

# **Exploración teórica de algunos objetos y conceptos de las geometrías no euclidianas y sus aplicaciones**

Laura Valentina Villalba Ariza

Asesor:

John Alejandro Mendoza Rodríguez

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

Bogotá, D.C.

2025-2

# Exploración teórica de algunos objetos y conceptos de las geometrías no euclidianas y sus aplicaciones



Laura Valentina Villalba Ariza

Trabajo de grado para optar al título de Licenciada en Matemáticas

Asesor:

John Alejandro Mendoza Rodríguez

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

Bogotá, D.C.

2025-2

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo es el resultado de un camino lleno de aprendizajes, desafíos y sueños que hoy toman forma gracias al apoyo y la presencia de seres fundamentales en mi vida. Por lo que quiero agradecer a: mi familia, Elena, Jairo y Lian por ser el pilar de mi vida y mi apoyo más grande. Especialmente a mi hermana Sofía, por ser mi mejor amiga, mi refugio, mi compañía constante durante esta travesía y mis discusiones más reflexivas y nutridas. A mis mascotas, que su compañía y ternura hicieron más dulces las horas de trabajo, recordándome que el afecto es una forma de inspiración. A mi asesor, Alejandro Mendoza, quien ha sido una guía generosa, su paciencia y visión orientó con claridad cada etapa de este proceso, su acompañamiento fue esencial para convertir mis ideas en un proyecto coherente. A todas las profesoras y profesores que a lo largo de mi formación sembraron en mí el amor por las matemáticas y la enseñanza. Y a la Universidad Pedagógica Nacional, por ser el lugar donde mis sueños comenzaron a hacerse realidad; por abrirme las puertas al conocimiento, la reflexión y la diversidad.

Este logro no sería posible sin cada una de las personas que caminaron junto a mí en este largo y retador camino. A cada uno, aunque no este mencionado, gracias totales de corazón.

# DEDICATORIA

Este gran logro se lo dedico a:

Angie Sofia Villalba Ariza, por ser la hermana más linda, por acompañarme en cada etapa de mi vida, por ser ese apoyo incondicional, por el amor que me brindas y los consejos certeros que me han reconfortado siempre. Te amo siempre hermanita de mi vida.

Mi madre, Elena Ariza, por ser la mujer valiente, perseverante, disciplinada, noble, amorosa, que me ha apoyado de todas las formas en cada instancia de mi vida y estar siempre de manera incondicional.

A mis mascotas Gio, Copito, Ana, Alana, Nala, Corosito, Maxi, que han sido los seres más incondicionales, amorosos, fieles y reconfortantes. Hacen que mi vida sea muy linda y me han enseñado tanto. Los amo con todo mi corazón.

A Dan, quien me acompañó, me motivó, me brindó un hogar cálido y palabras de motivación.

A mis compañeros y amigos que me dejaron este proceso, agradecida y afortunada de poder hacerlos parte de mi vida. Mucho amor para la chazita que me brindó compañía, comprensión y alegría.

## Resumen

El trabajo analiza la evolución del razonamiento geométrico desde la geometría euclidiana hasta las geometrías no euclidianas, destacando su impacto en la matemática, la física y el arte. Se expone cómo la sistematización axiomática realizada por Euclides en *Los Elementos* consolidó un modelo deductivo que dominó el pensamiento científico durante más de dos mil años. El cuestionamiento del quinto postulado dio origen a nuevas geometrías en el siglo XIX. Matemáticos como Nikolai Lobachevsky, János Bolyai y Bernhard Riemann demostraron que podían construirse sistemas lógicamente coherentes distintos al euclidiano.

La geometría hiperbólica plantea la existencia de infinitas paralelas por un punto exterior a una recta, mientras que la elíptica niega la existencia de paralelas. Estas propuestas transformaron la concepción del espacio y rompieron el absolutismo geométrico. El trabajo desarrolla sistemas teóricos locales para modelar ambas geometrías y explicar sus propiedades fundamentales.

Se analiza su aplicación en la teoría de la relatividad general de Albert Einstein, donde la geometría riemanniana describe la curvatura del espacio-tiempo causada por la materia y la energía. También se estudia la aplicación de la geometría hiperbólica en la obra *Circle Limit III* de M. C. Escher, evidenciando la relación entre matemática y arte.

Finalmente, se concluye que las geometrías no euclidianas ampliaron la comprensión del universo y fortalecen la formación crítica de los futuros educadores matemáticos, al mostrar que la matemática es una construcción histórica, dinámica y creativa.

## Índice

Introducción.....	8
Capítulo 1.....	10
1.    Justificación.....	10
1.1    Metodología.....	11
1.2    Antecedentes .....	11
1.2.2 Revisión documental.....	11
1.3    Objetivos .....	14
Capítulo 2.....	15
2.    Marco teórico .....	15
2.1    Recorrido histórico de la geometría euclidiana a la no euclidiana .....	15
2.1.1 La geometría antes de Euclides.....	16
2.1.2 Geometría euclidiana.....	19
2.2.3 Geometrías no euclidianas .....	23
2.2.3.1 Geometría elíptica .....	27
2.2.3.2 Geometría hiperbólica.....	28
Capítulo 3.....	31
3.    Aplicaciones de las geometrías no euclidianas.....	31
3.1    La relatividad de Einstein.....	31
3.2    Obras de Escher.....	36
Capítulo 4.....	39
4.1    Sistema teórico local sobre la geometría Elíptica .....	39
Capítulo 5.....	56
5.    Sistema teórico local sobre la geometría hiperbólica.....	56
Capítulo 6.....	64
6.    Aplicaciones .....	64
6.1    Explicación de la deformación del espacio-tiempo de acuerdo con la Teoría de la Relatividad por medio del sistema teórico local: .....	64
6.2    Explicación de la obra Circle Limit III de M.C. Escher .....	67
Conclusiones.....	71
Referencias.....	75

## **Tabla de ilustraciones**

Ilustración 1.....	20
Ilustración 2.....	20
Ilustración 3.....	21
Ilustración 4.....	21
Ilustración 5.....	22
Ilustración 6.....	24
Ilustración 7.....	26
Ilustración 8.....	37
Ilustración 9.....	54
Ilustración 10.....	59
Ilustración 11.....	59
Ilustración 12.....	61
Ilustración 13.....	67

## INTRODUCCIÓN

Se presenta este trabajo en el marco de la monografía para obtener el título de Licenciada en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, en el que se realiza una indagación sobre cómo el razonamiento geométrico ha sido un pilar fundamental en la comprensión de algunos fenómenos físicos, desde la geometría euclidiana hasta la formulación de las geometrías no euclidianas.

A lo largo de la historia, la geometría ha sido uno de los pilares del pensamiento humano y del desarrollo científico. Desde los primeros intentos de las civilizaciones antiguas por medir la tierra y organizar el espacio, hasta las formulaciones abstractas de Euclides y las posteriores rupturas introducidas por las geometrías no euclidianas, el razonamiento geométrico ha representado una forma privilegiada de comprender la realidad. Sin embargo, su evolución no solo evidencia transformaciones en los métodos matemáticos, sino también en la manera en que el ser humano concibe el mundo, la naturaleza y el conocimiento mismo.

Este trabajo de grado se inscribe en el campo de la exploración teórica y tiene como propósito analizar la evolución del razonamiento geométrico desde la geometría euclidiana hasta las geometrías no euclidianas, particularmente la elíptica y la hiperbólica, para comprender cómo estas han permitido explicar fenómenos físicos y artísticos que trascienden los límites de la intuición espacial tradicional. En este sentido, se busca mostrar cómo el cambio de paradigma geométrico no solo amplió el horizonte de la matemática, sino que también transformó la comprensión de la realidad en disciplinas como la física y el arte.

La geometría euclidiana, con su estructura axiomática basada en la linealidad y el paralelismo, dominó el pensamiento occidental durante más de dos milenios. No obstante, el cuestionamiento de su quinto postulado dio origen a una nueva manera de pensar el espacio. Los aportes de Gauss, Lobachevsky, Bolyai y Riemann demostraron que podían existir sistemas geométricos igualmente coherentes, pero con propiedades distintas, lo que dio lugar a una profunda revolución intelectual: el reconocimiento de que la verdad matemática es relativa al marco axiomático desde el cual se formula.

A partir de este giro conceptual, las geometrías no euclidianas adquirieron un papel central en la descripción del universo. En la teoría de la relatividad general de Albert Einstein, la geometría riemanniana se convirtió en el lenguaje que explica la curvatura

del espacio-tiempo y la interacción entre la materia, la energía y la gravedad. Por otro lado, la geometría hiperbólica encontró expresión estética en las obras de Maurits Cornelis Escher, quien, inspirado por el modelo del disco de Poincaré, transformó las leyes matemáticas en composiciones visuales donde el infinito y la simetría se funden en una misma estructura.

De este modo, el presente trabajo propone una articulación entre el pensamiento matemático, el razonamiento geométrico y la interpretación de fenómenos naturales y culturales, a partir de la construcción de sistemas teóricos locales que modelan las geometrías elíptica e hiperbólica. Con ello, se busca evidenciar que la geometría, más allá de ser un conjunto de definiciones y teoremas, es una forma de pensamiento que permite comprender tanto el mundo creado por el ser humano como las leyes que gobiernan la naturaleza.

Finalmente, esta exploración teórica adquiere relevancia en la formación de los educadores matemáticos, pues favorece la comprensión de la evolución conceptual del conocimiento geométrico, fomenta la reflexión sobre su enseñanza y promueve una mirada crítica hacia la matemática como una construcción histórica, cultural y creativa. Entender cómo las geometrías no euclidianas transformaron la visión del espacio y del universo, es también reconocer el poder de las ideas matemáticas para redefinir la realidad y ampliar los límites del pensamiento humano.

# CAPÍTULO 1

## 1. Justificación

Los avances que ha tenido el razonamiento geométrico, desde la formulación de la geometría euclidiana hasta el desarrollo de las geometrías no euclidianas, no solo han mejorado la comprensión del universo y sus propiedades, sino también la aplicación de nuevos modelos teóricos con aplicaciones en diversas áreas del conocimiento. Sin embargo, a pesar de su importancia, el estudio de la evolución del razonamiento geométrico suele abordarse de manera fragmentada en la licenciatura. Esta fragmentación se debe al desarrollo de los cursos, ya que se le da un gran énfasis al estudio de la geometría euclidiana, y el estudio de las geometrías no euclidianas solo son un espacio académico optativo, el cual no es obligatorio y esto dificulta una visión integral de su desarrollo y aplicaciones.

Este trabajo de indagación se justifica en la necesidad de profundizar en la transición del razonamiento geométrico, analizando cómo se ha transformado desde sus inicios primitivos hasta la formulación de geometrías alternativas, como las no euclidianas. A través de la construcción de un sistema teórico local de dos geometrías no euclidianas: la hiperbólica y la elíptica, se busca proporcionar una herramienta conceptual que permita comprender mejor estos cambios y su impacto en la comprensión de fenómenos como: Sistema de Posicionamiento Global (GPS, por sus siglas en inglés) y la deformación del espacio-tiempo desarrollada por Einstein en la Teoría de la Relatividad

Además, este estudio es relevante ya que contribuye a la comprensión de los fundamentos matemáticos y geométricos que han impulsado descubrimientos en múltiples disciplinas. Al desarrollar un marco teórico basado en la historia, facilitará la identificación de las distintas aplicaciones de las geometrías no euclidianas, permitiendo una mejor integración de estos conceptos en la enseñanza y la investigación en el campo de la geometría. También se pretende mostrar cómo la aparición de las geometrías no euclidianas fue esencial para la descripción y comprensión de algunos fenómenos, cómo solo a través de ellas se puede razonar de tal manera y cómo las geometrías euclidianas se quedan cortas conceptualmente en la comprensión de dichos fenómenos. Por ejemplo, la cosmología moderna plantea que el universo puede describirse desde una geometría curva o esférica, algo que no puede hacerse desde dicha geometría, ya que limita al estudio de espacios planos. En este sentido, fenómenos como la trayectoria de

la luz en medio curvados, muestra que la luz no siempre se desplaza en línea recta, especialmente cuando atraviesa diferentes entornos físicos, como alrededor de un agujero negro. Estas situaciones, junto a otros fenómenos relevantes en la física, la óptica, la astrofísica, los fenómenos que movilizan este trabajo, entre otros, evidencian la necesidad de emplear geometrías no euclidianas para comprender la estructura y el comportamiento del universo.

En consecuencia, este trabajo busca no solo fortalecer el conocimiento teórico sobre la evolución del razonamiento geométrico, sino también brindar herramientas conceptuales a los Futuros Educadores Matemáticos para que este sirva como base para futuras investigaciones.

### **1.1 Metodología**

El presente trabajo se desarrolló bajo un enfoque cualitativo de tipo revisión documental de textos académicos especializados. Esta revisión permitió identificar y analizar los aportes teóricos conceptuales necesarios para fundamentar el estudio, así como permitir la descripción de los objetos seleccionados. De esta forma, se establece un fundamento bibliográfico que valida lo realizado en este trabajo de grado.

### **1.2 Antecedentes**

A continuación, se presentan los antecedentes del presente trabajo, los cuales se construyeron a partir de una revisión documental.

#### **1.2.2 Revisión documental**

##### **a) Sistema teórico local, teoría de la relatividad**

La revisión documental constituyó la base fundamental para el desarrollo de este trabajo, orientado a comprender la evolución del razonamiento geométrico y las aplicaciones de las geometrías no euclidianas en distintos campos del conocimiento. Su propósito fue recopilar, analizar y sistematizar los aportes teóricos, históricos y conceptuales que permitieran construir un marco coherente sobre la transición del pensamiento geométrico desde Euclides hasta las formulaciones modernas de Riemann, Lobachevsky y Bolyai.

El desarrollo del sistema teórico de la teoría de la relatividad general establece una relación directa entre la estructura geométrica del espacio-tiempo y la distribución de materia y energía. La formulación de este sistema teórico se apoyó en la geometría diferencial, específicamente en una pseudorimanniana con métrica Lorentziana, es

decir, una métrica con firma indefinida, (+,-,-,-) ó (-,+,+,+), en ambos casos, no todos los vectores tienen norma positiva, por eso se formula la pseudo geometría. Obras fundamentales como *Gravitation* (Misner et al., 1973), *General Relativity* (Wald, 1984) y *Spacetime and Geometry* (Carroll, 2019) consolidan los fundamentos conceptuales y matemáticos de este marco teórico.

La teoría se basa en la idea de que el espacio-tiempo es una variedad diferenciable de cuatro dimensiones, dotada de una métrica pseudoriemanniana  $g_{\mu\nu}$  de firma Lorentziana (- + + +), la cual indica cuantas direcciones tienen signo positivo y cuántos signos negativos al evaluar la métrica sobre el vector; esta métrica define la distancia infinitesimal entre dos eventos. A diferencia de las métricas riemannianas definidas positivas, la métrica lorentziana distingue entre intervalos temporales, espaciales y nulos, lo que permite la existencia de estructuras causales como los conos de luz y el tratamiento geométrico del tiempo como una dimensión física (Carroll, 2019).

El tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  no solo permite medir distancias, sino que determina la curvatura del espacio-tiempo a través del tensor de Riemann,  $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$ , el cual se construye a partir de la conexión de Levi-Civita, la única conexión que es compatible con la métrica ( $\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0$ ) y libre de torsión (Wald, 1984).

La curvatura encapsula la dinámica gravitacional del espacio-tiempo. A partir del tensor de Riemann se define el tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$  y el escalar de curvatura  $R$ , cuya combinación da lugar al tensor de Einstein. Este tensor satisface la identidad de Bianchi contraída,  $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$ , que garantiza la conservación local de la energía-impulso ( $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ ) y establece la correspondencia entre la curvatura del espacio-tiempo y la distribución de materia y energía (Misner et al., 1973).

Wald (1984) destaca que la consistencia de la teoría se garantiza por la compatibilidad entre las identidades geométricas (Bianchi) y las leyes de conservación física. Carroll (2019) complementa esta visión al subrayar que el formalismo tensorial no solo describe la geometría del espacio-tiempo, sino también las trayectorias de partículas y luz a través de las geodésicas, que representan el movimiento libre bajo la influencia de la curvatura.

Misner et. al. (1973) sintetizan esta relación con la expresión “la materia le dice al espacio cómo curvarse, y el espacio le dice a la materia cómo moverse”, lo que resume el núcleo epistemológico del sistema teórico: la geometrización de la gravitación.

b) Sistema teórico local, obra de M.C. Escher, *Circle Limit III*

A continuación, se presenta la revisión documental que sistematiza el cuerpo teórico que respalda el sistema teórico local de la geometría hiperbólica aplicado a *Circle Limit III*. Se tuvieron en cuenta los siguientes enfoques para su realización:

- El fundamento histórico-axiomático de la geometría hiperbólica
- Los modelos (semiplano y disco de Poincaré)
- La métrica e isometrías (Möbius /  $SU(1,1)$ )
- Teselaciones hiperbólicas y la relación con la obra de Escher.

Brice Loustau — *Hyperbolic geometry* (2021):

Aporta la visión sintética de la geometría hiperbólica: modelos (hiperboloide, semiplano, disco), definición de curvatura constante negativa, desarrollo de isometrías y tratamiento riguroso de la métrica e ideal boundary. Su exposición sirve como base fundamental para: (i) justificar el uso del disco de Poincaré como modelo conveniente; (ii) explicar por qué las transformaciones Möbius que preservan el disco son isometrías; (iii) describir el comportamiento métrico (crecimiento exponencial de perímetros, frontera ideal).

H. S. M. Coxeter — *Introduction to Geometry* y trabajos sobre Escher:

Coxeter es la conexión histórica clave entre la geometría hiperbólica formal y Escher. Sus explicaciones y láminas de teselaciones hiperbólicas (y su artículo específico sobre *Circle Limit III*) muestran cómo construir teselaciones  $\{p, q\}$  en el disco y cómo estas explicaciones visuales inspiraron las versiones finales de Escher. Coxeter demuestra que las isometrías que generan la teselación pueden representarse por transformaciones de Möbius y analiza la simetría no euclidiana del grabado (esto es la base de la interpretación grupal del diseño de Escher).

“Geometría hiperbólica en la obra de Escher” (FUNES / Uniandes), Carrion y Pagés, (2013):

Texto divulgativo que conecta directamente las prácticas de Escher con el modelo del disco: identifica geodésicas (arcos ortogonales al borde), explica la noción de puntos ideales y el papel del límite, y da pasos didácticos para construir geodésicas y teselaciones (útil para la traducción del sistema axiomático a pasos constructivos).

Las obras de Escher y la geometría hiperbólica, Melo, (2017):

Ensayo/difusión que sintetiza la biografía breve de Escher, su encuentro con Coxeter y la recepción pública de *Circle Limit*; útil para justificar la relevancia artística y pedagógica del sistema. Contiene definiciones accesibles del disco de Poincaré y la distancia hiperbólica (apoyando la narrativa de cómo Escher usó esos modelos).

TFG Geometrías no euclidianas: geometría absoluta y geometría hiperbólica en el plano, García, (2022):

Documento técnico con demostraciones y fórmulas (distancia de Poincaré, relaciones trigonométricas hiperbólicas, prueba de identidad que conduce a  $d(0, r) = \ln \frac{1+r}{1-r}$ , propiedades del ángulo de paralelismo, etc.). Resulta esencial para las partes del sistema donde es necesario justificar cuantitativamente la métrica, defectos angulares y el teorema de Gauss–Bonnet en el contexto del disco.

Para realizar este marco se realizará una revisión histórica de la evolución de la geometría teniendo en cuenta periodos como la geometría pre-euclidiana, la geometría euclidiana y las geometrías no euclidianas, basándose en la elíptica e hiperbólica.

### 1.3 Objetivos

**General:** Idagar los principios matemáticos que sustentan las geometrías no euclídeas: hiperbólica y elíptica, además de identificar algunas aplicaciones, en la historia y la actualidad, en áreas del conocimiento como la física y el arte.

**Específicos:**

- Caracterizar la geometría, euclidiana y dos geometrías no euclidianas, a partir de sus desarrollos históricos.

- Realizar una comparación entre la geometría euclidiana y las geometrías no euclídeas: hiperbólica y elíptica, a partir de sus axiomas y propiedades fundamentales.
- Analizar cómo las geometrías no euclidianas describen algunos fenómenos físicos como en la teoría de relatividad de Einstein y en la obra de M.C. Escher *Circle Limit III*.

## CAPÍTULO 2

### 2. Marco teórico

#### 2.1 Recorrido histórico de la geometría euclidiana a la no euclidiana

Para comenzar con el recorrido histórico, se abordará cómo las primeras civilizaciones como Mesopotamia, Egipto, China e India realizaron descubrimientos geométricos. Es importante señalar que la geometría en estas culturas era principalmente práctica y estaban relacionadas con las actividades que tenían cada cultura, como la arquitectura, la agricultura y la navegación.

Para lograr una comprensión precisa del concepto del cual se va a hablar, se van a dar las siguientes definiciones

El razonamiento geométrico es el proceso mental mediante el cual analizan, interpretan y resuelven situaciones que involucran figuras, propiedades y relaciones espaciales, utilizando conceptos y principios de la geometría. Este tipo de razonamiento implica observar, formular conjeturas, justificar y aplicar los procedimientos geométricos para resolver problemas reales o abstractos. Además, parafraseando a Jaime, A., y Gutiérrez, A. (2016), existen distintos tipos de razonamiento tales como el inductivo, el deductivo y el visual o espacial.

La rigurosidad es la cualidad que garantiza que los razonamientos, definiciones, demostraciones y resultados se construyen con precisión lógica, coherencia interna y sin ambigüedades. Esta rigurosidad implica, usar definiciones exactas y correctamente aplicadas, fundamentar cada afirmación con argumentos válidos o demostraciones sólidas, seguir un orden lógico claro y evitar la generalización sin pruebas formales.

Ella es fundamental para asegurar que el conocimiento sea universalmente válido y verificable (Gutiérrez, 1999).

La abstracción es la capacidad de identificar, aislar y trabajar con las propiedades esenciales de un objeto o situación, dejando de lado aspectos particulares o concretos, es un proceso mental fundamental para la generalización y la construcción de conceptos. Esta sustenta el lenguaje simbólico y formal, es la base del pensamiento matemático avanzado (Rojas, 2017).

El propósito de incluir estas definiciones es ofrecer a los lectores un marco conceptual claro que permita comprender con precisión los conceptos abordados en este trabajo, así como los contextos teóricos en los que se desarrollan.

### **2.1.1 La geometría antes de Euclides**

Antes de Euclides, la geometría tuvo gran desarrollo por las diversas civilizaciones, las cuales sentaron las bases para la sistematización que Euclides llevó a cabo en su obra *Los Elementos*. Según Carl Boyer en su libro *Historia de la Matemática*, el razonamiento geométrico de las antiguas civilizaciones surgió como respuesta práctica a necesidades cotidianas, como la construcción de estructuras, la navegación, la agricultura y la medición de terrenos.

En Mesopotamia, los babilonios desarrollaron una geometría basada en cálculos aritméticos. Se han encontrado tablillas de arcilla con problemas sobre áreas de figuras geométricas y el cálculo de diagonales de rectángulos, lo que sugiere un conocimiento empírico del teorema de Pitágoras, lo cual data de mucho tiempo antes de la formulación que hoy en día se conoce. El razonamiento matemático que emplearon fue impulsado por la necesidad de resolver problemas administrativos, agrario y arquitectónicos. Boyer (1991), señala que los babilonios desarrollaron métodos para hallar áreas y volúmenes de figuras geométricas como rectángulos, triángulos, trapecios y cilindros. En las tablillas halladas se encuentran problemas matemáticos en los que se utilizan fórmulas aproximadas para estas mediciones. Uno de los hallazgos más famosos encontrados de esta civilización y que evidencia su razonamiento geométrico es la tablilla Plimpton 322, que contiene una lista de ternas pitagóricas. Este documento sugiere que los babilonios comprendían algunas propiedades de los triángulos rectángulos, aunque no de manera formalizada como en la matemática griega posterior.

Como destaca Boyer (1991), el legado mesopotámico en el campo de la geometría es un testimonio del ingenio humano para resolver problemas mediante la abstracción numérica y geométrica. A pesar de que el enfoque se basaba en el uso práctico y no sistematizado, sus descubrimientos fueron fundamentales para el desarrollo de la matemática y la geometría en civilizaciones como la griega.

La geometría egipcia también se desarrolló desde un enfoque práctico y, como la mesopotámica, nace de la necesidad de resolver problemas de su cotidianidad, sobre todo en relación con la agrimensura, la arquitectura y la administración. Su geometría se basó en cálculos de áreas y volúmenes mediante procedimientos aritméticos más rigurosos, a comparación de la civilización mesopotámica. También centraron su razonamiento geométrico en la medición de tierras, lo cual era muy importante debido a las constantes inundaciones del río Nilo. Este fenómeno obligaba a los escribas y agrimensores a redefinir los límites de los campos anualmente.

Uno de los documentos más importantes que evidencian el razonamiento geométrico de los egipcios es el Papiro de Rhind (aproximadamente 1650 a.C.). En este hay una serie de problemas matemáticos, incluidas fórmulas para calcular áreas de figuras como triángulos, rectángulos y trapecios, así como volúmenes de cilindros y pirámides truncadas. Aunque los egipcios no formularon una teoría geométrica abstracta, sus métodos proporcionaban soluciones numéricas precisas para la construcción de templos, pirámides y monumentos.

Boyer (1991), señala que los egipcios también manejaban aproximaciones a relaciones geométricas, como el concepto de proporción y algunas reglas empíricas para la construcción de ángulos rectos, empleando la cuerda de 3-4-5 nudos, lo que sugiere un conocimiento rudimentario de lo que más tarde sería formalizado como el teorema de Pitágoras. En la arquitectura su geometría alcanzó un alto grado de rigurosidad, la construcción de pirámides, por ejemplo, requirió un razonamiento avanzado de inclinaciones y alineaciones muy precisas, lo que sugiere un entendimiento práctico de la trigonometría y de la proporción áurea.

A pesar de que la geometría egipcia tuvo un carente desarrollo teórico formal, desempeñó un papel crucial en la ingeniería y administración de su época. Además, su razonamiento y sus métodos fueron más rigurosos, a comparación de lo que se encontró en los mesopotámicos. Pero como los mesopotámicos, el razonamiento de los egipcios

ayudó al desarrollo de la geometría posteriormente, tanto en Grecia como en otras civilizaciones.

Al igual que en las dos civilizaciones anteriormente mencionadas, la civilización china tuvo un razonamiento geométrico práctico y aplicado a problemas de su cotidianidad, como la agrimensura, la arquitectura y la astronomía. Según Boyer (1991), los matemáticos chinos se enfocaron en métodos algebraicos y geométricos para resolver problemas prácticos, sin desarrollar un sistema axiomático formal como los griegos. Uno de los textos más importante en la historia de la geometría china es el *Jiuzhang Suanshu* (Nueve capítulos sobre el arte matemático), un tratado del siglo II a.C. que contiene problemas geométricos con soluciones prácticas. En este documento hay métodos para calcular áreas, volúmenes y relaciones trigonométricas rudimentarias. Como señala Martzloff (1997), la geometría china fue una combinación de reglas empíricas y razonamientos algebraico para resolver ecuaciones geométricas.

Otro desarrollo clave en el razonamiento geométrico chino fue el trabajo del matemático chino Shang Gao (aproximadamente en el siglo IV a.C.), en el que desarrolló principios geométricos basados en la observación y en la necesidad de resolver problemas agrarios y arquitectónicos. Sus contribuciones incluyeron el uso de triángulos rectángulos y la comprensión de relaciones proporcionales en figuras geométricas. La civilización china aplicó métodos geométricos a la astronomía y la cartografía, con el uso de relaciones angulares para determinar distancias. La interacción entre la geometría y la aritmética les permitió avances significativos en ingeniería y planificación urbana, mucho antes de formulación de la geometría euclidiana. Aunque tuvieron una forma particular de razonar geoméricamente, no llegaron a la abstracción de los griegos con la construcción del sistema axiomático de Euclides, sus aportes fueron fundamentales para la evolución de las matemáticas aplicadas.

Según Boyer (1991), la geometría de la civilización griega tuvo sus raíces en conocimientos adquiridos de civilizaciones anteriores, como la egipcia y la mesopotámica, pero a comparación de ellos, los griegos llevaron su razonamiento a un nivel más abstracto y lógico. Uno de los primeros matemáticos en contribuir al desarrollo de la geometría griega fue Tales de Mileto (624 a 546 a.C.), a quien le atribuyeron varios teoremas fundamentales, como el hecho de que un diámetro biseca un círculo y que los ángulos en la base de un triángulo isósceles son iguales. Tales

introdujo el razonamiento deductivo en la geometría, sentando las bases para la demostración matemática.

Otro matemático influyente fue Pitágoras de Samos (570 a 495 a.C.), cuyo trabajo sobre los triángulos rectángulos fue fundamental para el desarrollo de la geometría. El teorema de Pitágoras, aunque conocido por los babilonios, los egipcios y también los chinos, fue formalmente demostrado dentro del sistema griego. La escuela pitagórica promovió la idea de que los números y las proporciones gobernaban la estructura del universo, vinculando la geometría con la teoría de números.

Posteriormente, Parménides y los eleáticos introdujeron un enfoque más filosófico, argumentando sobre la naturaleza del espacio y el infinito. Por su parte, Zenón de Elea (490 a 430 a.C.), formuló paradojas que cuestionan conceptos geométricos como la continuidad y el movimiento. Estos problemas influyeron en la necesidad de desarrollar una geometría más rigurosa y lógica. Hacia finales del siglo V a.C., los sofistas como Hipias y Antifonte exploraron problemas geométricos como la cuadratura del círculo. Sin embargo, fue Eudoxo de Cnido (408 a 355 a.C.), quien estableció el método de exhaustión, un precursor del cálculo integral, para demostrar propiedades geométricas de áreas y volúmenes. Como indica Boyer (1991), Eudoxo refinó el razonamiento geométrico con un rigor matemático que influenciaría a Euclides en su obra *Los Elementos*.

La geometría griega antes de Euclides evolucionó desde las aplicaciones prácticas hasta un sistema axiomático en la deducción lógica. Matemáticos como Tales, Pitágoras y Eudoxo contribuyeron significativamente a este desarrollo y fue lo que permitió a Euclides desarrollar lo que hoy conocemos como la geometría euclidiana y poder desarrollar su sistema axiomático.

### **2.1.2 Geometría euclidiana**

A continuación, se presentará una exploración sobre el desarrollo del razonamiento geométrico a partir de la sistematización realizada por Euclides en la antigüedad. El propósito es comprender cómo se organizó la geometría en un sistema axiomático y evidenciar el proceso deductivo que permitió a Euclides construir una estructura lógica coherente y rigurosa.

La sistematización del conocimiento matemático lo integra uno de los hitos fundamentales en el desarrollo racional del pensamiento. En particular, la geometría euclidiana, escrita en *Los Elementos* por Euclides, muestra cómo a partir de un conjunto reducido de axiomas y postulados, se puede construir un amplio y coherente sistema deductivo. Boyer (1991) destaca la importancia de este método, aludiendo al rigor expuesto en la geometría, ya que este no solo marcó una revolución matemática, sino que además estableció un modelo de razonamiento que ha perdurado durante siglos.

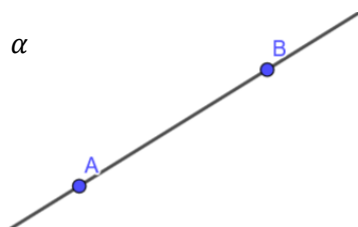
Euclides introdujo un método axiomático en el que se parte de un conjunto de definiciones, axiomas y postulados que se consideran evidentes por sí mismos. Esta estructura le permitió que cada teorema se derive lógicamente a partir de principios básicos. Boyer (1991) subraya que este sistema no es producto del azar, sino el resultado de una profunda reflexión sobre qué elementos son fundamentales para describir la realidad geométrica. Los cinco postulados, constituyen el pilar sobre el que se construye la geometría. De estos, el quinto postulado, conocido como el postulado de las paralelas, ha causado numerosos debates, análisis y cuestionamientos, debido a que su carácter poco intuitivo llevó a futuras exploraciones en geometrías alternativas, o las llamadas geometrías no euclidianas. Esto último se explorará más adelante.

Los cinco postulados de Euclides que fueron formulados en su obra *los Elementos* son los siguientes:

1. Dados dos puntos en un plano  $\alpha$ , se puede trazar una única línea recta. (Hilbert, 1971)

### Ilustración 1

*Representación del primer postulado de Euclides*

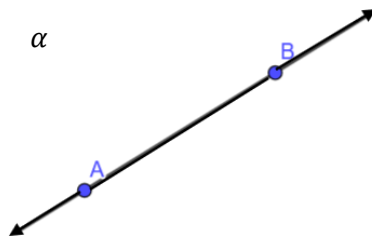


*Nota.* Creación propia.

2. Una línea recta puede prolongarse indefinidamente. (Hilbert, 1971)

### Ilustración 2

Representación del segundo postulado de Euclides

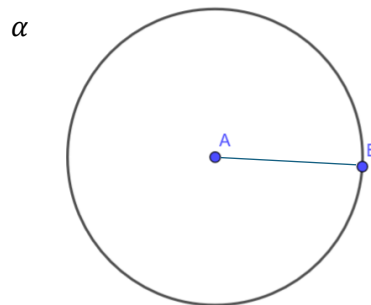


Nota. Creación propia

3. Dado un punto y una distancia, se puede trazar una circunferencia en la que el punto A es el centro y la distancia es el radio AB. (Hilbert, 1971)

### Ilustración 3

Representación de tercer postulado de Euclides. La distancia del punto A al punto B es el radio, y el punto A es el centro de la circunferencia

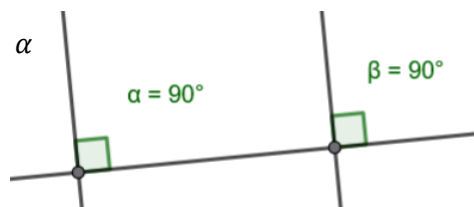


Nota. Creación propia.

4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí. (Hilbert, 1971)

### Ilustración 4

Representación del cuarto postulado de Euclides. La medida de los ángulos rectos es igual a  $90^\circ$

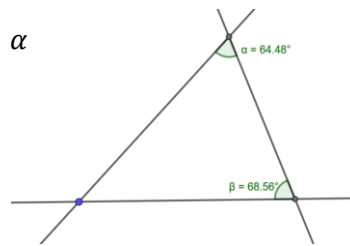


Nota. Creación propia

5. Si una línea recta corta a otras dos formando ángulos internos del mismo lado cuya suma es menor que dos ángulos rectos, entonces esas dos líneas rectas se encuentran del lado donde la suma de los ángulos internos es menor a dos rectos.

### Ilustración 5

*Representación del quinto postulado de Euclides, conocido como el de las paralelas. La suma de dos ángulos rectos es equivalente a  $180^\circ$ , en este caso la suma de los ángulos internos es de  $133,04^\circ$  lo que implica, según el postulado que se corten del lado donde esto sucede.*



*Nota.* Creación propia.

El método axiomático planteado por Euclides se puede resumir en los siguientes puntos, los cuales Boyer (1991) considera esenciales para el desarrollo, no solo de la geometría, sino para las matemáticas:

- Se identifican conceptos primarios, en este caso puntos, líneas y planos que, sin definición formal, se entienden de manera intuitiva.
- Se establecen enunciados fundamentales que se asumen como verdaderos sin necesidad de demostración.
- A partir de estos postulados se deducen teoremas y proposiciones mediante un razonamiento lógico y riguroso.

Esta estructura le permitió a Euclides la construcción de un sistema ordenado, con la posibilidad de examinar y cuestionar cada uno de sus fundamentos, lo que ha sido crucial para el desarrollo posterior de las matemáticas.

El proceso deductivo que caracteriza a *Los Elementos* consiste en una serie de pasos lógicos que aseguran la validez de cada información dentro del sistema. Para Boyer (1991), la fuerza del método reside en su capacidad para transformar conocimientos empíricos y observaciones en un cuerpo sistemático de verdades matemáticas. Cada demostración, a partir de los postulados básicos, se convierte en una cadena de razonamientos ininterrumpidos, donde la conclusión es una consecuencia de los

principios fundacionales. Esto ha sido de suma importancia no solo en el ámbito de la geometría sino también en el campo científico en general, debido a que la deducción rigurosa garantiza que cualquier nuevo desarrollo del sistema deber ser compatible con los principios fundacionales.

El legado de Euclides se extiende más allá de los límites de la geometría. La metodología axiomática y el razonamiento deductivo que empleó se convirtieron en modelos a seguir para el desarrollo de otros campos matemáticos y científicos. Boyer (1991) resalta que la rigurosidad lógica permitió a las futuras generaciones de matemáticos construir sobre estos cimientos sólidos, abriendo la puerta para desarrollos en áreas tan diversas como la teoría de números y el análisis matemático. Esta es la razón por la que se impulsa este trabajo y se busca seguir los pasos del razonamiento que uso Euclides para explicar las aplicaciones que tienen las geometrías no euclidianas.

Además, el cuestionamiento del quinto postulado de Euclides llevó, en el siglo XIX, a la formulación de las geometrías no euclidianas, demostrando que la exploración de los límites de un sistema axiomático puede dar lugar a nuevos y revolucionarios paradigmas. Esta evolución evidencia cómo la sistematización inicial, impulsa el progreso científico al poner en evidencia las posibilidades de ampliación y reinterpretación de los fundamentos establecidos.

### **2.2.3 Geometrías no euclidianas**

Durante más de dos milenios, la geometría de Euclides, expuesta en *Los Elementos*, fue considerada el modelo absoluto del razonamiento lógico y la estructura del espacio. Sin embargo, en el siglo XIX, esta visión fue radicalmente desafiada con el surgimiento de las geometrías no euclidianas, un hito que transformó no solo las matemáticas, sino también la física y la filosofía.

Lo que promovió el surgimiento de las geometrías no euclidianas fue la duda persistente en torno al quinto postulado de Euclides, también conocido como el postulado de las paralelas. Este enunciado afirma que, dada una línea recta y un punto exterior a ella, existe una única recta paralela que pasa por ese punto y no interseca a la primera, (enunciado alternativo, más adelante miraremos por qué se interpreta de esta forma).

El quinto postulado de Euclides ha sido objeto de múltiples formulaciones a lo largo de la historia, en parte porque su forma original es más compleja y menos intuitiva que los

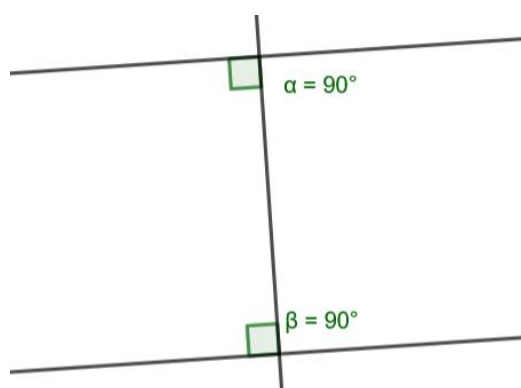
cuatro postulados. A continuación, veremos la forma común y por lo que se conoce este postulado como el de las paralelas:

*“Por un punto exterior a una recta dada, pasa una única recta paralela a la dada.”*

Esta es una reformulación planteada por John Playfair, en el siglo XVIII, y es una de las versiones más utilizada en los textos modernos. Es lógicamente equivalente al postulado original de Euclides, pero se piensa que es más sencilla y clara. Leyendo lo que dice el quinto postulado de Euclides, se vislumbra que él no menciona directamente las rectas paralelas, sino solo hace referencia a la intersección de rectas en función de la suma de ciertos ángulos. Ambas formulaciones son equivalentes, ya que imponen la misma restricción sobre la forma del espacio, esto sucede porque si se acepta el postulado original, implica que si dos rectas no cumplen la condición de los ángulos, donde su suma es exactamente dos rectos, entonces estas se cruzan. Por lo que solo un caso puede cumplir esa condición, es decir solo puede haber una recta paralela que no corte a la dada. Resumiendo lo anterior, si se acepta la unicidad de la paralela, entonces en el caso de que los ángulos internos sumen menos de dos rectos, debe ser porque no es la paralela y por lo tanto esas dos rectas se intersecan, que es lo que afirma Euclides.

### **Ilustración 6**

*Representación de la versión del quinto postulado, reformulación por Playfair, en la que implica que, si la suma de los dos ángulos internos es igual a la suma de dos rectos, esto implica que las rectas no se corten.*



*Nota.* Creación propia

Desde la antigüedad, matemáticos como Proclo (siglo V) y más adelante matemáticos islámicos como Omar Khayyam intentaron demostrar este postulado a partir de los otros, sin obtener éxito. Boyer (1991) señala que esta búsqueda se prolongó durante

siglos y que incluso pensadores renacentistas como Girolamo Saccheri (1667-1773) intentaron sin saberlo formular versiones primitivas de geometrías alternativas.

Los intentos de refutar el quinto postulado en el siglo XIX dieron un giro crucial. El matemático húngaro János Bolyai (1802-1860) y el ruso Nikolai Lobachevsky, publicaron sus resultados en 1829 bajo el título *Sobre los fundamentos de la geometría*; Bolyai lo hizo en un apéndice incluido en una obra de su padre, llamada *Tentamen* (1832). Ambos se basaban en modificar el quinto postulado manteniendo intactos los demás, y llegaron a la conclusión de que era posible construir un sistema lógico, sin contradicciones, en el cual las leyes de la geometría eran diferentes a las euclidianas. En palabras de Boyer “la obra de Lobachevsky y Bolyai represento un acto de emancipación intelectual sin precedentes en la historia de las matemáticas” (Boyer, 1991, p. 530). Lobachevsky presento su “geometría imaginaria”, donde por un punto exterior a una recta puede pasar infinitas paralelas, independientemente, Bolyai desarrolló la misma teoría en el capítulo que publicó en el libro de su padre.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855), uno de los más grandes matemáticos de todos los tiempos, ya había desarrollado ideas similares, aunque nunca las publicó por temor a las reacciones filosóficas y académicas. En una carta a Taurinus de 1824, Gauss afirmaba que una geometría en la cual no se cumple el quinto postulado era “completamente tan lógica como la nuestra, aunque sus consecuencias difieren mucho de la intuición”. En su correspondencia privada se refiere a estas ideas como anti-euclidianas y temía el rechazo del ambiente académico. Él reconoció el valor del trabajo de Bolyai y le escribió a su padre que se le había anticipado a las ideas.

Otra alternativa a la geometría euclidiana surgió con Bernhard Riemann (1826-1866), quien en su célebre obra *Sobre las hipótesis que sirven de fundamento a la geometría* (1854), presentó la geometría elíptica, en la cual no existen líneas paralelas y las líneas “rectas” son grandes círculos sobre superficies curvas. El estudio de las propiedades del espacio independientemente de la intuición sensorial abrió el camino a la geometría diferencial y la teoría de la relatividad, que es la que incentiva este trabajo. Riemann no solo propuso una visión completamente general del espacio físico, y por tanto debía ser determinada por la experiencia, así la geometría dejaba de ser una verdad a priori y se convertiría en una teoría empírica.

Carl Boyer sintetiza lo mencionado, de la siguiente forma:

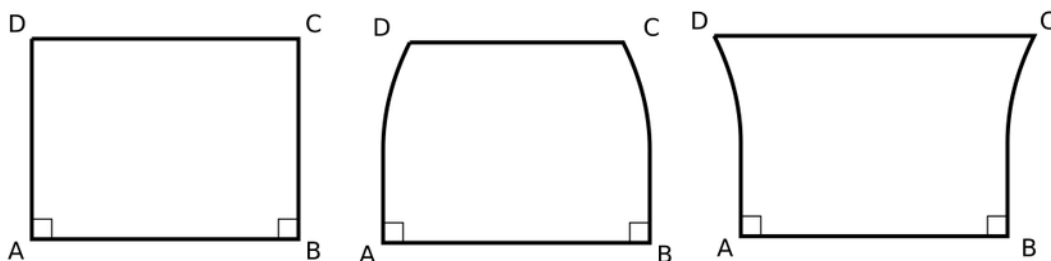
*“El descubrimiento de que podían existir geometrías lógicamente coherentes en las que no valía el quinto postulado significó no solo una nueva era para la matemática, sino también para la filosofía de la ciencia”* (Boyer, 1991, p. 529).

Saccheri fue uno de los matemáticos más influyentes, aunque no del todo comprendido en su época, cuestionó el quinto postulado de Euclides. En su obra *Euclides ab omni naevo vindicatus* (“Euclides libre de toda mancha”) fue publicada en 1733, póstumamente. El objetivo de esta obra era mostrar el quinto postulado a partir de los otros, y así defender la pureza del sistema euclidiano. Sin embargo, en su camino terminó construyendo, sin darse cuenta, una versión temprana de las geometrías no euclidianas.

Saccheri introdujo lo que hoy se conoce como el cuadrilátero de Saccheri, una figura con dos lados rectos de igual longitud perpendiculares a una base en común. El lado opuesto llamado base superior, podía formar tres tipos de ángulos con los lados: ángulos rectos (caso euclidiano), agudos (caso hiperbólico) u obtusos (caso elíptico). Su idea era suponer que los ángulos en la base superior no eran rectos y así llegar a una contradicción, pero no lo logró, por lo contrario, notó que al asumir que los ángulos eran agudos, no surgían contradicciones lógicas. Aunque Saccheri descartó la posibilidad por razones filosóficas y metafísicas, por lo que decidió llamarlo “repugnante para naturaleza del espacio”. Los resultados que obtuvo anticiparon muchas ideas de la geometría hiperbólica desarrollada formalmente después de más de un siglo por Lobachevesky y Bolyai.

### **Ilustración 7**

*Cuadrilátero de Saccheri.*



*Nota.* Representación de los tres tipos de cuadriláteros de Saccheri. De izquierda a derecha: con ángulos de cúspide rectos (geometría euclidiana), obtusos (geometría

elíptica) y agudos (geometría hiperbólica). Imagen recuperada de Wikimedia Commons.  
URL: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Saccheri\\_quads.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Saccheri_quads.svg)

Boyer (1991) resume el trabajo de Saccheri de la siguiente forma:

*“Sin quererlo, Saccheri había dado los primeros pasos hacia una nueva geometría, aunque su intención era destruirla.”*

Hoy se reconoce que el trabajo de Saccheri fue un punto de inflexión, ya que mostró que el quinto postulado no era derivable de los otros, y que otras geometrías, distintas, pero lógicamente válidas, podían existir. Esta idea, aunque extraña para su tiempo, sería el núcleo de la revolución no euclidiana del siglo XIX.

Como se ha mencionado, las dos principales formas de geometrías no euclidianas son la geometría hiperbólica, de Lobachevsky y Bolyai, que dice que existen infinitas paralelas por un punto exterior a una recta, donde el espacio tiene curvatura negativa, que significa que una cantidad geométrica, asociada al tensor de curvatura, toma valores menores a cero. También está la geometría elíptica que dice que no existen paralelas, todas las líneas eventualmente se cruzan, y el espacio tiene curvatura positiva, lo que significa que el tensor toma valores mayores a cero.

El surgimiento de las geometrías no euclidianas abrió el camino a una comprensión más amplia del concepto del espacio. Esta revolución culminó con Albert Einstein, quien en su teoría general de la relatividad (1915), utilizó la Geometría riemanniana para describir la curvatura del espacio-tiempo provocado por la masa y la energía. Estas geometrías demostraron que el espacio no es necesariamente plano, y que la verdad matemática puede depender de los axiomas adoptados. Como escribe Boyer, “se rompieron las cadenas del absolutismo geométrico, y la libertad de creación matemática fue reconocida como una virtud, no un vicio” (Boyer, 1991, p. 534).

### **2.2.3.1 Geometría elíptica**

Mientras Lobachevsky y Bolyai desarrollaron una geometría basada en la negación del postulado de las paralelas en sentido hiperbólico, es decir, diciendo que existen múltiples rectas paralelas a una recta por un punto exterior, Bernhard Riemann llevó esta transformación a un nivel aún más profundo. En su obra *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen* (“Sobre las hipótesis que están en los fundamentos de geometría”), presentada en 1854, introdujo una visión completamente

novedosa del espacio geométrico, o como dice Boyer “el espacio como variedad continua en la que la curvatura puede variar punto a punto” (1991, p. 528).

Desde la perspectiva de Riemann, se define una geometría de curvatura positiva, también llamada geometría elíptica o riemanniana. En ella, las líneas son geodésicas, como grandes círculos sobre una esfera, y no existe el paralelismo, toda pareja de líneas eventualmente se intersecan (Boyer, 1991, p. 530). Esta geometría posee características notables, en ella la suma de los ángulos internos de un triángulo siempre es mayor a dos rectos, tampoco existen figuras semejantes, el espacio es finito pero ilimitado, como ocurre en la superficie de una esfera, entre otras.

Riemann no solo propuso un nuevo tipo de geometría, sino que revolucionó la manera en la que la matemática piensa el espacio. En lugar de partir de axiomas fijos, propuso que la geometría debía construirse a partir de una métrica que determina la distancia entre puntos, lo cual permite describir espacios de cualquier número de dimensiones. Esta visión dio lugar a la geometría diferencial moderna, de la cual la geometría riemanniana es uno de los pilares fundamentales. Además, él sostuvo que las propiedades del espacio no debían considerarse una verdad a priori, sino que debían determinarse empíricamente, es decir que la geometría del universo es una cuestión de física, no de pura razón (Boyer, 1991, p.531). Esta afirmación tendría consecuencias medio siglo después, cuando Albert Einstein la utilizó para formular su teoría de la relatividad general, en la que el espacio-tiempo es una variedad de curvatura variable determinada por la distribución de masa y energía; se profundizará en esto más adelante, ya que es uno de los temas que movilizan este trabajo.

Boyer resume lo anterior de la siguiente manera:

*“Los matemáticos del siglo XIX descubrieron que podía existir una geometría que, aunque contraria a la intuición ordinaria, no era internamente contradictoria. [...] La geometría no euclidiana llegó a ser aceptada como una construcción lógica válida, útil incluso en física”* (Boyer, 1991, p.522)

### **2.2.3.2 Geometría hiperbólica**

La geometría hiperbólica fue la primera de las geometrías no euclidianas en formularse de manera rigurosa y coherente. Su desarrollo a principios del siglo XIX marcó un hito en la historia de la matemática, al mostrar que el quinto postulado de Euclides no es

consecuencia lógica de los otros cuatro, sino una elección axiomática independiente. En lugar de asumir que por un punto exterior a una recta solo puede trazarse una paralela, la geometría hiperbólica afirma que existen infinitas rectas paralelas. El concepto fue explorado inicialmente por matemáticos como Carl Friedrich Gauss, Nikolái Lobachevsky y János Bolyai, como ya se mencionó anteriormente. En la geometría hiperbólica, se conservan los primeros cuatro postulados de Euclides, pero el quinto se reemplaza por la siguiente proposición:

*Por un punto exterior a una recta, pasan infinitas rectas que no la cortan.*

Este cambio da lugar a un espacio con propiedades profundamente distintas, en ella la suma de los ángulos internos de un triángulo es menor a dos rectos y esta diferencia depende del área del triángulo, también existen figuras semejantes de distinto tamaño, al contrario de lo que ocurre en la geometría elíptica, no existe una noción universal de distancias, los conceptos métricos deben definirse en función al modelo, entre otras características que se explorarán más adelante. Lo más impactante fue que esta nueva geometría era internamente coherente, Lobachevsky y Bolyai mostraron que, a partir de su versión modificada del quinto postulado, era posible construir toda una teoría matemática tan rigurosa como la euclidiana. Como señala Boyer:

*“Lo que comenzó como un intento de eliminar el quinto postulado se convirtió, paradójicamente, en la construcción de una geometría completamente nueva con su propia lógica interna y sus propias reglas” (Boyer, 1991, p.526).*

La aceptación de la geometría hiperbólica llegó con la construcción de modelos concretos dentro de la geometría euclidiana, especialmente el modelo de Beltrami, Klein y el modelo del disco de Poincaré, los cuales mostraron que la geometría hiperbólica podía representarse coherentemente en términos de la geometría Euclidiana, estableciendo así su consistencia relativa, lo que garantiza la ausencia de contradicciones (Boyer 1991, pp. 529-530).

Uno de los aspectos más revolucionarios de la geometría hiperbólica fue su impacto filosófico. Durante siglos, la geometría euclidiana había sido considerada una verdad absoluta del pensamiento humano. La existencia de una geometría alternativa, válida y sin contradicciones, sacudió los fundamentos de la epistemología matemática. Como señala Boyer:

*“La posibilidad de varias geometrías consistentes reveló que la geometría no es una verdad universal impuesta por la razón pura, sino una contribución lógica que puede adoptar diversas formas”* (Boyer, 1991, p.532).

Este cambio de paradigma preparó el terreno para una visión más amplia del espacio, que culminaría con los trabajos de Riemann y posteriormente, con la teoría de la relatividad de Einstein.

La aparición de las geometrías no euclidianas, en este caso hiperbólica y elíptica, no solo transformó la matemática, sino que modificó radicalmente nuestra comprensión del conocimiento del espacio y de la verdad misma. Durante más de dos milenios, la geometría euclidiana fue considerada la encarnación de la certeza, un modelo que describía perfectamente el mundo físico. Sin embargo, al romper con el quinto postulado de Euclides, las geometrías no euclidianas revelaron que la verdad matemática no es la única, pueden existir sistemas alternativos, cada uno válido dentro de su propia lógica interna.

Lejos de ser meras consideraciones teóricas, las geometrías no euclidianas encontraron un lugar real en la descripción del universo físico, lo que da lugar a diversas aplicaciones en el campo de la física teórica. Así, el pensamiento abstracto de Lobachevsky, Bolyai y Riemann, surgió en el silencio de la especulación, acabo dando forma a las estructuras del universo. Estas geometrías nos enseñan, una lección de humildad intelectual, que incluso las verdades más evidentes, pueden ser puestas en duda, y que en esa duda comienza el verdadero conocimiento.

## CAPÍTULO 3

### 3. Aplicaciones de las geometrías no euclidianas

Durante siglos, la humanidad concibió el espacio como algo rígido, plano y absoluto, regido por leyes de la geometría de Euclides. Esta visión parecía incuestionable, las rectas no se curvan, los ángulos internos de un triángulo siempre suman  $180^\circ$ , las rectas paralelas jamás se cortan. Eran un modelo útil y suficiente para escribir la realidad visible. Sin embargo, el conocimiento del ser humano evoluciona, llegó el momento en que mirar el mundo con otros ojos se volvió necesario. Son las geometrías no euclidianas, las que modifican las formas de pensar el espacio, se atrevieron a desafiar lo evidente. Estas nuevas, como la hiperbólica, donde las paralelas se multiplican, o la elíptica donde simplemente no existen, no surgieron de una experiencia directa con el entorno, sino de un acto profundo de abstracción, lo que hizo que surgiera la pregunta: ¿y si el espacio no es como siempre hemos pensado?

Lo sorprendente es que estas geometrías, nacidas en la mente humana, encontraron coincidencias con la realidad. En la curvatura de la tierra, la trayectoria de la luz ante una estrella, en la estructura del universo mismo. Hoy sabemos que el espacio no es plano y que comprender su curvatura, es fundamental para explicar algunos fenómenos físicos como la gravedad, el tiempo, el movimiento de los cuerpos celestes, entre otros. La teoría de la relatividad general de Einstein, por ejemplo, como ya se mencionó, se basa en la geometría riemanniana.

Así, lo que comenzó como una exploración matemática se transformó en una nueva forma de conocer el mundo. Las geometrías no euclidianas nos enseñan que el espacio puede curvarse, que la realidad puede ser distinta a la intuición, o lo que mencionan en la licenciatura algunos profesores, no todo lo que vez es. El conocimiento humano crece cuando nos atrevemos a pensar más allá, lo que nos recuerda que entender el mundo no es solo observarlo conó también imaginarlo de otras maneras.

#### 3.1 La relatividad de Einstein

Así como en la historia de la geometría con Euclides, sucede lo mismo con la historia y desarrollo de la física y mecánica clásica con Newton, se consideraba que la concepción del universo solo podía ser explicada por sus ideas. Se asumía que el tiempo transcurría de forma uniforme para todos los observadores, sin embargo, a comienzos del siglo XX, Albert Einstein transformó radicalmente esta visión con la teoría de la relatividad.

Ahora él había transformado las ideas del área de la física y lo habría hecho con una nueva estructura geométrica, la geometría riemanniana. Esta geometría le permitió describir la curvatura del espacio tiempo, que también es dinámico y moldeado por la materia y la energía. Este trabajo busca analizar y explorar cómo Einstein relacionó las ideas de Riemann en su teoría de la relatividad y cómo esta se convirtió en una herramienta para conocer la estructura del universo.

En el marco de la teoría de la relatividad, la diferencia entre la geometría riemanniana y la geometría de Minkowski se entiende principalmente a partir del papel que desempeña el **tiempo** y de la estructura causal del espacio-tiempo. En relatividad especial, el espacio-tiempo se modela como un espacio de Minkowski, dotado de una métrica lorentziana de firma  $(- + + +)$ , en la cual el tiempo aparece con un signo distinto a las dimensiones espaciales. Esta estructura garantiza que la velocidad de la luz sea la misma para todos los observadores inerciales y permite clasificar los intervalos entre eventos como temporales, espaciales o lumínicos, estableciendo qué eventos pueden influirse causalmente. En este contexto, las trayectorias de las partículas libres son líneas rectas (geodésicas) y no existe curvatura: el espacio-tiempo es plano. En cambio, la relatividad general extiende este marco al permitir que la métrica lorentziana varíe de punto a punto, dando lugar a un espacio-tiempo curvo que, matemáticamente, es una variedad pseudo-riemanniana. Aunque se conservan las herramientas de la geometría riemanniana —como conexiones, geodésicas y curvatura—, la métrica ya no es definida positiva, sino lorentziana, lo que mantiene la distinción entre tiempo y espacio. Así, mientras la geometría riemanniana clásica describe espacios puramente espaciales, en relatividad la geometría de Minkowski representa el caso ideal sin gravedad, y su generalización pseudo-riemanniana describe cómo la curvatura del espacio-tiempo reemplaza a la fuerza gravitacional y gobierna el movimiento libre de la materia y la luz.

La relatividad especial fue el primer gran paso de Einstein hacia una nueva concepción del universo. Esta teoría se basa en dos postulados:

- Las leyes de la física son las mismas para todos los observadores que se mueven a una velocidad constante unos respecto a otros (observadores inerciales).
- La velocidad de la luz en el vacío es la misma para todos los observadores, sin importar el movimiento de la fuente o del receptor.

A partir de estos postulados, Einstein deduce consecuencias sorprendentes que contradicen la intuición clásica, el tiempo se dilata, lo que quiere decir que transcurre más lento para cuerpos en movimiento relativo al observador. Además, el concepto de simultaneidad deja de tener sentido absoluto, dos eventos que son simultáneos para un observador pueden no serlo para otro.

O explicado en palabras del propio Einstein:

*“Sucesos que son simultáneos respecto al terraplén no lo son con respecto al tren y viceversa [...] Cada cuerpo de referencia (sistema de coordenadas) tiene su tiempo especial”* (Einstein, 2020, p.19)

Este descubrimiento implica que no existe un tiempo universal, que el tiempo transcurre de manera diferente para distintos observadores dependiendo de su estado de movimiento relativo al observador. Esta idea se refleja matemáticamente en la transformación de Lorentz, que reemplaza a la transformación de Galileo y permite mantener la velocidad de la luz constante para todos los observadores:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Donde  $x$  es la posición de un evento,  $t$  es el tiempo medido del mismo evento,  $v$  es la velocidad relativa del evento,  $c$  es la velocidad de la luz.  $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$  Es el factor de contracción del espacio-tiempo o también llamado el factor de Lorentz

La transformación de Lorentz describe cómo se relacionan las coordenadas espacio temporales de un evento en dos sistemas de referencia inerciales que se mueven uno con respecto al otro a velocidad constante.

Una de las ecuaciones más famosas y bonitas que deriva de esta teoría es:

$$E = mc^2$$

La cual expresa que la masa es una forma de energía, implicando que incluso un cuerpo en reposo contine una gran cantidad de energía. Einstein deriva a partir de consideraciones sobre la absorción de energía y la conservación de la masa.

La teoría de la relatividad especial solo se aplicaba a observadores inerciales, es decir se encuentra en reposo o en movimiento uniformemente rectilíneo, con velocidad constante, o en ausencia de aceleraciones. Para extender sus principios a situaciones con gravedad, Einstein desarrolló la relatividad general, publicada en 1915. Él formula el principio de equivalencia, no existe experimento local que permita distinguir entre un campo gravitatorio uniforme y una aceleración uniforme. En otras palabras, estar dentro de un ascensor acelerado en el espacio vacío es indistinguible de estar en reposo en la superficie terrestre. Este principio conduce a la idea de que la gravedad no es una fuerza en el sentido clásico, sino una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo causada por la presencia de masa y energía. Los cuerpos no caen porque una fuerza los empuje hacia “abajo”, sino siguen trayectorias naturales, en este caso geodésicas, en el espacio-tiempo curvado.

En palabras de Einstein:

*“La geometría del espacio no es independiente, sino que depende del campo gravitacional, y el campo gravitacional a su vez está determinado por la materia”*  
(Einstein, 2020, p.93)

Este nuevo enfoque, expresado matemáticamente mediante la ecuación de campo de Einstein, vincula la geometría del espacio-tiempo con la distribución de materia y energía. Einstein no presenta esta ecuación en su libro, pero si explica las consecuencias físicas más relevantes, como la desviación de la luz por el campo gravitatorio del Sol, comprobada en 1919, y la precesión anómala del perihelio de Mercurio.

El enfoque que le dio Einstein a su teoría de la relatividad obliga a que se acepte que la experiencia directa del mundo no siempre corresponde a la estructura subyacente del universo, y que las matemáticas, especialmente la geometría, son herramientas poderosas para acceder y comprender a esa estructura.

*“La idea del espacio absoluto, tal como fue desarrollada por Newton, ha mostrado ser innecesaria y, en cierto sentido, errónea”* (Einstein, 2020, p. 68).

### 3.1.1 Descripción de la deformación del espacio-tiempo explicada por la geometría no euclidiana elíptica o conocida como riemanianna

El redefinir el espacio, el tiempo y la gravedad, no solo transformó el paradigma de la física, sino también amplió la comprensión del universo desde las nuevas matemáticas. En su obra *Sobre la teoría de la relatividad especial y general*, Einstein (2020) expone la base conceptual sobre la teoría de la relatividad general, allí plantea que la presencia de masa y energía altera la geometría del espacio tiempo, lo que genera efectos que se percibe como gravedad. Para describir tal alteración, Einstein recurre explícitamente a la geometría diferencial desarrollada por Riemann, como se mencionó anteriormente.

En palabras de Einstein:

*“La geometría (en sentido amplio) que empleamos ya no es euclidiana. En su lugar entramos en el ámbito de la geometría de Riemann, en la cual la noción de espacio plano deja de tener validez general”*

La relatividad general se resume en una ecuación conocida como la ecuación de campo de Einstein:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Donde:

$G_{\mu\nu}$  es el tensor de Einstein, que tiene información sobre la curvatura del espacio-tiempo (basado en el tensor de Riemann y el tensor de Ricci).  $T_{\mu\nu}$  es el tensor de energía-momento, que describe la materia y energía presentes.  $g_{\mu\nu}$  es tensor métrico de Riemann, una función que permite medir distancias y ángulos en el espacio curvo.  $c$  es la velocidad de la luz.  $G$  es la constante de gravitación universal.  $\Lambda$  es una constante cosmológica de Einstein.

La ecuación indica que la geometría del espacio-tiempo está determinada por la distribución de la masa y energía. Esta visión sustituye a la concepción clásica newtoniana y solo puede formularse en el lenguaje de la geometría de Riemann.

Einstein reconocía el papel fundamental de Riemann en su construcción teórica:

*“La geometría de Riemann nos proporciona los medios necesarios para describir este espacio no euclidiano, cuya métrica ya no es uniforme y cuya curvatura depende de la materia”* (Einstein, 2020, p. 97)

Al remplazar la geometría euclidiana por la riemannianna, Einstein abrió una puerta a una concepción dinámica y curvada del espacio-tiempo, en la que la gravedad se explica como geometría. Esto no solo transformó la física sino también la concepción que se tiene del universo.

### **3.2 Obras de Escher**

Maurits Cornelis Escher nació en 1890 en Holanda y comenzó desde temprano una carrera en artes gráficas. Aunque su formación familiar era más cercana a la ingeniería y las ciencias, Escher se inclinó de lleno por el arte. Paradójicamente, su obra terminó sorprendiendo y fascinando a científicos y matemáticos, quienes vieron en sus representaciones, herramientas visuales de disciplinas avanzadas, como la topología, la simetría (transformaciones en el plano) y la geometría no euclidiana.

El trabajo representa una ruptura de la interpretación del espacio por medio de la geometría euclidiana, mostrando universos regidos por otras leyes geométricas. Escher, quien no tuvo una formación matemática avanzada, logro desarrollar representaciones artísticas que reflejan con sorprendente precisión propiedades de la geometría hiperbólica, especialmente a través del modelo del disco de Poincaré. Como plantea Melo (2016), sus obras se convirtieron en una invitación a abandonar el camino conocido y penetrar en espacios donde el infinito se manifiesta dentro de los límites finitos.

La interpretación del arte de Escher obliga al espectador a abandonar la visión geométrica euclídea. Escher exploró la geometría hiperbólica, como expone Melo (2016), en este tipo de geometría, dada una recta y un punto exterior a ella, existen infinitas paralelas posibles, genera un espacio no euclídeo, y ahí está el desafío del infinito visual, algo que le interesó presentar en sus obras a Escher. El modelo del disco de Poincaré permite representar lo anterior gráficamente. En las obras *Circle limit*, Escher aplica este modelo intuitivamente, en ellas las figuras se acercan al borde del disco haciéndose cada vez más pequeñas, pero en la métrica hiperbólica todas tienen el mismo tamaño. Como explica Melo (2016), esta ilusión se debe a que la distancia entre un punto y el borde del disco, siguiendo la métrica hiperbólica, es infinita, por lo que la

figura “se percibe” como cercana al límite desde la perspectiva interna del espacio representado. Desde este punto de vista, su obra no es un diseño que se comprime hacia el borde, sino un teselado periódico uniforme, donde cada figura conserva su tamaño real dentro del espacio hiperbólico.

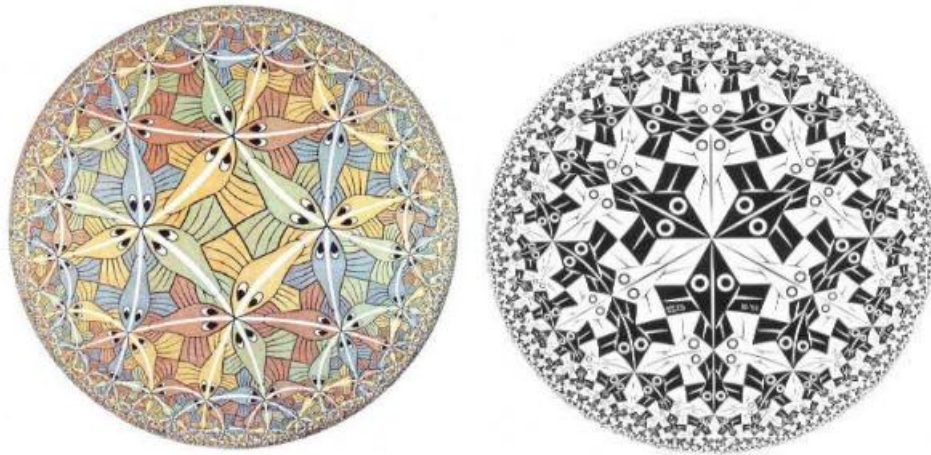
Las obras de Escher muestran que los límites entre el arte y las matemáticas son más que simbólicos, su trabajo muestra que la percepción espacial no es única ni absoluta, solo que depende del marco geométrico con el que se interpreta el mundo. Al representar el infinito dentro de un espacio finito, el artista obliga que el espectador abandone sus ideas de interpretación geométrica, dejando la percepción euclídea atrás y adentrarse a otras ideas que siguen leyes geométricas distintas. Así como lo manifiesta Melo (2016), se debe dejar el camino acostumbrado para descubrir resultados extraordinarios, tanto en el arte como en la ciencia.

### **3.2.1 Descripción de la geometría no euclidiana hiperbólica empleada por el artista Maurits Escher en sus obras *Circle Limit I-IV*.**

Después de más de un siglo de los descubrimientos de los matemáticos Nikolái Lobachevski, Janos Bolyai y Carl Friedrich Gauss al mostrar que era posible construir un espacio donde el postulado de las paralelas de Euclides no se cumpliera, surgió la geometría hiperbólica. El artista neerlandés Maurits Cornelis Escher (1898-1972) encontró en esta geometría no euclidiana una fuente de inspiración visual. En sus series *Circle Limit I-IV*, Escher representó patrones que se repiten infinitamente dentro de un círculo, donde las figuras parecen reducirse de tamaño conforme se aproximan al borde. Lejos de ser una ilusión óptica arbitraria, estas obras son representaciones exactas de teselaciones hiperbólicas; configuraciones construidas según las leyes del modelo del disco de Poincaré, una de las formulaciones más elegantes de la geometría hiperbólica.

#### **Ilustración 8**

Circle Limit III y I



*Nota: Tomada del trabajo de Rojo. M (2008), obras realizadas por Escher en 1959 y 1958 respectivamente.*

Maurits Cornelis Escher, estudio en la Escuela de Arquitectura y Artes Decorativas de Haarlem, pronto se cambió a las artes gráficas. En las décadas de 1930 y 1940 trabajó con teselaciones euclidianas, pero se sintió limitado, ya que en el plano euclidiano solo existen teselaciones regulares de figuras geométricas “comunes”. En 1954 conoció al matemático Harold Scott McDonald Coxeter, experto en geometría hiperbólica, él fue quien le mostró el modelo de Poincaré, donde las teselaciones hiperbólicas aparecen comprimidas dentro de un círculo. Escher quedó fascinado al ver que ese modelo de una figura puede repetirse infinitamente sin salirse del borde

En el modelo del disco de Poincaré, el plano hiperbólico se representa dentro de un círculo finito; las geodésicas corresponden a arcos de circunferencia ortogonales al borde del círculo, y las transformaciones isométricas son fracciones de Möbius que preservan la unidad del disco. Escher, utilizó este modelo para diseñar sus “mundos imposibles”, logrando una intersección singular entre el arte y las matemáticas, en donde cada objeto geométrico repetido en el interior del círculo tiene el mismo tamaño hiperbólico, aunque su tamaño euclídeo decrezca visualmente hacia la periferia.

## CAPÍTULO 4

### 4. Sistema teórico local sobre la geometría Elíptica

En este apartado, se mostrará un sistema axiomático, con el que se busca “modelar” la curvatura del espacio-tiempo según la Relatividad General. Para esto se hará uso de una métrica lorentziana, la cual es una pseudo- Riemanniana y no una métrica Riemanniana positiva-definida. Esta métrica es necesaria porque el espacio-tiempo tiene estructura causal, lo que permite distinguir entre pasado, futuro y luz, lo que la métrica Riemanniana definida positiva no hace.

La métrica Riemanniana positiva definida, dice: para todo vector no nulo  $v$ ,  $g(v, v) > 0$ . Lo que significa que todo vector tiene longitud positiva, como en el espacio euclidiano. La métrica Lorentziana permite que  $g(v, v)$  sea negativo, cero o positivo dependiendo del vector. Si se usará la métrica positiva definida, toda curva tendría longitud positiva y no habría forma matemática de “moverse en el tiempo”, “moverse en el espacio” o “moverse a la velocidad de la luz”. Esto lo explica Robert M. W (1984), en su libro *General Relativity*.

La geometría Riemanniana modifica los cinco postulados de Euclides de la siguiente manera:

P1: Por dos puntos distintos pasa una única geodésica (la recta en esta geometría)

P2: Toda geodésica es finita, pero sin borde; no se prolonga indefinidamente como en la geometría euclidiana.

P3: Se pueden definir “círculos” (conjuntos de puntos equidistantes de un centro), aunque su comportamiento difiere del euclidiano en grandes escalas.

P4: Todos los ángulos rectos son iguales.

P5: No existen rectas paralelas, todas las geodésicas se intersecan.

Nota, aclaración:

Para comenzar con la construcción, es necesarios definir previamente el significado de los símbolos que serán utilizados, garantizando una mejor interpretación del lenguaje matemático empleado. A continuación, se enlistarán:

- $M$ , conjunto de puntos (eventos).
- Coordenadas locales  $x^\mu$ .
- $g$ , campo de tensor métrico  $\Gamma(T^*M \otimes T^*M)$ .

Un campo tensor métrico es una variedad diferenciable de  $M$  es una aplicación que asigna a cada punto  $p \in M$  un tensor bilineal simétrico degenerado tipo  $(0,2)$  sobre el espacio tangente  $T_pM$ . Es decir, a cada punto del espacio, en este caso (espacio-tiempo) le corresponde un tensor

$$g_p: T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$$

- $\nabla$ , conexión afín en  $TM$ .

Sea  $M$  una variedad diferenciable y  $TM$  su fibrado tangente. Una conexión afín en  $TM$  es una aplicación

$$\nabla: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

Que a cada par de campos vectoriales  $X, Y$  asigna a un nuevo campo vectorial  $\nabla_X Y$  llamado derivada covariante de  $Y$  en la dirección  $X$

- $R$ , tensor de curvatura de Riemann asociado a  $\nabla$ .
- $T$  tensor de energía-impulso  $T \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M)$ .
- Constantes físicas  $G$  (constante gravitacional),  $c$  (velocidad de la luz),  $\Lambda$  (constante cosmológica).
- $\mathcal{A}$ , álgebra de funciones suaves  $C^\infty(M)$ .

Las definiciones se tomaron literalmente de libro *Geometría riemanniana* de Sánchez Morgado y Palmas Velasco (2007)

**Definición Variedad Diferencial** Sea  $n$  un número entero no negativo. Un *espacio localmente homeomorfo* a  $\mathbb{R}^n$  es un espacio topológico de Hausdorff  $M$  tal que cada punto tiene una vecindad homeomorfa a un abierto de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $U \subset M$  es abierto y  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un homeomorfismo sobre un abierto de  $\mathbb{R}^n$ , la pareja  $(U, \varphi)$  se llama carta de coordenadas.

En este caso, para la teoría de la relatividad,  $M$  es una variedad diferenciable de dimensión 4 y orientable temporal y espacialmente, lo que se refiere a dos propiedades

geométricas que garantizan que espacio tiempo tengan una estructura bien definida y una orientación diferente.

Que sea un espacio topológico significa que tiene una colección de subconjuntos llamados “abiertos” que satisfacen ciertas propiedades (por ejemplo, la unión de abiertos es abierta, la intersección finita de abiertos es abierta, etc.). Esto permite definir conceptos como continuidad, convergencia y vecindad.

Formalmente se define como:

Un espacio topológico  $(X, \mathcal{T})$ , donde  $X$  es un conjunto de  $\mathcal{T}$  se definen con los conjuntos abiertos, donde  $\mathcal{T}$  es la topología sobre el conjunto  $X$ . Para que  $\mathcal{T}$  sea una topología, debe satisfacer los siguientes tres axiomas:

1. Conjunto vacío y el conjunto total son abiertos:  $\emptyset \in \mathcal{T}$  y  $X \in \mathcal{T}$ .

Esto asegura que siempre se tenga al menos dos conjuntos abiertos, el conjunto vacío que cumple con la condición de ser abierto, y el espacio completo se considera abierto.

2. La unión de cualquier colección de conjuntos abiertos es abierta: Si  $\{A_i\}_{i \in I}$  es cualquier colección (finita o infinita, numerable o no numerable) de conjuntos abiertos, entonces  $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$ .

Si se tienen varios conjuntos abiertos, y se toman todos los puntos que pertenecen al menos a uno de ellos, el conjunto resultante sigue siendo abierto. Esto refleja la idea de que, si cada punto tiene un margen de minoría, la unión de esos márgenes también lo tendrá.

3. La intersección de cualquier colección finita de conjuntos abiertos es abierta: Si  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  son conjuntos abiertos (para un  $n$  finito), entonces

$$\bigcap_{k=1}^n A_k \in \mathcal{T}.$$

Si un punto está en la intersección de varios conjuntos abiertos, significa que tiene un margen de maniobra dentro de cada uno de ellos. Por lo tanto, puede tomar, “el margen más pequeño” y seguir teniendo un margen de maniobra en la intersección. Es decir que un punto tiene margen de maniobra dentro de un conjunto abierto significa que alrededor de ese punto existe un entorno (vecindad) completamente contenido en el conjunto.

Definición de homeomorfo

Dos espacios topológicos  $X$  y  $Y$  son homeomorfos si existe una función biyectiva  $f: X \rightarrow Y$  tal que:

- i)  $f$  es continua
- ii)  $f^{-1}$  también es continua

En este caso decimos que  $f$  es homeomorfismo y escribimos que:

$$X \cong Y$$

Tomado de Morris, S. A. (2012)

### **Espacio plano de Minkowsky y la métrica Schawarzschild**

El espacio tiempo de Minkowski es el espacio tiempo plano de 4 dimensiones que combina dimensión temporal (el tiempo) y tres espaciales (el espacio euclidiano usual). Definido como:

$$(\mathbb{R}^4, \eta_{\mu\nu})$$

Donde  $\eta_{\mu\nu}$  es la métrica de Minkowski.

En coordenadas cartesianas  $(t, x, y, z)$ , el intervalo entre dos sucesos es:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

La métrica del espacio-tiempo de Minkowski posee firma  $(-+++)$ , lo que constituye su principal diferencia respecto al espacio euclidiano. Esta firma expresa que la componente temporal tiene signo negativo a las componentes espaciales, haciendo explícita la simetría entre el tiempo y espacio dentro del modelo relativista. Gracias a esta estructura métrica, es posible establecer la clasificación causal de los intervalos, de tipo temporal, lumínico o espacial, y describir adecuadamente la geometría física que subyace de la relatividad especial de Einstein. Donde lumínico se refiere a los intervalos nulo, es decir, a aquellos intervalos del espacio tiempo que corresponden a la propagación de la luz.

### **Métrica Lorentziana**

La métrica Lorentziana dice que existe un tensor métrico suave  $g$  de tipo  $(0,2)$  sobre  $M$  tal que cada punto  $p \in M$  la forma bilineal  $g_p$ , tiene firma  $(-+++)$  o  $(+---)$  según convención.  $g$  no es degenerado.

$$g_p: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}.$$

Esto permite medir longitudes, ángulos, distancias entre vectores.

Donde el tensor métrico suave  $g$  de tipo  $(0,2)$  es un campo que asigna a cada punto de una variedad una forma bilineal simétrica sobre el espacio tangente, cuya dependencia es diferenciable. Este tensor permite medir ángulos, longitudes y relaciones geométricas, siendo la base de la estructura geométrica del espacio-tiempo.

En la forma bilineal  $g_p$ ,  $p$  indica que se está evaluando el tensor en un punto específico de la variedad  $M$ . Se dice que es bilineal porque es lineal en cada uno de sus argumentos por separado.

Que  $g$  no sea degenerado significa que:

$$g_p(v, w) = 0 \text{ para todo } w \in T_p M \implies v = 0$$

Es decir: no existen vectores distintos de cero que sean ortogonales a todos los demás vectores, la métrica distingue correctamente las direcciones del espacio tangente. Esto garantiza que: se pueda definir una inversa  $g^{\mu\nu}$ , se pueden subir y bajar índices, la geometría no “colapsa” en ninguna dirección.

### **Conexión de Levi-Civita**

Hay una conexión  $\nabla$  única que satisface:

1.  $\nabla$  es torsión-libre:  $\forall X, Y, \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$
2.  $\nabla$  es métrica:  $\nabla g = 0$

Esta conexión permite comparar vectores en distintos puntos mediante la derivada covariante, que es una generalización de la derivada usual a espacios curvos. La derivada covariante indica cómo cambia un campo vectorial al desplazarse a lo largo de una dirección, teniendo en cuenta la curvatura del espacio. La condición:  $\nabla g = 0$  asegura que las longitudes y los ángulos definidos por el tensor métrico  $g$  se conservan. Dicho de otra manera, la conexión define cómo se trasladan los vectores a lo largo de

las curvas y cómo se describe el movimiento de partículas libre, conocido como movimiento geodésico.

De esta conexión se puede probar su existencia y unicidad si se reescribe el enunciado de la siguiente forma:

Dada una variedad diferenciable  $M$  con métrica  $g$  (simétrica, no degenerada), existe una y solo una conexión afín  $\nabla$  que sea torsión-libre y compatible con la métrica Lorentziana ( $\nabla g = 0$ ).

Prueba:

Primero se hará la prueba de la unicidad:

Supongamos  $\nabla$  y  $\nabla\sim$  son dos conexiones con  $\nabla g = \nabla\sim g = 0$  y sin torsión. Sea  $A(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ , donde  $A$  es tensorial, lineal respecto a funciones suaves, (bilineal sobre  $C^\infty(M)$ ) en  $X$  y  $Y$  (la diferencia de dos conexiones es un tensor de tipo  $(1,2)$ ). Usando la condición de ausencia de torsión para ambas conexiones:

$A(X, Y) - A(Y, X) = (\nabla_X Y - \nabla_Y X) - (\nabla\sim_X Y - \nabla\sim_Y X) = [X, Y] - [X, Y] = 0$ , por lo que  $A(X, Y) = A(Y, X)$  (simetría en  $X, Y$ ).

Usando la compatibilidad métrica para  $\nabla$  y  $\nabla\sim$  se obtiene, para todo  $X, Y, Z$ ,  $0 = (\nabla_X g - \nabla\sim_Y g)(Y, Z) = g(A(X, Y), Z) + g(Y, A(X, Z)) = 0 \quad \forall X, Y, Z$ .

A partir de la simetría  $A(X, Y) = A(Y, X)$  y la identidad (\*) se razona (combinaciones y usando la no degeneración de  $g$ ) que  $A = 0$ . Otra forma de verlo es:  $X$  fijado, la aplicación  $B_X(Y, Z) = g(A(X, Y), Z)$  es bilineal y satisface que  $B_X(Y, Z) + B_X(Z, Y) = 0$  (es antisimétrica). Pero por la simetría de  $A$  en  $Y, Z$  se obtiene que  $B_X$  es a la vez simétrica y antisimétrica por lo que debe ser cero. Con  $g$  no degenerado eso implica  $A(X, Y) = 0$  para todo  $X, Y$ . Por tanto  $\nabla = \nabla\sim$ .

La existencia de la conexión de Levi-Civita se demuestra construyéndola explícitamente a partir del tensor métrico. Dada una variedad diferenciable  $(M, g)$ , se define una conexión  $\nabla$  imponiendo que, para todo triple de campos vectoriales  $X, Y, Z$ , el producto interno  $g(\nabla_X Y, Z)$  esté dado por la fórmula de Koszul, la cual depende únicamente de la métrica  $g$ , de sus derivadas direccionales y del corchete de Lie de campos vectoriales. Esta expresión es bilineal y suave en  $X, Y, Z$ , y como el tensor métrico es no

degenerado, determina de manera única el campo vectorial  $\nabla_X Y$  para cada par  $X, Y$ , garantizando que la definición está bien planteada. A partir de esta construcción se verifica directamente que  $\nabla$  satisface las propiedades de una conexión afín, que es compatible con la métrica ( $\nabla g = 0$ ) y que es libre de torsión, por lo que efectivamente existe una conexión natural asociada a  $g$ .

### Identidades de Bianchi

Primera identidad: se refiere a la simetría cíclica del tensor de Riemann:

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} + R^\rho{}_{\sigma\nu\mu} + R^\rho{}_{\nu\sigma\mu} = 0$$

Segunda identidad de Bianchi Involucra la derivada covariante del tensor de Riemann

$$\nabla_\lambda R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} + \nabla_\mu R^\rho{}_{\sigma\nu\lambda} + \nabla_\nu R^\rho{}_{\sigma\lambda\mu} = 0$$

Esta identidad asegura que la curvatura se “propaga” de manera coherente a través del espacio-tiempo.

Consecuencia: si se contrae los índices de la segunda identidad de Bianchi, se obtiene que el tensor de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$$

Tiene divergencia covariante nula

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$$

Este resultado conecta directamente a geometría riemanianna con la física.

Las ecuaciones de Einstein son

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Gracias a la identidad de Bianchi, automáticamente se cumple que

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$$

Lo que significa que la teoría respeta la conservación local de la energía y el momento.

## Tensor de curvatura

Se define el tensor de Riemann por

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

Con componentes  $R^{\rho}_{\sigma\mu\nu}$ . Se postula que  $R$  satisface las simetrías usuales y la identidad de Bianchi. Las simetrías del tensor de Riemann no son postulados arbitrarios, estos se deducen de dos hipótesis geométricas: la conexión de Levi-Civita y que es compatible con la métrica  $\nabla g = 0$ . A partir de esto se obtienen varias propiedades.

*Antisimetría en los dos primeros índices:*

$$R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$$

Esto sale directamente de la definición:

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z.$$

Si intercambias  $X$  y  $Y$ :

- el primer y segundo término cambian de signo,
- el corchete satisface  $[Y, X] = -[X, Y]$ .

Por lo tanto, aparece automáticamente la antisimetría.

*Simetrías métricas adicionales*

Cuando la conexión es métrica ( $\nabla g = 0$ ), se define

$$R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W).$$

Entonces se obtiene:

1. Antisimetría en el último par:

$$R(X, Y, Z, W) = -R(X, Y, W, Z).$$

## 2. Simetría por pares:

$$R(X, Y, Z, W) = R(Z, W, X, Y).$$

Estas propiedades salen porque:

- el transporte paralelo preserva el producto interno,
- y la conexión es torsión-libre.

Este mide la conmutatividad de la derivada covariante, o sea, cuánto se curva el espacio-tiempo. Describe también el movimiento libre de las partículas que se aceleran entre sí por la curvatura. Esta curvatura es la variable geométrica que entra en las ecuaciones de Einstein. Por qué el tensor de Riemann describe el movimiento libre y la aceleración relativa de partículas es porque cuantifica cómo la curvatura del espacio-tiempo afecta la evolución relativa de trayectorias que, individualmente, no están sometidas a fuerzas externas. En relatividad general, una partícula libre se mueve a lo largo de una geodésica, caracterizada por la condición  $\nabla_u u = 0$ , lo que significa que su velocidad se transporta paralelamente a lo largo de su propia trayectoria. Sin embargo, cuando se consideran dos partículas libres inicialmente cercanas, la separación entre sus trayectorias no permanece constante si el espacio-tiempo es curvo. Esta variación está gobernada por la ecuación de desviación geodésica,  $\nabla_u \nabla_u \xi = R(\xi, u)u$ , donde el tensor de Riemann aparece como el responsable directo de la aceleración relativa entre las partículas. De este modo, el tensor de Riemann no describe una fuerza en el sentido clásico, sino el efecto geométrico de la curvatura del espacio-tiempo sobre el movimiento libre, manifestándose físicamente como las llamadas fuerzas de marea.

### **Geodésicas y principio de mínima acción libre**

Las trayectorias libres de fuerzas externas (partículas test) son geodésicas parametrizadas por el tiempo  $\tau$ :

$$\frac{Du^\mu}{D\tau} = u^\nu \nabla_\nu U^\mu$$

Donde  $U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$

Una geodésica es una curva cuyo vector tangente se transporta paralelamente a si mismo. Representa el principio de inercia, lo que significa que, en ausencia de fuerzas, un cuerpo sigue una trayectoria determinada.

### **Ecuaciones de Einstein**

La relación entre la geometría y la materia viene dada por las ecuaciones de Einstein:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$$

Estas ecuaciones relacionan el tensor de Einstein  $G_{\mu\nu}$  (hecho de curvatura) con el tensor energía-impulso. Son el corazón de la relatividad general, ya que estas muestran como la materia y energía dicen al espacio-tiempo cómo curvarse, y el espacio-tiempo dice a la materia cómo moverse.

### **Conservación del tensor energía-impulso**

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$$

Es la derivada de las identidades de Bianchi  $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$  y de las ecuaciones de Einstein. Expresa que la energía y el momento se conservan localmente en espacio-tiempo curvado. Esto garantiza consistencia física no puede “desaparecer” energía arbitrariamente.

### **Condiciones de causalidad**

Para tener en cuenta que la causalidad es un principio según el cual una causa debe preceder a su efecto. Es decir, un evento A solo puede influir en evento B si existe un mecanismo físico que conecten ambos en el tiempo y el espacio. En el espacio-tiempo de Minkowski (del que se hablará más adelante), la causalidad está limitada por la velocidad de la luz.

Def: para todo vector causal  $v^\mu$

$$T_{\mu\nu} v^\mu v^\nu \geq 0 \quad \text{condición de energía débil}$$

Evita comportamientos no físicos (energía negativa arbitraria, curvas temporales cerradas, etc.). Asegura que el modelo represente universos físicamente razonables.

## Geodésicas como variación

Recordando que una geodésica es la trayectoria que sigue una partícula libre, (sin fuerzas externas, solo la gravedad)

La partícula se mueve de un punto  $A$  a un punto  $B$  extremizando la longitud propia:

$$S[\mathbf{x}^\mu(\lambda)] = \int ds = \int \sqrt{-g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda$$

Donde  $\lambda$  es un parámetro afín (como el propio tiempo).

Enunciado: Las curvas que extremizan el funcional de acción

$$S[\gamma] = \int_a^b g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} d\lambda$$

Satisfacen la ecuación de geodésicas  $\frac{Du^\mu}{d\lambda} = 0$

Prueba:

Considerando la Lagrangina  $L(x, \dot{x}) = g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$ . Las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\rho} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\rho} = 0$$

$$2g_{\rho\nu} \dot{x}^\nu + (\partial_\mu g_{\rho\nu}) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu - (\partial_\rho g_{\mu\nu}) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0$$

Reescribiendo y usando la expresión de los símbolos de Christoffel,

$$\ddot{x}^\rho + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0$$

Que es exactamente  $\frac{D\ddot{x}^\rho}{d\lambda} = 0$

## Ecuación de Euler-Lagrange

Al aplicar el cálculo variacional sobre  $S$ , se obtiene la ecuación geodésica:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0$$

Esta es la versión relativista de la inercia, en un espacio plano se reducen a rectas, pero en espacio curvo describen “líneas rectas generalizadas”

Desviación geodésica (ecuación de marea)

Ahora imaginemos dos partículas libres moviéndose en geodésicas muy cercanas. En el espacio plano, carente de curvatura, su separación relativa permanecería constante. En un espacio-tiempo curvo, la curvatura distorsiona sus trayectorias, causando que se acerquen o se alejen: esto es lo que se le llama fuerzas de marea.

### Vector desviación

Si una partícula tiene trayectoria  $x^\mu(\tau)$  y otra muy cercana está separada por un vector  $\xi^\mu(\tau)$ , entonces  $\xi^\mu$  mide la separación entre las dos geodésicas.

### Ecuación de desviación geodésica

$$\frac{D^2 \xi^\mu}{D\tau^2} = -R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} \mathcal{U}^\nu \xi^\rho \mathcal{U}^\sigma$$

Donde  $\xi^\mu$  es el vector separación entre geodésicas cercanas. Esto muestra que la curvatura causa fuerzas de marea, o sea la curvatura determina aceleraciones relativas entre partículas libres.

### Curvatura escalar Ricci

Para esto se mirará el tensor de Ricci, el cual se obtiene contrayendo índices del tensor de Riemann, y queda:

$$R_{\mu\nu} = R^\rho{}_{\nu\rho\mu}$$

Este tensor es simétrico, por lo que se cumple:  $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$ . Representa cómo los volúmenes de pequeños elementos de materia se deforman en un espacio curvo, y como está presente en las ecuaciones de Einstein, lo que conecta la geometría local con la distribución de energía-momento.

El escalar de curvatura de Ricci se obtiene contrayendo nuevamente el tensor de Ricci con la métrica

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

Es un escalar (número) que da una medida promedio de la curvatura en un punto. Si  $R > 0$  se asocian espacios donde las geodésicas tienden a converger, lo que significa que la curvatura es tipo esférica, mientras que cuando  $R < 0$  indica divergencia, lo que significa que la curvatura es tipo silla.

### Tensor de Weyl

El tensor de Weyl  $C_{\sigma\mu\nu}^{\rho}$  es la parte del tensor de Riemann que no depende del Ricci ni del escalar de curvatura. Se define como:

$$C_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\mu\nu\rho\sigma} - \frac{1}{2}(g_{\mu\rho}R_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}R_{\nu\rho} + g_{\nu\sigma}R_{\mu\rho}) + \frac{R}{6}(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho})$$

Cumple con las propiedades:

- Captura la curvatura “libre” del espacio-tiempo, es decir, la parte que no está directamente asociada a la materia.
- Describe cómo las formas, no volúmenes, se distorsionan bajo la curvatura.
- En  $n = 2$  y  $n = 3$  dimensiones, el Weyl desaparece: toda la curvatura se determina por el Ricci.
- En  $n \geq 4$ , incluyendo el espacio tiempo 4D, el Weyl puede ser distinto a cero.
- Describe a parte gravitacional independiente de la materia, como las ondas gravitacionales y el efecto de marea.

### Conservación local de energía- impulso

La conservación local se expresa por la ecuación tensora

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0$$

Donde  $T^{\mu\nu}$  es el tensor energía-impulso de la materia y los campos no gravitatorios, y  $\nabla_{\mu}$  es a derivada covariante asociada a la conexión Levi-Civita.

En cada punto del espacio-tiempo no hay “creación ni destrucción local neta” de energía-impulso, lo que cambia en un volumen infinitesimal se debe al flujo que entra o sale a través de su frontera. Es una ley de conservación local, válido punto por punto.

La diferencia con la conservación global es, que la global se puede integrar sobre un volumen y obtener una cantidad total constante (energía momento) y la local asegura que en cada punto no hay pérdida de energía-impulso hacia “ningún otro lugar”, pero globalmente puede no existir una cantidad total bien definida, debido a la curvatura.

Desde el punto de vista geométrico, este se es la segunda identidad de Bianchi. Como el tensor de Riemann  $R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}$  mide la curvatura, recordar la segunda identidad de Bianchi:

$$\nabla_\lambda R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} + \nabla_\mu R^\rho{}_{\sigma\nu\lambda} + \nabla_\nu R^\rho{}_{\sigma\lambda\mu} = 0$$

Si se contraen los índices apropiadamente (contracción parcial de la identidad de Bianchi). Para esto se contrae  $\rho$  con  $\mu$ , de tal forma que  $\rho = \mu$  y contrae sobre ese índice (es decir, sumar sobre  $\rho$  y  $\mu$ ). Se llega a la identidad estándar:

$$\nabla_\lambda R^\lambda{}_{\sigma\nu k} + \nabla_\nu R_{\sigma k} - \nabla_k R_{\sigma\nu} = 0$$

Ahora, este se puede reescribir con  $g^{\sigma\beta}$  se obtiene en forma simétrica:

$$\nabla_\lambda R^\lambda{}_{\beta\nu k} = \nabla_k R_{\beta\nu} - \nabla_\nu R_{\beta k}$$

Para continuar se debe contraer  $\beta$  con  $k$ , haciendo lo mismo que se hizo anteriormente.

Usando la definición de Ricci  $R_{\beta\nu} = R^\lambda{}_{\beta\lambda\nu}$  y sus propiedades de contracción se obtiene:

$$\nabla_\lambda R^\lambda{}_\nu = \frac{1}{2} \nabla_\nu R$$

La divergencia del Ricci es la mitad del gradiente escalar de curvatura.

Teniendo la definición del tensor de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$$

Calcular  $\nabla_\mu G_{\mu\nu}$ :

$$\nabla_\mu G_{\mu\nu} = \nabla_\mu R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \nabla_\mu (R g_{\mu\nu}) = \nabla_\mu R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\nabla_\mu R) g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R \nabla_\mu g_{\mu\nu}$$

Como  $\nabla_\mu g_{\mu\nu} = 0$ , porque la derivada covariante preserva la métrica  $\nabla g = 0$ . Entonces:

$$\nabla_\mu G_{\mu\nu} = \nabla_\mu R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\nabla_\mu R) g_{\mu\nu}$$

Y como;

$$\nabla_{\mu} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) = 0$$

Es decir:

$$\nabla_{\mu} G_{\mu\nu} = 0$$

Que era lo que se quería obtener de la contracción de Bianchi.

Nótese que:  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$  es el tensor de Einstein. En resumen, la conservación de energía-impulso es la segunda identidad de Bianchi aplicada al tensor de Einstein, lo que fuerza a que

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0$$

Lo que significa que la conservación no se “impone” desde fuera, sino que está codificada en la estructura de la geometría del espacio tiempo.

### **Cono de luz**

El cono de luz en un evento  $p$  del espacio tiempo es el conjunto de todos los vectores tangentes  $v^{\mu}$  en el espacio tangente  $T_p M$  tales que:

$$g_{\mu\nu}(p) v^{\mu} v^{\nu} = 0$$

Donde  $g_{\mu\nu}$  es la métrica (en Minkowski o en un espacio curvo)

En el interior del cono (timelike):

$$g_{\mu\nu} v^{\mu} v^{\nu} < 0$$

Superficie del cono (null):

$$g_{\mu\nu} v^{\mu} v^{\nu} = 0$$

Exterior del cono (spacelike)

$$g_{\mu\nu} v^{\mu} v^{\nu} > 0$$

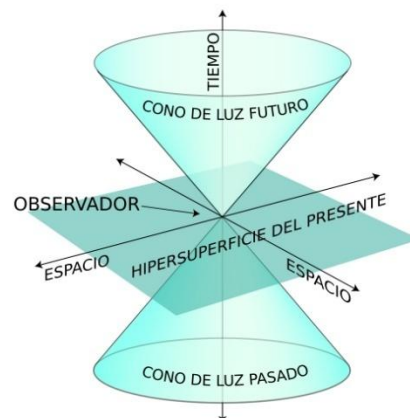
Dado un evento  $p$  en el espacio tiempo, el cono de luz describe qué puede influir a  $p$  y que puede ser influido por  $p$ . En el interior del cono (intervalos de tiempo,  $ds^2 < 0$ ),

representa trayectorias de partículas con masa, todo lo que puede moverse más lento que la luz, entre otras. El interior del cono “hacia arriba” es el futuro posible del de  $p$ . El interior del cono hacia abajo es el pasado posible que pudo influir en  $p$ . En la superficie del cono (intervalos nulos,  $ds^2 = 0$ ), representa trayectorias de luz o radiación electromagnética, marcan el límite entre lo causalmente posible e imposible. En el exterior del cono (intervalos espaciales  $ds^2 > 0$ ), representa regiones en el espacio-tiempo que no pueden ser alcanzadas ni influir en  $p$ , por que requiere viajar más rápido que la luz.

El cono de luz impone la estructura causal del universo, en el nada puede salir de su futuro, nada puede influirlo fuera de su pasado y la luz es el límite absoluto de transmisión de información. Esto es lo que evita las paradojas causales (ejemplo: como recibir un mensaje antes de que este sea enviado).

### Ilustración 9

*Cono de luz*



*Nota.* Por Univisión, 2013. <https://www.univision.com/explora/que-es-un-cono-de-luz>

### Clasificación causal y existencia del cono de luz en cada punto.

Si  $g$  en  $T_p M$  tiene firma  $(1,3)$  (convención  $-+++$ ), entonces en  $T_p M$  el conjunto  $\{v \in T_p M : g_p(v, v) = 0\}$  es un cono de dos hojas: futuro y pasado, y existe la partición en vectores timelike, null y spacelike.

Prueba:

Por el teorema de la forma canónica de Sylvester, que dice que toda forma cuadrática real no degenerada puede transformarse, mediante un cambio lineal de coordenadas, en una forma diagonal con entradas solo +1 y -1. El número de signos positivos y negativos es un invariante, de la forma:

$$Q(v) = g_{\mu\nu}(p)v^\mu v^\nu$$

Cuya forma canónica es:

$$Q(v) = -(v^0)^2 + (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2$$

Teniendo en cuenta este teorema, existe una base ortogonal  $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$  de  $T_p M$  tal que la matriz  $g_p$  sea  $diag(-1, 1, 1, 1)$ . En estas coordenadas

$$g_p(v, v) = -(v^0)^2 + (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2$$

La ecuación  $g_p(v, v) = 0$  se transforma en:

$$0 = -(v^0)^2 + (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2$$

$$(v^0)^2 = (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2$$

Que es exactamente la ecuación que describe el cono doble en el espacio vectorial coordinado  $(v^0, \mathbf{v})$ . Las desigualdades  $g_p(v, v) < 0$  y  $g_p(v, v) > 0$  definen las regiones interiores o y exteriores respectivamente.

## CAPÍTULO 5

### 5. Sistema teórico local sobre la geometría hiperbólica

El siguiente sistema teórico para la geometría hiperbólica pensado para explicar obras como los *Circle Limit* de M.C. Escher, tiene como propósito formalizar algunos principios geométricos que estructuran este tipo de obras.

En este sistema se busca articular los fundamentos teóricos de la geometría hiperbólica, como los principios básicos que definen el espacio hiperbólico, donde la curvatura del universo es negativa constante. Se establecen los elementos primitivos, como puntos, líneas, planos, incidencia, paralelismo, métrico, relaciones de distancia y ángulos. Además, se estudiará el modelo del disco de Poincaré, que actúa como marco de representación y visualización del sistema, permitiendo entender cómo el infinito se proyecta dentro de un límite circular.

Se planteará una versión axiomática similar a la empleada por Hilbert, incorporando los desarrollos de la geometría hiperbólica, presentados por autores como Poincaré y Coxeter.

Los postulados de Euclides se reescribirían en esta geometría de la siguiente forma:

P1: Por dos puntos distintos del plano hiperbólico pasa una y solo una geodésica, (equivalente a una “recta” hiperbólica)

P2: Se conserva que la “recta” es una geodésica infinita, pero no puede alcanzarse el borde del modelo (el infinito está a distancia infinita). Toda geodésica puede prolongarse indefinidamente sin dejar de pertenecer al plano hiperbólico.

Algo importante que resaltar es que, en el modelo de Poincaré, las geodésicas parecen “terminar” en el borde del círculo, pero ese borde representa el infinito hiperbólico.

P3: Dado un punto  $O$  y una distancia hiperbólica  $r$ , existe un conjunto de puntos a distancia  $r$  de  $O$ , que forma un círculo hiperbólico.

Los círculos hiperbólicos se ven “aplastados” hacia el borde del disco de Poincaré debido a la curvatura negativa.

P4: El concepto del ángulo recto se define igual que en la geometría euclidiana, por lo que todos los ángulos rectos son congruentes.

Esto garantiza que la noción de congruencia angular de la geometría euclidiana, no se ve afectada por la curvatura.

P5: Por un punto exterior a una recta pasan infinitas rectas paralelas a ella.

Algunas geodésicas se llaman paralelas límite (tocan la recta en el infinito del modelo) y otras ultraparalelas (nunca inciden). Este postulado introduce la curvatura negativa del espacio y provoca todas las propiedades distintas de la geometría euclidiana: triángulos con suma de ángulos menor que  $180^\circ$ , crecimiento exponencial de áreas, etc.

Para comenzar con la construcción que considera que se debe tener en cuenta el significado de los símbolos que se utilizarán. A continuación, se enlistarán:

- Puntos  $P$
- Rectas (geodésicas)  $\ell$
- Incidencia  $P \in \ell$
- “Estar entre”  $B(P, Q, R)$  lo que quiere decir que  $Q$  está entre  $P$  y  $R$
- Congruencia  $\cong$

Axiomas de orden:

O1: Existen al menos tres puntos no colineales.

O2: Si  $A, B$  son distintos, entonces existe un punto  $C$  tal que cumple  $B(A, C, B)$ .

O3: Si  $B(A, B, C)$  entonces  $A, B, C$  son distintos y son colineales.

O4: Si  $A, B, C$  son colineales y  $A \neq B \neq C$  entonces se debe cumplir alguna de estas proposiciones  $B(A, B, C)$ ,  $B(A, C, B)$ ,  $B(B, A, C)$ .

Axiomas de congruencia:

C1: Transitividad. La congruencia de segmentos es una relación de equivalencia y se pueden trasladar por isometrías que preservan ángulos.

C2: Dados dos segmentos  $\overline{AB}$  y  $\overline{CD}$  son congruentes si existe una isometría local que los “empareja”

C3: Dos figuras son congruentes si las transformaciones son isometrías de Möbius, de la forma:

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

Donde  $a$  es número complejo con  $|a| < 1$ , geoméricamente, es el punto del disco hacia el cual se “traslada” el origen,  $e^{i\theta}$  es una rotación compleja  $z \mapsto e^{i\theta}z$ , al multiplicar por  $e^{i\theta}$  significa rotar un punto  $z$  un ángulo  $\theta$  alrededor del centro. Así una vez trasladado  $a$  al centro, esta rotación “ajusta” su orientación en el disco.  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ .

Visualmente, las figuras se ven como si cambiaran de tamaño, pero solo es un efecto de deformación aparente, pero coinciden con la misma métrica.

Axioma hiperbólico:

Crecimiento exponencial: En el plano hiperbólico, la circunferencia de radio  $r$  tiene longitud:

$$C(r) = 2\pi \sinh(r)$$

Lo que significa que el espacio crece exponencialmente conforme se aleja del centro.

Propiedad de conservación de la métrica hiperbólica:

$$\rho(z_1, z_2) = \operatorname{arccosh} \left( 1 + \frac{2|z_1 - z_2|^2}{(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)} \right)$$

Una transformación es isométrica si:

$$\rho(f(z_1), f(z_2)) = \rho(z_1, z_2)$$

Y la función  $f(z) = e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$  cumple eso; preserva las distancias y los ángulos hiperbólicos.

Algunas definiciones:

D1: Límite ideal; puntos en la “frontera” ideal  $\partial H$ . Son puntos que no pertenecen al plano hiperbólico, pero son límites de secuencias de puntos hiperbólicos. Ejemplo el límite del disco de Poincaré. En esta geometría, el modelo del disco de Poincaré representa el plano hiperbólico completo dentro de un círculo euclidiano finito.

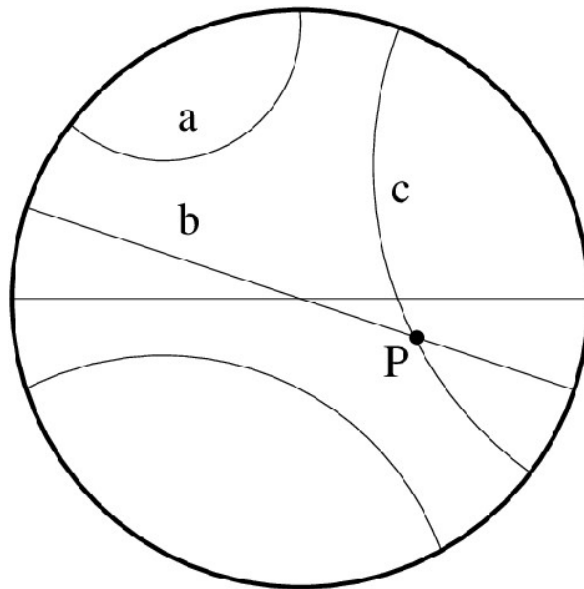
Definido como:

$$\mathbb{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 < 1\}$$

El borde del disco no pertenece al espacio hiperbólico, lo que representa los puntos del infinito.

### Ilustración 10

*Disco de Poincaré*



*Nota:* Límite ideal representado por el disco de Poincaré. Tomado de:

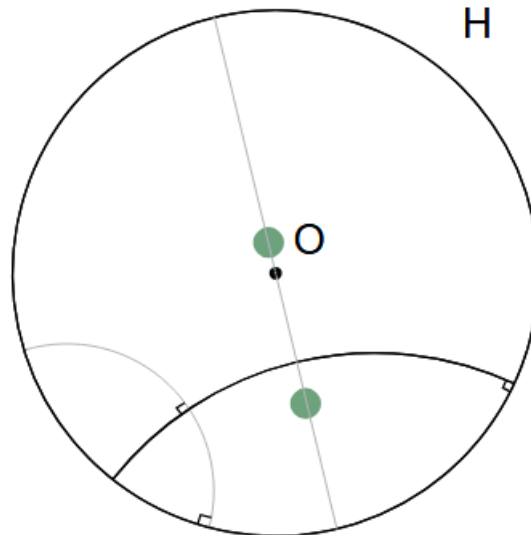
[https://www.researchgate.net/figure/El-Disco-de-Poincare-como-modelo-de-la-geometria-hiperbolica\\_fig3\\_367556973](https://www.researchgate.net/figure/El-Disco-de-Poincare-como-modelo-de-la-geometria-hiperbolica_fig3_367556973)

D2: Línea hiperbólica / geodésica: la recta en nuestro sistema- en el modelo de Poincaré son arcos de círculos ortogonales a la circunferencia límite o circunferencia límite. Toda geodésica está dada por:

$$|z - a| = r|1 - \bar{a}z|, \quad a \in \mathbb{D}, \quad r > 0$$

### Ilustración 11

*Adaptado de "Geometría hiperbólica. Desarrollo de herramientas con Grasshoper" Rozas, E. (2020).*



*Nota: Geodésicas en el disco de Poincaré. Tomado de:*

[https://oa.upm.es/63932/1/TFG\\_Jun\\_20\\_Rozas\\_Bellido\\_Elena.pdf](https://oa.upm.es/63932/1/TFG_Jun_20_Rozas_Bellido_Elena.pdf)

D3: Isometría hiperbólica: transformación que preserva la relación de congruencia de segmentos y ángulos. En el disco de Poincaré son transformaciones de Möbius que llevan el disco al disco.

D4: Dominio fundamental: un subconjunto de  $D$  del plano hiperbólico tan que las imágenes  $\{g(D): g \in G\}$  por un grupo discreto  $G$  de isometrías cubren el plano sin solapamientos interiores. Este concepto es clave para las teselaciones de Escher.

### Disco de Poincaré

**Interpretación:** se toma como universo el interior el disco unitario  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{R}^2: |z| < 1\}$ . Los puntos en el disco son los mismos puntos euclidianos, las geodésicas son ortogonales a la frontera. La métrica usada se define como:

$$ds^2 = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2}$$

Esta métrica se usa dentro del disco de Poincaré, la cual conserva la curvatura gausiana, que es la constante  $-1$ .

Escher empleo explícitamente la intuición del disco (imágenes radiales que se encogen hacia el borde) y construyó teselaciones. Lo cual se ve como si las figuras se redujeran hacia el borde del disco de Poincaré.

Suma de ángulos de un triángulo:

Como ya se ha mencionado antes en la geometría hiperbólica la suma de las medidas de los ángulos interiores de cualquier triángulo es menor a  $180^\circ$  o menor a  $\pi$ . Lo que se puede escribir como:

$$\delta = 180 - (\alpha + \beta + \gamma)$$

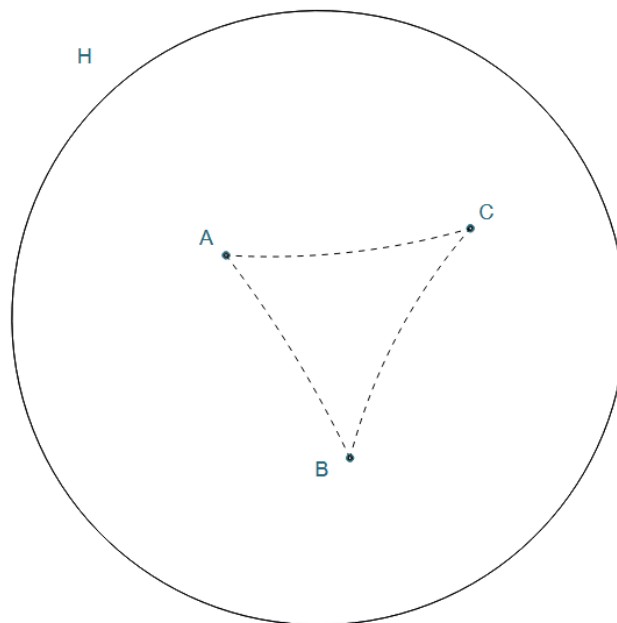
O

$$\delta = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$$

Es proporcional al área hiperbólica del triángulo, esto se debe a la curvatura  $-1$ :  $Area = \delta$ .

### Ilustración 12

*Adaptado de "Geometría hiperbólica. Desarrollo de herramientas con Grasshoper" Rozas, E. (2020).*



*Nota: Triángulo en la geometría hiperbólica, adaptado al disco de Poincaré. Tomado de: [https://oa.upm.es/63932/1/TFG\\_Jun\\_20\\_Rozas\\_Bellido\\_Elena.pdf](https://oa.upm.es/63932/1/TFG_Jun_20_Rozas_Bellido_Elena.pdf)*

Prueba:

Para poder realizar la prueba se tendrá en cuenta que la constante de curvatura es  $K = 1$ . Se hará uso del disco de Poincaré (interior del disco unitario  $\mathbb{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 < 1\}$ ) y Teorema de Gauss Bonnet, el cual dice:

Sea  $D$  una región compacta y orientada de una superficie  $S$  de curvatura gaussiana  $K$ , cuya frontera  $\partial D$  está formada por curvas suaves o geodésicas que se encuentran en ángulos interiores  $\alpha_i$ .

Entonces:

$$\iint_D K dA + \int_{\partial D} k_g ds + \sum_i (\pi - \alpha_i) = 2\pi\chi(D)$$

Donde  $K$  es la curvatura gaussiana de la superficie,  $k_g$  es la curvatura geodésica de la frontera y  $\chi(D)$  es la característica de Euler del dominio (para una región simplemente conexa,  $\chi = 1$ ).

En el caso particular del triángulo hiperbólico: Sea  $T$  un triángulo por geodésicas en el plano hiperbólico con el modelo de Poincaré (o media circunferencia). Entonces  $k_g = 0$ , porque las geodésicas tienen curvatura geodésica nula (no se “curvan” respecto al espacio hiperbólico). Por lo que el teorema se simplifica a:

$$\int_T K dA + \sum_{i=1}^3 (\pi - \alpha_i) = 2\pi$$

$$\int_T K dA + \pi - \alpha_1 + \pi - \alpha_2 + \pi - \alpha_3 = 2\pi$$

$$\int_T K dA + 3\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 2\pi$$

$$\int_T K dA = 2\pi - 3\pi + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$$

$$\int_T K dA = -\pi + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$$

Y como  $K = -1$  por la constante de curvatura, se obtiene:

$$\int_T -1 dA = -A(T)$$

De la ecuación anterior:

$$-A(T) = -\pi + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$$

Operando:

$$A(T) = \pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$$

Y así queda probado que en el plano hiperbólico con constante de curvatura -1, el área de un triángulo está dada por:

$$A(T) = \pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$$

Existencia de horociclos y puntos ideales:

Existen curvas (horociclos) que son límites de círculos hiperbólicos cuya curvatura se aproxima a 0 en el modelo; horociclos en el disco son círculos tangentes a la frontera. Los puntos donde las geodésicas paralelas tienden son ideales en  $\partial\mathbb{D}$ .

En las obras de Escher, las “cintas” que parecen salir-volver a “infinitamente lejos” en *Circle Limit* son representaciones visuales de geodésicas que se acercan a la frontera y de horociclos.

Teselación:

Una teselación es una división en el plano, en este caso el modelo de Poincaré como plano hiperbólico, en figuras geométricas que se ajustan entre sí, sin dejar huecos ni superponerse, o dicho de otra forma:

Sea  $P$  una figura geométrica (polígonos). Una teselación en el plano es un conjunto de imágenes de  $P$ , obtenidas mediante isometrías en el plano, tal que:

$$\bigcup_{f \in G} f(P) = \Pi$$

Donde  $\Pi$  es el plano y  $G$  es un conjunto de isometrías, cumpliendo que las imágenes  $f(P)$  tienen interiores disyuntos:

$$\text{int}(f_i(P)) \cap \text{int}(f_j(P)) = \emptyset, \text{ para } i \neq j$$

Teselaciones regulares  $(p, q)$ :

En el plano hiperbólico existen teselaciones regulares con polígonos regulares de  $p$  lados y  $q$  polígonos incidentes en cada vértice siempre que:

$$(p - 2)(q - 2) > 4$$

Esta es la condición hiperbólica; ya que cuando es igual a cuatro se obtiene el plano euclidiano y si es menor a cuatro se obtiene el plano esférico.

Grupos de isometrías y mosaicos:

Los grupos de isometrías (subgrupos de Möbius que preservan el disco) generan mosaicos: la imagen de un dominio fundamental por ese grupo produce una teselación del disco. Las isometrías visibles en Circle Limit corresponden a un grupo de isometrías hiperbólicas (a menudo un grupo de Fuchsian o reflejos de Coxeter en casos regulares).

## CAPÍTULO 6

### 6. Aplicaciones

En este apartado se hará una descripción del uso de los sistemas teóricos para la interpretación y descripción de los fenómenos que se trataron en los capítulos anteriores, que son: la curvatura del espacio-tiempo y la Circle Limit III de M.C. Escher.

#### 6.1 Explicación de la deformación del espacio-tiempo de acuerdo con la Teoría de la Relatividad por medio del sistema teórico local:

La Teoría de la Relatividad general de Albert Einstein, puede entenderse como una reformulación geometría de la gravitación, en la cual el espacio tiempo dejan de ser entidades absolutas para convertirse en una sola y de forma dinámica: espacio-tiempo. En este caso, la geometría rimanniana, o más precisamente una geometría pseudo rimanniana, se establece para poder describir la curvatura del espacio-tiempo, debido a que no se puede describir adecuadamente mediante la geometría euclidiana ni puramente rimanniana, esta constituye un lenguaje que permite expresar los principios fundamentales de esta teoría. Desde la perspectiva del sistema teórico construido, cada uno de los componentes de la geometría rimanniana encuentra una correspondencia

directa con los postulados físicos que sustentan la Teoría de la Relatividad General y como está explica la deformación del espacio tiempo.

En la Teoría, la gravitación no se concibe como una fuerza que actúa a distancias, sino como una manifestación de la curvatura de espacio-tiempo. Esta idea fundamenta se sostiene en sistema teórico planteado, que proporciona los conceptos y relaciones matemáticas necesarias para describir la deformación del espacio-tiempo provocada por la presencia de masa y energía.

Desde el punto de vista del sistema teórico, el espacio-tiempo se define como una variedad diferenciable de cuatro dimensiones  $M$  dotada de una métrica pseudo-rimanniana  $g_{\mu\nu}$ . Dicha métrica permite calcular las distancias, intervalos y ángulos entre eventos, constituyendo la estructura geométrica fundamental del universo. En ausencia de masa o energía, esta métrica coincide con la Lorentziana que define la estructura causal del espacio-tiempo. Sin embargo, la introducción de la materia energía modifica la métrica local, produciendo una deformación o curvatura del espacio-tiempo. Por ejemplo: la métrica de Minkowski es lorentziana, pero no describe la curvatura del espacio tiempo, describe el caso en que no hay curvatura.

Esta deformación no es arbitraria, sino que está regida por las ecuaciones de campo de Eninstenin, formuladas como:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}$$

En este sistema, el tensor de Einstein  $G_{\mu\nu}$ , el que depende de la curvatura (a través del tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$  y el escalar  $R$ ), describe las propiedades geométricas del espacio-tiempo; mientras que el tensor de energía momento  $T_{\mu\nu}$  representa la distribución y densidad de la materia y la energía. De esta manera, la ecuación establece una correspondencia entre la geometría y la física; la materia determina la curvatura del espacio-tiempo y la curvatura del espacio-tiempo determina el movimiento de la materia (Wald, 1984).

En términos geométricos, esta curvatura se expresa mediante el tensor de Riemann  $R^{\rho}_{\sigma\mu\nu}$ , que cuantifica la desviación de las geodésicas con respecto a la “planitud” euclidiana. Si el tensor de Riemann es nulo, el espacio-tiempo es plano; si es distinto de cero, se encuentra deformado. Físicamente, esta deformación se manifiesta en

fenómenos como la desviación de la luz por el campo gravitatorio del Sol, la precesión del perihelio de mercurio o la dilatación temporal en regiones de alta densidad gravitatoria.

A conexión Levi-Civita, compatible con la métrica ( $\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0$ ) garantiza la coherencia entre las medidas de curvatura y la noción de movimiento geodésico. Las trayectorias de partículas libres o rayos de luz se determinan por la ecuación de geodésicas:

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0$$

Donde los símbolos de Christoffel  $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$  codifican cómo la deformación de la métrica afecta el movimiento. Desde esta perspectiva, los cuerpos no “sienten” una fuerza gravitacional, sino que siguen la geometría curvada del espacio-tiempo (Carroll, 2019).

En el marco de este sistema teórico, la deformación del espacio-tiempo se interpreta como una respuesta geométrica y dinámica a la presencia de energía y masa. Cada región del universo posee una curvatura particular, determinada por su contenido material. En regiones de baja densidad de energía (como el espacio interestelar), el espacio-tiempo se aproxima a la planitud; mientras que en regiones con alta concentración de masa (como en torno a un agujero negro), la curvatura se intensifica hasta el punto de crear horizontes de eventos donde el espacio tiempo se distorsionan drásticamente.

Así, el sistema teórico construido de la geometría pseudo-rimanniana explica la deformación del espacio-tiempo mediante la interacción coherente de sus principios fundamentales; en resumen:

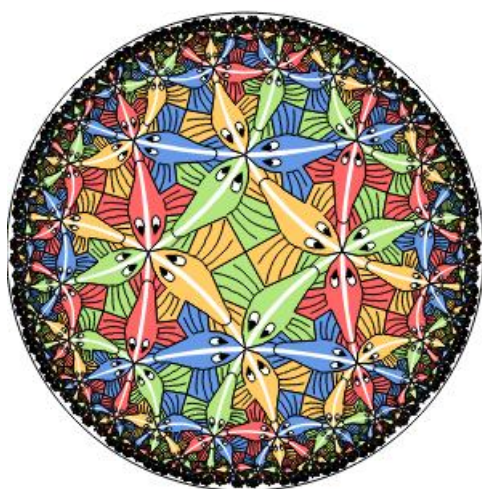
1. La variedad diferenciable modela el continuo del espacio-tiempo.
2. La métrica pseudo-rimanniana determina la estructura local y global del espacio tiempo.
3. La conexión métrica y curvatura expresan cómo la materia modifica esa estructura.
4. La correspondencia geométrico-física establecida por las ecuaciones de campo de Einstein.

Este sistema teórico muestra que la geometría no es solo un lenguaje para describir el universo sino un fundamento físico de la realidad. En la relatividad general, el espacio-tiempo se curva, se deforma y evoluciona según las condiciones energéticas que contiene. Por ello la geometría riemanniana no solo explica la deformación del espacio-tiempo, sino que la hace posible como estructura matemática y física.

## 6.2 Explicación de la obra *Circle Limit III* de M.C. Escher.

### Ilustración 13

*Circle Limit III*



*Nota.* Esta es la obra que se explica desde el sistema teórico construido. Tomado de: <https://www.d.umn.edu/~ddunham/dunbrid07.pdf>

En la obra de Escher se muestra una teselación que se repite infinitamente dentro de un círculo, figuras idénticas hiperbólicamente, en los que se va reduciendo su tamaño visual hacia el borde. Al construir este sistema teórico, se buscó dar una explicación precisa de por qué existen “copias” de una figura que ocupa todo el disco de Poincaré, las transformaciones que se le aplican a las figuras conservan la métrica hiperbólica y que son isometrías, la disposición de los polígonos y vértices obedece una teselación regular o variante (condición  $(p - 2)(q - 2) > 4$ ), algunas de las curvas que Escher dibuja son hiperciclos (no siempre geodésicas), lo que explica la “suavidad” de algunas.

Esta obra representa una de las conexiones profundas entre el arte y las matemáticas del siglo XX. En ella, Escher logra una representación visual del espacio hiperbólico, en el

cual las figuras se repiten infinitamente dentro del círculo que actúa como frontera del universo representado. Este fenómeno, que desafía la intuición euclidiana, puede explicarse a través de un sistema teórico local de la geometría hiperbólica. Comprender cómo Escher tradujo la geometría hiperbólica a una obra artística implica analizar la estructura del sistema que hace posible el modelo pseudo hiperbólico, ya que en distintas fuentes Coxeter mostró cómo Escher no solo usó geodésicas puras, sino que algunas curvas son hiperciclos.

El proceso de construcción de Escher inicia tomando la decisión de usar el disco de Poincaré como contenedor de la obra que quería realizar. Como ya se mencionó anteriormente se define como:

$$\mathbb{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 < 1\}$$

En este modelo, el borde del círculo no es una línea euclidiana, sino una representación del infinito hiperbólico, en donde todas las geodésicas tienden hacia el límite sin llegar a tocarlo. Por tanto, cuando Escher traza el círculo que contiene toda su composición, está delimitado un universo geométrico, en este caso un universo hiperbólico. Un espacio infinito comprimido dentro de un límite finito.

Luego se define una red de rectas hiperbólicas. En el modelo de Poincaré, las rectas se representan como arcos de circunferencia ortogonales al borde del disco. Como se ya se había mencionado, toda geodésica está dada por:

$$|z - a| = r|1 - \bar{a}z|, \quad a \in \mathbb{D}, \quad r > 0$$

Estas curvas cumplen los axiomas de incidencia mencionados. Escher utiliza estos principios al construir su red de curvas blancas, las que se visualizan en la obra. Estas curvas dividen el espacio en regiones congruentes que serían a base para la repetición de figuras.

Ya escogido el conjunto de geodesias, Escher selecciona el patrón geométrico subyacente; basado en diagramas del matemático H.S.M. Coxeter, Escher escoge una teselación hiperbólica del tipo {8,3}: tres octógonos regulares que se reúnen en cada vértice. Esto es posible porque el sistema axiomático permite polígonos regulares donde:

$$(p - 2)(q - 2) > 4$$

$$(8 - 2)(3 - 2) > 4$$

$$(6)(1) > 4$$

$$6 > 4$$

Cada octógono representa una celda fundamental del espacio, y las copias que cubren el disco surgen al aplicar isometrías hiperbólicas (transformaciones que conservan a distancia hiperbólica), es decir:

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

Estas transformaciones corresponden al grupo de simetrías del sistema, es decir, las operaciones que los axiomas de congruencia dicen que son equivalentes. Escher, sin notación formal, pero con comprensión visual, se repite una figura, en este caso el pez en cada celda fundamental, y luego aplica estas transformaciones para cubrir el disco entero.

Cada nuevo pez de la obra es la imagen isométrica del pez inicial, aunque en apariencia los peces disminuyen de tamaño hacia el borde, en la métrica hiperbólica son idénticos. El sistema teórico explica esto mediante la congruencia entre figuras. Como ya se mencionó, en el plano hiperbólico, las isometrías son transformaciones de Möbius que conservan la métrica:

$$d_H = \operatorname{arccosh} \left( 1 + \frac{2|z_1 - z_2|^2}{(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)} \right)$$

La visualización que se percibe hacia el borde no viola los axiomas de congruencia, es una proyección conforme de un espacio de figuras que tienen igual tamaño hiperbólico. El sistema teórico, explica lo que el ojo percibe como variación, el cambio aparente de escala es una consecuencia del cambio de métrica.

El axioma hiperbólico implica que, en este tipo de espacio, la circunferencia de radio  $r$  crece exponencialmente:

$$C(r) = 2\pi \sinh(r)$$

Lo que quiere decir, que a medida que Escher “avanza” hacia el borde del disco, hay cada vez más espacio disponible para construir nuevas figuras. En la construcción de la

obra esto indica que: cada anillo de peces contiene un número mayor de copias, el borde del círculo parece absorber una infinitud de figuras y el espacio nunca se llena completamente, porque el borde está a distancia hiperbólica infinita del centro.

Desde otro punto de vista, el postulado de paralelismo hiperbólico, que establece la existencia de infinitas rectas paralelas, se materializa en la multiplicación infinita de motivos hacia el borde.

Durante la construcción, Escher ajusta la curvatura de las líneas blancas que delimitan los peces. Matemáticamente, estas curvas son geodésicas (si son ortogonales al borde) o hiperciclos (si lo cortan con un ángulo constante  $\theta < 90^\circ$ ). Coxeter (1965) mostro que las líneas de Circle Limit III forman ángulos de  $80^\circ$ ,  $70^\circ$ , etc, que corresponden a hiperciclos. Su curvatura no es arbitraria, representa el modo en que los triángulos hiperbólicos de teselación se adaptan al borde, cumpliendo el teorema de Gauss-Bonnet:

$$A = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$$

Cada vez que las figuras se acercan al borde, los ángulos de intersección disminuyen, y visualmente el área también, lo que explica la aparente disminución del patrón hacia el borde. Por medio de este teorema se predice el comportamiento del espacio de que Escher construye visualmente.

Cuando Escher completa el borde circular, no dibuja un contorno arbitrario; establece a frontera del universo hiperbólico. De acuerdo con el sistema teórico, el disco de Poincaré es completo, pero no compacto, lo que significa que toda geodésica tiende a un punto en el borde, pero ningún punto del borde pertenece al espacio. Escher produce esa propiedad, los peces se aproximan al borde, pero ninguno lo toca. En conclusión, el sistema teórico explica el fenómeno desde la distancia al borde que es infinita, las figuras que nunca alcanzan el límite y sin embargo, el límite está contenido en la representación.

## CONCLUSIONES

El recorrido teórico y conceptual realizado en este trabajo permitió comprender cómo el razonamiento geométrico ha evolucionado desde los planteamientos de Euclides hasta las formulaciones de las geometrías no euclidianas, transformando la manera en que concebimos el espacio, el tiempo y las relaciones entre ellos. Este tránsito no fue solo un cambio en los postulados matemáticos, sino una revolución epistemológica que amplió los límites del pensamiento científico y también filosófico.

Las geometrías no euclidianas, en este caso la hiperbólica y la elíptica y más específicamente de esta última, la esférica, mostraron que la verdad geométrica no es única, sino depende del sistema teórico adoptado, algo que ya se había contemplado en los cursos de geometría de la carrera. Así, se derrumba la noción de un espacio plano, dando paso a la idea de que el espacio puede curvarse, expandirse o cerrarse según la naturaleza del fenómeno que se estudie. Esta perspectiva resultó esencial para la física moderna, especialmente a la que se trató en este trabajo, La Teoría de la Relatividad general, donde la geometría riemanniana permitió describir la curvatura del espacio-tiempo y la gravedad como una propiedad geométrica del universo.

Desde un punto de vista educativo, esta comprensión invita a los futuros educadores matemáticos a reconocer la geometría como una construcción dinámica y culturalmente situada, en la que el conocimiento no se limite a lo visible o tangible, sino que se amplía mediante la abstracción, la formalización y el cuestionamiento de lo establecido.

Integrar las geometrías no euclidianas en la formación docente contribuye a fortalecer el pensamiento lógico de modelar fenómenos más complejos. Así mismo, las aplicaciones analizadas, como el uso de la geometría elíptica en la relatividad general y la hiperbólica en las obras de M.C. Escher, evidencian que la matemática no solo describe el mundo físico, sino que también inspira la creación artística y el pensamiento estético. En ambas dimensiones, la geometría se revela como un lenguaje universal capaz de conectar la ciencia, el arte, la filosofía y se cree que muchas más áreas contempladas.

En cuanto a similitudes, todas las geometrías comparten un propósito y es describir y comprender las relaciones espaciales bajo un marco lógico y axiomático coherente. Conservan la estructura deductiva de Euclides, la noción de puntos, líneas y planos como objetos fundamentales, y el uso del razonamiento formal para derivar teoremas y propiedades. Sin embargo, sus diferencias surgen a partir del quinto postulado y la

curvatura del espacio. Por ejemplo, en la geometría euclidiana, el espacio es plano y las paralelas nunca se encuentran, al contrario, en la geometría elíptica, el espacio posee curvatura positiva y no existen paralelas, pues todas sus líneas eventualmente se intersecan; y, en la geometría hiperbólica, el espacio tiene curvatura negativa y por un punto exterior a una recta pueden pasar infinitas paralelas.

Estas diferencias se reflejan también en los fenómenos estudiados, la geometría elíptica, por medio del marco pseudorimanniano, permite comprender la curvatura del espacio-tiempo en la teoría de la relatividad general de Einstein, mientras que la geometría hiperbólica posibilita representar la infinitud y simetría en las obras de M.C. Escher, donde el arte visual se convierte en una manifestación estética de la estructura matemática.

Respecto a sus limitaciones, cada geometría es válida dentro de su propio sistema teórico, insuficiente fuera de él. La geometría euclidiana se limita a espacios planos y locales; la elíptica, aunque explica la curvatura del espacio-tiempo, no modela situaciones donde la curvatura es negativa; y la hiperbólica no puede representar adecuadamente fenómenos físicos donde la curvatura es positiva. De esta manera, ninguna geometría por si sola puede explicar la totalidad de los fenómenos del universo, pues cada una constituye una visión parcial y complementario de la realidad espacial.

Desde el ámbito educativo, esta comprensión invita a los futuros educadores matemáticos a concebir la geometría como un campo vivo y de constante transformación, que articula la historia, la abstracción y la creatividad. Integrar la reflexión sobre las distintas geometrías y sus aplicaciones fortalece el pensamiento teórico, promueve el análisis crítico y amplía las posibilidades de interpretación del mundo.

A lo largo de la historia, la geometría ha sido el lenguaje con el que el ser humano ha intentado comprender y representar el mundo. Sin embargo, el desarrollo de las geometrías no euclidianas permitió reconocer que existen dos modos distintos de interpretar la realidad, uno que corresponde a la estructura creada por el ser humano y otro que pertenece a la esencia misma del universo.

La geometría euclidiana surge de la necesidad de ordenar, construir y medir el entorno inmediato. Sus principios basados en la rectitud, la proporción y linealidad, reflejan la

lógica de lo tangible, como las ciudades, los edificios, los caminos y la mayoría de las obras humanas están basadas bajo la noción de un espacio plano, estable y predecible. Euclides ofreció un modelo del mundo racional y controlable, en el que todo puede ser medido y proyectado con exactitud. En este sentido, la geometría euclidiana es el lenguaje de la mayoría de los diseños que realiza el ser humano para habitar el mundo.

En cambio, las geometrías no euclidianas, revelan la naturaleza profunda del universo, una realidad que no responde a líneas rectas ni a espacios planos, sino a curvaturas, deformaciones y continuidades infinitas. La geometría elíptica, empleada por Einstein para describir la curvatura del espacio tiempo, nos muestra que el cosmos no es una estructura rígida, sino una superficie dinámica donde la materia y la energía moldean la forma del espacio. La geometría hiperbólica, por su parte, nos permite comprender sistemas infinitos, estructuras que se expanden sin límite, como la expansión misma del universo o las representaciones simbólicas que Escher llevó al arte.

Así, mientras la geometría euclidiana expresa la razón constructiva del ser humano, su necesidad de fijar límites y formas dentro de finito, las geometrías no euclidianas expresan la razón natural del cosmos, aquella que se manifiesta en la curvatura del espacio, en la trayectoria de la luz o en la expansión del universo. En ellas, el pensamiento humano se reconcilia de cierta forma con la complejidad de la naturaleza, comprendiendo que el orden del mundo no siempre es recto ni constante, sino que se curva, se deforma y se adapta, igual que en la vida misma.

Esta dualidad revela, una verdad para mí, la geometría no es solo ciencia, sino una forma de mirar. Con la geometría euclidiana aprendimos a construir el mundo en el que habitamos; con las geometrías no euclidianas comenzamos a entender la naturaleza propia del universo en el que habitamos.

El estudio de las geometrías, desde la euclidiana hasta las no euclidianas, revela mucho más que una evolución matemática, constituye una metamorfosis en la forma en la del ser humano concibe el mundo, la naturaleza de este y su propio pensamiento. A través del desarrollo de la geometría, la humanidad ha transitado de la búsqueda de la certeza y el orden a la aceptación de la curvatura, la relatividad y la multiplicidad como principios de base del universo.

Así, la geometría deja de ser únicamente un conjunto de figuras y relaciones para convertirse en una forma de pensar la realidad. En ella convergen el rigor lógico y la intuición estética, la razón y la imaginación. La geometría euclidiana nos enseñó a medir el mundo; las no euclidianas nos enseñaron a comprender el universo. Entre ambas, el pensamiento humano encontró su reflejo, la certeza del trazo y la curvatura de la duda.

## REFERENCIAS

- Boyer, C. B. (1991). *Historia de la matemática* (2.<sup>a</sup> ed., rev. por Uta C. Merzbach; trad. M. Barallat). Alianza Editorial.
- Wikimedia Commons. (s.f.). *Saccheri quads.svg* [Imagen SVG]. Recuperado el 11 de mayo de 2025, de [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Saccheri\\_quads.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Saccheri_quads.svg)
- Einstein, A. (2020). *Sobre la teoría de la relatividad especial y general* (traducción de José Comas y Solá). Libro electrónico recuperado de PDF original (obra original publicada en 1917).
- Hawking, S. (1988). *Historia del tiempo: del Big Bang a los agujeros negros* (Ed. Crítica).
- Sánchez Morgado, H., & Palmas Velasco, O. A. (2007). *Geometría riemanniana*. Universidad Nacional Autónoma de México.  
<https://www.libros.unam.mx/digital/V8/37.pdf>
- Morris, S. A. (2012). *Topología sin lágrimas* (G. Pineda-Villavicencio, Trad.). Recuperado de <https://www.topologywithouttears.net/topbookspanish.pdf>
- Carroll, S. (2019). *Spacetime and geometry: An introduction to general relativity*. Cambridge University Press.
- Misner, C. W., Thorne, K. S., & Wheeler, J. A. (1973). *Gravitation*. W. H. Freeman.
- Wald, R. M. (1984). *General relativity*. University of Chicago Press.
- Coxeter, H. S. M. (1969). *Introduction to geometry* (2nd ed.). New York: John Wiley & Sons. Disponible en:  
[https://www.cimat.mx/~gil/docencia/2021/geometria2021/\[Coxeter\]Introduction%20to%20Geometry,2ndEd\(1969\).pdf](https://www.cimat.mx/~gil/docencia/2021/geometria2021/[Coxeter]Introduction%20to%20Geometry,2ndEd(1969).pdf)
- García Gómez, Á. (2022). *Geometrías no euclidianas: geometría absoluta y geometría hiperbólica en el plano* [Trabajo de Fin de Grado, Universidad Complutense de Madrid]. Repositorio institucional de la Universidad Complutense.  
Archivo consultado: /mnt/data/GarciaGomezAlvaro-TFG-Matematicas.pdf
- Loustau, B. (2021). *Hyperbolic geometry*. Rennes: Université de Rennes.  
Disponible en: <https://brice.loustau.eu/ressources/book.pdf>
- Melo, R. (s.f.). *Las obras de Escher y la geometría hiperbólica*. *Ingeciencia Journal*, artículo de divulgación. Archivo consultado:  
/mnt/data/admin,+Journal+manager,+312-1110-1-CE.pdf
- Martzlöff, J.-C. (1997). *A History of Chinese Mathematics* (S. S. Wilson, Trad.). Springer
- Jaime, A., & Gutiérrez, A. (2016). *El razonamiento geométrico según el modelo de Van Hiele*. En J. Carrillo et al. (Eds.), *Didáctica de las matemáticas para maestros de Educación Primaria* (pp. 173-195). Madrid: Paraninfo. [ResearchGate](#)
- Gutiérrez Hoyos, H. (1999). *Formalismo, abstracción, rigor y dificultad en la matemática*. *Paideia Surcolombiana*, (7), 73–76.
- Rojas Gómez, J. T. (2017). *El pensamiento lógico-abstracto como sustento para potenciar los procesos cognitivos en la educación*. *Sophia — Revista Ciencias*, 1(1), 45-60.  
<https://revistas.ups.edu.ec/index.php/sophia/article/view/21.2016.01/1773>

Hilbert, D. (1971). *Fundamentos de la geometría* (trad. al esp.). Consejo Superior de Investigaciones Científicas.