

**DE LA TEORÍA CINÉTICO-MOLECULAR A LA FÍSICA ESTADÍSTICA:  
EL ESTABLECIMIENTO DE LA TEORÍA DE FLUCTUACIONES  
Y SU APLICACIÓN EN LOS CIRCUITOS ELECTRÓNICOS**

Yersson Steven's Rincon Paez

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de:  
Licenciado en Física

Directora:  
Sandra Bibiana Ávila Torres

Línea de profundización:  
La enseñanza de la Física y la relación Física Matemática

Universidad Pedagógica Nacional de Colombia  
Facultad de Ciencia y Tecnología, Departamento de Física  
Bogotá, Colombia  
2025

***Dedicatoria:***

*Dedico este trabajo de grado a mi familia más cercana: mi tía Marlen, mis tíos Edward y Wilmar, mi abuelita Librada y mi abuelito José, pero especialmente a mi madre, Martha Yaneth Rincón Paez, que me ha permitido llegar hasta aquí gracias a su esfuerzo y entrega constante. Espero que para tí, madre mía, este logro permita ver el fruto de tu apoyo sincero e incondicional.*

*Aunque cumplir promesas no siempre es fácil, esta vez fue posible. En segundo lugar, te lo dedico a tí, Sofí, por haber creído en mí incluso cuando yo no era capaz de hacerlo. Gracias por estar ahí cuando más lo necesitaba, junto a tu familia -en especial tu tía Luz-, y darle en su momento un sentido tanto digno como profundo a mi vida.*

# Agradecimientos

En primera estancia quiero agradecer a la profesora Sandra Bibiana Ávila Torres por su constante asesoría, paciencia, dedicación y compromiso con la elaboración de este trabajo, ya que no habría sido posible sin su guía el cumplimiento del objetivo planteado. De forma más personal, también agradezco encontrar en ella no solo una directora, sino también un ejemplo a seguir, tanto en lo profesional como en lo humano, y, a su vez, el más sincero apoyo frente a lo académico y lo cotidiano. **¡Infinitas gracias, maestra!**

En segunda instancia, agradezco profundamente a cada persona y a cada momento que estuvo presente a lo largo de mi carrera. A todos quienes, de una u otra forma, me enseñaron, me permitieron construir conocimiento, vivir experiencias inolvidables y, sobre todo, formar lazos genuinos. Amistades que trascendieron el gusto compartido por la ciencia y se cimentaron en el apoyo mutuo, la confianza y el cariño sincero.

En especial a los integrantes que conformaron -o conforman- el equipo UPN-IPT: principalmente los docentes Fernando Espitia, Sandra Ávila y Francisco Orozco, y mis compañeros Paul Moreno, Juan Manuel, Juan David, Sara Garzón, Álvaro Sánchez, Santiago Pulido, Ana María y Michael Cajamarca, con quienes, tanto fuera como dentro de las aulas, a partir de muchas discusiones con el fin de resolver esos imponentes problemas nos permitieron crear una comunidad, y pensar en una física más allá de los ejercicios de texto, casi como si de un juego se tratara.

A Brayan Castro, Cristian Lombana y Daniel Rojas por esos momentos tan divertidos que hemos pasado y discusiones desde los diferentes trabajos de grado con enfoques diversos al interior de la física, que también permitieron nutrir este trabajo de grado a su manera. Del mismo modo, agradezco profundamente a los laboratoristas Mauro y Armando, quienes, con su acompañamiento y experiencia, me permitieron enamorarme del experimento y de su aplicación en las aulas.

¡Gracias Universidad Pedagógica Nacional por acogerme y enamorarme tanto de la enseñanza, como de la ciencia!

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>8</b>
Planteamiento del problema . . . . .	10
Antecedentes . . . . .	12
Metodología . . . . .	12
Objetivos . . . . .	13
Objetivo general . . . . .	13
Objetivos específicos . . . . .	13
<b>1. De la teoría cinético-molecular a las fluctuaciones térmicas</b>	<b>15</b>
1.1. Desarrollo de la Teoría Cinético-Molecular . . . . .	16
1.2. El Legado Estadístico de James Clerk Maxwell en la Física . . . . .	23
1.3. Ludwig Boltzmann: El Pionero de las Fluctuaciones en la Física . . . . .	31
1.3.1. La Ecuación de Transporte de Boltzmann y el Teorema-H . . . . .	34
1.3.2. Las Paradojas sobre la Irreversibilidad de los Procesos . . . . .	40
<b>2. Modelos probabilísticos de un sistema fluctuante</b>	<b>50</b>
2.1. Einstein y su Modelo de Fluctuaciones . . . . .	51
2.1.1. Las Fluctuaciones Energéticas y la Estabilidad Térmica de los Sistemas . . . . .	52
2.1.2. Movimiento Browniano: El Paradigma de los Sistemas Fluctuantes . . . . .	56
2.2. Procesos Estocásticos . . . . .	65
2.3. La Aproximación Heurística de Langevin . . . . .	69
2.3.1. Ecuación de Langevin para una partícula bajo una fuerza disipativa . . . . .	69
<b>3. Acerca del ruido electrónico</b>	<b>81</b>
3.1. Cuantización de la carga eléctrica . . . . .	82
3.2. Emisión termoiónica y el surgimiento de la electrónica a partir de los tubos de vacío . . . . .	85
3.3. Problema del ruido electrónico de carácter fundamental: La aproximación de Schottky . . . . .	92
3.4. Acercamiento del ruido térmico por John B. Johnson y Harry Nyquist . . . . .	96
3.5. Dos ejemplo prácticos del ruido térmico en circuitos lineales . . . . .	103
3.5.1. El circuito RC con ruido térmico . . . . .	103
3.5.2. El oscilador electrónico amortiguado con ruido térmico . . . . .	107
<b>Conclusiones</b>	<b>114</b>
<b>Referencias</b>	<b>117</b>

<b>A. Demostraciones en los artículos de Clausius y Maxwell</b>	<b>123</b>
A.1. <i>Sobre la naturaleza del movimiento al que llamamos calor</i> por Rudolf Clausius (1857) . . . . .	123
A.1.1. Relación entre la presión ejercida por un gas sobre las paredes de un recipiente y la velocidad de las moléculas que lo conforman . . . . .	123
A.1.2. Razón entre la energía cinética $E_c$ y el calor $Q$ suministrado en un proceso termodinámico . . . . .	126
A.2. Deducción del camino libre medio de una partícula por Rudolf Clausius (1859) . . . . .	127
A.3. Deducción de las proposiciones de James Clerk Maxwell (1860) . . . . .	129
<b>B. Solución a las ecuaciones de Langevin</b>	<b>134</b>
B.1. Partícula de Rayleigh . . . . .	134
B.1.1. Análisis en el límite $t \rightarrow \infty$ . . . . .	143
B.2. Circuito RC con ruido térmico . . . . .	144
B.2.1. Análisis en el límite $t \rightarrow \infty$ . . . . .	148
B.3. Circuito RLC con ruido térmico . . . . .	149

# Índice de figuras

1.1. Máquina Neumática de Robert Boyle (Elaboración propia). . . . .	17
1.2. Sistema propuesto por Daniel Bernoulli. Basado en la figura LVI del libro Hydrodynamicae. (Elaboración propia) . . . . .	18
1.3. Esquemas basados en la descripción de Rudolf Clausius en su artículo de 1859 (Elaboración propia). . . . .	23
1.4. James Clerk Maxwell en formato de grabado (Open AI, 2025) (OpenAI, 2025). Imagen generada con GPT-4o mini (Gratis) . . . . .	24
1.5. Ejemplo con un número finito de esferas e intervalos $\Delta r$ y $\Delta v$ del razonamiento propuesto por Maxwell para la construcción de la distribución estacionaria (Elaboración propia). . . . .	26
1.6. La <i>distribución estacionaria</i> de Maxwell para diferentes tipos de gas y condiciones termodinámicas. (Elaboración propia). . . . .	27
1.7. Comparación entre el método de conteo variando el intervalo $\Delta v$ y la curva generada con ayuda de la <i>densidad de probabilidad</i> continua (Construcción propia). . . . .	28
1.8. Comparación entre el método de conteo variando el número total de esferas $N$ y la curva generada con ayuda de la <i>densidad de probabilidad</i> continua (Elaboración propia). . . . .	29
1.9. Curva-H propuesta por Ludwig Boltzmann en "Sobre la explicación mecánica de los Procesos Irreversibles (1896)". . . . .	45
1.10. Curva-H de un sistema en equilibrio termodinámico que previamente tuvo un comportamiento determinado (Elaboración propia). Como se puede observar, la presencia de picos en la cantidad $H$ estarán relacionados con instantes donde el sistema conservativo aproximadamente vuelve a su posición inicial. Sin embargo, las líneas punteadas azules delimitan el 95 % de los sucesos, y encontrarse tan alejado de éstas líneas es un evento increíblemente difícil de observar debido a su baja probabilidad. . . . .	47
1.11. Grabado de Ludwig Boltzmann sumergido en fluctuaciones (OpenAI, 2025). Imagen generada con GPT-4o mini (Gratis) . . . . .	48
1.12. Diagrama final del capítulo (Elaboración propia). . . . .	49
2.1. Einstein investigando en la oficina de patentes (OpenAI, 2025). Imagen generada con GPT-4o mini (Gratis) . . . . .	52
2.2. Medida del diámetro en $mm$ de 40 lentes. En rojo se encuentra la media o valor esperado y en azul las desviaciones a la media de cada una de las medidas. (Elaboración propia) . . . . .	54

2.3. Difusión de colorante en un líquido (Tomado de: <a href="https://www.yubrain.com/wp-content/uploads/2021/05/Difusion-portada.jpg">https://www.yubrain.com/wp-content/uploads/2021/05/Difusion-portada.jpg</a> ).	57
2.4. Sistema propuesto por Einstein (Elaboración propia)	58
2.5. Representación acerca de la primera ley de Fick (Elaboración propia)	59
2.6. Distribución de probabilidad de un número $N$ de esferas a lo largo del espacio con un coeficiente de difusión $D = 10^{-5} [m^2/s]$ (Elaboración propia)	62
2.7. Difusión de esferas en un liquido observado desde las trayectorias individuales de los cuerpos (Elaboración propia).	63
2.8. Señal visualizada del sensor BMP280 al interior del recipiente. (Elaboración propia).	65
2.9. Oscilador bajo un ruido de fase con una distribución uniforme. (Elaboración propia)	68
2.10. Velocidad promedio con valores $v_0 = 1 [m/s]$ , y $\gamma = 0.1, 0.3, 0.5, 1.0$ . (Elaboración propia)	71
2.11. Varianzas de la velocidad con valores $v_0 = 1 [m/s]$ , $\beta = 0.1, 0.3, 0.5, 1.0$ y $\gamma = 0.1, 0.3, 0.5, 1.0$ . (Elaboración propia)	73
2.12. Gráfica 3D de la distribución de probabilidad $p(v, t)$ con los valores $\beta = 1.0$ y $\gamma = 0.1$ . (Elaboración propia)	74
2.13. Distribución de probabilidad $p(v, t)$ vs $v$ con tiempos fijos y los valores $\beta = 1.0$ y $\gamma = 0.1$ (Elaboración propia)	75
2.14. Distribución de probabilidad $p(v, t)$ vs $t$ con velocidades fijos y los valores $\beta = 1.0$ y $\gamma = 0.1$ (Elaboración propia)	76
2.15. Posición promedio con valores $v_0 = 1 [m/s]$ , $x_0 = 1 [m]$ , y $\gamma = 0.1, 0.3, 0.5, 1.0$ . (Elaboración propia)	77
2.16. Varianzas de la posición con valores $v_0 = 1 [m/s]$ , $x_0 = 1 [m]$ , $\gamma = 0.1, 0.3, 0.5, 1.0$ y $\beta = 0.1, 0.3, 0.5, 1.0$ . (Elaboración propia)	78
2.17. Distribución de probabilidad $p(x, t)$ vs $x$ con tiempos fijos y los valores $\beta = 1.0$ y $\gamma = 0.1$ (Elaboración propia)	79
2.18. Distribución de probabilidad $p(x, t)$ vs $t$ con velocidades fijos y los valores $\beta = 1.0$ y $\gamma = 0.1$ (Elaboración propia)	80
3.1. Electrolisis del agua. (Elaboración propia)	82
3.2. Tubo de Crookes con una disposición de placas paralelas. (Elaboración propia)	84
3.3. Disposición al interior de un bulbo de vidrio ideada por Edison. (Elaboración propia)	86
3.4. Sistema descrito por la ley de Child-Langimur. (Elaboración propia)	88
3.5. Diodo de Fleming. Adapatado de la figura 1 en la patente US803684A ( <a href="https://patents.google.com/patent/US803684A/en">https://patents.google.com/patent/US803684A/en</a> )	89
3.6. Diodo de Fleming. Adapatado de la figura 2 en la patente US803684A ( <a href="https://patents.google.com/patent/US803684A/en">https://patents.google.com/patent/US803684A/en</a> )	90
3.7. Circuito amplificador. Adapatado de la figura 1 en la patente US879532A ( <a href="https://patents.google.com/patent/US879532">https://patents.google.com/patent/US879532</a> )	91
3.8. Sistema propuesto para ejemplificar como una espira afecta en la trayectoria del electrón a diferentes velocidades iniciales. La intensidad de campo eléctrico denotada en la barra de color es la razón entre la intensidad en cada punto y la de intensidad de mayor magnitud en todo el espacio. (Elaboración propia)	92
3.9. Diagrama simplificado del circuito por John B. Johnson en Agitación térmica de la electricidad en conductores (1928)	97

3.10. Voltaje cuadrático $\langle V^2 \rangle [V]$ vs resistencia eléctrica $R [\Omega]$ en diferentes conductores por John B. Johnson en Agitación térmica de la electricidad en conductores (1928) . . . . .	98
3.11. Voltaje cuadrático $\langle V^2 \rangle [V]$ vs la componente real de la impedancia $R(\omega_0) [\Omega]$ en un circuito $RC$ paralelo con una capacitancia $C = 577 [\mu C]$ y $f_0 = 635 [Hz]$ por John B. Johnson en Agitación térmica de la electricidad en conductores (1928) . . . . .	99
3.12. Potencia aparente $P [W]$ vs la temperatura de la resistencia $T [^\circ K]$ por John B. Johnson en Agitación térmica de la electricidad en conductores (1928) . . . . .	99
3.13. Aplicaciones del circuito $RC$ . (Elaboración propia) . . . . .	104
3.14. Circuito $RC$ con una fuente ruidosa. (Elaboración propia) . . . . .	105
3.15. Circuito $RLC$ . (Elaboración propia) . . . . .	107
3.16. Carga promedio con valores $Q_0 = 1 [C]$ , $I_0 = 1 [A]$ y $R = 1 [\Omega]$ . (Elaboración propia) . . . . .	109
3.17. Corriente eléctrica promedio con valores $Q_0 = 1 [C]$ , $I_0 = 1 [A]$ y $R = 1 [\Omega]$ . (Elaboración propia) . . . . .	110
3.18. Varianza de la carga con valores $Q_0 = 1 [C]$ , $I_0 = 1 [A]$ , $R = 1 [\Omega]$ y $\beta = [1, 2, 3, 4, 5]$ . (Elaboración propia) . . . . .	111
3.19. Varianza de la corriente eléctrica con valores $Q_0 = 1 [C]$ , $I_0 = 1 [A]$ , $R = 1 [\Omega]$ y $\beta = [1, 2, 3, 4, 5]$ . (Elaboración propia) . . . . .	112
3.20. Covarianza entre la corriente eléctrica y la carga con valores $Q_0 = 1 [C]$ , $I_0 = 1 [A]$ , $R = 1 [\Omega]$ y $\beta = [1, 2, 3, 4, 5]$ . (Elaboración propia) . . . . .	112
3.21. Energía almacenada en los componentes $C$ y $L$ con valores $Q_0 = 1 [C]$ , $I_0 = 1 [A]$ , $R = 1 [\Omega]$ , $L = 2 [H]$ , $C = 1/3 [F]$ y $\beta = 1$ . (Elaboración propia) . . . . .	113
A.1. Colisión entre molécula y pared del recipiente. (Elaboración propia) . . . . .	124
A.2. Área delimitada por los radios. (Elaboración propia) . . . . .	125
A.3. Espacio de velocidades. (Elaboración propia) . . . . .	129

# Introducción

La física en su búsqueda por comprender la naturaleza fundamental de los fenómenos, ha transitado por diversas etapas, desde la descripción de leyes deterministas hasta la incorporación de la probabilidad y la estadística para abordar la complejidad inherente a muchos sistemas. A lo largo de esta evolución la variable aleatoria, definida a partir de una distribución de probabilidades, se presenta relevante con respecto a los modelos físicos después de una larga y rica discusión a lo largo del siglo XIX y a inicios del siglo XX, en contraposición a la trayectoria propuesta desde las ecuaciones de movimiento deterministas de la mecánica clásica, o la línea de universo en la relatividad especial, ya que la presencia de fluctuaciones definidas como desviaciones espontáneas en un sistema con respecto al valor esperado de una cantidad, amplía el panorama desde la causalidad de los procesos físicos; ya que la dependencia entre dos variables no necesariamente significa causalidad al interior del modelo, involucrando conexiones no lineales y la identificación de una multiplicidad de causas que derivan en una consecuencia.

Por ello, la fluctuación térmica constituye una herramienta que define el universo a partir de la reinterpretación de hechos empíricos que constituyen la física a partir de un puente que conecta los individuos que conforman el sistema y el todo que conocemos como sistema a partir de los momentos estadísticos, tal como se observa en la termodinámica. Así, queda en evidencia que estas variaciones, lejos de ser meras perturbaciones, permiten revelar información crucial sobre la estructura y la dinámica subyacente en las constituyentes de un sistema.

De acuerdo a lo anterior, es posible la inclusión de modelos físicos para un sistema bajo condiciones donde las fluctuaciones son dominantes (también conocido como ruido), siendo necesario considerar sus efectos en la descripción. Dichos sistemas como el movimiento browniano y el ruido térmico, producto de las colisiones irregulares inherentes en cualquier sistema, a pesar de considerarse como hitos científicos, no encuentran lugar en la enseñanza de la física fácilmente debido a su complejidad frente al tratamiento matemático e interpretación a nivel conceptual de sus cantidades. Tal como expresa Gillespie:

Dos logros significativos de la física en la primera mitad de este siglo fueron las elucidaciones teóricas del movimiento browniano y del ruido de Johnson. A pesar de los extensos avances teóricos en nuestra comprensión realizados desde esos trabajos clásicos, la presentación de estos temas a los estudiantes siempre ha representado un desafío. Las exposiciones típicas suelen involucrar alguna combinación de una ecuación diferencial parcial no intuitiva y complicada llamada Fokker–Planck, y una ecuación diferencial más plausible pero inquietantemente no tan ordinaria llamada Langevin. (Gillespie, 1996)

La descripción de estos sistemas se considera un hito científico debido a que son consecuencia de introducir una hipótesis cinético-molecular, la cual requiere de discretizar la materia, en las descripciones físicas. Además, el movimiento browniano y el ruido electrónico fundamental debido a su relación directa con las fluctuaciones en las características del material debido al cambio espontáneo en las configuraciones de las constituyentes de la materia, permiten considerar una validación a nivel experimental y a la comunidad científica aceptar estas notables ideas con más seguridad. Tal como afirma Cohen al iniciar su artículo titulado *the history of noise* frente a la influencia de las condiciones propiciadas por las fluctuaciones en un sistemas, o ruido:

El “ruido”, como idea, tema, campo e instrumento, irrumpió en escena con una fuerza y rapidez que transformaron toda la ciencia y nuestra visión de la naturaleza de la materia. En su nacimiento, resolvió la cuestión principal de su época, quizá la idea más grande de todas: la existencia de los átomos. El debate sobre la realidad de los átomos había alcanzado su punto culminante. Quienes debatían eran los más grandes científicos; no había un punto intermedio: los átomos existen o no existen (Cohen, 2005).

Teniendo en cuenta este contexto, el presente trabajo de grado se adentra en el estudio de las fluctuaciones térmicas a través de un acercamiento histórico-práctico, en el cual se busca profundizar en la comprensión física de las fluctuaciones y reflexionar sobre su importancia en la enseñanza de la física. Al explorar la evolución histórica de las ideas, el desarrollo de modelos teóricos y sus aplicaciones concretas, se pretende ofrecer una perspectiva que enriquezca la formación de futuros docentes, proporcionando herramientas para abordar conceptos complejos como la irreversibilidad, la naturaleza estadística de la termodinámica y la conexión entre los niveles microscópico y macroscópico de la materia.

La estructura de esta investigación se organiza en tres capítulos principales:

- En el primer capítulo se traza la trayectoria histórica y conceptual desde la teoría cinético-molecular y el segundo principio de la termodinámica hasta el surgimiento de la física estadística. Se explorará cómo estas ideas convergieron, especialmente a través de las concepciones de Boltzmann, para sentar las bases teóricas que inevitablemente conducirían a la predicción y comprensión de las fluctuaciones térmicas en los sistemas físicos. Este recorrido establecerá el marco fundamental para entender la naturaleza estadística de los fenómenos térmicos y la aparición inherente de variaciones a nivel macroscópico.
- En el segundo capítulo se adentra en el análisis de cómo las investigaciones de Einstein sobre las fluctuaciones en sistemas físicos marcaron un hito en el desarrollo de una teoría formal de las fluctuaciones. Se explorará cómo su estudio del movimiento browniano y las fluctuaciones energéticas sentó las bases para la comprensión de sistemas dominados por el ruido. Finalmente, se introducirá el concepto de procesos estocásticos como el marco matemático fundamental para modelar y analizar la dinámica probabilística inherente a estos sistemas fluctuantes.
- En el tercer capítulo se explora cómo las condiciones de ruido, inherentes a los sistemas físicos, permiten una descripción más precisa de circuitos lineales. Se establece el ruido como

una consecuencia de fluctuaciones térmicas y la naturaleza discreta de la carga, introduciendo las perspectivas de Schottky y Johnson-Nyquist. Mediante la aplicación de las ecuaciones de Langevin, se modela el comportamiento estocástico de circuitos RC y RLC, demostrando cómo el ruido influye en su dinámica y converge a resultados clásicos en el equilibrio, ejemplificando así su análisis desde la física estadística.

Finalmente, las conclusiones recapitularán los hallazgos principales y resaltarán las implicaciones para la enseñanza de la física. Todo ello, junto a los anexos que permiten identificar la solución de estos sistemas con mayor detalle.

## Planteamiento del problema

Desde un marco pedagógico la construcción de este acercamiento histórico-práctico, definido como un acercamiento donde se buscan replicar ciertos resultados históricos a través de los modelos matemáticos propuestos haciendo énfasis en el desarrollo conceptual que provee el análisis alrededor de los eventos históricos, al estudio de las fluctuaciones térmicas reposa sus fundamentos frente a varias necesidades expresadas en la literatura, además de la dificultad propia en la enseñanza de estas temáticas comentada por Gillespie, debido a la dificultad encontrada en los modelos matemáticos. En primera estancia, nuevamente se hace el llamado a la importancia a nivel conceptual e histórico que representa la deducción del movimiento browniano a partir de un hecho predicho años antes por medio del universo fluctuante de Boltzmann, y de manera general la introducción de sistemas bajo fluctuaciones relevantes en su dinámica, tal como afirma Cohen:

Einstein, [...], vio que el ruido podía ser el instrumento para establecer una de las ideas más grandes de todos los tiempos: la existencia de los átomos. (Cohen, 2005)

Siendo esto un hecho de gran relevancia para la construcción de la Física Moderna. Que debido a la narrativa distorsionada y reduccionista de su trayectoria, es opacado el importante logro y la importancia de las fluctuaciones en su conclusión, suprimiendo procesos relevantes en la historia de la física que desprestigia culturalmente el concepto de ruido, tal como lo hace expreso:

Pero el ruido, considerado por muchos como algo no deseado, y erróneamente definido así por algunos, tiene poca respetabilidad.[...] Sin embargo, es una idea que ha servido a la humanidad de las formas más profundas. En verdad, sería un mundo gris y aburrido sin el ruido. (Cohen, 2005)

En segundo lugar tal como afirma Koerfer, la enseñanza de la física estadística es uno de los campos menos investigados debido a su complejidad frente al lugar que ocupa en los programas, sin embargo, en el último decenio se han generado diferentes estudios exploratorios que permiten la detección de problemáticas al momento de abordar temáticas al interior de la física estadística, de los cuales suele concluirse que los problemas comprenden su dificultad para interpretar los desarrollos matemáticos propuestos, junto a los resultados obtenidos y su aplicación en sistemas no ideales (Koerfer, 2022). Desde este punto de partida se resalta una nueva corriente que ha adquirido la investigación sobre la educación en física, en inglés Physics Education Research (PER), considerada una pionera en la investigación educativa basada en disciplinas, siendo la evolución del

razonamiento desde la iniciación a la experticia de los profesionales frente a temas avanzados de física uno de sus objetos de estudio; en esta corriente se promueve competencias de razonamiento con alto nivel y el entendimiento conceptual profundo, que requiere de organizar el conocimiento de los principios básicos de la física, de manera tal que orienten la resolución de problemas, desarrollando conexiones entre distintos ámbitos, y situaciones no familiares (Bao y Koenig, 2019).

En tercer lugar, desde esta corriente antes nombrada, el reto de profesores e investigadores educativos de una disciplina es definir los objetivos específicos de cada una de las disciplinas. Particularmente desde la PER, se resaltan los siguientes objetivos articulados de forma general (Bao y Koenig, 2019):

- Aprendizaje profundo de la disciplina específica.
- Fomentar el razonamiento científico para la transferencia entre las disciplinas ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas (en sus siglas en inglés STEM).
- Investigación, desarrollo, evaluación y difusión de enfoques educativos eficaces.

Siendo plausibles a partir del acercamiento histórico-práctico hacia los sistemas fluctuantes. En este caso, el primer objetivo general propuesto por la PER es explícito en el trabajo, debido a que se busca construir un marco donde se ahonde frente a la construcción conceptual de la física estadística; esto dinamizando su campo de acción con base a su aplicación en circuitos electrónicos. Por ello, los razonamientos propuestos y el camino construido para dilucidar las consecuencias que tiene el movimiento irregular de los portadores de carga al interior de un material a lo largo de todo sistema de amplificación de alta ganancia, ampliamente utilizado en sistemas de telecomunicaciones o metrología, permite fomentar un razonamiento científico que sea transferible entre disciplinas, ya que el entendimiento del ruido electrónico fundamental permite la comprensión en las limitaciones de cada dispositivo electrónico y el una mejor comprensión de sus fichas técnicas. Por último, el enfoque proporcionado por los sistemas ruidosos erigido desde la física estadística, permiten la construcción de propuestas de enseñanza frente al rol de las fluctuaciones en otros sistemas como la difusión o las turbulencias. A modo de ejemplo se encuentra el siguiente artículo titulado: *turbulent dispersion of breath by the wind* (2021), donde el problema propuesto a los estudiantes se encuentra dentro del contexto de la pandemia del COVID-19, el cual busca construir un modelo de transmisión de patógenos en el aire a partir de una distribución de probabilidad que evoluciona temporalmente, tal que el estudio permitiera formular recomendaciones sobre las políticas de salud pública (Poydenot y cols., 2022), los cuales son temáticas relevantes dentro del contexto contemporáneo.

Así, se define la pregunta problema de la siguiente manera: ¿cómo la introducción de condiciones de ruido permite ampliar la descripción de los fenómenos físicos ofreciendo un mayor significado a los conceptos y procedimientos de la física estadística a partir del segundo principio de la termodinámica como ley estadística?

## Antecedentes

- **The mathematics of Brownian motion and Johnson noise**, por Daniel T. Gillespie (1996) es un trabajo del cual se deriva la problemática frente a la enseñanza de sistemas bajo condiciones donde las fluctuaciones son dominantes, particularmente el movimiento browniano y el ruido térmico (también conocido como ruido de Johnson-Nyquist). En este trabajo se construye un marco teórico de los modelos matemáticos usados en la derivación de estos sistemas, puntualmente desde la aproximación heurística de Langevin. Además, presenta las bases sobre la importancia del abordaje de situaciones relacionadas con las fluctuaciones en entornos de educación superior.
- **The History of Noise: On the 100th anniversary of its birth**, por Leon Cohen (2005) es un trabajo del cual se deriva la problemática frente a la relevancia del ruido en la física y otros contextos, donde el autor pretende redignificar el concepto a través de la historia relatando de forma breve y general los diferentes acontecimientos que permitieron el surgimiento del concepto y su posterior aplicación a modo de línea de tiempo. Este trabajo proporciona un hilo conductor que permite dilucidar los focos de interés frente al acercamiento histórico-práctico de las fluctuaciones en física.
- **Análisis del ruido: Desde lo clásico a lo cuántico** por David S. Castillo (2022) en formato de monografía en pregrado, es una investigación exploratoria acerca del ruido electromagnético, haciendo énfasis en la caracterización del mismo, a partir de una breve definición de cada fuente, la descripción de sus técnicas de medición, el desarrollo experimental y las consecuencias directas. Ya que a lo largo del documento se presenta un marco general del ruido electrónico, el cual permite ser un apoyo en la descripción de cada uno de los procedimientos realizados y delimitar las fuentes de ruido propuestas.
- **Explicación del movimiento browniano: un abordaje para el estudio de sistemas microscópicos en física estadística** por Peñuela, J. D. (2023) es un trabajo de pregrado enfocado en la descripción del desarrollo histórico y conceptual del movimiento browniano a partir de las diferentes propuestas constituidas desde la termodinámica clásica hasta la aproximación heurística de Langevin, creando una guía didáctica que permita la conceptualización de herramientas probabilísticas en el aula. Para el documento en general, representa un posible punto de partida, ya que no solo expone el desarrollo de uno de los sistemas trabajados a lo largo del documento, sino que, en sí mismo, el autor propone una exploración de la ecuación de Langevin para la enseñanza en la educación superior.

## Metodología

Debido a la naturaleza de la investigación, esta se enmarca en una metodología cualitativa que tiene foco en la investigación documental con un alcance exploratorio, debido a que el documento pretende ser una base teórica para otro tipo de investigaciones. Esto entendido bajo el contexto que enmarca Koerfer, en el cuál la documentación acerca de la enseñanza en la física estadística y aún más baja, si está tiene como objetivo la introducción de fluctuaciones de aporte considerable con respecto a la dinámica del sistema. Con una investigación documental se buscó la construcción de

una síntesis, la cual represente un contenido y sus documentos de forma diferente como premisa fundamental dando uso al contexto histórico y los ejemplos prácticos a lo largo del texto.

Las fases realizadas en la investigación propuesta son:

1. Se realizó un análisis exhaustivo de fuentes primarias y secundarias para trazar la evolución de la física estadística desde sus fundamentos en la teoría cinético-molecular y el segundo principio de la termodinámica, hasta la emergencia del concepto de fluctuaciones térmicas. Se prestó especial atención a las contribuciones de Boltzmann y cómo sus ideas sentaron las bases para comprender la naturaleza estadística de los fenómenos térmicos y la aparición inherente de variaciones a nivel macroscópico.
2. Se estudiaron las investigaciones clave de Einstein sobre las fluctuaciones en sistemas físicos, particularmente su trabajo sobre el movimiento browniano, para comprender cómo estas investigaciones marcaron un hito en el desarrollo de una teoría formal de las fluctuaciones y cómo introdujeron la necesidad de modelar sistemas bajo condiciones de ruido. Se analizó la instauración de los procesos estocásticos como el marco matemático fundamental para describir la dinámica probabilística inherente a estos sistemas.
3. Se investigó cómo las condiciones de ruido, inherentes a los sistemas físicos, permitieron una descripción más precisa de un sistema característico como los circuitos lineales. Se analizaron las perspectivas de Schottky y Johnson-Nyquist sobre el ruido electrónico como una consecuencia de las fluctuaciones térmicas y la naturaleza discreta de la carga. Se exploró la modelización de estos sistemas mediante las ecuaciones de Langevin como un ejemplo aplicativo en física estadística que demostró cómo las fluctuaciones influyeron en la dinámica de un sistema físico específico.

## Objetivos

### Objetivo general

Describir la evolución que lleva al establecimiento de la física estadística desde sus fundamentos en la teoría cinético-molecular y la termodinámica, hasta su aplicación contemporánea en la descripción de sistemas físicos bajo condiciones de ruido, con el fin de ampliar el marco conceptual de los procedimientos establecidos dentro de la física estadística.

### Objetivos específicos

1. Realizar una revisión histórica y conceptual respecto a la evolución de la teoría cinético-molecular, el segundo principio de la termodinámica y el establecimiento de la física estadística que llevan a la idea de fluctuaciones térmicas, principalmente desde las concepciones de Boltzmann.
2. Analizar cómo el estudio de las fluctuaciones en física a través de las descripciones de Einstein permitió el establecimiento de una teoría de fluctuaciones y la exploración de sistemas

físicos bajo condiciones de ruido los cuales instauran la modelación mediante el análisis de procesos estocásticos.

3. Establecer cómo las condiciones de ruido pueden generar un acercamiento más preciso a la descripción de un sistema característico de circuitos lineales, como ejemplo aplicativo en física estadística mediante la modelación por medio de las ecuaciones de Langevin.

# Capítulo 1

## De la teoría cinético-molecular a las fluctuaciones térmicas

La física estadística es una ciencia que tiene como objeto de estudio el comportamiento de sistemas complejos<sup>1</sup> con poca información de sus condiciones iniciales, a partir del uso de colecciones o ensambles construidos con base en las variables que caracterizan dicho sistema, los cuales son distribuidos en un rango de estados precisos con el fin de maximizar el conocimiento teórico y realizar predicciones de orden estadístico (Tolman, 1938). A partir de esto, la descripción del comportamiento de sistemas físicos, generalmente entendidos en términos de un continuo, se construye mediante argumentos probabilísticos relacionados con los elementos microscópicos discontinuos que lo constituyen, permitiendo conectar descripciones de un mismo fenómeno dadas desde diferentes ciencias, donde la diferencia entre las dimensiones de los objetos de estudio es análoga a la relación entre individuo y población (Cervera y Guzmán, 2006).

Para poder realizar una descripción probabilística desde la física, se hace pertinente considerar de base la hipótesis atómica, la cual se abrió camino desde principios del siglo XIX debido a la creciente matematización de diferentes fenómenos relacionados con el calor, las reacciones químicas, la electricidad y el magnetismo, que incorporaban una idea de base para su modelación: la materia se compone de elementos discretos con un estado de movimiento definido. A partir de esto, se generan explicaciones consistentes con la mecánica clásica para la descripción de dichos fenómenos.

Por ejemplo, se tienen dos descripciones que hacen uso de la introducción de la hipótesis atómica en la explicación de fenómenos físicos en el siglo XIX: primero se tiene la corriente molecular propuesta por André Marie Ampere (1775 - 1836), la cual busca, bajo el argumento de la existencia de pequeñas corrientes independientes entre sí y cada una describiendo una trayectoria cerrada, dar explicación a la existencia de los imanes permanentes, y como segunda se tiene la teoría cinético-molecular de los gases, en contraposición a la teoría del calórico, propuesta donde se hipotetizan partículas con un estado de movimiento bien definido que permitiera explicar los fenómenos de

---

<sup>1</sup>En este caso, el concepto de complejidad hace alusión a la imposibilidad frente al procesamiento de información y dificultad en la descripción de un sistema con una gran cantidad de cuerpos que siguen una o más leyes bien definidas que caracterizan la interacción a pequeña escala entre estos.

transferencia y las variables termodinámicas de los gases.

En el presente capítulo se hará una descripción más amplia sobre la historia de la teoría cinético-molecular, inicialmente desde los gases, ya que su desarrollo permite un acercamiento a la descripción estadística de los fenómenos térmicos y por lo tanto a los tres principios fenomenológicos de la termodinámica, a partir del estado de movimiento e interacciones entre los elementos discretos que componen la materia. Esta desemboca finalmente en un desarrollo ampliamente criticado en el siglo XIX que permite colocar el entendimiento establecido sobre la irreversibilidad de los procesos físicos generado desde nuestra experiencia diaria en duda, concibiendo una primera predicción teórica debido a este nuevo razonamiento: la aparición de fluctuaciones térmicas en un sistema físico.

## 1.1. Desarrollo de la Teoría Cinético-Molecular

En relación con la teoría cinético-molecular de los gases, su historia se encuentra estrechamente relacionada con la física estadística, debido a que su origen y consolidación parte de la descripción de las propiedades y estados termodinámicos de un gas, el cual se describe como un conjunto de muchas partículas, cada una con un estado de movimiento bien definido.

Inicialmente, la teoría cinético-molecular de los gases, en la ciencia moderna<sup>2</sup>, proviene de uno de los planteamientos propuestos por Robert Boyle (1627 - 1691), descrito en un libro para Lord Viscount de Dungarvan, acerca de la estructura de los gases y la explicación de su propiedad elástica. En este documento, Boyle establece dos alternativas para el tratamiento de los gases: la primera tiene como premisa que los gases están compuestos de partículas que se repelen entre sí visualizadas como muelles, y la segunda propone que los gases se encuentran compuestos de partículas arremolinadas que chocan entre ellas (Boyle, 1660). Para poder establecer estas afirmaciones, Boyle parte de la observación que realiza sobre un gas, el cual está contenido en un recipiente con una pared móvil llamada émbolo, que le permite ser comprimido. En este sistema, al comprimir el gas este llega a un volumen menor que el inicial y al liberarlo de la compresión retoma su volumen inicial. Esta forma en la que se comporta el gas, especialmente al quitar la acción compresora, donde por si mismo vuelve a su estado inicial, es la que lleva a Boyle a plantearse la idea de cómo explicar bajo qué mecanismo el gas tendría ese comportamiento. Sus dos afirmaciones van en relación con mostrar un mecanismo microscópico responsable de que el gas tenga dicha propiedad elástica: uno pensando en una repulsión por la acción directa de fuerzas restauradoras y otro en relación con la interacción de las partículas y los efectos de tener mayor cercanía unas con otras.

Estas observaciones son consecuencia de diversos estudios y discusiones epistolares por parte de Boyle con sus pares académicos acerca de la existencia del vacío; un lugar del espacio sin materia, como componente del universo físico, elemento presente en la corriente filosófica atomista del cual

---

<sup>2</sup>El término ciencia moderna, desde la visión de Thomas Kuhn, se encuentra ligada a la revolución científica del siglo XVII, ya que se caracteriza por el estudio de la realidad física a partir de una componente analítica y otra empírica, la cual se encuentra formalizada por instituciones como la Royal Society y la comunicación de resultados que puedan ser replicables desde el experimento mediado por el instrumento de medida.

era defensor, donde los argumentos de mayor valor proporcionados por el filósofo natural inglés son contruidos a partir de una serie de experimentos con aire sometido a diferencias de presión con respecto a la presión atmosférica, que a su vez dan origen a las leyes experimentales de Boyle (Conesa, 2003).

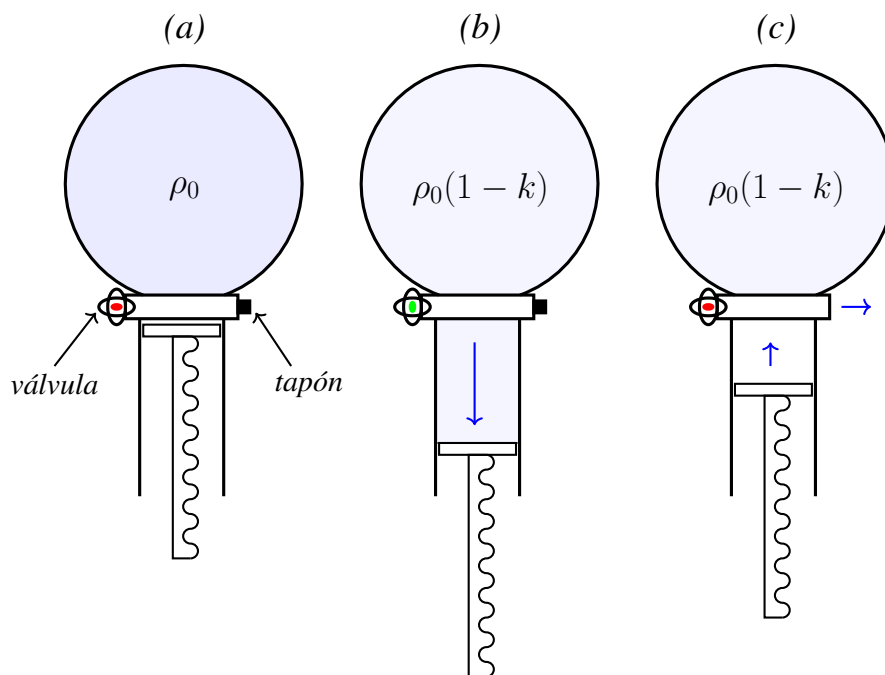


Figura 1.1: Máquina Neumática de Robert Boyle (Elaboración propia).

Particularmente para poder dar forma a estas leyes experimentales Boyle, en 1662, realiza múltiples experiencias con ayuda de una novedosa máquina neumática que permite variar la presión al interior de una campana. De acuerdo a la figura 1.1, la máquina neumática funciona de la siguiente forma: (a) En primer lugar, se ingresa a la campana un gas de densidad  $\rho_0$ , cerrando al final la válvula, (b) Si abre la válvula y se baja el émbolo con una manivela, el gas se distribuye a lo largo de todo el nuevo volumen dado por el cilindro, disminuyendo la densidad del gas a  $\rho_0(1 - k)$ , donde  $k$  se encuentra entre 0 y 1, debido a la disminución de masa al interior de la campana, toda esta acción sin quitar el tapón que sella el camino al exterior del sistema, y (c) Se cierra la válvula y luego se quita el tapón, tal que sea posible retirar todo el aire al interior del cilindro subiendo el émbolo, dejando el gas al interior de la campana con densidad  $\rho_0(1 - k)$  (Andrade, s.f.).

Boyle nota que, a pesar de hacer una diferenciación entre la dilatación y la compresión de un gas, ambas acciones sobre el gas son proporcionales a la densidad del gas confinado si este no se encuentra sometido a ninguna transformación química (Conesa, 2003). Por lo cual, si la masa de gas es constante a lo largo del proceso, en esencia, se tiene una relación inversamente proporcional entre la presión que es ejercida sobre un gas confinado en un recipiente y el volumen que ocupa dicho gas al interior del recipiente, siempre que se cumpla una condición adicional: que el gas se encuentre a una temperatura aproximadamente constante.

Los planteamientos acerca de la propiedad elástica de los gases y las leyes experimentales, ambas propuestas por Boyle, tienen una importancia fundamental frente al desarrollo posterior en la ciencia, especialmente la teoría cinético-molecular, debido a que se generan dos hipótesis frente a la composición de los gases a partir de la observación sistemática de su propiedad elástica mediada a partir de un aparato, la bomba neumática. Por lo tanto, la validación de uno de estos planteamientos sería posible de acuerdo con su capacidad explicativa y predictiva frente a los eventos físicos observables, esto a su vez hizo más compleja la aceptación de las propuestas de constitución molecular frente a la comunidad científica de la época, ya que, esta validación se encontraba sujeta a los desarrollos técnicos de los instrumentos de medida y la habilidad técnica de los investigadores de los siglos anteriores al siglo XX, lo cual no fue posible.

Pasando a revisar la segunda afirmación que Boyle presenta en su libro, esta se encuentra alejada de los intereses de la comunidad científica de los siglos XVII, XVIII y la primera mitad del siglo XIX. Aun así, sería considerada por varios matemáticos de la época, que especulaban con diferentes modelos de constitución molecular que permitieran dar cuenta de forma cuantitativa, una relación entre las variables dinámicas de las moléculas que conforman el gas y las variables macroscópicas del mismo, como la presión y la temperatura (Vázquez, 1999). Entre estos investigadores se destaca el matemático y científico Daniel Bernoulli (1700 - 1782), quien define un gas como un fluido elástico, considerando tres características: (1) Los gases tienen un peso, (2) Los gases se expanden en todas direcciones a menos que exista una restricción, como las paredes de un recipiente, y (3) Los gases pueden ser comprimidos a medida que la fuerza de compresión aumenta. Este fluido elástico para Bernoulli se encuentra constituido de un conjunto infinito de esferas con un estado de movimiento de traslación perpetuo a altas velocidades.

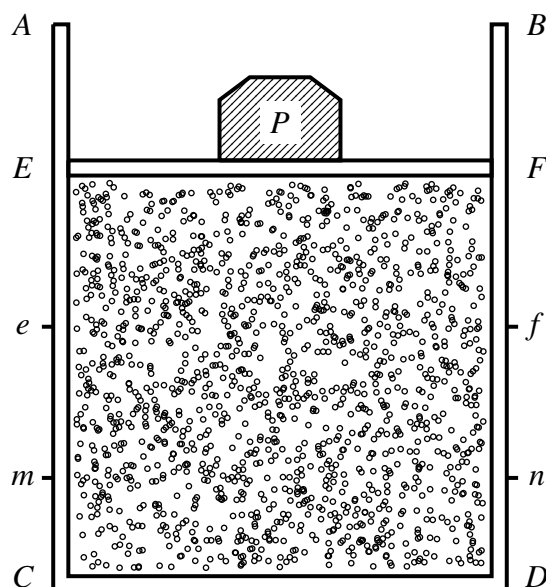


Figura 1.2: Sistema propuesto por Daniel Bernoulli. Basado en la figura LVI del libro *Hydrodynamicae*. (Elaboración propia)

Bernoulli en su libro *Hydrodynamica* (1738) construye una línea argumentativa acerca de la ter-

cera característica que define para los fluidos elásticos. Esto lo realiza a través de la búsqueda de un peso que permita comprimir un gas a una distancia definida en un sistema compuesto por un recipiente cilíndrico con un embolo, en este caso, representando el gas al interior con un número  $N$  de partículas, todas desplazándose con la misma rapidez  $v$  (Bernoulli, 2014). Bernoulli toma como hipótesis que la presión del gas es la consecuencia de múltiples choques de las partículas contra las paredes del recipiente, si se aplica una fuerza sobre el émbolo del pistón, tal que disminuya su volumen al interior, la densidad del gas aumentaría, por lo tanto, la densidad de choques con respecto a la que se tiene antes de ser comprimido también aumentaría y este razonamiento es correspondiente con las leyes experimentales obtenidas por Boyle. En la Figura 1.2 se muestra un esquema realizado por este autor para establecer la verificación a su hipótesis.

Además, Bernoulli a partir de esta hipótesis y con ayuda de las observaciones que se tenían en la época acerca de la existente relación entre el cambio de presión y el cambio de temperatura en un gas, enuncia la siguiente proposición acerca del calor en relación con la composición molecular de los gases:

Como es bien conocido, el calor es intensificado cuando el movimiento interno de las partículas incrementa, esto seguido de cualquier incremento en la presión del aire donde no cambia su volumen, indicando una mayor intensidad del movimiento interno de estas partículas, [...] (Bernoulli, 2014, p. 393).

En este fragmento es notorio que Bernoulli establece que, el aumento en el movimiento interno de las esferas que conforman el gas dentro del recipiente, también es responsable de que la presión varíe, ya que incrementa la cantidad e intensidad de los choques, por lo tanto, el aumento de la temperatura en el gas se encontraría relacionado con un aumento en la velocidad de las constituyentes del gas. Más adelante en este mismo documento, Bernoulli deduce que dicho aumento en la presión estaría en relación con el cuadrado de la rapidez de las esferas que conforman el gas. Teniendo en cuenta esto, se requiere de un mayor peso sobre el sistema, en términos del problema de Bernoulli, para contrarrestar el aumento del movimiento interno de las partículas para que el volumen se mantenga constante, debido a que el pistón asciende cuando el gas es calentado por una fuente externa, tal que la diferencia de presiones entre las caras de la superficie móvil sea nula.

A pesar de que la propuesta de Bernoulli permite una construcción alterna de las propiedades de los gases que iba en correspondencia con la evidencia experimental, fue marginada debido al establecimiento de la representación newtoniana fundamentada en la primera alternativa de Boyle, donde cada partícula ejerce acciones repelentes en sus vecindades y su magnitud es proporcional al inverso de la distancia entre ellas, que además, era compatible con la Teoría del Calórico (Brush, 2004).

Para entender un poco mejor la diferencia que se tenía entre las posturas de los científicos acerca de los fenómenos térmicos en esta época, es necesario revisar brevemente lo que propone la Teoría del Calórico. Esta define el calor como una substancia o fluido incoercible compuesto de partículas que se repelen entre sí y se atraen a las partículas que conforman la materia ordinaria. Según esta teoría, la temperatura se consideraba un indicador de la densidad de calórico al interior de un cuerpo y era causa de las acciones repelentes entre las partículas de un gas, propias

de la representación Newtoniana, según Simón Pierre Laplace (1749 - 1827), quien demuestra a partir del calórico una relación entre la presión, la densidad y la temperatura de un gas (Brush, 2003). Además, esta teoría aumentaría su credibilidad en la comunidad científica con ayuda de Laplace, al conseguir una predicción de orden experimental frente a la velocidad del sonido en el aire.

Pese a su amplia aceptación, es de señalar que el establecimiento de la Teoría del Calórico se encontraba con dos situaciones donde no era coherente su modelo teórico con los hechos experimentales: (1) la expansión libre de un gas y (2) el calentamiento de superficies debido a la fricción. Frente a la primera situación, si tenemos un gas que se encuentra confinado en un recipiente conectado a otro completamente vacío con una válvula intermedia, al abrirse dicha conexión, la expansión libre es un proceso en el cual dicho gas comienza a extenderse a lo largo del recipiente vacío. En un contexto ya propuesto como la máquina neumática de Boyle, se tiene un gas confinado en la campana, teniendo en cuenta que el tapón está colocado y la válvula cerrada, si se desplaza el pistón, se formaría un vacío a lo largo del cilindro de latón, por lo tanto, cuando se abre la válvula, dicho gas comenzaría a extenderse a lo largo del espacio vacío. Este proceso conlleva a una disminución de la densidad del gas, y visto desde la Teoría del Calórico, dicho decrecimiento conlleva a una disminución de la densidad de calórico, ya que al expandirse el gas, esta substancia que permea el gas se extendería a lo largo de dicho espacio, por lo tanto, decrece la temperatura del gas, hecho que no sucede, o en el mejor de los casos, cuando sucede la variación de temperatura no se correspondería con los modelos propuestos.

Frente al estudio generado respecto a la segunda situación, donde se presenta el aumento de temperatura en los cuerpos a causa del rozamiento, se encuentra que es un problema no resoluble desde la Teoría del Calórico, debido a que, por ejemplo, el movimiento de un taladro a lo largo de una superficie metálica produce un aumento de temperatura, el cual, no requiere de un reservorio o fuente de calor, por lo tanto, este hecho promueve la búsqueda de una relación entre el movimiento y el calor. A partir de estas problemáticas, surge una *Teoría Mecánica del Calor*, propuesta de manera independiente por Julius Robert Mayer (1814 - 1878) y James Prescott Joule (1818 - 1889) entre los años 1842 y 1847. Así, Joule a través de varios experimentos, demostró la equivalencia entre el calor y el trabajo mecánico, denominados como *transferencias de energía*.

Esto permite la definición del *principio de conservación de la energía* generalizado a los sistemas térmicos y conforma una idea coherente de calor, fundamentada en la teoría cinético-molecular (Bustos y Sotelo, 2008), debido a que la variación de temperatura no se encuentra relacionado con un cambio en la densidad de calórico en el cuerpo, sino con la variación de la velocidad en las constituyentes de dicho cuerpo debido a las transferencias de energía de un sistema a otro. Esta idea es coherente para construir una explicación frente a la baja variación de temperatura cuando un gas se expande libremente a lo largo de un espacio vacío, debido a que las constituyentes no aumentan su velocidad al abrir la válvula, simplemente la densidad de choques disminuye y por ende la presión del gas, esto a causa de que tienen mayor extensión en la cual desplazarse sin chocar contra las paredes del recipiente.

Previamente, varios científicos *amateur* en la primera mitad del siglo XIX sugerirían el uso de la teoría cinético-molecular, basadas en la propuesta de Daniel Bernoulli, para la explicación de los fenómenos térmicos. Este es el caso de John Herapath (1790 - 1868) quien en 1816, se destaca

por la resolución de la paradoja acerca del tipo de choque entre átomos, y John James Waterson (1811 - 1883) el cual en 1843 llegó a establecer el teorema de equipartición de la energía, los dos interesados, en principio, en el desarrollo de una teoría cinética de la gravedad, conocida como la teoría gravitatoria de LeSage (Brush, 2004). Sin embargo, el trabajo de estos científicos fue ignorado por la comunidad científica debido a las preconcepciones establecidas, particularmente por los revisores de las revistas científicas reconocidas de la época, lo cual impidió la publicación de sus ideas, principalmente en Inglaterra y Escocia (Vázquez, 1999).

Estas propuestas acerca de la teoría cinético-molecular de los gases serían retomadas posteriormente por August Kronig (1822 - 1879) quien impulsó a Rudolf Clausius (1822 - 1888) en su estudio. Estos dos destacados científicos de la academia alemana promovieron su desarrollo frente a la construcción de modelos explicativos coherentes con los hechos experimentales y principios de la termodinámica trabajados en esta época, además, difundieron sus ideas en la comunidad científica europea con un prestigio considerable.

Particularmente Clausius en 1857 en el trabajo titulado: “*Sobre la naturaleza del movimiento al que llamamos calor*” establece un modelo cinético-molecular, donde las moléculas que constituyen a un cuerpo son esferas rígidas que pueden encontrarse en un estado de movimiento con un componente traslacional, rotacional y oscilatorio, caracterizado de acuerdo al estado de agregación de la materia. Por ejemplo, en el caso del estado sólido, el autor austriaco propone que las moléculas se mueven a lo largo de trayectorias muy cercanas a sus posiciones de equilibrio debido a las fuerzas intermoleculares, siendo predominante el tipo de movimiento de orden oscilatorio, a diferencia del estado gaseoso, en el cual el tipo de movimiento predominante de las moléculas es la traslación, realizando trayectorias rectilíneas debido a la poca influencia que tienen las fuerzas intermoleculares en su movimiento ya que se encuentran a una distancia considerable una de otra, sin embargo, debido a las colisiones, en menor medida su movimiento puede tener a su vez una componente rotacional y oscilatoria (Clausius, 1857).

En el caso de los gases perfectos o ideales, plantea que las trayectorias realizadas por las moléculas es esencialmente rectilínea y establece tres condiciones para su estudio: (1) El espacio entre las moléculas del gas debe ser infinitesimal en comparación al gas mismo, (2) la duración del impacto, o tiempo requerido para que se produzca un cambio de movimiento, entre dos moléculas debe ser infinitesimal en comparación con el intervalo de tiempo entre dos colisiones sucesivas, y (3) La influencia de las fuerzas intermoleculares debe ser infinitesimal. Como consecuencia, un gas ideal tiene un comportamiento que puede ser descrito de forma aproximada a partir de las leyes de Boyle-Marriote y Gay-Lussac, debido a que las fuerzas intermoleculares son despreciables sobre las moléculas en movimiento y por lo tanto, la razón entre la energía cinética  $E_c$  de las constituyentes y el calor  $Q$  suministrado al gas en un proceso termodinámico es constante, en otras palabras, la única manera de cambiar la velocidad de las constituyentes es suministrar calor al sistema, lo cual permite afirmar desde dicho marco teórico que los calores específicos a volumen constante  $c$  y a presión constante  $c'$ , son invariantes en un gas ideal (Clausius, 1857).

Esta conclusión es construida con ayuda del primer principio de la termodinámica y la teoría cinético-molecular de los gases, hallando el valor de la presión  $P$  ejercida por un gas sobre las paredes de un recipiente a partir de un problema mecánico en el que define una fuerza  $F$ , a través

del cambio momento lineal  $\Delta p$  de una partícula de masa  $m$  en el eje perpendicular un área determinada  $A$  y el número de choques por segundo que se producen en dicha área, donde las moléculas se comportan como una partícula libre.

Es importante resaltar que en un gas no ideal, debido a las fuerzas intermoleculares y las colisiones en esferas con un volumen definido, la energía interna del sistema se repartirá entre las componentes de movimiento rotacional y oscilante, además del movimiento de traslación, lo cual hará que dicha razón no sea proporcional, una problemática ya observada en diferentes tipos de gases propios de la maquinaria de vapor, donde sus calores específicos  $c'$  y  $c$  no son constantes.

En este mismo artículo, Clausius también deduce una expresión para la velocidad media de las partículas en un gas ideal en términos de magnitudes medibles en la época, y calcula de acuerdo al volumen ocupado por un gas a condiciones termodinámicas estándar, la velocidad media de las moléculas para casos particulares como el oxígeno, hidrógeno y nitrógeno, las cuales son mayores a 450  $m/s$ . Estos valores, junto a los modelos simplificados del gas ideal, fueron el blanco de críticas y dio pie a la creación de situaciones problema propuestos desde los fenómenos de transporte.

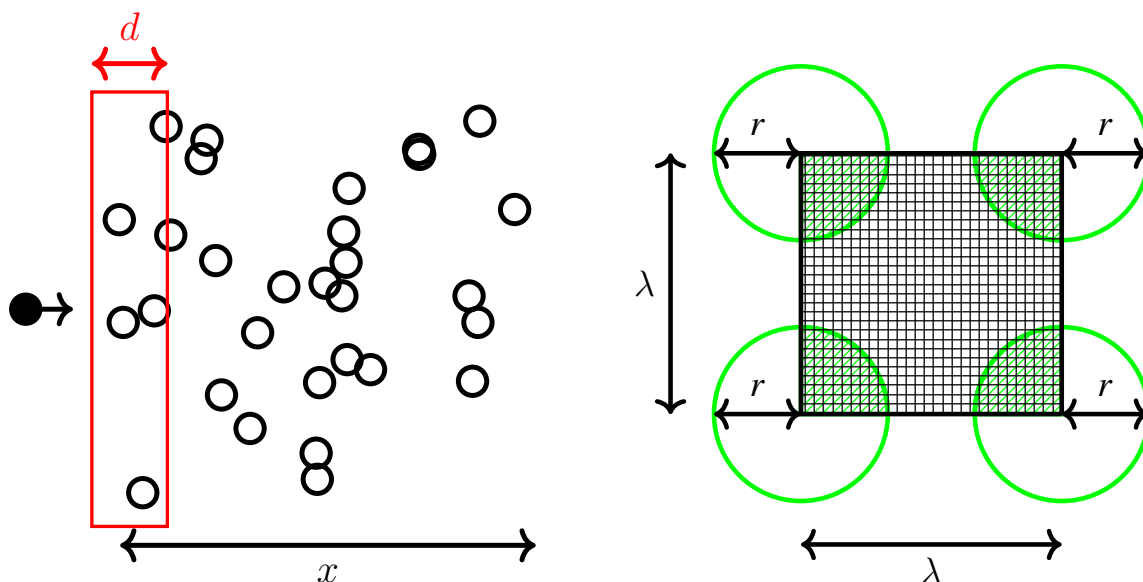
Tal que dos años después, publica: “*Sobre las distancias medias de los caminos descritos por las moléculas separadas de cuerpos gaseosos*” a modo de respuesta a varias objeciones frente al modelo construido, especialmente interesado por una situación propuesta: la mezcla entre dos gases, ya que si las moléculas describen trayectorias rectilíneas y se comportan como una partícula libre, según Buijs-Ballot dos volúmenes de gases se mezclarían muy rápido, hecho que no sucede (Clausius, 1859), así, por ejemplo, el humo de una hoguera o de un cigarrillo se dispersaría instantáneamente, siendo imposible observar la característica estela de estas situaciones. Para dar respuesta a estas objeciones, calculó la *densidad de probabilidad*  $f(x)$  que permite asignar una *probabilidad* a una molécula de que atravesase en línea recta a través de una capa de espesor entre  $x$  y  $x + dx$  sin chocar con alguna otra molécula:

$$f(x) dx = \alpha e^{-\alpha x} dx \quad (1.1)$$

Esta constante  $\alpha$  se deduce a partir de una razón entre el área ocupada por las esferas de acción de cada molécula, asumiendo que se encuentran en reposo, y el área construida a partir de un cuadrado que tiene sus vértices en el centro de cada esfera de acción. Dicha constante permite la definición del camino libre medio de una molécula, o distancia media que recorre una partícula antes de chocar con otra molécula, la cual suele ser una distancia muy pequeña. Por lo tanto, la mezcla entre dos volúmenes de gases será dada en un tiempo prolongado a pesar de que la velocidad promedio de las moléculas sea tan alta, debido a que los múltiples choques con las constituyentes del otro gas hacen poco probable encontrar una molécula de forma casi instantánea en una región del espacio lejana a su origen, razón por la cual solo una parte del humo de una hoguera o un cigarrillo se difunde a lo largo del entorno en un corto intervalo de tiempo.

Los resultados obtenidos por Clausius tienen una gran relevancia en el desarrollo posterior de la física estadística, ya que sintetiza el desarrollo de la teoría cinético-molecular ampliamente ignorada a lo largo de dos siglos, construye un primer argumento de orden probabilístico que permite dar explicación a un hecho físico haciendo uso del efecto de las colisiones entre las constituyentes

de la materia, en este caso para una observación propia de la mezcla entre dos gases: la evolución temporal prolongada de este proceso a pesar de las altas velocidades de sus constituyentes, y plantea la mayoría de las condiciones del sistema estudiado por James Clerk Maxwell (1831 - 1879) y Ludwig Eduard Boltzmann (1844 - 1906), que permiten la construcción de sus propias preguntas orientadoras, paradojas conceptuales y principios epistemológicos, llevando su síntesis más allá del sistema propuesto.



(a) Esquema para hallar la probabilidad de una partícula al atravesar una capa de distancia  $x$ . En una distancia  $d$  se postula que tiene una probabilidad  $a$  de atravesar ( $0 < a < 1$ ).

(b) Esquema para hallar la constante  $\alpha$ , donde  $r$  es el radio de las esferas de acción de las moléculas y  $\lambda$  la arista del cuadrado construido.

Figura 1.3: Esquemas basados en la descripción de Rudolf Clausius en su artículo de 1859 (Elaboración propia).

## 1.2. El Legado Estadístico de James Clerk Maxwell en la Física

A pesar del interesante argumento de orden probabilístico que provee Clausius frente a la causa del intervalo de tiempo prolongado requerido para que se realice una mezcla uniforme entre dos gases desde la teoría cinético-molecular, el modelo propuesto no es dinámico, por lo tanto no permite visualizar la evolución temporal de un proceso de difusión. Además, este modelo contiene demasiados reduccionismos, los cuales deben ser eliminados con el fin de aproximarse a un sistema descrito que permita deducir las ecuaciones que modelan los fenómenos de transporte desde la teoría cinético-molecular.

James Clerk Maxwell es un físico escocés con una amplia lista de investigaciones en diversos campos como la teoría electromagnética, la óptica física, la mecánica de sólidos deformables y la mecánica celeste. Particularmente basado en la propuesta de Clausius y su interés por los fenómenos de transporte, publica en 1860 *“Ilustraciones de la teoría dinámica de los gases”*, artículo que

se subdivide en tres partes, donde construye una serie de 23 proposiciones que explica las leyes del movimiento para un conjunto de  $N$  cuerpos rígidos, perfectamente elásticos, actuando uno sobre otro solo durante el impacto, en otras palabras que permitan describir de forma general el comportamiento de las constituyentes en un fluido elástico, y su aplicación en el estudio de la conducción y la convección de calor, y la viscosidad en los gases.

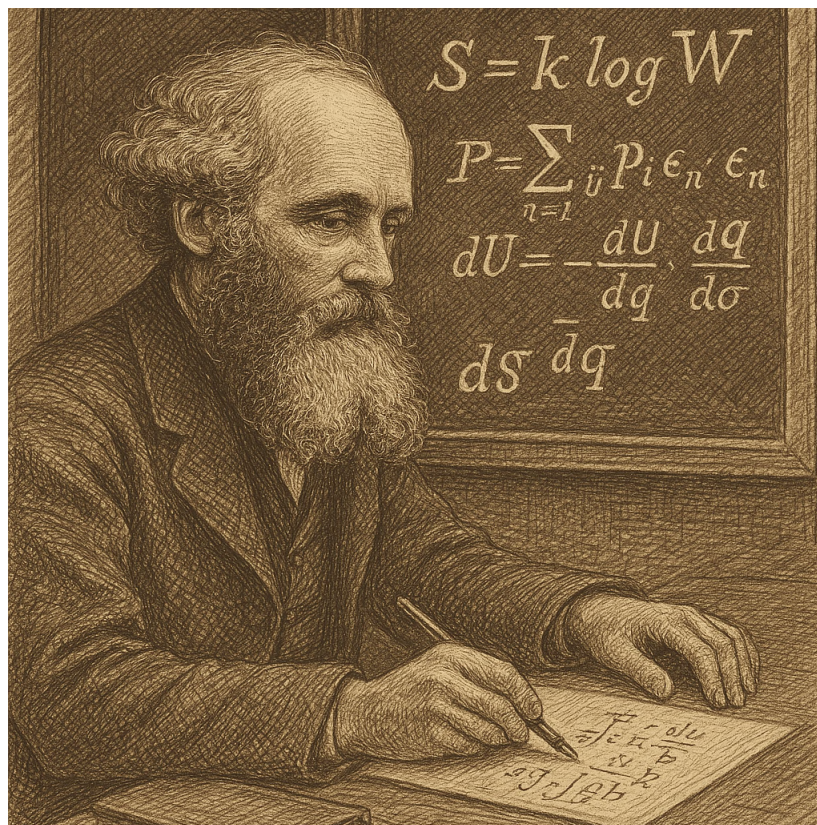


Figura 1.4: James Clerk Maxwell en formato de grabado (OpenAI, 2025). Imagen generada con GPT-4o mini (Gratis)

La primera parte del artículo plantea una descripción acerca de un sistema compuesto de un número  $N$  de esferas rígidas, las cuales chocan en pares elásticamente de tal modo que no exista un intercambio de momento lineal entre esferas. Dichas condiciones del choque son descritas a partir de las primeras tres proposiciones estableciendo en principio, a través de la proposición I, que la velocidad de las esferas es inversamente proporcional a su masa, lo cual permite que no exista un intercambio de momento lineal, por ende, las magnitudes de la velocidad en las esferas no varíe debido a los choques, y a través de la proposición II, a causa de la imposibilidad de conocer en su totalidad la dirección tomada en el espacio por una esfera después de la colisión introduce la primera condición de orden probabilístico: “*Todas las direcciones de salida son equiprobables*”, tal que, calcula la probabilidad de que una esfera seguida a la colisión salga con un ángulo de salida  $\phi$  a partir de un *parámetro de impacto*  $b$  entre unos límites establecidos  $b$  y  $b + db$ . Dicho parámetro de impacto se distribuye a lo largo de un círculo que contiene todos los posibles puntos donde pueden colisionar ambos cuerpos, y a partir de él se define una esfera unitaria que contiene

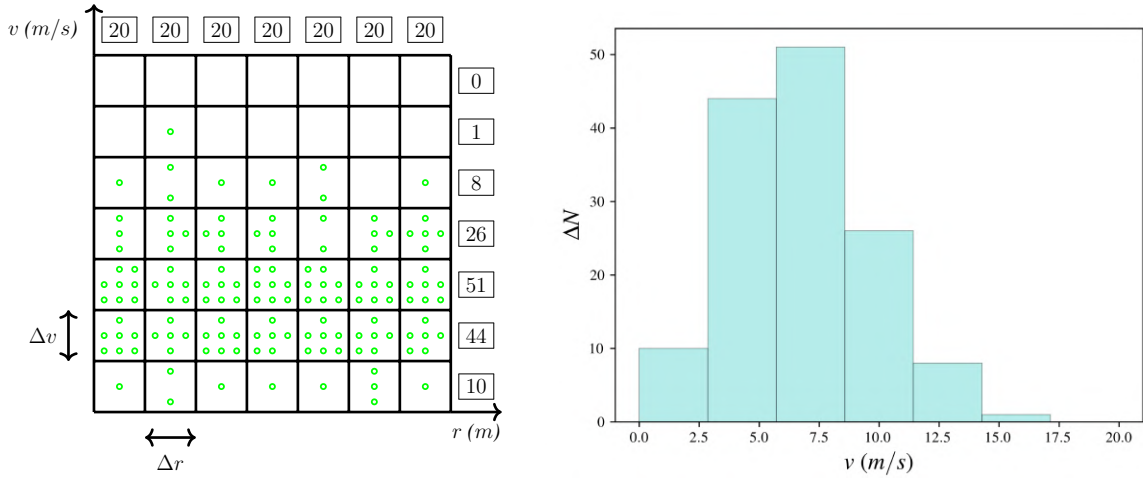
todas las direcciones posibles de salida tras el choque. Por último, en la proposición III propone un colisión general con unas condiciones iniciales dadas en la cual aplica las dos anteriores proposiciones. Seguido a ello, Maxwell, al iniciar la descripción de un sistema con  $N$  esferas rígidas, explica que:

Si un gran número de partículas esféricas iguales están en movimiento al interior de un recipiente perfectamente elástico, cuando chocan una contra otra cambian sus velocidades, de modo que después de cierto tiempo, la energía cinética debe ser dividida a lo largo de todas las esferas a partir de una ley regular, que permita hallar el número medio de partículas cuya velocidad se encuentra entre ciertos límites, aunque la velocidad de cada partícula cambie en cada colisión. (Maxwell, 2010, p 380)

Es importante resaltar las dos condiciones propuestas por Maxwell en este párrafo que le permite desarrollar la proposición IV, quizás la más importante de todo el artículo. La primera condición, es el efecto de los choques sobre el sistema, ya que las velocidades de las partículas en un primer instante pueden encontrarse distribuidas de forma arbitraria en el espacio y debido a ello, está encontrara variaciones en el tiempo localmente, sin embargo, después de un intervalo prolongado a causa de los sucesivos choques, de acuerdo a la segunda condición: la existencia de una *distribución estacionaria de velocidades* cuando se encuentra en un *estado uniformemente distribuido* en el espacio (Gyenis, 2017), es posible construir una ley de naturaleza estadística que permita describirlo, al menos en su estado estacionario o de equilibrio.

Para construir la ley de naturaleza estadística, en otras palabras una *función de distribución* que describa el sistema, según las condiciones dadas por Maxwell se propone un espacio de fase, similar al presentado en la imagen (a) de la figura 1.5 que se compone de dos ejes: el primero, la posición relativa al origen  $r$  de cada esfera, y el segundo la magnitud de la velocidad  $v$ , asumiendo que la masa  $m$  de todas las esferas es idéntica, y este es segmentado en cuadrículas de área  $|\Delta r||\Delta v|$ . En este espacio de fase, como se ha comentado anteriormente se propone en un instante de tiempo que no es posible observar variaciones y donde el número de esferas se encuentra distribuido de forma homogénea en el espacio, por lo tanto a lo largo de cada intervalo  $\Delta r$  la suma de todas las esferas que se encuentran en su interior sin importar su velocidad individual es la misma, más no en los intervalos  $\Delta v$ , tal que si contamos el número de esferas  $\Delta N$  en cada intervalo  $\Delta v$  a lo largo de todo el espacio y se organiza en una gráfica similar al proporcionado en la imagen (b) de la figura 1.5, es posible obtener la probabilidad  $W(\Delta v_k)$  de que una esfera se encuentre en el intervalo  $\Delta v_k$  a partir de la división entre el número de esferas  $\Delta N_k$  y el número total de esferas  $N$  y una *función de distribución* discreta  $\Phi(\Delta v_k)$  que se define a partir de la suma de las probabilidades desde el primer intervalo hasta el intervalo  $k$ , la cual define el porcentaje de esferas del número total desde una magnitud de la velocidad nula hasta el extremo superior del intervalo propuesto.

Sin embargo, aunque el método es sencillo, contar el número de esferas al interior de un recipiente una a una no es en sí misma una acción conmensurable, por lo tanto, se asume un número muy grande de esferas, en el límite donde  $N$  tiende a infinito, y se reduce el intervalo  $\Delta v$  a uno muy pequeño, tal que se pueda considerar un infinitesimal  $dv$ , que permita la deducción de una expresión continua de la *función de distribución*  $\Phi(v)$  y aplicarla en un número finito de esferas.



(a) Espacio de fase  $v$  vs  $r$  con 140 esferas en su interior. (b) Diagrama  $\Delta N$  vs  $v$  asumiendo que cada intervalo de velocidad es de  $20/7$  m/s.

Figura 1.5: Ejemplo con un número finito de esferas e intervalos  $\Delta r$  y  $\Delta v$  del razonamiento propuesto por Maxwell para la construcción de la distribución estacionaria (Elaboración propia).

Puntualmente en la proposición IV, Maxwell desarrolla una distribución estadística estacionaria (conocida como la distribución de velocidades de Maxwell) para las velocidades de las partículas al interior de un recipiente partiendo de un espacio de fase de seis dimensiones, tres coordenadas espaciales  $x$ ,  $y$  y  $z$  y tres componentes de la velocidad  $v_x$ ,  $v_y$  y  $v_z$ , segmentada en pequeños “volúmenes”  $dx dy dz dv_x dv_y dv_z$ , en los cuales hay un mismo número de esferas, al igual que el caso anterior en los intervalos  $\Delta r$ , en los volúmenes  $dx dy dz$ , variando únicamente el número de esferas en los volúmenes  $dv_x dv_y dv_z$ , como sucede en los intervalos  $\Delta v$ , sin embargo, a diferencia del método mostrado, en vez de contar el número de esferas en cada uno de los volúmenes, Maxwell proporciona de unas características especiales a la *densidad de probabilidad*  $f(v_x, v_y, v_z)$  asociada a la *función de distribución* continua  $\Phi(v_x, v_y, v_z)$  que se define de la siguiente manera:

$$d\Phi(v_x, v_y, v_z) = f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z \quad (1.2)$$

Esta *densidad de probabilidad*  $f(v_x, v_y, v_z)$  que permite asignar un valor de *probabilidad* a una esfera que encuentra su estado de movimiento determinado entre un intervalo de velocidad  $(v_x, v_y, v_z)$  y  $(v_x + dv_x, v_y + dv_y, v_z + dv_z)$ , debido a que las componentes de la velocidad son ortogonales, propone que las *densidades de probabilidad individuales*  $f(v_x)$ ,  $f(v_y)$  y  $f(v_z)$  son estadísticamente independientes entre si y se puede expresar como el producto  $f(v_x)f(v_y)f(v_z)$ , ya que, al igual que la probabilidad  $W(a, b)$  en un conjunto de dos dados  $(a, b)$  después de su lanzamiento, si presentan el siguiente arreglo  $(3, 4)$ , la probabilidad individual  $W(a)$  de que un dado  $a$  saque el número tres no afecta la probabilidad individual  $W(b)$  de que el dado  $b$  saque el número cuatro, lo cual permite que la probabilidad de que ambos eventos se presenten después del lanzamiento  $W(a, b)$  se exprese como el producto de sus probabilidades individuales  $W(a)W(b)$ . Además, condiciona que la *densidad de probabilidad*  $f(v_x, v_y, v_z)$  es simétrica bajo transformaciones de rotación (Gyenis, 2017), por ende  $f(v_x, v_y, v_z) = \Pi(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$ , ya que sin importar el ángulo  $\theta$  rotado por el sis-

tema coordinado  $(v_x, v_y, v_z)$ , su norma es invariante, en consecuencia la *densidad de probabilidad* es igual en todos los pequeños volúmenes  $dv_x dv_y dv_z$  a una “*distancia*”  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$  del origen.

Al resolver la ecuación funcional  $f(v_x)f(v_y)f(v_z) = \Pi(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$  y normalizar cada una de las *densidades de probabilidad individuales*, encontramos que el número esferas con una velocidad entre el intervalo  $v_x$  y  $v_x + dv_x$ ,  $v_y$  y  $v_y + dv_y$  y  $v_z$  y  $v_x + dv_z$  es definido de la siguiente manera:

$$dN(v_x, v_y, v_z) = N \left( \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}} e^{-\frac{v_x^2}{\alpha^2}} dv_x \right) \left( \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}} e^{-\frac{v_y^2}{\alpha^2}} dv_y \right) \left( \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}} e^{-\frac{v_z^2}{\alpha^2}} dv_z \right) \quad (1.3)$$

Ahora si el intervalo de velocidades es definido a través de la norma, el número de moléculas entre los límites  $v$  y  $v + dv$ , recordando que todas las direcciones de la velocidad debido a la proposición II se encuentran dadas por una cascarón esférico unitario y son equiprobables, entonces  $dv_x dv_y dv_z = 4\pi v^2 dv$ , siendo la expresión anterior igual a su versión más extendida en la literatura, donde  $\alpha$  es una cantidad proporcional a la magnitud de la velocidad cuadrática promedio  $\langle v^2 \rangle$ :

$$dN(v) = 4N \frac{1}{\alpha^3 \sqrt{\pi}} v^2 e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} dv \quad (1.4)$$

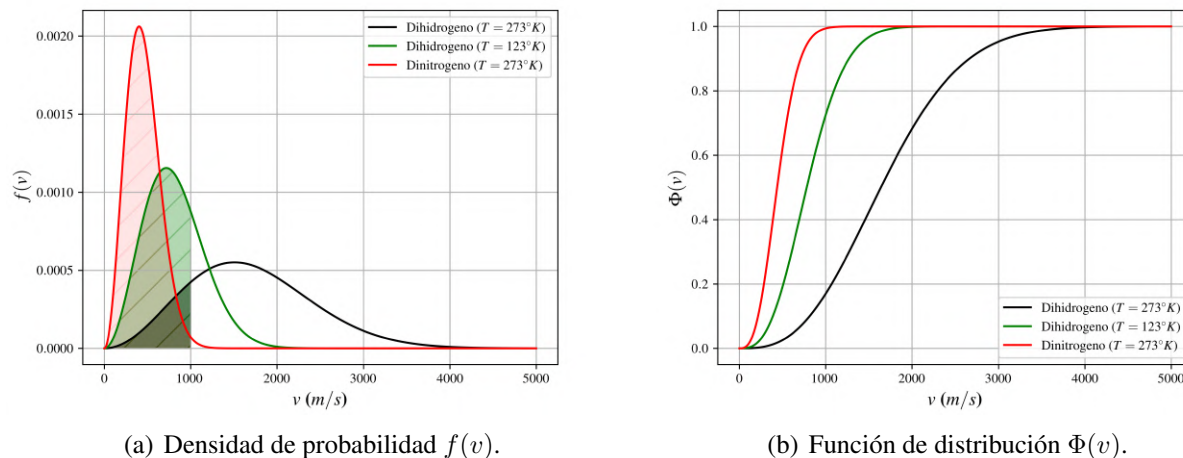


Figura 1.6: La *distribución estacionaria* de Maxwell para diferentes tipos de gas y condiciones termodinámicas. (Elaboración propia).

Maxwell al finalizar la demostración observa frente al modelo establecido: “[...] *que este se describe de la misma manera como los errores distribuidos a lo largo de un número de observaciones en la teoría de los métodos de mínimos cuadrados*” (Maxwell, 2010). Como se observa en la figura 1.6, la *función de distribución* continua  $\Phi(v)$ , definida a partir del área bajo la curva de la *densidad de probabilidad*  $f(v)$ , se comprime más cuando la densidad del gas estudiado es mayor y/o la temperatura disminuye, por lo tanto, la gran mayoría de las esferas probablemente se encontrarán en un intervalo menor de velocidad. Además, al igual que la *función error*  $\text{erf}(v)$  con una *desviación* nula frente al valor promedio de una medida, si consideramos una densidad infinita o una temperatura igual al cero absoluto, no se encontrarían *desviaciones* a la velocidad media, que en el

caso supuesto es nula, sin embargo, esto es una imposibilidad física debido a su carácter asintótico.

Otra consideración de interés se encuentra en la comparación de resultados a partir de la técnica por conteo de esferas en intervalos discretos  $\Delta v$  y el cálculo del número esferas en un intervalo  $\Delta v$  a través distribución continua derivada a partir de las propiedades de la *densidad de probabilidad*, como se muestra en la figura 1.7 y 1.8, donde ambos métodos convergen a un mismo resultado siempre, tal como se comento con anterioridad, el número total de moléculas  $N$  sea cada vez mayor y los intervalos  $\Delta v$  sean cada vez más pequeños.

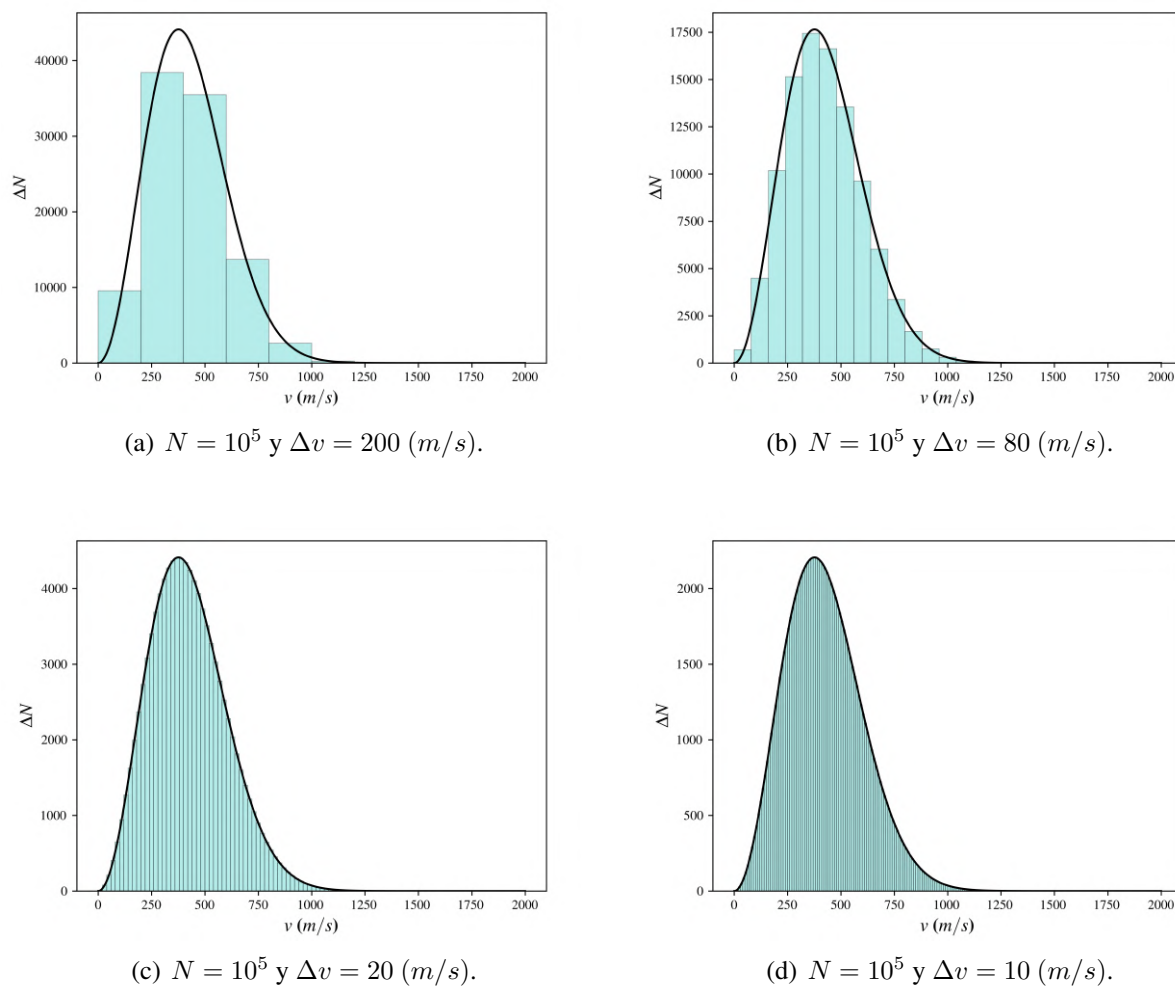


Figura 1.7: Comparación entre el método de conteo variando el intervalo  $\Delta v$  y la curva generada con ayuda de la *densidad de probabilidad* continua (Construcción propia).

Además, establece que la energía cinética total del sistema puede ser entendida bajo dos contribuciones, una por un movimiento de traslación de todo el sistema o centro de masa, y el otro, debido a la composición del movimiento relativo entre partículas, llamado movimiento de agitación o interno  $U_{int}$ .

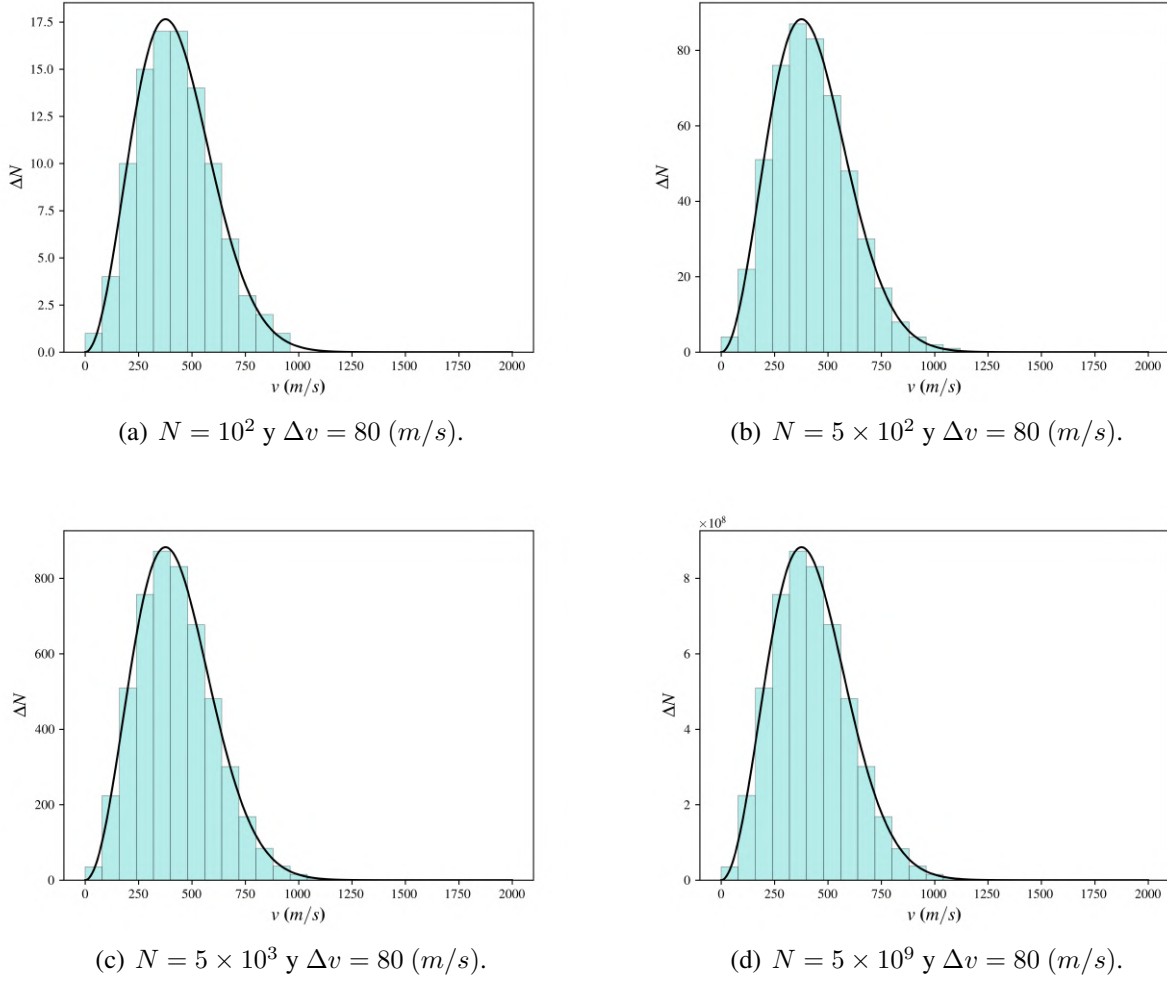


Figura 1.8: Comparación entre el método de conteo variando el número total de esferas  $N$  y la curva generada con ayuda de la *densidad de probabilidad* continua (Elaboración propia).

$$E_c = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i>j} \frac{m_i m_j}{M} (\vec{v}_i - \vec{v}_j)^2 = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + U_{int} \quad (1.5)$$

Esto último es una conclusión importante, ya que no todas las partículas al interior del recipiente se pueden encontrar a la misma velocidad de acuerdo a la distribución estacionaria, por lo tanto, el movimiento de agitación nulo tampoco es posible en un gas compuesto por un número  $N$  de esferas. También, si se realiza una variación de energía cinética en el sistema, obtenemos que el trabajo  $W$  realizado sobre el gas corresponderá a una variación del movimiento de agitación del sistema y de la velocidad asociada a su centro de masa, junto a la masa total del sistema:

$$\Delta E_c = W = \Delta U_{int} + \frac{1}{2} \Delta M v_{CM}^2 \quad (1.6)$$

La proposición V establece una relación entre dos sistemas compuestos de  $N$  y  $N'$  esferas rígidas

que siguen la distribución de velocidades, la cual permita encontrar el número de pares de partículas que tengan una velocidad relativa entre ellas en unos límites establecidos. Esta relación, análoga a las transformaciones de Galileo, permite establecer la proposición VI, fundamental para la explicación acerca del origen de una *distribución estacionaria*. Esta relación se describe como:

$$dn(u_x) = NN' \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sqrt{\pi}} e^{-\frac{u_x^2}{\alpha^2 + \beta^2}} du_x \quad \text{donde:} \quad u_x = v'_x - v_x \quad (1.7)$$

Ahora, para la proposición VI se colocan dos sistemas de partículas en un mismo recipiente, Maxwell prueba que la diferencia de energía cinética media entre cada una de las esferas será igual en ambos sistemas después de varios choques. Para ello, demuestra inicialmente que después de un choque, la diferencia de energía cinética media entre sistemas será igual a:

$$m_1 \langle v_1 \rangle^2 - m_2 \langle v_2 \rangle^2 = \left( \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 (m_1 \langle u_1 \rangle^2 - m_2 \langle u_2 \rangle^2) \quad (1.8)$$

Ahora, si se efectúan un número  $n$  de choques y se calcula dicha diferencia después de un número de choques casi *infinitos*, es posible afirmar que la energía cinética media de ambos sistemas será nulo, debido a que por cada choque su diferencia de energía cinética se reduce en la misma proporción, por lo tanto, demuestra la existencia de un estado estacionario después de una gran cantidad de tiempo, ya que ambos sistemas se encontrarán en equilibrio sin importar si ambos tipos de partículas no son iguales y siendo además un resultado generalizable a una cantidad  $n'$  de sistemas de partículas:

$$m_1 \langle v_1 \rangle^2 - m_2 \langle v_2 \rangle^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^{2n} (m_1 \langle u_1 \rangle^2 - m_2 \langle u_2 \rangle^2) = 0 \quad (1.9)$$

A partir de la proposición IV, V y VI, reconstruye diferentes conclusiones y conceptos como el recorrido medio libre, la presión por unidad de área de un gas confinado y la fricción interna en un sistema de partículas móviles, mejorando en algunos casos las expresiones encontradas por investigadores previos y además, en la segunda parte se introduce en la explicación de procesos de difusión, conducción y la viscosidad en los gases a partir de la descripción del movimiento de agitación o interno nombrado anteriormente.

Sin embargo, Clausius encontraría un error de Maxwell en esta segunda parte debido a que asume mal la proporción de moléculas que se mueven en una dirección con unos límites establecidos  $\mu$  y  $\mu + d\mu$  a lo largo de un conducto con un gradiente de temperatura entre dos gases, que llevaría a replantear siete años después lo construido en el artículo “*Sobre la teoría dinámica de los gases*”, en el cual también mejora su modelo frente a la colisión entre pares de moléculas considerando la presencia de potenciales intermoleculares que redefinen el *parámetro de impacto*  $b$ .

Por último, en la tercera parte de su artículo presenta una generalización de los primeros postulados presentados para cualquier cuerpo rígido perfectamente elástico, en un complejo apartado matemático, donde tiene en cuenta no solo tres grados de libertad traslacionales, sino, a su vez, otros tres grados de libertad, en este caso rotacionales. Esta sección se presenta con el fin de calcular los calores específicos de gases diatómicos como el oxígeno o el hidrógeno, sin embargo, sus cálculos no coinciden con los datos experimentales debido a que existe un grado de libertad restringido en

ellos, el cual sería sugerido por Boltzmann años después (Brush, 2004).

Frente al trabajo realizado en 1860 por Maxwell es importante resaltar la importancia de la proposición II frente al desarrollo de orden estocástico del modelo matemático presente para un sistema de partículas, y su planteamiento acerca de una regularidad en el sistema que permite definir una *distribución estacionaria* de las velocidades en las partículas, demostrando de acuerdo a la ecuación 1.9, que en intervalos discretos de sucesos, en este caso de un número altísimo de choques, sin importar la cantidad de sistemas de partículas presentes con energía cinética media diferente, se llega a un estado estacionario, representando un estado de equilibrio termodinámico del sistema macroscópico del gas. Por lo tanto, este suceso, representa que las componentes de movimiento de translación y movimiento de agitación en las partículas, se encontrarían directamente relacionadas con la temperatura del gas, en este caso, como demuestra en la proposición XII.

Además, vale la pena preguntar: ¿Es posible hallar una *distribución* que describa de forma continua la mezcla, inicialmente entre dos gases o sistemas de partículas, a lo largo del tiempo y el espacio, momentos previos antes de encontrarse en un estado de equilibrio descrito por la *distribución estacionaria* hallada por J. C. Maxwell?, y ¿Es la *distribución estacionaria* hallada por J. C. Maxwell el único modelo para los estados estacionarios de sistemas de partículas?, las cuales no son preguntas vacías, sino que se encuentran en correspondencia con la necesidad de hallar un modelo propio desde la teoría mecánica del calor que permita la explicación de fenómenos de transporte complejos, como la difusión de dos gases, y que concuerde con sus leyes experimentales, como es el caso de la *Ley de difusión de Graham* definida en 1848, una relación inversamente proporcional entre la velocidad de difusión de un gas y la raíz de su densidad o las leyes fenomenológicas de Adolf Fick (1829 - 1901) en 1955, un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales que describe la difusión de un gas a través de una membrana a partir del cambio de concentración  $\phi$  de dicha sustancia en una región.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (D \vec{\nabla} \phi) \quad (1.10)$$

### 1.3. Ludwig Boltzmann: El Pionero de las Fluctuaciones en la Física

A pesar del notable desarrollo establecido por Maxwell, no sería hasta la llegada del físico austriaco Ludwig Eduard Boltzmann, que la física estadística se concibe más allá de una extensión teórica de la termodinámica basada en una visión atomista (Cervera y Guzmán, 2006), ya que, como se comentó anteriormente, él construiría sus propios principios epistemológicos y gran parte de su vida los defendería de distintos experimentos mentales propuestos a mediados del siglo XIX, que siguen en vigencia hasta nuestros días. Todo esto debido al objetivo en las investigaciones de Boltzmann que consistió en derivar el segundo principio de la termodinámica a partir de las proposiciones de naturaleza estadística construidas por Maxwell y las leyes provenientes de la Mecánica Clásica, más no de hechos fenomenológicos.

En principio, los sistemas termo-mecánicos como las máquinas térmicas cuyo objetivo es la trans-

formación de *energía térmica* a *energía mecánica*, básicamente convirtiendo una transferencia de calor entre dos cuerpos en trabajo con ayuda de las propiedades de un fluido como lo es la propiedad elástica de los gases, termina presentando una característica respecto a la forma de aprovechar este cambio y es que no son muy eficientes, ya que no se transforma toda la *energía térmica* a *energía mecánica*, a diferencia de otros sistemas termo-mecánicos como lo es un cuerpo móvil sobre una superficie con fricción, el cual convierte toda la *energía mecánica* en *energía térmica*, ya que, a medida que frena el cuerpo móvil, aumenta la temperatura de ambos sistemas.

Esto se debe a que no es una transformación espontánea en la naturaleza, en palabras de Vittorio Silvestrini, una constatación fenomenológica o afirmación a través de los hechos físicos frente a los sistemas termo-mecánicos es que “*la energía tiende a degradarse*” (Silvestrini, 1998), ya que de forma espontánea la *energía mecánica* naturalmente tiende a convertirse en *energía térmica*, esto se considera una degradación de la energía debido a que los sistemas dinámicos, en este caso, evolucionan inexorablemente a un estado de equilibrio dinámico o estático debido a la fricción. Además, si volvemos a las máquinas térmicas, su funcionamiento requiere de una transferencia de energía en forma de calor que espontáneamente se produce desde un cuerpo de mayor temperatura a un cuerpo de menor temperatura, que igualmente evoluciona a un estado de equilibrio térmico, donde ambos cuerpos se encuentran a la misma temperatura, siendo la eficiencia de la máquina térmica cada vez menor al acercarse a dicho estado.

Por lo tanto, el segundo principio de la termodinámica suele encontrar su definición a través de los sistemas, ligado a la medida de degradación energética en un sistema desde un punto de vista fenomenológico. Entonces, para definir cuantitativamente la evolución de un sistema, como una máquina térmica, Clausius inicialmente hizo uso de los *procesos cíclicos* propios de su funcionamiento, los cuales se encuentran divididos de acuerdo a diferentes cambios de estado dinámico y térmico que sufre el *gas de trabajo*, más específicamente del análisis del *Ciclo de Carnot*. Para ello, observó que dos transformaciones en un sistema son equivalentes si ambas son de la misma naturaleza y son intercambiables entre ellas. Así, Clausius define el *Aequivalenzwerth* como una medida que permite distinguir la equivalencia entre dos transformaciones, en el contexto de los *procesos cíclicos* de una máquina térmica, esta debe ser proporcional a una transferencia de energía en forma de calor  $Q$ , donde su factor de proporcionalidad es una función que depende únicamente de la temperatura  $f(T)$  (Clausius, 1867).

Después de hallar la función  $f(T)$ , en este caso el inverso de la temperatura, finalmente concluye que un *proceso cíclico* es reversible, cuando la suma de todas las medidas de equivalencia de cada una de las transformaciones que lo componen se anulan. Como contraparte, un *proceso cíclico* es irreversible si la suma de todas las transformaciones es positiva, siendo consistente con los hechos fenomenológicos, debido a que los valores negativos aluden a transformaciones en las cuales la *energía térmica* se transforma en *energía mecánica*.

$$\oint \frac{dQ}{T} \geq 0 \quad (1.11)$$

Sin embargo, el término *Aequivalenzwerth* fue reemplazado por el concepto de *entropía* por el mismo Clausius, debido a que extiende la medida de degradación energética como una condición propia de todo sistema físico, en principio demostrando que la idea de reversibilidad e irreversi-

bilidad es aplicable a un *proceso no cíclico*, como un cambio de fase, “*compensando*” con una transformación externa que le permita ser entendido como un *proceso cíclico* y realizar un desarrollo similar al construido a partir de la ecuación 1.11, llevando Clausius a afirmar lo siguiente:

La segunda proposición principal, en la forma que le he dado, afirma que todas las transformaciones que se producen en la naturaleza en un determinado sentido, que he supuesto positivo, pueden producirse por si mismas, es decir, sin compensación, pero que sólo pueden producirse en sentido contrario, es decir, negativo, de tal manera que sean compensadas por transformaciones positivas que se producen simultáneamente. (Clausius, 1865, p 398)

Aquí, Clausius propone un *criterio de espontaneidad*, el cual define que si la transformación espontánea de un sistema repercute en un cambio de *entropía* del universo, este sistema se considera irreversible, el cual exhibe una *asimetría* temporal frente a su evolución, a diferencia de los sistemas reversibles, en los cuales su transformación espontánea no repercute en un cambio de *entropía* del universo, particularmente Clausius lo presenta como se encuentra en la ecuación 1.12.

$$\Delta S_{universo} = \Delta S_{entorno} + \Delta S_{sistema} \geq 0 \quad \text{donde} \quad \Delta S_{sistema} = \int \frac{dQ}{T} \quad (1.12)$$

En este contexto surge una pregunta, que incluso sugiere Clausius: ¿cómo se relaciona el segundo principio de la termodinámica, que encuentra su construcción en el estudio de los procesos cíclicos y la equivalencia de transformaciones que hacen parte del proceso, con la imagen construida previamente, donde un gas se compone de pequeñas partículas en movimiento perpetuo? Aquí, como se comentó anteriormente, es donde Boltzmann encontraría la motivación de sus investigaciones por más de 40 años.

Entre 1866 y 1871, Boltzmann publicó alrededor de seis artículos en los que profundizó en el modelo matemático desarrollado por Maxwell. En estos trabajos, no solo extendió la *distribución estacionaria* a situaciones más realistas, sino que también promovió el uso de la combinatoria en la organización de sistemas de partículas. Además, formuló argumentos esenciales para derivar una expresión de la entropía e interpretación del segundo principio de la termodinámica basándose en la teoría de colisiones, en lugar de apoyarse en observaciones fenomenológicas. Algo que se destaca en los artículos es el avance en el estudio de la teoría de colisiones, ya que gran parte de su contenido se centra en el desarrollo de esta a partir del *espacio de fases*, junto a su íntima conexión con la teoría general de las ecuaciones diferenciales, y en establecer diferentes condiciones de inferencia lógica frente a los sistemas planteados. A partir de dichas condiciones, es posible argumentar cómo la *distribución de velocidades estacionaria* propuesta anteriormente por Maxwell es el único estado final posible de una *distribución de velocidades* inicialmente arbitraria en un sistema de partículas, debido al efecto de las colisiones en su evolución temporal (Badino, 2011).

Fundamentalmente se resalta la mención de estos argumentos esenciales en el artículo de 1868 “*Estudios sobre el equilibrio de la fuerza viva entre puntos materiales en movimiento*”, donde se establece el siguiente escenario que será utilizado ampliamente en sus posteriores publicaciones: considere un espacio donde ocurre una cantidad determinada de colisiones binarias definiendo dos tipos de colisiones, las primeras se denominan directos, donde las partículas tienen una velocidad

inicial  $v_1$  y  $v_2$ , y después de la colisión  $v'_1$  y  $v'_2$ , y el segundo que se denominan como choques inversos, son aquellos choques donde las partículas inicialmente tienen una velocidad  $v'_1$  y  $v'_2$ , y después de la colisión  $v_1$  y  $v_2$ . Ahora se calcula la densidad de choques directos e inversos a partir de una hipótesis conocida como *Stosszahlansatz*<sup>3</sup>, la cual asume que el número de colisiones por unidad de volumen que involucra las partículas con velocidades  $v_1$  y  $v_2$ , depende solo del producto de sus probabilidades independientes en una pequeña porción del espacio, por lo tanto, de sus distribuciones  $f(v_1) dv_1$  y  $f(v_2) dv_2$  (Badino, 2011); aquí los estados de movimiento inicial en las partículas no se encuentran *correlacionadas*, pero si su estado de movimiento posterior a la colisión, tal que, la densidad de choques directos es:  $\psi f(v_1)f(v_2) dv_1 dv_2$  y la densidad de choques inversos es:  $\psi' f(v'_1)f(v'_2) dv'_1 dv'_2$ . Las funciones  $\psi$  y  $\psi'$  son constantes asociadas a la geometría del choque. Así, si queremos hallar una condición de equilibrio, ambas densidades de choques deben ser iguales:

$$\psi f(v_1)f(v_2) dv_1 dv_2 - \psi' f(v'_1)f(v'_2) dv'_1 dv'_2 = 0 \quad (1.13)$$

Esta no *correlación* dada por la hipótesis *Stosszahlansatz*, asume que los estados de movimiento entre las partículas iniciales no se ve influenciada entre ellas antes del choque o, dicho en otras palabras son independientes los valores entre  $v_1$  y  $v_2$ , sin embargo, después de la colisión si se encuentra *correlación* entre los estados de movimiento finales de las partículas (Parker, 2009), debido a que existe una dependencia entre las velocidades finales  $v'_1$  y  $v'_2$  condicionada por la conservación de la energía mecánica en el sistema. Esto involucra a su vez, una condición de *asimetría* temporal (Uffink, 2022; Parker, 2009).

En este sentido es posible afirmar que la propuesta de Boltzmann lleva a establecer una distinción entre un momento previo, dado por la no *correlación* de los estados de movimiento de las partículas antes de la colisión, y un momento posterior, debido a la *correlación* de los estados de movimiento de las partículas después de la colisión. En este acercamiento inicial de Boltzmann mediante sus artículos al problema de la relación entre el segundo principio de la termodinámica y la imagen construida de un gas compuesto de partículas, se encuentra que encamina sus esfuerzos a mostrar a través de un análisis matemático la asimetría presente en los hechos fenomenológicos, buscando responder la pregunta planteada por Clausius. Sin embargo, para Boltzmann la condición de equilibrio presentada en la ecuación de 1.13, es resultado de una herencia de los trabajos de Maxwell en los cuales no se demuestra que dicha condición sea única en los sistemas de partículas, por ende no sería el único resultado propio de la tendencia natural del sistema debido a la asimetría encontrada, lo cual se trabajará ampliamente en la siguiente sección.

### 1.3.1. La Ecuación de Transporte de Boltzmann y el Teorema-H

Boltzmann en 1872 publica uno de sus artículos más importantes: “*Estudios adicionales sobre el equilibrio térmico de las moléculas de gas*”, donde se plantea inicialmente las preguntas abiertas frente a la investigación de Maxwell, debido a que según Boltzmann, Maxwell presenta una falsa

---

<sup>3</sup>El término *Stosszahlansatz* (En español: “Aproximación al número de choque”) fue acuñado por Paul Ehrenfest en 1912, ya que Ludwig Boltzmann nunca utilizó dicho término. Estas condiciones, el autor austriaco no las introdujo como una hipótesis, sino como una propiedad que se supone en el sistema evidente para él.

inferencia, debido que establece que la *distribución estacionaria* de un gas siempre sigue la ecuación 1.4, hecho que no tenía una prueba que partiera de un punto diferente al límite establecido, por ende, se encontraba abierta a la búsqueda de límites diferentes que permitieran otras *distribuciones estacionarias* alternas a la propuesta por Maxwell (Cercignani, 1998).

Para responder a estas cuestiones, primero Boltzmann define un sistema de  $N$  partículas confinadas en un recipiente, las cuales tienen una distribución arbitraria de velocidades y posiciones en el interior conocidas en un instante de tiempo ( $t = 0$ ), estas partículas se mueven en línea recta a velocidad constante, no asume ninguna restricción frente a la ley que siguen las fuerzas intermoleculares y considera que los choques entre partículas son perfectamente elásticos. En este caso, Boltzmann pretende modelar cómo este sistema evoluciona a lo largo de un intervalo de tiempo, a partir de la definición de una ecuación de movimiento que permita encontrar una *distribución no estacionaria* de la energía cinética de sus partículas, donde el número de partículas  $f(E, t) dE$ , en un tiempo  $t$  y sección del espacio, tienen una velocidad que les permite establecerse entre los límites de energía cinética  $E$  y  $E + dE$ .

De acuerdo a ello, él tiene en cuenta dos consideraciones pertinentes en la solución del problema que permiten su tratamiento a partir de un caso especial. Las consideraciones son: (1) Toda dirección de la velocidad en una molécula después de un largo intervalo de tiempo es igualmente probable y (2) La distribución de velocidades debe ya ser uniforme inicialmente (Boltzmann, 2003a).

Esta segunda consideración hace alusión a una condición de homogeneidad en el sistema, ya que si tomamos una sección cualquiera del espacio que encierra el recipiente, de forma análoga a tomar una muestra de la población a estudiar, las moléculas con diferente energía cinética se encuentran mezcladas uniformemente a pesar de cambiar en el tiempo individualmente, por lo tanto, una situación inicial donde gran parte de las moléculas a altas velocidades se encuentran en un lado del recipiente y las moléculas a bajas velocidades en el lado contrario del recipiente, no se encontraría contemplada dentro de este caso especial. Así, la distribución  $f(E, t)$  se encuentra únicamente dependiente del tiempo, y no el espacio.

A partir de este punto, Boltzmann establece que la razón de cambio en el tiempo de la distribución  $f(E, t)$  se debe solo a las colisiones entre partículas, tal que, en un pequeño intervalo de tiempo  $\Delta t$  se debe encontrar una densidad de colisiones por unidad de volumen a lo largo de una muestra. Esta densidad de colisiones por unidad de volumen, se construye a partir de un modelo en el cual solo se consideran colisiones entre pares, estableciendo que la energía cinética de ambas moléculas, antes y después del choque, se encuentran dentro de unos límites establecidos que además respetan el principio de conservación de la energía mecánica.

La densidad de colisiones por unidad de volumen consta de dos términos:  $dn$  y  $dv$ , de acuerdo a la energía cinética inicial y final de las moléculas en la colisión. Si queremos hallar el número de moléculas  $f(E, t) dE$  que tienen una energía cinética entre  $E$  y  $E + dE$ , después de las colisiones, se observan dos efectos: una disminución y un aumento en el número de partículas dentro de ese rango de energía. La disminución, indicada por Boltzmann como  $\int dn$ , ocurre porque algunas partículas experimentan un cambio tan grande en su energía cinética tras la colisión, que quedan

fuera del rango considerado. Por otro lado, el aumento, señalado por Boltzmann como  $\int d\nu$ , se debe a que la energía cinética final de ciertas partículas cae dentro del rango tras la colisión. De esta manera, el número de partículas  $f(E, t) dE$  con energía entre  $E$  y  $E + dE$  después de un intervalo de tiempo  $\Delta t$  será:

$$f(E, t + \Delta t) dE = f(E, t) dE + \int d\nu - \int dn \quad (1.14)$$

Luego de una serie de complejos cambios de variable realizados en el artículo por Boltzmann, la deducción de los términos  $dn$  y  $d\nu$ , el uso de series de Taylor frente al término  $f(E, t + \Delta t)$  y finalmente la demostración y derivación de dos igualdades acerca de la función  $\psi(E, E', U)$  proporcional a los términos de la densidad de colisiones por unidad de volumen, la cual se encuentra relacionada con la expresión que sigue la geometría de las colisiones, Boltzmann deduce la ecuación integro-diferencial no lineal conocida como la *Ecuación de transporte de Boltzmann*:

$$\frac{\partial f(E, t)}{\partial t} = \int_0^\infty \int_0^{E+E'} \left[ \frac{f(U, t) f(E + E' - U, t)}{\sqrt{U} \sqrt{E + E' - U}} - \frac{f(E, t) f(E', t)}{\sqrt{E} \sqrt{E'}} \right] \sqrt{EE'} \psi(E, E', U) dE' dU \quad (1.15)$$

En esta ecuación  $E'$  es la energía cinética de la segunda molécula antes del choque, el cual puede encontrarse dentro de cualquier valor positivo  $[0, \infty)$ , y  $U$  es la energía cinética de la primera molécula después del choque, que según el principio de conservación de la energía mecánica, su rango se debe encontrar dentro del intervalo  $[0, E + E']$  (Boltzmann, 2003a).

La *Ecuación de transporte de Boltzmann* en principio es de naturaleza determinista, ya que su deducción, como Boltzmann muestra en su artículo, se hace a partir de la mecánica clásica. Sin embargo, debido a que los términos asociados con la densidad de colisiones por unidad de volumen  $dn$  y  $d\nu$  encuentran su derivación apoyada de consideraciones de orden estocástico construido desde el artículo de 1868 (Badino, 2011), la ecuación 1.15 define la distribución que evoluciona temporalmente del número de moléculas que tienen una energía cinética entre los límites  $E$  y  $E + dE$  (Marcos, 2021).

Además, es necesario tener en cuenta que el Boltzmann hace dos afirmaciones relevantes frente a la importancia del cálculo de probabilidades al interior de la física y su contraposición frente a los seguidores del determinismo, como condición necesaria en la construcción de un modelo físico:

[...] El hecho de que, a pesar de todo, observemos leyes completamente definitivas acerca del comportamiento de los cuerpos calientes debe atribuirse a la circunstancia de que los sucesos aleatorios, cuando se producen en las mismas proporciones, dan los mismos valores. [...] Por eso, los problemas de la teoría mecánica del calor son también problemas de la teoría de la probabilidad. Sería, sin embargo, erróneo creer que la teoría mecánica del calor es por lo tanto afligida con algunas incertidumbres porque los principios de la probabilidad son usados. Uno no debe confundir una ley que se conoce como incompleta, cuya validez se encuentra por lo tanto en duda, con una ley completamente conocida del cálculo de probabilidades; [...] (Boltzmann, 2003a, p 264)

Estas dos afirmaciones pretenden justificar el procedimiento empleado donde la construcción del conocimiento a partir del uso de una *distribución* y el cálculo de probabilidades, o estocástico, en un problema donde su más profundo entendimiento se basa en una teoría determinista debe ser considerado, debido a la imposibilidad práctica de su resolución desde los procedimientos de la mecánica clásica, considerando incluso que un problema con tres cuerpos, como él mismo afirma, es muy complejo de resolver. Además, la explicación, en este caso, de un gas en equilibrio termodinámico que es entendido bajo el sistema de partículas antes descrito, busca hallar una solución a partir de una serie de premisas que se correspondan con los principios de la termodinámica.

Después de definir el modelo que permite la descripción microscópica del gas, Boltzmann deriva un teorema acerca de una cantidad denominada  $H^4$  (en su artículo se muestra como  $E$ ), propuesta por el autor, que se encuentra estrechamente relacionada con la *entropía* de un sistema, esta cantidad  $H$  no puede incrementar cuando la función  $f(E, t)$  satisface la ecuación 1.15, por tanto,  $H$  se define de la siguiente manera:

$$H = \int_0^{\infty} f(E, t) \left[ \log \left( \frac{f(E, t)}{\sqrt{E}} \right) - 1 \right] dE \quad (1.16)$$

Esta cantidad, como es posible observar en la ecuación 1.16 no tiene un rango establecido frente a la energía cinética de las partículas, por lo tanto, este solo depende del tiempo. Cuando la razón de cambio de la cantidad  $H$  con respecto al tiempo es nulo, se establece que se encuentra en su estado de equilibrio. En la ecuación 1.17 Boltzmann reafirma que dicho cambio en el funcional  $H$  solamente tiene una tendencia negativa o igual a cero.

$$\frac{dH}{dt} = \int_0^{\infty} \log \left( \frac{f(E, t)}{\sqrt{E}} \right) \frac{\partial f(E, t)}{\partial t} dE \leq 0 \quad (1.17)$$

Así Boltzmann, en este artículo sin necesidad del uso de métodos numéricos, deriva la *distribución estacionaria* (misma que halla Maxwell en 1860) a partir de la ecuación 1.15, la cual se presenta cuando el término de densidad de colisiones por unidad de volumen sea nulo, en otras palabras  $\int dn = \int d\nu$ , debido a que no hay variación de la energía cinética en el número de moléculas después de la colisión, con respecto al rango en el que se encuentran establecidas en el tiempo; aquí se resalta que la cantidad  $H$  únicamente decae como consecuencia del movimiento molecular, o se mantiene constante en un caso límite, el cual es una representación completamente diferente del segundo principio de la termodinámica según Boltzmann, resolviendo finalmente las preguntas abiertas en sus investigaciones de forma “*rigurosa*”. Por tanto es posible hallar la *distribución estacionaria* a partir de la ecuación 1.17, asumiendo como caso límite la nula variación de la cantidad

---

<sup>4</sup>Frente a la cantidad o el funcional  $H$  y su respectivo teorema, continuamente se debate su origen por parte de diferentes historiadores de la ciencia, ya que se introduce por Boltzmann en el artículo de 1872 como un elemento de trivial entendimiento. Para algunos historiadores, como Stephen Brush y Jos Uffink (Uffink, 2022), el funcional  $H$  se deriva debido a un acto milagroso proveniente de la prueba y error, promoviendo una imagen de la evolución en el pensamiento de Ludwig Boltzmann en palabras de Massimiliano Badino como un “*letargo mecanicista*”, donde el científico austriaco abandonaría completamente su lenguaje mecanicista por una terminología estadística años después. Sin embargo, Massimiliano Badino argumentaría que esto puede deberse a una mala lectura creativa en la cual no se contemplan los trabajos previos al mismo artículo de 1872, ya que él conjetura que su expresión discreta habría sido derivada a partir de argumentos estadísticos años antes. (Badino, 2011)

$H$ , dotando de un carácter más profundo a su demostración.

Recordando que este primer tratamiento realizado por Boltzmann era un caso especial, en el momento que el autor austriaco pretende modelar la difusión, la viscosidad y la conducción de calor en un gas, generaliza su resultado a una situación donde las dos condiciones expresadas anteriormente no se cumplen, siendo ahora la *distribución no estacionaria* dependiente de las coordenadas espaciales  $\vec{r} = (x, y, z)$ , y en consecuencia  $f(\vec{v}, \vec{r}, t) du$ , donde  $du = dv_x dv_y dv_z$ , y debido a fuerzas externas  $\vec{F}$ , la dirección de la velocidad en las partículas tendrá algunas orientaciones privilegiadas. Por lo tanto, la *Ecuación de transporte de Boltzmann* toma la siguiente forma:

$$\frac{\partial f(\vec{v}, \vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f(\vec{v}, \vec{r}, t)}{\partial \vec{r}} + \vec{a} \cdot \frac{\partial f(\vec{v}, \vec{r}, t)}{\partial \vec{v}} = \left( \frac{\partial f(\vec{v}, \vec{r}, t)}{\partial t} \right)_{col} \quad (1.18)$$

Donde el término a la derecha de la igualdad, hace alusión al término de densidad de colisiones por unidad de volumen. De hecho, si el gas se encuentra encerrado en un recipiente, la cantidad,  $H$  como se nombró anteriormente solo decrece debido al movimiento molecular, representada en la ecuación 1.19 donde  $dV = dx dy dz$ , y es proporcional a la entropía del gas (Boltzmann, 2003a).

$$H = \int_V \int_u f(\vec{v}, \vec{r}, t) \log [f(\vec{v}, \vec{r}, t)] du dV \quad (1.19)$$

Esta cantidad  $H$  también es representada a partir del uso de estados finitos de energía en un sistema. Boltzmann, propone que si reemplaza la doble integral que se presenta en la ecuación 1.15 por una suma, sería mucho más sencillo su entendimiento. Para ello, de acuerdo a la definición de integral dada por Bernhard Riemman (1826-1866), el número de moléculas que se encuentran dentro de un rango de energía, se puede describir de forma discreta de acuerdo a la distribución:

$$\int_0^\infty f(E, t) dE = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \sum_{k=0}^p f(k\epsilon, t) \quad (1.20)$$

Siendo posible reemplazar la variable continua  $E$  por una serie de valores discretos  $\epsilon, 2\epsilon, \dots, p\epsilon$ , recordando que desde la postura de Boltzmann, este procedimiento es una manera de reducir la dificultad en el cálculo de las cantidades que describen los eventos físicos, por lo tanto, no interviene esta *discretización de la energía* en el evento físico real, como enuncia a continuación:

Podría ser difícil imaginar un mecanismo que pueda regular las colisiones de dos cuerpos que permita que las energías después de una colisión sea siempre múltiplo de  $\epsilon$ . Esta no es la pregunta aquí. En cualquier caso nosotros somos libres a estudiar las consecuencias matemáticas de esta suposición, la cual no es más que un artificio que nos ayuda a calcular procesos físicos. (Boltzmann, 2003a, p 293)

Para hallar el número de moléculas  $N_{\kappa\lambda}^{kl}$  que efectúan un cambio entre la energía cinética inicial ( $k\epsilon, l\epsilon$ ) y la energía cinética final ( $\kappa\epsilon, \lambda\epsilon$ ) en una colisión binaria, este será igual al producto entre un instante de tiempo  $\Delta t$ , el número de moléculas  $w_k$  y  $w_l$  con energía cinética  $k\epsilon$  y  $l\epsilon$  por unidad de volumen respectivamente, y un factor de proporcionalidad debido a la naturaleza de la colisión  $A_{\kappa\lambda}^{kl}$ .

$$N_{\kappa\lambda}^{kl} = w_k w_l A_{\kappa\lambda}^{kl} \Delta t \quad (1.21)$$

Para ejemplificar la ecuación anterior considere dos moléculas con energía cinética inicial  $3\epsilon$  y  $2\epsilon$ , que tras la colisión, su energía cinética será  $4\epsilon$  y  $\epsilon$  respectivamente. En este caso, el número de moléculas que siguen esta regla, denotadas como  $N_{41}^{23}$ , se encontrara dada por la relación 1.21, donde la constante de proporcional será  $A_{41}^{23}$  y el número de moléculas iniciales  $w_2$  y  $w_3$ .

De acuerdo con este cambio, la *Ecuación de Transporte de Boltzmann* es reducida a una infinita suma de términos que representan cómo cambia el número de moléculas  $w_k$  que tienen una energía cinética establecida  $k\epsilon$ , debido a las colisiones binarias, donde después de la colisión algunas moléculas que tenían esta misma energía cinética cambiarán a una diferente, o en el caso contrario, algunas partículas que tenían una energía cinética diferente a la establecida en el estudio, después de la colisión la tendrán. Así, se establece el siguiente modelo análogo a la ecuación 1.14:

$$w_1(t + \Delta t) = w_1(t) - N_{22}^{13} - N_{23}^{14} - N_{32}^{14} - N_{24}^{15} \dots + N_{13}^{22} + N_{14}^{23} + N_{14}^{32} + N_{15}^{24} \dots \quad (1.22)$$

Redefiniendo nuevamente el funcional  $H$ , propio de esta versión discreta de la *Ecuación de Transporte de Boltzmann*, la cual también es siempre decreciente en el tiempo y en su caso límite, donde su razón de cambio en el tiempo es igual a cero y el número de  $n$  de niveles discretos de energía se hacen infinitos, es posible deducir la *distribución estacionaria* de Maxwell.

$$H = \sum_{k=0}^n w_k \log \left( \frac{w_k}{\sqrt{k}} \right) \quad (1.23)$$

Frente al artículo de Boltzmann es importante resaltar el papel que tiene la hipótesis *Stosszahlansatz*, por ende el uso de la idea de *correlación estadística* entre dos variables, tanto en la derivación de la *Ecuación de Transporte de Boltzmann*, como en la obtención de la *distribución estacionaria*, ya que permite finalmente a partir de la evolución temporal del funcional  $H$  encontrar un argumento más allá de la constatación fenomenológica. Esta hipótesis a su vez, al introducir un elemento de *asimetría* temporal, permite que se exhiba en el funcional  $H$  dicha característica de orden fenomenológico encontrada en el segundo principio de la termodinámica, permitiendo construir en principio una relación con la *entropía* en un sistema macroscópico (Parker, 2009).

Pero, como advierte Jos Uffink, el sistema estudiado por el autor austriaco es un sistema *aislado*: un sistema que no tiene intercambios de energía y materia con el entorno, donde  $dQ = 0$ , por lo tanto, las afirmaciones hechas por Ludwig Boltzmann donde relaciona el funcional  $H$  con la expresión dada por Clausius,  $\Delta S_{sistema}$  en la ecuación 1.12, sean incoherentes, sin embargo, si que construye una definición con una relación indirecta frente al segundo principio de la termodinámica para los estados de *no-equilibrio* en un sistema, los cuales a pesar de estar aislados presentan una tendencia espontánea a una configuración estacionaria, o en *equilibrio* (Uffink, 2022).

No solamente Jos Uffink, sino otros historiadores encuentran un elemento en el teorema-H que le permite a Boltzmann ampliar la relaciones entre la evolución del sistema y la entropía, asumiendo desde la mirada microscópica un tercer elemento de “degradación” en el sistema, la tendencia de la no-uniformidad a la uniformidad al interior de los sistemas. Sin embargo, establecer una relación entre la tendencia de los sistemas microscópicos que llevan de la no-uniformidad a la uniformidad y los efectos macroscópicos visualizados en los sistemas termodinámicos, es un punto que ha sido

criticado sobre los trabajos de Boltzmann y que generan una ruptura en el entendimiento de los fenómenos macroscópicos a través del tratamiento de sus constituyentes a nivel microscópico.

### 1.3.2. Las Paradojas sobre la Irreversibilidad de los Procesos

Las ideas de Boltzmann confrontaban fuertemente a la comunidad científica del siglo XIX, debido a la construcción de argumentos a partir del cálculo de probabilidades y el modelo de “*entropía*” propuesto, lo cual permitió la construcción de diferentes experimentos mentales por parte de otros científicos como: el “Demonio de Maxwell” (1869), la “Paradoja de Loschmidt” (1876) y la “Paradoja de la Recurrencia” (1896), donde el segundo principio de la termodinámica desde la propuesta de Boltzmann se encontraría en duda debido a la interpretación del término de densidad de colisiones por unidad de volumen, al uso del *Stosszahlansatz*, y el significado del funcional  $H$ .

Profundizando acerca de los experimentos mentales propuestos, en inicio, Joseph Loschmidt (1821-1895) un físico alemán defensor de la teoría cinético-molecular y amigo de Boltzmann, construye un argumento que pretende erradicar una consecuencia del segundo principio de la termodinámica: “*la muerte térmica del universo*”, propuesta por Clausius años antes. Para ello, considera la construcción de un dispositivo, donde la interacción gravitatoria podría ser utilizada para generar un gradiente de temperatura de forma espontánea al interior de un recipiente (Darrigol, 2021).

Loschmidt propone que en un instante de tiempo ( $t = 0$ ), al interior de un recipiente que se encuentra bajo la acción de un campo gravitatorio constante, una partícula se encuentra en la parte superior del recipiente, por lo tanto, su energía potencial gravitatoria es muy alta, a comparación de las demás que se encuentran en la parte inferior del recipiente. Esta partícula cae y colisiona elásticamente con las demás partículas, de modo que, transmite parte de la energía cinética adquirida debido al cambio de su altura a las demás, tal que al transcurrir un cierto intervalo de tiempo  $\Delta t$ , se encontrarán todas siguiendo una *distribución estacionaria* de velocidades que es uniforme en el espacio. Sin embargo, él considera que si transcurre un intervalo  $-\Delta t$  desde este preciso instante, en el cual invierte la velocidad de todos los elementos del sistema, se encontraría con una *distribución* no uniforme de velocidades a partir de la *distribución estacionaria* uniforme.

Por lo tanto, la irreversibilidad de los procesos derivada del segundo principio de la termodinámica, no sería plausible dentro del marco construido a partir de una teoría de procesos reversibles temporalmente, como lo es la Mecánica Clásica. Siendo esto un ataque en mayor medida a dicho segundo principio de la termodinámica y la existencia de una flecha del tiempo que en inicio se construye de forma fenomenológica. Este argumento, por lo tanto, para Loschmidt, le permite considerar que “*la muerte térmica del universo*” podría ser evitada si se invierten simultáneamente todas las velocidades de los átomos del universo (Darrigol, 2021).

Debido a ello, Ludwig Boltzmann en una serie de artículos pretende dar respuesta a este experimento mental, en el cual defiende la relación entre el segundo principio de la termodinámica y la teoría cinético-molecular, haciendo alusión a las posibles organizaciones de las constituyentes de un gas, y el estado del gas, como ente macroscópico.

Esto lo lleva a refinar sus argumentos construyendo toda una serie de conceptos que permitan hacer más simple el entendimiento de su propuesta, que tiene su esencia en la combinatoria. Entre estos conceptos la introducción de tres niveles de jerarquía en la descripción de un sistema: (1) El macroestado, que es una variable de estado macroscópica, usualmente medible, como lo es la presión o la temperatura de un gas, (2) “Komplexion”, el cual es un nivel en que se definen las variables asociadas al estado de movimiento de las moléculas se encuentran especificados y (3) “Zustandeverteilung” o “distribución de estados”, el cual es un nivel intermedio donde especifica un grupo de moléculas con un estado de movimiento determinado, siendo estos últimos dos desde la interpretación moderna de la física estadística los microestados del sistema, o configuraciones de los componentes de acuerdo a sus estados microscópicos, en el caso del estado de movimiento de las partículas que componen un gas (Sharp y Matschinsky, 2015).

En el artículo de Boltzmann de 1877 titulado “*Sobre la relación entre el segundo teorema fundamental de la Teoría Mecánica del Calor y cálculos de probabilidad sobre las condiciones para el equilibrio térmico*”, el autor en principio busca hacer evidente la relación entre el segundo principio de la termodinámica y el cálculo de probabilidades, los cuales se encuentran estrechamente relacionados a partir de las posibles organizaciones de las constituyentes de un sistema, como un gas, dejando de lado la explicación acerca del mecanismo de transición entre niveles dada por las constituyentes del sistema, como el efecto de las colisiones, ya que asume, que este ha sido construido en artículos previos.

Por lo tanto, parte desde una situación, donde tiene un sistema con una energía total  $U$  y un número  $N$  de partículas, las cuales se distribuyen dicha energía total en niveles discretos de energía  $0, \epsilon, 2\epsilon, \dots, p\epsilon$ , el autor austriaco calcula la probabilidad de que un número de moléculas se encuentren en un nivel de energía determinado en un sistema en equilibrio, hallando en principio una condición que permita encontrar el máximo número de microestados (Komplexiones)  $\mathcal{P}$ , ya que este evidencia el macroestado más probable, de acuerdo a las condiciones establecidas en los sistemas, la energía total  $U$  y el número de partículas  $N$ . El número de microestados  $\mathcal{P}$  asociados a un mismo macroestado se encuentra definido por Boltzmann de la siguiente manera:

$$\mathcal{P} = \frac{N!}{w_0!w_1!w_2!\dots w_p!} \quad \text{donde} \quad U = \epsilon\lambda, \quad \lambda = \sum_{k=0}^p kw_k \quad \text{y} \quad N = \sum_{k=0}^p w_k \quad (1.24)$$

Donde  $w_k$ , son el número de moléculas con una energía  $k\epsilon$  definida (Zustandeverteilung). Para determinar dicho número máximo de microestados, Boltzmann hace uso de la definición del factorial en términos de la función gamma  $w_k! = \Gamma(w_k + 1)$  y diferentes aproximaciones del factorial, una a partir de series  $\phi(w_k) \approx \ln[\Gamma(w_k + 1)] - w_k[\ln(w_k - 1)] - \frac{1}{2} \ln(2\pi)$ , y la función de Stirling para números muy grandes  $w_k! \approx \sqrt{2\pi} \left(\frac{w_k}{e}\right)^{w_k}$ , que le permita derivar el mínimo valor de  $w_k$ , ya que, como se observa en la ecuación 1.24, si se minimiza el valor de cada una de estas cantidades, hallaremos el máximo valor de los microestados  $\mathcal{P}$ . El valor mínimo de  $w_k$  será igual a:

$$w_k = \frac{N^2}{\lambda + N} \left( \frac{\lambda}{N + \lambda} \right)^k \quad (1.25)$$

Si se considera que la energía total  $U$  del sistema es muy alta en comparación con el número de moléculas, se define  $\mu$  como la energía media de las moléculas y se utiliza la siguiente aproxi-

mación:  $1 - \frac{N}{\lambda} \approx e^{-\frac{N}{\lambda}}$ , mediante la cual es posible definir la *distribución de Boltzmann* para un sistema en equilibrio:

$$\frac{w_s}{\sum_{k=0}^p w_k} = \frac{e^{-\frac{s\epsilon}{\mu}}}{\sum_{k=0}^p e^{-\frac{k\epsilon}{\mu}}} \quad (1.26)$$

Esta misma idea, la llevaría a cabo para sistemas continuos, donde el número de moléculas con una energía entre un rango establecido de energía  $E$  y  $E + dE$ , puede ser definida en una función de las posibles organizaciones de las componentes de la velocidad  $(v_x, v_y, v_z)$  en cada una de las moléculas, la cual permite a la molécula encontrarse al interior del rango establecido de energía. En este caso,  $v_x, v_y$  y  $v_z$  se encuentran entre el rango  $a\zeta$  y  $(a+1)\zeta$ ,  $b\eta$  y  $(b+1)\eta$ ,  $\gamma$  y  $(c+1)\gamma$  respectivamente, donde  $\eta, \zeta$  y  $\gamma$  son cantidades de valores muy pequeños. Con los cuál el número de moléculas con una velocidad  $v = (a, b, c)$  es:

$$w_{abc} = \zeta\eta\gamma f(a\zeta, b\eta, c\gamma) \quad (1.27)$$

En este caso, el número de permutaciones  $\mathcal{P}$  de un macroestado es ahora una *frecuencia relativa* de ocurrencia en el cual es posible afirmar que en el rango establecido de energía  $E$  y  $E + dE$ , hay un porcentaje frente al número total de organizaciones en las componentes vectoriales de la velocidad asociada a cada una de las moléculas que cumplen dicha restricción del rango, siempre que cumpla las condiciones del sistema en conjunto: la energía total del sistema  $U$  y el número de moléculas  $N$ , será igual a:

$$\mathcal{P} = \frac{N!}{\prod_{a=-p}^{a=p} \prod_{b=-q}^{b=q} \prod_{c=-r}^{c=r} w_{abc}!} \quad (1.28)$$

Así, la cantidad asociada que se requiere minimizar al igual que en el caso discontinuo es el denominador, que puede ser reescrito con la aproximación de Stirling para números grandes de la función factorial y tomando el logaritmo de  $\mathcal{P}$ , se describe de la siguiente manera al desprestigiar las constantes, equivalente a la constituida en su artículo de 1872:

$$\Omega = \ln \mathcal{P} \approx - \sum_{a=-p}^{a=p} \sum_{b=-q}^{b=q} \sum_{c=-r}^{c=r} \zeta\eta\gamma f(a\zeta, b\eta, c\gamma) \log [f(a\zeta, b\eta, c\gamma)] \quad (1.29)$$

En este punto, como explicita Kuhn frente al artículo de Boltzmann de 1877, los pequeños valores  $\eta, \zeta$  y  $\gamma$  representan las dimensiones de un pequeño cubo o celdas que contienen una gran cantidad de partículas en el *espacio de fases*, y que pueden ser reducidas hasta ser tomadas como un infinitesimal, debido a una hipótesis física tomada por el investigador austriaco, no como un límite matemático, siendo efectivamente una condición que no nombra (Kuhn, 1980).

$$\Omega = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(v_x, v_y, v_z) \log [f(v_x, v_y, v_z)] dv_x dv_y dv_z \quad (1.30)$$

Esta cantidad  $\Omega$  es denominada por Boltzmann como *Permutabilitatmass*, o *medida de permutabilidad*, ya que, si su valor se aproxima cada vez más a cero, el número de microestados  $\mathcal{P}$  aumenta, por lo tanto, el estado de equilibrio termodinámico de un sistema se encuentra cuando su valor es aproximadamente igual a cero, un comportamiento que evidencia el funcional  $H$  antes descrito, el cual incluso, Boltzmann relaciono directamente en su trabajo. Esta nueva variable  $\Omega$  solo difiere

del logaritmo del número de microestados  $\mathcal{P}$  por la adición de una constante (conocida como la constante de Boltzmann  $k_B$ ), el cual es quizás uno de los resultados más conocidos de Boltzmann <sup>5</sup> y ha sido malinterpretado en varias ocasiones, asumiendo que  $\mathcal{P}$  es la probabilidad de encontrar un macroestado, sin embargo, esta cantidad no en todos los casos representa un valor dentro del intervalo  $[0, 1]$ , como sucede con la *distribución de Boltzmann*.

Haciendo uso de esta definición, Boltzmann calcula para una *distribución estacionaria* que sigue la ecuación 1.4 la *medida de permutabilidad* y compara el resultado obtenido con el valor de la *entropía* que se halla por medio de los principios de la termodinámica en un gas ideal al cual se ha suplido un diferencial de calor  $dQ$ , el cual le permite enunciar el siguiente teorema:

Consideramos cualquier sistema de cuerpos que experimenta algunos cambios de estado, sin requerir que los estados inicial y final estén en equilibrio térmico. Entonces la medida de permutabilidad total de los cuerpos aumenta continuamente durante los cambios de estado, y sólo puede permanecer constante mientras todos los cuerpos durante el cambio de estado permanezcan infinitamente próximos al equilibrio térmico (cambios de estado reversibles.) (Sharp y Matschinsky, 2015, p 2005).

En este apartado, Boltzmann a partir de argumentos propios de la probabilidad, entabla una relación entre la entropía de un sistema y la medida de permutabilidad de acuerdo al estado del gas, o el sistema de cuerpos, siendo cada uno de los eventos independientes entre ellos. Es importante recalcar que en este enunciado, es posible visualizar que la entropía tiende a un máximo cuando la medida de permutabilidad y por ende el número de permutaciones, es máximo, dotando de una naturaleza estocástica a la variable macroscópica.

Sin embargo, al finalizar esta demostración en el artículo, surge una incoherencia ya que, el teorema-H parece tener dos contrapartes: una mecánica y otra probabilística. Dicha discusión se seguiría a lo largo del siglo XIX, siendo un punto de inflexión en 1895, donde Boltzmann a modo de respuesta respecto a diferentes críticas sobre la dicotomía al interior del teorema-H, en su artículo “Sobre ciertas cuestiones de la teoría de los gases ” hace uso de dos elementos: la *curva-H* y las *fluctuaciones de temperatura*, junto al cuestionamiento de las teorías físicas <sup>6</sup>, los cuales serán utilizados para buscar un punto en común entre ambas contrapartes del teorema-H (Boltzmann, 1895), que serán definidos en este documento en la siguiente discusión propiciada años después por el autor austriaco.

En 1896, es formulada la paradoja de recurrencia por un joven ayudante de Max Planck (1858 - 1947), Ernst Zermelo (1871 - 1953), con base en un teorema deducido por Henri Poincaré (1854 - 1912) en su artículo “Sobre el problema de los tres cuerpos y las ecuaciones de su dinámica” (1890), en el cual establece que si el volumen de un espacio de fases es un invariante integral,

<sup>5</sup>La descripción que se presenta en la ecuación 1.29, se conoce en términos actuales como la ecuación de la entropía de Boltzmann:  $S = k_B \ln \mathcal{P}$ .

<sup>6</sup>Particularmente Boltzmann propone las siguientes preguntas alrededor de la relevancia y el impacto de la teoría mecánica del calor en la investigación científica: ¿es la teoría mecánica de los gases una teoría física verdadera tan valiosa como cualquier otra teoría física? y ¿qué podemos demandar de cualquier teoría física?. (Boltzmann, 1895)

un sistema mecánico conservativo después de un intervalo de tiempo lo suficientemente largo, es posible hallarlo varias veces en un mismo punto  $P$  de dicho espacio de fases, donde inicialmente se encontraba (N.Nuñez-Yepez, 2013). Este teorema formulado por Poincaré, demuestra que los procesos irreversibles no son posibles en un sistema mecánico, como expone Zermelo en su artículo de 1896 “*Sobre el Teorema de la Dinámica y la Teoría Mecánica del Calor*”, donde gran parte de su argumento surge a partir de la siguiente afirmación:

En un sistema de un número arbitrario de centros de masa, donde las aceleraciones dependen solo de su posición en el espacio, éste no puede ser un proceso irreversible para todos los estados iniciales que ocupan cualquier región de extensión finita, sin importar que tan pequeña sea, requiere que las coordenadas y velocidades de los puntos nunca puede exceder límites finitos. (Zermelo, 2003a, p 382)

Respecto a esta afirmación que describe Zermelo, es posible deducir que toda función dependiente de las coordenadas espaciales de las componentes o cuerpos que componen un gas en la teoría mecánica del calor, como la definición de la *entropía* de un sistema térmico concebida por Boltzmann a partir del funcional  $H$ , no puede llevar a cambios *permanentes* en un sistema, que es una constatación fenomenológica de base en la formulación del segundo principio de la termodinámica, expuesta como una máxima que sigue la ecuación 1.12. Si una distribución arbitraria inicial de velocidades en un sistema de moléculas, a pesar de evolucionar en el tiempo a una *distribución estacionaria*, según Zermelo, si esta se deja un tiempo lo suficientemente largo, podrá volver a exhibir una organización idéntica a la inicial, por lo tanto, la *distribución estacionaria* no es un resultado propio debido a un tiempo de relajación infinito, sino que es una condición temporal, que podría cambiar en cualquier momento, exhibiendo una disminución de *entropía* en el sistema.

Particularmente estas afirmaciones de Zermelo, generan una inconformidad en la teoría propuesta por Boltzmann, a lo cuál responde en 1896 mediante su artículo titulado “*Respuesta a los comentarios de Zermelo sobre la teoría del calor*”, recordando en principio que los teoremas expuestos por la teoría mecánica del calor, son caracteres de verdad *estadística*, tal como escribe al inicio de su artículo:

[...] la ley de distribución de velocidades de Maxwell entre las moléculas de un gas no es de ninguna manera un teorema de la mecánica ordinaria, la cual puede ser probada solamente de las ecuaciones de movimiento; por el contrario, en esta solo puede ser probada que tiene una gran probabilidad, y que para un gran número de moléculas todos los otros estados tienen en comparación una pequeña probabilidad que para propuestas prácticas pueden ser ignoradas. [...] la segunda ley de la termodinámica es desde un punto de vista molecular meramente una ley estadística. (Boltzmann, 2003c, p 393)

Para ello, Boltzmann argumenta sobre la base de dos conceptos propios de la estadística, la relación existente entre el segundo principio de la termodinámica y la Teoría Mecánica del Calor: (1) Las *desviaciones estándar* de la *curva*— $H$  o del funcional  $H$  para un sistema en equilibrio, en el cual las constituyentes de un gas siguen la *distribución estacionaria* de Maxwell y (2) La relación entre el número de permutaciones en un sistema compuesto de un gran número de moléculas y el

tiempo de recurrencia entre sus estados de movimiento.

Como se ha nombrado anteriormente, el funcional  $H$  decrece su valor en el tiempo para un sistema de moléculas definido inicialmente por una *distribución arbitraria* y se mantiene constante en el tiempo cuando llega al estado de equilibrio de dicha distribución, sin embargo, es importante resaltar que este comportamiento es propio del *valor medio o esperado* del funcional  $H$ , ya que, esta curva se define de acuerdo la evolución temporal de una *distribución*, por lo tanto, todo punto se encuentra ligado a las *desviaciones estándar* propias de la *distribución* que se harán presentes en la curva, aumentando o disminuyendo su valor, incluso si el valor medio de  $H$  es constante. Este hecho hace plausible que la *distribución estacionaria* evolucione en el tiempo a una *distribución arbitraria*, visto desde la *curva-H* como un pico, sin embargo, este estado de movimiento en conjunto de las moléculas es tan poco probable, que rápidamente decrecerá el funcional  $H$ , en tendencia a un estado más cercano a la *distribución estacionaria*, el cual es más probable.

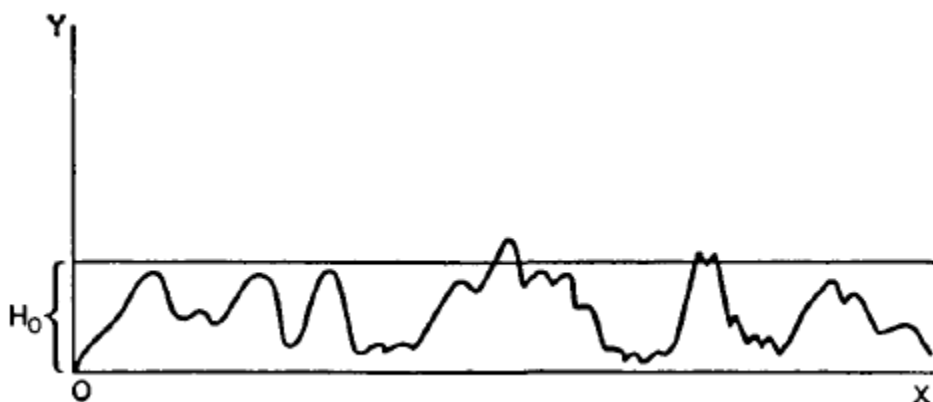


Figura 1.9: Curva-H propuesta por Ludwig Boltzmann en "Sobre la explicación mecánica de los Procesos Irreversibles (1896)".

Frente al segundo argumento en relación con el tiempo de recurrencia para un sistema bajo las condiciones establecidas por Poincaré en el mismo artículo de 1896, Boltzmann calcula el periodo con que se presenta una permutación inicial por lo menos una vez más, donde todos los cuerpos presentan un mismo estado de movimiento, en un sistema con una gran cantidad de partículas (aproximadamente un trillón), el cual resulta ser un número muy grande, de aproximadamente 50 dígitos según el autor, debido a la gran cantidad de permutaciones que tienen las componentes del sistema.

Sin embargo, Boltzmann dota de unas extrañas propiedades a la *curva-H*: como la diferenciación de una curva con diferentes picos incluso en su estado de equilibrio, el cual localmente tendría una infinidad de máximos y mínimos, adicionalmente existe una razón de cambio negativa en el promedio del funcional  $H$  a lo largo del tiempo, lo cual lleva a Zermelo a concluir que el *Teorema-H* proporcionado desde los artículos al inicio de la carrera científica de Boltzmann, es un sinsentido. Esto lo expone en su pequeño artículo: "Sobre la explicación mecánica de los Procesos Irreversibles", donde hace evidente que cualquier pico arbitrario de la función  $H$  podría ser un estado

inicial, por lo tanto, es necesario asumir una nueva condición, la cual define el universo en un estado altamente improbable, desde el cual sea comprensible el *origen físico* de un estado inicial y sea plausible la observación de procesos irreversibles en el mismo (Zermelo, 2003b).

Ante esto, la respuesta de Boltzmann apela a que el estado inicial de un sistema, en otras palabras el valor inicial del funcional  $H$ , se debe encontrar en un intervalo de tiempo desde el cual siempre este decrece, tal que los estados iniciales y finales no sean intercambiables (Boltzmann, 2003b), lo cual, aunque Zermelo observa como una contradicción frente a los comentarios de autor austriaco, realmente se encuentra en concordancia con lo que este asume, para hallar una relación entre el *Teorema— $H$*  y el universo mismo. Esta condición de un universo en un estado altamente improbable en principio resulta necesaria para hacer compatible las observaciones de los eventos físicos y la visión atomística de base en la Teoría Mecánica del Calor, ya que, al comparar un gas confinado con el universo mismo, Boltzmann afirma que:

Uno puede asumir que el universo entero se encuentra en sí mismo en la actualidad en un estado muy improbable. Sin embargo, uno puede suponer que los eones durante el cual este estado improbable ha transcurrido, y la distancia de aquí a Sirius, son minutos comparados con la edad y tamaño del universo. Entonces debe haber en el universo, que en su conjunto está en equilibrio térmico y, por tanto, muerto, aquí y allá regiones relativamente pequeñas del tamaño de nuestro universo (que llamamos mundos), que durante el tiempo relativamente corto de eones se desvían significativamente de equilibrio térmico. Entre estos mundos, la probabilidad de estado aumenta con la misma frecuencia que disminuye. Para el universo en su conjunto, las dos direcciones del tiempo son indistinguibles, del mismo modo que en el espacio no hay arriba ni abajo. (Boltzmann, 2003b, p 416)

Alejándose de una visión fenomenológica del segundo principio de la termodinámica, donde la irreversibilidad de los procesos observada en los sistemas es la característica más importante en su definición, para Boltzmann la irreversibilidad es una construcción propia de nuestra condición humana, seres infinitamente pequeños en comparación con la extensión del universo, y una existencia efímera frente a la edad del universo. Tal es esta diferencia, que para Boltzmann somos producto de una *desviación* estadística en una pequeña región de un universo en equilibrio térmico, la cual se encuentra en un estado muy improbable, permitiendo, así desde nuestro sistema de referencia, el centro del planeta Tierra, hablar de arriba y abajo gracias a una diferenciación propiciada por la caída de los cuerpos, aunque universalmente el término caída tiene una dirección arbitraria dependiendo de la ubicación del observador. Afirmar la existencia y diferenciación de un pasado y un futuro debido a los procesos irreversibles, solo se debe a la evolución desde un estado, u organización de los átomos, improbable a un estado más probable en esta pequeña región del universo.

Estas últimas replicas propiciadas por Zermelo frente a la relación entre los procesos irreversibles y el teorema de recurrencia, evidencian la importancia que tiene la *desviación estándar* de una magnitud, especialmente del funcional  $H$  estrictamente relacionado con la *entropía* de un sistema, en la construcción conceptual de la física estadística que proporciona Boltzmann y su búsqueda en la reconciliación de las situaciones propuestas en los experimentos mentales que construyen eventos que contradicen la observación, relacionando el comportamiento de las constituyentes de

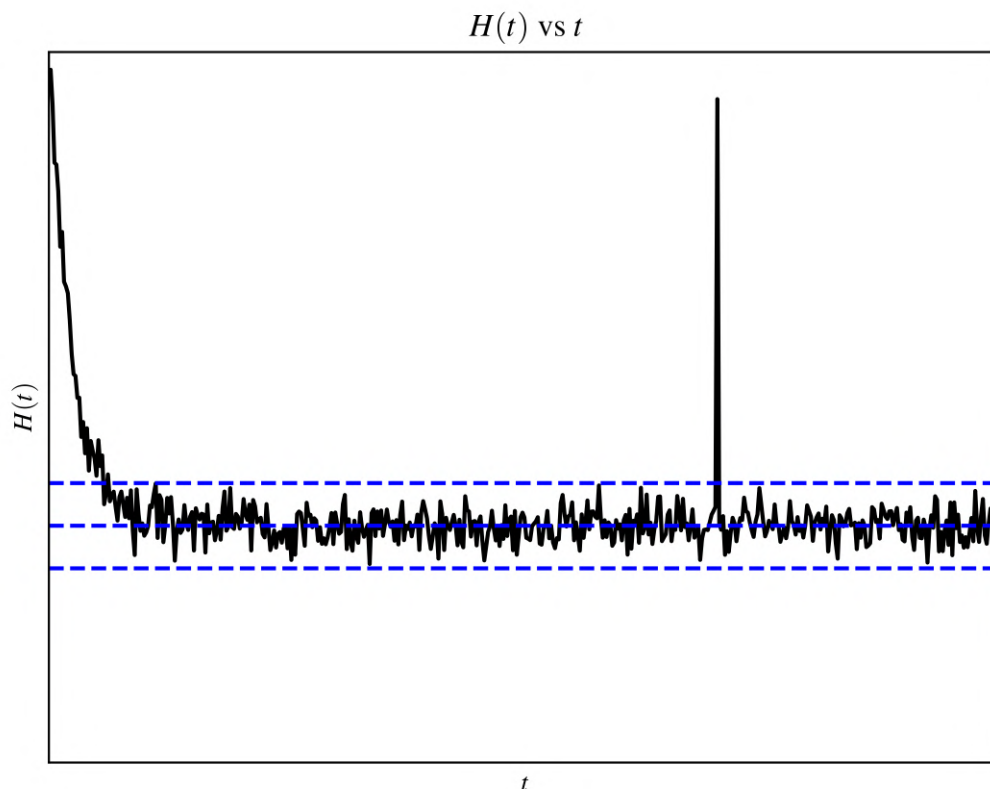


Figura 1.10: Curva-H de un sistema en equilibrio termodinámico que previamente tuvo un comportamiento determinado (Elaboración propia). Como se puede observar, la presencia de picos en la cantidad  $H$  estarán relacionados con instantes donde el sistema conservativo aproximadamente vuelve a su posición inicial. Sin embargo, las líneas punteadas azules delimitan el 95 % de los sucesos, y encontrarse tan alejado de éstas líneas es un evento increíblemente difícil de observar debido a su baja probabilidad.

un sistema con los eventos físicos observados, siempre recordando que las leyes proporcionadas son construidas bajo argumentos probabilísticos, y llevando la consecuencia de dichas condiciones a construir afirmaciones sobre el inicio y el estado del universo en sí mismo. Además, frente a la experiencia y la atomística, propia de la teoría cinético-molecular, Boltzmann en su primera respuesta a dichas réplicas afirma lo siguiente:

Cuando los cuerpos en cuestión contienen muchas moléculas, deben ocurrir muchas pequeñas desviaciones de este teorema, ya que el número de moléculas no es infinito. Sin embargo, estas desviaciones solo pueden añadirse a una cantidad observable en un larguísimo periodo de tiempo, de modo que esta consecuencia de la atomística no puede ser testada por el experimento. Es aún más cierto dado que la teoría -cinético-molecular- del gas pretende dar solo una descripción aproximada de la realidad. (Boltzmann, 2003c, p 399)

De esta discusión establecida entre Boltzmann y Zermelo es importante resaltar que estas *desviaciones* de una magnitud macroscópica, en principio la temperatura, en un fluido serían consecuencia directa de la presencia de una componente aleatoria debido a la agitación molecular, o en otros términos, el cambio espontáneo de los microestados en un sistema a organizaciones menos probables. Por lo tanto, a pesar de ser una condición del sistema que según Boltzmann (en su época) es de imposible detección experimental, si su medida fuese posible, esta sería una predicción teórica que constituye un argumento valioso frente a la aceptación de la hipótesis molecular y sus desarrollos consecuentes. Hasta este punto la teoría cinético-molecular aún permanece a la espera de una prueba de mayor peso a nivel experimental con el fin de confirmar los comportamientos de las constituyentes microscópicas de un sistema que evoluciona bajo la descripción del teorema-H a nivel macroscópico, sin embargo, estas pruebas necesarias serían desarrolladas 10 años después, a pesar de que Boltzmann no estaría presente para observarlas.

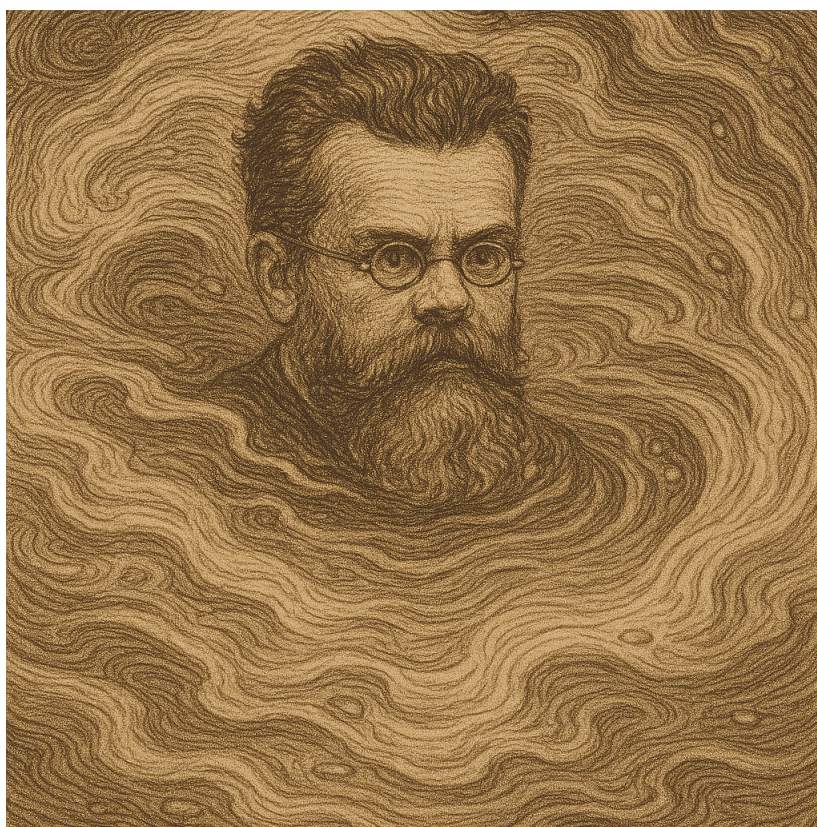


Figura 1.11: Grabado de Ludwig Boltzmann sumergido en fluctuaciones (OpenAI, 2025). Imagen generada con GPT-4o mini (Gratis)

Como análisis final de este primer capítulo, para dar paso a la idea de fluctuaciones se a construido una herramienta meta-cognitiva que permite a través de una linea de tiempo denotar como el concepto de fluctuación es producto de un desarrollo profundo en la teoría cinético molecular.

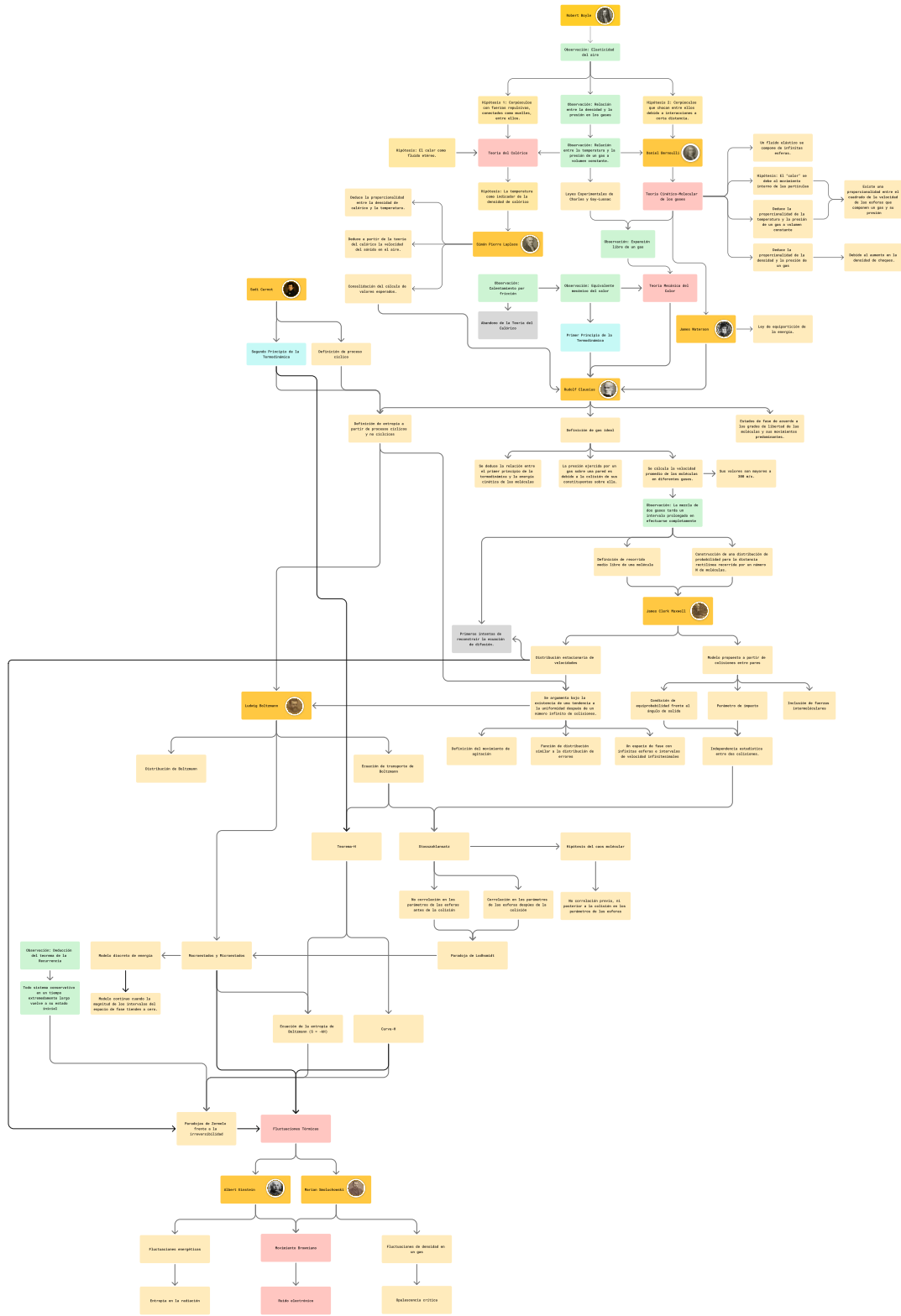


Figura 1.12: Diagrama final del capítulo (Elaboración propia).

## Capítulo 2

# Modelos probabilísticos de un sistema fluctuante

De acuerdo a la propuesta de Boltzmann en 1897, sin importar la escala del sistema físico, este no se encuentra exento de fluctuaciones, ya que incluso el universo mismo al encontrarse representado a partir de variables modeladas con base a una distribución de probabilidad, derivadas de las diversas configuraciones de sus microestados, hace necesaria su inclusión e interpretación. A pesar de su convicción frente a la imposibilidad de sus medidas, Boltzmann entiende que las fluctuaciones permiten en el sistema, incluso en equilibrio termodinámico, hallar variaciones de entropía  $\Delta S$  que sugieren la evolución de un sistema a estados menos probables de forma espontánea. Sin embargo, pasaría menos de una década para realizarse las primeras medidas en sistemas físicos susceptibles a la amplitud de las fluctuaciones propias al interior de un fluido a través del movimiento espontáneo de pequeños cuerpos observados con microscopios muy potentes, conocido como movimiento browniano. Un sistema clásico que permite observar este hecho es descrito a continuación: un grupo de amiloplastos, células que almacenan almidón y conforman un grano de polen, sumergidas en una gota de agua, evidencian un movimiento errático de forma espontánea (del Mazo Vivar, 2018). Dicho sistema es susceptible al movimiento de agitación molecular descrito por Maxwell en 1860, donde el estado de movimiento en cada uno de los constituyentes del gas o fluido al ser diferente entre ellos, pueden intercambiarse su velocidad y por ende, al colisionar de forma irregular con los amiloplastos presentes en el fluido, permiten su movimiento gracias a instantes donde se evidencian fluctuaciones en la presión ejercida a lo largo de la superficie, que como consecuencia generan una fuerza neta diferente a cero sobre los amiloplastos. Debido a la naturaleza aleatoria de las colisiones inherente en cualquier sistema físico, se hace necesaria la implementación de modelos probabilísticos que permitan describir y comprender adecuadamente estos sistemas susceptibles.

Como se ha descrito, la aceptación de modelos probabilísticos para la descripción de fenómenos térmicos en el siglo XIX encontraba una barrera debido a la imposibilidad experimental de verificar la contribución directa del movimiento de agitación en las moléculas que conforman un fluido, y en consecuencia limitando la predicción de eventos. Es por esto que la observación del movimiento errático en los amiloplastos debido a la manifestación macroscópica de las fluctuaciones en su dinámica como consecuencia de las colisiones irregulares que presentan las moléculas, se revela crucial frente a la consolidación de la teoría cinético-molecular y los modelos de orden estocástico

al interior de la física.

Es posible afirmar que ningún sistema físico macroscópico se encuentra totalmente determinado por las leyes de la mecánica clásica donde la trayectoria se presenta como una certeza absoluta de su evolución. De manera similar, la irreversibilidad de los procesos propia de nuestra experiencia, generalmente en contraposición de la reversibilidad exhibida por los sistemas mecánicos, no es más que una característica que se dota a un universo de naturaleza estadística que proviene de las relaciones causales entre los individuos y su conjunto. Aunque no es un tema que se pretenda discutir a profundidad, es importante resaltar como las fluctuaciones permiten replantear el segundo principio de la termodinámica derivado desde la irreversibilidad de los procesos, ya que la entropía  $S$  en un sistema es una variable definida a partir de la configuración de los elementos de un sistema, que incluso en el equilibrio termodinámico no es estacionaria en su totalidad, lo cual permite desde las localidades del sistema encontrar secciones donde el macroestado exhibido es poco probable; configurándose el segundo principio de la termodinámica como una ley estadística en la cual si se aumenta el número de partículas se aproxima a dicha evolución inexorable en todo el sistema que se observa desde la experiencia pero que presenta violaciones espaciales y temporales en sus localidades. Entre estas situaciones poco probables como consecuencia de la interpretación estadística del segundo principio de la termodinámica, ya que debido a las fluctuaciones térmicas en el universo es posible construir la siguiente situación: si las componentes de una localidad del universo presentan una configuración improbable, tal que permitan la creación espontánea de una entidad consciente con todos los recuerdos que tendría una persona a lo largo de su vida, hecho conocido como el cerebro de Boltzmann, no se encuentra restringida por esta interpretación del segundo principio de la termodinámica (Marcos, 2021).

Por lo tanto, en este capítulo se pretende explicar en principio como las fluctuaciones en los sistemas físicos toman un papel relevante de la mano de Albert Einstein (1879 - 1955) en la evolución de la física, a través del estudio del movimiento browniano y las fluctuaciones energéticas en un sistema en equilibrio termodinámico, dando como resultado la construcción de modelos cada vez más robustos que permitan la caracterización de sistemas susceptibles a las fluctuaciones de su entorno, como lo son los *procesos estocásticos* y la aproximación heurística de Paul Langevin (1872 - 1946), ahondando en su significado, construcción como modelos físicos y su extensión a otros sistemas para su aplicación.

## 2.1. Einstein y su Modelo de Fluctuaciones

Un modelo matemático que permite definir el valor medio de las fluctuaciones variables macroscópicas en un sistema físicos fue construido independiente por Josiah Willard Gibbs (1839 - 1903) y Einstein, con formulaciones en gran proporción equivalentes, sin embargo, con propósitos completamente diferentes (Peliti y Rechtman, 2016). Esto se debe en mayor medida, a que Gibbs propone una construcción axiomática de la física estadística donde las fluctuaciones son producto del formalismo efectuado, a diferencia de la propuesta de Einstein donde las fluctuaciones en un sistema físico permiten un entendimiento más fundamental de los principios termodinámicos sin requerir de argumentos propios de la *teoría cinética* como el Teorema-H propuesto por Boltzmann, conectando sus resultados con hechos que puedan ser observados experimentalmente, permitiendo



Figura 2.1: Einstein investigando en la oficina de patentes (OpenAI, 2025). Imagen generada con GPT-4o mini (Gratis)

incluso la medida de algunas constantes experimentales que aparecen en diversos sistemas físicos. Particularmente, se realizara el análisis frente a la construcción conceptual de Einstein en su desarrollo acerca de las fluctuaciones energéticas y el movimiento browniano.

### 2.1.1. Las Fluctuaciones Energéticas y la Estabilidad Térmica de los Sistemas

Einstein se encontraba motivado por el entendimiento del segundo principio de la termodinámica en los fenómenos de transporte, considerando la interpretación de dichos fenómenos a partir de la discretización de la materia. En 1904 publica su artículo *Sobre la teoría molecular del calor*; en este trabajo partía de una expresión derivada el año inmediatamente anterior por él para la entropía  $S$  de un sistema cerrado en función de las variables de estado instantáneo de sus constituyentes  $j_1, j_2, \dots, j_n$ , la cual tiene una estructura similar a la propuesta por Boltzmann en 1877, con el fin de elucidar el significado de la constante  $k_B$  y su importancia en la descripción de fenómenos incluso fuera de la *teoría cinética*:

$$S = \frac{\langle E \rangle}{T} + k_B \ln \left[ \int e^{-\frac{E}{k_B T}} dj_1 \dots dj_n \right] \quad (2.1)$$

Expresión que puede ser reducida para un sistema que solo tiene transferencias de energía en forma

de calor, asumiendo que la energía transferida en promedio  $\langle E \rangle$  es igual a cero debido a que se encuentra en equilibrio termodinámico, entonces la entropía del sistema es igual a:

$$S = k_B \ln [\omega(E)] \quad \text{donde:} \quad \omega(E)\delta E = \int_E^{E+\delta E} dj_1 \cdots dj_n \quad (2.2)$$

Afirma en principio sobre un sistema termodinámico que se encuentra en contacto con un entorno muy grande a comparación del mismo a lo largo de un gran intervalo de tiempo que solamente puede transferir energía en forma de calor que:

Si un sistema esta localizado en un entorno que se encuentra a temperatura constante  $T$ , y esta en interacción térmica con el ambiente, la experiencia muestra que este tiene una temperatura  $T$ , y se mantiene a dicha temperatura a lo largo del tiempo. Sin embargo, de acuerdo a la teoría molecular del calor, esta ley no se cumple estrictamente, pero si con una cierta aproximación [...] (Einstein y Beck, 1989, p 69)

De acuerdo a esto define una *función de distribución*  $\Phi(E)$  para los posibles valores de energía que puede tener un sistema con las características anteriormente nombradas, llamado por Einstein “*reservorio de calor*”, entre  $E$  y  $E + 1$  en los cuales es igual a la energía del entorno con una temperatura  $T$ . Así la probabilidad de encontrar el sistema en dicho intervalo de energía es igual a:

$$\Phi(E + 1) - \Phi(E) = C e^{-\frac{E}{k_b T}} \omega(E) \quad (2.3)$$

De modo que si se despeja de la ecuación 2.2 la función  $\omega(E)$ , y se reemplaza en la expresión anterior obtenemos:

$$\Phi(E + 1) - \Phi(E) = C e^{\frac{1}{k_b} (S - \frac{E}{T})} \quad (2.4)$$

En el cual es posible observar que un estado del sistema es más probable que otro si el valor de la entropía  $S$  es mayor, por lo tanto, los estados más probables en que dicho sistema se encuentre con la misma energía  $E$  que el entorno, serán los valores de máxima entropía  $S$ .

Es importante aclarar que esta afirmación no es precisamente novedosa frente a la propuesta de Boltzmann en 1897, pero reafirma el camino tomado por Einstein en la búsqueda de sistemas susceptibles a las fluctuaciones (Mayorga, 2020). Sin embargo, a diferencia de Boltzmann, en vez de preocuparse por las desviación en el número de moléculas que siguen la *distribución estacionaria* de Maxwell, Einstein observa que un sistema termodinámico desde una perspectiva macroscópica presenta cambios espontáneos de su temperatura en comparación al entorno así se encuentren ambos sistemas en contacto cercanos al equilibrio termodinámico. Por ello, estas desviaciones se encontrarían en relación directa con las variaciones espontaneas de entropía en correspondencia con la desviación en el número de moléculas que siguen la *distribución estacionaria* de Maxwell.

Considerando ahora un intervalo infinitesimal  $E$  y  $E+dE$  en el cual un sistema en contacto térmico con un entorno a temperatura  $T$ , la *función de distribución*  $\Phi(E)$  dada que permite hallar *densidad de probabilidad* de que el sistema se encuentre en un instante con la misma energía del entorno es igual a:

$$d\Phi(E) = C e^{-\frac{E}{k_b T}} \omega(E) dE \quad (2.5)$$

Es posible deducir el valor medio de la energía  $\langle E \rangle$  del sistema a través de la siguiente expresión:

$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^\infty E C e^{-\frac{E}{k_b T}} \omega(E) dE}{\int_0^\infty C e^{-\frac{E}{k_b T}} \omega(E) dE} \quad (2.6)$$

Sin embargo, teniendo en cuenta que  $\langle E \rangle$  es una constante, podemos reescribir la definición anterior de la siguiente forma:

$$\int_0^\infty (\langle E \rangle - E) C e^{-\frac{E}{k_b T}} \omega(E) dE = 0 \quad (2.7)$$

El siguiente factor  $\epsilon = \langle E \rangle - E$ , se conoce como la desviación con respecto a la energía media del sistema, o como lo llamara Einstein “*fluctuación de energía*”, tal que, esta expresión 2.7 representa el promedio de todas las posibles desviaciones, el cual es igual a cero. Con el fin de ejemplificar la razón del resultado nulo para el promedio de las desviaciones, consideremos la siguiente situación: si tenemos un conjunto de cuarenta lentes, sabemos a primera vista que no son iguales estrictamente, sin embargo, queremos saber que tan diferentes son entre ellas.

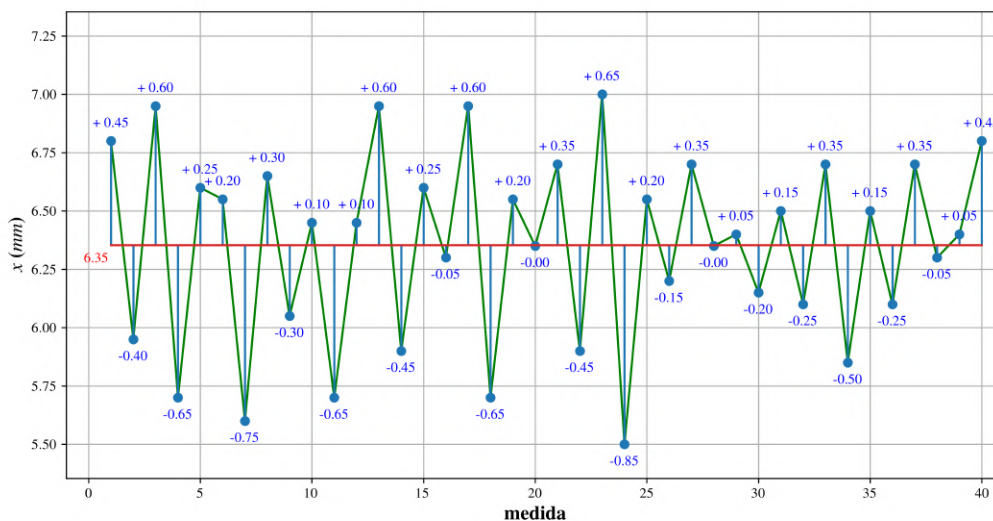


Figura 2.2: Medida del diámetro en  $mm$  de 40 lentes. En rojo se encuentra la media o valor esperado y en azul las desviaciones a la media de cada una de las medidas. (Elaboración propia)

Si organizamos las medidas tomadas con un calibre en milímetros como se muestra en la figura 2.2, podemos observar que muy pocas lentes realmente tienen un diámetro que coincida con la media, denotada con la línea roja, y además, cada una de estas medidas se encontrara alejada un cierto valor del promedio, al cual llamamos desviación. Aunque la desviación en principio no se encuentra restringida matemáticamente, si lo esta debido a las condiciones físicas y límites propios del sistema, en este caso, si al medir una lente se encuentra con un diámetro equivalente al de

una bola de billar, está tendría una condición inusual y probablemente desde nuestra experiencia argumentaríamos que la medida es errada o ha sido manipulada, tanto la información como la lenteja en cuestión, en caso de ser cierta la medida.

Para saber que tan diferente es una lenteja de otra y en dado caso, ser conscientes de que una medida se encuentra alterada, en principio se podría pensar que comparando la desviación de dicha medida con la media de las desviaciones. Sin embargo, la suma de las desviaciones al hacerse denotará que es igual a cero, por lo tanto, no ofrece ninguna información frente a lo que requerimos. Ahora, si tomamos los cuadrados de las desviaciones, encontramos que su sumatoria es diferente de cero, ya que todos los valores son mayores a cero, por lo tanto, el promedio del cuadrado de las *desviaciones* será un valor con el cual comparar en inicio cualquier medida y dar cuenta de su fiabilidad, y segundo, permitir que tan diferentes son los individuos que componen la muestra.

En nuestra situación, el promedio del cuadrado de las *desviaciones*, denotado como la *varianza*  $\sigma^2$ , es igual a  $0.402 \text{ mm}^2$ . En consecuencia, la *desviación estándar* (o simplemente *desviación típica*) es  $|\sigma| = 0.634 \text{ mm}$ . Este valor de  $|\sigma|$  nos permite proponer un *rango heurístico* para comparar las medidas tomadas y detectar posibles *valores atípicos* o *hallazgos* significativos.

Por ejemplo, en contextos industriales o de mercado, si una observación se encuentra fuera del intervalo  $\mu \pm 3\sigma$ , suele considerarse un punto fuera de control y, por tanto, se descarta por no ser óptimo para el proceso de manufactura. En física de partículas, se utiliza un criterio aún más estricto: el de los *cinco sigmas* ( $5\sigma$ ). Este establece que, si los resultados de dos experimentos independientes están separados por al menos  $5\sigma$  con respecto a lo predicho por la *hipótesis nula*, se considera que el resultado es estadísticamente significativo y constituye un *descubrimiento* (CERN, 2025). La *hipótesis nula* representa el punto de partida de toda investigación estadística; es una afirmación que generalmente niega el efecto que se desea probar. Por ejemplo, si se quiere evaluar la efectividad de un fertilizante para mejorar el crecimiento del maíz en condiciones poco favorables, se podría establecer un grupo de control sin fertilizante y varios grupos experimentales que sí lo reciban. Si el criterio evaluado es la altura alcanzada por las plantas sobrevivientes en las distintas etapas de su desarrollo, se pueden comparar las distribuciones de altura entre grupos. Utilizando el criterio de los cinco sigmas, se considerará que el fertilizante ha sido un éxito si la distribución del grupo tratado difiere de la del grupo de control por más de  $5\sigma$ , de tal forma que la probabilidad de que tal diferencia haya ocurrido por azar (bajo la hipótesis nula) sea extremadamente baja —del orden de 1 en 3.5 millones. Cabe destacar que este criterio debe aplicarse con precaución, especialmente si se comparan múltiples poblaciones, para evitar errores por pruebas múltiples o sesgos de selección.

De manera análoga, Einstein aplicó este concepto de la varianza a las fluctuaciones de energía en un sistema termodinámico. Si suma todas las desviaciones a la media, como se observa en la situación anterior  $\epsilon = \langle E \rangle - E$ , encontrará que dicho valor es igual a cero. Sin embargo, si se toma el valor cuadrático de cada desviación a la media  $\epsilon^2 = (\langle E \rangle - E)^2$ , debido a que todo valor  $\epsilon^2 > 0$ , la suma de todos estos valores no será igual a cero, por lo tanto, si divide el valor de esta suma sobre el número de medidas, encontrará un promedio de los valores cuadráticos de las desviaciones  $\langle \epsilon^2 \rangle$ , el cuál cambiara con respecto a la magnitud de las desviaciones a la media, ya que si el experimento realizado se encuentra con valores muy alejados de la media nos permiten denotar que posiblemente hay un fallo en el diseño experimental.

Como se ha evidenciado, el valor promedio de las desviaciones  $\langle \epsilon \rangle$  no nos ofrece una información relevante del sistema, sin embargo, el promedio de los valores cuadráticos de las desviaciones  $\langle \epsilon^2 \rangle$  nos permite visualizar que tan lejos en promedio se encuentran los datos de la media (Hamming, 1991). Einstein noto que si derivaba la expresión 2.7 con respecto a la temperatura del sistema, obtenía una relación que cuantificaba la magnitud de las fluctuaciones de energía, dada por::

$$\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2 = k_B \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} \quad (2.8)$$

Esta ecuación corresponde con  $\langle \epsilon^2 \rangle$ , el promedio del valor cuadrático de las fluctuaciones de energía, que permite determinar para Einstein la estabilidad térmica de un sistema. Así, un sistema tiende a encontrarse aproximadamente en equilibrio térmico con su entorno si la energía promedio del sistema no es susceptible a los cambios de temperatura. Además afirma lo siguiente frente a la constante de Boltzmann y la relación obtenida:

De este modo, la constante  $k_B$  determina la estabilidad térmica de un sistema. La relación que acabamos de encontrar es interesante porque ya no contiene ninguna cantidad que recuerde a los supuestos en los que se basa la teoría. (Einstein y Beck, 1989, p 75)

De acuerdo a la propuesta de Einstein, la estabilidad térmica de un sistema aunque en principio depende de la magnitud de las variaciones en la entropía definida desde el cambio en el estado de movimiento de sus constituyentes. Sin embargo, la expresión 2.8 no depende de estas variables de cambio instantáneo en dicho conjunto de cuerpos. Esto permite a partir de las variables macroscópicas, dar cuenta de una condición propia del movimiento molecular en los sistemas físicos que en principio propician las variaciones espontaneas de energía <sup>1</sup>.

### 2.1.2. Movimiento Browniano: El Paradigma de los Sistemas Fluctuantes

A pesar de la interesante propuesta en el cual enmarca las fluctuaciones de energía presentada en la sección anterior, en 1905, Einstein presenta en su tesis de doctorado titulada *Sobre el movimiento de pequeñas partículas suspendidas en un líquido estacionario que se rige por la teoría cinético-molecular del calor* la descripción del movimiento browniano a través del movimiento irregular de las moléculas del fluido en el cual se encuentran inmersos un conjunto de pequeños cuerpos con un tamaño considerable a comparación de las moléculas, por ejemplo los aminoplastos que componen un grano de polen. El éxito de esta descripción se encuentra en la predicción de valores medios en magnitudes macroscópicas asociados a sistemas susceptibles al movimiento molecular que permiten validar la teoría cinético-molecular, como la distancia media recorrida por un número  $N$  de partículas brownianas (Einstein, 1926).

---

<sup>1</sup>Este estudio es muy importante, ya que el único sistema físico conocido en el cual se visualizaban fluctuaciones de energía, por extraño que parezca, es en una cantidad dada de radiación electromagnética confinada en un espacio sin materia, el cual tenía inconsistencias cuando se describía dicho sistema desde la termodinámica y la electrodinámica. Dichas inconsistencias, serían el punto de partida para el estudio acerca de diferentes fenómenos por Einstein en 1905 en su artículo: “Acerca de un punto de vista heurístico sobre la emisión y transformación de la luz”.



Figura 2.3: Difusión de colorante en un líquido (Tomado de: <https://www.yubrain.com/wp-content/uploads/2021/05/Difusion-portada.jpg>).

Einstein estableció una analogía entre un número de moles  $n$  de una sustancia no iónica que se encuentra separada de un solvente debido a una membrana semipermeable y un grupo de  $N$  partículas susceptibles al movimiento molecular, ya que ambos sistemas requieren de una presión  $P^*$  que permita un flujo neto de solvente al interior del volumen  $V^*$  en el cuál se encuentran confinados o disueltos, conocida como *presión osmótica* (Peñuela, 2023). A partir de la ecuación 2.1, Einstein definió una expresión análoga a la presión osmótica  $P^*$  requerida por un sistema de partículas, caracterizado como un gas ideal, para mantener un volumen fijo  $V^*$ .

$$P^* = \frac{RT}{N_A} \nu \quad \text{donde:} \quad \nu = \frac{N}{V^*} \quad (2.9)$$

En la expresión anterior  $R$  es la constante de los gases ideales,  $N_A$  el número de Avogadro y  $\nu$  la densidad de cuerpos suspendidos. Con base en esta analogía, se considera un recipiente de área  $A$  y longitud  $l$ , en el cual se encuentra un solvente con una viscosidad  $\eta$  y un soluto compuesto de  $N$  partículas esféricas lo suficientemente grandes frente a las moléculas de solvente en un extremo del recipiente, representadas a partir de una densidad de esferas inicial  $\nu_0$  de radio  $r$ . Estos cuerpos debido al movimiento molecular se comenzaran a difundir a lo largo del recipiente de la misma forma que lo hace la estela de humo en una hoguera al entorno estudiado por Clausius casi 50 años atrás, sin embargo, a diferencia de la propuesta de Clausius, como las esferas son mucho más

grandes que las moléculas que componen el solvente, éstas se encontrarán bajo la influencia de una fuerza  $K$  proveniente de la interacción entre el solvente y la esfera que se opone al cambio de presión ejercido sobre la membrana semipermeable debido a la variación del volumen  $V^*$  en el cual se encuentran confinadas, de manera que el sistema se encuentre en equilibrio dinámico, en otras palabras que las esferas se muevan a velocidad constante, ya que no hay un trabajo efectuado sobre el solvente por parte de las esferas.

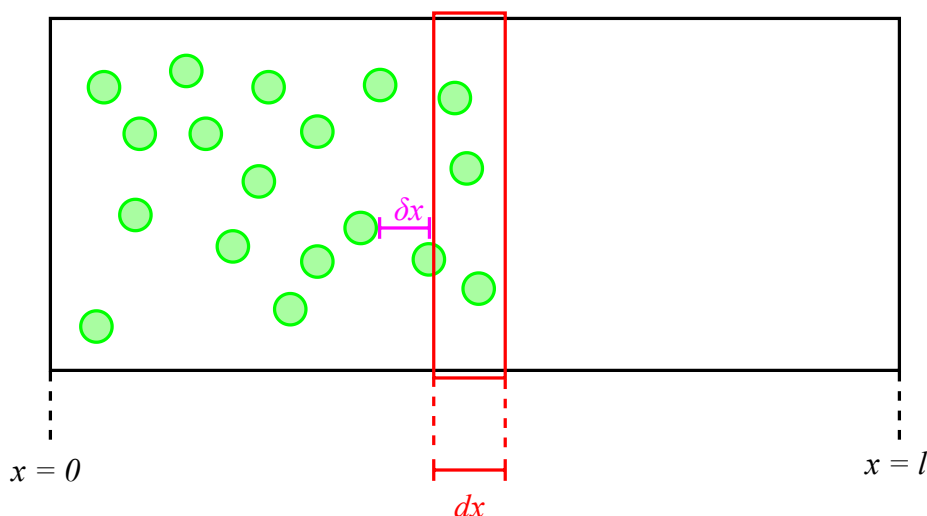


Figura 2.4: Sistema propuesto por Einstein (Elaboración propia)

Esta fuerza  $K$  solo varía con respecto a la posición, más no en el tiempo, ya que su magnitud dependerá únicamente de la variación del volumen  $V^*$ . Para construir un caso sencillo matemáticamente de expresar, Einstein asume una difusión de esferas únicamente en el eje perpendicular al área  $A$ , puntualmente en el eje  $x$ , y con el fin de hallar la magnitud y variación de la fuerza  $K$ , hace uso de un desplazamiento virtual arbitrario  $\delta x$  en las esferas. Teniendo en cuenta que no hay un trabajo efectuado por el sistema de esferas sobre el fluido, la variación virtual de energía libre del sistema  $\delta F$ , es igual a cero:

$$\delta F = \delta E - T\delta S = 0 \quad (2.10)$$

Donde la variación virtual de energía  $\delta E$  en el sistema se define como la suma de todos los trabajos virtuales realizados por cada esfera debido a una fuerza de reacción  $-K$  y el desplazamiento virtual  $\delta x$  que se encuentra a lo largo del recipiente:

$$\delta E = - \int_0^l K \nu \delta x A dx \quad (2.11)$$

Mientras la variación virtual de la entropía  $\delta S$  en el sistema, estará dado por la suma en los cambios del volumen  $V^*$  debido a las variaciones virtuales de volumen  $d(\delta V^*)$  en el cual se encuentran confinadas las esferas, y teniendo en cuenta que el producto  $\nu \delta x$  es constante en el tiempo, ya que el número de esferas a lo largo de cualquier desplazamiento virtual  $\delta x$  es el mismo en todo punto del recipiente, tal que:

$$\delta S = - \int_0^l \frac{R}{N_A} \frac{\partial \nu}{\partial x} \delta x A dx \quad \text{donde:} \quad \delta V^* = A \delta x \quad (2.12)$$

Que al ser reemplazados dichos valores, es posible deducir la siguiente relación:

$$-K\nu + \frac{RT}{N_A} \frac{\partial \nu}{\partial x} = 0 \quad (2.13)$$

El cuál además de describir la relación propuesta anteriormente, permite evidenciar que la difusión de estas esferas presenta una expresión similar a la primera ley de Fick. Tal que, por analogía Einstein propone:

Podemos observar sobre las condiciones de equilibrio dinámico como una superposición de dos procesos orientados en el sentido contrario: (1) Un movimiento de la sustancia suspendida bajo la influencia de la fuerza  $K$  actuando sobre cada partícula suspendida individualmente y (2) Un proceso de difusión, el cual puede ser visto como un movimiento irregular de las partículas producidas por un movimiento molecular térmico (Einstein, 1926, p 10-11)

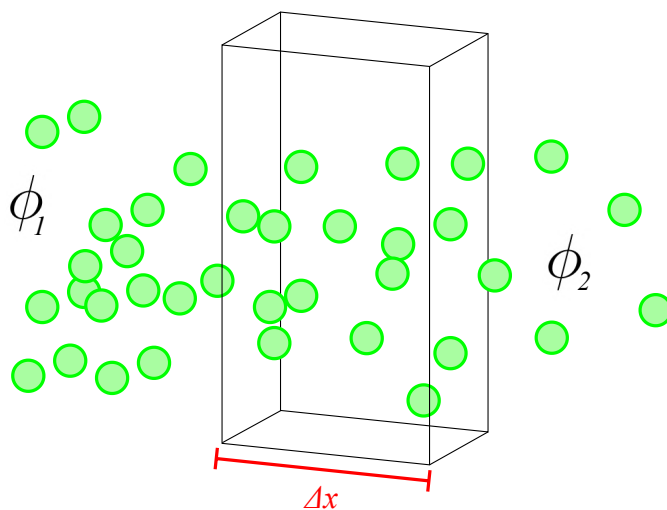


Figura 2.5: Representación acerca de la primera ley de Fick (Elaboración propia)

Por lo tanto, teniendo en cuenta que un flujo másico que atraviesa por unidad de área en este caso puntual se describe de la siguiente forma:  $J = \rho(\vec{v} \cdot \hat{e}_n)$  y la concentración de soluto como:  $\phi = \rho$ , definimos la densidad de masa como el producto entre la densidad de cuerpos suspendidos  $\nu$  con

la masa de uno solo de los cuerpos  $m$ , tal que nos permita reescribir la primera ley de Fick de la siguiente manera:

$$\frac{m\nu K}{6\pi\eta r} - D \frac{\partial(m\nu)}{\partial x} = 0 \quad \text{donde:} \quad (\vec{v} \cdot \hat{e}_n) = \frac{K}{6\pi\eta r} \quad (2.14)$$

Finalmente usando la relación encontrada por Einstein entre la fuerza  $K$  con la variación en la presión osmótica 2.13, y su deducción a través de la analogía con la primera ley de Fick 2.14, halla una relación entre el radio  $r$  de la partícula browniana y el coeficiente propio de la difusión de las partículas brownianas a lo largo del recipiente:

$$D = \frac{RT}{6\pi\eta r N_A} \quad (2.15)$$

Con este coeficiente de difusión derivado a partir de consideraciones macroscópicas y la resistencia del fluido, Einstein se propuso deducir la ecuación de difusión, también conocida como la segunda ley de Fick, directamente a partir del movimiento irregular de las partículas suspendidas. Para ello, Einstein propone que dicho sistema de  $N$  esferas se rige bajo las siguientes dos condiciones, las cuales explícitamente describe de la siguiente forma:

Se debe asumir que cada partícula ejecuta un movimiento independiente del movimiento de todas las partículas; los movimientos de una y las misma partícula después de diferentes intervalos de tiempo deben ser consideradas como procesos independientes, mientras asumamos que los intervalos de tiempo son lo suficientemente pequeños. [...] Se introduce un intervalo  $\tau$  el cual es muy pequeño a comparación del intervalo de tiempo observado, pero no de la magnitud de los movimientos ejecutados por la partícula a lo largo de dos intervalos  $\tau$  que son considerados como dos fenómenos independientes. (Einstein, 1926, p 12-13)

Estas condiciones son importantes frente a la formulación de un sistema susceptible a este movimiento de agitación, debido a que Einstein propone unas condiciones que aunque no son estrictamente similares a la propuesta de Boltzmann, si tienen un mismo objetivo: permitir el uso de artilugios de orden estadístico a través de condiciones físicas y colocar en consideración una independencia estadística entre eventos caracterizados por las partículas constituyentes. A su vez, estas condiciones son importantes frente al modelo propuesto debido a que permite ignorar las condiciones de las colisiones y centrarse únicamente en las trayectorias generadas por las partículas. Es así como, el desplazamiento  $\Delta$  de las partículas al interior del líquido es caracterizado a través de una *densidad de probabilidad*  $\Phi(\Delta)$  par debido a que no existe una dirección privilegiada y normalizada, ya que está evidencia un cierto número de partículas se desplazaran a una distancia entre  $\Delta$  y  $\Delta + d\Delta$ :

$$dN = N\Phi(\Delta) d\Delta \quad \text{donde} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\Delta) d\Delta = 1 \quad (2.16)$$

Si en vez de utilizar un número de esferas  $N$ , consideramos la densidad de esferas a lo largo del espacio, en este caso en una dimensión espacial  $x$ , y el tiempo  $t$  dado por una función  $\nu = f(x, t)$ , será posible considerar que toda variación de la densidad  $f(x, t)$  pasado un intervalo  $\tau$  de tiempo se corresponde con una una variación en la posición desplazada de las partículas  $\Delta$ , por lo tanto,

una variación de la densidad definida a lo largo de cada punto en el espacio. Dicha consideración, se hace a partir de las condiciones propuestas anteriormente, debido a que los desplazamientos  $\Delta$  unicamente pueden ser ejecutados en cada tiempo  $\tau$  el cual es mucho menor que el tiempo  $t$ , y se define de la siguiente manera:

$$df(x, t + \tau) = f(x + \Delta, t)\Phi(\Delta) d\Delta \quad (2.17)$$

Con ayuda de las series de Taylor, es posible convertir los términos  $f(x, t + \tau)$  y  $f(x + \Delta, t)$ , en función de las variables  $x$  y  $t$ , tal que, de nuevo las consideraciones de los choques no sean relevantes frente a la observación del proceso de difusión. Tal que si:

$$f(x, t + \tau) = f(x, t) + \frac{\tau}{1!} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\tau^3}{3!} \frac{\partial^3 f(x, t)}{\partial t^3} + \dots \quad (2.18)$$

$$f(x + \Delta, t) = f(x, t) + \frac{\Delta}{1!} \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} + \frac{\Delta^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\Delta^3}{3!} \frac{\partial^3 f(x, t)}{\partial x^3} + \dots \quad (2.19)$$

Los términos  $\tau^k$  donde  $k$  es mayor a uno debido a su pequeño valor en comparación con el tiempo  $t$ , pueden ser despreciados. A su vez, como se explico anteriormente frente a las *desviaciones*, estos desplazamientos  $\Delta$  corresponden a una *desviación* al desplazamiento medio de las partículas que en este caso es igual a cero debido a que en principio como las colisiones dadas por las moléculas que componen el fluido no tienen una dirección privilegiada sobre las partículas de soluto, lo más probable es que en todas las direcciones se anulen los choques entre múltiples partículas, por lo tanto, las integrales serán iguales a:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Delta^{2k+1} \Phi(\Delta) d\Delta = 0 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Delta^{2k} \Phi(\Delta) d\Delta \neq 0 \quad \text{donde:} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.20)$$

Además, considerando que los valores  $\Delta^4, \Delta^6, \dots$  son despreciables debido a que los desplazamientos son valores muy pequeños, en consecuencia la ecuación 2.17 es reescrita de la siguiente manera:

$$\frac{\tau}{1!} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta^2}{2!} \Phi(\Delta) d\Delta \quad (2.21)$$

La expresión anterior tiene la misma forma y unidades que la ecuación de difusión propuesta en la segunda ley de Fick, tal que podemos definir la constante de difusión a partir de la *varianza* estadística o promedio de las *desviaciones* al cuadrado de la media por unidad de tiempo  $\tau$  en el cual ocurren las colisiones:

$$D = \frac{1}{2\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta^2 \Phi(\Delta) d\Delta \quad (2.22)$$

Esto significa que la facilidad de difusión de un conjunto de partículas en un fluido dependerá de la *densidad de probabilidad*  $\Phi(\Delta)$ , ya que la magnitud de sus *desviaciones* a la media dadas por la relación entre soluto, en este caso el conjunto de partículas, y el solvente, el fluido, son las que permiten caracterizar el evento macroscópico de acuerdo a la constante de difusión  $D$ , teniendo en cuenta que este proceso de difusión es consecuencia de las *fluctuaciones* en el impulso efectuado

sobre las partículas, y construir relaciones con otras constantes fundamentales como el número de Avogadro  $N_A$ .

Así, si resolvemos la ecuación diferencial 2.21 en el cual la distribución inicial es un punto con “densidad infinita”, obtenemos la siguiente distribución de densidad de esferas a lo largo del espacio, en el eje  $x$  y el tiempo  $t$ :

$$f(x, t) = \frac{N}{\sqrt{4\pi D}} \frac{e^{-\frac{x^2}{4tD}}}{\sqrt{t}} \quad (2.23)$$

### Distribución de probabilidad de un número $N$ de esferas en un recipiente

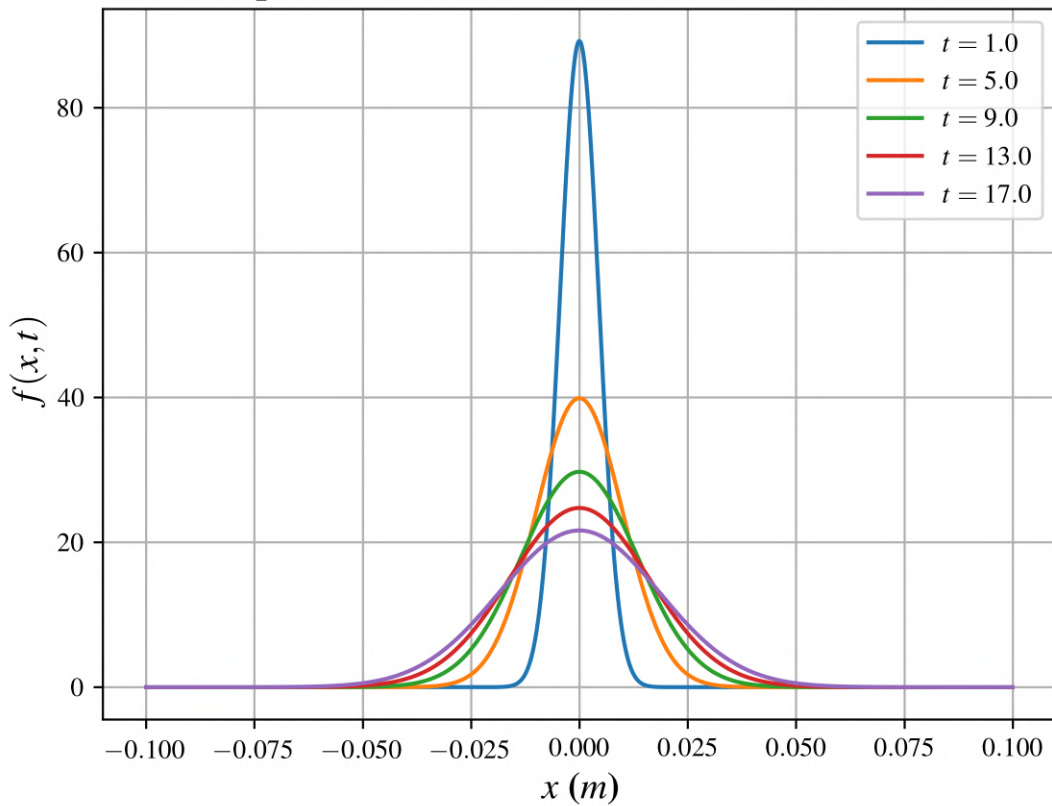


Figura 2.6: Distribución de probabilidad de un número  $N$  de esferas a lo largo del espacio con un coeficiente de difusión  $D = 10^{-5} [m^2/s]$  (Elaboración propia)

Así el desplazamiento cuadrático medio de la esferas  $\langle x^2 \rangle$ , se encontrara determinado por la densidad de esferas  $f(x, t)$  a lo largo de todo el espacio, que a su vez puede ser interpretado como una *densidad de probabilidad* ya que permite hallar el número de esferas que se han desplazado desde el origen a un intervalo entre  $x$  y  $x + dx$ , tal que:

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Nx^2}{\sqrt{4\pi D}} \frac{e^{-\frac{x^2}{4tD}}}{\sqrt{t}} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{N}{\sqrt{4\pi D}} \frac{e^{-\frac{x^2}{4tD}}}{\sqrt{t}} dx} = 2Dt \quad (2.24)$$

Así, finalmente relacionando las ecuaciones 2.15 y 2.24 se halla una nueva relación con la cuál es posible medir la constante de Avogadro  $N_A$  a partir del promedio del cuadrado de los desplazamientos efectuados por las diferentes esferas a lo largo de un intervalo de tiempo:

$$N_A = \frac{RTt}{3\pi\eta r \langle x^2 \rangle} \quad (2.25)$$

Esta última relación es de interés, ya que permite construir un puente entre las *fluctuaciones térmicas* propuestas por Boltzmann en 1897, y en el primer acercamiento formal por parte de Einstein en 1904 de sus efectos en sistemas cerrados, las cuales permiten evidenciar la naturaleza discreta de la materia y un fenómeno macroscópico desde el cual es posible la medición de sus efectos. Además, la deducción de las ecuaciones fenomenológicas de difusión, aunque con ciertas restricciones, permite ampliar el panorama frente a una posible deducción general en comparación a las ecuaciones de transporte propuestas por Maxwell y Boltzmann para gases enrarecidos en el cual las colisiones son binarias.

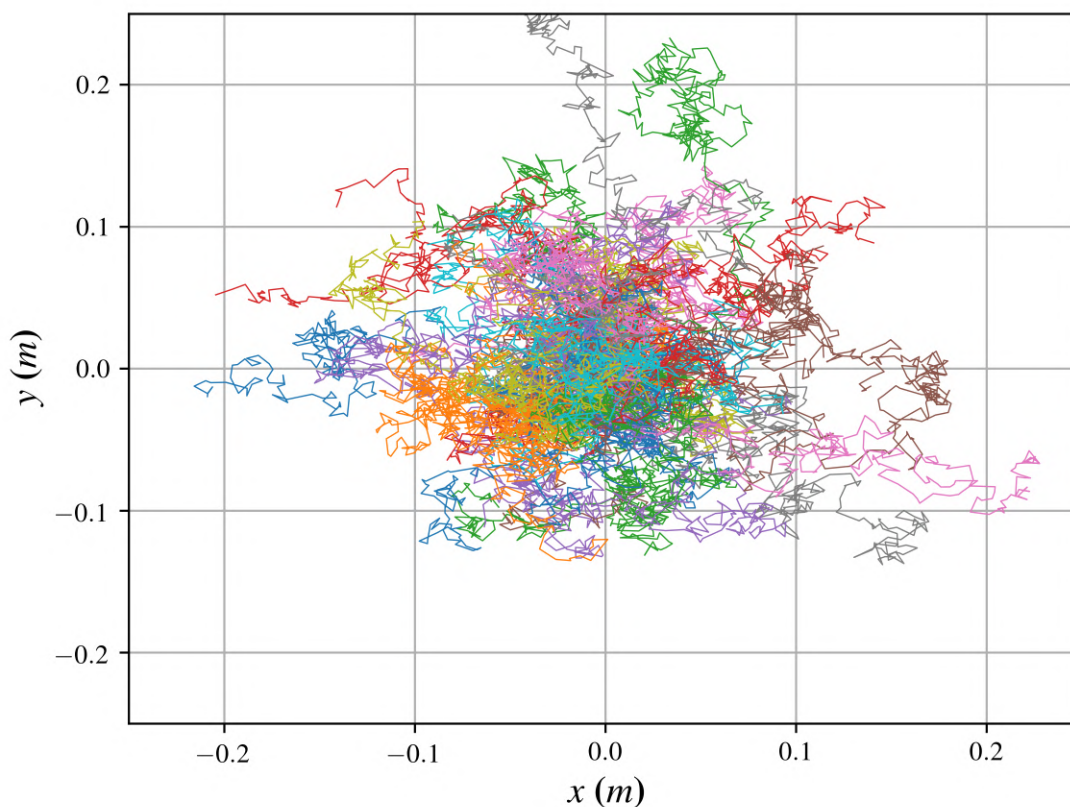


Figura 2.7: Difusión de esferas en un líquido observado desde las trayectorias individuales de los cuerpos (Elaboración propia).

Este posición propuesta en los siguientes años sería alimentada por diversos artículos, ampliando

su campo de acción, las condiciones frente a las cuales se encuentra el sistema y su posterior aplicación, como la descripción frente a la sedimentación de los materiales. Sin embargo se hará un último comentario frente al trabajo de Einstein, particularmente en 1906 publicó el artículo titulado *Sobre la teoría del movimiento browniano* donde ampliaría su propuesta para esferas con movimientos de rotación y traslación, incluyendo fuerzas externas como el propiciado por encontrarse bajo un campo magnético aproximadamente constante o una fuerza restauradora. Sin embargo, existe un particular interés por un caso específico:

Tenemos un cuerpo cuyo centro de gravedad se puede mover a lo largo de una línea recta. [...] Supongamos que el cuerpo en cuestión lleva una carga eléctrica distribuida en un espacio muy pequeño, y el gas que rodea al cuerpo es tan tenue que el cuerpo emite vibraciones de forma sinusoidal sólo ligeramente modificada en el gas circundante. Entonces el cuerpo irradiará ondas electromagnéticas al espacio, y absorberá energía de la radiación del espacio circundante; se produce por tanto, un intercambio de energía entre la radiación y el gas. Podemos deducir la ley límite de la radiación de temperatura, que parece ser válida para longitudes de onda largas y para temperaturas elevadas, si establecemos la condición de que el cuerpo en cuestión emita por término medio tanta radiación como la que absorbe. (Einstein, 1926, p 24)

Donde se presenta la necesidad de encontrar correspondencia entre las fluctuaciones energéticas aplicadas en un sistema compuesto por una densidad de radiación dada, y las expresiones halladas para el movimiento browniano, en un oscilador eléctrico en equilibrio termodinámico, ya que deduce expresiones restringidas. Además, presenta un caso, más trivial el cual será estudiado con mayor detenimiento en el siguiente capítulo, donde se considera el movimiento browniano de los portadores de carga a través de un conductor:

La fórmula derivada para  $\sqrt{\langle \Delta^2 \rangle}$ <sup>2</sup> puede ser aplicada para otros casos. Por ejemplo, si para  $B$ <sup>3</sup> es insertada el recíproco de una resistencia eléctrica en un circuito cerrado, la fórmula indica cuánta electricidad puede fluir sobre un promedio durante el tiempo  $t$  a través de cualquier sección transversal del conductor, el cual se relaciona de nuevo esta conectada con la ley limitada para la radiación de cuerpo negro para extensas longitudes de onda y altas temperaturas. [p 33](Einstein, 1926).

Ya que esta predicción teórica, que en principio para Einstein se consideraba fuera del alcance de la capacidad experimental y de poco provecho, sería relevante en el desarrollo de la electrónica y sus diversas aplicaciones en metrología y telecomunicaciones. Ambos casos de interés permitieron el avance frente a la física estadística, ya que, como expresa Einstein, de acuerdo a la propuesta construida a través de las *fluctuaciones térmicas* no es posible deducir la fórmula para la radiación de Planck, sino una de sus versiones condicionadas a extensas longitudes de onda y altas temperaturas, problema que se encuentra estrechamente relacionado con el movimiento browniano de los

---

<sup>2</sup>El término  $\sqrt{\langle \Delta^2 \rangle}$  es la desviación estándar de una variable macroscópica medible debido a las fluctuaciones térmicas del fluido en el cual se encuentra inmerso.

<sup>3</sup>El término  $B$  es un factor que representa “la movilidad de un sistema con respecto a una variable macroscópica”, por ejemplo  $x^2$ , la cual cambia de acuerdo a los procesos térmicos irregulares.

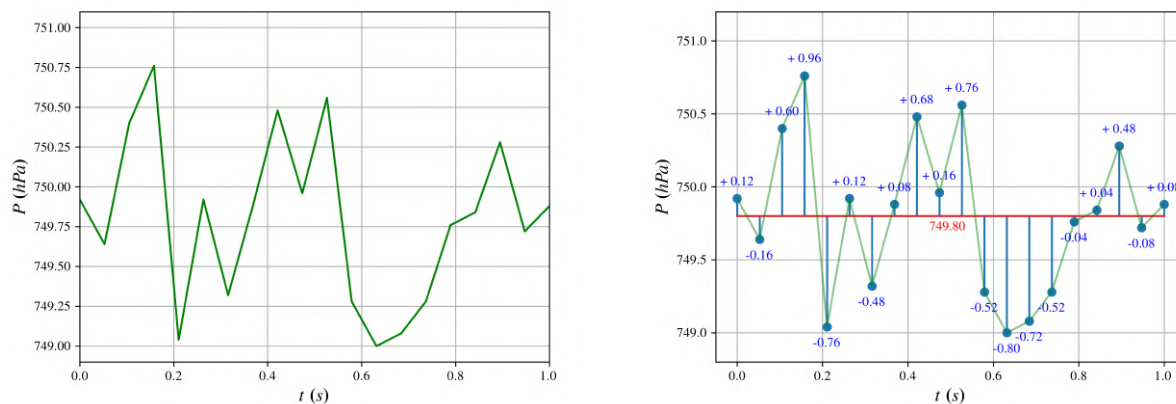
portadores de carga a través de un conductor, en otras palabras, ambos problemas se encuentran conectados por la deducción de un modelo que permita describir el equilibrio térmico de un cuerpo que emite y absorbe radiación electromagnética con otro sistema.

Las *fluctuaciones térmicas* no solo tendrían éxito de la mano de Einstein con el estudio del movimiento browniano, también lo encontrarían con otros fenómenos, como la relación entre las *fluctuaciones de densidad* y el color del cielo, la opalescencia crítica y el estudio de los calores específicos.

## 2.2. Procesos Estocásticos

Las variables macroscópicas de un gas como la presión y la densidad, entendidas desde la teoría cinético-molecular están condicionadas a un valor esperado o promedio. Sin embargo, tal como afirmó Einstein, la evolución temporal de su valor es aleatoria y se encuentra condicionada por la estabilidad térmica del sistema, ya que la *varianza* de la variable macroscópica esta ligada a la caracterización del sistema a nivel microscópico (Einstein y Beck, 1989).

Esta variable macroscópica al estar ligada por una caracterización del sistema a nivel microscópico se concibe como una *variable aleatoria*  $X$ , la cual puede tomar un valor determinado  $x$  de acuerdo a la probabilidad  $W(x)$  si es discreta o *densidad de probabilidad*  $f(x)$  si es continua, que tenga el sistema de adquirir dicho valor determinado (van Kampen, 2007). Sin embargo, aunque la presión  $P$  de un gas en toda su extensión no es constante, los valores en intervalos muy cercanos al valor esperado  $\langle P \rangle$  serán sucesos que poseen una probabilidad abrumadora de ser tomados por el sistema frente a los más lejanos del valor esperado.



(a) Gráfica entre la presión interna del recipiente  $P$  en  $hPa$  vs el tiempo  $t$ .

(b) Promedio de los datos  $\langle P \rangle$  y sus respectivas *desviaciones* al promedio.

Figura 2.8: Señal visualizada del sensor BMP280 al interior del recipiente. (Elaboración propia).

Para ilustrar esta idea, considere un sistema compuesto por un gas en equilibrio termodinámico al interior de un recipiente, el cuál se encuentra en contacto con un sensor de presión. Este sensor

de presión tiene ciclos de lectura con intervalos temporales  $\Delta\tau$  muy pequeños, comúnmente en el rango de milisegundos, en comparación a  $t$ , un tiempo dado en segundos, como es el caso del sensor BMP280 (Bosch Sensortec, 2015). El valor medido de la presión  $P$  en un tiempo  $t = 1$  [s] son dados por la gráfica 2.8 (b), en la cual es posible observar un comportamiento errático a lo largo del tiempo de la presión  $P$ , nuestra *variable aleatoria*, debido a las condiciones ambientales y el cambio espontaneo de la configuración por parte de las constituyentes del gas. En este caso, cada uno de los posibles “valores determinados” de presión que puede ser medido por el sensor se denotara como  $p$  y se encuentran sujetos a una *densidad de probabilidad*  $f(p)$ , la cual puede variar en el tiempo.

La observación de este comportamiento errático en la presión nos lleva a la definición de los *procesos estocásticos* como modelos dinámicos que permiten describir la evolución de una *variable aleatoria* bajo un parámetro, generalmente en el tiempo  $Y_P(t) = g(P, t)$  (van Kampen, 2007; Lemons, 2002), así de acuerdo al ejemplo, si hemos tomado una gran cantidad de datos desde diferentes sensores al interior del recipiente, la organización de los mismos nos proporcionaría una *función de distribución* que nos permitiría caracterizar el sistema. Sin embargo, dicha *función de distribución* no es la única información con la cuál es caracterizado este sistema, también es de interés como varia la dependencia frente a un parámetro entre los sucesos medidos a partir de la *función de autocorrelación*, en este caso el tiempo. Dicha *función de autocorrelación* se define de la siguiente forma:

$$\langle\langle Y(t_1)Y(t_2) \rangle\rangle = \langle Y(t_1)Y(t_2) \rangle - \langle Y(t_1) \rangle \langle Y(t_2) \rangle \quad (2.26)$$

$$\langle Y(t_1) \cdots Y(t_n) \rangle = \int_{p_-}^{p_+} Y_p(t_1) \cdots Y_p(t_n) f(p) dp \quad \text{donde} \quad Y_p(t) = g(p, t) \quad (2.27)$$

Para entender mejor la importancia y significado de la *función de autocorrelación*, primero se explicará acerca de la *función de correlación* entre dos variables aleatorias  $X$  e  $Y$ . La *correlación* entre dos variables aleatorias  $X$  e  $Y$  es un valor que cuantifica la proporcionalidad entre ambas variables a partir de la definición de unas cantidades conocidas como *momentos*, los cuales son unos parámetros propios de cada distribución de datos definidos a partir de la ecuación 2.27, entre los cuales el más famoso es el valor esperado o promedio  $\langle X \rangle$ . La *función de correlación* se define como:

$$\text{corr}(X, Y) = \frac{\langle XY \rangle - \langle X \rangle \langle Y \rangle}{\sqrt{\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2} \sqrt{\langle Y^2 \rangle - \langle Y \rangle^2}} \quad (2.28)$$

La función de correlación  $\text{corr}(X, Y)$  arroja valores en el intervalo  $[-1, 1]$ . Un valor de  $\text{corr}(X, Y)$  cercano a 1 indica una fuerte tendencia lineal positiva entre las variables  $X$  e  $Y$ , lo que implica que a medida que una variable aumenta, la otra también tiende a aumentar de manera aproximadamente lineal. Recíprocamente, un valor cercano a  $-1$  sugiere una fuerte tendencia lineal negativa, donde el aumento de una variable se asocia con la disminución de la otra, también de forma aproximadamente lineal. Cuando  $\text{corr}(X, Y)$  se aproxima a 0, indica una ausencia de relación lineal significativa entre las variables. En el caso específico donde  $\text{corr}(X, Y) = 0$ , y si además las variables siguen una distribución normal multivariada, podemos inferir independencia estadística entre  $X$  e  $Y$ . Es crucial enfatizar que la correlación cuantifica la *covariación lineal* entre variables, pero

*no implica causalidad*. La correlación no establece una dirección de influencia ni revela si una variable es la causa de la otra (Vara Rey, 2015).

A modo de ejemplo considere un péndulo simple. Experimentalmente, se observa una correlación positiva entre el periodo de oscilación  $T$  y la raíz cuadrada de la longitud de la cuerda  $l$ , dada por  $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ , donde  $g$  es la aceleración gravitatoria. Existe una correlación inversa entre el periodo de oscilación  $T$  y la raíz cuadrada de la aceleración gravitatoria  $g$ . Notablemente, no se observa una correlación significativa entre el periodo de oscilación  $T$  y la masa  $m$  del objeto suspendido, al menos dentro del modelo idealizado del péndulo simple para pequeñas oscilaciones.

Volviendo a la *función de autocorrelación*, denotaremos que se evalúa la correlación de una variable aleatoria consigo misma en diferentes instantes de tiempo. Formalmente, se analiza la correlación entre los valores  $Y(t)$  y  $Y(t + \tau)$ , donde  $\tau$  representa un desfase temporal. En esencia, se cuantifica la persistencia de la variable a mantenerse por encima o por debajo de su valor esperado a lo largo del tiempo. Un valor alto de autocorrelación para un desfase  $\tau$  indica que los valores de la variable en instantes separados por  $\tau$  tienden a ser similares. En contraposición, una autocorrelación baja sugiere una menor dependencia entre los valores separados por ese intervalo de tiempo. La autocorrelación es una herramienta fundamental para identificar patrones temporales, dependencias seriales y la "memoria" de un proceso estocástico (van Kampen, 2007).

Para ilustrar la *autocorrelación* en un sistema físico se presenta un sistema adaptado al propuesto por Einstein en 1906 para el movimiento browniano. Considere un cuerpo esférico sin carga eléctrica que esta sujeto a una fuerza restauradora a lo largo del eje  $y$  externa al interior de una caja con dimensiones muy grandes en comparación a la esfera. Dicho cuerpo en un entorno sin contacto con un fluido tendrá un movimiento oscilatorio  $a \sin(\omega t + x)$  con una amplitud  $a$  y fase  $x$ , sin embargo, debido al movimiento térmico propiciado por las constituyentes del fluido en el cuál se encuentra inmerso, su posición a lo largo de la caja será modelada como un oscilador armónico simple con una variación aleatoria de su fase y su amplitud  $Y(t) = A \sin(\omega t + X)$ , donde  $X$  y  $A$  siguen cierta *densidad de probabilidad*  $f(x)$  y  $f(a)$  respectivamente. Con el fin de hacer más sencillo el modelo, consideraremos que las variaciones aleatorias en la amplitud del oscilador son despreciables frente a las variaciones aleatorias de la fase y asumiremos que  $\langle A \rangle = 1$ .

De esta forma, el modelo del sistema es:  $Y(t) = \sin(\omega t + X)$ , donde  $f(x)$  es una *densidad de probabilidad* dada por una distribución constante con un rango de  $[0, 2\pi]$ . Ahora definimos la *función de autocorrelación* entre el valor de  $Y$  en el tiempo  $t$  y el tiempo  $t + \tau$ , teniendo en cuenta que  $\langle Y(t) \rangle = 0$ , de la siguiente manera:

$$\langle\langle Y(t)Y(t + \tau) \rangle\rangle = \int_0^{2\pi} \sin(\omega t + x) \sin(\omega(t + \tau) + x) \left(\frac{1}{2\pi}\right) dx \quad (2.29)$$

$$\langle\langle Y(t)Y(t + \tau) \rangle\rangle = \frac{1}{2} \cos(\omega\tau) \quad (2.30)$$

Si asumimos la *función de autocorrelación* entre un el valor inicial  $t = 0$  y un valor después de que ha pasado un tiempo  $\tau$ , podemos construir un gráfico entre el valor  $\langle\langle Y(0)Y(\tau) \rangle\rangle$  y el tiempo

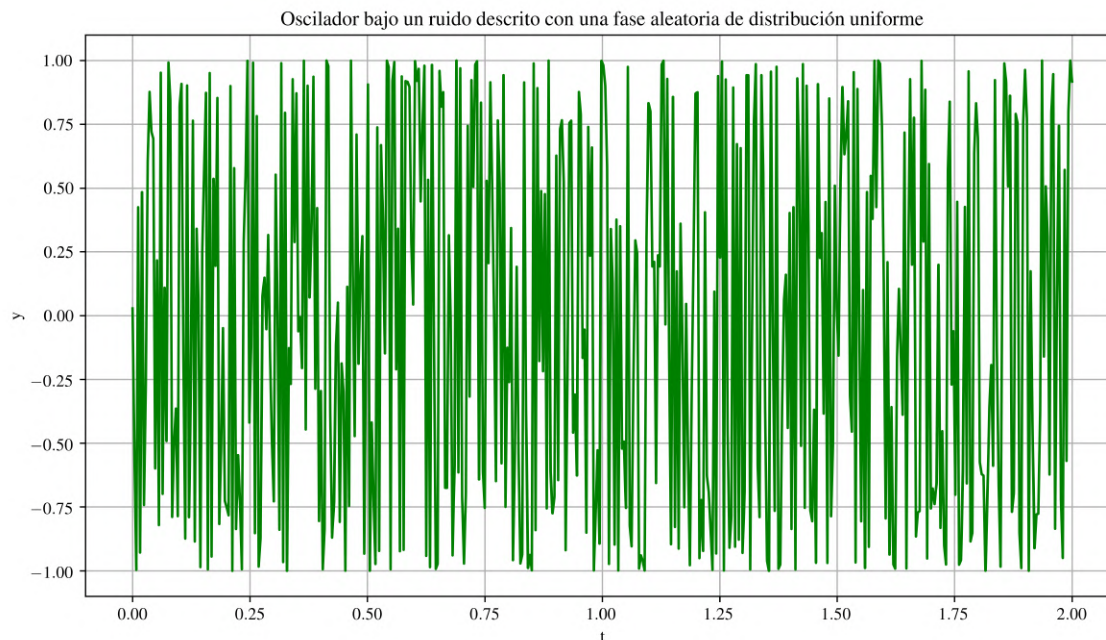


Figura 2.9: Oscilador bajo un ruido de fase con una distribución uniforme. (Elaboración propia)

$\tau$  como se muestra en la imagen:

Es posible observar, que a pesar de la poca información que parecen proveer los datos en la gráfica, cuando se genera un estudio a partir de la *función de autocorrelación*, esta muestra que el sistema contiene una relación oscilante, en otras palabras, que existe todo valor a pesar de la condición aleatoria presente, conserva una fase determinada que se repite cada cierto tiempo, lo cuál en caso de únicamente tener los datos en bruto, como se ha mencionado, permite hallar comportamientos determinados en el sistema de naturaleza externa en nuestro ejemplo bajo la envoltura de una fuerza aleatoria producto de la agitación térmica.

Esta fuerza aleatoria en la medida puede estar definida por cualquier *densidad de probabilidad* o probabilidades, en caso de tener valores discretos, y debido a la manera en que envuelve comportamientos del sistema determinados por expresiones analíticas, se le suele conocer como *ruido*. Como se ha comentado, las fuerzas aleatorias estudiadas provienen en sistemas susceptibles a las variaciones aleatorias de densidad y presión en un fluido debido a la composición molecular de la materia, sin embargo, algunas fuerzas con comportamientos “estocásticos” pueden provenir de relaciones complejas del entorno sobre dicho sistema sin necesidad de requerir de la teoría cinético-molecular, como la presencia de turbulencias en un fluido debido a las configuraciones de las paredes en un recipiente en conjunto con la velocidad del fluido o la presencia de osciladores no lineales con comportamientos caóticos que interactúen con el cuerpo.

## 2.3. La Aproximación Heurística de Langevin

Aunque han sido descritas algunas características de los modelos utilizados en sistemas fluctuantes, generalmente no se tiene definido el proceso estocástico de dicho sistema, sino un conjunto de datos provenientes de un experimento y del seguimiento de un sistema, o por el contrario, tenemos conocimiento de las condiciones con comportamientos determinados en el cuál se encuentra dicho sistema y algunas características que se asumen de la fuerza aleatoria propuesta. En la física existe un método que nos permite hallar de forma aproximada una función que describa nuestra variable aleatoria, como la posición de una partícula browniana a partir del conocimiento de algunos comportamientos determinados conocida como la *ecuación de Langevin* (Peñuela, 2023), y que fue la semilla del estudio de un campo de las matemáticas con amplias aplicaciones en sectores como economía, biología o el control de señales.

La *ecuación de Langevin* es propuesta en 1908 por el físico Paul Langevin (1872 - 1946), en el cuál describe, según él, un método mucho más “sencillo” para derivar las relaciones encontradas por Einstein en 1905. En su caso, parte de las ecuaciones diferenciales propias de un estudio clásico de un cuerpo que pueden ser halladas a partir de la segunda ley de Newton, por ejemplo, un sistema constituido por una esfera que se mueve en un fluido, la cuál esta bajo una fuerza de arrastre, y le añade un nuevo término, conocido como *fuerza estocástica*  $F_{est}$  (Lemons y Gythiel, 1997), que en si misma es una variable aleatoria, convirtiendo el modelo matemático del sistema en una *ecuación diferencial estocástica*.

$$m \frac{dv(t)}{dt} = -6r\pi\eta v(t) + F_{est}(t) \quad (2.31)$$

Para ello, él asume las siguientes condiciones frente a un proceso estocástico dado: Primero, tenemos que el valor esperado de la variable aleatoria, en este caso la fuerza ejercida sobre la partícula  $\langle F_{est}(t) \rangle$  es igual a cero, y segundo, la *autocorrelación* entre dos eventos propios del movimiento browniano, como la fuerza ejercida sobre la partícula, es igual a cero si se dan en dos momentos del tiempo diferentes  $\langle \langle F_{est}(t) F_{est}(t') \rangle \rangle = \Gamma \delta(t - t')$ , donde  $\Gamma$  es una constante (Martín Sierra, 2017). Por lo tanto, la fuerza aleatoria será ruido, sin ningún comportamiento determinista en su descripción.

### 2.3.1. Ecuación de Langevin para una partícula bajo una fuerza disipativa

Ahora, se realizará la solución de la ecuación 2.31 teniendo en cuenta lo anterior a modo de muestra frente a como los razonamientos propuestos permiten llegar a los resultados hallados por Einstein unos años antes, y el poder de las ideas en la propuesta del científico francés. Sin embargo, usar la aproximación propia de Langevin para su solución no es una técnica utilizada en la actualidad debido a sus fallas en tiempos muy cortos (Genthon, 2020; Contreras-Vergara, Lucero-Azuara, Sánchez-Salas, y Jiménez-Aquino, 2021), para ello se hace uso del *proceso de Ornstein-Uhlenbeck* desarrollado entre 1930 y 1940, en el cuál es posible proponer un tiempo arbitrario en su solución (Genthon, 2020; Gillespie, 1996).

Primero, aunque la derivada se encuentre expresada en la ecuación 2.31, se debe aclarar, que es un error atender de esta manera el modelo, debido a que el cambio en la variable aleatoria expresada, a pesar de ser continua, no es derivable en el tiempo, ya que se encontrará con un comportamiento que no es suave (Lemons, 2002; Gillespie, 1996), por lo tanto, la manera apropiada de expresar el modelo será:

$$v(t + \Delta t) - v(t) = -\frac{6\pi r\eta}{m}v(t) \Delta t + \frac{F_{est}(t)}{m} \Delta t \quad \rightarrow \quad \gamma = \frac{6\pi r\eta}{m} \quad (2.32)$$

Con el fin de hacer más sencillo el cálculo y ser un poco más formales frente a la solución de la ecuación diferencial, definiremos la fuerza estocástica como un *Proceso de Weiner*, una variable aleatoria sin ninguna dirección definida la cual es estadísticamente independiente entre dos instantes de tiempo y sigue una distribución normal, que se expresa a partir de un modelo llamado el *Propagador de Markov* (Lemons, 2002; Gillespie, 1996):

$$\frac{F_{est}}{m} \Delta t = \sqrt{\beta^2 \Delta t} N_t^{t+\Delta t}(0, 1) \quad (2.33)$$

Donde  $\beta^2 \Delta t$  será la varianza propia la distribución, que se reconoce como la amplitud promedio de las variaciones en el sistema, y  $N_t^{t+\Delta t}(0, 1)$  es una distribución normal con valor esperado 0 y varianza 1, a lo largo de un intervalo  $(t, t + \Delta t)$ .

Debido a que cada nuevo desplazamiento o cambio en la velocidad en un tiempo  $t$  se define a partir de una gran cantidad de muy pequeños pasos que se realizan a lo largo de un tiempo  $\Delta t$  cada uno como se observa en el apéndice B.1. Estos pequeños pasos son producto de la variable aleatoria propuesta en la ecuación diferencial:  $F_{est}$ , que representa la influencia del movimiento de agitación del fluido y como se ha comentado anteriormente se define a partir de una distribución gaussiana. Por lo tanto, los pequeños pasos son en si mismos una variable aleatoria que a su vez, que a causa de su autocorrelación nula en tiempos diferentes, no son dependientes estadísticamente entre ellos.

Todas estas condiciones permiten hacer uso del *teorema del límite central*, el cuál define que si una variable  $X$  es construida como la suma de un número muy grande de variables aleatorias, cada una con media y varianza finitas, la variable aleatoria  $X$  será descrita por una distribución gaussiana, sin importar la naturaleza de cada una las variables individuales (Filmus, 2010). En este caso, se asume que la densidad de probabilidad propia de la velocidad  $v(t)$  será una distribución normal o gaussiana con un valor esperado  $\langle v(t) \rangle$  y una varianza  $\langle \langle v^2(t) \rangle \rangle$ .

Ahora, ¿son el valor esperado y la varianza de una variable aleatoria, variables aleatorias en si?, dichos valores no lo son, ya que si la densidad de probabilidad esta bien definida, su cálculo resulta ser proporcionado por ecuaciones establecidas, como es el caso de la distribución normal, por lo tanto, definir una ecuación diferencial ordinaria es posible siempre y cuando estemos trabajando con estos valores que hemos mencionado anteriormente como *momentos* de una distribución<sup>4</sup>

---

<sup>4</sup>Es importante aclarar, que los *momentos* deben existir en la distribución, ya que casos como la distribución de Cauchy-Lorentz no es posible su cálculo.

(Lemons, 2002).

Considere el valor esperado de  $\langle v(t + \Delta t) - v(t) \rangle$ , teniendo en cuenta que:  $\langle F_{est}(t) \rangle = 0$  y la propiedad del promedio en variables aleatorias que se suman o restan  $\langle v(t + \Delta t) - v(t) \rangle = \langle v(t + \Delta t) \rangle - \langle v(t) \rangle$ , obtenemos el siguiente resultado:

$$\langle v(t + \Delta t) \rangle - \langle v(t) \rangle = -\gamma \langle v(t) \rangle \Delta t \quad (2.34)$$

El cuál como se ha comentado con anterioridad, al tratarse de un promedio, es posible re-expresarlo como una ecuación diferencial ordinaria que permite hallar la velocidad promedio en función del tiempo, asumiendo que  $v(0) = v_0$  cuando  $t = 0$  como condición inicial:

$$\frac{d\langle v(t) \rangle}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle v(t + \Delta t) \rangle - \langle v(t) \rangle}{\Delta t} = -\gamma \langle v(t) \rangle \quad \rightarrow \quad \langle v(t) \rangle = v_0 e^{-\gamma t} \quad (2.35)$$

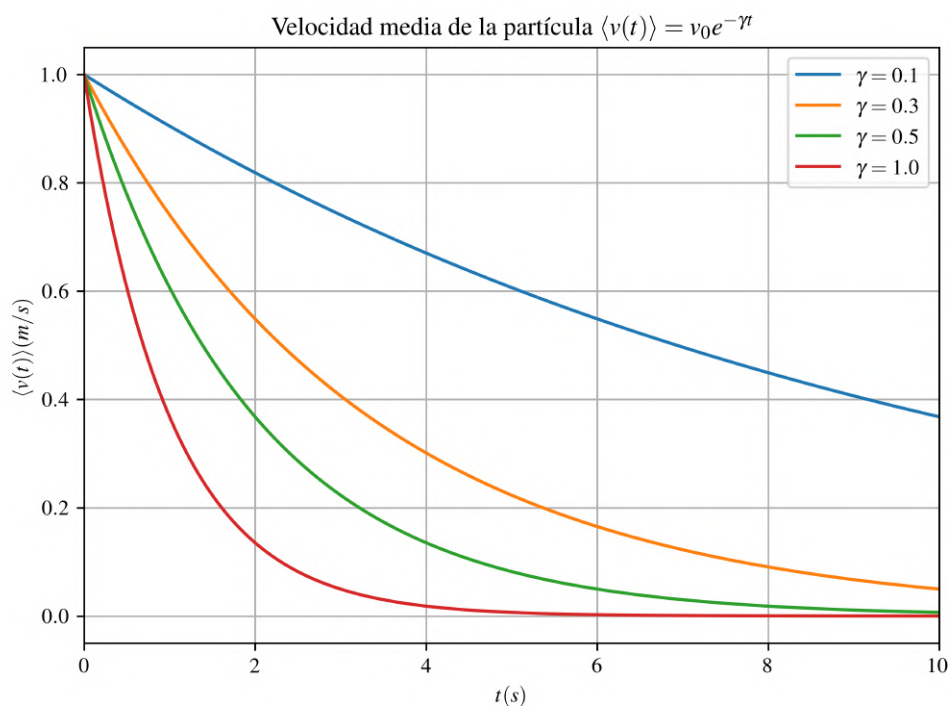


Figura 2.10: Velocidad promedio con valores  $v_0 = 1$  [m/s], y  $\gamma = 0.1, 0.3, 0.5, 1.0$ . (Elaboración propia)

La varianza se encuentra definida por la siguiente relación:  $\langle\langle v^2(t) \rangle\rangle = \langle v^2(t) \rangle - \langle v(t) \rangle^2$ , la cual ha sido trabajada a lo largo del capítulo. En este caso, se propone una pequeña diferencia del cuadrado:  $\Delta[v(t)]^2 = [v(t + \Delta t)]^2 - [v(t)]^2$ , tal que después de ciertas manipulaciones algebraicas <sup>5</sup> en el cual se asume que  $[\Delta t]^2$  y  $[\Delta t]^{\frac{3}{2}}$  son iguales a cero debido a que son intervalos muy pequeños:

<sup>5</sup>Se recomienda revisar el anexo B.1.

$$\Delta[\langle v^2(t) \rangle] = -2\gamma \langle v^2(t) \rangle \Delta t + 2\sqrt{\beta^2 \Delta t} \langle v(t) N_t^{t+\Delta t}(0, 1) \rangle + \beta^2 \langle [N_t^{t+\Delta t}(0, 1)]^2 \rangle \Delta t \quad (2.36)$$

Teniendo en cuenta que la distribución propia de la fuerza aleatoria  $F_{est}$  es estadísticamente independiente de la velocidad  $v(t)$ , entonces es posible afirmar que:

$$\langle v(t) N_t^{t+\Delta t}(0, 1) \rangle = \langle v(t) \rangle \langle N_t^{t+\Delta t}(0, 1) \rangle = 0 \quad (2.37)$$

Y de acuerdo a la definición de varianza, aplicada sobre la distribución normal unitaria, obtenemos que el segundo término propuesto es igual a:

$$\langle \langle [N_t^{t+\Delta t}(0, 1)]^2 \rangle \rangle = \langle [N_t^{t+\Delta t}(0, 1)]^2 \rangle - \langle N_t^{t+\Delta t}(0, 1) \rangle^2 = 1 \quad (2.38)$$

Tal que, el modelo que permite encontrar una ecuación diferencial ordinaria cuando  $\Delta t \rightarrow 0$  para el valor esperado del cuadrado de la velocidad, o segundo momento de la distribución, que antes de ser tomado el límite será igual a:

$$\Delta \langle v^2(t) \rangle = -2\gamma \langle v^2(t) \rangle \Delta t + \beta^2 \Delta t \quad (2.39)$$

Que al ser resuelta tenemos:

$$\frac{d\langle v^2(t) \rangle}{dt} = -2\gamma \langle v^2(t) \rangle + \beta^2 \quad \rightarrow \quad \langle v^2(t) \rangle = v_0^2 e^{-2\gamma t} + \left( \frac{\beta^2}{2\gamma} \right) (1 - e^{-2\gamma t}) \quad (2.40)$$

Finalmente para hallar la varianza, utilizamos la relación nombrada y los resultados de la ecuación 2.35 y 2.40, siendo igual a:

$$\langle \langle v^2(t) \rangle \rangle = v_0^2 e^{-2\gamma t} + \left( \frac{\beta^2}{2\gamma} \right) (1 - e^{-2\gamma t}) - (v_0 e^{-\gamma t})^2 = \left( \frac{\beta^2}{2\gamma} \right) (1 - e^{-2\gamma t}) \quad (2.41)$$

Siendo finalmente la distribución de probabilidad  $p(v, t)$  de la variable aleatoria  $v$  en función del tiempo igual a:

$$p(v, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \left( \frac{\beta^2}{2\gamma} \right) (1 - e^{-2\gamma t})}} \exp \left( \frac{-(v - v_0 e^{-\gamma t})^2}{2 \left( \frac{\beta^2}{2\gamma} \right) (1 - e^{-2\gamma t})} \right) \quad (2.42)$$

Acá puede surgir una pregunta de interés: ¿qué significado tiene la velocidad en un movimiento browniano?, ya que, como se ha comentado con anterioridad, las derivadas de las cantidades aleatorias que dependen del propagador de Markov no son posibles, y la velocidad instantánea se define como la razón de cambio de la posición, una variable aleatoria, con respecto al tiempo a partir de una derivada.

Esta incógnita es un tema de controversia, y depende del autor que trata el problema, ya que a simple vista, la velocidad como variable aleatoria es una representación en base a un tiempo  $\tau$  mucho más pequeño que el  $\Delta t$  en el que sucede cada uno de los eventos aleatorios propios del sistema, y solamente tenemos la información del punto inicial y final de dicho  $\Delta t$  cuando se realiza la observación en los experimentos. Este concepto entonces queda relegado a las construcciones teóricas

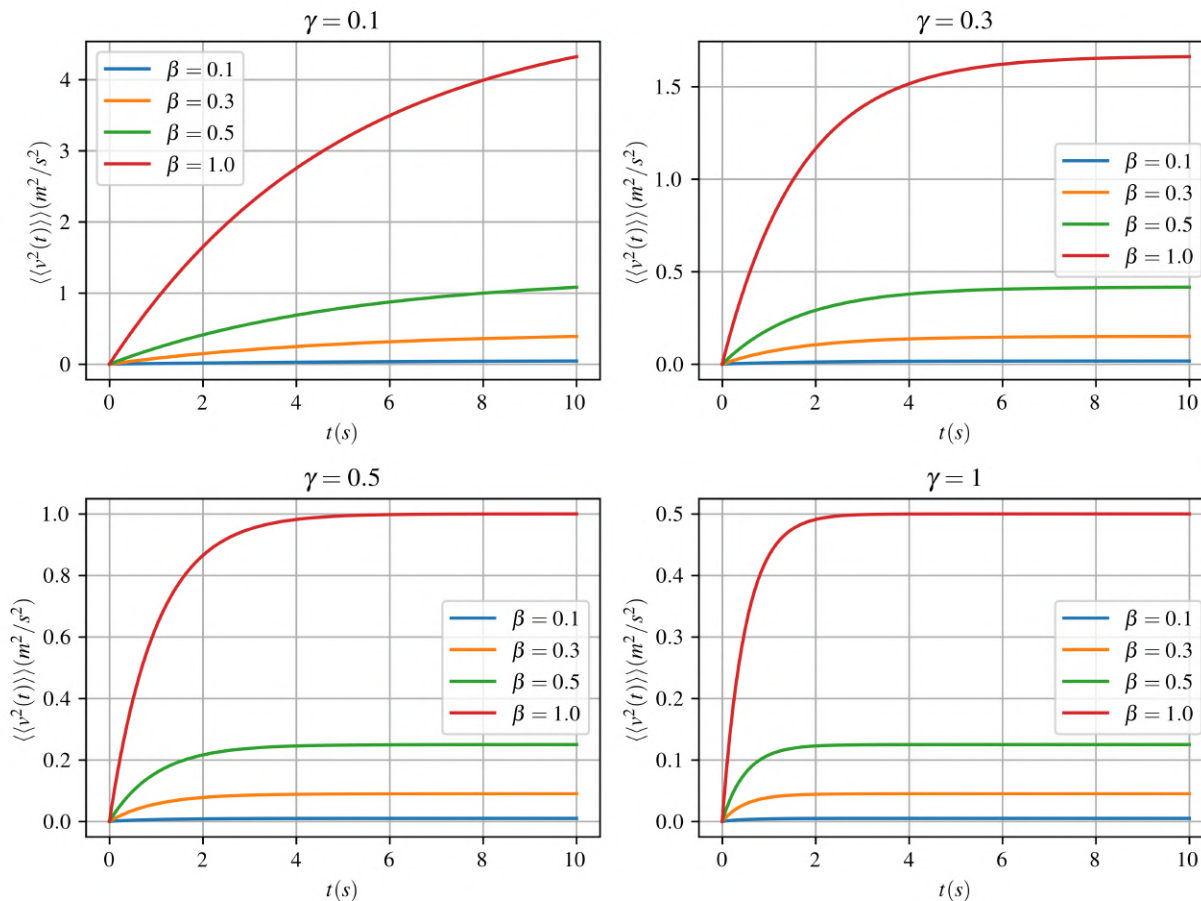


Figura 2.11: Varianzas de la velocidad con valores  $v_0 = 1 [m/s]$ ,  $\beta = 0.1, 0.3, 0.5, 1.0$  y  $\gamma = 0.1, 0.3, 0.5, 1.0$ . (Elaboración propia)

donde se asume a lo largo de tiempos muy pequeños pero finitos promediando una variable estocástica (Genthon, 2020).

Además, como se evidencia en la distribución de probabilidad, cuando ha pasado un tiempo muy largo, o en otros términos  $t \rightarrow \infty$ , es posible observar que la velocidad promedio tiende a cero y la varianza a un máximo, ¿Si se gráfica estos resultados, como se entienden desde los procesos termodinámicos?

Si se observan las figuras 2.13 y 2.14, es posible evidenciar que la velocidad promedio tiende a cero, sin embargo la varianza de la velocidad al tender a un valor fijo, por lo tanto, es posible deducir que la energía del sistema cuando  $t \rightarrow \infty$ , se halla como energía cinética, recordando que el sistema no se encuentra bajo ningún potencial. Dicha energía potencial, si el sistema en un tiempo infinito se encuentra en equilibrio termodinámico, entonces, se aplica el teorema de la equipartición de la energía, el cual establece que cada grado de libertad del sistema posee, en promedio, la misma cantidad de energía (Cátedra de Física II, 2020). En consecuencia:

$$\text{Distribución de velocidades en la partícula: } p(v,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\langle v^2(t)\rangle}} e^{-\frac{(v-\langle v(t)\rangle)^2}{2\langle v^2(t)\rangle}}$$

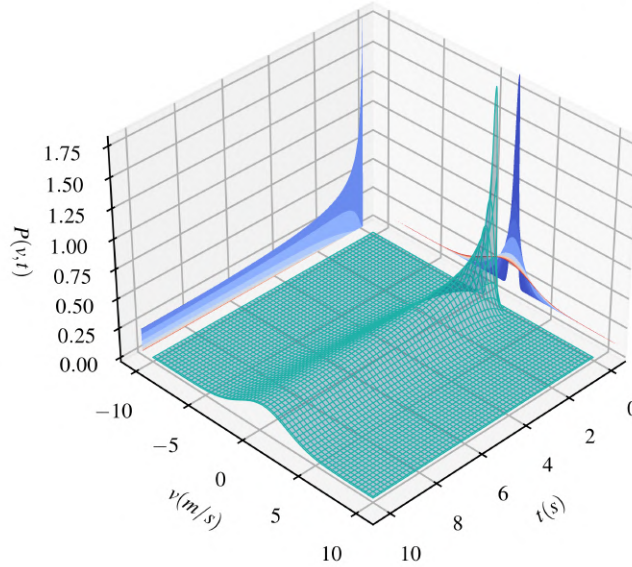


Figura 2.12: Gráfica 3D de la distribución de probabilidad  $p(v,t)$  con los valores  $\beta = 1.0$  y  $\gamma = 0.1$ . (Elaboración propia)

$$\frac{m}{2} \left[ \lim_{t \rightarrow \infty} \langle v^2(t) \rangle \right] = \frac{m\beta^2}{4\gamma^2} = \frac{k_B T}{2} \quad (2.43)$$

Siendo la amplitud de las fluctuaciones igual a:

$$\beta^2 = \frac{2\gamma^2 k_B T}{m} \quad (2.44)$$

En principio, puede parecer extraño que la amplitud de las fluctuaciones se sean directamente proporcionales al factor disipativo, sin embargo, en el equilibrio termodinámico, la energía que es cedida por el sistema debido al carácter disipativo del medio, a su vez es absorbida por el sistema a causa de la agitación térmica del fluido. Por lo tanto, ambas cantidades deben ser proporcionales para que el sistema se encuentre en equilibrio termodinámico (Gillespie, 1996; Lemons, 2002).

Ahora, si queremos hallar la distribución de probabilidad para la posición  $x$  de la partícula, se hará una “integración” de las ecuaciones anteriormente deducidas. Para ello, al igual que en el caso anterior, se propone una ecuación diferencial, en este caso, a partir de la relación entre la velocidad  $v$  y la posición  $x$ :

$$x(t + \Delta t) - x(t) = v(t)\Delta t \quad (2.45)$$

Al igual que la velocidad  $v(t)$ , el modelo de la posición  $x(t)$  se encuentra definido por una distribución gaussiana, debido a que en un tiempo  $t$ , cada uno de los pequeños desplazamientos son una

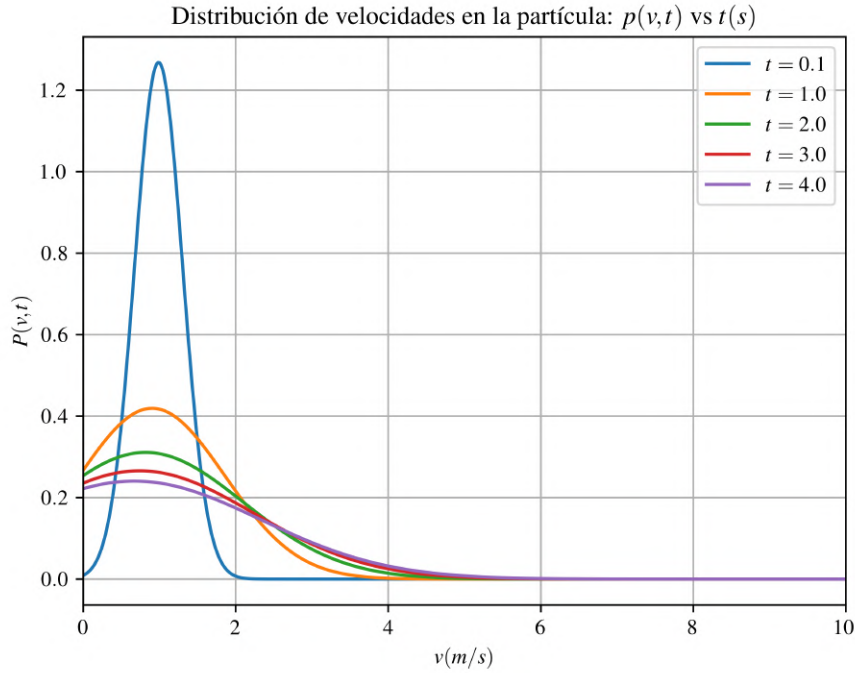


Figura 2.13: Distribución de probabilidad  $p(v, t)$  vs  $v$  con tiempos fijos y los valores  $\beta = 1.0$  y  $\gamma = 0.1$  (Elaboración propia)

variable aleatoria, que sumados siguen el *Teorema del límite central*. Por lo tanto, el problema se reduce en hallar el valor esperado de la posición  $\langle x(t) \rangle$  y su varianza  $\langle \langle x^2(t) \rangle \rangle$ .

Considere el valor esperado de  $\langle x(t + \Delta t) - x(t) \rangle$ , para hallar el valor esperado  $\langle x(t) \rangle$ :

$$\langle x(t + \Delta t) \rangle - \langle x(t) \rangle = \langle v(t) \rangle \Delta t \quad (2.46)$$

Esta expresión puede ser re-escrita de modo que sea posible establecer una ecuación diferencial, con resultados hallados anteriormente como el valor esperado de la velocidad  $\langle v(t) \rangle$  en la expresión 2.35, asumiendo que  $v(0) = v_0$  y  $x(0) = x_0$  cuando  $t = 0$  como condiciones iniciales:

$$\frac{d\langle x(t) \rangle}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle x(t + \Delta t) \rangle - \langle x(t) \rangle}{\Delta t} = \langle v(t) \rangle \quad \rightarrow \quad \langle x(t) \rangle = \frac{v_0}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}) + x_0 \quad (2.47)$$

Para la varianza, definida de la siguiente manera:  $\langle \langle x^2(t) \rangle \rangle = \langle x^2(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2$ , no solo se requiere el segundo momento  $\langle x^2(t) \rangle$ , sino la covarianza entre  $x(t)$  y  $v(t)$ ,  $\text{cov} \{x(t), v(t)\}$ , debido a que la razón de cambio de la varianza se encontrara definida por dicha cantidad. Primero se define una pequeña diferencia del cuadrado de la posición:

$$\Delta[x^2(t)] = [x(t + \Delta t)]^2 - [x(t)]^2 \quad (2.48)$$

Si se realiza el respectivo reemplazo de  $x(t + \Delta t)$  y se considera el valor esperado de la expresión anterior:

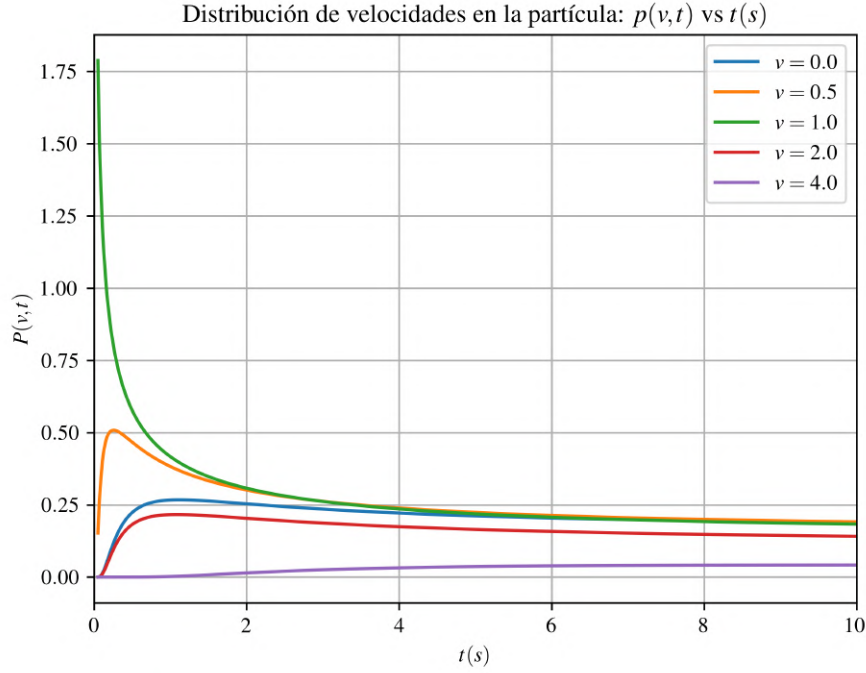


Figura 2.14: Distribución de probabilidad  $p(v, t)$  vs  $t$  con velocidades fijas y los valores  $\beta = 1.0$  y  $\gamma = 0.1$  (Elaboración propia)

$$\Delta \langle x^2(t) \rangle = 2 \langle x(t)v(t) \rangle \Delta t \quad (2.49)$$

Que al ser tomado el límite  $\Delta t \rightarrow 0$ , se halla la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d \langle x^2(t) \rangle}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[x(t + \Delta t)]^2 - [x(t)]^2}{\Delta t} = 2 \langle x(t)v(t) \rangle \quad (2.50)$$

Como no es posible hallar en principio el valor  $\langle x(t)v(t) \rangle$ , se propone hallar la derivada de la varianza  $\langle \langle x^2(t) \rangle \rangle$  aplicando la definición anterior:

$$\frac{d \langle \langle x^2(t) \rangle \rangle}{dt} = \frac{d}{dt} [\langle x^2(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2] = 2 \text{cov} \{x(t), v(t)\} \quad (2.51)$$

Nuevamente, debido a que no conocemos la covarianza entre  $x(t)$  y  $v(t)$  y además esta varía en el tiempo, por lo tanto el nivel de dependencia estadística a lo largo de la trayectoria entre estas dos variables, se propone una pequeña diferencia de la covarianza:

$$\Delta [\text{cov} \{x(t), v(t)\}] = \langle x(t + \Delta t)v(t + \Delta t) \rangle - \langle x(t + \Delta t) \rangle \langle v(t + \Delta t) \rangle - [\langle x(t)v(t) \rangle - \langle x(t) \rangle \langle v(t) \rangle] \quad (2.52)$$

La cuál después de un nada trivial proceso algebraico, que puede ser observado con más detalle en el anexo B.1, se obtiene:

$$\Delta [\text{cov} \{x(t), v(t)\}] = \langle \langle v^2(t) \rangle \rangle \Delta t - \gamma \text{cov} \{x(t), v(t)\} \Delta t \quad (2.53)$$

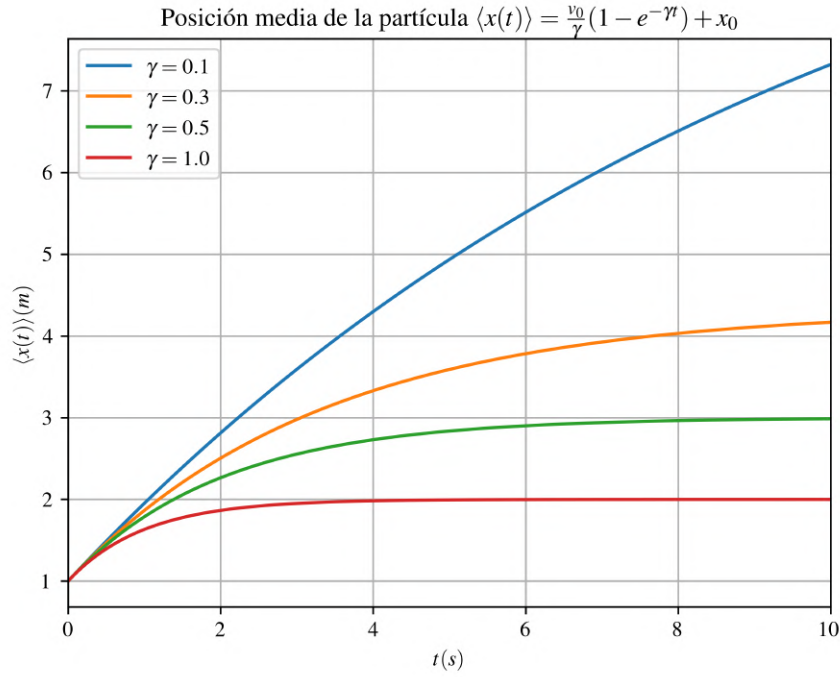


Figura 2.15: Posición promedio con valores  $v_0 = 1$  [m/s],  $x_0 = 1$  [m], y  $\gamma = 0.1, 0.3, 0.5, 1.0$ . (Elaboración propia)

Que al ser tomado el límite  $\Delta t \rightarrow 0$ , se obtiene la siguiente ecuación diferencial, que debido a las condiciones iniciales del ejercicio  $\text{cov}\{x(0), v(0)\} = 0$ :

$$\frac{d \text{cov}\{x(t), v(t)\}}{dt} = \langle\langle v^2(t) \rangle\rangle - \gamma \text{cov}\{x(t), v(t)\} \rightarrow \text{cov}\{x(t), v(t)\} = \frac{\beta^2}{2\gamma^2}(1 - 2e^{-\gamma t} + e^{-2\gamma t}) \quad (2.54)$$

Resultado que es utilizado para hallar el valor de la varianza  $\langle\langle x^2(t) \rangle\rangle$ , en la ecuación diferencial 2.51, tomando  $\langle\langle x^2(0) \rangle\rangle = 0$ . La varianza hallada finalmente es:

$$\langle\langle x^2(t) \rangle\rangle = \frac{\beta^2}{\gamma^2} \left( t - \frac{2}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t}) + \frac{1}{2\gamma}(1 - e^{-2\gamma t}) \right) \quad (2.55)$$

Siendo finalmente la distribución de probabilidad  $p(x, t)$  de la variable aleatoria  $x$  en función del tiempo igual a:

$$p(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\frac{\beta^2}{\gamma^2})(t - \frac{2}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t}) + \frac{1}{2\gamma}(1 - e^{-2\gamma t}))}} \exp\left(\frac{-(x - [\frac{v_0}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t}) + x_0])^2}{2(\frac{\beta^2}{\gamma^2})(t - \frac{2}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t}) + \frac{1}{2\gamma}(1 - e^{-2\gamma t}))}\right) \quad (2.56)$$

Finalmente, al observar las figuras 2.17 y 2.18 es posible deducir que la posición de la partícula se desplaza debido a que, como se observa en la figura 2.16, la varianza diverge, mientras la posición promedio si converge a un valor como se observa en la figura 2.15. Por lo tanto, cuando  $t \rightarrow \infty$  el

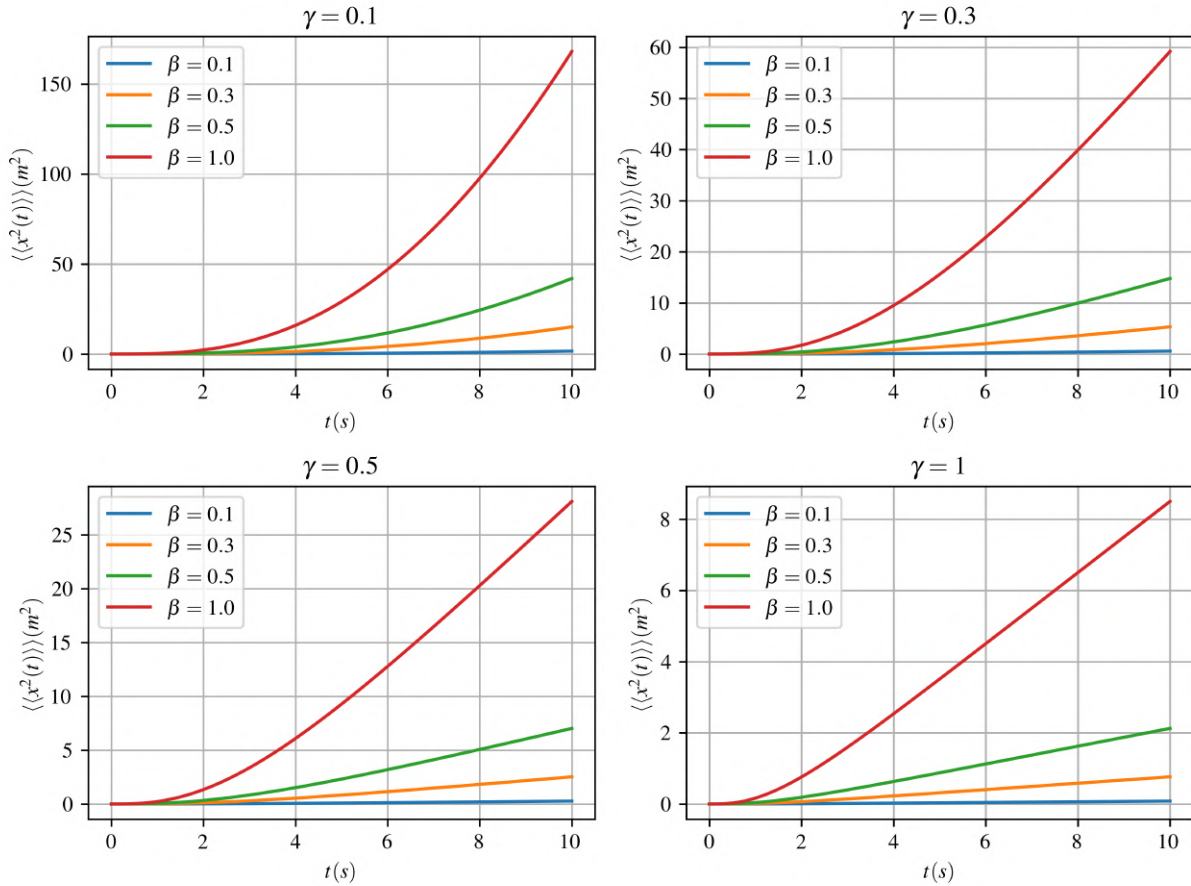


Figura 2.16: Varianzas de la posición con valores  $v_0 = 1$  [m/s],  $x_0 = 1$  [m],  $\gamma = 0.1, 0.3, 0.5, 1.0$  y  $\beta = 0.1, 0.3, 0.5, 1.0$ . (Elaboración propia)

valor de la varianza será mucho mayor que la posición promedio, tal que, únicamente este *momento* de la distribución es relevante.

En ese caso, el desplazamiento en un tiempo  $t$  muy grande donde los factores  $e^{-\gamma t}$  y  $e^{-2\gamma t}$  tienden a cero, será igual a:

$$\langle\langle x^2(t) \rangle\rangle = \frac{\beta^2}{\gamma^2} t \quad (2.57)$$

Al multiplicar y dividir por dos, se obtiene una expresión similar a la hallada por Einstein, ecuación 2.24, en 1905, como se observa a continuación:

$$\langle\langle x^2(t) \rangle\rangle = 2 \left( \frac{\beta^2}{2\gamma^2} \right) t \quad (2.58)$$

Por lo tanto, si se define  $k_B = R/N_A$  y  $\gamma = (6\pi r\eta)/m$ , es posible hallar la constante de difusión en los mismos términos que Einstein la dedujo en 1905, como se observa en la ecuación 2.15:

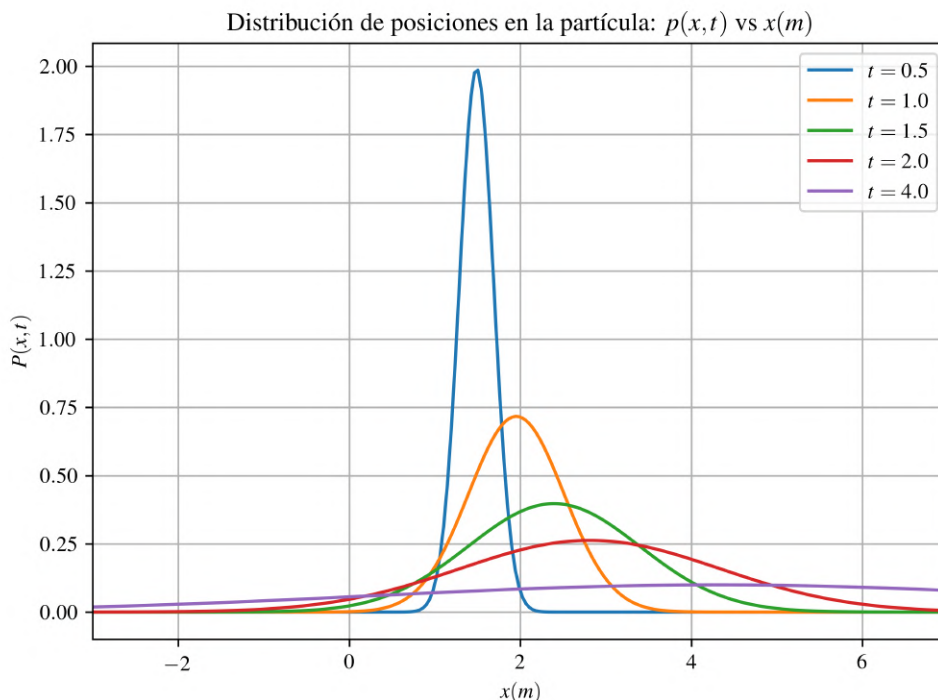


Figura 2.17: Distribución de probabilidad  $p(x, t)$  vs  $x$  con tiempos fijos y los valores  $\beta = 1.0$  y  $\gamma = 0.1$  (Elaboración propia)

$$D = \frac{\beta^2}{2\gamma^2} = \frac{RT}{6\pi\eta r N_A} \quad (2.59)$$

Estos resultados muestran que para tiempos muy cortos, podemos observar variaciones deterministas en el sistema, sin embargo, cuando asumimos tiempos más cercanos a los experimentos, donde el sistema se encuentra en equilibrio termodinámico, los resultados obtenidos por Einstein son plausibles, y dicha observación es ruido en su mejor expresión. Sin embargo ¿en todos los sistemas este estado transitorio es posible de suprimir?, como advierte Arthur Gethon, si el cuerpo se encuentra sometido a una fuerza restauradora, el sistema tendrá un comportamiento transitorio más relevante en su descripción que puede incluso ser descrito experimentalmente (Gethon, 2020).

Como análisis adicional frente a las gráficas, si observamos la tendencia en 2.18, a medida que el tiempo incrementa, se evidencia que la densidad de probabilidad asociada a cada uno de los posibles posiciones en el que se puede encontrar la partícula browniana es igual para todas, lo cual se debe al amortiguamiento de la distribución, como se observa en 2.17. Además, algunas posiciones en 2.18 y velocidades en 2.14 tienen un mayor pico, y esto se debe a que se encuentra la condición inicial  $v_0 = 1 [m/s]$  y  $x_0 = 1 [m]$ .

Para finalizar, los modelos aquí propuestos nos presentan un panorama de la física en la cual, las fluctuaciones derivadas de un sistema físico en relación con las colisiones irregulares de las moléculas con un cuerpo esférico, tal como lo muestra Einstein deja de ser un tratamiento meramente

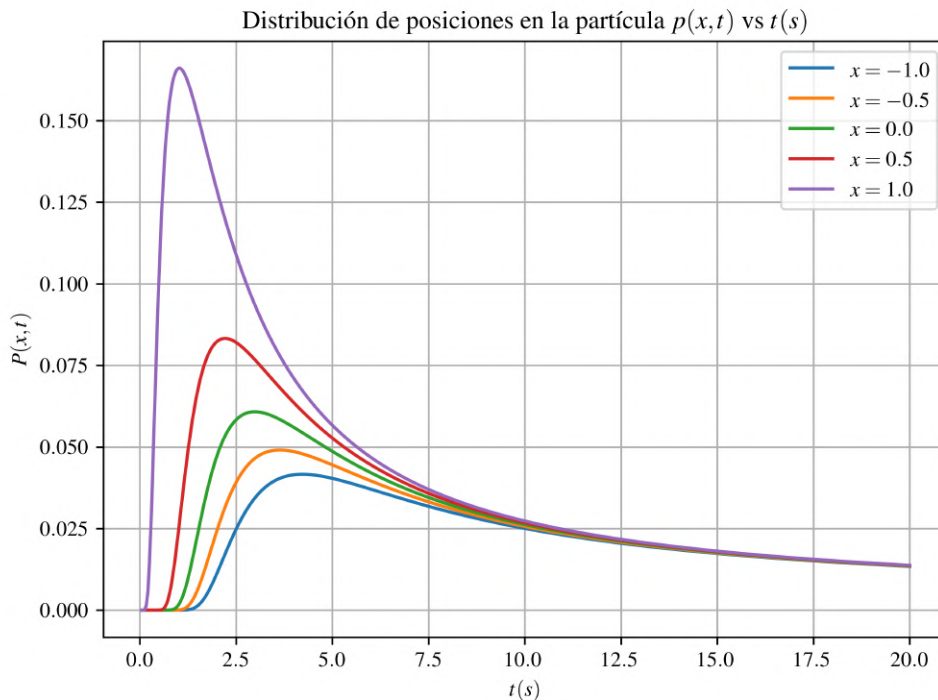


Figura 2.18: Distribución de probabilidad  $p(x,t)$  vs  $t$  con velocidades fijos y los valores  $\beta = 1.0$  y  $\gamma = 0.1$  (Elaboración propia)

teórico a convertirse en una propuesta que modela situaciones reales con evidencias experimentales. Como consecuencia se derivan modelos más generales, los cuales permiten un estudio de los regímenes transitorios y estacionarios en un sistema bajo las condiciones de ruido, que puede ser evidenciado a través del análisis gráfico propuesto. Este tratamiento sobre las fluctuaciones se enriquecerá al colocarlo dentro de una situación particular en circuitos.

## Capítulo 3

### Acerca del ruido electrónico

Las condiciones de ruido son inherentes en cualquier sistema físico en contacto con un fluido debido a la agitación de las moléculas que lo componen y las *fluctuaciones térmicas* presentes, tienen como consecuencia sobre las variables macroscópicas que caracterizan dicho fluido la aparición de variaciones aleatorias, dotando de una caracterización estadística de las mismas. Esta descripción de un sistema físico a partir de *variables aleatorias* propiciadas por este movimiento de agitación, siempre presente, conlleva a situaciones como la propuesta por Einstein en 1906.

Para iniciar el estudio de las condiciones de ruido, se considera el siguiente modelo para un material conductor propuesto por Paul Drude (1863 - 1906), un arreglo regular de iones positivos que se encuentran estáticos y un grupo de cargas negativas libres al interior del conductor en los espacios vacíos entre iones. Las cargas negativas libres se encuentran lo suficientemente lejos de los iones por lo que no deberían de sufrir cambios en su estado de movimiento a menos de que exista un campo eléctrico externo (Sánchez, 2024). Sin embargo, los iones en su interior no son estáticos, las moléculas se encuentran en constante movimiento, por lo tanto, dicho conjunto de cargas serán susceptibles a una gran cantidad de colisiones con los iones que constituyen la estructura del material y entre las mismas cargas negativas, experimentando desplazamientos aleatorios y oscilando erráticamente con respecto a una sección transversal de dicho material conductor. Esta situación en la cuál se mueven las cargas sin la presencia de un campo eléctrico externo, generando un flujo de cargas o variaciones aleatorias de densidad de carga en el material, tiene como resultado un hecho bastante importante para la física aplicada: *la presencia de corrientes eléctricas aleatorias como consecuencia del movimiento browniano de los portadores de carga -moléculas- en cualquier circuito eléctrico.*

Para llevar a cabo un estudio de las condiciones de ruido en un circuito eléctrico y sus consecuencias en las diferentes áreas de la física, sea teórica o aplicada, a partir de las herramientas anteriormente nombradas, se contextualizara el problema y su desarrollo a lo largo del primer cuarto del siglo XX en el lugar menos esperado por Einstein, una aplicación o problema práctico. Puntualmente se centrará la discusión en la descripción desde dos propuestas de solución construidas por diversos autores como Walter Schottky (1886 -1976) análoga a la aproximación de Einstein o la propuesta de los científicos John B. Johnson (1887 - 1970) y Harry Nyquist (1889 - 1976) donde se modela como un sistema en equilibrio termodinámico en el cual conviven radiación y materia. Por último, se hará uso del acercamiento de Langevin con el fin de construir un análisis sobre la

relación entre los componentes de un oscilador eléctrico: capacitor e inductor, sobre dicho ruido producto de las *fluctuaciones térmicas*.

### 3.1. Cuantización de la carga eléctrica

La carga eléctrica es un concepto que ha sido definido desde los griegos hasta nuestros días a partir de la interpretación de los fenómenos electromagnéticos y ligado a los cuerpos. Sin embargo, existen dos eventos experimentales que permitieron caracterizar de manera discreta su valor a través de una naturaleza corpuscular: las leyes empíricas de Faraday para la electrolisis y la naturaleza de los rayos catódicos (Sánchez Ron, 1997).

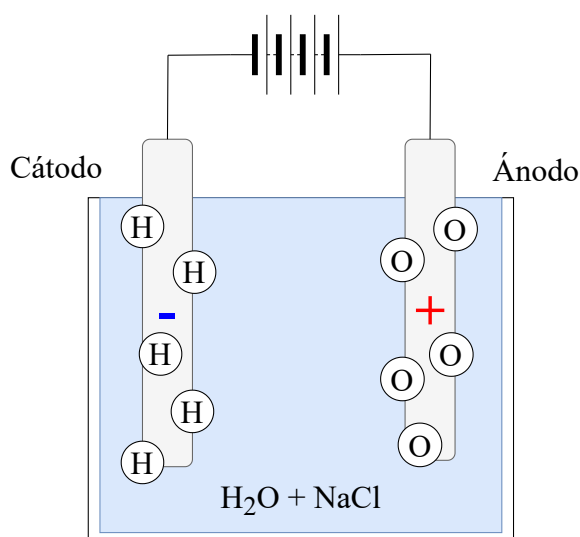


Figura 3.1: Electrolisis del agua. (Elaboración propia)

Primero, la electrolisis es un fenómeno electroquímico en el cual dos electrodos conectados a una batería junto a una solución acuosa ionizada, como se muestra en la figura ??, genera la conducción eléctrica a través de ella conformando un circuito cerrado, en el cuál dicha solución acuosa ionizada es descompuesta en sus componentes o iones, debido a una reacción de oxido-reducción a lo largo del tiempo cuando el circuito se encuentra cerrado. Un ejemplo de solución acuosa ionizada puede ser agua salada, en cuyo proceso las moléculas de hidrógeno y oxígeno se desplazan a cada uno de los electrodos, de acuerdo a su afinidad química. Este fenómeno fue ampliamente trabajado de manera experimental por Michael Faraday (1791 - 1867). Así, las leyes empíricas de Faraday para la electrolisis enuncian la existencia de una relación directa entre la carga  $Q$  utilizada por la reacción oxido-reducción y la masa  $m$  de uno de los componentes separados, dicha masa también directamente proporcional al peso equivalente  $M/z$  del componente (Gamburg, 2023).

$$\frac{Q}{m} = \frac{Fz}{M} \quad (3.1)$$

En este caso, la relación carga-masa de los iones que se encuentra expresado en la ecuación 3.1 donde es proporcional a la razón entre  $z$ , el número de valencia de una sustancia como ión y  $M$  la masa molar de la sustancia dada en  $[g/mol]$ , siendo  $F$  la constante de proporcionalidad, conocida como la constante de Faraday (Gamburg, 2023). En este caso, dicha razón entre  $Q$  y  $m$  debe ser una constante, debido a que todos los valores nombrados son constantes propias de la sustancia. Es importante aclarar que las reacciones químicas presentes en la electrolisis no se encuentran ligadas directamente con la magnitud de la diferencia de potencial, sino con el número de cargas eléctricas involucradas en la reacción. Tal como comenta Faraday:

Cuando la descomposición electroquímica tiene lugar, hay grandes razones para creer que la cantidad de materia descompuesta no es proporcional a la intensidad -diferencia de potencial-, sino a la cantidad de electricidad -carga- presente. (Guralnick, 1979, p 61)

Lo cuál llevo a considerar una posible equivalencia entre lo que Faraday define como la acción química y la electricidad, sin embargo, Faraday no quiso dotarle de una naturaleza atomista debido a su rechazo frente a las fuerzas atómicas propuestas por el químico John Dalton (1766 - 1844), el cuál asociaba una fuerzas inherentes a la interacción entre los diferentes átomos, el cuál sería precursor del concepto de enlace químico (Laidler, 1997). A pesar de ello, como se ha comentado con anterioridad, la emergente comprensión de los principios de la termodinámica a partir de una hipótesis cinético-molecular a finales del siglo XIX, llevarían a reconsiderar nuevamente estas relaciones desde una perspectiva en la cuál la materia tiene una constitución discreta.

Dichas relaciones, desde las concepciones de Hermann Von Helmholtz (1821 - 1894) enunciadas en la conferencia Faraday en 1881, describen que este fenómeno electroquímico permite visualizar una equivalencia entre los movimientos eléctricos y químicos a partir de una constante de carga eléctrica discreta, donde señala la inconsistencia del concepto de corriente eléctrica a partir de una visión mecanicista propuesta en su momento, debido a que la imagen análoga construida a partir de un fluido o continuo que se desplaza a través de una sección transversal de un conducto no permitía construir una relación entre las cantidades discretas de carga que se requería para conseguir cierta masa de una sustancia y a su vez, entender la conversión energética entre potenciales eléctricos y químicos (Sánchez Ron, 1997).

Por otro lado, la emisión de rayos catódicos es un fenómeno debido a grandes descargas eléctricas gracias a dos electrodos en el interior de un tubo de vidrio conectado a una alta diferencia de potencial con un gas enrarecido o a presiones cercanas al vacío absoluto, donde es visible a medida que la presión al interior del tubo desciende en el cátodo un halo brillante que lo rodea a una distancia muy pequeña junto a una porción del tubo de vidrio iluminada si el cátodo tiene una forma sutilmente cóncava. La problemática frente a esta emisión de rayos catódicos se encontraba en la naturaleza misma de esta radiación tomada como ondulatoria o corpuscular. Por ello, en la última cuarta parte del siglo XIX los científicos, especialmente alemanes y británicos, diseñaron diferentes experimentos donde sometían la naturaleza de los rayos catódicos para que fuese exhibida.

Entre ellos se destaca William Crookes (1832 - 1919) que define esta emisión como un nuevo estado de fase, denominado materia radiante, el cual de acuerdo con una serie de experimentos dados

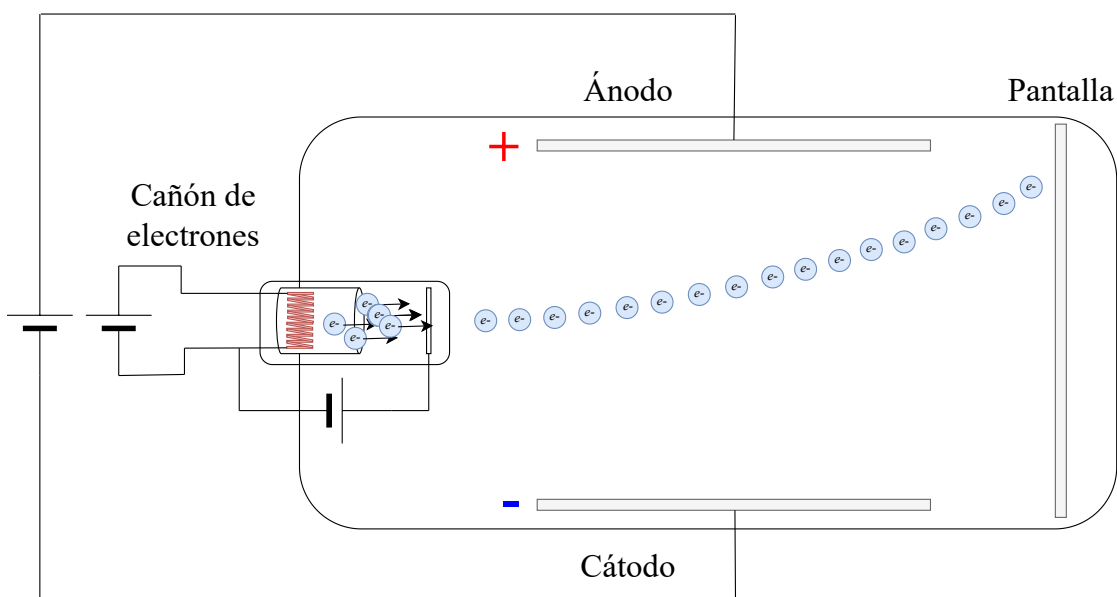


Figura 3.2: Tubo de Crookes con una disposición de placas paralelas. (Elaboración propia)

por una mejora al tubo de Geissler, el arreglo anteriormente descrito, incorporando un cátodo extra conectado en un punto intermedio del trayecto de la emisión del ánodo al cátodo principal con la forma de una Cruz de Malta hecha de Zinc conocido como tubo de Crookes. A partir de dicho arreglo, demostró que la emisión de rayos catódicos sigue una línea recta debido a que no es capaz de atravesar la Cruz de Malta de Zinc y generándose una sombra en una pantalla al final del tubo, de modo que era un argumento bajo el cual la naturaleza corpuscular era sustentable. Adicionalmente, esta materia radiante era desviada con ayuda de imanes permanentes, por lo tanto, se teorizaba que esta materia radiante se componía de cuerpos cargados eléctricamente y puede interactuar bajo la presencia de campos eléctricos y magnéticos.

En contraposición, Heinrich Hertz (1857 - 1894), consideraba que los rayos catódicos eran una combinación de dos fenómenos independientes, una descarga eléctrica similar a un rayo, y una luz emitida por el cátodo, en el cuál se destacan dos montajes donde se revisa la influencia de los rayos catódicos para generar efectos electrostáticos y magnéticos como su mayor argumento; particularmente la primera relación no fue confirmada en los experimentos con el tubo de Crookes con una disposición de placas paralelas en su interior y en el caso de los efectos magnéticos, él observó que las líneas de corriente medidas con ayuda de un imán en una disposición rectangular no corresponden con la trayectoria tomada por la luz emitida desde el cátodo (Sánchez Ron, 1997).

De acuerdo con estos antecedentes, Joseph John Thomson (1856 - 1940), un científico inglés con un amplio trabajo teórico acerca del movimiento de cargas en campos electromagnéticos y director del laboratorio Cavendish, proporcionaría una prueba experimental frente a la presencia de cargas

eléctricas en los rayos catódicos en un montaje similar a la disposición propuesta para los estudios de efectos electrostáticos propuesto por Hertz, sin embargo, a diferencia de Hertz, él sería más cuidadoso frente a las condiciones de presión al interior del tubo y además, considera colimar la radiación emitida. Thomson observaría que hay una desviación en la trayectoria del haz colimado, frente a la presencia de campos electrostáticos y magnéticos, idéntica a la que un cuerpo de masa  $m$  y carga negativa  $|Q|$  lo haría bajo las mismas condiciones, resaltando especialmente el resultado contrario frente a la susceptibilidad de los rayos catódicos a efectos electrostáticos y, junto a la presencia de campos magnéticos, proporciona un valor constante que relaciona ambas características del cuerpo cargado que componen dichos rayos catódicos, conocido como la relación carga-masa  $Q/m$ .

Esta relación carga-masa ya había sido medida para iones en la descomposición de sustancias a través de la electrolisis, sin embargo, este valor con tres ordenes de magnitud de diferencia frente a los iones de hidrógeno sugiere que los “corpúsculos” que componen los rayos catódicos son aun más pequeños y se comportan como cargas libres. Estos corpúsculos permitirían construir un modelo de conducción eléctrica en los metales, en el cual los “corpúsculos” se difunden a través de un arreglo regular de iones estáticos debido a la presencia de un campo eléctrico externo (Robotti, 1995; Guzmán, 2020).

En si mismo, el valor discreto de la carga sería validado por Robert A. Millikan (1868 - 1953) con un experimento en el cuál a través de la caída de gotas de aceite cargadas en un recipiente cilíndrico con dos compartimientos que se conectan a través de un pequeño orificio y uno de ellos tiene dos placas paralelas que generan un campo eléctrico constante. Dicho valor sería calculado a partir de un análisis estadístico en un gran conjunto de gotas cargadas, donde el mínimo común múltiplo dado entre todas las gotas era siempre el mismo valor  $|e| = 1.602 \times 10^{-19} [C]$ . Un valor que coincidía con gran cantidad de fenómenos en los cuales se requería de un valor discreto de la carga y cuya entidad se dio a conocer como *electrón*, un concepto que seguiría desarrollándose a lo largo de la primera mitad del siglo XX desligándose de su dicótoma ondulatoria-corpúscular (Guzmán, 2020).

### **3.2. Emisión termoiónica y el surgimiento de la electrónica a partir de los tubos de vacío**

Este nuevo entendimiento acerca de la conductividad eléctrica no sería solo importante en el desarrollo de la ciencia, lo fue también para la tecnología, más específicamente permitiría el desarrollo de una rama en la física aplicada conocida como la *electrónica*. Dicha rama se encarga de la manipulación de un flujo de electrones de nuestro interés, que es denominado como una señal eléctrica a través de su emisión, amplificación, transformación y rectificación mediante dispositivos o componentes para una aplicación específica como la metrología o las telecomunicaciones.

Aunque parezca curioso, la electrónica no habría encontrado su nacimiento sin la bombilla incandescente, la cual consiste de un bulbo de vidrio con un gas enrarecido en su interior y dos soportes conductores aislados que se encuentran conectados a un filamento muy delgado de carbón el cuál

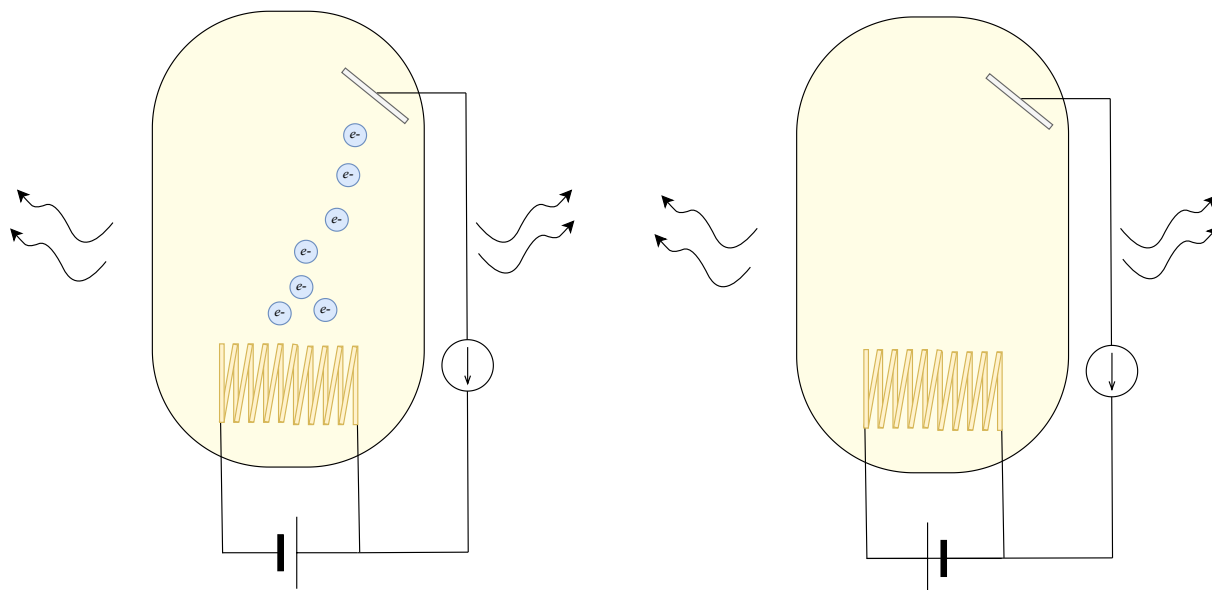


Figura 3.3: Disposición al interior de un bulbo de vidrio ideada por Edison. (Elaboración propia)

brillaba cuando una gran diferencia de potencial era conectada, debido a que el filamento adquiría una temperatura muy alta como consecuencia del Efecto Joule y gracias a la baja presencia de oxígeno, tardaba en fracturarse dicho filamento. Al interior un fenómeno conocido como “*Emisión termoiónica*”<sup>1</sup> fue observado por el inventor estadounidense Thomas Alva Edison (1847-1931) mientras realizaba pruebas acerca de la vida útil en sus filamentos (Floriani, 2006). Este fenómeno se visualizaba debido al oscurecimiento progresivo en un sector de las bombillas, cercano al lado positivo del filamento, en el cuál Edison asume que existe una eyección de partículas cargadas negativamente del lado negativo del filamento que se desplazaban al lado positivo. En 1882 Edison observó, que si colocaba un segundo conductor que no estaba en contacto con el filamento al interior conectado con el polo positivo de la fuente, se visualizaba la conducción de corriente eléctrica a través del conductor introducido en el bulbo, más no cuando es conectado al polo negativo (Okamura, 1994). Todos estos hechos a pesar de que no los comprendía el inventor estadounidense si los utilizó en el diseño de un indicador de voltaje.

Sin embargo, fue el físico e ingeniero eléctrico John Ambrose Fleming (1849 - 1945), interesado en la *emisión termoiónica* visualizada por Edison quien llevaría a cabo una investigación desde 1890 con el fin de dar explicación al fenómeno observado y además, construiría el primer dispositivo electrónico conocido como la válvula de Fleming o *diodo termoiónico*, el cuál era un dispositivo que debido a su característica particular: cuando una corriente alterna es transportada por la válvula todo el comportamiento oscilante era restringido a la sección positiva, sería utilizado en la creación de un *rectificador*, motivado por el creciente mercado de las telecomunicaciones. Tal como especifica Fleming en su patente:

<sup>1</sup>También es llamado Efecto Edison

He descubierto que si dos conductores están encerrados en un recipiente en el que se crea un buen vacío, calentándose uno a una temperatura alta, el espacio entre los conductores caliente y frío poseen una conductividad eléctrica unilateral, y la electricidad negativa puede pasar del conductor caliente al conductor frío, pero no en la dirección inversa. (Fleming, 1904, p 2)

Esto se debe a que la emisión electrónica en los metales es un fenómeno que sucede de forma espontánea debido a que los electrones propios de la conducción eléctrica en dichos materiales se encuentran ligados a potenciales muy bajos, denominados *función trabajo*  $\phi$  (Hañas, 2006), por lo tanto, si se les provee o consiguen debido a sus interacciones la suficiente energía cinética se convertirán en electrones libres capaces de ser expulsados del material. Si la temperatura de un cuerpo es el indicador macroscópico de la velocidad media de sus constituyentes, es posible afirmar que a mayor temperatura, la velocidad de estas será mayor y por ende la energía cinética adquirida por los electrones debido a las múltiples colisiones, de aquí se deduce que en estas condiciones los electrones tendrán una mayor probabilidad de ser emitidos. La densidad de corriente eléctrica  $J$  que es emitida en dirección perpendicular a una placa o superficie, está dada por la ecuación 3.2 deducida por Owen W. Richardson (1879 - 1959) en 1901, y mejorada en 1911 (Richardson, 1929):

$$J = \lambda AT^2 e^{-\frac{\phi}{k_B T}} \quad \text{donde} \quad A = \frac{4\pi |e| m_e k_B^2}{h^3} \quad (3.2)$$

Donde  $\lambda$  es una constante que depende del material y  $h$  es la constante de Planck. Pensando la situación desde la naturaleza estocástica del fenómeno, la probabilidad de que un electrón sea emitido por el filamento caliente en dirección a la placa será mucho mayor que la probabilidad de que un electrón sea emitido por la placa a temperatura ambiente hacia el filamento, por lo tanto, el fenómeno observado será una intensidad de corriente circulando a través del vacío, teniendo en cuenta que es más difícil que un electrón en las diferentes configuraciones debido a las colisiones consiga un valor de energía cinética capaz de superar la función trabajo. Ahora, cuando conectamos una diferencia de potencial entre la placa metálica en la parte superior y el polo negativo del filamento, es posible observar que la nube electrónica producto de la emisión termoiónica, también conocido como *espacio cargado*, tiende a dirigirse hacia la placa si esta tiene carga positiva, debido a que los electrones (abusando del reduccionismo con fines de la explicación) son cargas negativas, por lo tanto, en el caso contrario si la placa tiene carga negativa tienden a ser repelidos. Este flujo de electrones  $J_c$  será modelado a través de la ley de Child-Langmuir, asumiendo que la velocidad inicial de los electrones es igual a cero (Floriani, 2006):

$$J_c = \frac{4\epsilon_0}{9d^2} \sqrt{\frac{2|e|\hbar}{m_e}} V^{\frac{3}{2}} \quad (3.3)$$

Donde  $d$  representa la distancia entre el filamento y la placa, y  $\epsilon_0$  la permitividad eléctrica en el vacío. La relación medida de corriente al interior del bulbo será la suma de estas dos contribuciones, lo cual convierte dicho dispositivo en un elemento no óhmico debido a que no sigue una relación proporcional entre la intensidad de corriente eléctrica y la diferencia de potencial.

Para entender el funcionamiento del *rectificador* de Fleming, patentado en 1904, primero se hará una explicación detallada del *diodo termoiónico*. Este dispositivo, como se muestra en la figura

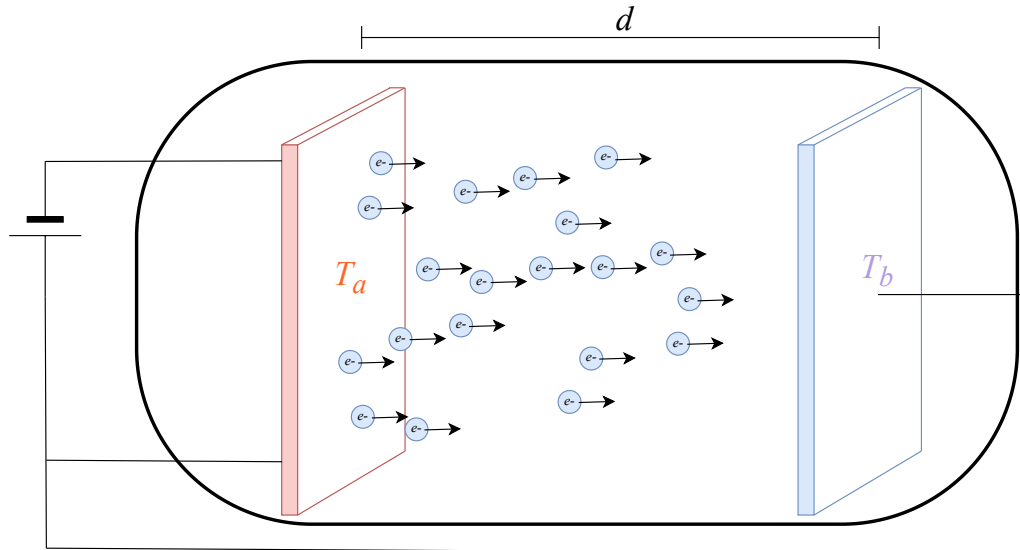


Figura 3.4: Sistema descrito por la ley de Child-Langmuir. (Elaboración propia)

3.5, se compone de un bulbo de vidrio el cuál tiene un filamento similar al que se utiliza en las bombillas incandescentes y es rodeado por un cilindro de aluminio soportado por unos cables de platino aislados por el mismo vidrio del bulbo. Ahora, el bulbo tiene tres cables de salida, los primeros dos estarán conectados a una fuente de corriente continua que permite calentar el filamento y un cable que conecta el cilindro de aluminio con un inductor, el cuál a su vez se encuentra conectado en el mismo nodo que el polo negativo de la fuente (Fleming, 1904). Ahora, frente a su funcionamiento, considere un segundo inductor en el que pasa una corriente eléctrica alterna, el cuál induce una fuerza electromotriz en el primer inductor conectado al *diodo termoiónico*, que debido a las propiedad comentada por Fleming anteriormente, si se coloca un galvanómetro entre el polo negativo de la fuente y el primer inductor, se observara una onda que unicamente oscila cuando la señal tiene valores positivos, ya que es nula cuando los valores de la oscilación eléctrica son negativos.

Ahora, con la configuración básica entendida si se disponen dos *diodos termoiónicos* cruzados conectando el conductor caliente de cada bulbo con el conductor frio de su contraparte, y con ayuda de un dinamómetro diferencial compuesto por dos bobinas y un puente en común con el inductor en el cuál es recibida la señal eléctrica, será posible una mejor *rectificación* de dicha oscilación, aprovechando toda la onda en vez de la mitad.

Aunque rectificar la señal es todo un hito, no es la única aplicación práctica que tendrían estos *diodos termoiónicos*, también han sido utilizados para *duplicar* la diferencia de potencial de salida a cambio de una reducción en la intensidad de corriente eléctrica. Adicionalmente existía un reto más grande, el cuál era *amplificar* señales de baja amplitud provenientes de la conversión de una onda sonora a una señal eléctrica gracias a un material piezoeléctrico, con el fin de hacer más perceptible su escucha por parte del receptor. Para ello existieron tres líneas independientes de in-

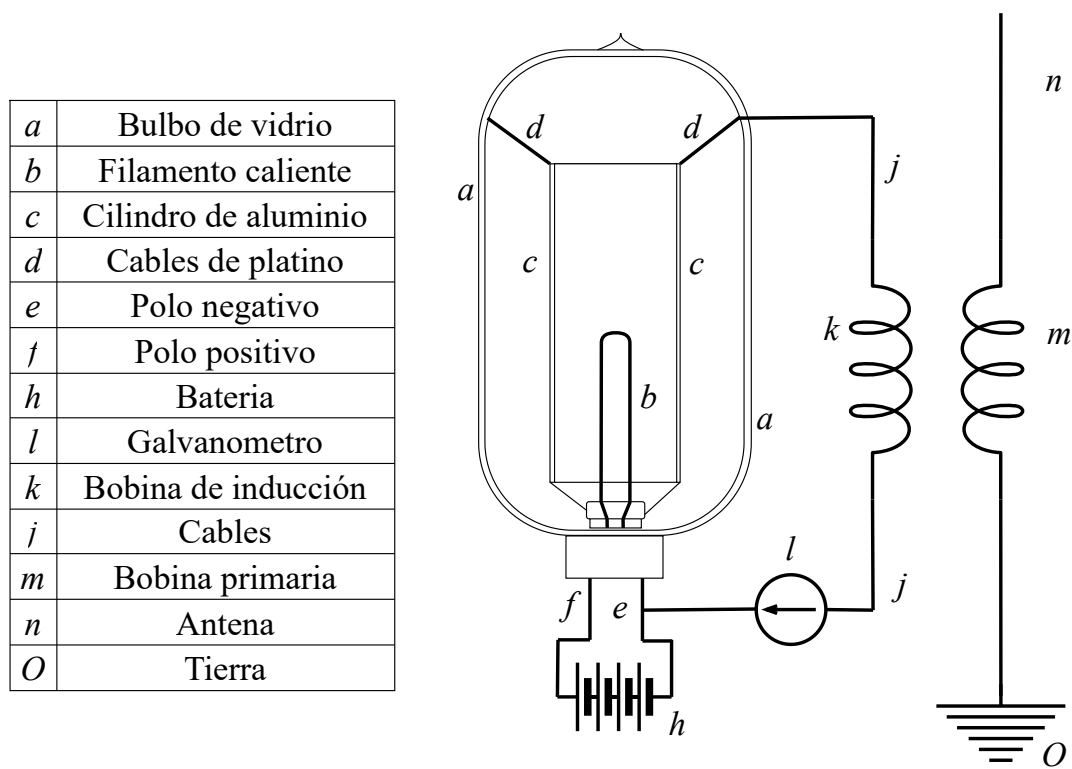


Figura 3.5: Diodo de Fleming. Adaptado de la figura 1 en la patente US803684A (<https://patents.google.com/patent/US803684A/en>)

vestigación, la primera en Inglaterra por Fleming con sus configuraciones de *diodos termoiónicos*, la segunda desde 1904 en Alemania por el científico Robert von Lieben (1878 - 1913), que diseñó un amplificador en el cuál su principio de funcionamiento se centraba en la deflexión de los rayos catódicos, sin embargo, era un dispositivo complejo de fabricar en serie, y en 1906 Lee De Forest (1873 - 1961), un inventor estadounidense de dudoso renombre que se topo con la solución a través del diseño de un detector de llama ([Gambau, s.f.](#)).

El *detector Audión* surgió como respuesta a un caso de plagio de modelos en otros detectores de llama, por lo tanto su investigación en principio se centro en las propiedades eléctricas de una llama, y a partir del comportamiento observado, diseñó dicho detector de llama. Para ello, DeForest diseñaría un detector de llama que convergería a un dispositivo muy similar al *diodo termoiónico* de Fleming, el cual se encontraba conectado a unos auriculares que permitían escuchar la señal asociada a la presencia de una llama, y con el fin de no caer de nuevo en problemas de plagio, añadió un tercer filamento en zig-zag proveniente de la antena en el espacio intermedio entre el cilindro de aluminio y el filamento de la bombilla, el cuál además mejoro la calidad de la onda sonora, que le dio el nombre de *triodo*.

Aunque la solución al problema asociado con la *amplificación* de señales de baja amplitud a través de una modificación en el *diodo termoiónico* de Fleming que fuese viable a nivel industrial no fue

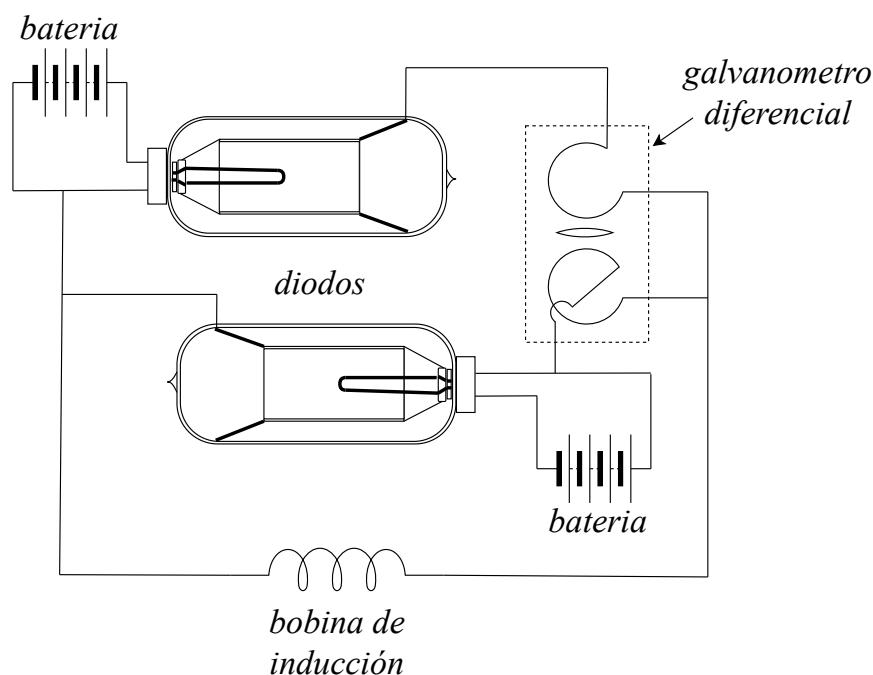


Figura 3.6: Diodo de Fleming. Adaptado de la figura 2 en la patente US803684A (<https://patents.google.com/patent/US803684A/en>)

descrita directamente por DeForest, se encuentra el trabajo de Irving Langmuir (1881 - 1957) en 1913<sup>2</sup> que a partir de la configuración propuesta se le pudo dar solución al problema. Para entender un poco mejor como funciona el sistema de *amplificación* a nivel físico, se describirá con mayor detalle el circuito amplificador de válvula.

Este circuito es muy similar al propuesto por Fleming, sin embargo existe una modificación en la cual se le añade una terminal extra que se conecta desde el inductor que ha recibido la señal hasta el filamento en forma de zig-zag, que también puede ser una rejilla coloidal (Forest, 1907, 1908). En este mismo circuito se encuentra una salida de dicha señal en el cátodo como un parlante, en vez del galvanómetro.

Ahora, considere la siguiente situación: dos placas paralelas, una con carga positiva  $Q$  y otra con carga negativa  $-Q$ , de extensión infinita separadas a una distancia  $d$ , las cuales debido a su disposición producen un campo eléctrico constante  $|E|$  en su espacio intermedio, a su vez, una carga negativa  $e$  se encuentra muy cerca a la placa negativa y una carga de magnitud  $q$  se encuentra a una distancia  $d/2$  de cada una de las placas y en una línea paralela a la carga  $e$ , ¿cuál debe ser el

<sup>2</sup>Dicha investigación fue financiada por la compañía General Electric. Aunque parezca un dato irrelevante, es necesario recordar que la mayoría de las investigaciones de física aplicada dejaron de ser procesos aislados en centros universitarios y se convirtieron en grandes proyectos supervisados por la industria a finales del siglo XIX, en este caso, las compañías de telecomunicaciones, y sería una tendencia que llegaría hasta nuestros días.

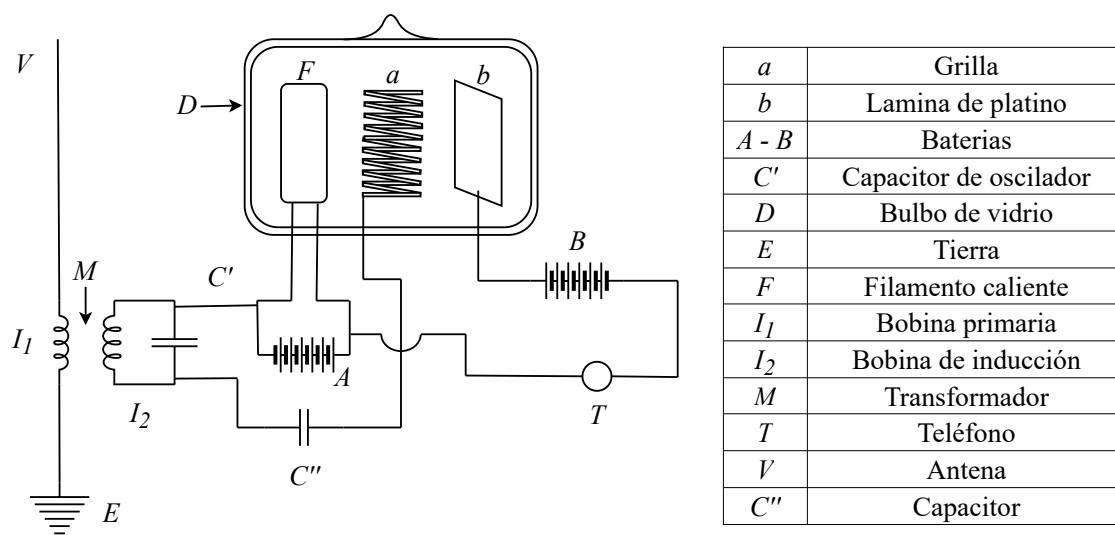


Figura 3.7: Circuito amplificador. Adaptado de la figura 1 en la patente US879532A (<https://patents.google.com/patent/US879532>)

valor del campo  $E$  y la velocidad inicial de la carga negativa  $e$  para que sea capaz de desplazarse desde la placa negativa a la placa positiva?, o en otras palabras, ¿qué condiciones requiere la carga negativa  $e$  para que sin importar la deflexión de su trayectoria recorra la distancia  $d$ ?. Este mismo comportamiento puede ser pensado para un número  $N$  de cargas negativas con diferentes condiciones iniciales, como es el caso de la nube electrónica como producto de la emisión termoiónica, y las placas paralelas serán, el filamento (ánodo) y el cilindro de aluminio (cátodo).

Específicamente en la situación propuesta, la carga  $q$  dispuesta en una línea paralela a la carga  $e$  representara la diferencia de potencial dada por la rejilla. Puntualmente, en el triodo, consideremos que la señal eléctrica captada por la antena es sinusoidal que se encuentra en un rango muy pequeño de amplitud, por ejemplo los milivoltios <sup>3</sup>, cuando dicha señal se encuentra dentro del circuito, la diferencia de potencial que se provee a la rejilla creará trampas de electrones que de acuerdo a su magnitud en el tiempo limitara el número de electrones que cumplen con las condiciones para llegar al cátodo, replicando la señal con una amplitud mayor gracias a la diferencia de potencial entre ánodo y cátodo (Rider, 1945).

Esta tecnología tuvo una amplia adopción durante el siglo XX, notablemente en la construcción de las primeras computadoras basadas en tubos de vacío. No obstante, surgió un desafío significativo con la amplificación de la señal, específicamente la introducción de ruido, particularmente cuando

<sup>3</sup>Estos valores tan bajos pueden encontrarse en diferentes dispositivos, uno de ellos son las galgas extensiométricas, las cuales a través de un puente de Wheatstone los pequeños cambios en su resistencia eléctrica debido a deformaciones mecánicas son correspondidos con una diferencia de potencial que suele encontrarse en esos ordenes de magnitud, y por ende, requieren de un dispositivo que amplifique dicha señal para ser visualizada.

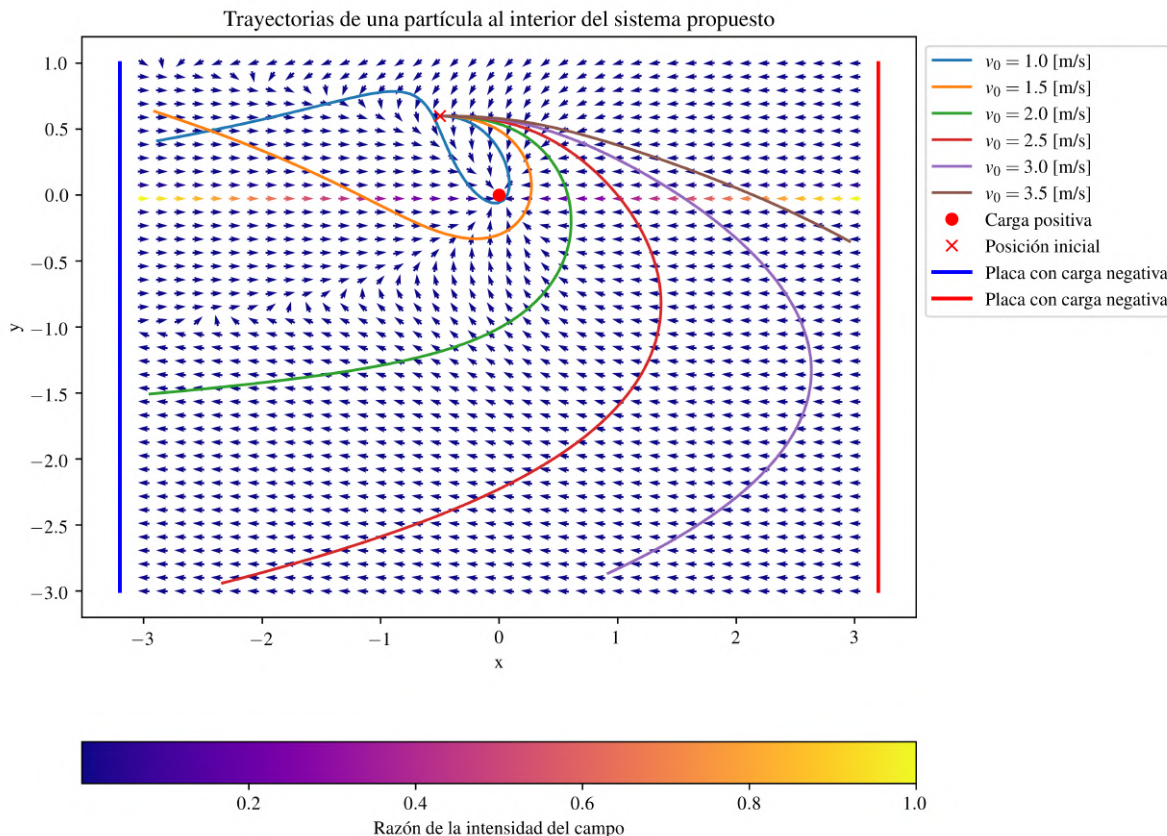


Figura 3.8: Sistema propuesto para ejemplificar como una espira afecta en la trayectoria del electrón a diferentes velocidades iniciales. La intensidad de campo eléctrico denotada en la barra de color es la razón entre la intensidad en cada punto y la de intensidad de mayor magnitud en todo el espacio. (Elaboración propia)

se requería una alta ganancia, en otras palabras, que la amplitud sea magnificada en gran medida.

### 3.3. Problema del ruido electrónico de carácter fundamental: La aproximación de Schottky

La calidad de los amplificadores de válvula fueron mejorando con el paso del tiempo, como a su vez lo hacían las exigencias del mercado, llevando a cabo la adición de nuevas rejillas con el fin de filtrar ciertos efectos indeseados. Uno de los investigadores más reconocidos frente a la investigación de dichas mejoras en las válvulas termoiónicas sería el físico Walter Schottky (1886 - 1976), el cual era un renombrado investigador de fenómenos de emisión que se encontraba trabajando en la empresa Siemens.

Schottky al intentar aislar gran cantidad de los ruidos al interior del mecanismo, noto que a pesar de usar arreglos con amplificadores de válvula recién fabricados y con un control de calidad exhaustivo, en un ambiente libre de vibraciones mecánicas y oscilaciones electromagnéticas provenientes

de fuentes externas, seguía existiendo la presencia de una fuente de ruido en los amplificadores imposible de suprimir (Johnson, 1971). Dicha fuente, Schottky la dota de un carácter fundamental concebido desde la naturaleza discreta de la materia, como lo asegura al inicio de su artículo en 1918, “*Sobre las fluctuaciones de corriente espontaneas en varios conductores eléctricos*”:

La intención del siguiente texto es demostrar ciertos límites infranqueables para la amplificación mediante tubos de cátodo caliente y de descarga gaseosa. El primer obstáculo infranqueable viene dado curiosamente por el tamaño del cuanto elemental de electricidad. El movimiento térmico de la electricidad constituye otro límite, que en la mayoría de los casos parece situarse por encima del primero. (Schottky, 2018, p 1)

Fueron identificadas dos fuentes de señales estocásticas: la primera como se ha comentado con anterioridad, se encontraría en el movimiento aleatorio de los portadores de carga y su influencia sobre los electrones de conducción en los materiales, al cuál llamaremos *ruido térmico*, y el segundo, denominado como *ruido de disparo*, se encontraría en la emisión termiónica entre el filamento y el cilindro de aluminio, debido a que la velocidad inicial y el primer instante de su movimiento en los electrones que hacen parte de la nube electrónica son variables aleatorias, ya que nos es imposible por lo tanto, definir las condiciones iniciales de cada uno de los electrones, siendo únicamente previsible la probabilidad de que un conjunto  $N$  de electrones se desplacen entre los dos conductores al interior del bulbo de vidrio a lo largo de un intervalo de tiempo  $\Delta t$ .

Schottky en el artículo de 1918, genera un estudio acerca de los osciladores eléctricos o circuitos  $LC$ , los cuales se encuentran compuestos de un capacitor  $C$  y un inductor  $L$ , bajo estas señales eléctricas con un comportamiento aleatorio. El caso del *ruido térmico* parte de la comparación entre el movimiento browniano y el comportamiento de la señal eléctrica bajo las condiciones propiciadas por el movimiento de agitación en los portadores de carga; en esta situación la partícula se encuentra bajo la acción de una fuerza restauradora al interior del fluido, teniendo en cuenta que la fuerza de arrastre en la partícula es análoga a la acción disipativa de la resistencia eléctrica  $R$  propia de cualquier conductor eléctrico en un oscilador eléctrico y los impulsos aleatorios de las moléculas que componen el fluido sobre la partícula son pequeños impulsos que experimentan los cuerpos cargados del conductor cuando estos cambian su configuración, o en palabras de Schottky “*las energías alternantes de las partículas eléctricas elementales*”, provenientes de un intercambio de energía con el resto del sistema. Dado este análisis se debe tener en cuenta que el circuito se encuentra a su vez inmerso en un entorno con unas condiciones termodinámicas establecidas. Estos dos intercambios de energía permiten construir un escenario de equilibrio termodinámico entre entorno-circuito, donde el caso más probable se encuentra cuando ambas variaciones energéticas son equivalentes (Schottky, 2018).

Este sistema tal como construye la descripción Schottky, tiene variaciones solamente en su fase debido a que aunque existan aportes significativos, en promedio, la energía es constante en el circuito debido a la presencia de un fenómeno de resonancia entre las fluctuaciones y la disipación propia de la resistencia. Sin embargo, esta analogía propuesta solo funciona para oscilaciones eléctricas de frecuencias bajas, donde es posible utilizar el teorema de equipartición de la energía para los grados de libertad del sistema, en este caso electromagnéticos, y hallar la potencia esperada del mismo bajo dichas condiciones de ruido.

En este caso, la energía de un circuito  $LC$  esta dado por la siguiente expresión:

$$E = \frac{L}{2}I^2(t) + \frac{Q^2(t)}{2C} \quad (3.4)$$

Dado que cada término de la expresión es un grado de libertad del circuito, se puede considerar que se encuentran ligados a potenciales que permiten el movimiento de los cuerpos cargados al interior del material. Así, si se calcula el valor esperado en la expresión anterior:

$$k_B T = L \langle I^2(t) \rangle \quad (3.5)$$

El término del lado izquierdo de la anterior expresión hace referencia a la energía térmica del circuito  $LC$ , así, este es el aporte energético proveniente de las fluctuaciones (La corriente eléctrica  $\langle I^2(t) \rangle$ ) después de un tiempo significativamente extenso. Debido a que el sistema se encuentra en equilibrio termodinámico, la potencia esperada que es disipada por el circuito  $\langle P_c \rangle$ , debe ser igual a la potencia esperada de la fuente ruidosa  $\langle P_R \rangle$ , de modo que el intercambio de energía entre sistema y entorno sean coherentes con la condición termodinámica entre ellos. Por lo tanto:

$$\langle P_R \rangle = R \langle I^2(t) \rangle \quad (3.6)$$

Y finalmente, el valor final hallado por Schottky de la potencia esperada del ruido es la siguiente:

$$\langle P_R \rangle = \frac{Rk_B T}{L} \quad (3.7)$$

Donde la razón entre  $L$  y  $R$  definido como el tiempo de decaimiento  $\tau_T$ , el cuál se encuentra directamente relacionado con las frecuencias audibles del sistema. Puntualmente Schottky especifica el rango de potencia audible en el cuál podría encontrarse el ruido térmico en caso de hacer la amplificación adecuada:

Una potencia de  $10^{-7}$  [W] es fácilmente audible para frecuencias adecuadas en un teléfono, y una  $10000 \times$  amplificación lineal, es decir, una amplificación de potencia  $10^8$  veces no es nada extraordinario, por lo que se puede observar fácilmente con una potencia inicial de  $10^{-15}$  [W].[...] Un movimiento térmico de electricidad el cuál corresponde a una potencia inicial de  $10^{-17}$  [W] se encuentra relativamente cerca al límite observable. (Schottky, 2018, p 2)

En este caso es importante comentar que antes del circuito amplificador, esta resistencia  $R$  e inductancia  $L$  serán propios del circuito oscilante desde el cuál ingresa la señal al amplificador, los cuales cambian las frecuencias de dicha señal, por lo tanto, si se cambia la disposición del circuito o el entorno se encuentra a temperaturas mayores, esté tipo de ruido se hará aún más presente. Sin embargo, como comenta Schottky en el artículo, por si solo el ruido térmico se encuentra en un límite observable y requiere de una segunda fuente de ruido para que sea audible en los sistemas telefónicos que como se ha comentado anteriormente es el *ruido de disparo*.

Este *ruido de disparo* es propio de los fenómenos de emisión, donde los cuerpos cargados se encuentran bajo la presencia de una diferencia de potencial externa lo suficientemente alta, el cual aumenta el camino libre medio de dichos cuerpos hasta tal punto que logran atravesar gran parte

de la región intermedia donde se encuentra aplicado el campo eléctrico externo sin colisionar con otro cuerpo cargado. Este caso se encuentra al interior de las válvulas de vacío, como se ha explicado anteriormente, donde los dos electrodos tienen una gran diferencia de potencial entre ellos (Schottky, 2018).

Para modelar el fenómeno se realiza el conteo de cargas que llegan del cátodo al ánodo en un intervalo de tiempo  $\Delta t$  fijo. De acuerdo a ello, se tiene en cuenta que el número de cargas es una variable aleatoria discreta positiva, que al darse en intervalos fijos de tiempo, sigue la *distribución de Poisson* (ICAP, 2023), donde la probabilidad  $p(n)$  de contar un número  $n$  de cargas en un tiempo  $\Delta t$  se expresa de la siguiente manera:

$$p(n) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} \quad (3.8)$$

Siendo  $\lambda$  para la distribución, su valor promedio y varianza. Por lo tanto, si se halla el valor de  $\lambda = \langle n \rangle$  en el dispositivo, es posible determinar la corriente eléctrica promedio  $\langle I \rangle$ , teniendo en cuenta que la corriente eléctrica  $I$  estará definida por el número de cargas  $n$ , con magnitud  $|e|$ , atraviesan la región mencionada en un tiempo  $\Delta t$ :

$$\langle I \rangle = \left\langle \frac{en}{\Delta t} \right\rangle = \frac{e \langle n \rangle}{\Delta t} \quad (3.9)$$

Así, si se tiene en cuenta que el promedio del cuadrado de la corriente eléctrica  $I^2$ :

$$\langle I^2 \rangle = \left\langle \frac{|e|^2 n^2}{[\Delta t]^2} \right\rangle = \frac{|e|^2 \langle n^2 \rangle}{[\Delta t]^2} \quad (3.10)$$

Es posible hallar las varianzas de la corriente eléctrica  $\langle\langle I^2 \rangle\rangle$ , será directamente proporcional a la varianza del número de cargas  $\langle\langle n^2 \rangle\rangle$ , como se observa a continuación:

$$\langle\langle I^2 \rangle\rangle = \frac{|e|^2}{[\Delta t]^2} [\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2] = \frac{|e|^2 \langle\langle n^2 \rangle\rangle}{[\Delta t]^2} \quad (3.11)$$

Finalmente, si se tiene en cuenta que el número de cargas contadas  $n$  sigue la *distribución de Poisson*, entonces:  $\langle\langle n^2 \rangle\rangle = \langle n \rangle$ :

$$\langle\langle I^2 \rangle\rangle = \frac{|e|^2 \langle n \rangle}{[\Delta t]^2} \quad (3.12)$$

Tal que, es posible evidenciar que la varianza de la corriente eléctrica  $\langle\langle I^2 \rangle\rangle$  será proporcional al promedio de la corriente eléctrica  $\langle I \rangle$  (van Rijn, 2019; Salamanca, s.f.):

$$\langle\langle I^2 \rangle\rangle = \frac{e}{[\Delta t]} \langle I \rangle \quad (3.13)$$

Este resultado, permite a Schottky al finalizar su artículo realizar la siguiente afirmación:

En este grupo de fenómenos, que se resumen bajo el nombre de efecto de disparo, las fluctuaciones promedio de la corriente están determinadas por el número de cargas elementales mutuamente independientes, en el caso más simple por el tamaño del

cuanto elemental de electricidad. Para un periodo  $\Delta t$ , determinamos por cálculo aproximado la amplitud de una corriente  $\sqrt{\langle I^2 \rangle}$  que varía con el tiempo con periodo  $\Delta t$  que está contenida en una corriente de descarga promedio  $\langle I \rangle$  como  $\sqrt{e \langle I \rangle \Delta t}$ , donde  $e$  significa la carga transportada de un electrodo al otro por un proceso elemental independiente. (Schottky, 2018, p 10)

A partir del enunciado y la demostración realizada, es posible afirmar entonces, que las variaciones arbitrarias experimentadas son consecuencia directa del carácter discreto de la carga, ya que permite definir la corriente eléctrica a partir del conteo de cuerpos en vez de hacer uso de la analogía clásica expresada desde la mecánica del medio continuo, que puntualmente en el *ruido de disparo* será proporcional a la amplitud de dichas variaciones de la corriente eléctrica promedio medida. La anterior afirmación significa que entre mayor sea el valor de la corriente eléctrica será más probable observar fluctuaciones en la medida de nuestra señal eléctrica después del paso a través de un triodo. Además, considerando que  $n$  toma valores bastante grandes, y por el contrario  $\Delta t$  tendrá un valor muy pequeño, es posible aproximar el comportamiento de la *Distribución de Poisson* a una *Distribución normal* bajo la condición de tener un promedio con un valor significativamente grande, para los valores hallados de la amplitud de las fluctuaciones en la corriente eléctrica debido a dicho aporte (Filmus, 2010). Este cambio se realiza recordando que en el teorema del límite central, como hace evidente Filmus, hay una dependencia en la convergencia basada en la relación entre las colas de la distribución y la magnitud de su promedio:

La forma exacta de convergencia no es solo una sutileza técnica: las sumas normalizadas no convergen uniformemente a una distribución normal. Esto significa que las colas de la distribución convergen más lentamente que su centro. (Filmus, 2010)

Teniendo en cuenta esta consideración, en el caso particular del ruido de disparo se realiza este cambio, ya que el número de electrones involucrados en este fenómeno es muy alto, y permite que las colas de la distribución en ambos sentidos sean aproximadamente equivalentes, la cuál es una situación particular que no se puede aplicar a todos los fenómenos.

Estas dos descripciones influyen en la comunidad científica (al menos desde una perspectiva aplicada), ya que lleva a varias empresas construir experimentos en los cuales sea medido de forma sistemática cada uno de estos ruidos al interior de los circuitos, y de esta manera corroborar los resultados obtenidos, generalizando las expresiones dadas, ya que la potencia calculada solo se encuentra restringida a un circuito *RLC*. Entre estos investigadores, resaltan al interior de la empresa American Telephone and Telegraph Company (AT&T), los físicos e ingenieros John B. Johnson y Harry Nyquist frente a la investigación del *ruido térmico*. Puntualmente, Johnson por el diseño de experimentos precisos que definieron una ley experimental para el *ruido térmico*, y Nyquist por el posterior desarrollo a partir del análisis de una línea de transmisión y los experimentos de Johnson.

### 3.4. Acercamiento del ruido térmico por John B. Johnson y Harry Nyquist

Johnson llevó a cabo una gran cantidad de pruebas que, aunque consideradas “sencillas”, permitieron definir las variables y las cantidades proporcionales a la amplitud del *ruido térmico* generado

por un elemento resistivo (Johnson, 1971). En particular, tras caracterizar la ganancia de cien triodos de distintos tipos desde 1925, en 1928 diseñó una disposición experimental compuesta por una impedancia  $Z(\omega)$  en función de la frecuencia angular  $\omega$ <sup>4</sup> —es decir la razón entre la diferencia de potencial y la corriente eléctrica al interior de una configuración, generalmente un circuito lineal formado por capacitores, resistencias e inductores que actúan como filtros— conectada a un amplificador de triodo  $A$ , cuya ganancia había sido previamente caracterizada mediante su admitancia transferida  $Y(\omega)$ . Este amplificador, a su vez, estaba conectado a un amperímetro de termopar  $J$ , un dispositivo que, gracias a una unión bimetálica sometida a una diferencia de temperatura, permite generar una diferencia de potencial medible (Johnson, 1928).

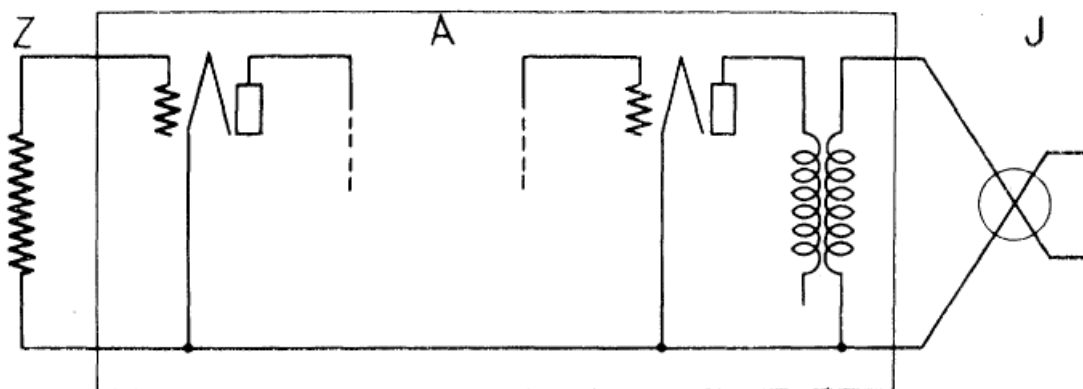


Figura 3.9: Diagrama simplificado del circuito por John B. Johnson en Agitación térmica de la electricidad en conductores (1928)

Desde el principio de su artículo publicado en 1928 y titulado “*Agitación térmica de la electricidad en conductores*”, Johnson comenta los aspectos ya conocidos frente al ruido por parte de los técnicos especializados en la construcción de amplificadores, como el incremento de su amplitud a medida que la resistencia  $R$  de entrada o la temperatura absoluta  $T$  del conductor aumentaba. Sin embargo, dicha amplitud, resulta ser independiente del tamaño, forma o material del conductor (Johnson, 1928). Así, a partir del análisis del circuito, Johnson define en su artículo el promedio la corriente eléctrica cuadrática  $\langle I^2 \rangle$  medido en el termopar  $J$ , debido a la diferencia de potencial de ingreso proveniente del movimiento de agitación por parte de los portadores de carga en la parte real  $R(\omega)$  de la impedancia  $Z(\omega)$ :

$$\langle I^2 \rangle = \left( \frac{2k_B T}{\pi} \right) \int_0^\infty R(\omega) |Y(\omega)|^2 d\omega \quad (3.14)$$

Retomando el montaje propuesto, el amplificador  $A$  se encuentra compuesto por seis triodos acoplados con transformadores o por bobinas de choque y condensadores, a excepción de una etapa intermedia que se encuentra conectado por medio de un circuito resonante o un filtro pasa-bajas que permite limitar el rango de frecuencias por amplificar, o en otras palabras definir un *ancho de banda*  $\Delta f$ . Además, este sistema se encuentra encerrado por una cabina metálica elaborada para

<sup>4</sup>Recuerde que la relación entre la frecuencia angular y la frecuencia esta dada por la siguiente relación:  $\omega = 2\pi f$

evitar perturbaciones electromagnéticas y mecánicas, y dicho amplificador al final se encuentra acoplado con el termopar  $J$  por medio de un transformador (Johnson, 1928).

En principio, mide el promedio del potencial cuadrático de entrada  $\langle V^2 \rangle$  de entrada al amplificador, en otra palabras, de la diferencia de potencial producto de la parte real de la impedancia  $R(\omega)$  con diferentes materiales, variando el valor de la resistencia eléctrica  $R$  que no debe ser confundido con la resistividad de un material. Entre estos materiales uso resistencias electrolíticas hechas de soluciones acuosas, a partir de sales como  $\text{NaCl}$ ,  $\text{CuSO}_4$ ,  $\text{K}_2\text{CrO}_4$  y  $\text{Ca}(\text{NO}_3)_2$ , o filamentos sólidos de carbono, metales y cerámicas (Johnson, 1928, 1971).

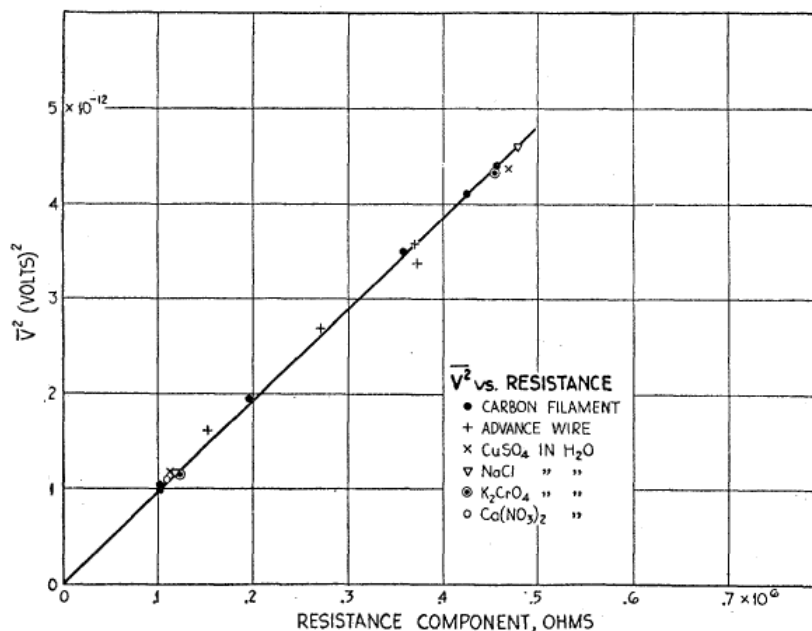


Figura 3.10: Voltaje cuadrático  $\langle V^2 \rangle$  [V] vs resistencia eléctrica  $R$  [ $\Omega$ ] en diferentes conductores por John B. Johnson en Agitación térmica de la electricidad en conductores (1928)

Como se puede observar en la gráfica 3.10 obtenida por Johnson, finalmente vuelve a confirmar que la amplitud del ruido no se encuentra ligado a la forma o la resistividad del material directamente, sino de la resistencia eléctrica  $R$ , por lo tanto, si tengo dos materiales diferentes, por ejemplo carbono y cobre, si las dimensiones del material permiten que ambas resistencias eléctricas  $R$  en el circuito sean equivalentes, la amplitud del ruido térmico será indistinguible en ambos casos.

Este estudio se realizó también con una impedancia  $Z(\omega)$  propia de un filtro  $RC$ , donde dicho circuito se encuentra en paralelo y con una frecuencia fija  $f_0$ , obteniendo comportamientos proporcionales a la parte real  $R(\omega_0)$  de dicha impedancia (Johnson, 1928), descrita en la ecuación 3.15, como se observa en la figura 3.11.

$$R(\omega_0) = \frac{R_0}{1 + \omega_0^2 C^2 R_0^2} \quad (3.15)$$

Así, finalmente Johnson determina el valor de la potencia aparente  $P$ , proporcional a la razón entre la diferencia de potencial cuadrática  $\langle V^2 \rangle$  y la parte real de la impedancia  $R(\omega)$  con respecto a la

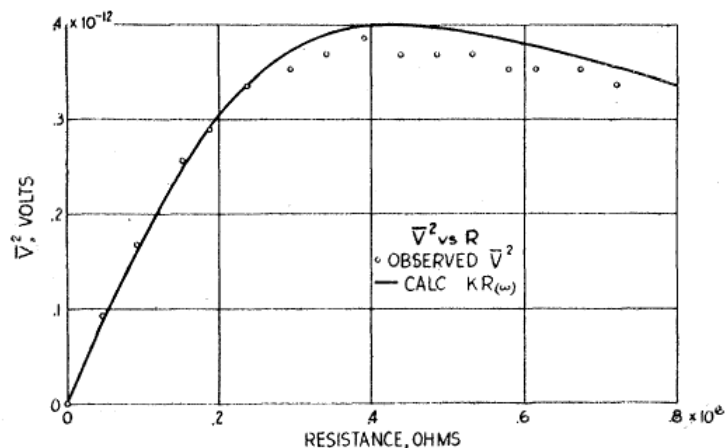


Figura 3.11: Voltaje cuadrático  $\langle V^2 \rangle$  [V] vs la componente real de la impedancia  $R(\omega_0)$  [ $\Omega$ ] en un circuito  $RC$  paralelo con una capacitancia  $C = 577$  [ $\mu C$ ] y  $f_0 = 635$  [ $Hz$ ] por John B. Johnson en Agitación térmica de la electricidad en conductores (1928)

temperatura de las resistencias, en un rango desde los  $93.15^\circ K$  a  $363.15^\circ K$ , se obtiene una relación lineal que corresponde con los resultados obtenidos por Schottky una década antes. Resultado que le permite desarrollar un método alternativo para hallar el valor de la constante  $k_B$  con bastante exactitud (Johnson, 1928).

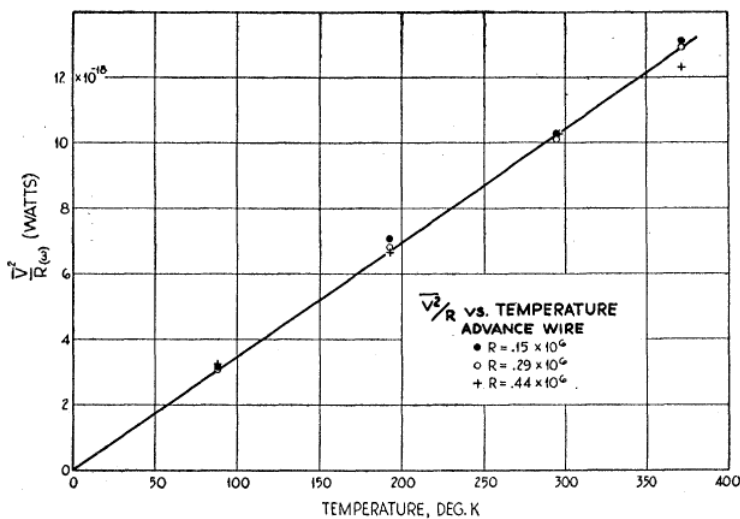


Figura 3.12: Potencia aparente  $P$  [W] vs la temperatura de la resistencia  $T$  [ $^\circ K$ ] por John B. Johnson en Agitación térmica de la electricidad en conductores (1928)

Esto permite a Johnson definir una expresión para la potencia aparente en el circuito debido al *ruido térmico*, si la admitancia  $Y(\omega)$  y la impedancia  $Z(\omega)$  a una frecuencia fija, en función de la temperatura del conductor y el ancho de banda  $\Delta f$ , que nuevamente corresponde con los valores hallados por Schottky, en el cuál su valor es independiente de la impedancia  $Z(\omega)$ .

$$P = 4k_B T \Delta f \quad (3.16)$$

Estos resultados dados por Johnson convergen en una serie de sugerencias para la construcción de dispositivos donde se requieren impedancias previas a un amplificador, los cuales a su vez revelan las tres cantidades que son relevantes en el cálculo de la amplitud del *ruido térmico* (Dörffel, 2012), tal como expresa Johnson:

Hacia el problema de reducir el ruido en los amplificadores causado por la agitación térmica, la teoría hace tres sugerencias. La primera es el uso de una baja resistencia de entrada. Este factor, sin embargo, no suele estar enteramente a nuestra disposición, estando influenciado por el aparato que suministra el pequeño voltaje que se va a amplificar. En segundo lugar, la resistencia de entrada puede mantenerse a baja temperatura. Este expediente, también, tiene limitaciones prácticas ya que los elementos que componen la resistencia de entrada no siempre pueden confinarse convenientemente en un espacio pequeño. La tercera forma posible de reducir el ruido consiste en hacer que el rango de frecuencia del sistema no sea mayor de lo que es esencial para la transmisión adecuada del voltaje de entrada aplicado. (Johnson, 1928, p 107)

Así con este arduo trabajo experimental de fondo, Nyquist realiza el análisis termodinámico de una línea telefónica con el fin de deducir las relaciones encontradas por Johnson en su artículo publicado en 1928 y titulado “Agitación térmica de cargas eléctricas en conductores”.

Para ello, Nyquist considera dos conductores, 1 y 2, con la misma resistencia eléctrica  $R$  y a la misma temperatura  $T$  a una distancia  $l$  entre ellos. De acuerdo a este esquema, el conductor 1 debido a la agitación térmica en los portadores de carga se produce una corriente eléctrica que es equivalente a lo largo de ambas resistencias y a su vez, transfiere una potencia al conductor 2, calentándola. Este proceso se genera de la misma forma en el sentido contrario (Nyquist, 1928). Sin embargo, el segundo principio de la termodinámica no permite que se calienten indefinidamente los dos conductores debido a que se encuentran en equilibrio térmico, y por ende, la potencia transferida del conductor 1 al conductor 2 es equivalente a la potencia transferida del conductor 2 al conductor 1, y por ende no existe un aumento de temperatura, en promedio, de ambos conductores (Dörffel, 2012).

Ahora, dicha condición de equilibrio se debe cumplir para la energía transferida en cualquier rango de frecuencias, ya que, como advierte Nyquist, si el sistema se encuentran en equilibrio térmico, más sin embargo se tiene un conductor que opera a un mayor rango de frecuencias  $\Delta f$  tal que transfiere más energía de la que recibe por ejemplo el conductor 1 con respecto al conductor 2, si se añade un circuito oscilante  $LC$  que entra en resonancia dentro del rango de frecuencias propio del conductor 1 en medio de ambos conductores, la energía transferida del conductor 2 al conductor 1 será mayor, debido a que si el circuito oscilante entra en resonancia, la potencia transferida al sistema  $LC$  será mayor por parte del conductor 1 que el conductor 2, por lo tanto, el equilibrio inicialmente propuesto se quebraría, y no es posible ya que ambos conductores se encuentran a la misma temperatura (Nyquist, 1928).

Ahora, ya que al interior del conductor propuesto inicialmente los portadores de carga, que pueden ser entendidos como osciladores eléctricos, al vibrar emiten ondas electromagnéticas que se

encuentran confinadas a lo largo de la línea de transmisión. Dichas ondas electromagnéticas que se encuentran al interior de la línea de transmisión al estar confinadas, podrán ser estudiadas como una onda estacionaria de forma análoga a una onda al interior de un tubo cerrado. Debido a ello, se propone una frecuencia fundamental  $f(1)$  de la cual se definen un número infinito de frecuencias naturales  $f(n)$  propias de una onda estacionarias (Nyquist, 1928):

$$f(n) = \frac{nv}{2l} \quad (3.17)$$

En la anterior expresión  $v$  es la velocidad de fase de la onda estacionaria. Ahora, si se considera un rango de frecuencias  $\Delta f$ , es posible hallar el número de modos vibración en el sistema:

$$\Delta n = \frac{2l\Delta f}{v} \quad (3.18)$$

Según Nyquist, si la línea de transmisión es lo suficientemente larga es posible definir una energía promedio  $\langle E_i \rangle$  a través del teorema de equipartición de la energía para cada una de las ondas electromagnéticas confinadas, ya que  $\Delta n$  sería un número muy grande de modos vibración que podría ser representado a partir de sus grados de libertad. En este caso, se toman dos grados de libertad electromagnéticos de la onda electromagnética (Dörffel, 2012), tal que la energía total promedio de las vibraciones es igual a:

$$\langle E \rangle = \left\langle \sum_{i=a}^b E_i \right\rangle = \langle E_i \rangle \Delta n \approx \frac{2lk_B T \Delta f}{v} \quad (3.19)$$

De esta manera, si el tiempo de transmisión a lo largo de la línea como:  $t = v/l$ , entonces la potencia promedio en una sola línea será igual a:

$$\langle P \rangle = k_B T \Delta f \quad (3.20)$$

Por lo tanto, si la potencia promedio en ambas líneas es igual a  $2k_B T \Delta f$ , se puede definir la diferencia de potencial cuadrática promedio debido a la agitación térmica de los portadores de carga en cada una de las resistencias en el sistema, recordando que la impedancia del sistema es igual a  $2R$ :

$$\langle V^2 \rangle = 4Rk_B T \Delta f \quad (3.21)$$

Por lo tanto, la potencia disipada por cada una de las resistencias será igual a la expresión 3.16 hallada por Johnson, el mismo resultado hallado por Johnson a partir de la caracterización del circuito con un amplificador, y comprobado experimentalmente. Este resultado es generalizable a cualquier impedancia  $Z(\omega)$  conectada a una resistencia, siendo proporcional a la parte real de la impedancia  $R(\omega)$  la diferencia de potencial cuadrática promedio (Nyquist, 1928):

$$\langle V^2 \rangle = \left( \frac{2k_B T}{\pi} \right) R(\omega) \Delta \omega \quad (3.22)$$

Recordando que la admitancia de cualquier configuración  $Y(\omega)$  es el inverso de la impedancia, entonces es posible definir:  $\langle I^2 \rangle = \langle V^2 \rangle |Y(\omega)|^2$ . Tomando muy pequeños valores de frecuencia angular e integrando de 0 a  $\infty$ , obtenemos la misma expresión 3.14 hallada por Johnson (Nyquist,

1928).

La diferencia de potencial cuadrático dada por la ecuación 3.23 es resultado de asumir el sistema como un conjunto de osciladores eléctricos, por lo tanto, lo define como un cuerpo negro descrito a partir de un gas de fotones en equilibrio termodinámico que sigue la distribución de Bose-Einstein y por ende, cambia el valor de la energía promedio de acuerdo al valor esperado del número de fotones en un estado dado (Rochín, 2015), especialmente frente a frecuencias muy altas o temperaturas muy bajas (Nyquist, 1928). Así, dicha diferencia de potencial cuadrático puede definirse de la siguiente manera:

$$\langle V^2 \rangle = 4R(f) \frac{h\Delta f}{\exp\left(\frac{hf}{k_B T}\right) - 1} \quad (3.23)$$

La anterior expresión derivada por el mismo Nyquist ofrece un entendimiento más profundo del *ruido térmico*, ya que la relación entre radiación y materia, asumiendo niveles discretos y una imagen discreta de la materia, permite definir al interior del conductor un gas de fotones producto de dichos osciladores eléctricos, y que constantemente cambia su número debido a que los fotones emitidos interactúan con las moléculas, siendo absorbidos nuevamente. Este proceso de absorción-emisión cuando se encuentra en equilibrio termodinámico el sistema, significa que la cantidad energía electromagnética por unidad de volumen es idéntica a lo largo del espacio y es independiente de su polarización (Rochín, 2015). Por lo tanto, desde esta visión se podría definir la diferencia de potencial cuadrático a partir de las fluctuaciones energéticas del gas de fotones al interior del material conductor debido a su interacción con las moléculas que lo componen y a efectos cuánticos que alteran dicho equilibrio.

A modo de epílogo del recorrido histórico, Las ideas de Nyquist junto al riguroso trabajo experimental de Johnson, permitirían construir mejores caracterizaciones en sistemas fluctuantes, especialmente cuando estos se encuentran en equilibrio termodinámico, con aplicaciones en la biología, especialmente en la descripción de la dinámica de proteínas y sus mecanismos de conversión de energía (G., 2019). Paralelamente, la investigación del ruido térmico a bajas temperaturas será una construcción de interés, ya que, permitiría la medición de la potencia proveniente de la *radiación del fondo cósmico de microondas* a partir de un parámetro físico en las antenas conocido como *temperatura de antena*. Ya que, primero se teorizó la medida de radiación térmica a unas frecuencias determinadas por R. H Dicke en 1946 a partir de la conexión entre el *ruido térmico* y la descripción del cuerpo negro, y en 1964, es medido directamente la potencia asociada a la *radiación del fondo cósmico de microondas* de un manera no intencionada por los investigadores Arno Penzias y Robert Woodrow Wilson (Wilson, 1978). Todo esto sin olvidar la influencia de estas contribuciones en la física experimental que requiere amplificar señales eléctricas con una energía muy pequeña provenientes de diferentes fuentes, como puede ser la detección de ondas gravitacionales, recordando que el *ruido térmico* no es la única fuente de error en las medidas (Cella, 2017).

Retomando los resultados propios de la descripción del ruido térmico, estos pueden ser deducidos también a partir del uso de ecuaciones diferenciales estocásticas, permitiendo describir incluso en tiempos muy cortos el sistema, ampliando su rango de estudio a regímenes transitorios, y ofreciendo una perspectiva más detallada de su dinámica influenciada por las fluctuaciones aleatorias.

Dichos tratamientos en la teoría serán realizados a lo largo de la siguiente sección.

### 3.5. Dos ejemplo prácticos del ruido térmico en circuitos lineales

Dado el contexto histórico acerca de la idea de ruido, específicamente en los circuitos eléctricos. Se hará una revisión de dos sistemas clásicos en el análisis de circuitos: el circuito  $RC$  y  $RLC$  bajo las condiciones de ruido térmico explicitados. Sin embargo, para ello se hará uso de las ecuaciones de Langevin y el *proceso de Ornstein-Uhlenbeck*, tal que el análisis cuando se toma tiempos muy grandes, o  $t \rightarrow \infty$ , converga a los resultados de los autores en el primer tercio del siglo XX.

#### 3.5.1. El circuito RC con ruido térmico

Un circuito  $RC$  es un circuito compuesto por una resistencia  $R$  y un capacitor  $C$ , que suele ser utilizado en la creación de filtros pasa-bajas, filtros pasa-altas y con ayuda de interruptores, sean mecánicos o electrónicos, osciladores a partir de su característica curva (*Salamanca, s.f.*).

Con una resistencia ideal  $R$ , o en otras palabras una resistencia sin presencia de ruido térmico, la ecuación diferencial que sigue el circuito con una capacitancia  $C$ , junto a una fuente  $V(t)$ , y es igual a:

$$R \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{Q(t)}{C} = V(t) \quad (3.24)$$

Sin embargo, si se añade el ruido térmico, o diferencia de potencial estocástica  $V_{est}(t)$ , debido a la inclusión de una resistencia  $R$  no ideal, y desconectamos la fuente  $V(t)$ , la carga eléctrica  $Q(t)$  se convierte en una variable aleatoria, y por lo tanto, se obtiene una ecuación diferencial estocástica, recordando que debe ser descrita a partir de un muy pequeño  $\Delta t$ .

$$Q(t + \Delta t) - Q(t) = -\frac{1}{RC}Q(t)\Delta t + \frac{V_{est}(t)}{R}\Delta t \quad (3.25)$$

Debido a que el flujo de cargas al interior de la resistencia en promedio será igual a cero, por lo tanto,  $\langle V_{est}/R \rangle = 0$ , y como consecuencia de que ninguna medida de flujo en un tiempo  $t$  afecta a las demás medidas  $t'$ , es posible introducir el *propagador de Markov* en la ecuación diferencial:

$$Q(t + \Delta t) - Q(t) = -\gamma Q(t)\Delta t + \sqrt{\beta^2 \Delta t} N_t^{t+\Delta t}(0, 1) \quad \rightarrow \quad \gamma = \frac{1}{RC} \quad (3.26)$$

Al igual que la partícula browniana analizada en el capítulo 2, el modelo que rige a la carga eléctrica en el sistema será una distribución gaussiana, debido a los mismos argumentos: (1) En un tiempo  $t$ , la carga eléctrica almacenada en el capacitor  $C$ , será producto de la suma de una gran cantidad de variables aleatorias, los pequeños aumentos o disminuciones en un tiempo  $\Delta t$ , y (2) La independencia estadística entre estos pasos, que permiten aplicar el *Teorema central del límite*.

Con el fin de no extender el documento con los cálculos realizados el cálculo detallado se encontrará en el anexo B.2. Con esta aclaración realizada, se procede a realizar el análisis de acuerdo

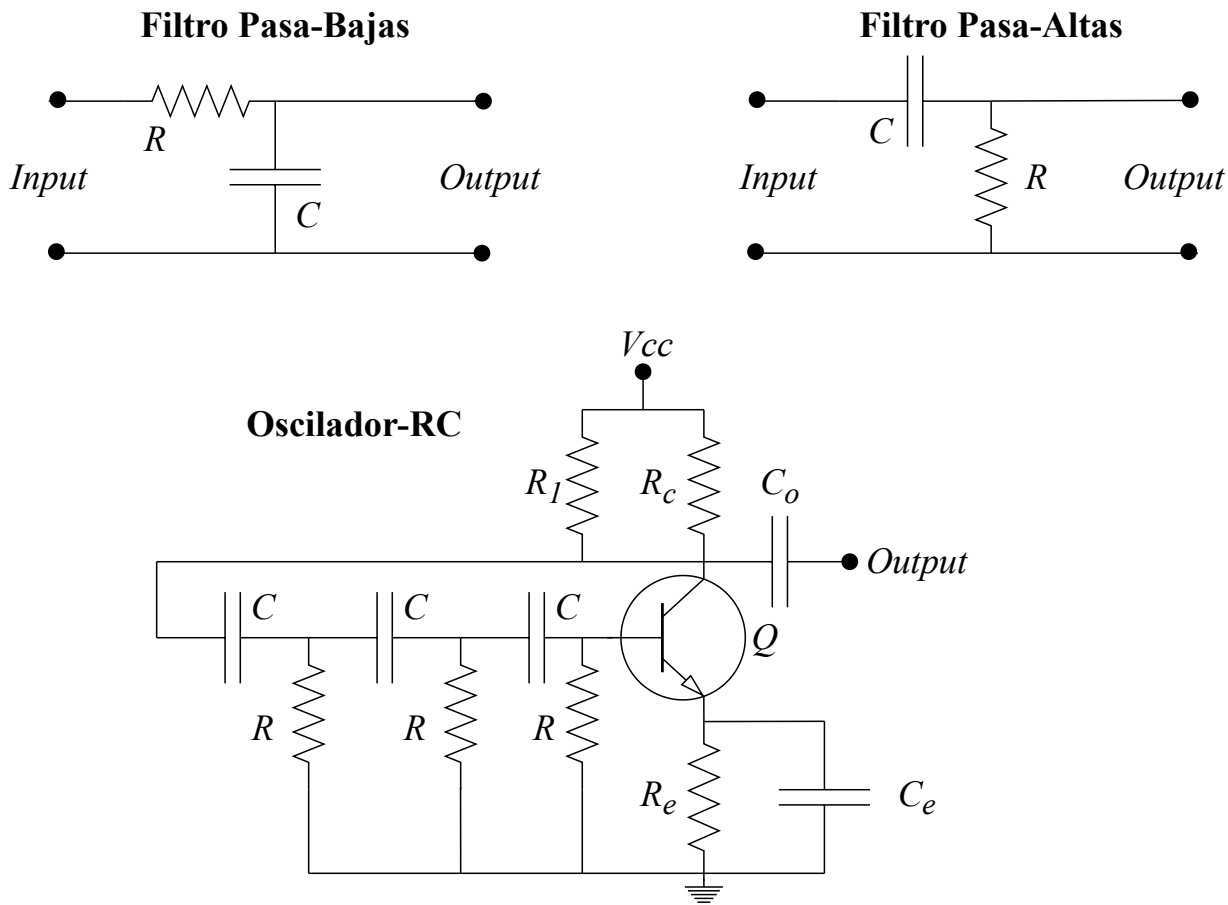


Figura 3.13: Aplicaciones del circuito  $RC$ . (Elaboración propia)

a los resultados hallados. En principio, se exponen la función para el valor esperado de la carga eléctrica hallada con la ecuación diferencial anteriormente descrita, asumiendo como condición inicial  $Q(0) = Q_0$ :

$$\langle Q(t) \rangle = Q_0 e^{-\gamma t} \quad (3.27)$$

La varianza de la carga eléctrica almacenada en el capacitor:

$$\langle\langle Q^2(t) \rangle\rangle = \frac{\beta^2}{2\gamma} (1 - e^{-2\gamma t}) \quad (3.28)$$

Por último, la distribución de probabilidad asociada a la carga eléctrica

$$p(Q, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\frac{\beta^2}{2\gamma})(1 - e^{-2\gamma t})}} \exp\left(\frac{-(Q - Q_0 e^{-\gamma t})^2}{2(\frac{\beta^2}{2\gamma})(1 - e^{-2\gamma t})}\right) \quad (3.29)$$

Como se puede denotar, las ecuaciones del sistema, por ende sus gráficas, para el valor esperado  $\langle Q(t) \rangle$ , la varianza  $\langle\langle Q^2(t) \rangle\rangle$  y la distribución de probabilidad  $p(Q, t)$ , son similares a las descritas para la velocidad de la partícula browniana (Observe: 2.35, 2.41 y 2.42). Sin embargo, debido a

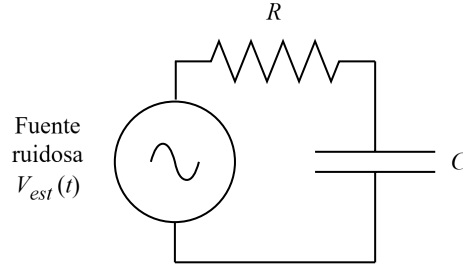


Figura 3.14: Circuito RC con una fuente ruidosa. (Elaboración propia)

que existe un cambio en el factor  $\gamma$ , los valores propios de la amplitud de las fluctuaciones  $\beta$  y las condiciones sobre cada uno de los elementos del circuito si será particularizado.

En principio de forma análoga, se puede utilizar el teorema de equipartición de la energía para hallar el valor de la energía almacenada por el capacitor. Esto teniendo en cuenta que la varianza converge a un valor máximo  $\langle\langle Q^2(t) \rangle\rangle$ , mientras el valor esperado  $\langle Q(t) \rangle$  disminuye a cero cuando  $t \rightarrow 0$ . Así, el grado de libertad propio del circuito, dado por el potencial eléctrico al interior del condensador, reemplazando  $\gamma = 1/RC$  será igual a:

$$\frac{1}{2C} \left[ \lim_{t \rightarrow \infty} \langle\langle Q^2(t) \rangle\rangle \right] = \frac{\beta^2 R}{4} = \frac{k_B T}{2} \quad (3.30)$$

Tal que, la amplitud de las fluctuaciones es igual a:

$$\beta^2 = \frac{2k_B T}{R} \quad (3.31)$$

En este caso, la amplitud de las fluctuaciones es inversamente proporcional a la resistencia  $R$  del circuito. En principio esto se debe a que entre mayor es la resistencia, la curva característica del decaimiento o crecimiento de la corriente eléctrica  $I(t)$  será más pronunciada si la resistencia eléctrica es mayor. De esta manera, es posible definir la siguiente cantidad como:

$$\frac{\beta^2}{2\gamma} = k_B T C \quad (3.32)$$

Si se realiza un análisis de la potencia del circuito, es posible deducir que la potencia suministrada por el capacitor y la potencia disipada por la resistencia, deben ser iguales a la potencia propia de la fuente ruidosa:

$$P_C(t) + P_R(t) = P_{V_{est}}(t) \quad (3.33)$$

Sin embargo, en el análisis, el valor tomado será su promedio, en el cuál es posible deducir que:  $\langle P_{V_{est}}(t) \rangle = 0$ , debido a que la fuente ruidosa no suministra aumentos o descensos de energía en promedio. En consecuencia, la potencia promedio disipada por la resistencia  $\langle P_R(t) \rangle$  debe ser igual a la potencia suministrada por el capacitor  $\langle P_C(t) \rangle$ . Por lo tanto, si se tiene en cuenta la siguiente expresión:

$$\langle Q^2(t) \rangle = k_B T C (1 - e^{-\frac{2t}{RC}}) + Q_0^2 e^{-\frac{2t}{RC}} \quad (3.34)$$

Debido que el capacitor suministra corriente eléctrica a medida que cambia la diferencia de potencial al interior de sus placas, su potencia será positiva, por lo tanto, la función de potencia promedio estará dada por la siguiente expresión:

$$\langle P_C(t) \rangle = \frac{\langle Q^2(t) \rangle}{RC^2} = \frac{k_B T}{RC} (1 - e^{-\frac{2t}{RC}}) + \frac{Q_0^2}{RC^2} e^{-\frac{2t}{RC}} \quad (3.35)$$

Dicha potencia promedio  $\langle P_C(t) \rangle$ , si se toma un tiempo  $t \rightarrow \infty$ , en otras palabras cuando el sistema se encuentra en equilibrio termodinámico, entonces, su valor será igual a:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle P_C(t) \rangle = \frac{k_B T}{RC} \quad (3.36)$$

En este caso, se puede obtener la varianza de la diferencia de potencial  $\langle\langle V_C^2 \rangle\rangle$  en el capacitor  $C$ , por ende, la varianza de la diferencia de potencial  $\langle\langle V_R^2 \rangle\rangle$  que permite el flujo de electrones al interior de la resistencia  $R$ , teniendo en cuenta, primero que la carga promedio tiende a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ , por lo tanto, su contribución es nula, segundo, al ser un circuito en serie es posible deducir que la corriente eléctrica que fluye en todos los componentes de la malla tiene el mismo valor, y tercero la relación entre las potencias promedio de cada uno de los elementos del circuito:

$$\langle\langle V_C^2 \rangle\rangle = R \left[ \lim_{t \rightarrow \infty} \langle P_C(t) \rangle \right] = \frac{k_B T}{C} \quad (3.37)$$

Dada la potencia del sistema en equilibrio termodinámico, es posible afirmar que la potencia disipada por la resistencia, cuando  $t \rightarrow \infty$  será igual a:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle P_R(t) \rangle = R \left[ \lim_{t \rightarrow \infty} \langle\langle I^2(t) \rangle\rangle \right] = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle P_C(t) \rangle \quad (3.38)$$

La corriente eléctrica a lo largo del circuito  $RC$ , cuando el sistema se encuentra en equilibrio termodinámico es igual a:

$$\langle\langle I^2 \rangle\rangle = \frac{k_B T}{R^2 C} \quad (3.39)$$

Ahora, si se quiere avanzar en el análisis propuesto se hará uso de un resultado propio del circuito  $RC$  en el régimen de las frecuencias, utilizado generalmente para el cálculo de las frecuencias que permiten el paso al interior del circuito los filtros, o los desfases que permiten construir una señal senoidal en los osciladores  $RC$ , denominado como el *ancho de banda*  $\Delta f$ , ya nombrado anteriormente. El *ancho de banda*  $\Delta f$  es un intervalo de frecuencias que se catalogan como relevantes dentro de un sistema electrónico, debido a que se encuentran relacionados con una potencia de salida de interés en la medida. Para calcular dicho *ancho de banda*  $\Delta f$ , se realiza en principio el cálculo de la función de ganancia  $|H(\omega)|^2$  (Lundeberg, 2002), donde  $\omega$  es la frecuencia angular en la señal eléctrica debido a su paso en el circuito  $RC$ , se define a partir del modulo al cuadrado de la razón entre dos fasores que representan magnitudes al interior de un circuito. Puntualmente para este caso, el cociente esta dado entre la amplitud de la señal de entrada  $V_{input}(\omega)$  y de salida  $V_{output}(\omega)$  (Edminister, 1965; Salamanca, s.f.). En el caso puntual del circuito  $RC$ , la función de ganancia es:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \quad |H(f)|^2 = \frac{1}{1 + 4\pi^2 f^2 R^2 C^2} \quad (3.40)$$

Al integrar la función ganancia con respecto a la frecuencia desde 0 a  $\infty$ , se halla el ancho de banda:

$$\Delta f = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} |H(f)|^2 df = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + 4\pi^2 f^2 R^2 C^2} df = \frac{1}{4RC} \quad (3.41)$$

Si se reemplaza el valor  $(C)^{-1} = 4R\Delta f$  en las ecuaciones 3.37 y 3.39, se obtienen las ecuaciones halladas por Nyquist en 1928:

$$\langle\langle V_R^2 \rangle\rangle = 4k_B T R \Delta f \quad (3.42)$$

$$\langle\langle I^2 \rangle\rangle = \frac{4k_B T \Delta f}{R} \quad (3.43)$$

Desde el análisis del circuito partiendo desde su régimen transitorio nos permite observar el decaimiento exponencial del promedio en tiempos cortos, lo cuál conlleva a una rápida visualización del régimen estacionario, en el cuál el valor de la energía al interior del circuito es constante.

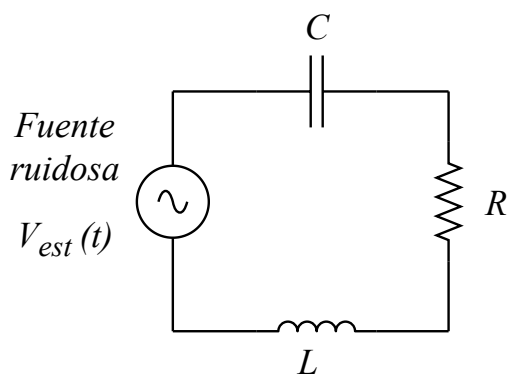


Figura 3.15: Circuito RLC. (Elaboración propia)

### 3.5.2. El oscilador electrónico amortiguado con ruido térmico

Por el contrario, un circuito  $RLC$  compuesto por una resistencia  $R$ , un capacitor  $C$  y un inductor  $L$ , ampliamente utilizado para la creación de filtros, osciladores de alta frecuencia y sintonizar señales a partir del fenómeno de resonancia. Dicha configuración sin la presencia de una diferencial de potencial, sea estocástica o determinista, se puede modelar a partir de las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$L \frac{dI(t)}{dt} + RI(t) + \frac{Q(t)}{C} = 0 \quad (3.44)$$

$$I = \frac{dQ(t)}{dt} \quad (3.45)$$

En este caso, al igual que en el montaje anterior se propone una resistencia no ideal, que proporciona una diferencia de potencial estocástica  $V_{est}(t)$  debido al movimiento de agitación. Tal que las ecuaciones diferenciales que modelan el sistema serán iguales a:

$$I(t + \Delta t) - I(t) = -\frac{R}{L}I(t)\Delta t - \frac{1}{LC}Q(t)\Delta t + \frac{V_{est}}{L}\Delta t \quad (3.46)$$

$$Q(t + \Delta t) - Q(t) = I(t)\Delta t \quad (3.47)$$

Donde  $\langle V_{est}/L \rangle = 0$ , debido a que en el circuito anterior el flujo de electrones neto es igual a cero en promedio y la autocorrelación de la diferencia de potencial estocástica es nula entre dos instantes de tiempo diferentes  $t$  y  $t'$ , se introduce el *propagador de Markov* en la ecuación diferencial:

$$I(t + \Delta t) - I(t) = -\gamma I(t)\Delta t - \omega^2 Q(t)\Delta t + \sqrt{\beta^2 \Delta t} N_t^{t+\Delta t}(0, 1) \rightarrow \gamma = \frac{R}{L}, \quad \omega^2 = \frac{1}{RC} \quad (3.48)$$

A diferencia de los modelos de los sistemas anteriores, en este tenemos dos ecuaciones diferenciales acopladas. Sin embargo, al igual que los anteriores casos, cada una de las variables  $Q(t)$  e  $I(t)$  se encuentran compuestas por la suma de una gran cantidad de pasos, cada uno realizado en un tiempo  $\Delta t$ , los cuales en si mismos son una variable aleatoria, permitiendo modelar las soluciones de ambas variables como una distribución gaussiana teniendo en cuenta el *teorema del límite central*.

Dicho esto con el fin de no extender el documento, al igual que en el circuito  $RC$ , se coloca a disposición del lector el cálculo detallado en el anexo B.3, y se describen las solución del sistema, dando cuenta de los aspectos más relevantes en ella. En este caso se hace uso de la siguiente condición:  $\gamma \leq 2\omega$ , el cuál define el sistema como un oscilador subamortiguado. En principio, los valores esperados de la carga  $Q(t)$  y la corriente eléctrica  $I(t)$  se expresan de la siguiente manera:

$$\langle Q(t) \rangle = \exp\left(-\frac{\gamma}{2} \cdot t\right) \left[ Q_0 \cos(\alpha t) + \left( I_0 + \frac{\gamma Q_0}{2} \right) \frac{\sin(\alpha t)}{\alpha} \right] \quad (3.49)$$

$$\langle I(t) \rangle = \exp\left(-\frac{\gamma}{2} \cdot t\right) \left[ I_0 \cos(\alpha t) - \left( Q_0 \omega^2 + \frac{I_0 \gamma}{2} \right) \frac{\sin(\alpha t)}{\alpha} \right] \quad (3.50)$$

Las varianzas de dichas cantidades se encuentran definidos por las siguientes expresiones:

$$\langle \langle Q^2(t) \rangle \rangle = \frac{\beta^2}{2\gamma\omega^2} + \left( \frac{\beta^2}{8\gamma\omega^2\alpha^2} \right) e^{-\gamma t} [-4\omega^2 + \gamma^2 \cos(2\alpha t) - 2\gamma\alpha \sin(2\alpha t)] \quad (3.51)$$

$$\langle \langle I^2(t) \rangle \rangle = e^{-\gamma t} \left[ \frac{\beta^2}{8\gamma\alpha^2} \right] [-4\omega^2 + \gamma^2 \cos(2\alpha t) - 2\alpha\gamma \sin(2\alpha t)] + \frac{\beta^2}{2\gamma} \quad (3.52)$$

Por último, la correlación entre ambas variables aleatorias es igual a:

$$\text{cov} \{Q(t), I(t)\} = \left( \frac{\beta^2 e^{-\gamma t}}{4\alpha^2} \right) [1 - \cos(2\alpha t)] \quad (3.53)$$

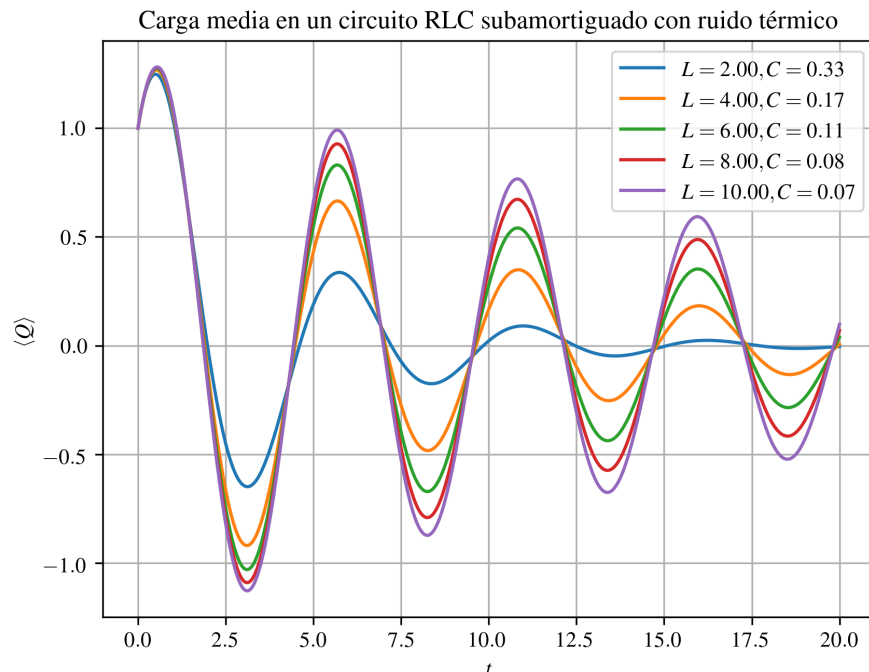


Figura 3.16: Carga promedio con valores  $Q_0 = 1 [C]$ ,  $I_0 = 1 [A]$  y  $R = 1 [\Omega]$ . (Elaboración propia)

Siendo en todas las expresiones  $\alpha = \sqrt{4\omega^2 - \gamma^2}/2$ . Como se puede visualizar en las figuras 3.16 y 3.17 se denota la tendencia de los valores esperados o promedio a cero. Mientras, en las figuras 3.18 y 3.19, se marca la tendencia de las varianzas a un valor fijo a medida que el tiempo aumenta. Además, las varianzas tendrán un intervalo de tiempo con un régimen transitorio que depende de la magnitud en los elementos pasivos que componen el circuito. De acuerdo a estas observaciones, si tomamos un circuito compuesto por  $R = 1 [\Omega]$ ,  $L = 2 [H]$ ,  $C = 1/3 [F]$ <sup>5</sup>, se puede observar en la gráfica que la energía almacenada en forma de campos eléctricos y magnéticos —en el capacitor y el inductor, respectivamente— tiende a estabilizarse en un valor mínimo constante. La expresión que sigue la energía promedio será igual a:

$$\langle E(t) \rangle = \frac{1}{2C} \langle Q^2(t) \rangle + \frac{1}{2} L \langle I^2(t) \rangle \quad (3.54)$$

De acuerdo a la definición de varianza, es posible re-expresar la ecuación anterior como:

$$\langle E(t) \rangle = \frac{1}{2C} [\langle Q(t) \rangle^2 + \langle \langle Q^2(t) \rangle \rangle] + \frac{1}{2} L [\langle I(t) \rangle^2 + \langle \langle I^2(t) \rangle \rangle] \quad (3.55)$$

Que al tomar el límite  $t \rightarrow \infty$  donde se asume el sistema en equilibrio termodinámico es se halla la siguiente expresión que describe el valor de la energía en dicho estado, el cual puede ser igualado gracias al teorema de equipartición de la energía recordando los dos grados de libertad electromagnéticos del sistema con el producto  $k_B T$ :

<sup>5</sup>Es importante aclarar que los valores del capacitor y el inductor son muy grandes a comparación de las referencias más utilizadas en el mercado. Estos valores son dados con el fin de hacer más notorio el estado transitorio del circuito a causa de las fluctuaciones de la diferencia de potencial  $V_{est}$ .

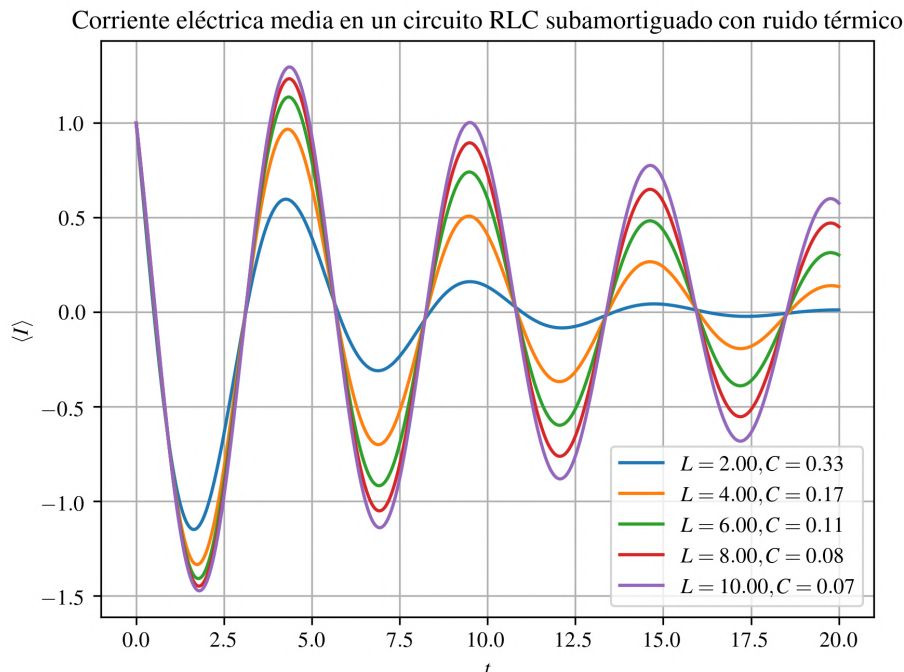


Figura 3.17: Corriente eléctrica promedio con valores  $Q_0 = 1 [C]$ ,  $I_0 = 1 [A]$  y  $R = 1 [\Omega]$ . (Elaboración propia)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle E(t) \rangle = \frac{\beta^2}{4\gamma\omega^2 C} + \frac{L\beta^2}{4\gamma} = k_B T \quad (3.56)$$

Finalmente, a partir de la igualdad anterior se deduce el valor de  $\beta^2$ , la amplitud de las oscilaciones estocásticas, recordando que  $\gamma = R/L$  y  $\omega^2 = 1/LC$ :

$$\beta^2 = \frac{2Rk_B T}{L^2} \quad (3.57)$$

Dado que la potencia promedio disipada por la resistencia es igual a la potencia suministrada por el inductor y el capacitor, en consecuencia es posible deducir que la relación entre la amplitud de las fluctuaciones  $\beta^2$ , y la potencia promedio disipada por la, permitiendo deducir la relación hallada por Schottky en 1918, como se puede observar en la ecuación 3.7:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle P(t) \rangle = R \left[ \lim_{t \rightarrow \infty} \langle I^2(t) \rangle \right] = \frac{Rk_B T}{L} \quad (3.58)$$

Finalmente se hace un comentario frente a la covarianza entre  $Q(t)$  e  $I(t)$ , que es representada en la gráfica 3.20, el cuál disminuye a saltos a medida que transcurre el tiempo con una tendencia a cero. Dicha covarianza exhibe el nivel de dependencia estadística entre ambas variables, siendo en el equilibrio termodinámico igual a cero. Esto se debe a que en un tiempo lo suficientemente largo, la magnitud de la corriente eléctrica y la carga eléctrica son únicamente ruido que debido a su nula correlación temporal, denota dicha independencia estadística entre ambas cantidades.

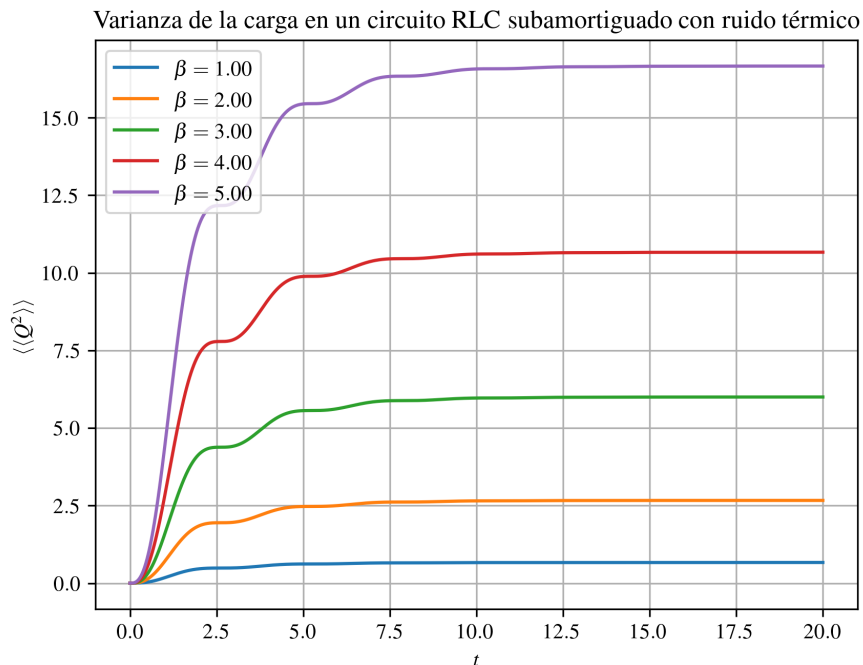


Figura 3.18: Varianza de la carga con valores  $Q_0 = 1 [C]$ ,  $I_0 = 1 [A]$ ,  $R = 1 [\Omega]$  y  $\beta = [1, 2, 3, 4, 5]$ . (Elaboración propia)

Como se puede observar en las gráficas, si el circuito ofrece las condiciones necesarias: como la temperatura  $T$  del conductor y los componentes del circuito pueden generar regímenes transitorios, los cuales, de acuerdo con el rango de frecuencias en el cuál se halla la señal eléctrica, es posible deducir si dicho régimen transitorio que llega a ser relevante en su análisis.

Hallados estos resultados a partir de las ecuaciones diferenciales estocásticas que permite ejemplificar el uso de los modelos propios en sistemas fluctuantes y su buen funcionamiento en sistemas cercanos al equilibrio termodinámico. Todo esto es la consecuencia de una trayectoria de más de 50 años de trabajo alrededor de una teoría que inicialmente parecía establecerse desde una perspectiva meramente teórica, pero que el mismo desarrollo tecnológico llevo a la realidad y a la instauración de modelos que no solo permiten su explicación, sino su manipulación para el mejoramiento de la tecnología basada en la electricidad.

Varianza de la corriente eléctrica en un circuito RLC subamortiguado con ruido térmico

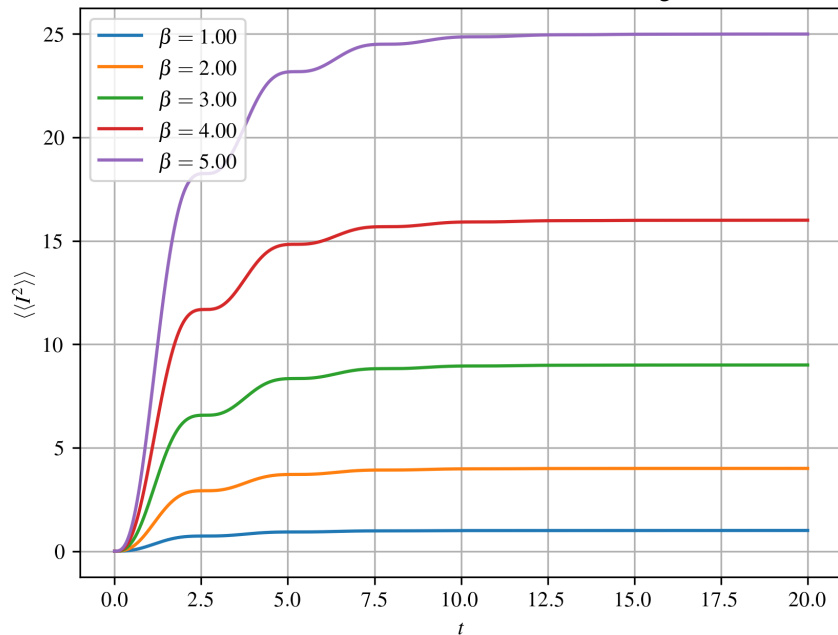


Figura 3.19: Varianza de la corriente eléctrica con valores  $Q_0 = 1 [C]$ ,  $I_0 = 1 [A]$ ,  $R = 1 [\Omega]$  y  $\beta = [1, 2, 3, 4, 5]$ . (Elaboración propia)

Covarianza entre la carga y la corriente en un circuito RLC subamortiguado con ruido térmico

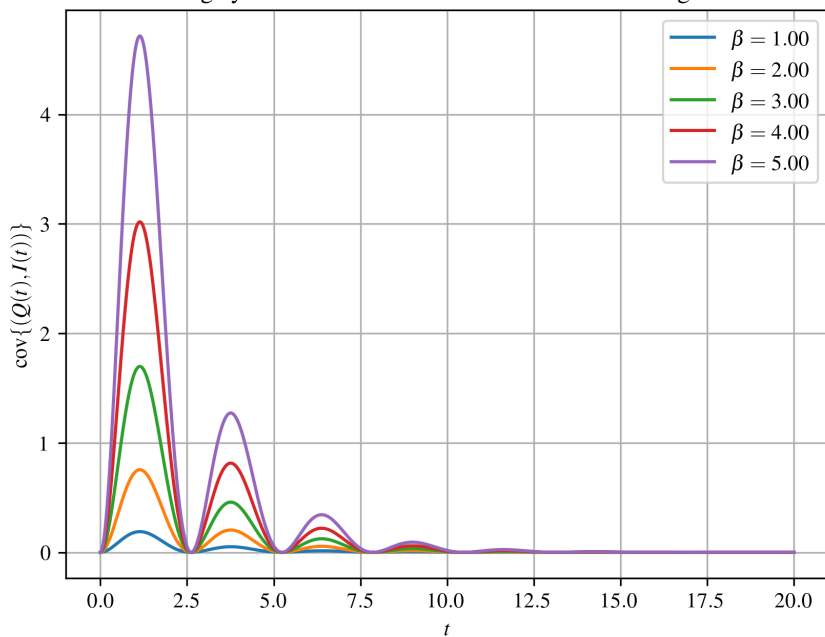


Figura 3.20: Covarianza entre la corriente eléctrica y la carga con valores  $Q_0 = 1 [C]$ ,  $I_0 = 1 [A]$ ,  $R = 1 [\Omega]$  y  $\beta = [1, 2, 3, 4, 5]$ . (Elaboración propia)

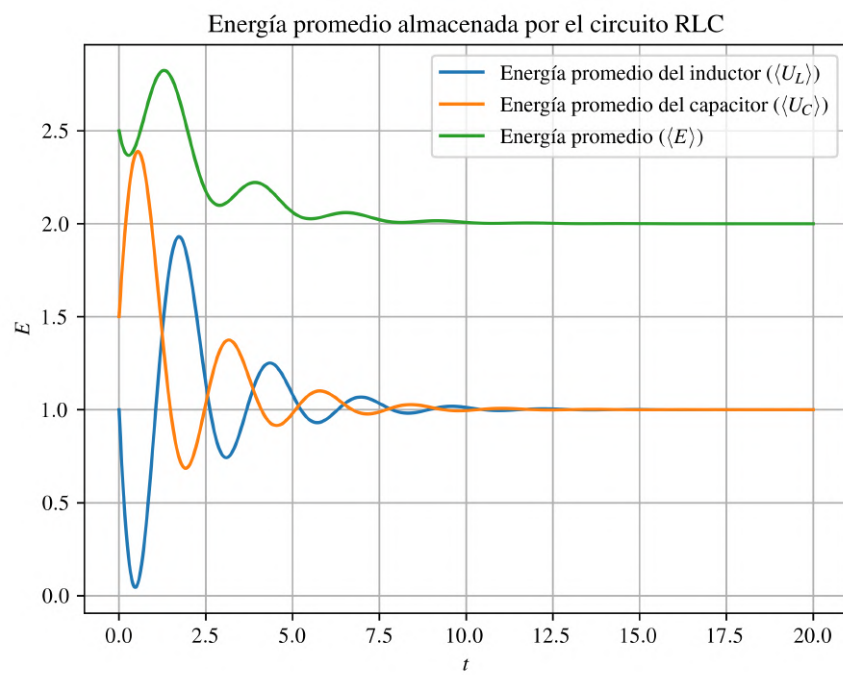


Figura 3.21: Energía almacenada en los componentes  $C$  y  $L$  con valores  $Q_0 = 1 [C]$ ,  $I_0 = 1 [A]$ ,  $R = 1 [\Omega]$ ,  $L = 2 [H]$ ,  $C = 1/3 [F]$  y  $\beta = 1$ . (Elaboración propia)

# Conclusiones

- A partir del análisis histórico se evidencia la relevancia que tiene la idea de fluctuación en física al permitir ampliar la mirada de los hitos científicos, el planteamiento de las problemáticas que guiaron la discretización de la materia y su posterior triunfo en la actualidad a través de pruebas empíricas. La fluctuación en física es consecuencia de la introducción de modelos estadísticos en problemas que no son resolubles debido a su alta complejidad o inconmensurabilidad de cálculo a través de las leyes que definen los estados individuales de una gran cantidad de cuerpos; sin embargo, si se dota de una interpretación al interior de los fenómenos físicos para el valor esperado o la varianza, esto permite a la fluctuación tomar un papel relevante en la construcción de modelos y ser usada en la interpretación de resultados en diferentes áreas como la electrónica. Desde una perspectiva pedagógica, su comprensión permite construir un marco conceptual más sólido frente a la interpretación de los fenómenos físicos partiendo de la discretización de la materia debido a que la inclusión de estas condiciones en un sistema nos ofrece información de las configuraciones que lo compone y su amplitud hace evidente si el modelo utilizado para el sistema requiere de una construcción estocástica para su descripción o puede ser simplificado a uno determinista donde el valor esperado predomina con respecto a las desviaciones a las cuales ningún sistema es inherente.
- De acuerdo a los diferentes sistemas analizados como el movimiento browniano y el ruido electrónico fundamental, se puede afirmar que la construcción de modelos en física que hacen uso de la discretización de la materia, requieren de construir un puente entre dos niveles de formalización: el primero, las leyes que definen los estados en los elementos que constituyen el sistema, como las ecuaciones de movimiento de cada molécula en un gas descritas a partir de la mecánica clásica, y segundo, el estado macroscópico exhibido por el sistema a través de cantidades sensibles a la medida. Este puente se obtiene a través de la construcción de una distribución de probabilidad para los estados a nivel microscópico y la interpretación de los diferentes momentos estadísticos, como la varianza y el valor esperado, en las mediciones realizadas sobre un sistema que exhibe un estado macroscópico. Este puente es fundamental en la interpretación de los principios de la termodinámica, ya que la introducción de una hipótesis molecular en la explicación de los fenómenos térmicos conlleva a la construcción de paradojas, como la paradoja de Loschmidt y la paradoja de recurrencia, donde situaciones como la creación de gradientes de temperatura a partir de un sistema en equilibrio térmico de forma espontánea exhibiendo una disminución de la entropía en el sistema son posibles bajo las leyes descritas a nivel microscópico, pero no se exhiben a nivel macroscópico. Estas paradojas en la enseñanza de la física permiten abrir el debate frente a la naturaleza estadística de los principios de la termodinámica y definir una relación coherente de un sistema entre el estado que exhibe en la medida macroscópica y los

estados microscópicos de sus constituyentes a través de la interpretación estadística.

- La discusión Zermelo-Boltzmann a finales del siglo XIX acerca de la cantidad  $H$  propuesta por Boltzmann en 1872, tiene como consecuencia la construcción de un universo macroscópico bajo la influencia de las fluctuaciones. En este universo, la variable aleatoria es un concepto fundamental para definir la irreversibilidad espontánea de los procesos, ya que, esta se define a partir de una distribución de probabilidad que en consecuencia, define la irreversibilidad con base a una ley estadística. Así, los estados espontáneos observados desde nuestra experiencia son macroestados que exhibe el sistema debido a que tienen asociado un número muy grande de configuraciones frente al número total de arreglos en los microestados de las constituyentes del sistema, en comparación con el número de macroestados que exhibe el sistema si de forma espontánea exhibe situaciones bizarras, como la descrita en el anterior punto. Sin embargo, las explicaciones de fenómenos macroscópicos se encuentran ligados a una variable aleatoria debido al movimiento de agitación en las moléculas, por lo tanto, el establecimiento de la teoría de fluctuaciones a partir de las investigaciones realizadas por Einstein entre 1904 y 1906, donde la descripción de las desviaciones energéticas en un sistema en equilibrio termodinámico y el movimiento browniano, permiten hacer evidente esos eventos que según Boltzmann eran imposibles de observar experimentalmente, se hizo realidad. En la enseñanza de la física, esta consideración de orden histórico permite hacer evidente la profundidad que tiene la inclusión de la variable aleatoria en la descripción de los sistemas, y gracias a los aportes de Einstein, es posible colocar a disposición sistemas susceptibles al movimiento de agitación, desde los cuales sea posible la discusión fuera de un terreno meramente teórico, especialmente frente a la medida del número de Avogadro a partir del desplazamiento cuadrático medio de un gran número de esferas al interior de un fluido.
- De acuerdo a la breve reconstrucción histórica de la problemática, que conlleva al estudio del ruido electrónico fundamental debido al movimiento de agitación por parte de los portadores de carga bajo diferentes condiciones, caracterizado en sistemas de amplificación a través de tubos de vacío, es posible colocar en evidencia la importancia que tiene el establecimiento de la teoría de fluctuaciones al interior de sistemas en equilibrio termodinámico como los circuitos eléctricos, ya que la predicción, caracterización y medición del ruido de disparo y el ruido térmico, presentes en todo sistema electrónico permite la mejora en la construcción de dispositivos que hacen parte de nuestro día a día, donde la alta ganancia de los amplificadores es necesaria. Además, se observa como la construcción de conocimiento desde la tecnología y la ciencia son procesos que a pesar de encontrar cierta independencia uno del otro, su convergencia a una tecnificación científica, donde la tecnología encuentra su descripción fundamental a partir de razonamientos científicos y no de proposiciones pragmáticas. Así, frente a la enseñanza de la física y la electrónica, las fluctuaciones presentes en un circuito debido a la discretización de la materia y el valor de la carga, permite caracterizar los dispositivos electrónicos a partir de esta premisa, donde la analogía con un continuo presente en la corriente eléctrica se queda corta frente a la explicación de fenómenos y la construcción de dispositivos, haciendo uso del puente antes descrito.
- La introducción de modelos dinámicos como la ecuación de Langevin definida a partir de un proceso estocástico, o variable aleatoria que depende del tiempo, tiene como consecuencia

la descripción del fenómeno incluso en situaciones de no-equilibrio donde las fluctuaciones predominan en la dinámica del sistema. Las distribuciones de probabilidad en función del tiempo como resultado de la solución de la ecuación de Langevin, permiten definir regímenes transitorios y estacionarios de un sistema físico bajo condiciones de ruido de diferente amplitud, en los cuales se observa que incluso en régimen estacionario o estado de equilibrio termodinámico, el sistema no se encuentra realmente en una situación estática, siendo la autocorrelación entre cada uno de los eventos que componen la descripción del sistema la herramienta que define la tendencia del mismo. Este tipo de modelos son de alta complejidad, no por los procesos realizados sino por la necesidad de interpretar bajo la mirada estadística el sistema físico, donde la solución no es una trayectoria clásica sino una distribución de probabilidad en la cual sus momentos varían en el tiempo, siendo desde la enseñanza de la física el uso de estos modelos en sistemas que han sido descritos históricamente como el movimiento browniano o el ruido térmico, los que permiten su acercamiento al encontrar las conexiones ya predichas desde la discretización de la materia, con el fin de extrapolar la idea de ruido o fluctuación a sistemas en los cuales las perturbaciones no necesariamente provienen de dicha fuente.

# Referencias

(Inf. Téc.). (s.f.).

Andrade, E. N. D. C. (s.f.). Las primeras bombas neumáticas. *Ciencia e Ingeniería*, 4.

Badino, M. (2011). Mechanistic Slumber Vs. Statistical Insomnia: The Early Phase of Boltzmann's H-Theorem (1868-1877). *European Physical Journal - H*, 36(3), 353–378. (Revisado en <https://philsci-archive.pitt.edu/9240/>)

Bao, L., y Koenig, K. (2019, 11). Physics education research for 21st century learning. *Disciplinary and Interdisciplinary Science Education Research*, 1, 2. doi: 10.1186/s43031-019-0007-8

Bernoulli, D. (2014). Hydrodynamicae. En I. Bruce (Traduc.), (cap. 10). (Revisado en <https://www.17centurymaths.com/contents/danielbernoulli/hydrodynamics10.pdf>)

Boltzmann, L. (1895). On certain questions of the theory of gases. *Nature*, 51(1322), 413–415.

Boltzmann, L. (2003a). Further studies on the thermal equilibrium of gas molecules. En *The kinetic theory of gases* (p. 262-349). (Revisado en [https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/9781848161337\\_0015](https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/9781848161337_0015)) doi: 10.1142/9781848161337\_0015

Boltzmann, L. (2003b). On Zermelo's Paper: On the Mechanical Explanation of Irreversible Processes. En *The kinetic theory of gases* (p. 412-419). doi: 10.1142/9781848161337\_0023

Boltzmann, L. (2003c). Reply to Zermelo's Remarks on the Theory of Heat. En *The kinetic theory of gases* (p. 392-402). doi: 10.1142/9781848161337\_0021

Bosch Sensortec. (2015). *Bmp280 - digital pressure sensor*. <https://cdn-shop.adafruit.com/datasheets/BST-BMP280-DS001-11.pdf>. (Datasheet revision 1.1)

Boyle, R. (1660). *New experiments physico-mechanicall, touching the spring of the air and its effects: (made for the most part, in a new pneumatical engine). written by way of letter to charles, lord vicount of dungarvan, eldest son to the earl of corke*. Oxford Press. (Revisado en <https://repository.ou.edu/uuid/cd9e94a5-2c26-5b5c-943a-62713f9771e5#page/1/mode/2up>)

Brush, S. G. (2003). *History of the Kinetic Theory of Gases: An Anthology of Classic Papers with Historical Commentary* (N. S. Hall, Ed.). Imperial College Press.

Brush, S. G. (2004). History of the Kinetic Theory of Gases. *Storia della Scienza*, 7. (Revisado en <https://terpconnect.umd.edu/~brush/pdf/ITALENC.pdf>)

Bustos, F. J. C., y Sotelo, S. J. R. (2008). Una revisión histórica del concepto de calor: algunas implicaciones para su aprendizaje. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*.(23), 67–77. (Revisado en <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=614265307005>)

Cella, G. (2017, aug). The discovery of gravitational waves: a gentle fight against noise. *Journal of Physics: Conference Series*, 880(1), 012007. Descargado de <https://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/880/1/012007> doi: 10.1088/1742-6596/880/1/012007

- Cercignani, C. (1998). *Ludwig Boltzmann: The man who trusted atoms*. Oxford University Press.
- CERN. (2025). *Why do physicists mention “five sigma” in their results?* <https://home.cern/resources/faqs/five-sigma>. (Consultado el 24 de noviembre del 2024)
- Cervera, J. A., y Guzmán, R. (2006). La mecánica estadística: sus orígenes y sus paradojas a la luz de los escritos de Paul y Tatiana Ehrenfest. *ILUIL: Revista de la sociedad española de historia de las ciencias y de las técnicas.*, 29(64), 331–356. (Revisado en <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2579766>)
- Clausius, R. (1857). On the nature of the motion which we call heat. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 14(91), 108–127. doi: 10.1080/14786445708642360
- Clausius, R. (1859). On the mean length of the paths described by the separate molecules of gaseous bodies on the occurrence of molecular motion: together with some other remarks upon the mechanical theory of heat. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 17(112), 81–91. doi: 10.1080/14786445908642626
- Clausius, R. (1865). Ueber verschiedene für die anwendung bequeme formen der hauptgleichungen der mechanischen wärmetheorie. *Annalen der Physik*, 201(7), 353–400. Descargado de <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/andp.18652010702> doi: <https://doi.org/10.1002/andp.18652010702>
- Clausius, R. (1867). *The mechanical theory of heat: With its applications to the steam-engine and to the physical properties of bodies*. J. Van Voorst.
- Cohen, L. (2005). The history of noise [on the 100th anniversary of its birth]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 22(6), 20–45. doi: 10.1109/MSP.2005.1550188
- Conesa, L. M. (2003). Compleja historia de la formulación de la ley de boyle. *Didáctica de las ciencias experimentales y sociales*(17), 37–53. (Revisado en <https://ojs.uv.es/index.php/dces/article/view/3000>)
- Contreras-Vergara, O., Lucero-Azuara, N., Sánchez-Salas, N., y Jiménez-Aquino, J. I. (2021, Jan.). Harmonic oscillator brownian motion: Langevin approach revisited. *Revista Mexicana de Física E*, 18(1 Jan-Jun), 97–106. Descargado de <https://rmf.smf.mx/ojs/index.php/rmf-e/article/view/5334> doi: 10.31349/RevMexFisE.18.97
- Cátedra de Física II, F. U. (2020). *Teoría cinética de los gases ideales*. <https://www.fceia.unr.edu.ar/fisica2ecen/descargas/apuntes/TeoriaCinetica.pdf>. (Apuntes de la Licenciatura y Profesorado en Física)
- Darrigol, O. (2021). Boltzmann’s reply to the Loschmidt paradox: a commented translation. *European Physical Journal H*, 46(1), 29. Descargado de <https://hal.science/hal-03467467> doi: 10.1140/epjh/s13129-021-00029-2
- del Mazo Vivar, A. (2018, may). *El mito del movimiento browniano del polen*. <https://youtu.be/W6OpJ-BzjGk>. (Video de YouTube)
- Dörfel, G. (2012). The early history of thermal noise: The long way to paradigm change. *Annalen der Physik*, 524(8), 117–121. Descargado de <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/andp.201200736> doi: <https://doi.org/10.1002/andp.201200736>
- Edminister, J. A. (1965). *Teoría y problemas de circuitos eléctricos* (J. B. Bélarra y Ángel Gutiérrez Vázquez, Traduc.). Serie de Compendios Schaum. (Traducción y adaptación al español)
- Einstein, A. (1926). *Investigations on the theory of the brownian movement*. Methuen & Co. Ltd. (Revisado en <https://archive.org/details/investigationont0000albe/mode/2up>)

- Einstein, A., y Beck, A. (1989). On the General Molecular Theory of Heat. En *The collected papers of albert einstein, volume 2 (english): The swiss years: Writings, 1900-1909. (english translation supplement)* (p. 68-77). Princeton University Press. (Revisado en <https://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol2-trans/>)
- Filmus, Y. (2010, enero). *Two proofs of the central limit theorem*. <https://www.cs.toronto.edu/~yuvalf/CLT.pdf>. (Lecture notes, University of Toronto)
- Fleming, J. A. (1904). *Instrument for converting alternating electric currents into continuous currents. (u.s. patent no. us803684a)*. Descargado de <https://patents.google.com/patent/US803684A/en>
- Floriani, J. C. A. (2006). Sobre la historia de la electrónica en el primer centenario de su nacimiento: La era termoiónica. *IEEE Latin America Transactions*, 4(4), 242-248.
- Forest, L. D. (1907). *Wireless telegraphy. (u.s. patent no. us841386a)*. Descargado de <https://patents.google.com/patent/US841386>
- Forest, L. D. (1908). *Space telegraphy. (u.s. patent no. us879532a)*. Descargado de <https://patents.google.com/patent/US879532>
- G., M. O. (2019, 12). Del movimiento browniano a los motores brownianos. *Revista Boliviana de Física*, 35, 37 - 40. Descargado de [http://www.scielo.org.bo/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1562-38232019000200005&nrm=iso](http://www.scielo.org.bo/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1562-38232019000200005&nrm=iso)
- Gambau, J. C. (s.f.). Historia de la invención del triodo amplificador: La válvula fleming, el audión y la válvula leiben. Descargado de <https://archivo.ea4rch.com/archivo/00020/Triodo-Amplificador.pdf>
- Gamburg, Y. D. (2023). Introduction: General issues. En *The fundamentals of electrochemistry* (pp. 1–11). Cambridge Scholars Publishing. Descargado de <https://www.cambridgescholars.com/product/978-1-5275-0164-5> (Accessed: 2025-04-26)
- Genthon, A. (2020, julio). The concept of velocity in the history of brownian motion: From physics to mathematics and back. *The European Physical Journal H*, 45(1), 49–105. Descargado de <http://dx.doi.org/10.1140/epjh/e2020-10009-8> doi: 10.1140/epjh/e2020-10009-8
- Gillespie, D. T. (1996, 03). The mathematics of brownian motion and johnson noise. *American Journal of Physics*, 64(3), 225-240. Descargado de <https://doi.org/10.1119/1.18210> doi: 10.1119/1.18210
- Guralnick, S. M. (1979). The contexts of faraday's electrochemical laws. *Isis*, 70(1), 59–75. Descargado 2025-01-17, de <http://www.jstor.org/stable/230878>
- Guzmán, J. M. (2020). *Aproximaciones históricas alrededor del concepto del electrón: la actividad experimental relativa al estudio de la naturaleza corpuscular u ondulatoria de los rayos catódicos* (Trabajo de maestría, Universidad Pedagógica Nacional, Colombia). Descargado de <http://hdl.handle.net/20.500.12209/13165> (Recuperado de: <http://hdl.handle.net/20.500.12209/13165>)
- Gyenis, B. (2017, febrero). Maxwell and the normal distribution: A colored story of probability, independence, and tendency toward equilibrium. *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 57, 53–65. Descargado de <http://dx.doi.org/10.1016/j.shpsb.2017.01.001> doi: 10.1016/j.shpsb.2017.01.001
- Hamming, R. W. (1991). Some mathematical tools. En *The art of probability for scientists and engineers* (pp. 47–97). Addison-Wesley.
- Hałas, S. (2006). 100 years of work function. *Materials Science-Poland*, 24(4), 951–967.

- ICAP. (2023, mayo). *Distribución de probabilidades*. [https://campusvirtual.icap.ac.cr/pluginfile.php/233088/mod\\_resource/content/1/Distribuci%C3%B3n%20de%20probabilidades.pdf](https://campusvirtual.icap.ac.cr/pluginfile.php/233088/mod_resource/content/1/Distribuci%C3%B3n%20de%20probabilidades.pdf). (Material del curso Métodos Estadísticos, Maestría en Gerencia de la Salud)
- Johnson, J. B. (1928, Jul). Thermal agitation of electricity in conductors. *Phys. Rev.*, 32, 97–109. Descargado de <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.32.97> doi: 10.1103/PhysRev.32.97
- Johnson, J. B. (1971). Electronic noise: the first two decades. *IEEE Spectrum*, 8(2), 42-46. doi: 10.1109/MSPEC.1971.5217957
- Koerfer, E. (2022). *Student intuitions in statistical mechanics* (n.º FYSPROJ1264).
- Kuhn, T. S. (1980). *La teoría del cuerpo negro y la discontinuidad cuántica, 1894-1912*. Alianza. (1a. ed.)
- Laidler, K. J. (1997). The chemical history of a current. *Canadian Journal of Chemistry*, 75(11), 1552-1565. Descargado de <https://doi.org/10.1139/v97-187> doi: 10.1139/v97-187
- Lemons, D. S. (2002). *An introduction to stochastic processes in physics*. Baltimore, MD: Johns Hopkins University Press.
- Lemons, D. S., y Gythiel, A. (1997, 11). Paul Langevin’s 1908 paper “on the theory of brownian motion” [“sur la théorie du mouvement brownien,” c. r. acad. sci. (paris) 146, 530–533 (1908)]. *American Journal of Physics*, 65(11), 1079-1081. Descargado de <https://doi.org/10.1119/1.18725> doi: 10.1119/1.18725
- Lundeberg, K. P. (2002). Noise in the understanding of nature and physics. Descargado de [https://web.mit.edu/klund/www/papers/UNP\\_noise.pdf](https://web.mit.edu/klund/www/papers/UNP_noise.pdf) (Accessed: 2025-04-28)
- Marcos, M. P. (2021). La explicación mecánica y estadística de la termodinámica: Introducción de la obra científica de Ludwig Boltzmann. *Estudios Filosóficos*, 70, 537–555. (Revisado en <https://estudiosfilosoficos.dominicos.org/ojs/article/view/1436>)
- Martín Sierra, F. J. (2017). *Introducción a las descripciones de langevin y fokker-planck: Movimiento browniano* [Trabajo de Fin de Grado]. Sevilla, España. Descargado de <https://idus.us.es/items/86f8bd74-a104-4458-9d9c-5d674f80c93d>
- Maxwell, J. C. (2010). The Scientific Papers of James Clerk Maxwell. En W. D. Niven (Ed.), (Vol. 1, pp. 377–409). Cambridge University Press. Descargado de <http://strangebeautiful.com/other-texts/maxwell-scientific-papers-vol-1.pdf> (Illustrations of the Dynamical Theory of Gases es un artículo publicado originalmente en 1860) doi: 10.1017/CBO9780511698095
- Mayorga, A. (2020). Albert Einstein 1905: De las fluctuaciones energéticas a la difusión molecular. Parte II. Movimiento Browniano. (Revisado en [https://www.academia.edu/44136021/Albert\\_Einstein\\_1905\\_De\\_las\\_fluctuaciones\\_energ%C3%A9ticas\\_a\\_la\\_difusi%C3%B3n\\_molecular\\_Parte\\_II\\_Movimiento\\_browniano](https://www.academia.edu/44136021/Albert_Einstein_1905_De_las_fluctuaciones_energ%C3%A9ticas_a_la_difusi%C3%B3n_molecular_Parte_II_Movimiento_browniano))
- N.Nuñez-Yepe, H. (2013). Poincaré, la mecánica clásica y el teorema de la recurrencia. *Revista Mexicana de Física*, 59(2), 90–100.
- Nyquist, H. (1928, Jul). Thermal agitation of electric charge in conductors. *Phys. Rev.*, 32, 110–113. Descargado de <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.32.110> doi: 10.1103/PhysRev.32.110
- Okamura, S. (1994). Invention of vacuum tube. En *History of electron tubes* (p. 15-26). IOS Press. (Revisado en [https://books.google.com.co/books/about/History\\_of\\_Electron\\_Tubes.html?id=VHFyngmO95YC&redir\\_esc=y](https://books.google.com.co/books/about/History_of_Electron_Tubes.html?id=VHFyngmO95YC&redir_esc=y))

- OpenAI. (2025). *Chatgpt (versión del 12 de marzo) [modelo de lenguaje de gran tamaño]*. Descargado de <https://chat.openai.com/chat> (Software)
- Parker, D. (2009, November). *The H-Theorem, Molecular Disorder and Probability: Perspectives from Boltzmann's Lectures on Gas Theory*. (Revisado en <https://philsci-archive.pitt.edu/5005/>)
- Peliti, L., y Rechtman, R. (2016, septiembre). Einstein's approach to statistical mechanics: The 1902–04 papers. *Journal of Statistical Physics*, 167(3–4), 1020–1038. Descargado de <http://dx.doi.org/10.1007/s10955-016-1615-8> doi: 10.1007/s10955-016-1615-8
- Peñuela, J. D. (2023). *Explicación del movimiento browniano: un abordaje para el estudio de sistemas microscópicos en física estadística* [Trabajo de pregrado]. (Recuperado de: <http://hdl.handle.net/20.500.12209/19409>)
- Poydenot, F., Abdourahamane, I., Caplain, E., Der, S., Jallon, A., Khoutami, I., ... Andreotti, B. (2022, noviembre). Turbulent dispersion of breath by the wind. *American Journal of Physics*, 90(11), 826–832. Descargado de <http://dx.doi.org/10.1119/5.0064826> doi: 10.1119/5.0064826
- Richardson, O. W. (1929, diciembre). *Thermionic phenomena and the laws which govern them*. Nobel Lecture. Descargado de <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1928/richardson/lecture/> (Presented December 12, 1929)
- Rider, J. F. (1945). *Inside the vacuum tube*. John F. Rider Publisher, Inc. (Revisado en <https://www.worldradiohistory.com/BOOKSHELF-ARH/Technology/Rider-Books/Rider-Inside-the-Vacuum-Tube-1945.pdf>)
- Robotti, N. (1995). J. J. Thomson at the cavendish laboratory: The history of an electric charge measurement. *Annals of Science*, 52(3), 265–284. doi: 10.1080/00033799500200231
- Rochín, V. R. (2015, febrero). *Radiación de cuerpo negro - gas de fotones*. (Recuperado de <https://www.fisica.unam.mx/personales/romero/TERMO2017/Radiacion-Cuerpo-Negro-LIBRO.pdf>)
- Schottky, W. (2018). On spontaneous current fluctuations in various electrical conductors. *Journal of Micro/Nanolithography, MEMS, and MOEMS*, 17(4), 041001. Descargado de <https://doi.org/10.1117/1.JMM.17.4.041001> doi: 10.1117/1.JMM.17.4.041001
- Sharp, K., y Matschinsky, F. (2015, 04). Translation of Ludwig Boltzmann's paper "on the relationship between the second fundamental theorem of the mechanical theory of heat and probability calculations regarding the conditions for thermal equilibrium" *sitzungsberichte der kaiserlichen akademie der wissenschaften. mathematisch-naturwissen classe. abt. ii, lxxvi 1877*, pp 373-435 (wien. ber. 1877, 76:373-435). reprinted in *wiss. abhandlungen*, vol. ii, reprint 42, p. 164-223, barth, leipzig, 1909. *Entropy*, 17, 1971-2009. doi: 10.3390/e17041971
- Silvestrini, V. (1998). *¿qué es la entropía?* (J. Anduckia, Traduc.). Grupo Editorial Norma.
- Sánchez, S. (2024). *Un estudio histórico sobre el concepto de corriente eléctrica: una aproximación de la física clásica a la física moderna*. Descargado de <http://hdl.handle.net/20.500.12209/19821>
- Sánchez Ron, J. M. (1997, oct.). J. J. Thomson y la génesis del descubrimiento del electrón. *Arbor*, 158(622), 137–171. Descargado de <https://arbor.revistas.csic.es/index.php/arbor/article/view/1802> doi: 10.3989/arbor.1997.i622.1802
- Tolman, R. C. (1938). *The principles of statistical mechanics*. Oxford: The Clarendon Press. (Revisado en <https://archive.org/details/ThePrinciplesOfStatisticalMechanicsTolmanOxfordAtTheClarendonPress1938/page/>)

- n15/mode/2up)
- Uffink, J. (2022). Boltzmann's Work in Statistical Physics. En E. N. Zalta (Ed.), *The Stanford encyclopedia of philosophy* (Summer 2022 ed.). Metaphysics Research Lab, Stanford University. <https://plato.stanford.edu/archives/sum2022/entries/statphys-Boltzmann/>.
- van Kampen, N. (2007). *Stochastic processes in physics and chemistry* (3.<sup>a</sup> ed.). Amsterdam: Elsevier.
- van Rijn, M. M. (2019, November). *Shot noise*. <https://vp.phys.ethz.ch/Experimente/pdf/Shot%20Noise.pdf>. (Laboratory report on measuring the elementary charge using shot noise.)
- Vara Rey, V. (2015). *Coeficiente de correlación lineal de pearson*. <https://personal.us.es/vararey/adatos2/correlacion.pdf>. (Material docente de la Universidad de Sevilla)
- Vázquez, J. M. C. (1999). La teoría cinética antes de Maxwell. *Argumentos de Razón Técnica*, 97–120. (Revisado en <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=621719>)
- Wilson, R. W. (1978). The cosmic microwave background radiation. En *Nobel lecture*. Stockholm, Sweden: The Nobel Foundation. Descargado de <https://www.nobelprize.org/uploads/2018/06/wilson-lecture-1.pdf> (Nobel Lecture, 8 December 1978)
- Zermelo, E. (2003a). On a theorem of dynamics and the mechanical theory of heat. En *The kinetic theory of gases* (p. 382-391). doi: 10.1142/9781848161337\_0020
- Zermelo, E. (2003b). On the Mechanical Explanation of Irreversible Processes. En *The kinetic theory of gases* (p. 403-411). doi: 10.1142/9781848161337\_0022

# Apéndice A

## Demostraciones en los artículos de Clausius y Maxwell

### A.1. *Sobre la naturaleza del movimiento al que llamamos calor por Rudolf Clausius (1857)*

#### A.1.1. **Relación entre la presión ejercida por un gas sobre las paredes de un recipiente y la velocidad de las moléculas que lo conforman**

Para hallar una relación entre la presión ejercida por un gas sobre las paredes de un recipiente en función de la velocidad de las constituyentes es importante tener en cuenta el contexto propuesto por Clausius. En principio, las moléculas no tienen un volumen definido, las fuerzas intermoleculares son despreciables en un gas ideal y éstas presentan un movimiento rectilíneo uniforme, por ende, dichas moléculas se comportan como una partícula libre hasta chocar contra alguna pared.

De acuerdo a esto, en principio él busca hallar el número de choques por segundo que se genera sobre una pared, primero, hallando la frecuencia con la cual choca una partícula en función de su ángulo de incidencia y después, el número de moléculas que se encuentran a lo largo de un área determinada, teniendo en cuenta que la colisión es perfectamente elásticas entre la molécula y la pared.

Teniendo en cuenta la figura A.1, ¿cuanto tiempo tarda en recorrer la trayectoria señalada en rojo por una partícula a velocidad constante  $v$ ?

Sea:

$$\cos(\theta) = \frac{h}{l} \quad \text{Por lo tanto} \quad l = \frac{h}{\cos(\theta)} \quad (\text{A.1})$$

Tal que, si se tiene en cuenta que la velocidad  $v$  es constante, entonces:

$$v = \frac{2l}{\Delta t} \quad \text{Por lo tanto} \quad \Delta t = \frac{2h}{v \cos(\theta)} \quad (\text{A.2})$$

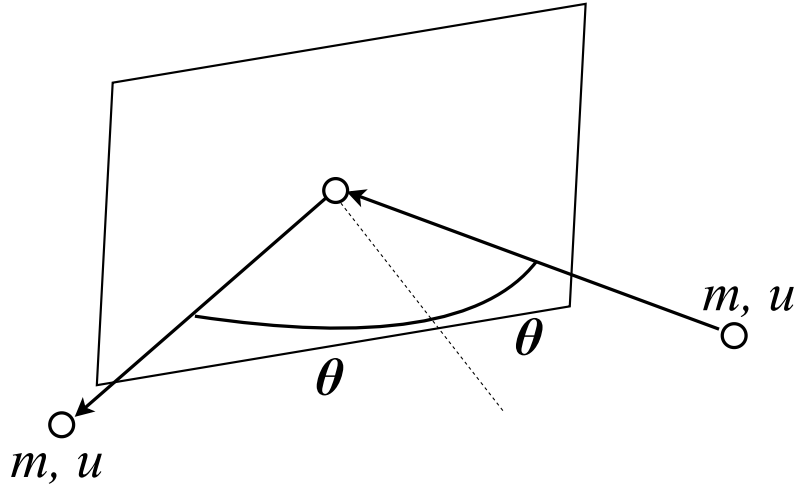


Figura A.1: Colisión entre molécula y pared del recipiente. (Elaboración propia)

Por lo tanto, la frecuencia del choque viene dada por  $(\Delta t)^{-1}$ . Ahora, teniendo en cuenta la figura (tal2), se define una semiesfera de radio  $R$  arbitrario, con centro en el punto donde se genera la colisión, un área delimitado por los radios  $r_1 = R \sin(\theta)$  y  $r_2 = R \sin(\theta + \Delta\theta)$ . Esta semiesfera, nos permite definir una el número de moléculas a lo largo del espacio con respecto a su ángulo de incidencia, recordando que ninguna dirección se encuentra privilegiada.

Dicha área sombreada puede ser calculada a partir de la siguiente integral:

$$\Delta S = \int_0^{2\pi} \int_{\theta}^{\theta+\Delta\theta} R^2 \sin(\theta') d\theta' d\phi = 2\pi R^2 [\cos(\theta) - \cos(\theta + \Delta\theta)] \quad (\text{A.3})$$

De acuerdo a la definición de derivada, construiremos la siguiente aproximación:

$$\frac{d[\cos(\theta)]}{d\theta} \approx \frac{\cos(\theta + \Delta\theta) - \cos(\theta)}{\Delta\theta} \quad (\text{A.4})$$

Así el área requerida es reescrita de la siguiente manera:

$$\Delta S = -2\pi R^2 \frac{d[\cos(\theta)]}{d\theta} \Delta\theta = 2\pi R^2 \sin(\theta) \Delta\theta \quad (\text{A.5})$$

Si la densidad de moléculas a lo largo del espacio es uniforme, debido a que ninguna dirección es privilegiada, se define la siguiente razón entre el número de moléculas  $N$  a lo largo de la superficie toda la semiesfera  $S$  y el número de moléculas  $\Delta N$  en la superficie  $\Delta S$ :

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{\Delta S}{S} = \frac{2\pi R^2 \sin(\theta) \Delta\theta}{2\pi R^2} = \sin(\theta) \Delta\theta \quad (\text{A.6})$$

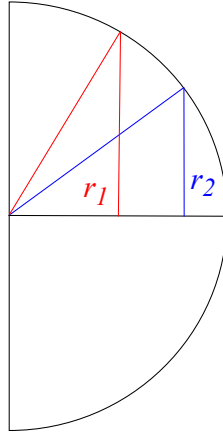


Figura A.2: Área delimitada por los radios. (Elaboración propia)

De esta manera el número de choques por segundo definido para un intervalo del ángulo de incidencia  $\theta$  y  $\theta + \Delta\theta$  será igual al producto entre el número de moléculas  $\Delta N$  y la frecuencia de colisión:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{vN}{2h} \cos(\theta) \sin(\theta) \Delta\theta \quad (\text{A.7})$$

Seguido a la deducción de este valor, se procede a hallar la fuerza sobre una pared de área  $A$ , con el cual sea posible deducir la presión sobre la pared del recipiente:

$$\Delta F = \Delta p \left( \frac{\Delta N}{\Delta t} \right) = (\Delta p) \frac{vN}{2h} \cos(\theta) \sin(\theta) \Delta\theta \quad (\text{A.8})$$

De acuerdo a la figura (tal), la diferencia de momento lineal debido a una molécula de masa  $m$ , en la dirección perpendicular al área  $A$  es igual a:

$$\Delta p = p_f - p_i = mv \cos(\theta) - [-mv \cos(\theta)] = 2mv \cos(\theta) \quad (\text{A.9})$$

Así, introduciendo el valor de la ecuación A.9 en A.8, tomamos un  $\Delta F$  muy pequeño, tal que se comporte como un diferencial, se integra el ángulo  $\theta$  desde 0 hasta  $\frac{\pi}{2}$ :

$$F = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{v^2 m N}{h} \cos^2(\theta) \sin(\theta) d\theta = \frac{v^2 m N}{3h} \quad (\text{A.10})$$

Ya con este último dato, es posible a partir de la definición de presión, hallar dicha magnitud, teniendo en cuenta que el volumen del recipiente es el de un prisma  $V = Ah$  :

$$P = \frac{v^2 m N}{3Ah} = \frac{v^2 m N}{3V} \quad (\text{A.11})$$

Además, teniendo en cuenta la definición de energía cinética  $E_c$  de un sistema de partículas, es posible deducir la siguiente relación:

$$\frac{3}{2}PV = \frac{v^2 m N}{2} = E_c \quad (\text{A.12})$$

### A.1.2. Razón entre la energía cinética $E_c$ y el calor $Q$ suministrado en un proceso termodinámico

**Enunciado:** Formular que si el calor específico  $c$  es constante, es equivalente a definir que la razón entre la vis viva del gas y la vis viva del movimiento de traslación el cual sirve para medir la temperatura también lo es (Clausius, 1857).

**Demostración:** Recordando el primer principio de la termodinámica en su forma diferencial:

$$dU = dQ + dW \quad (\text{A.13})$$

Definimos el calor suministrado  $dQ$  a lo largo de un proceso isocórico, un proceso termodinámico en el cual un gas aumenta su temperatura a volumen constante  $V$ , en este caso aumenta la presión desde  $P$  a  $P + dP$ , e isobárico, por el contrario, es un proceso termodinámico en el cual un gas aumenta su temperatura a presión constante  $P$ , en este caso aumenta de  $V$  a  $V + dV$ .

$$dQ = mcdT \quad (\text{A.14})$$

$$dQ = mcdT + PdV \quad (\text{A.15})$$

En este caso, de acuerdo a la ley de Charles, es posible definir:

$$dV = \frac{V}{T}dT \quad (\text{A.16})$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta que los diferenciales de calor  $dQ$  son cantidades muy pequeñas, en un proceso isobárico como  $dQ = mc'dT$ , A.15, teniendo en cuenta que A.16 se introduce en A.15:

$$mc'dT = mcdT + \frac{PV}{T}dT \quad (\text{A.17})$$

Construyendo la siguiente relación:

$$m(c' - c)T = PV \quad (\text{A.18})$$

Si integramos en ambos lados la ecuación A.14, definimos que  $Q = mcT$ , es posible reescribir la relación anterior como:

$$Q = \frac{c}{(c' - c)}PV \quad (\text{A.19})$$

Por lo tanto, si usamos la anterior expresión y reemplazamos  $PV$  por la relación A.12, obtenemos la razón buscada:

$$\frac{E_c}{Q} = \frac{3}{2} \left( \frac{c'}{c} - 1 \right) \quad (\text{A.20})$$

## A.2. Deducción del camino libre medio de una partícula por Rudolf Clausius (1859)

**Enunciado:** Hallar el desplazamiento libre medio de una molécula en un gas, que tiene una densidad de moléculas homogénea a lo largo del espacio, dividido por celdas cúbicas de longitud  $\lambda$ . Esta arista  $\lambda$  se define como la distancia promedio entre el centro de dos esferas de acción con radio  $r$  (Donde  $\lambda > 2r$ ). [Nota: Tanto la molécula de prueba como las moléculas del gas en que se difunde, tienen la misma velocidad promedio.]

**Demostración:** De acuerdo a la figura 1.3, se propone que la probabilidad de que una molécula atraviese una distancia  $d$  sin chocar contra otra molécula que hace parte del otro gas es:  $a$ , un número que se encuentra entre 0 y 1. Por lo tanto, así como la probabilidad de que una moneda caiga tres veces en cara es igual a:

$$W_{3c} = \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{2} \right) = \left( \frac{1}{2} \right)^3$$

La probabilidad de que atraviese la molécula una distancia  $3d$  sin chocar con otra molécula que hace parte del otro gas, es:

$$W_3 = (a)(a)(a) = a^3$$

Resultado que se debe a la densidad de moléculas homogénea del gas en que se desplaza la molécula, ya que, no existe ningún lugar del espacio privilegiado en el cual la probabilidad de que una molécula atraviese dicha distancia  $d$  sin colisionar sea diferente de  $a$ . Generalizando el resultado anterior al continuo, tenemos que:

$$f(x) = a^x \quad (\text{A.21})$$

De acuerdo a las propiedades de los exponentes  $-a = \ln(a)$ , la expresión anterior puede ser descrita desde la función exponencial que es mucho más sencilla de emplear:

$$f(x) = e^{-ax} \quad (\text{A.22})$$

Para hallar el valor de la constante  $\alpha$ , se hace uso de una situación: la molécula se desplaza una distancia  $\delta$  muy pequeña, de modo que las moléculas del gas se encuentren en una posición fija a lo largo del movimiento. En esta situación, se colocara una esfera de acción en cada uno de los vértices de la celda con arista  $\lambda$ , como se muestra en la figura 1.3.

En primer lugar, la probabilidad de hallar la molécula a una distancia  $\delta$  se puede aproximar a partir de la serie de Taylor correspondiente a la función exponencial:

$$f(\delta) = e^{-\alpha\delta} \approx 1 - \alpha\delta \quad (\text{A.23})$$

Ahora, la probabilidad de dicha molécula se encuentre al interior de una celda de arista  $\lambda$ , depende del volumen que puede ser ocupado por la molécula desplazándose en línea recta sin colisionar, en otras palabras que no es bloqueado por las esferas de acción:

$$f(\delta) \approx \frac{\lambda^3 - \pi r^2 \delta}{\lambda^3} = 1 - \frac{\pi r^2}{\lambda^3} \delta \quad (\text{A.24})$$

Teniendo en cuenta que la probabilidad de que no ingrese la molécula en la celda es igual a la razón entre el área efectiva al interior de la celda proporcionada por cuatro círculos de radio  $r$  y el área de una cara de la celda. Si comparamos la expresión A.23 y A.24, es posible deducir que:

$$\alpha = \frac{\pi r^2}{\lambda^3} \quad (\text{A.25})$$

Ahora, para encontrar un número  $N'$  de moléculas que componen un gas, el cual se difunde en un segundo gas, que se desplazaron desde la posición inicial hasta una distancia  $x$  sin colisionar, a partir de la siguiente expresión:

$$N'(x) = N e^{-\left(\frac{\pi r^2}{\lambda^3}\right)x} \quad (\text{A.26})$$

Acto seguido, estableceremos el número de moléculas que se encuentran en un intervalo definido desde una distancia arbitraria  $x$  a  $x + dx$ , donde  $dx \approx \delta$ , sin colisionar es igual a:

$$dN' = N'(x) - N'(x + dx) = N e^{-\left(\frac{\pi r^2}{\lambda^3}\right)(x+dx)} - N e^{-\left(\frac{\pi r^2}{\lambda^3}\right)x}$$

Sacando factor común:

$$dN' = N e^{-\left(\frac{\pi r^2}{\lambda^3}\right)x} \left[ 1 - e^{-\left(\frac{\pi r^2}{\lambda^3}\right)dx} \right]$$

Realizando una sustitución a partir de la serie de Taylor propia de la función exponencial:

$$dN' = N e^{-\left(\frac{\pi r^2}{\lambda^3}\right)x} \left[ 1 - 1 + \left(\frac{\pi r^2}{\lambda^3}\right)dx \right]$$

Deducimos la siguiente expresión:

$$dN' = N e^{-\left(\frac{\pi r^2}{\lambda^3}\right)x} \left(\frac{\pi r^2}{\lambda^3}\right)dx \quad (\text{A.27})$$

Ahora, teniendo en cuenta que el intervalo de distancias entre  $x$  y  $x + dx$  es muy pequeño, podemos asociar a todo el número de moléculas al interior de dicho intervalo, que la distancia recorrida desde el origen sin colisionar es igual a  $x$ , por lo tanto, la distancia media recorrida por una molécula de un gas que se difunde en otro, es igual a:

$$\langle l \rangle = \frac{1}{N} \int x dN' = \frac{1}{N} \int_0^{\infty} N e^{-\left(\frac{\pi r^2}{\lambda^3}\right)x} \left(\frac{\pi r^2}{\lambda^3}\right) x dx \quad (\text{A.28})$$

Integrando:

$$\int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi r^2}{\lambda^3}\right)x} \left(\frac{\pi r^2}{\lambda^3}\right) x dx = \left[ -e^{-\left(\frac{\pi r^2}{\lambda^3}\right)x} \left(x + \frac{\lambda^3}{\pi r^2}\right) \right]_0^{\infty} = \frac{\lambda^3}{\pi r^2}$$

Finalmente obtenemos la expresión del recorrido libre medio, o la distancia recorrida en línea recta que en promedio realiza una molécula en un proceso de difusión sin colisionar con otra.

$$\langle l \rangle = \frac{\lambda^3}{\pi r^2} \quad (\text{A.29})$$

### A.3. Deducción de las proposiciones de James Clerk Maxwell (1860)

#### Proposición 4

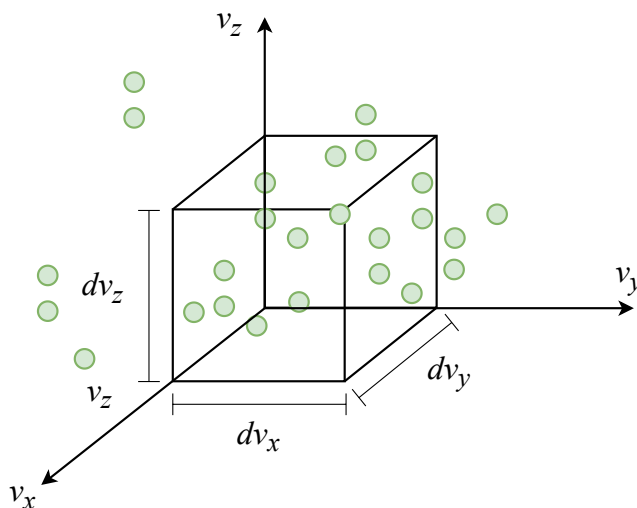


Figura A.3: Espacio de velocidades. (Elaboración propia)

El número de partículas con una velocidad entre:

$$v \text{ y } v + dv_x \longrightarrow N f(v_x) dv_x \quad (\text{A.30})$$

$$v \text{ y } v + dv_y \longrightarrow N f(v_y) dv_y \quad (\text{A.31})$$

$$v \text{ y } v + dv_z \longrightarrow N f(v_z) dv_z \quad (\text{A.32})$$

La existencia de la velocidad  $v_x$  no afecta las velocidades  $v_y$  y  $v_z$ , ya que las tres componentes de la velocidad son independientes debido a la ortogonalidad de los ejes coordenados. Por lo tanto, la probabilidad de encontrar una partícula con velocidades en los intervalos  $[v_x, v_x + dv_x]$ ,  $[v_y, v_y + dv_y]$  y  $[v_z, v_z + dv_z]$  está dada por el producto de las probabilidades individuales:

$$N f(v_x) f(v_y) f(v_z) dv_x dv_y dv_z \quad (\text{A.33})$$

Donde  $dv_x dv_y dv_z$  representa un elemento de volumen en el espacio de velocidades. La densidad de probabilidad de encontrar una molécula con velocidades  $v_x, v_y, v_z$  por unidad de volumen en el espacio de velocidades es:

$$Nf(v_x)f(v_y)f(v_z) \quad (\text{A.34})$$

Dado que las direcciones de las coordenadas son arbitrarias, esta densidad de probabilidad solo puede depender de la magnitud de la velocidad, es decir, de la distancia al origen en el espacio de velocidades:

$$\Phi(v^2 + v^2 + v^2) \quad (\text{A.35})$$

Por lo tanto, podemos igualar las dos expresiones para la densidad de probabilidad (absorbiendo la constante  $N$  en  $\Phi$  para simplificar la notación):

$$f(v_x)f(v_y)f(v_z) = C\Phi(v^2 + v^2 + v^2) \quad (\text{A.36})$$

Tomando el gradiente de ambos lados con respecto a las componentes de la velocidad, obtenemos:

$$\nabla(f(v_x)f(v_y)f(v_z)) = \nabla\Phi(v^2 + v^2 + v^2) \quad (\text{A.37})$$

Esto nos lleva a las siguientes ecuaciones para las derivadas parciales:

$$\frac{\partial f(v_x)}{\partial v_x} f(v_y)f(v_z) = \frac{\partial \Phi(u)}{\partial u} (2v_x) \quad (\text{A.38})$$

$$\frac{\partial f(v_y)}{\partial v_y} f(v_x)f(v_z) = \frac{\partial \Phi(u)}{\partial u} (2v_y) \quad (\text{A.39})$$

$$\frac{\partial f(v_z)}{\partial v_z} f(v_x)f(v_y) = \frac{\partial \Phi(u)}{\partial u} (2v_z) \quad (\text{A.40})$$

donde  $u = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ . Dividiendo la primera ecuación por  $2v_x f(v_x)f(v_y)f(v_z)$ , la segunda por  $2v_y f(v_x)f(v_y)f(v_z)$  y la tercera por  $2v_z f(v_x)f(v_y)f(v_z)$ , obtenemos:

$$\frac{1}{2v_x} \frac{\partial f(v_x)}{\partial v_x} = \frac{1}{2v_y} \frac{\partial f(v_y)}{\partial v_y} = \frac{1}{2v_z} \frac{\partial f(v_z)}{\partial v_z} = \frac{\partial \Phi(u)}{\partial u} \frac{1}{f(v_x)f(v_y)f(v_z)} \quad (\text{A.41})$$

Sustituyendo  $\frac{\partial \Phi(u)}{\partial u} = \frac{\partial \Phi(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{\partial (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}$ , podemos reescribir la igualdad como:

$$\frac{f'(v_x)}{2v_x f(v_x)} = \frac{f'(v_y)}{2v_y f(v_y)} = \frac{f'(v_z)}{2v_z f(v_z)} = \frac{\Phi'(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{f(v_x)f(v_y)f(v_z)} \quad (\text{A.42})$$

Cada uno de estos términos debe ser igual a una constante, que denotaremos como  $-\frac{1}{\alpha^2}$ :

$$\frac{1}{2v_x f(v_x)} \frac{\partial f(v_x)}{\partial v_x} = -\frac{1}{\alpha^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \Phi(v_x^2)}{\partial v_x^2} \frac{1}{\Phi(v_x^2)} = -\frac{1}{\alpha^2} \quad (\text{A.43})$$

Esto nos lleva al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{\partial f(v_x)}{\partial v_x} + \frac{2v_x}{\alpha^2} f(v_x) = 0 \quad (\text{I})$$

$$\frac{\partial \Phi(s)}{\partial s} + \frac{\Phi(s)}{\alpha^2} = 0 \quad (\text{II})$$

donde  $s = v_x^2$ . Resolviendo la ecuación (I) por separación de variables:

$$\frac{df(v_x)}{f(v_x)} = -\frac{2v_x}{\alpha^2} dv_x \quad (\text{A.44})$$

Integrando ambos lados:

$$\ln |f(v_x)| = -\frac{v_x^2}{\alpha^2} + C_1 \quad (\text{A.45})$$

Exponenciando ambos lados, obtenemos la forma de la función  $f(v_x)$ :

$$f(v_x) = C_2 e^{-\frac{v_x^2}{\alpha^2}} \quad (\text{A.46})$$

De manera análoga, se obtienen las funciones para  $v_y$  y  $v_z$ :

$$f(v_y) = C_5 e^{-\frac{v_y^2}{\alpha^2}}, \quad f(v_z) = C_6 e^{-\frac{v_z^2}{\alpha^2}} \quad (\text{A.47})$$

Sustituyendo  $v_y = v_z = 0$  en la relación implícita entre  $f$  y  $\Phi$ , y considerando las constantes de integración, se llega a una forma consistente para  $\Phi$ . Resolviendo la ecuación (II) con  $s = v_x^2$ :

$$\frac{d\Phi(s)}{\Phi(s)} = -\frac{1}{\alpha^2} ds \quad (\text{A.48})$$

Integrando:

$$\ln |\Phi(s)| = -\frac{s}{\alpha^2} + C_3 = -\frac{v_x^2}{\alpha^2} + C_3 \quad (\text{A.49})$$

Por lo tanto:

$$\Phi(v_x^2) = C_4 e^{-\frac{v_x^2}{\alpha^2}} \quad (\text{A.50})$$

Combinando las funciones de distribución para las tres componentes de la velocidad:

$$f(v_x)f(v_y)f(v_z) = C' e^{-\frac{(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}{\alpha^2}} \quad (\text{A.51})$$

Para determinar la constante  $C'$ , utilizamos la condición de normalización:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(v_x)f(v_y)f(v_z) dv_x dv_y dv_z = 1 \quad (\text{A.52})$$

Sustituyendo la expresión para la función de distribución:

$$C' \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{v_x^2}{\alpha^2}} dv_x \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{v_y^2}{\alpha^2}} dv_y \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{v_z^2}{\alpha^2}} dv_z \right) = 1 \quad (\text{A.53})$$

Utilizando la integral gaussiana  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ , con  $a = \frac{1}{\alpha^2}$ :

$$C'(\alpha\sqrt{\pi})(\alpha\sqrt{\pi})(\alpha\sqrt{\pi}) = 1 \implies C' = \frac{1}{\pi^{3/2}\alpha^3} \quad (\text{A.54})$$

Por lo tanto, la función de distribución de la velocidad en tres dimensiones es:

$$\Phi(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \frac{1}{\pi^{3/2}\alpha^3} e^{-\frac{(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{\alpha^2}} \quad (\text{A.55})$$

Y las funciones de distribución para cada componente individual son:

$$f(v_x) = \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}} e^{-\frac{v_x^2}{\alpha^2}} \quad (\text{A.56})$$

$$f(v_y) = \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}} e^{-\frac{v_y^2}{\alpha^2}} \quad (\text{A.57})$$

$$f(v_z) = \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}} e^{-\frac{v_z^2}{\alpha^2}} \quad (\text{A.58})$$

Siendo  $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ , el número de moléculas con velocidad entre  $v$  y  $v + dv$  se obtiene integrando la función de distribución en coordenadas esféricas. El elemento de volumen en coordenadas esféricas es  $dv_{ev} = v^2 \sin \theta dv d\theta d\phi$ . Por lo tanto, el número de moléculas  $dn$  con rapidez entre  $v$  y  $v + dv$  es:

$$dn = N \frac{1}{\pi^{3/2}\alpha^3} e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} 4\pi v^2 dv = \frac{4N}{\sqrt{\pi}\alpha^3} e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} v^2 dv \quad (\text{A.59})$$

Para hallar la velocidad media  $\bar{v}$  y el valor medio del cuadrado de la velocidad  $\overline{v^2}$ , se utilizan las siguientes definiciones:

$$\bar{v} = \frac{1}{N} \int_0^\infty v \frac{dn}{dv} dv \quad \text{y} \quad \overline{v^2} = \frac{1}{N} \int_0^\infty v^2 \frac{dn}{dv} dv \quad (\text{A.60})$$

Finalmente, la velocidad más probable se encuentra derivando la distribución de velocidades  $\frac{dn}{dv}$  con respecto a  $v$  e igualando a cero:

$$\frac{d}{dv} \left( \frac{dn}{dv} \right) = 0 \quad (\text{A.61})$$

## Proposición 5

Consideremos dos grupos de partículas con distribuciones de velocidad en la dirección  $x$  dadas por:

$$dn_x = \frac{N}{\alpha\sqrt{\pi}} e^{-\frac{v_x^2}{\alpha^2}} dv_x \quad (\text{A.62})$$

y

$$dn'_x = \frac{N'}{\beta\sqrt{\pi}} e^{-\frac{v_x'^2}{\beta^2}} dv'_x \quad (\text{A.63})$$

Aplicamos la transformación galileana de velocidades para relacionar las velocidades en los dos sistemas de referencia:

$$u_x = v'_x - v_x \quad \longrightarrow \quad v'_x = u_x + v_x \quad (\text{A.64})$$

$$du_x = dv'_x - dv_x \quad \longrightarrow \quad dv'_x = du_x + dv_x \quad (\text{A.65})$$

Dado que las distribuciones de velocidad de cada grupo de partículas son independientes, la distribución conjunta del número de pares de partículas con velocidades  $v_x$  y  $v'_x$  en los respectivos rangos  $dv_x$  y  $dv'_x$  es el producto de las distribuciones individuales:

$$d(n_x n'_x) = dn_x dn'_x = \frac{NN'}{\alpha\beta\pi} e^{-\frac{v_x'^2}{\beta^2}} e^{-\frac{v_x^2}{\alpha^2}} dv'_x dv_x \quad (\text{A.66})$$

Sustituyendo  $v'_x = u_x + v_x$  y  $dv'_x = du_x + dv_x$ :

$$dn_x dn'_x = \frac{NN'}{\alpha\beta\pi} e^{-\frac{(u_x+v_x)^2}{\beta^2} - \frac{v_x^2}{\alpha^2}} (du_x + dv_x) dv_x \quad (\text{A.67})$$

Para hallar el número de pares con una velocidad relativa entre  $u_x$  y  $u_x + du_x$ , sin restricciones en la velocidad  $v_x$ , integramos sobre todos los valores posibles de  $v_x$ :

$$dn_{u_x} = \frac{NN'}{\alpha\beta\pi} du_x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(u_x+v_x)^2}{\beta^2} - \frac{v_x^2}{\alpha^2}} dv_x \quad (\text{A.68})$$

Realizando la integral (como se detalló en la respuesta anterior), obtenemos:

$$dn_{u_x} = \frac{NN'}{\sqrt{\pi}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} e^{-\frac{u_x^2}{\alpha^2 + \beta^2}} du_x \quad (\text{A.69})$$

# Apéndice B

## Solución a las ecuaciones de Langevin

Las siguientes soluciones están basadas en los libros y artículos citados (Lemons, 2002; Gillespie, 1996; Martín Sierra, 2017; Contreras-Vergara y cols., 2021; van Kampen, 2007).

### B.1. Partícula de Rayleigh

**Enunciado:** Considere un cuerpo esférico de radio  $r$  que se mueve a lo largo de un fluido de viscosidad  $\eta$ . Dicho cuerpo se encuentra sometido a una fuerza estocástica  $F_{est}$  con las propiedades mencionadas a lo largo de la sección 4.3. Además se asume como condiciones iniciales  $v(0) = v_0$  y  $x(0) = x_0$ .

**Solución:** Dicho, esto las ecuaciones propuestas para el sistema serán iguales a:

$$v(t + \Delta t) - v(t) = -\gamma v(t)\Delta t + \sqrt{\beta^2 \Delta t} N_t^{t+\Delta t}(0, 1) \quad (\text{B.1})$$

$$x(t + \Delta t) - x(t) = v(t)\Delta t \quad (\text{B.2})$$

Donde  $\sqrt{\beta^2 \Delta t} N_t^{t+\Delta t}(0, 1)$  es el propagador de Markov. Si reemplazamos  $t = 0$ , obtenemos:

$$v(\Delta t) - v(0) = -\gamma v(0)\Delta t + \sqrt{\beta^2 \Delta t} N_0^{\Delta t}(0, 1) \quad (\text{B.3})$$

Y seguido reemplazamos en la expresión B.1  $t = \Delta t$ :

$$v(2\Delta t) - v(\Delta t) = -\gamma v(\Delta t)\Delta t + \sqrt{\beta^2 \Delta t} N_{\Delta t}^{2\Delta t}(0, 1) \quad (\text{B.4})$$

Ahora, si se despeja  $v(\Delta t)$  de B.3 y sustituye en B.4:

$$v(2\Delta t) = v(0)(1 - \gamma\Delta t)^2 + (1 - \gamma\Delta t)\sqrt{\beta^2 \Delta t} N_0^{\Delta t}(0, 1) + \sqrt{\beta^2 \Delta t} N_{\Delta t}^{2\Delta t}(0, 1) \quad (\text{B.5})$$

Podremos observar, que los valores:  $v(\Delta t)$ ,  $v(2\Delta t)$ ,  $v(3\Delta t)$ ,  $\dots$ ,  $v(t)$  están compuestas por distribuciones normales, por lo tanto, si  $v(t)$  se compone de la suma de todos sus intervalos  $v(\Delta t)$ ,  $v(2\Delta t)$ ,  $v(3\Delta t)$ ,  $\dots$ , debido al teorema del límite central, es posible asegurar que si el número de intervalos tiende a  $\infty$  la distribución final será una normal:

$$v(t) = N_0^t(\langle v(t) \rangle, \langle \langle v^2(t) \rangle \rangle) \quad (\text{B.6})$$

Esto reduce el problema, ya que solamente se requiere hallar el valor esperado y la varianza, dos cantidades que no son variables aleatorias. Si queremos hallar el valor esperado, lo aplicamos directamente en la ecuación B.1:

$$\langle v(t + \Delta t) - v(t) \rangle = \langle -\gamma v(t) \Delta t + \sqrt{\beta^2 \Delta t} N_t^{t+\Delta t}(0, 1) \rangle \quad (\text{B.7})$$

$$\langle v(t + \Delta t) \rangle - \langle v(t) \rangle = \langle -\gamma v(t) \Delta t \rangle + \langle \sqrt{\beta^2 \Delta t} N_t^{t+\Delta t}(0, 1) \rangle$$

$$\langle v(t + \Delta t) \rangle - \langle v(t) \rangle = -\gamma \langle v(t) \rangle \Delta t + \sqrt{\beta^2 \Delta t} \langle N_t^{t+\Delta t}(0, 1) \rangle$$

Como el valor esperado de la distribución normal  $N_t^{t+\Delta t}(0, 1)$  es cero, entonces el término :  $\langle N_t^{t+\Delta t}(0, 1) \rangle$  será igual a 0.

$$\langle v(t + \Delta t) \rangle - \langle v(t) \rangle = -\gamma \langle v(t) \rangle \Delta t \quad (\text{B.8})$$

Si la expresión es dividida sobre  $\Delta t$  y se aplica el límite, donde  $\Delta t \rightarrow 0$ , entonces:

$$\frac{\langle v(t + \Delta t) \rangle - \langle v(t) \rangle}{\Delta t} = -\gamma \langle v(t) \rangle \quad (\text{B.9})$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle v(t + \Delta t) \rangle - \langle v(t) \rangle}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} -\gamma \langle v(t) \rangle$$

$$\frac{d\langle v(t) \rangle}{dt} = -\gamma \langle v(t) \rangle \quad (\text{B.10})$$

Si se resuelve la ecuación diferencial B.10, se encuentra que:

$$\int \frac{d\langle v(t) \rangle}{\langle v(t) \rangle} = \int -\gamma dt$$

$$\ln |\langle v(t) \rangle| = -\gamma t + c$$

$$\langle v(t) \rangle = C e^{-\gamma t}$$

Considerando la condición inicial, entonces:

$$v_0 = C e^{-\gamma(0)} = C$$

$$\langle v(t) \rangle = v_0 e^{-\gamma t} \quad (\text{B.11})$$

Ahora, para hallar la varianza se recuerda la definición de su valor:

$$\langle \langle v^2(t) \rangle \rangle = \langle v^2(t) \rangle - \langle v(t) \rangle^2 \quad (\text{B.12})$$

Sin embargo, como se puede observar requiere del momento  $\langle v^2(t) \rangle$ . Para ello, definiremos la siguiente cantidad:

$$\Delta[v^2(t)] = [v(t + \Delta t)]^2 - [v(t)]^2 \quad (\text{B.13})$$

El primer término de la diferencia puede ser despejado de la ecuación B.1:

$$v(t + \Delta t) = v(t) - \gamma v(t)\Delta t + \sqrt{\beta^2 \Delta t} N_t^{t+\Delta t}(0, 1)$$

Tal que al ser reemplazado en la expresión B.13

$$\Delta[v^2(t)] = [v(t) - \gamma v(t)\Delta t + \sqrt{\beta^2 \Delta t} N_t^{t+\Delta t}(0, 1)]^2 - [v(t)]^2 \quad (\text{B.14})$$

Si se expanden los términos obtenemos:

$$\Delta[v^2(t)] = v^2(t)(1 - \gamma\Delta t)^2 - 2v(t)(1 - \gamma\Delta t)\sqrt{\beta^2 \Delta t} N_t^{t+\Delta t}(0, 1) + \beta^2 \Delta t [N_t^{t+\Delta t}(0, 1)]^2 - v^2(t)$$

$$\begin{aligned} \Delta[v^2(t)] = & \cancel{v^2(t)} - 2\gamma v^2(t)\Delta t + \gamma^2 [\Delta t]^2 - 2v(t)\sqrt{\beta^2 \Delta t} N_t^{t+\Delta t}(0, 1) \\ & + 2\gamma v(t)\sqrt{\beta^2} [\Delta t]^{\frac{3}{2}} N_t^{t+\Delta t}(0, 1) + \beta^2 \Delta t [N_t^{t+\Delta t}(0, 1)]^2 - \cancel{v^2(t)} \end{aligned}$$

Los valores  $[\Delta t]^2$  y  $[\Delta t]^{\frac{3}{2}}$  al ser tan pequeños, directamente se asumen como cero, lo que permite definir:

$$\Delta[v^2(t)] = -2\gamma v^2(t)\Delta t - 2v(t)\sqrt{\beta^2 \Delta t} N_t^{t+\Delta t}(0, 1) + \beta^2 \Delta t [N_t^{t+\Delta t}(0, 1)]^2 \quad (\text{B.15})$$

Si se realiza el promedio en la expresión anterior:

$$\Delta\langle v^2(t) \rangle = \langle -2\gamma v^2(t)\Delta t - 2v(t)\sqrt{\beta^2 \Delta t} N_t^{t+\Delta t}(0, 1) + \beta^2 \Delta t [N_t^{t+\Delta t}(0, 1)]^2 \rangle \quad (\text{B.16})$$

$$\Delta\langle v^2(t) \rangle = \langle -2\gamma v^2(t)\Delta t \rangle - \langle 2v(t)\sqrt{\beta^2 \Delta t} N_t^{t+\Delta t}(0, 1) \rangle + \langle \beta^2 \Delta t [N_t^{t+\Delta t}(0, 1)]^2 \rangle$$

$$\Delta\langle v^2(t) \rangle = -2\gamma \langle v^2(t) \rangle \Delta t - 2\sqrt{\beta^2 \Delta t} \langle v(t) N_t^{t+\Delta t}(0, 1) \rangle + \beta^2 \Delta t \langle [N_t^{t+\Delta t}(0, 1)]^2 \rangle \quad (\text{B.17})$$

En la expresión anterior se puede denotar dos expresiones nuevas:  $\langle v(t) N_t^{t+\Delta t}(0, 1) \rangle$  y  $\langle [N_t^{t+\Delta t}(0, 1)]^2 \rangle$ , las cuales pueden ser halladas fácilmente. Para la primera se debe tener en cuenta que:  $v(t)$  y  $N_t^{t+\Delta t}(0, 1)$  son estadísticamente independientes, por lo tanto:

$$\langle v(t) N_t^{t+\Delta t}(0, 1) \rangle = \langle v(t) \rangle \langle N_t^{t+\Delta t}(0, 1) \rangle = 0 \quad (\text{B.18})$$

En la segunda, si la varianza de la distribución  $N_t^{t+\Delta t}(0, 1)$  es igual a 1, entonces:

$$\langle \langle [N_t^{t+\Delta t}(0, 1)]^2 \rangle \rangle = \langle [N_t^{t+\Delta t}(0, 1)]^2 \rangle - \langle [N_t^{t+\Delta t}(0, 1)] \rangle^2 = \langle [N_t^{t+\Delta t}(0, 1)]^2 \rangle = 1 \quad (\text{B.19})$$

Reemplazando B.18 y B.19 en B.17, se obtiene:

$$\Delta \langle v^2(t) \rangle = -2\gamma \langle v^2(t) \rangle \Delta t + \beta^2 \Delta t \quad (\text{B.20})$$

Al igual que en el caso anterior, se pasa a dividir  $\Delta t$  y realiza el límite  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \langle v^2(t) \rangle}{\Delta t} &= -2\gamma \langle v^2(t) \rangle + \beta^2 \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \langle v^2(t) \rangle}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [-2\gamma \langle v^2(t) \rangle + \beta^2] \\ \frac{d \langle v^2(t) \rangle}{dt} &= -2\gamma \langle v^2(t) \rangle + \beta^2 \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Ahora, al resolver la ecuación diferencial B.21:

$$\begin{aligned} \int \frac{d \langle v^2(t) \rangle}{-2\gamma \langle v^2(t) \rangle + \beta^2} &= \int dt \\ -\frac{1}{2\gamma} \ln | -2\gamma \langle v^2(t) \rangle + \beta^2 | &= t + c \\ -2\gamma \langle v^2(t) \rangle + \beta^2 &= C e^{-2\gamma t} \\ \langle v^2(t) \rangle &= \frac{\beta^2}{2\gamma} - \frac{C}{2\gamma} e^{-2\gamma t} \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

Teniendo en cuenta la condición inicial  $v(0) = v_0$ , se halla finalmente la expresión que requerimos:

$$\begin{aligned} v_0^2 &= \frac{\beta^2}{2\gamma} - \frac{C}{2\gamma} e^{-2\gamma(0)} = \frac{\beta^2}{2\gamma} - \frac{C}{2\gamma} \\ C &= \beta^2 - 2\gamma v_0^2 \\ \langle v^2(t) \rangle &= \frac{\beta^2}{2\gamma} - \frac{(\beta^2 - 2\gamma v_0^2)}{2\gamma} e^{-2\gamma t} \\ \langle v^2(t) \rangle &= \frac{\beta^2}{2\gamma} (1 - e^{-2\gamma t}) + v_0^2 e^{-2\gamma t} \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

Ahora, se reemplaza B.23 y B.11 en B.12, se obtiene la varianza requerida:

$$\begin{aligned} \langle \langle v^2(t) \rangle \rangle &= \frac{\beta^2}{2\gamma} (1 - e^{-2\gamma t}) + v_0^2 e^{-2\gamma t} - (v_0 e^{-\gamma t})^2 \\ \langle \langle v^2(t) \rangle \rangle &= \frac{\beta^2}{2\gamma} (1 - e^{-2\gamma t}) \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

Ya con ambos valores, se define la distribución normal que permite modelar la “velocidad” en una partícula de Rayleigh:

$$v(t) = N_0^t \left( v_0 e^{-\gamma t}, \frac{\beta^2}{2\gamma} (1 - e^{-2\gamma t}) \right) \quad (\text{B.25})$$

Siendo la densidad de probabilidad asociada a la variable aleatoria  $v(t)$ :

$$p(v, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \left(\frac{\beta^2}{2\gamma}\right) (1 - e^{-2\gamma t})}} \exp \left( \frac{-(v - v_0 e^{-\gamma t})^2}{2 \left(\frac{\beta^2}{2\gamma}\right) (1 - e^{-2\gamma t})} \right) \quad (\text{B.26})$$

Ahora, para hallar la “posición”  $x(t)$  de la partícula se utiliza la expresión B.2, esta tiene la misma condición que la “velocidad”  $v(t)$  frente a su definición. Por lo tanto:

$$x(t) = N_0^t (\langle x(t) \rangle, \langle \langle x^2(t) \rangle \rangle) \quad (\text{B.27})$$

Para ello, primero se halla su promedio:

$$\langle x(t + \Delta t) - x(t) \rangle = \langle v(t) \Delta t \rangle \quad (\text{B.28})$$

Si la expresión se divide  $\Delta t$  y además, toma el límite  $\Delta t \rightarrow 0$ , entonces:

$$\begin{aligned} \langle x(t + \Delta t) \rangle - \langle x(t) \rangle &= \langle v(t) \rangle \Delta t \\ \frac{\langle x(t + \Delta t) \rangle - \langle x(t) \rangle}{\Delta t} &= \langle v(t) \rangle \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle x(t + \Delta t) \rangle - \langle x(t) \rangle}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle v(t) \rangle \\ \frac{d\langle x(t) \rangle}{dt} &= \langle v(t) \rangle \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

Así, se puede hallar el valor esperado de la posición integrando el valor esperado de la velocidad que hallado anteriormente:

$$\langle x(t) \rangle = \int \langle v(t) \rangle dt \quad (\text{B.30})$$

$$\langle x(t) \rangle = \int v_0 e^{-\gamma t} dt$$

$$\langle x(t) \rangle = -\frac{v_0 e^{-\gamma t}}{\gamma} + c \quad (\text{B.31})$$

Si tenemos en cuenta las condiciones iniciales  $x(0) = x_0$ , entonces:

$$x_0 = -\frac{v_0 e^{-\gamma(0)}}{\gamma} + c = -\frac{v_0}{\gamma} + c$$

$$c = x_0 + \frac{v_0}{\gamma}$$

$$\langle x(t) \rangle = \frac{v_0}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t}) + x_0 \quad (\text{B.32})$$

Ahora, para hallar la varianza se hace uso de su definición:

$$\langle \langle x^2(t) \rangle \rangle = \langle x^2(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2 \quad (\text{B.33})$$

Sin embargo, al igual que la velocidad es necesario hallar en principio el momento  $\langle x^2(t) \rangle$ . Si definimos:

$$\Delta[x^2(t)] = [x(t + \Delta t)]^2 - [x(t)]^2 \quad (\text{B.34})$$

Si se despeja  $x(t + \Delta t)$  de la ecuación B.2:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + v(t)\Delta t$$

Y posteriormente se reemplaza en:

$$\Delta[x^2(t)] = [x(t) + v(t)\Delta t]^2 - [x(t)]^2 \quad (\text{B.35})$$

$$\Delta[x^2(t)] = \cancel{x^2(t)} + 2x(t)v(t)\Delta t + v^2(t)[\Delta t]^2 - \cancel{x^2(t)}$$

Teniendo en cuenta que  $[\Delta t]^2$  es un valor tan pequeño que tiende a cero:

$$\Delta[x^2(t)] = 2x(t)v(t)\Delta t \quad (\text{B.36})$$

Ahora, se halla el valor esperado:

$$\langle [x(t + \Delta t)]^2 - [x(t)]^2 \rangle = \langle 2x(t)v(t)\Delta t \rangle \quad (\text{B.37})$$

Además, se dividen ambos lados de la ecuación sobre  $\Delta t$ , y este tiende a cero:

$$\langle [x(t + \Delta t)]^2 \rangle - \langle [x(t)]^2 \rangle = 2\langle x(t)v(t) \rangle \Delta t$$

$$\frac{\langle [x(t + \Delta t)]^2 \rangle - \langle [x(t)]^2 \rangle}{\Delta t} = 2\langle x(t)v(t) \rangle$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle [x(t + \Delta t)]^2 \rangle - \langle [x(t)]^2 \rangle}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} 2\langle x(t)v(t) \rangle$$

$$\frac{d\langle x^2(t) \rangle}{dt} = 2\langle x(t)v(t) \rangle \quad (\text{B.38})$$

Como no se conoce el valor de  $\langle x(t)v(t) \rangle$ , se propone hallar la razón de cambio en la varianza con respecto al tiempo:

$$\frac{d\langle \langle x^2(t) \rangle \rangle}{dt} = \frac{d}{dt} [\langle x^2(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2] \quad (\text{B.39})$$

$$\frac{d\langle x^2(t) \rangle}{dt} = \frac{d\langle x^2(t) \rangle}{dt} - \frac{d\langle x(t) \rangle^2}{dt}$$

$$\frac{d\langle x^2(t) \rangle}{dt} = \frac{d\langle x^2(t) \rangle}{dt} - 2\langle x(t) \rangle \frac{d\langle x(t) \rangle}{dt}$$

Si se utiliza las definiciones B.38 y B.29, obtenemos:

$$\frac{d\langle x^2(t) \rangle}{dt} = 2\langle x(t)v(t) \rangle - 2\langle x(t) \rangle \langle v(t) \rangle \quad (\text{B.40})$$

$$\frac{d\langle x^2(t) \rangle}{dt} = 2[\langle x(t)v(t) \rangle - \langle x(t) \rangle \langle v(t) \rangle]$$

Teniendo en cuenta que la definición de covarianza es igual a:  $\text{cov} \{x(t), v(t)\} = \langle x(t)v(t) \rangle - \langle x(t) \rangle \langle v(t) \rangle$ , entonces

$$\frac{d\langle x^2(t) \rangle}{dt} = 2 \text{cov} \{x(t), v(t)\} \quad (\text{B.41})$$

De igual manera, no conocemos el valor de la covarianza  $\text{cov} \{x(t), v(t)\}$ , por lo tanto, se define un pequeño cambio de covarianza  $\Delta[\text{cov} \{x(t), v(t)\}]$ :

$$\Delta[\text{cov} \{x(t), v(t)\}] = [\text{cov} \{x(t + \Delta t), v(t + \Delta t)\}] - [\text{cov} \{x(t), v(t)\}] \quad (\text{B.42})$$

$$\Delta[\text{cov} \{x(t), v(t)\}] = \langle x(t + \Delta t)v(t + \Delta t) \rangle - \langle x(t + \Delta t) \rangle \langle v(t + \Delta t) \rangle - [\langle x(t)v(t) \rangle - \langle x(t) \rangle \langle v(t) \rangle]$$

$$\Delta[\text{cov} \{x(t), v(t)\}] = \langle [x(t) + v(t)\Delta t][v(t) - \gamma v(t)\Delta t + \sqrt{\beta^2 \Delta t} N_t^{t+\Delta t}(0, 1)] \rangle$$

$$- \langle [x(t) + v(t)\Delta t] \rangle \langle [v(t) - \gamma v(t)\Delta t + \sqrt{\beta^2 \Delta t} N_t^{t+\Delta t}(0, 1)] \rangle - [\langle x(t)v(t) \rangle - \langle x(t) \rangle \langle v(t) \rangle]$$

$$\Delta[\text{cov} \{x(t), v(t)\}] = \langle x(t)v(t) + v^2(t)\Delta t - \gamma x(t)v(t)\Delta t - \gamma v^2(t)[\Delta t]^2 + x(t)\sqrt{\beta^2 \Delta t} N_t^{t+\Delta t}(0, 1) \rangle$$

$$+ v(t)[\Delta t]^{\frac{3}{2}} \sqrt{\beta^2} N_t^{t+\Delta t}(0, 1) \rangle - \langle x(t) + v(t)\Delta t \rangle \langle v(t) - \gamma v(t)\Delta t + \sqrt{\beta^2 \Delta t} N_t^{t+\Delta t}(0, 1) \rangle$$

$$- [\langle x(t)v(t) \rangle - \langle x(t) \rangle \langle v(t) \rangle]$$

Recordando que los valores  $[\Delta t]^2$  y  $[\Delta t]^{\frac{3}{2}}$  tienden a cero:

$$\Delta[\text{cov} \{x(t), v(t)\}] = \langle \cancel{x(t)v(t)} \rangle + \langle v^2(t) \rangle \Delta t - \gamma \langle x(t)v(t) \rangle \Delta t + \sqrt{\beta^2 \Delta t} \langle x(t) N_t^{t+\Delta t}(0, 1) \rangle$$

$$- [\langle x(t) \rangle + \langle v(t) \rangle \Delta t] [\langle v(t) \rangle - \gamma \langle v(t) \rangle \Delta t + \sqrt{\beta^2 \Delta t} \langle N_t^{t+\Delta t}(0, 1) \rangle] - \langle \cancel{x(t)v(t)} \rangle + \langle x(t) \rangle \langle v(t) \rangle$$

$$\Delta[\text{cov}\{x(t), v(t)\}] = \langle v^2(t) \rangle \Delta t - \gamma \langle x(t)v(t) \rangle \Delta t + \sqrt{\beta^2 \Delta t} \langle x(t) N_t^{t+\Delta t}(0, 1) \rangle - \langle x(t) \rangle \langle v(t) \rangle - \langle v(t) \rangle^2 \Delta t - \gamma \langle x(t) \rangle \langle v(t) \rangle \Delta t - \gamma \langle v(t) \rangle^2 [\Delta t]^2 - \sqrt{\beta^2 \Delta t} \langle x(t) \rangle \langle N_t^{t+\Delta t}(0, 1) \rangle - \sqrt{\beta^2 \Delta t} \langle v(t) \rangle \langle N_t^{t+\Delta t}(0, 1) \rangle + \langle x(t) \rangle \langle v(t) \rangle$$

Teniendo en cuenta que:  $\langle N_t^{t+\Delta t}(0, 1) \rangle = 0$ , y que la variable aleatoria  $x(t)$  y la distribución  $N_t^{t+\Delta t}(0, 1)$  son independientes estadísticamente, entonces:

$$\langle x(t) N_t^{t+\Delta t}(0, 1) \rangle = \langle x(t) \rangle \langle N_t^{t+\Delta t}(0, 1) \rangle = 0 \quad (\text{B.43})$$

Finalmente, esto permite reducir la anterior expresión:

$$\Delta[\text{cov}\{x(t), v(t)\}] = \langle v^2(t) \rangle \Delta t - \gamma \langle x(t)v(t) \rangle \Delta t - \langle v(t) \rangle^2 \Delta t - \gamma \langle x(t) \rangle \langle v(t) \rangle \Delta t$$

$$\Delta[\text{cov}\{x(t), v(t)\}] = [\langle v^2(t) \rangle - \langle v(t) \rangle^2] \Delta t - \gamma [\langle x(t)v(t) \rangle - \langle x(t) \rangle \langle v(t) \rangle] \Delta t$$

$$\Delta[\text{cov}\{x(t), v(t)\}] = \langle \langle v^2(t) \rangle \rangle \Delta t - \gamma \text{cov}\{x(t), v(t)\} \Delta t \quad (\text{B.44})$$

Se divide ambos términos de la ecuación por  $\Delta t$ . Después, se toma el límite  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta[\text{cov}\{x(t), v(t)\}]}{\Delta t} &= \langle \langle v^2(t) \rangle \rangle - \gamma \text{cov}\{x(t), v(t)\} \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta[\text{cov}\{x(t), v(t)\}]}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [\langle \langle v^2(t) \rangle \rangle - \gamma \text{cov}\{x(t), v(t)\}] \\ \frac{d \text{cov}\{x(t), v(t)\}}{dt} &= \langle \langle v^2(t) \rangle \rangle - \gamma \text{cov}\{x(t), v(t)\} \end{aligned} \quad (\text{B.45})$$

Si resolvemos la ecuación diferencial B.45, obtenemos la covarianza:

$$\begin{aligned} \frac{d \text{cov}\{x(t), v(t)\}}{dt} + \gamma \text{cov}\{x(t), v(t)\} &= \frac{\beta^2}{2\gamma} (1 - e^{-2\gamma t}) \\ e^{\gamma t} \frac{d \text{cov}\{x(t), v(t)\}}{dt} + \gamma e^{\gamma t} \text{cov}\{x(t), v(t)\} &= \frac{\beta^2}{2\gamma} (1 - e^{-2\gamma t}) e^{\gamma t} \\ \frac{d[e^{\gamma t} \text{cov}\{x(t), v(t)\}]}{dt} &= \frac{\beta^2}{2\gamma} (e^{\gamma t} - e^{-\gamma t}) \\ e^{\gamma t} \text{cov}\{x(t), v(t)\} + c &= \int \frac{\beta^2}{2\gamma} (e^{\gamma t} - e^{-\gamma t}) dt \\ \text{cov}\{x(t), v(t)\} &= \frac{\beta^2}{2\gamma} (e^{-\gamma t}) \left( \frac{e^{\gamma t}}{\gamma} + \frac{e^{-\gamma t}}{\gamma} \right) - (e^{-\gamma t}) c \\ \text{cov}\{x(t), v(t)\} &= \frac{\beta^2}{2\gamma^2} (1 + e^{-2\gamma t}) - (e^{-\gamma t}) c \end{aligned} \quad (\text{B.46})$$

La covarianza cuando  $t = 0$  es nula, debido a que los valores están completamente determinados y no se encuentran relación en principio:

$$\begin{aligned} \text{cov} \{x(0), v(0)\} &= \frac{\beta^2}{2\gamma^2}(1 + e^{-2\gamma(0)}) - (e^{-\gamma(0)})c \\ c &= \frac{\beta^2}{\gamma^2} \end{aligned}$$

La expresión final de la covarianza será:

$$\text{cov} \{x(t), v(t)\} = \frac{\beta^2}{2\gamma^2}(1 - 2e^{-\gamma t} + e^{-2\gamma t}) \quad (\text{B.47})$$

Teniendo en cuenta el resultado obtenido anteriormente, se reemplaza en la definición B.41 para hallar finalmente la varianza de  $x(t)$ :

$$\frac{d\langle x^2(t) \rangle}{dt} = 2 \left[ \frac{\beta^2}{2\gamma^2}(1 - 2e^{-\gamma t} + e^{-2\gamma t}) \right] \quad (\text{B.48})$$

$$\int d\langle x^2(t) \rangle = \int \frac{\beta^2}{\gamma^2}(1 - 2e^{-\gamma t} + e^{-2\gamma t}) dt$$

$$\langle x^2(t) \rangle = \frac{\beta^2}{\gamma^2} \left( t + \frac{2e^{-\gamma t}}{\gamma} - \frac{e^{-2\gamma t}}{2\gamma} \right) + c \quad (\text{B.49})$$

Recordando que la varianza inicial es igual cero, debido a que las cantidades iniciales son fijas y no se encuentran relacionadas entre ellas:

$$\langle x^2(0) \rangle = \frac{\beta^2}{\gamma^2} \left( (0) + \frac{2e^{-\gamma(0)}}{\gamma} - \frac{e^{-2\gamma(0)}}{2\gamma} \right) + c$$

$$0 = \frac{\beta^2}{\gamma^2} \left( \frac{2}{\gamma} - \frac{1}{2\gamma} \right) + c$$

$$c = \frac{\beta^2}{\gamma^2} \left( -\frac{2}{\gamma} + \frac{1}{2\gamma} \right)$$

$$\langle x^2(t) \rangle = \frac{\beta^2}{\gamma^2} \left( t + \frac{2e^{-\gamma t}}{\gamma} - \frac{e^{-2\gamma t}}{2\gamma} \right) + \frac{\beta^2}{\gamma^2} \left( -\frac{2}{\gamma} + \frac{1}{2\gamma} \right)$$

$$\langle x^2(t) \rangle = \frac{\beta^2}{\gamma^2} \left( t - \frac{2}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t}) + \frac{1}{2\gamma}(1 - e^{-2\gamma t}) \right) \quad (\text{B.50})$$

Así, finalmente obtenemos que la distribución normal que permite modelar la “posición” en una partícula de Rayleigh:

$$x(t) = N_0^t \left( \frac{v_0}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t}) + x_0, \frac{\beta^2}{\gamma^2} \left( t - \frac{2}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t}) + \frac{1}{2\gamma}(1 - e^{-2\gamma t}) \right) \right) \quad (\text{B.51})$$

Siendo la densidad de probabilidad asociada con la variable aleatoria  $x(t)$  dependiente del tiempo:

$$p(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\left(\frac{\beta^2}{\gamma^2}\right)\left(t - \frac{2}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t}) + \frac{1}{2\gamma}(1 - e^{-2\gamma t})\right)}} \exp\left(\frac{-(x - \left[\frac{v_0}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t}) + x_0\right])^2}{2\left(\frac{\beta^2}{\gamma^2}\right)\left(t - \frac{2}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t}) + \frac{1}{2\gamma}(1 - e^{-2\gamma t})\right)}\right) \quad (\text{B.52})$$

### B.1.1. Análisis en el límite $t \rightarrow \infty$

En el infinito, las cuatro cantidades:  $\langle v(t) \rangle$ ,  $\langle\langle v^2(t) \rangle\rangle$ ,  $\langle x(t) \rangle$  y  $\langle\langle x^2(t) \rangle\rangle$  se comportan de diferentes maneras y de acuerdo a ello podemos entender como se comportan en un sistema que se encuentra en equilibrio termodinámico. Si realizamos el límite  $t \rightarrow \infty$  en cada una, obtenemos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle v(t) \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} v_0 e^{-\gamma t} = 0 \quad (\text{B.53})$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle\langle v^2(t) \rangle\rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\beta^2}{2\gamma} (1 - e^{-2\gamma t}) = \frac{\beta^2}{2\gamma} \quad (\text{B.54})$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle x(t) \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{v_0}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}) + x_0 = \frac{v_0}{\gamma} + x_0 \quad (\text{B.55})$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle\langle x^2(t) \rangle\rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\beta^2}{\gamma^2} \left( t - \frac{2}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t}) + \frac{1}{2\gamma}(1 - e^{-2\gamma t}) \right) = \frac{\beta^2}{\gamma^2} \lim_{t \rightarrow \infty} [t] \quad (\text{B.56})$$

Como podemos observar, en el infinito, la varianza de la posición diverge, por lo tanto, si solamente tomamos un tiempo muy grande, sin tender al infinito, obtenemos que la varianza del sistema será igual a:

$$\langle\langle x^2(t) \rangle\rangle_{t \rightarrow \infty} = \frac{\beta^2}{\gamma^2} t = 2 \left( \frac{\beta^2}{2\gamma^2} \right) t \quad (\text{B.57})$$

Dicha relación lineal ya ha sido encontrada por Eintein en 1905, por lo tanto, podemos asegurar que:

$$D = \frac{\beta^2}{2\gamma^2} \quad (\text{B.58})$$

Para hallar la amplitud de las fluctuaciones  $\beta^2$ , se hace uso del teorema de equipartición de la energía. En este caso, el único grado de libertad del sistema es de traslación cuando  $t \rightarrow \infty$ , por lo tanto:

$$\frac{m}{2} \left[ \lim_{t \rightarrow \infty} \langle\langle v^2(t) \rangle\rangle \right] = \frac{k_B T}{2} \quad (\text{B.59})$$

$$\frac{m}{2} \left[ \frac{\beta^2}{2\gamma} \right] = \frac{k_B T}{2}$$

Despejando la amplitud de las fluctuaciones  $\beta^2$ :

$$\beta^2 = \frac{2\gamma k_B T}{m} \quad (\text{B.60})$$

Si se reemplaza el resultado anterior en la ecuación B.58:

$$D = \frac{2\gamma k_B T}{2\gamma^2 m}$$

$$D = \frac{k_B T}{\gamma m} \quad (\text{B.61})$$

Finalmente, si reemplazamos  $k_B = R/N_A$  y  $\gamma = (6\pi r\eta)/m$ , obtenemos la primera relación de Einstein hallada en 1905:

$$D = \frac{RT}{6\pi r\eta N_A} \quad (\text{B.62})$$

## B.2. Circuito RC con ruido térmico

**Enunciado:** Considere un circuito compuesto por una resistencia eléctrica  $R$  no ideal y un capacitor  $C$ . Como la resistencia es no ideal, los portadores de carga en su interior se mueven de forma errática y generan una diferencia de potencial estocástica  $V_{est}(t)$ . Además, se considera como condiciones iniciales:  $Q(0) = Q_0$ .

$$R \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{Q(t)}{C} = V_{est}(t)$$

**Solución:** La ecuación diferencial asociada, donde  $\gamma = 1/(RC)$  será:

$$Q(t + \Delta t) - Q(t) = -\gamma Q(t)\Delta t + \sqrt{\beta^2 \Delta t} N_t^{t+\Delta t}(0, 1) \quad (\text{B.63})$$

$$I(t)\Delta t = Q(t + \Delta t) - Q(t) \quad (\text{B.64})$$

Donde  $\sqrt{\beta^2 \Delta t} N_t^{t+\Delta t}(0, 1)$  es el propagador de Markov. Teniendo en cuenta lo visto con la partícula de Rayleigh, proponemos para el sistema una solución basada en la distribución normal para la carga eléctrica  $Q(t)$ :

$$Q(t) = N_0^t(\langle Q(t) \rangle, \langle Q^2(t) \rangle) \quad (\text{B.65})$$

En principio, al igual que en el ejercicio anterior, se propone el valor esperado de la expresión inicial, B.63:

$$\langle Q(t + \Delta t) - Q(t) \rangle = \langle -\gamma Q(t)\Delta t + \sqrt{\beta^2 \Delta t} N_t^{t+\Delta t}(0, 1) \rangle \quad (\text{B.66})$$

$$\langle Q(t + \Delta t) \rangle - \langle Q(t) \rangle = \langle -\gamma Q(t)\Delta t \rangle + \langle \sqrt{\beta^2 \Delta t} N_t^{t+\Delta t}(0, 1) \rangle$$

$$\langle Q(t + \Delta t) \rangle - \langle Q(t) \rangle = -\gamma \langle Q(t) \rangle \Delta t + \sqrt{\beta^2 \Delta t} \langle N_t^{t+\Delta t}(0, 1) \rangle$$

Recordando que el valor esperado de  $N_t^{t+\Delta t}(0, 1)$  es cero, entonces:

$$\langle Q(t + \Delta t) \rangle - \langle Q(t) \rangle = -\gamma \langle Q(t) \rangle \Delta t \quad (\text{B.67})$$

Si se dividen ambos términos por  $\Delta t$  y utilizamos el límite  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{\langle Q(t + \Delta t) \rangle - \langle Q(t) \rangle}{\Delta t} &= -\gamma \langle Q(t) \rangle \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle Q(t + \Delta t) \rangle - \langle Q(t) \rangle}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} -\gamma \langle Q(t) \rangle \\ \frac{d\langle Q(t) \rangle}{dt} &= -\gamma \langle Q(t) \rangle \end{aligned} \quad (\text{B.68})$$

Al resolver la ecuación diferencial B.68 obtenemos:

$$\begin{aligned} \int \frac{d\langle Q(t) \rangle}{\langle Q(t) \rangle} &= \int -\gamma dt \\ \ln |\langle Q(t) \rangle| + c &= -\gamma t \\ \langle Q(t) \rangle &= C e^{-\gamma t} \end{aligned} \quad (\text{B.69})$$

Considerando la condición inicial  $Q(0) = Q_0$ , hallamos la constante:

$$\langle Q(0) \rangle = C e^{-\gamma(0)}$$

$$Q_0 = C$$

$$\langle Q(t) \rangle = Q_0 e^{-\gamma t} \quad (\text{B.70})$$

Ahora, vamos para hallar la varianza, de igual manera se define el momento:  $\langle Q^2(t) \rangle$ . Para ello se propone:

$$\Delta[Q^2(t)] = [Q(t + \Delta t)]^2 - [Q(t)]^2 \quad (\text{B.71})$$

Se despeja de la expresión B.63 el término  $Q(t + \Delta t)$  y se reemplaza en la definición B.71:

$$\Delta[Q^2(t)] = [Q(t) - \gamma Q(t) \Delta t + \sqrt{\beta^2 \Delta t} N_{\Delta t}^{t+\Delta t}(0, 1)]^2 - [Q(t)]^2$$

$$\Delta[Q^2(t)] = (1 - \gamma \Delta t)^2 Q^2(t) + \beta^2 \Delta t [N_{\Delta t}^{t+\Delta t}(0, 1)]^2 + (1 - \Delta t) Q(t) \sqrt{\beta^2 \Delta t} N_{\Delta t}^{t+\Delta t}(0, 1) - Q^2(t)$$

$$\begin{aligned} \Delta[Q^2(t)] &= \cancel{Q^2(t)} - 2\gamma \Delta t Q^2(t) + \gamma^2 [\Delta t]^2 Q^2(t) + \beta^2 \Delta t [N_{\Delta t}^{t+\Delta t}(0, 1)]^2 \\ &\quad + Q(t) \sqrt{\beta^2 \Delta t} N_{\Delta t}^{t+\Delta t}(0, 1) - Q(t) \sqrt{\beta^2} [\Delta t]^{\frac{3}{2}} N_{\Delta t}^{t+\Delta t}(0, 1) - \cancel{Q^2(t)} \end{aligned}$$

Ahora, teniendo en cuenta que  $[\Delta t]^{\frac{3}{2}}$  y  $[\Delta t]^2$  tienden a cero debido a que son cantidades muy pequeñas:

$$\begin{aligned} \Delta[Q^2(t)] &= -2\gamma\Delta t Q^2(t) + \cancel{\gamma^2[\Delta t]^2 Q^2(t)} + \beta^2 \Delta t [N_{\Delta t}^{t+\Delta t}(0, 1)]^2 \\ &\quad + Q(t) \sqrt{\beta^2 \Delta t} N_{\Delta t}^{t+\Delta t}(0, 1) - \cancel{Q(t) \sqrt{\beta^2 [\Delta t]^{\frac{3}{2}}} N_{\Delta t}^{t+\Delta t}(0, 1)} \end{aligned}$$

$$\Delta[Q^2(t)] = -2\gamma\Delta t Q^2(t) + \beta^2 \Delta t [N_{\Delta t}^{t+\Delta t}(0, 1)]^2 + Q(t) \sqrt{\beta^2 \Delta t} N_{\Delta t}^{t+\Delta t}(0, 1) \quad (\text{B.72})$$

Ahora, en la expresión anterior aplicaremos el valor esperado:

$$\langle [Q(t + \Delta t)]^2 - [Q(t)]^2 \rangle = \langle -2\gamma\Delta t Q^2(t) + \beta^2 \Delta t [N_{\Delta t}^{t+\Delta t}(0, 1)]^2 + Q(t) \sqrt{\beta^2 \Delta t} N_{\Delta t}^{t+\Delta t}(0, 1) \rangle$$

$$\langle [Q(t + \Delta t)]^2 \rangle - \langle [Q(t)]^2 \rangle = \langle -2\gamma\Delta t Q^2(t) \rangle + \langle \beta^2 \Delta t [N_{\Delta t}^{t+\Delta t}(0, 1)]^2 \rangle + \langle Q(t) \sqrt{\beta^2 \Delta t} N_{\Delta t}^{t+\Delta t}(0, 1) \rangle$$

$$\Delta \langle Q^2(t) \rangle = -2\gamma\Delta t \langle Q^2(t) \rangle + \beta^2 \Delta t \langle [N_{\Delta t}^{t+\Delta t}(0, 1)]^2 \rangle + \sqrt{\beta^2 \Delta t} \langle Q(t) N_{\Delta t}^{t+\Delta t}(0, 1) \rangle \quad (\text{B.73})$$

Teniendo en cuenta que la carga  $Q(t)$  y la distribución  $N_{\Delta t}^{t+\Delta t}(0, 1)$  son independientes estadísticamente:

$$\langle Q(t) N_{\Delta t}^{t+\Delta t}(0, 1) \rangle = \langle Q(t) \rangle \langle N_{\Delta t}^{t+\Delta t}(0, 1) \rangle = 0 \quad (\text{B.74})$$

Además, si la varianza de  $\langle \langle N_{\Delta t}^{t+\Delta t}(0, 1) \rangle \rangle = 1$ , entonces la expresión B.73:

$$\Delta \langle Q^2(t) \rangle = -2\gamma\Delta t \langle Q^2(t) \rangle + \beta^2 \Delta t \quad (\text{B.75})$$

Acto seguido, se divide la expresión anterior sobre  $\Delta t$  y aplicamos el límite  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \langle Q^2(t) \rangle}{\Delta t} &= -2\gamma \langle Q^2(t) \rangle + \beta^2 \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \langle Q^2(t) \rangle}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [-2\gamma \langle Q^2(t) \rangle + \beta^2] \\ \frac{d \langle Q^2(t) \rangle}{dt} &= -2\gamma \langle Q^2(t) \rangle + \beta^2 \end{aligned} \quad (\text{B.76})$$

Al resolver la ecuación diferencial B.76 obtenemos la varianza de  $Q(t)$ :

$$\begin{aligned} \int \frac{d \langle Q^2(t) \rangle}{-2\gamma \langle Q^2(t) \rangle + \beta^2} &= \int dt \\ -\frac{1}{2\gamma} \ln | -2\gamma \langle Q^2(t) \rangle + \beta^2 | &= t + c \end{aligned}$$

$$-2\gamma\langle Q^2(t) \rangle + \beta^2 = Ce^{-2\gamma t}$$

$$\langle Q^2(t) \rangle = \frac{\beta^2}{2\gamma} - \frac{C}{2\gamma}e^{-2\gamma t} \quad (\text{B.77})$$

Teniendo en cuenta la condición inicial  $Q(0) = Q_0$ , obtenemos:

$$\langle Q^2(0) \rangle = \frac{\beta^2}{2\gamma} - \frac{C}{2\gamma}e^{-2\gamma(0)}$$

$$Q_0^2 = \frac{\beta^2}{2\gamma} - \frac{C}{2\gamma}$$

$$C = \beta^2 - 2\gamma Q_0^2$$

Reemplazando dicho valor:

$$\langle Q^2(t) \rangle = \frac{\beta^2}{2\gamma} - \frac{(\beta^2 - 2\gamma Q_0^2)}{2\gamma}e^{-2\gamma t}$$

$$\langle Q^2(t) \rangle = \frac{\beta^2}{2\gamma}(1 - e^{-2\gamma t}) + Q_0^2 e^{-2\gamma t} \quad (\text{B.78})$$

Ahora, si reemplazamos en la definición de varianza las expresiones B.78 y B.69, obtenemos:

$$\langle\langle Q^2(t) \rangle\rangle = \langle Q^2(t) \rangle - \langle Q(t) \rangle^2 \quad (\text{B.79})$$

$$\langle\langle Q^2(t) \rangle\rangle = Q_0^2 e^{-2\gamma t} + \frac{\beta^2}{2\gamma}(1 - e^{-2\gamma t}) - [Q_0 e^{-\gamma t}]^2$$

$$\langle\langle Q^2(t) \rangle\rangle = \frac{\beta^2}{2\gamma}(1 - e^{-2\gamma t}) \quad (\text{B.80})$$

Por lo tanto, la distribución normal final será igual a:

$$Q(t) = N_0^t \left( Q_0 e^{-\gamma t}, \frac{\beta^2}{2\gamma}(1 - e^{-2\gamma t}) \right) \quad (\text{B.81})$$

Siendo su densidad de probabilidad asociada con la variable  $Q(t)$  dependiente del tiempo:

$$p(Q, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\frac{\beta^2}{2\gamma})(1 - e^{-2\gamma t})}} \exp \left( \frac{-(Q - Q_0 e^{-\gamma t})^2}{2(\frac{\beta^2}{2\gamma})(1 - e^{-2\gamma t})} \right) \quad (\text{B.82})$$

### B.2.1. Análisis en el límite $t \rightarrow \infty$

En el infinito, las dos cantidades:  $\langle v(t) \rangle$  y  $\langle\langle v^2(t) \rangle\rangle$  representaran el comportamiento del circuito RC si se encuentra en equilibrio termodinámico. Si realizamos el límite  $t \rightarrow \infty$  en cada una, obtenemos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle Q(t) \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} Q_0 e^{-\gamma t} = 0 \quad (\text{B.83})$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle\langle Q^2(t) \rangle\rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\beta^2}{2\gamma} (1 - e^{-2\gamma t}) = \frac{\beta^2}{2\gamma} \quad (\text{B.84})$$

El circuito consta de un grado de libertad electromagnético, el cuál se encuentra ligado a la energía almacenada por el capacitor. En ese caso, podemos hallar la amplitud  $\beta^2$  de sus fluctuaciones:

$$\frac{1}{2C} \left[ \lim_{t \rightarrow \infty} \langle\langle Q^2(t) \rangle\rangle \right] = \frac{k_B T}{2} \quad (\text{B.85})$$

$$\frac{\beta^2}{2\gamma C} = k_B T$$

Despejando  $\beta^2$  y reemplazando  $\gamma = (RC)^{-1}$ :

$$\beta^2 = \frac{2k_B T}{R} \quad (\text{B.86})$$

Sin embargo, si queremos hallar la potencia disipada del circuito, asociada al ruido producido por la resistencia, haremos uso de del efecto Joule:

$$P = I(t)V(t) \quad (\text{B.87})$$

Primero hallamos la potencia del capacitor: en principio reemplazando a partir de la ley de Ohm  $I(t)R = V(t)$  la corriente eléctrica en la expresión anterior, teniendo en cuenta que la corriente eléctrica en un circuito en serie tiene el mismo valor en todos sus componentes. Luego la diferencia de potencial  $V(t)$  al interior de un capacitor se define a partir de la siguiente expresión  $V(t)C = Q(t)$ . Tal que:

$$P_C = \frac{Q^2(t)}{RC^2} \quad (\text{B.88})$$

Ahora, si la carga al interior del capacitor cuando  $t \rightarrow \infty$  unicamente depende de las variaciones aleatorias debido al movimiento aleatorio de los portadores de carga, la expresión anterior es igual a:

$$P_C = \frac{1}{RC^2} \left[ \lim_{t \rightarrow \infty} \langle\langle Q^2(t) \rangle\rangle \right] = \frac{k_B T}{RC} \quad (\text{B.89})$$

En este caso, la varianza de la diferencia de potencial  $V_C$  al interior del capacitor, cuando el circuito se encuentra en equilibrio termodinámico, será igual a:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle\langle V_C^2(t) \rangle\rangle = P_C R = \frac{k_B T}{C} \quad (\text{B.90})$$

Ahora, siendo que el sistema se encuentra en equilibrio termodinámico, la potencia “suministrada” por el capacitor debe ser disipada por la resistencia, por lo tanto:  $P_C = P_R$ . Ahora, para hallar la corriente que circula al interior de la resistencia, hacemos uso de la definición B.87 y la ley de Ohm.

$$P_R = R \lim_{t \rightarrow \infty} \langle \langle I^2(t) \rangle \rangle = \frac{k_B T}{RC} \quad (\text{B.91})$$

Hallando que la corriente que pasa a través de la resistencia es igual a:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle \langle I^2(t) \rangle \rangle = \frac{k_B T}{R^2 C} \quad (\text{B.92})$$

En un circuito RC clásico se puede hallar un ancho de banda  $\Delta f$ , propio de la solución en términos de la frecuencia, el cual se encuentra definido como:

$$\Delta f = \frac{1}{4RC} \quad (\text{B.93})$$

Si se reemplaza B.93 en B.92, obtenemos la corriente eléctrica que circula en la resistencia debido a las fluctuaciones eléctricas:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle \langle I^2(t) \rangle \rangle = \frac{4k_B T \Delta f}{R} \quad (\text{B.94})$$

Por último, teniendo en cuenta que la potencia disipada por la resistencia es igual a la potencia “suministrada” por el capacitor, es posible deducir las diferencias de potencial en ambos elementos es la misma:  $V_C = V_R$ . Por lo tanto, si usamos B.93 en B.90, hallaremos la diferencia de potencial en la resistencia:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle \langle V_R^2(t) \rangle \rangle = 4k_B T R \Delta f \quad (\text{B.95})$$

### B.3. Circuito RLC con ruido térmico

*Enunciado:* Considere un circuito  $RLC$ , compuesto por una inductancia  $L$ , un capacitor  $C$  y una resistencia no ideal  $R$ , la cual genera fluctuaciones térmicas, una diferencia de potencial estocástica  $V_{est}(t)$ , que se encuentran presentes en el sistema. Además, tiene como condiciones iniciales una corriente eléctrica inicial  $I(0) = I_0$ , y una carga  $Q(0) = Q_0$ .

$$L \frac{dI(t)}{dt} + RI(t) + \frac{Q(t)}{C} = V_{est}(t)$$

**Solución:** Las ecuaciones diferenciales que se encuentran asociadas son:

$$I(t + \Delta t) - I(t) = -\gamma I(t) \Delta t - \omega^2 Q(t) \Delta t + \sqrt{\beta^2 \Delta t} N_t^{t+\Delta t}(0, 1) \quad (\text{B.96})$$

$$Q(t + \Delta t) - Q(t) = I(t) \Delta t \quad (\text{B.97})$$

Donde  $\sqrt{\beta^2 \Delta t} N_t^{t+\Delta t}(0, 1)$  es el propagador de Markov. Al igual que el caso anterior, proponemos para la corriente eléctrica  $I(t)$  y la carga  $Q(t)$  una solución en torno a una distribución normal.

$$I(t) = N_0^t(\langle I(t) \rangle, \langle \langle I^2(t) \rangle \rangle) \quad (\text{B.98})$$

$$Q(t) = N_0^t(\langle Q(t) \rangle, \langle \langle Q^2(t) \rangle \rangle) \quad (\text{B.99})$$

Si se halla el valor esperado de las ecuaciones B.96 y B.97, podemos obtener dos relaciones que permiten desacoplar las expresiones:

$$\langle I(t + \Delta t) - I(t) \rangle = \langle -\gamma I(t) \Delta t - \omega^2 Q(t) \Delta t + \sqrt{\beta^2 \Delta t} N_t^{t+\Delta t}(0, 1) \rangle$$

$$\langle I(t + \Delta t) \rangle - \langle I(t) \rangle = \langle -\gamma I(t) \Delta t \rangle - \langle \omega^2 Q(t) \Delta t \rangle + \langle \sqrt{\beta^2 \Delta t} N_t^{t+\Delta t}(0, 1) \rangle$$

$$\Delta \langle I(t) \rangle = -\gamma \langle I(t) \rangle \Delta t - \omega^2 \langle Q(t) \rangle \Delta t + \sqrt{\beta^2 \Delta t} \langle N_t^{t+\Delta t}(0, 1) \rangle \quad (\text{B.100})$$

$$\langle Q(t + \Delta t) - Q(t) \rangle = \langle I(t) \Delta t \rangle$$

$$\langle Q(t + \Delta t) \rangle - \langle Q(t) \rangle = \langle I(t) \rangle \Delta t$$

$$\Delta \langle Q(t) \rangle = \langle I(t) \rangle \Delta t \quad (\text{B.101})$$

Si en las ecuaciones B.100 y B.101 dividimos ambos extremos sobre  $\Delta t$  y usamos el límite  $\Delta t \rightarrow 0$ . Además, se debe recordar que  $\langle N_t^{t+\Delta t}(0, 1) \rangle = 0$ . Entonces:

$$\Delta \langle I(t) \rangle = -\gamma \langle I(t) \rangle \Delta t - \omega^2 \langle Q(t) \rangle \Delta t$$

$$\frac{\Delta \langle I(t) \rangle}{\Delta t} = -\gamma \langle I(t) \rangle - \omega^2 \langle Q(t) \rangle$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \langle I(t) \rangle}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [-\gamma \langle I(t) \rangle - \omega^2 \langle Q(t) \rangle]$$

$$\frac{d \langle I(t) \rangle}{dt} = -\gamma \langle I(t) \rangle - \omega^2 \langle Q(t) \rangle \quad (\text{B.102})$$

$$\frac{\Delta \langle Q(t) \rangle}{\Delta t} = \langle I(t) \rangle$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \langle Q(t) \rangle}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle I(t) \rangle$$

$$\frac{d \langle Q(t) \rangle}{dt} = \langle I(t) \rangle \quad (\text{B.103})$$

Si reemplazamos B.103 en B.102, obtenemos:

$$\frac{d^2\langle Q(t)\rangle}{dt^2} = -\gamma\left\langle\frac{d\langle Q(t)\rangle}{dt}\right\rangle - \omega^2\langle Q(t)\rangle \quad (\text{B.104})$$

Para resolver la ecuación diferencial B.104, se propone una solución:  $\langle Q(t)\rangle = e^{\lambda t}$ , la cual permite hallar la siguiente ecuación característica:

$$\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega^2 = 0 \quad (\text{B.105})$$

Con raíces:

$$\lambda = \begin{cases} \frac{-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2}}{2} \\ \frac{-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2}}{2} \end{cases} \quad (\text{B.106})$$

Las cuales dependen del determinante:  $\Delta = \gamma^2 - 4\omega^2$ . Ya que el valor que tenga proporciona una naturaleza diferente al promedio de la distribución:

$$\Delta = \begin{cases} \gamma^2 - 4\omega^2 > 0 & \text{Sobreamortiguado} \\ \gamma^2 - 4\omega^2 = 0 & \text{Críticamente amortiguado} \\ \gamma^2 - 4\omega^2 < 0 & \text{Subamortiguado} \end{cases} \quad (\text{B.107})$$

En este caso, primero asumiremos el caso subamortiguado, por lo tanto:

$$\langle Q(t)\rangle = c_1 \exp\left(\frac{-\gamma + j\sqrt{4\omega^2 - \gamma^2}}{2} \cdot t\right) + c_2 \exp\left(\frac{-\gamma - j\sqrt{4\omega^2 - \gamma^2}}{2} \cdot t\right) \quad (\text{B.108})$$

Teniendo en cuenta que  $j$  es la cantidad imaginaria, podemos utilizar la formula de Euler:  $\exp(j\theta) = \cos\theta + j\sin\theta$ , para reescribir la expresión anterior:

$$\begin{aligned} \langle Q(t)\rangle &= c_1 \exp\left(-\frac{\gamma}{2} \cdot t\right) \exp\left(\frac{j\sqrt{4\omega^2 - \gamma^2}}{2} \cdot t\right) + c_2 \exp\left(-\frac{\gamma}{2} \cdot t\right) \exp\left(\frac{-j\sqrt{4\omega^2 - \gamma^2}}{2} \cdot t\right) \\ \langle Q(t)\rangle &= \exp\left(-\frac{\gamma}{2} \cdot t\right) \left[ c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{4\omega^2 - \gamma^2}}{2} \cdot t\right) + jc_1 \sin\left(\frac{\sqrt{4\omega^2 - \gamma^2}}{2} \cdot t\right) \right. \\ &\quad \left. + c_2 \cos\left(\frac{\sqrt{4\omega^2 - \gamma^2}}{2} \cdot t\right) - jc_2 \sin\left(\frac{\sqrt{4\omega^2 - \gamma^2}}{2} \cdot t\right) \right] \quad (\text{B.109}) \end{aligned}$$

Si asumimos que:

$$\alpha = \frac{\sqrt{4\omega^2 - \gamma^2}}{2} \quad (\text{B.110})$$

Entonces la anterior expresión puede ser reescrita

$$\langle Q(t) \rangle = \exp\left(-\frac{\gamma}{2} \cdot t\right) [(c_1 + c_2) \cos(\alpha t) + j(c_1 - c_2) \sin(\alpha t)] \quad (\text{B.111})$$

Donde  $k_1 = c_1 + c_2$  y  $k_2 = j(c_1 - c_2)$ :

$$\langle Q(t) \rangle = \exp\left(-\frac{\gamma}{2} \cdot t\right) [k_1 \cos(\alpha t) + k_2 \sin(\alpha t)] \quad (\text{B.112})$$

Ahora, si derivamos la expresión anterior, como ya se ha demostrado anteriormente, se halla el valor esperado de la corriente eléctrica:

$$\langle I(t) \rangle = \frac{d\langle Q(t) \rangle}{dt} = \frac{d}{dt} \left\{ \exp\left(-\frac{\gamma}{2} \cdot t\right) [k_1 \cos(\alpha t) + k_2 \sin(\alpha t)] \right\} \quad (\text{B.113})$$

$$\langle I(t) \rangle = -\frac{\gamma}{2} \exp\left(-\frac{\gamma}{2} \cdot t\right) [k_1 \cos(\alpha t) + k_2 \sin(\alpha t)] + \alpha \exp\left(-\frac{\gamma}{2} \cdot t\right) [-k_1 \sin(\alpha t) + k_2 \cos(\alpha t)]$$

$$\langle I(t) \rangle = \exp\left(-\frac{\gamma}{2} \cdot t\right) \cos(\alpha t) \left[ \alpha k_2 - \frac{\gamma k_1}{2} \right] - \exp\left(-\frac{\gamma}{2} \cdot t\right) \sin(\alpha t) \left[ \alpha k_1 + \frac{\gamma k_2}{2} \right] \quad (\text{B.114})$$

Si reemplazamos las condiciones iniciales en [B.112](#) y [B.114](#), obtenemos los valores de  $k_1$  y  $k_2$ .

$$\begin{aligned} \langle Q(0) \rangle &= \exp\left(-\frac{\gamma}{2} \cdot (0)\right) [k_1 \cos(\alpha(0)) + k_2 \sin(\alpha(0))] \\ Q_0 &= k_1 \end{aligned} \quad (\text{B.115})$$

$$\begin{aligned} \langle I(0) \rangle &= \exp\left(-\frac{\gamma}{2} \cdot (0)\right) \cos(\alpha(0)) \left[ \alpha k_2 - \frac{\gamma k_1}{2} \right] - \exp\left(-\frac{\gamma}{2} \cdot (0)\right) \sin(\alpha(0)) \left[ \alpha k_1 + \frac{\gamma k_2}{2} \right] \\ I_0 &= \alpha k_2 - \frac{\gamma k_1}{2} \\ k_2 &= \frac{I_0}{\alpha} + \frac{\gamma Q_0}{2\alpha} \end{aligned} \quad (\text{B.116})$$

Ahora, si reemplazamos los valores  $k_1$  y  $k_2$  en las ecuaciones [B.112](#) y [B.114](#), obtenemos las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \langle Q(t) \rangle &= \exp\left(-\frac{\gamma}{2} \cdot t\right) \left[ Q_0 \cos(\alpha t) + \left( I_0 + \frac{\gamma Q_0}{2} \right) \frac{\sin(\alpha t)}{\alpha} \right] \\ \alpha k_2 - \frac{\gamma k_1}{2} &= \alpha \left( \frac{I_0}{\alpha} + \frac{\gamma Q_0}{2\alpha} \right) - \frac{\gamma Q_0}{2} = I_0 \end{aligned} \quad (\text{B.117})$$

$$\alpha k_1 - \frac{\gamma k_2}{2} = \alpha Q_0 - \frac{\gamma}{2} \left( \frac{I_0}{\alpha} + \frac{\gamma Q_0}{2\alpha} \right) = Q_0 \left( \frac{4\alpha^2 + \gamma^2}{4\alpha} \right) - \frac{\gamma I_0}{2\alpha}$$

Si:

$$4\alpha^2 = 4 \left( \frac{4\omega^2 - \gamma^2}{4} \right) = 4\omega^2 - \gamma^2$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \alpha k_1 - \frac{\gamma k_2}{2} &= Q_0 \left( \frac{4\omega^2 - \gamma^2 + \gamma^2}{4\alpha} \right) - \frac{\gamma I_0}{2\alpha} = \frac{Q_0 \omega^2}{\alpha} - \frac{\gamma I_0}{2\alpha} \\ \langle I(t) \rangle &= \exp \left( -\frac{\gamma}{2} \cdot t \right) \left[ I_0 \cos(\alpha t) - \left( Q_0 \omega^2 + \frac{I_0 \gamma}{2} \right) \frac{\sin(\alpha t)}{\alpha} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.118})$$

Para hallar ambas varianzas:  $\langle\langle I^2(t) \rangle\rangle$  y  $\langle\langle Q^2 \rangle\rangle$ , se requieren los momentos:  $\langle I^2(t) \rangle$  y  $\langle Q^2 \rangle$ . Primero se halla  $\langle I^2(t) \rangle$ :

$$\Delta[I^2(t)] = [I(t + \Delta t)]^2 - [I(t)]^2 \quad (\text{B.119})$$

Despejamos de la ecuación B.96 la expresión  $I(t + \Delta t)$ :

$$I(t + \Delta t) = I(t) - \gamma I(t) \Delta t - \omega^2 Q(t) \Delta t + \sqrt{\beta^2 \Delta t} N_t^{t+\Delta t}(0, 1)$$

Tal que:

$$\Delta[I^2(t)] = [I(t) - \gamma I(t) \Delta t - \omega^2 Q(t) \Delta t + \sqrt{\beta^2 \Delta t} N_t^{t+\Delta t}(0, 1)]^2 - [I(t)]^2$$

$$\begin{aligned} \Delta[I^2(t)] &= (1 - \gamma \Delta t)^2 I^2(t) + 2(1 - \gamma \Delta t) I(t) (-\omega^2 Q(t) \Delta t + \sqrt{\beta^2 \Delta t} N_t^{t+\Delta t}(0, 1)) \\ &\quad + [-\omega^2 Q(t) \Delta t + \sqrt{\beta^2 \Delta t} N_t^{t+\Delta t}(0, 1)]^2 - I^2(t) \end{aligned}$$

Recordando que  $[\Delta t]^2$  y  $[\Delta t]^{\frac{3}{2}}$  tienden a cero:

$$\begin{aligned} \Delta[I^2(t)] &= \cancel{I^2(t)} - 2\gamma \Delta t I^2(t) + \gamma^2 [\Delta t]^2 \cancel{I^2(t)} - 2I(t) \omega^2 Q(t) \Delta t + 2I(t) \sqrt{\beta^2 \Delta t} N_t^{t+\Delta t}(0, 1) \\ &\quad - \cancel{2\gamma I(t) \omega^2 Q(t) [\Delta t]^2} + \cancel{2\gamma I(t) \sqrt{\beta^2 \Delta t} [\Delta t]^{\frac{3}{2}} N_t^{t+\Delta t}(0, 1)} + \omega^4 Q^2(t) [\Delta t]^2 + \beta^2 \Delta t [N_t^{t+\Delta t}(0, 1)]^2 \\ &\quad - \cancel{2\omega^2 \sqrt{\beta^2 \Delta t} Q(t) [\Delta t]^{\frac{3}{2}} N_t^{t+\Delta t}(0, 1)} - \cancel{I^2(t)} \end{aligned}$$

$$\Delta[I^2(t)] = -2\gamma \Delta t I^2(t) - 2I(t) \omega^2 Q(t) \Delta t + 2I(t) \sqrt{\beta^2 \Delta t} N_t^{t+\Delta t}(0, 1) + \beta^2 \Delta t [N_t^{t+\Delta t}(0, 1)]^2$$

Ahora, se busca el valor esperado de la anterior expresión:

$$\langle \Delta I^2(t) \rangle = \langle -2\gamma \Delta t I^2(t) - 2I(t)Q(t)\omega^2 \Delta t + 2I(t)\sqrt{\beta^2 \Delta t} N_t^{t+\Delta t}(0, 1) + \beta^2 \Delta t [N_t^{t+\Delta t}(0, 1)]^2 \rangle$$

$$\Delta \langle I^2(t) \rangle = -2\gamma \Delta t \langle I^2(t) \rangle - 2\langle I(t)Q(t) \rangle \omega^2 \Delta t + 2\sqrt{\beta^2 \Delta t} \langle I(t) N_t^{t+\Delta t}(0, 1) \rangle + \beta^2 \Delta t \langle [N_t^{t+\Delta t}(0, 1)]^2 \rangle$$

Debido a que  $I(t)$  y  $N_t^{t+\Delta t}(0, 1)$  son estadísticamente independientes, el valor esperado:  $\langle I(t) N_t^{t+\Delta t}(0, 1) \rangle = 0$  y de acuerdo a la definición de varianza:  $\langle [N_t^{t+\Delta t}(0, 1)]^2 \rangle = 1$ . Por lo tanto, la anterior expresión es igual a:

$$\Delta \langle I^2(t) \rangle = -2\gamma \Delta t \langle I^2(t) \rangle - 2\langle I(t)Q(t) \rangle \omega^2 \Delta t + \beta^2 \Delta t \quad (\text{B.120})$$

Si se divide la expresión B.120 sobre  $\Delta t$  y se aplica el límite  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \langle I^2(t) \rangle}{\Delta t} &= -2\gamma \langle I^2(t) \rangle - 2\langle I(t)Q(t) \rangle \omega^2 + \beta^2 \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \langle I^2(t) \rangle}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [-2\gamma \langle I^2(t) \rangle - 2\langle I(t)Q(t) \rangle \omega^2 + \beta^2] \\ \frac{d \langle I^2(t) \rangle}{dt} &= -2\gamma \langle I^2(t) \rangle - 2\langle I(t)Q(t) \rangle \omega^2 + \beta^2 \end{aligned} \quad (\text{B.121})$$

Ahora, se hallara  $\langle Q^2(t) \rangle$ :

$$\Delta [Q^2(t)] = [Q(t + \Delta t)]^2 - [Q(t)]^2 \quad (\text{B.122})$$

Despejamos de la ecuación B.97 la expresión  $Q(t + \Delta t)$ :

$$Q(t + \Delta t) = Q(t) + I(t)\Delta t$$

Tal que:

$$\Delta [Q^2(t)] = [Q(t) + I(t)\Delta t]^2 - Q^2(t)$$

$$\Delta [Q^2(t)] = \cancel{Q^2(t)} + 2Q(t)I(t)\Delta t + \cancel{I^2(t)[\Delta t]^2} - \cancel{Q^2(t)}$$

Se aplica el valor esperado en la anterior expresión:

$$\langle \Delta [Q^2(t)] \rangle = \langle 2Q(t)I(t)\Delta t \rangle$$

$$\Delta \langle Q^2(t) \rangle = 2\langle Q(t)I(t) \rangle \Delta t \quad (\text{B.123})$$

Si se divide la expresión B.123 sobre  $\Delta t$  y se aplica el límite  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$\frac{\Delta \langle Q^2(t) \rangle}{\Delta t} = 2\langle Q(t)I(t) \rangle$$

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \langle Q^2(t) \rangle}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [2 \langle Q(t)I(t) \rangle] \\ \frac{d \langle Q^2(t) \rangle}{dt} &= 2 \langle Q(t)I(t) \rangle\end{aligned}\quad (\text{B.124})$$

Para hallar el valor que corresponde al producto:  $\langle Q(t)I(t) \rangle$ , deduciremos la variación temporal en la varianza de cada una de las variables aleatorias  $Q(t)$  e  $I(t)$ . Primero con la razón de cambio en la varianza de  $I(t)$ :

$$\begin{aligned}\frac{d \langle I^2(t) \rangle}{dt} &= \frac{d}{dt} [\langle I^2(t) \rangle - \langle I(t) \rangle^2] \\ \frac{d \langle I^2(t) \rangle}{dt} &= \frac{d \langle I^2(t) \rangle}{dt} - 2 \langle I(t) \rangle \frac{d \langle I(t) \rangle}{dt}\end{aligned}\quad (\text{B.125})$$

Si en la ecuación anterior reemplazamos los valores por los dados en las definiciones: [B.102](#) y [B.123](#), se obtiene:

$$\frac{d \langle I^2(t) \rangle}{dt} = -2\gamma \langle I^2(t) \rangle - 2 \langle I(t)Q(t) \rangle \omega^2 + \beta^2 - 2 \langle I(t) \rangle (-\gamma \langle I(t) \rangle - \omega^2 \langle Q(t) \rangle) \quad (\text{B.126})$$

$$\frac{d \langle I^2(t) \rangle}{dt} = -2\gamma [\langle I^2(t) \rangle - \langle I(t) \rangle^2] - 2 [\langle I(t)Q(t) \rangle - \langle Q(t) \rangle \langle I(t) \rangle] \omega^2 + \beta^2$$

$$\frac{d \langle I^2(t) \rangle}{dt} = -2\gamma \langle I^2(t) \rangle - 2\omega^2 \text{cov} \{Q(t), I(t)\} + \beta^2 \quad (\text{B.127})$$

Para la razón de cambio en la varianza de  $Q(t)$ :

$$\frac{d \langle Q^2(t) \rangle}{dt} = \frac{d}{dt} [\langle Q^2(t) \rangle - \langle Q(t) \rangle^2] \quad (\text{B.128})$$

$$\frac{d \langle Q^2(t) \rangle}{dt} = \frac{d \langle Q^2(t) \rangle}{dt} - 2 \langle Q(t) \rangle \frac{d \langle Q(t) \rangle}{dt}$$

Si en la ecuación anterior reemplazamos los valores por los dados en las definiciones: [B.103](#) y [B.124](#), se obtiene:

$$\frac{d \langle Q^2(t) \rangle}{dt} = 2 \langle Q(t)I(t) \rangle - 2 \langle Q(t) \rangle \langle I(t) \rangle \quad (\text{B.129})$$

$$\frac{d \langle Q^2(t) \rangle}{dt} = 2 [\langle Q(t)I(t) \rangle - \langle Q(t) \rangle \langle I(t) \rangle]$$

$$\frac{d \langle Q^2(t) \rangle}{dt} = 2 \text{cov} \{Q(t), I(t)\} \quad (\text{B.130})$$

Por último, se halla la razón de cambio de la covarianza  $\text{cov} \{Q(t), I(t)\}$  con respecto al tiempo, con el fin de hallar una expresión para esta incógnita. Primero definimos:

$$\Delta[\text{cov}\{Q(t), I(t)\}] = [\text{cov}\{Q(t + \Delta t), I(t + \Delta t)\}] - [\text{cov}\{Q(t), I(t)\}] \quad (\text{B.131})$$

$$\Delta[\text{cov}\{Q(t), I(t)\}] = \langle Q(t + \Delta t)I(t + \Delta t) \rangle - \langle Q(t + \Delta t) \rangle \langle I(t + \Delta t) \rangle - [\langle Q(t)I(t) \rangle - \langle Q(t) \rangle \langle I(t) \rangle]$$

$$\begin{aligned} \Delta[\text{cov}\{Q(t), I(t)\}] &= \langle [I(t) - \gamma I(t)\Delta t - \omega^2 Q(t)\Delta t + \sqrt{\beta^2 \Delta t} N_t^{t+\Delta t}(0, 1)] [Q(t) + I(t)\Delta t] \rangle \\ &\quad - \langle I(t) - \gamma I(t)\Delta t - \omega^2 Q(t)\Delta t + \sqrt{\beta^2 \Delta t} N_t^{t+\Delta t}(0, 1) \rangle \langle Q(t) + I(t)\Delta t \rangle \\ &\quad - [\langle Q(t)I(t) \rangle - \langle Q(t) \rangle \langle I(t) \rangle] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta[\text{cov}\{Q(t), I(t)\}] &= \langle I(t)Q(t) \rangle - \langle \gamma I(t)Q(t)\Delta t \rangle - \langle \omega^2 Q^2(t)\Delta t \rangle + \langle Q(t)\sqrt{\beta^2 \Delta t} N_t^{t+\Delta t}(0, 1) \rangle + \\ &\quad \langle I^2(t)\Delta t - \gamma I^2(t)[\Delta t]^2 \rangle - \langle \omega^2 Q(t)I(t)[\Delta t]^2 \rangle + \langle I(t)[\Delta t]^{\frac{3}{2}} \sqrt{\beta^2 \Delta t} N_t^{t+\Delta t}(0, 1) \rangle \\ &\quad - (\langle I(t) \rangle - \langle \gamma I(t)\Delta t \rangle - \langle \omega^2 Q(t)\Delta t \rangle + \langle \sqrt{\beta^2 \Delta t} N_t^{t+\Delta t}(0, 1) \rangle) (\langle Q(t) \rangle + \langle I(t)\Delta t \rangle) \\ &\quad - \langle Q(t)I(t) \rangle + \langle Q(t) \rangle \langle I(t) \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta[\text{cov}\{Q(t), I(t)\}] &= -\gamma \langle I(t)Q(t) \rangle \Delta t - \omega^2 \langle Q^2(t) \rangle \Delta t + \sqrt{\beta^2 \Delta t} \langle Q(t) N_t^{t+\Delta t}(0, 1) \rangle \\ &\quad - \langle I(t) \rangle \langle Q(t) \rangle + \gamma \langle I(t) \rangle \langle Q(t) \rangle \Delta t + \omega^2 \langle Q(t) \rangle^2 \Delta t - \sqrt{\beta^2 \Delta t} \langle N_t^{t+\Delta t}(0, 1) \rangle \langle Q(t) \rangle \\ &\quad - \langle I(t) \rangle^2 \Delta t + \gamma \langle I(t) \rangle^2 [\Delta t]^2 + \omega^2 \langle Q(t) \rangle \langle I(t) \rangle [\Delta t]^2 - \sqrt{\beta^2 \Delta t} [\Delta t]^{\frac{3}{2}} \langle N_t^{t+\Delta t}(0, 1) \rangle \langle I(t) \rangle + \langle Q(t) \rangle \langle I(t) \rangle \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que  $\langle N_t^{t+\Delta t}(0, 1) \rangle \langle Q(t) \rangle = 0$  y  $\langle Q(t) N_t^{t+\Delta t}(0, 1) \rangle = 0$ :

$$\begin{aligned} \Delta[\text{cov}\{Q(t), I(t)\}] &= -\gamma [\langle I(t)Q(t) \rangle - \langle I(t) \rangle \langle Q(t) \rangle] \Delta t - \omega^2 [\langle Q^2(t) \rangle - \langle Q(t) \rangle^2] \Delta t \\ &\quad + [\langle I^2(t) \rangle - \langle I(t) \rangle^2] \Delta t + \sqrt{\beta^2 \Delta t} \langle Q(t) N_t^{t+\Delta t}(0, 1) \rangle - \sqrt{\beta^2 \Delta t} \langle N_t^{t+\Delta t}(0, 1) \rangle \langle Q(t) \rangle \end{aligned}$$

Siendo finalmente la expresión:

$$\Delta[\text{cov}\{Q(t), I(t)\}] = -\gamma \text{cov}\{Q(t), I(t)\} \Delta t - \omega^2 \langle Q^2(t) \rangle \Delta t + \langle I^2(t) \rangle \Delta t \quad (\text{B.132})$$

Si se divide la expresión B.132 sobre  $\Delta t$  y se aplica el límite  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta[\text{cov}\{Q(t), I(t)\}]}{\Delta t} &= -\gamma \text{cov}\{Q(t), I(t)\} - \omega^2 \langle Q^2(t) \rangle + \langle I^2(t) \rangle \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta[\text{cov}\{Q(t), I(t)\}]}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [-\gamma \text{cov}\{Q(t), I(t)\} - \omega^2 \langle Q^2(t) \rangle + \langle I^2(t) \rangle] \end{aligned}$$

$$\frac{d \operatorname{cov} \{Q(t), I(t)\}}{dt} = -\gamma \operatorname{cov} \{Q(t), I(t)\} - \omega^2 \langle\langle Q^2(t) \rangle\rangle + \langle\langle I^2(t) \rangle\rangle \quad (\text{B.133})$$

Si despejamos la cov  $\{Q(t), I(t)\}$  de la expresión B.130 y se reemplaza en la ecuación anterior :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \frac{d \langle\langle Q^2(t) \rangle\rangle}{dt} \right] - \frac{\gamma}{2} \frac{d \langle\langle Q^2(t) \rangle\rangle}{dt} - \omega^2 \langle\langle Q^2(t) \rangle\rangle + \langle\langle I^2(t) \rangle\rangle \\ \frac{d^2 \langle\langle Q^2(t) \rangle\rangle}{dt^2} + \gamma \frac{d \langle\langle Q^2(t) \rangle\rangle}{dt} + 2\omega^2 \langle\langle Q^2(t) \rangle\rangle = 2 \langle\langle I^2(t) \rangle\rangle \end{aligned} \quad (\text{B.134})$$

Ahora, derivamos la expresión anterior:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \frac{d^2 \langle\langle Q^2(t) \rangle\rangle}{dt^2} + \gamma \frac{d \langle\langle Q^2(t) \rangle\rangle}{dt} + 2\omega^2 \langle\langle Q^2(t) \rangle\rangle \right] = 2 \frac{d \langle\langle I^2(t) \rangle\rangle}{dt} \\ \frac{d^3 \langle\langle Q^2(t) \rangle\rangle}{dt^3} + \gamma \frac{d^2 \langle\langle Q^2(t) \rangle\rangle}{dt^2} + 2\omega^2 \frac{d \langle\langle Q^2(t) \rangle\rangle}{dt} = 2 \frac{d \langle\langle I^2(t) \rangle\rangle}{dt} \end{aligned} \quad (\text{B.135})$$

En la ecuación anterior reemplazamos la expresión B.127:

$$\begin{aligned} \frac{d^3 \langle\langle Q^2(t) \rangle\rangle}{dt^3} + \gamma \frac{d^2 \langle\langle Q^2(t) \rangle\rangle}{dt^2} + 2\omega^2 \frac{d \langle\langle Q^2(t) \rangle\rangle}{dt} = 2 \left[ -2\gamma \langle\langle I^2(t) \rangle\rangle - \omega^2 \frac{d \langle\langle Q^2(t) \rangle\rangle}{dt} + \beta^2 \right] \\ \frac{d^3 \langle\langle Q^2(t) \rangle\rangle}{dt^3} + \gamma \frac{d^2 \langle\langle Q^2(t) \rangle\rangle}{dt^2} + 4\omega^2 \frac{d \langle\langle Q^2(t) \rangle\rangle}{dt} - 2\beta^2 = -4\gamma \langle\langle I^2(t) \rangle\rangle \end{aligned} \quad (\text{B.136})$$

En la ecuación anterior reemplazamos por la expresión hallada en B.134:

$$\begin{aligned} \frac{d^3 \langle\langle Q^2(t) \rangle\rangle}{dt^3} + \gamma \frac{d^2 \langle\langle Q^2(t) \rangle\rangle}{dt^2} + 4\omega^2 \frac{d \langle\langle Q^2(t) \rangle\rangle}{dt} - 2\beta^2 = -2\gamma \left[ \frac{d^2 \langle\langle Q^2(t) \rangle\rangle}{dt^2} + \gamma \frac{d \langle\langle Q^2(t) \rangle\rangle}{dt} + 2\omega^2 \langle\langle Q^2(t) \rangle\rangle \right] \\ \frac{d^3 \langle\langle Q^2(t) \rangle\rangle}{dt^3} + 3\gamma \frac{d^2 \langle\langle Q^2(t) \rangle\rangle}{dt^2} + (2\gamma^2 + 4\omega^2) \frac{d \langle\langle Q^2(t) \rangle\rangle}{dt} + 4\gamma\omega^2 \langle\langle Q^2(t) \rangle\rangle = 2\beta^2 \end{aligned} \quad (\text{B.137})$$

Si realizamos el siguiente cambio de variable:

$$y = 4\gamma\omega^2 \langle\langle Q^2(t) \rangle\rangle - 2\beta^2 \quad (\text{B.138})$$

La ecuación diferencial B.137 cambiara su forma de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{d^3}{dt^3} \left[ \frac{y}{4\gamma\omega^2} + \frac{\beta^2}{2\gamma\omega^2} \right] + 3\gamma \frac{d^2}{dt^2} \left[ \frac{y}{4\gamma\omega^2} + \frac{\beta^2}{2\gamma\omega^2} \right] + (2\gamma^2 + 4\omega^2) \frac{d}{dt} \left[ \frac{y}{4\gamma\omega^2} + \frac{\beta^2}{2\gamma\omega^2} \right] + y = 0 \\ \frac{1}{4\gamma\omega^2} \frac{d^3 y}{dt^3} + \frac{3\gamma}{4\gamma\omega^2} \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{(2\gamma^2 + 4\omega^2)}{4\gamma\omega^2} \frac{dy}{dt} + y = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + 3\gamma \frac{d^2 y}{dt^2} + (2\gamma^2 + 4\omega^2) \frac{dy}{dt} + 4\gamma\omega^2 y = 0 \quad (\text{B.139})$$

Si se propone una solución exponencial  $y = e^{\lambda t}$ , obtenemos la siguiente ecuación característica:

$$\lambda^3 + 3\gamma\lambda^2 + (2\gamma^2 + 4\omega^2)\lambda + 4\gamma\omega^2 = 0 \quad (\text{B.140})$$

La ecuación característica puede ser reescrita de la siguiente manera:

$$(\lambda^3 + 3\gamma\lambda^2 + 2\gamma^2\lambda) + 4\omega^2(\lambda + \gamma) = 0$$

Si nos fijamos en el segundo término, si  $\lambda$  es igual a  $-\gamma$  obtenemos que dicho término es igual a cero. Ahora, si reemplazamos dicho valor en el término de la izquierda, hallamos que también se hace cero. Por lo tanto, una raíz de la ecuación característica es  $-\gamma$ .

Ahora, si realizamos la división sintética:

$$\begin{array}{r|rrrr} \lambda^3 & +3\gamma\lambda^2 & +(2\gamma^2 + 4\omega^2)\lambda & +4\gamma\omega^2 & \lambda + 1 \\ -\lambda^3 & -\gamma\lambda^2 & & & -\lambda^2 - 2\gamma\lambda - 4\omega^2 \\ \hline 0 & 2\gamma\lambda^2 & +(2\gamma^2 + 4\omega^2)\lambda & +4\gamma\omega^2 & \\ & -2\gamma\lambda^2 & -2\gamma^2\lambda & & \\ \hline & 0 & 4\omega^2\lambda & +4\gamma\omega^2 & \\ & & -4\omega^2\lambda & -4\gamma\omega^2 & \\ \hline & & 0 & 0 & \end{array}$$

Tal que:

$$(\lambda + \gamma)(-\lambda^2 - 2\gamma\lambda - 4\omega^2) = 0$$

Para hallar las demás raíces, se resuelve la ecuación cuadrática:

$$(\lambda + \gamma)(\lambda + \gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2})(\lambda + \gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2}) = 0$$

$$(\lambda + \gamma)(\lambda + \gamma + 2j\alpha)(\lambda + \gamma - 2j\alpha) = 0$$

Entonces:

$$y = c_1 e^{-\gamma t} + c_2 e^{(-\gamma + 2j\alpha)t} + c_3 e^{(-\gamma - 2j\alpha)t} \quad (\text{B.141})$$

$$4\gamma\omega^2 \langle\langle Q^2(t) \rangle\rangle - 2\beta^2 = e^{-\gamma t} [c_1 + c_2(\cos(2\alpha t) + j \sin(2\alpha t)) + c_3(\cos(2\alpha t) - j \sin(2\alpha t))]$$

$$\langle\langle Q^2(t) \rangle\rangle - \frac{\beta^2}{2\gamma\omega^2} = e^{-\gamma t} \left[ \frac{c_1}{4\gamma\omega^2} + \left( \frac{c_2 + c_3}{4\gamma\omega^2} \right) \cos(2\alpha t) + \left( \frac{j(c_2 - c_3)}{4\gamma\omega^2} \right) \sin(2\alpha t) \right]$$

$$\langle\langle Q^2(t) \rangle\rangle - \frac{\beta^2}{2\gamma\omega^2} = e^{-\gamma t} [c_4 + c_5 \cos(2\alpha t) + c_6 \sin(2\alpha t)] \quad (\text{B.142})$$

Teniendo en cuenta que la varianza de la carga eléctrica y sus derivadas son iguales a cero debido a que los valores iniciales están bien definidos. Entonces, obtenemos:

$$\begin{aligned} \langle\langle Q^2(0) \rangle\rangle - \frac{\beta^2}{2\gamma\omega^2} &= e^{-\gamma(0)} [c_4 + c_5 \cos(2\alpha(0)) + c_6 \sin(2\alpha(0))] \\ -\frac{\beta^2}{2\gamma\omega^2} &= c_4 + c_5 \end{aligned} \quad (\text{B.143})$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \langle\langle Q^2(t) \rangle\rangle - \frac{\beta^2}{2\gamma\omega^2} \right] = \frac{d}{dt} \left[ e^{-\gamma t} [c_4 + c_5 \cos(2\alpha t) + c_6 \sin(2\alpha t)] \right]$$

$$\frac{d\langle\langle Q^2(t) \rangle\rangle}{dt} = -\gamma e^{-\gamma t} [c_4 + c_5 \cos(2\alpha t) + c_6 \sin(2\alpha t)] + 2\alpha e^{-\gamma t} [c_6 \cos(2\alpha t) - c_5 \sin(2\alpha t)] \quad (\text{B.144})$$

$$\frac{d\langle\langle Q^2(0) \rangle\rangle}{dt} = -\gamma e^{-\gamma(0)} [c_4 + c_5 \cos(2\alpha(0)) + c_6 \sin(2\alpha(0))] + 2\alpha e^{-\gamma(0)} [c_6 \cos(2\alpha(0)) - c_5 \sin(2\alpha(0))]$$

$$0 = -\gamma c_4 - \gamma c_5 + 2\alpha c_6 \quad (\text{B.145})$$

$$\frac{d^2\langle\langle Q^2(t) \rangle\rangle}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left[ -\gamma e^{-\gamma t} [c_4 + c_5 \cos(2\alpha t) + c_6 \sin(2\alpha t)] + 2\alpha e^{-\gamma t} [c_6 \cos(2\alpha t) - c_5 \sin(2\alpha t)] \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\langle\langle Q^2(t) \rangle\rangle}{dt^2} &= \gamma^2 e^{-\gamma t} [c_4 + c_5 \cos(2\alpha t) + c_6 \sin(2\alpha t)] - 4\alpha\gamma e^{-\gamma t} [c_6 \cos(2\alpha t) - c_5 \sin(2\alpha t)] \\ &\quad - 4\alpha^2 e^{-\gamma t} [c_5 \cos(2\alpha t) + c_6 \sin(2\alpha t)] \end{aligned} \quad (\text{B.146})$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\langle\langle Q^2(0) \rangle\rangle}{dt^2} &= \gamma^2 e^{-\gamma(0)} [c_4 + c_5 \cos(2\alpha(0)) + c_6 \sin(2\alpha(0))] - 4\alpha\gamma e^{-\gamma(0)} [c_6 \cos(2\alpha(0)) - c_5 \sin(2\alpha(0))] \\ &\quad - 4\alpha^2 e^{-\gamma(0)} [c_5 \cos(2\alpha(0)) + c_6 \sin(2\alpha(0))] \end{aligned}$$

$$0 = \gamma^2 c_4 + (\gamma^2 - 4\alpha^2) c_5 - 4\gamma\alpha^2 c_6 \quad (\text{B.147})$$

Con las ecuaciones B.143, B.145 y B.147 es posible crear un sistema lineal como se observa a continuación:

$$\begin{bmatrix} c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\gamma & -\gamma & 2\alpha \\ \gamma^2 & (\gamma^2 - 4\alpha^2) & -4\gamma\alpha^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\beta^2}{2\gamma} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.148})$$

A partir del método de Kramers, se definen los siguientes determinantes:

$$D_1 = \begin{vmatrix} -\frac{\beta^2}{2\gamma} & 1 & 0 \\ 0 & -\gamma & 2\alpha \\ 0 & (\gamma^2 - 4\alpha^2) & -4\gamma\alpha^2 \end{vmatrix} = \left( -\frac{\beta^2}{2\gamma\alpha^2} \right) (8\alpha\omega^2) \quad (\text{B.149})$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{\beta^2}{2\gamma} & 0 \\ -\gamma & 0 & 2\alpha \\ \gamma^2 & 0 & -4\gamma\alpha^2 \end{vmatrix} = \left( -\frac{\beta^2}{2\gamma\alpha^2} \right) (-2\alpha\gamma) \quad (\text{B.150})$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -\frac{\beta^2}{2\gamma} \\ -\gamma & -\gamma & 0 \\ \gamma^2 & (\gamma^2 - 4\alpha^2) & 0 \end{vmatrix} = \left( -\frac{\beta^2}{2\gamma\alpha^2} \right) (4\alpha^2\gamma) \quad (\text{B.151})$$

$$D = \begin{vmatrix} -\frac{\beta^2}{2\gamma} & 1 & 0 \\ 0 & -\gamma & 2\alpha \\ 0 & (\gamma^2 - 4\alpha^2) & -4\gamma\alpha^2 \end{vmatrix} = 8\alpha^3 \quad (\text{B.152})$$

Con los cuales se calcula las constantes  $c_4$ ,  $c_5$  y  $c_6$ :

$$c_4 = \frac{D_1}{D} = \left( \frac{\beta^2}{8\gamma\omega^2\alpha^2} \right) (-4\omega^2) \quad (\text{B.153})$$

$$c_5 = \frac{D_2}{D} = \left( \frac{\beta^2}{8\gamma\omega^2\alpha^2} \right) (\gamma^2) \quad (\text{B.154})$$

$$c_6 = \frac{D_3}{D} = \left( \frac{\beta^2}{8\gamma\omega^2\alpha^2} \right) (-2\gamma\alpha) \quad (\text{B.155})$$

Si en B.142 se reemplazan los valores B.153, B.154 y B.155, entonces se halla:

$$\langle\langle Q^2(t) \rangle\rangle = \frac{\beta^2}{2\gamma\omega^2} + \left( \frac{\beta^2}{8\gamma\omega^2\alpha^2} \right) e^{-\gamma t} [-4\omega^2 + \gamma^2 \cos(2\alpha t) - 2\gamma\alpha \sin(2\alpha t)] \quad (\text{B.156})$$

Y la derivada de la expresión anterior:

$$\begin{aligned} \frac{d\langle\langle Q^2(t) \rangle\rangle}{dt} &= \left( \frac{\beta^2}{8\gamma\omega^2\alpha^2} \right) [-\gamma e^{-\gamma t} [-4\omega^2 + \gamma^2 \cos(2\alpha t) - 2\gamma\alpha \sin(2\alpha t)] \\ &\quad - 2\alpha e^{-\gamma t} [\gamma^2 \sin(2\alpha t) + 2\alpha\gamma \cos(2\alpha t)]] \end{aligned}$$

$$\frac{d\langle\langle Q^2(t) \rangle\rangle}{dt} = \left( \frac{\beta^2 e^{-\gamma t}}{8\omega^2\alpha^2} \right) [4\omega^2 - (\gamma^2 + 4\alpha^2) \cos(2\alpha t) - \underline{2\gamma\alpha \sin(2\alpha t)} + \underline{2\gamma\alpha \sin(2\alpha t)}]$$

$$\begin{aligned}\frac{d\langle\langle Q^2(t)\rangle\rangle}{dt} &= \left(\frac{\beta^2 e^{-\gamma t}}{8\omega^2 \alpha^2}\right) [4\omega^2 - 4\omega^2 \cos(2\alpha t)] \\ \frac{d\langle\langle Q^2(t)\rangle\rangle}{dt} &= \left(\frac{\beta^2 e^{-\gamma t}}{2\alpha^2}\right) [1 - \cos(2\alpha t)]\end{aligned}\quad (\text{B.157})$$

AL reemplazar B.157 en B.130, se obtiene la expresión para  $\text{cov}\{Q(t), I(t)\}$ :

$$\text{cov}\{Q(t), I(t)\} = \left(\frac{\beta^2 e^{-\gamma t}}{4\alpha^2}\right) [1 - \cos(2\alpha t)] \quad (\text{B.158})$$

Por último, para hallar la varianza de  $I(t)$ , se hace uso del resultado B.158 en la ecuación B.127:

$$\frac{d\langle\langle I^2(t)\rangle\rangle}{dt} = -2\gamma\langle\langle I^2(t)\rangle\rangle - 2\omega^2\left(\frac{\beta^2 e^{-\gamma t}}{4\alpha^2}\right) [1 - \cos(2\alpha t)] + \beta^2 \quad (\text{B.159})$$

Al solucionar la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned}e^{2\gamma t} \frac{d\langle\langle I^2(t)\rangle\rangle}{dt} &= -2\gamma\langle\langle I^2(t)\rangle\rangle e^{2\gamma t} - 2\omega^2\left(\frac{\beta^2 e^{-\gamma t}}{4\alpha^2}\right) [1 - \cos(2\alpha t)] e^{2\gamma t} + \beta^2 e^{2\gamma t} \\ \frac{d[e^{2\gamma t}\langle\langle I^2(t)\rangle\rangle]}{dt} &= -\left(\frac{\omega^2 \beta^2 e^{\gamma t}}{2\alpha^2}\right) [1 - \cos(2\alpha t)] + \beta^2 e^{2\gamma t} \\ \frac{d[e^{2\gamma t}\langle\langle I^2(t)\rangle\rangle]}{dt} &= -\left(\frac{\omega^2 \beta^2 e^{\gamma t}}{2\alpha^2}\right) [1 - \cos(2\alpha t)] + \beta^2 e^{2\gamma t} \\ \int d[e^{2\gamma t}\langle\langle I^2(t)\rangle\rangle] &= -\left(\frac{\omega^2 \beta^2}{2\alpha^2}\right) \int e^{\gamma t} [1 - \cos(2\alpha t)] + \beta^2 \int e^{2\gamma t} \\ e^{2\gamma t}\langle\langle I^2(t)\rangle\rangle &= \left[-\frac{\omega^2 \beta^2 e^{\gamma t}}{2\alpha^2}\right] \left[\frac{4\omega^2 e^{\gamma t} - \gamma^2 e^{\gamma t} [\cos(2\alpha t) + (2\alpha/\gamma)] \sin(2\alpha t)}{4\omega^2 \gamma} + \frac{\beta^2}{2\gamma} e^{2\gamma t}\right]\end{aligned}$$

Se llega a la expresión que permite describir la varianza de la corriente eléctrica en el circuito  $RLC$ , tal que:

$$\langle\langle I^2(t)\rangle\rangle = e^{-\gamma t} \left[\frac{\beta^2}{8\gamma \alpha^2}\right] [-4\omega^2 + \gamma^2 \cos(2\alpha t) - 2\alpha\gamma \sin(2\alpha t)] + \frac{\beta^2}{2\gamma} \quad (\text{B.160})$$

Así, finalmente las distribuciones de probabilidad para ambas variables aleatorias, tal que sea posible el estudio de regímenes transitorios a partir de dichas ecuaciones.