole*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.
- Datri, E. (2014). La geometría de Euclides y el espacio absoluto de Newton: compromisos y presuposiciones. *Paginas de Filosofía*, 24-32.
- Díaz, Ó. M. (2016). *La energía de las estrellas. De los núcleos atómicos a los núcleos estelares*. RBA.

- Dodelson, S. (2017). *Gravitational Lensing*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Duarte, J. E., & Morales, F. H. (2005). La simulación por computador en investigación y desarrollo. *Tecnura*, 106-114.
- Eddington, A. S. (1920). *Space, Time, and Gravitation: An Outline of the General Relativity Theory*. Londres: Cambridge University Press.
- Einstein, A. (4 de Dec de 1936). Lens like action of a star by the deviation of light in the gravitational field. *Science*, 84(2188), 506-507.
- Einstein, A. (2002). *Sobre la teoría de la relatividad especial y general*. Madrid, España: Alianza Editorial.
- Galfard, C. (2017). *Para entender a Einstein: una emocionante aproximación a $E=mc^2$* . España: BLACKIE BOOKS EDICIONES.
- Garzón, A. M. (2014). *Una propuesta de enseñanza para el movimiento planetario clásico y relativista*. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional de Colombia .
- Hogg, D. W. (2000). Distance measures in cosmology. *eprint arXiv:astro-ph/9905116*, 1-16.
- Jaki, S. L. (1978). Johann Georg von Soldner and the Gravitational Bending of Light, with an English Translation of His Essay on It Published in 1801 . *Foundations of Physics*, Vol 8, Nos. 11/12, 1978, 927 - 950.
- Janssen, B. (2013). *Teoría de la Relatividad General*. Granada: Dpto de Física Teórica y del Cosmos, Universidad de Granada.
- Laserna, D. B. (2012). *El espacio es una cuestión de tiempo. Einstein: la teoría de la relatividad*. Barcelona: RBA.
- Matarrese, S., Colpi, M., Gorini, V., & Moschella, U. (2011). *Dark Matter and Dark Energy A Challenge for Modern Cosmology*. Springer.
- Meneghetti, M. (2021). *Introduction to Gravitational Lensing with Python Example*. Springer Nature, Switzerland.
- Minkowski, H. (2012). *Space and Time Minkowski's Papers on Relativity*. (F. Lewertoff, & V. Petkov, Trads.) Quebec, Canada: Minkowski Institute Press.

- Miranda, C., Molina, U., & Vilorio, P. (2014). Retardo temporal en las lentes por galaxias en el contexto de Reissner - Nordstrom. *Revista Mexicana de Física*, 190-194.
- Narayan, R., & Bartelmann, M. (1997). *Lectures on Gravitational Lensing*. eprint arXiv:astro-ph/9606001.
- Newton, I. (1704). *Opticks: or, a treatise of the reflexions, refractions, inflexions and colours of light. Also two treatises of the species and magnitude of curvilinear figures*. Londres.
- Ortiz, C., & Ibarra-Castor, F. (2024). Generalized redshift formula through an energy-based framework. *Science Report*. doi:10.1038/s41598-024-73191-4
- Petters, A. O., Levine, H., & Wambsganss, J. (2001). *Singularity Theory and Gravitational Lensing*. Birkhäuser Boston: Editorial Board.
- Petters, A. O., Wambsganss, J., & Levine, H. (2001). *Singularity theory and gravitational lensing*.
- Refsdal, S. (1964). On the possibility of determining Hubble's parameter and the masses of galaxies from the gravitational lens effect. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 307 - 310.
- Sánchez, A. M. (2009). *Ecuación de Friedmann modificada y Cosmología sobre una Brane-World*. Bogotá, Colombia: Observatorio Astronómico Nacional.
- Schaffer, S. (1979). John Michell and Black Holes. *Journal for the History of Astronomy*, Vol. 10, 42 - 43.
- Schneider, P., Ehlers, J., & Falco, E. E. (1992). *Gravitational Lenses*. Berlin: Springer .
- Schneider, P., Wambsganss, J., & Kochanek, C. S. (2006). *Gravitational Lensing: Strong, Weak and Micro*. Berlin: Springer: Saas-Fee Advanced Course 33.
- Simionato, K.-H. L. (2021). Henry Cavendish on Gravitational Deflection of Light. *Annalen der Physik: Volume 534, Issue 7*, 1-5.
- Stavroudis, O. N. (2012). *The optics of rays, wavefronts, and caustics*. New York: Academic Press.
- Surpi, G. C. (1997). *Efectos de estructuras a gran escala en lentes gravitacionales*. Buenos Aires: Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires.

- Trilleras, A. G. (2011). *Modelos Cosmológicos en teorías de gravedad modificada $f(R)$* . Bogotá, Colombia: Observatorio Astronómico Nacional.
- Villanueva, J. S. (2015). Curvatura de la Luz. *REVISTA DE LA ESCUELA DE FÍSICA*, 61 -66.
- Wambsganss, J. (1998). Gravitational Lensing in Astronomy. *Living Reviews in Relativity*, 1(12).
- Weinberg, S. (1972). *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. Hoboken, Nueva Jersey, Estados Unidos: John Wiley & Sons, Inc.
- Will, C. M. (1988). Henry Cavendish, Johann von Soldner, and the deflection of light. *American Journal of Physics*, Vol 56, Issue 5, 413 - 415.